

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ  
И ОБРАЗОВАНИЯ

---



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
**«ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
АГРОИНЖЕНЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

---

Кафедра сопротивления материалов

Утверждаю.  
Проректор по УР  
А.Патрушев

## **ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В УПРУГИХ СИСТЕМАХ**

**в программных продуктах  
MathCAD, SCAD и MSC.Patran-Nastran-2005**

Методические указания

Челябинск 2008

Методические указания предназначены для студентов 2-го курса специальности **190206 - «Сельскохозяйственные машины и оборудование»** направления **190200 - «Транспортные машины и транспортно-технологические комплексы»** изучающих курс «Сопротивление материалов».

На примере программ **MathCAD, SCAD и MSC.Patran-Nastran-2005** реализуется идея использования уже на младших курсах на факультетах сельскохозяйственного машиностроения современных проектно-вычислительных комплексов, применяемых в инженерной практике для расчетов и проектирования строительных и машиностроительных конструкций. Приведена инструкция по использованию программ при решении задач прочности пространственного бруса при сложном сопротивлении.

Методические указания могут быть полезны студентам всех курсов специальности 190206 «Сельскохозяйственные машины и оборудование», аспирантам и инженерно-техническим работникам АПК.

Составитель

**Жилкин В.А.** - докт. техн. наук, профессор (ЧГАУ)

Рецензенты

*Сапожников С.Б.* - докт. техн. наук, проф. (ЮУрГУ)

*Рахимов Р.С.* - докт. техн. наук, проф. (ЧГАУ)

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЧГАУ

© ФГОУ ВПО "Челябинский государственный агроинженерный университет", 2008.

# ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ В УПРУГИХ СИСТЕМАХ

## 1. СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

Дано:

- 1) схемы балок и плоской рамы;
- 2) длины участков;
- 3) материал участков упругих систем (Ст. 3;  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ).
- 4) загрузки участка упругих систем.

Требуется:

1. Построить необходимые для расчетов на прочность и жесткость брусьев упругих систем эпюры внутренних силовых факторов (табл.1, 2, 3).
2. Определить опасное сечение.
3. Подобрать размеры поперечных сечений бруса из условия прочности на изгиб
  - таблицы 1, 3 – кольцевое поперечное сечение с внешним  $D$  и внутренним  $d$  диаметрами ( $d / D = 0.8$ );
  - таблица 2 – подобрать номер двутавра.
4. Определить прогиб и угол поворота сечения упругой системы методами:
  - аналитическим;
  - Верещагина;
  - Симпсона;
  - матричным,в точке приложения сосредоточенной силы (таблица 1);  
в шарнире и на свободном конце консоли (таблица 2);  
в сечении, обозначенном точкой  $A$  (таблица 3).

Примечание

*Вычисления выполнить в системах **MathCAD**, **SCAD** и **MSC.Patran**. Результаты решения, полученные в системах **SCAD** и **MSC.Patran**, использовать как контрольные для проверки правильности решения задачи в системе **MathCAD**.*

*Все расчетные схемы выполнить в масштабе в одном из доступных графических редакторов.*

# Варианты заданий

Таблица 1

<p>1</p> <p><math>P=2 \text{ кН}</math>   <math>M=10 \text{ кНм}</math>   <math>q=24 \text{ кН/м}</math></p>	<p>2</p> <p><math>P=10 \text{ кН}</math>   <math>M=30 \text{ кНм}</math>   <math>q=32 \text{ кН/м}</math></p>
<p>3</p> <p><math>P=11 \text{ кН}</math>   <math>M=30 \text{ кНм}</math>   <math>q=32 \text{ кН/м}</math></p>	<p>4</p> <p><math>P=1 \text{ кН}</math>   <math>M=20 \text{ кНм}</math>   <math>q=12 \text{ кН/м}</math></p>
<p>5</p> <p><math>P=12 \text{ кН}</math>   <math>M=20 \text{ кНм}</math>   <math>q=12 \text{ кН/м}</math></p>	<p>6</p> <p><math>P=10 \text{ кН}</math>   <math>M=23 \text{ кНм}</math>   <math>q=20 \text{ кН/м}</math></p>
<p>7</p> <p><math>P=1 \text{ кН}</math>   <math>M=30 \text{ кНм}</math>   <math>q=32 \text{ кН/м}</math></p>	<p>8</p> <p><math>P=4 \text{ кН}</math>   <math>M=30 \text{ кНм}</math>   <math>q=8 \text{ кН/м}</math></p>
<p>9</p> <p><math>P=9 \text{ кН}</math>   <math>M=20 \text{ кНм}</math>   <math>q=12 \text{ кН/м}</math></p>	<p>10</p> <p><math>P=18 \text{ кН}</math>   <math>M=30 \text{ кНм}</math>   <math>q=8 \text{ кН/м}</math></p>
<p>11</p> <p><math>P=15 \text{ кН}</math>   <math>M=30 \text{ кНм}</math>   <math>q=32 \text{ кН/м}</math></p>	<p>12</p> <p><math>P=1 \text{ кН}</math>   <math>M=10 \text{ кНм}</math>   <math>q=16 \text{ кН/м}</math></p>
<p>13</p> <p><math>P=10 \text{ кН}</math>   <math>M=40 \text{ кНм}</math>   <math>q=36 \text{ кН/м}</math></p>	<p>14</p> <p><math>P=3 \text{ кН}</math>   <math>M=50 \text{ кНм}</math>   <math>q=40 \text{ кН/м}</math></p>
<p>15</p> <p><math>P=3 \text{ кН}</math>   <math>M=50 \text{ кНм}</math>   <math>q=40 \text{ кН/м}</math></p>	<p>16</p> <p><math>P=15 \text{ кН}</math>   <math>M=40 \text{ кНм}</math>   <math>q=4 \text{ кН/м}</math></p>

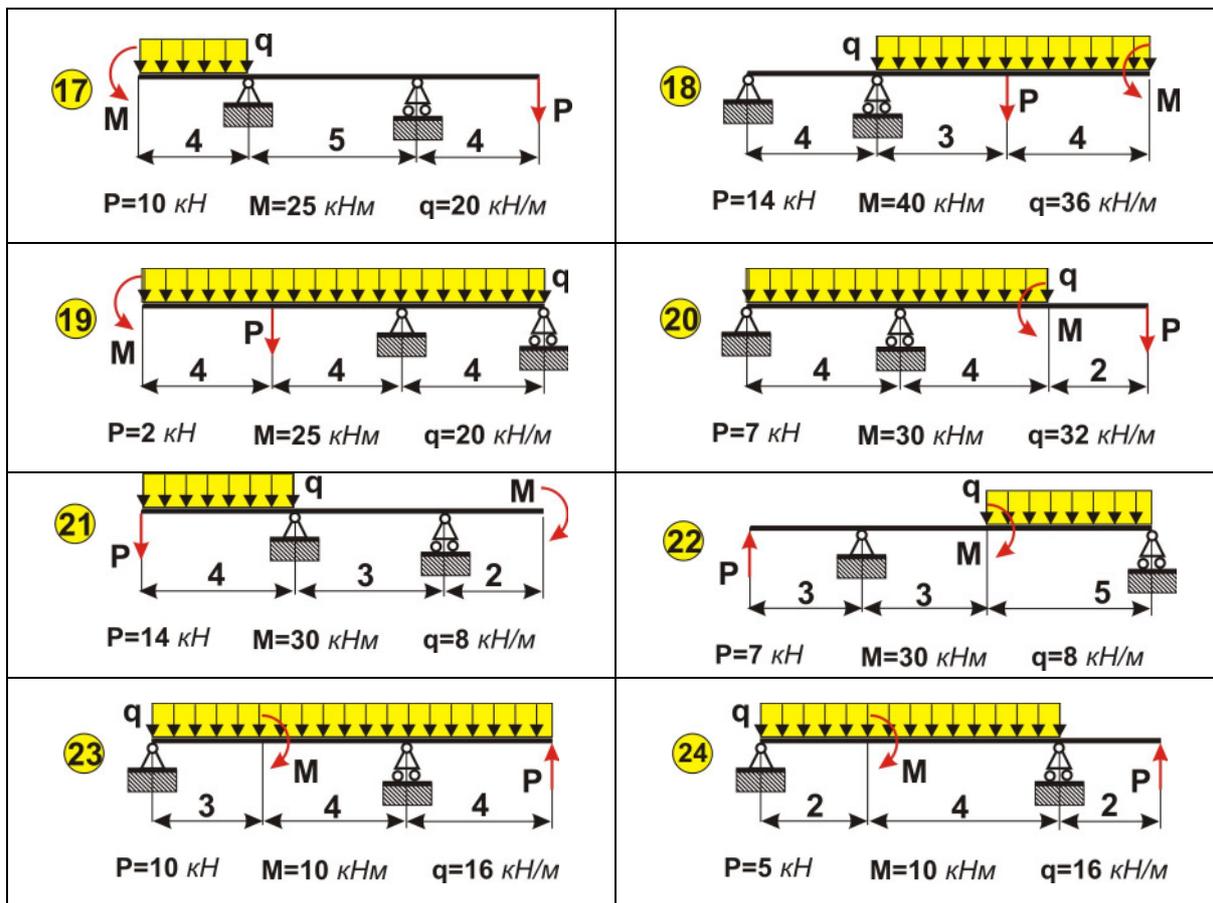
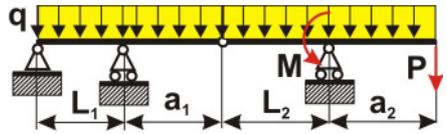
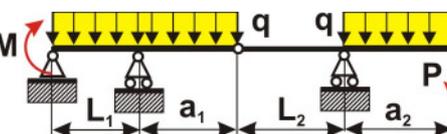
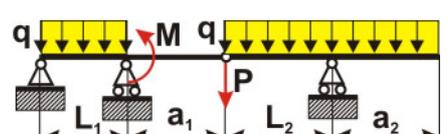
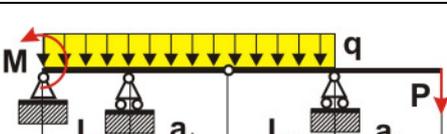
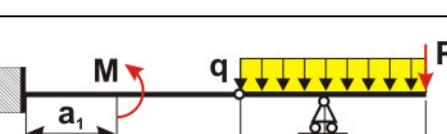
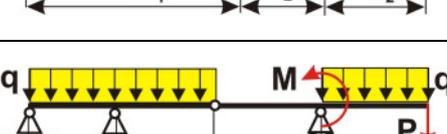


Таблица 2

№ п/п	Схема	Вариант	Размеры, м				Нагрузки		
			$L_1$	$L_2$	$a_1$	$a_2$	$P$	$q$	$M$
							$т$	$т/м$	$т/м$
1		a	3	5	1	1	10	4	16
		б	4	4	3	1	8	2	10
		в	3	5	1	1	5	2	8
2		a	4	4	2	2	2	4	8
		б	3	4	1	1	3	2	10
		в	4	4	2	2	1	2	4
3		a	4	2	1	1	10	1	8
		б	3	5	3	2	10	2	12
		в	5	6	1	2	6	2	4
4		a	4	5	1	3	4	2	14
		б	4	3	1	1	3	2	10
		в	4	4	1	1	4	2	10
5		a	4	3	1	2	1	2	6

№ п/п	Схема	Вариант	Размеры, м				Нагрузки		
			$L_1$	$L_2$	$a_1$	$a_2$	$P$	$q$	$M$
							$m$	$m/m$	$m/m$
		б	4	5	1	2	1	10	
		в	5	4	2	2	3	2	12
6		а	5	3	1	2	4	8	
		б	6	3	1	1	4	2	6
		в	4	3	1	1	2	4	8
7		а	6	3	1	1	2	4	10
		б	5	4	1	1	24	1	8
		в	4	3	1	2	4	2	8
8		а	4	3	1	1	8	4	9
		б	4	5	2	1	2	1	8
		в	4	3	1	1	2	4	2
9		а	2	3	1	2	2	1	6
		б	3	4	1	2	5	2	10
		в	2	4	1	2	12	2	24
10		а	6	4	2	2	1	2	6
		б	4	3	2	1	2	4	8
		в	3	2	1	1	4	2	4

<p>1</p> <p><math>P=25 \text{ кН}</math> <math>M=20 \text{ кНм}</math></p>	<p>2</p> <p><math>M=10 \text{ кНм}</math> <math>q=12 \text{ кН/м}</math></p>	<p>3</p> <p><math>M=30 \text{ кНм}</math> <math>q=15 \text{ кН/м}</math></p>
<p>4</p> <p><math>P=35 \text{ кН}</math> <math>q=4 \text{ кН/м}</math></p>	<p>5</p> <p><math>P=40 \text{ кН}</math> <math>M=40 \text{ кНм}</math></p>	<p>6</p> <p><math>M=25 \text{ кНм}</math> <math>q=7 \text{ кН/м}</math></p>
<p>7</p> <p><math>P=45 \text{ кН}</math> <math>M=30 \text{ кНм}</math></p>	<p>8</p> <p><math>P=15 \text{ кН}</math> <math>M=20 \text{ кНм}</math></p>	<p>9</p> <p><math>P=50 \text{ кН}</math> <math>q=15 \text{ кН/м}</math></p>

Таблица 3 (продолжение)

<p>10</p> <p><math>P=14 \text{ кН}</math>   <math>M=24 \text{ кНм}</math></p>	<p>11</p> <p><math>M=40 \text{ кНм}</math>   <math>q=20 \text{ кН/м}</math></p>	<p>12</p> <p><math>P=40 \text{ кН}</math>   <math>M=250 \text{ кНм}</math></p>
<p>13</p> <p><math>P=25 \text{ кН}</math>   <math>q=9 \text{ кН/м}</math></p>	<p>14</p> <p><math>P=35 \text{ кН}</math>   <math>M=40 \text{ кНм}</math></p>	<p>15</p> <p><math>P=45 \text{ кН}</math>   <math>M=40 \text{ кНм}</math></p>
<p>16</p> <p><math>M=35 \text{ кНм}</math>   <math>q=25 \text{ кН/м}</math></p>	<p>17</p> <p><math>M=45 \text{ кНм}</math>   <math>q=15 \text{ кН/м}</math></p>	<p>18</p> <p><math>P=30 \text{ кН}</math>   <math>q=5 \text{ кН/м}</math></p>

Таблица 3 (продолжение)

<p>19</p> <p><math>P=25 \text{ кН}</math> <math>M=30 \text{ кНм}</math></p>	<p>20</p> <p><math>P=15 \text{ кН}</math> <math>q=12 \text{ кН/м}</math></p>	<p>21</p> <p><math>P=40 \text{ кН}</math> <math>M=40 \text{ кНм}</math></p>
<p>22</p> <p><math>M=15 \text{ кНм}</math> <math>q=25 \text{ кН/м}</math></p>	<p>23</p> <p><math>P=30 \text{ кН}</math> <math>M=30 \text{ кНм}</math></p>	<p>24</p> <p><math>P=44 \text{ кН}</math> <math>M=34 \text{ кНм}</math></p>
<p>25</p> <p><math>M=25 \text{ кНм}</math> <math>q=15 \text{ кН/м}</math></p>	<p>26</p> <p><math>M=20 \text{ кНм}</math> <math>q=20 \text{ кН/м}</math></p>	<p>27</p> <p><math>P=40 \text{ кН}</math> <math>q=10 \text{ кН/м}</math></p>

## 2. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

### 2.1. ФОРМУЛА МАКСВЕЛЛА-МОРА<sup>1</sup>

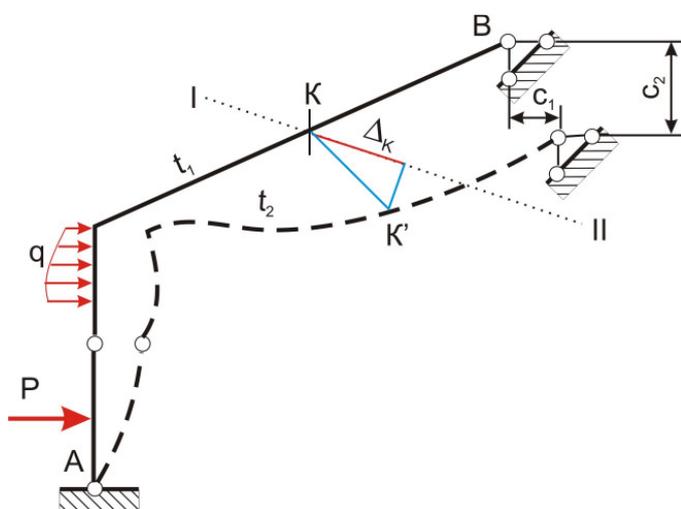


Рис.1

Метод Максвелла-Мора представляет собой универсальный способ для определения линейных и угловых перемещений в любых плоских и пространственных системах, состоящих из шарнирно или жестко соединенных прямых или кривых брусьев малой кривизны<sup>2</sup>.

Для практического применения формулы Максвелла-Мора при вычислении перемещений необходимо уметь вычислять интегралы от произведения двух функций.

Если на упругую статически определимую систему действуют внешние силы  $P$ , тепловое воздействие (температура стержней изменилась на величину  $t_i$  по сравнению с начальной) и еще задано смещение  $c$  каких-либо связей (рис.1), то перемещение произвольной точки  $K$  по заданному направлению  $I-II$  может быть вычислено по универсальной формуле, которая называется формулой Максвелла-Мора (иногда просто интегралом Мора) и записывается следующим образом:

$$\Delta_{KP} = \sum \int \frac{\bar{M}_K M_P}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_K N_P}{EF} ds + \sum \int \beta \frac{\bar{Q}_K Q_P}{GF} ds + \sum \int \alpha t \bar{N}_K ds + \sum \int \alpha \bar{M}_K \frac{\Delta t}{d} ds - \sum \bar{R}_K c \quad (1)$$

Здесь  $\Delta_{KP}$  - искомое перемещение (линейное или угловое). Первый индекс  $K$  указывает точку и направление, в котором определяется перемещение, а второй индекс - причину, вызывающую это перемещение. Индекс  $P$  означает, что определяется перемещение от заданных нагрузок. Первые три слагаемые в этой формуле представляют перемещение от действия внешней нагрузки  $P$ . При этом первым слагаемым учитывается влияние изгибающих моментов, вторым и третьим слагаемыми - влияние соответственно продольных и поперечных сил. Четвертый и пятый члены формулы соответствуют перемещениям от изменения температуры  $t$  (четвертый - от действия равномерного нагрева всех волокон на величину  $t$ , пятый - от неравномерного нагрева или разности температур  $\Delta t = t_1 - t_2$ ). Наконец, последний член представляет перемещение от заданного смещения связей  $c$ .

В формуле (1) обозначено:  $\bar{M}_K$ ,  $\bar{Q}_K$ ,  $\bar{N}_K$ ,  $\bar{R}_K$  - соответственно эпюры моментов, поперечных и продольных сил и реакции в смещаемых связях от действия единичной силы  $P_K = 1$  или единичного момента  $M_K = 1$ , приложенных в точке  $K$ , пере-

<sup>1</sup> Ицкович Г.М., Винокуров А.И., Минин Л.С. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов. - М.: Высш. шк., 1970. - 540 с.; Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем) /Г. К. Клейн, Н. Н. Леонтьев, М. Г. Ванюшенков и др. - М.: Высш. шк., 1980. - 384 с.

<sup>2</sup> Брусьями малой кривизны при вычислении перемещений считают такие, для которых отношение радиуса кривизны ( $\rho$ ) их оси к высоте ( $h$ ) поперечного сечения не менее двух ( $\rho/h \geq 2$ ).

мещение которой ищется по направлению единичных силовых факторов;  $M_p$ ,  $Q_p$ ,  $N_p$  - эпюры моментов, поперечных и продольных сил от действия заданной нагрузки;  $EJ$ ,  $EF$ ,  $GF$  - жесткости соответственно при изгибе, растяжении - сжатии и сдвиге;  $\beta$  - коэффициент, зависящий от формы поперечного сечения элемента и отражающий неравномерность распределения касательных напряжений по поперечному сечению, например, для прямоугольника  $\beta = 1,2$ , для круга  $\beta = 10/9$ ;  $d$  - высота поперечного сечения элемента;  $\alpha$  - коэффициент теплового линейного расширения материала;  $t$  - температура нейтрального волокна, равная  $(t_1 + t_2)/2$  для стержня, центр тяжести поперечного сечения которого находится посередине высоты сечения;  $\Delta t = t_1 - t_2$  - разность температур;  $t_1$ ,  $t_2$  - приращение температур крайних волокон стержня.

Знаки суммы в формуле (1) указывают на то обстоятельство, что в общем случае, когда уравнения «грузового»  $M_p$ ,  $Q_p$ ,  $N_p$  и «единичного»  $\bar{M}_K$ ,  $\bar{Q}_K$ ,  $\bar{N}_K$  состояний для отдельных участков системы различны, интегралы вычисляются по участкам и результаты суммируются.

В этой формуле подынтегральное произведение  $\bar{M}_K M_p$  для элемента  $ds$  положительно, если оба момента изгибают этот элемент в одну сторону, то есть если эпюры  $\bar{M}_K$  и  $M_p$  расположены по одну сторону от оси (напомним, что эпюры изгибающих моментов строятся на сжатых волокнах). Произведения  $\bar{Q}_K Q_p$  и  $\bar{N}_K N_p$  положительны, если усилия имеют одинаковый знак. Произведение  $\bar{M}_K \Delta t$  положительно, если момент  $\bar{M}_K$  и тепловое воздействие  $\Delta t$  искривляют элемент в одном направлении (эпюра моментов  $\bar{M}_K$  расположена со стороны более нагретых волокон). Произведение  $\bar{N}_K t$  положительно, если нормальная сила и температура нейтрального волокна  $t$  одного знака; произведение  $\bar{R}_K c$  положительно, если реакция  $\bar{R}_K$  от единичного силового фактора направлена в сторону заданного смещения связи  $c$ .

Для вычисления перемещений по формуле Максвелла-Мора вначале нужно построить грузовые эпюры внутренних усилий  $M_p$ ,  $Q_p$ ,  $N_p$ , затем в точке, перемещение которой ищется, приложить единичный силовой фактор по направлению искомого перемещения и от его действия вычислить реакции  $R_K$  в связях, перемещение  $c$  которых задано, и построить единичные эпюры  $\bar{M}_K$ ,  $\bar{Q}_K$ ,  $\bar{N}_K$ . Наконец, вычислить соответствующие интегралы и суммы произведений. Если перемещение, вычисленное по формуле (1) положительно, то точка перемещается в сторону действия приложенного единичного силового фактора, если перемещение отрицательно, то точка перемещается в обратную сторону.

В качестве единичных силовых факторов прикладываются при вычислении:

- **линейного перемещения точки** сосредоточенная единичная сила  $\bar{P} = 1$  в направлении искомого перемещения;
- **угла поворота** сосредоточенный единичный момент  $\bar{m} = 1$ ;
- **взаимного линейного перемещения двух точек** (изменения расстояния между ними) две сосредоточенные самоуравновешенные единичные силы  $\bar{P} = 1$  по прямой, соединяющей данные точки;
- **взаимного угла поворота двух сечений** два сосредоточенных самоуравновешенных единичных момента  $\bar{m} = 1$  в обоих сечениях.

При вычислении перемещений в пространственных стержневых системах в формулу (1) нужно добавить члены, содержащие изгибающие моменты и поперечные силы, которые действуют во второй плоскости изгиба, а также крутящие моменты.

Если перемещения вычисляются только от силового внешнего воздействия, то формула Максвелла-Мора принимает вид

$$\begin{aligned} \Delta_{KP} = & \sum \int \frac{\bar{M}_{x1} M_{xP}}{EI_x} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_{y1} M_{yP}}{EJ_y} ds + \sum \int \frac{\bar{M}_{z1} M_{zP}}{EJ_z} ds + \\ & + \sum \int \frac{\bar{N}_{z1} N_{zP}}{EF} ds + \sum \int \beta_x \frac{\bar{Q}_{x1} Q_{xP}}{GF} ds + \sum \int \beta_y \frac{\bar{Q}_{y1} Q_{yP}}{GF} ds, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $M_{xP}$ ,  $Q_{xP}$ ,  $N_{xP}$  и т. д. - аналитические выражения внутренних силовых факторов от заданной нагрузки;  $M_{x1}$ ,  $Q_{x1}$ ,  $N_{x1}$  и т. д. - аналитические выражения внутренних силовых факторов от единичной силы (момента).

В большинстве случаев можно ограничиваться первыми тремя членами формулы (2), пренебрегая влиянием продольной и поперечных сил.

Как правило, перемещения от различных воздействий определяются отдельно. Поэтому рассмотрим далее отдельные виды внешних воздействий.

### 2.1.1. Перемещения от внешнего силового воздействия

В формуле (1) следует оставить только первые три слагаемые:

$$\Delta_{KP} = \sum \int \frac{\bar{M}_K M_P}{EI} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_K N_P}{EF} ds + \sum \int \beta \frac{\bar{Q}_K Q_P}{GF} ds. \quad (3)$$

Для вычисления перемещений по формуле (3) необходимо:

- А.** Определить аналитические выражения внутренних усилий  $M_P$ ,  $Q_P$ ,  $N_P$  от действия заданной внешней нагрузки и построить при необходимости их эпюры.
- В.** Определить аналитические выражения внутренних усилий  $\bar{M}_K$ ,  $\bar{Q}_K$ ,  $\bar{N}_K$  от единичного силового фактора и при необходимости построить их эпюры.
- С.** Вычислить интегралы в формуле (3) одним из приведённых ниже способов.

Таким образом, при определении перемещений рассматриваются два напряжённо-деформированных состояния:

- действительное от заданной нагрузки;
- вспомогательное от единичного силового фактора.

В большинстве случаев для определения перемещений от силового воздействия вместо формулы (3) используются упрощённые формулы, которые получаются из (3) путём отбрасывания членов, незначительно влияющих на конечный результат. Эти формулы имеют следующий вид:

– для балок и рам

$$\Delta_{KP} = \sum \int \frac{\bar{M}_K M_P}{EI} ds; \quad (4)$$

– для идеальных шарнирных ферм

$$\Delta_{KP} = \sum \frac{\bar{N}_{Ki} N_{Pi}}{(EF)_i} L_i; \quad (5)$$

– для комбинированных систем

$$\Delta_{KP} = \sum_i \int_0^{L_i} \frac{\bar{M}_{Ki} M_{Pi}}{(EI)_i} ds + \sum_i \frac{\bar{N}_{Ki} N_{Pi}}{(EF)_i} L_i. \quad (6)$$

Комбинированной системой называют такую, в которой имеются элементы, работающие преимущественно на изгиб (балка), и элементы, работающие преимущественно на растяжение-сжатие (стержни, соединённые шарнирами) (рис.2).

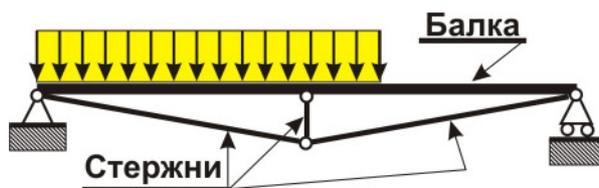


Рис.2

### 2.1.2. Перемещения от изменения температуры

Перемещения в упругих плоских статически определимых стержневых системах определяются по формуле

$$\Delta_{Kt} = \sum \int \alpha t_0 \bar{N}_K ds + \sum \int \alpha \bar{M}_K \frac{\Delta t}{d} ds, \quad (7)$$

где  $t_0$  – температура на оси стержня;  $\Delta t = t_1 - t_2$  – изменение температуры по толщине стержня.

Первый член формулы соответствует перемещению от действия равномерного нагрева по толщине стержня на величину  $t_0$ , второй – перемещение от неравномерного нагрева на разность температур  $\Delta t = t_1 - t_2$ , где  $t_1$  и  $t_2$  – температура на поверхности стержня. При вычислении перемещения  $\Delta_{Kt}$  интегрирование распространяется только на те элементы системы, температурный режим которых изменяется.

Для случая прямолинейных и ломаных стержней постоянного сечения интегралы могут быть подсчитаны как площади единичных эпюр  $\bar{M}_K$ ,  $\bar{N}_K$ , и формула (7) примет простой вид:

$$\Delta_{Kt} = \sum \alpha t_0 \Omega_{\bar{N}_K} + \sum \alpha \frac{\Delta t}{d} \Omega_{\bar{M}_K}, \quad (8)$$

где  $\Omega_{\bar{N}_K}$ ,  $\Omega_{\bar{M}_K}$  – площади единичных эпюр  $\bar{N}_K$ ,  $\bar{M}_K$ .

Знак первого слагаемого формулы (8) получается «автоматически», если площадь эпюры  $\Omega_{\bar{N}_K}$  брать со знаком соответствующей эпюры  $\bar{N}_K$ , а за знак температурного слагаемого принимать тот, который получается при расчёте. Для второго слагаемого формулы (8) принимается знак (+) плюс, если положение растянутых волокон от температуры и изгиба, вызванного единичным силовым фактором, совпадает.

Величина  $\Delta t$  принимается по абсолютному значению, т.е.  $\Delta t = |t_1 - t_2|$ .

*Порядок определения перемещения по формуле (8):*

- прикладывается единичная сила или единичный момент в точке, в которой ищется перемещение;
- строятся эпюры  $\bar{M}_K$ ,  $\bar{N}_K$  от единичной нагрузки;
- по эпюрам  $\bar{M}_K$ ,  $\bar{N}_K$  определяются площади  $\Omega_{\bar{M}_K}$ ,  $\Omega_{\bar{N}_K}$ ;
- вычисляются величины  $\Delta t$ ,  $t_0$ ;
- по формуле (8) определяется перемещение, при этом соблюдаются указанные выше правила знаков.

### 2.1.3. Перемещения от смещения опор

Перемещение от смещения опорных связей определяется по формуле

$$\Delta_{Kc} = - \sum_i \bar{R}_{Ki} \Delta_i, \quad (9)$$

где  $\bar{R}_{Ki}$  – реакция  $i$ -й связи от действия единичного силового фактора, приложенного в точке  $K$ , в которой ищется перемещение;  $\Delta_i$  – заданное перемещение  $i$ -й связи.

Для определения перемещений по формуле (9) нужно рассмотреть два состояния системы:

- действительное, в которой заданы смещения опорных связей (рис.3,а);
- вспомогательное от действия единичной обобщённой силы, приложенной в точке  $K$  (рис.3,б).

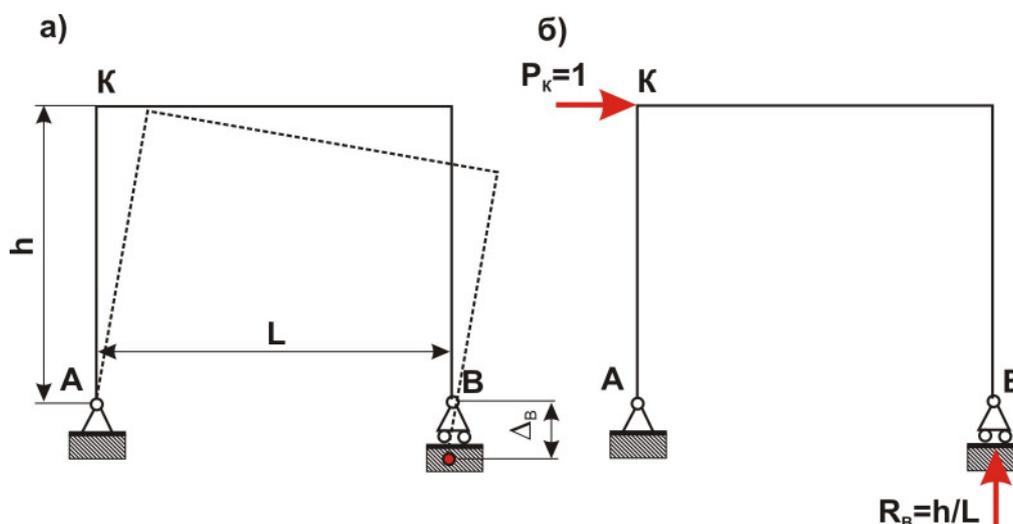


Рис.3

Далее необходимо:

- а) для вспомогательного состояния определить реакции тех связей  $\bar{R}_i$ , смещение которых задано в действительном состоянии;
- б) составить сумму работ с обратным знаком реакций  $\bar{R}_i$  вспомогательного состояния на соответствующих смещениях  $\Delta_i$  действительного состояния.

Знак произведения  $\bar{R}_i \cdot \Delta_i$  принимается положительным, если направление реакции  $\bar{R}_i$  и перемещения  $\Delta_i$  совпадают. При этом нужно помнить, что силы  $\bar{R}_i$  умножаются на соответствующие линейные перемещения, а моменты  $\bar{M}_i$  - на углы поворота.

Горизонтальное перемещение точки  $K$  для рамы, показанной на рис.4:

$$\Delta_{Kc} = -(-\bar{R}_B \cdot \Delta_B) = \frac{h}{L} \Delta_B.$$

## 2.2. МЕТОДЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ИНТЕГРАЛОВ В ФОРМУЛАХ МАКСВЕЛЛА-МОРА

### 2.2.1. Аналитический метод

В этом случае находятся аналитические выражения внутренних сил в действительном и вспомогательном состоянии, а затем аналитически, если это возможно, или с помощью системы **MathCAD** вычисляются интегралы.

При непосредственном (аналитическом) вычислении интегралов Максвелла-Мора протяженность каждого участка при постоянной жесткости сечения  $EJ$  определяется областью, в пределах которой закон изменения как «грузового», так и «единичного» моментов остается постоянным.

*Пример.*

Требуется определить вертикальное перемещение в точке  $K$  для балки, показанной на рис.4, а ( $L = 6$  м,  $q = 2$  кН/м).

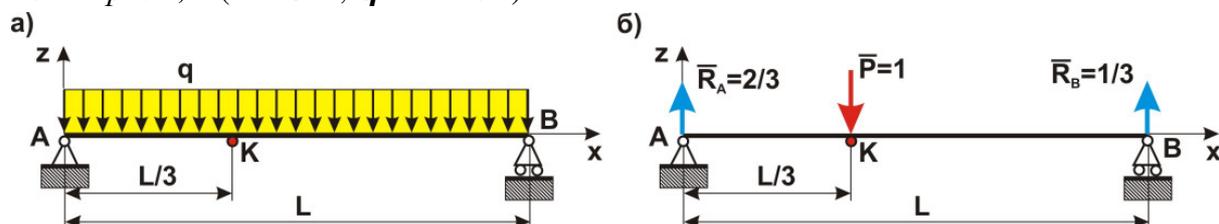


Рис.4

Для определения вертикального перемещения точки  $K$  прикладываем единичную силу  $\bar{P} = 1$  и используем формулу (4) (рис.4, б). Так как в данном случае имеем два участка интегрирования, то

$$\Delta_{KP} = \int_0^{L/3} \frac{M_P \bar{M}_K}{EJ} dx + \int_{L/3}^L \frac{M_P \bar{M}_K}{EJ} dx$$

Определяем аналитические выражения усилий  $M_P$ ,  $\bar{M}_K$  :  
на участке  $AK$

$$M_P(x) = \frac{qL}{2}x - \frac{qx^2}{2} = Lx - x^2;$$

$$\bar{M}_K(x) = \bar{R}_A x = \frac{2}{3}x.$$

на участке  $KB$

$$M_P(x) = 6x - x^2;$$

$$\bar{M}_K(x) = \bar{R}_A x - 1 \cdot \left(x - \frac{L}{3}\right) = \frac{L-x}{3}.$$

Используя символьный процессор **MathCAD**, получим:

$$\frac{1}{EJ} \left[ \int_0^{L/3} \frac{(6x - x^2) \cdot 2x}{3} dx + \int_{L/3}^L \frac{(6x - x^2) \cdot (L-x)}{3} dx \right] \rightarrow \frac{88}{3 \cdot EJ}$$

К недостаткам этого метода следует отнести:

- значительную трудоёмкость по сравнению с другими методами;
- ограниченную возможность вычисления интегралов в явном виде.

К его достоинству следует отнести точность вычислений.

## 2.2.2. Метод Верещагина

Способ перемножения эпюр предложен в 1925 г. студентом Московского института инженеров железнодорожного транспорта А. К. Верещагиным, а потому он называется методом (или способом) Верещагина.

При применении метода Верещагина участком интегрирования является часть балки (элемента рамы), в пределах которой хотя бы одна из эпюр изменяется по монотонному линейному закону и  $EJ_K = \text{const}$ . Практически всегда есть возможность

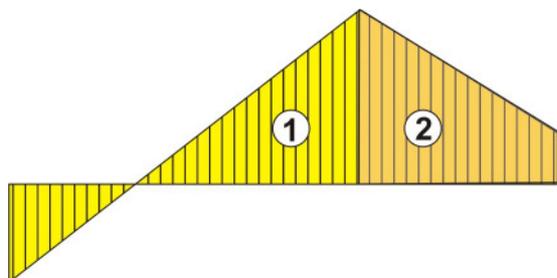


Рис.5

разбить прямой брус на такие участки, в пределах каждого из которых одна из эпюр (чаще «единичная») линейна. Линейность эпюры должна пониматься в строго математическом смысле. В частности, эпюра, состоящая из двух прямолинейных отрезков («ломаная» эпюра), должна рассматриваться как состоящая из двух отдельных линейных эпюр (рис.5).

В этом случае можно пользоваться формулой А. Н. Верещагина

$$\Delta_{KP} = \int_0^{L_K} \frac{M_P \bar{M}_K}{EJ} dx = \frac{\Omega_K u_{C_K}}{(EJ)_K},$$

которая формулируется следующим образом:

*определенный интеграл от произведения двух эпюр, одна из которых прямолинейна, равен произведению площади криволинейной эпюры  $\Omega$  на ординату  $u_C$ , вычисленную в прямолинейной эпюре под центром тяжести (ц. т.) криволинейной (рис.7).*

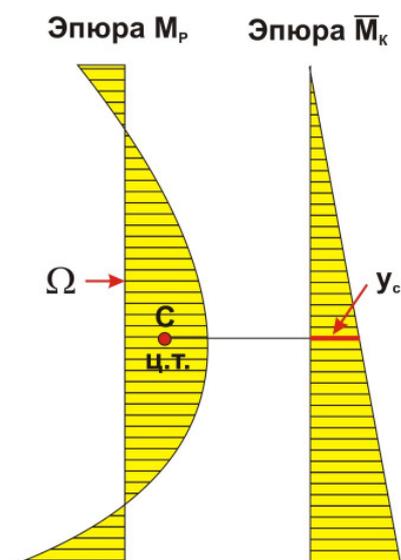


Рис.6

Здесь  $\Omega_K$  – площадь произвольной или ломаной эпюры  $M_P$ ;  $u_{C_K}$  – ордината линейной эпюры  $\bar{M}_K$  под центром тяжести эпюры  $M_P$  (рис.6).

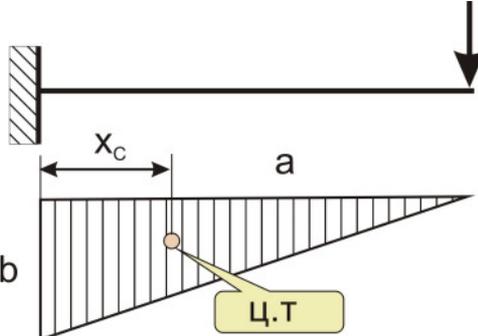
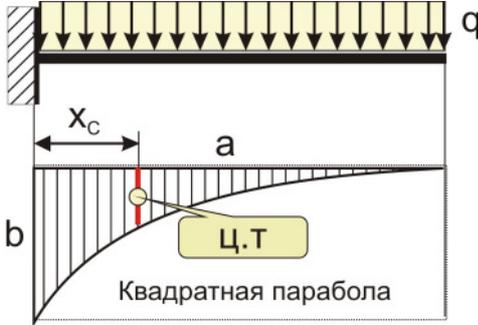
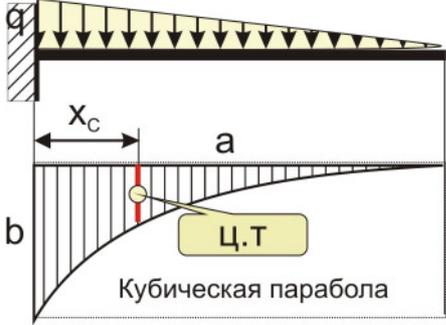
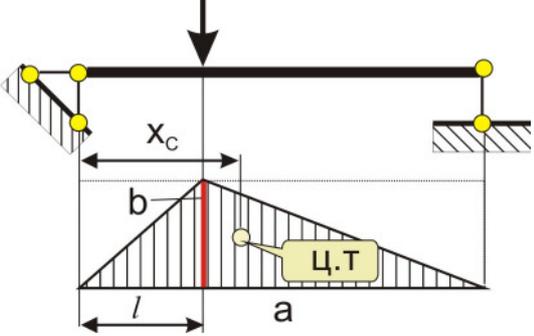
Очень важно отметить, что ордината  $u_{C_K}$  должна быть взята обязательно из прямолинейной эпюры. Если обе эпюры прямолинейны, то ординату можно взять из любой эпюры. Так, если требуется перемножить прямолинейные эпюры  $M_P$  и  $\bar{M}_K$  (рис.7, а), то не имеет значения, что взять: произведение  $\Omega_P u_{C_K}$  площади  $\Omega_P$ , эпюры  $M_P$  на ординату  $u_{C_K}$  под ее центром тяжести из эпюры  $\bar{M}_K$  или произведение  $\Omega_K u_{C_P}$  площади  $\Omega_K$  эпюры  $\bar{M}_K$  на ординату  $u_{C_P}$  под (или над) ее центром тяжести из эпюры  $M_P$ .

### Правило знаков

Если центр тяжести площади эпюры  $\Omega_K$  и ордината  $u_{C_P}$  расположены с одной стороны от оси стержня, то принимается знак плюс (+).

При использовании формулы Верещагина приходится вычислять площади различных геометрических фигур и определять положение их центра тяжести. Для этого сложные геометрические фигуры разбивают на простые. Значения площадей некоторых эпюр и координат их центров тяжести приведены в табл.4.

Таблица 4

Вид эпюры	Площадь эпюры $\Omega$	Координата центра тяжести $x_c$
	$\frac{ab}{2}$	$\frac{a}{3}$
	$\frac{ab}{3}$	$\frac{a}{4}$
	$\frac{ab}{4}$	$\frac{a}{5}$
	$\frac{l}{2}ab$	$\frac{a+l}{3}$

Вид эпюры	Площадь эпюры $\Omega$	Координата центра тяжести $x_c$
	$\frac{2}{3}ab$	$\frac{a}{2}$
	$\frac{2}{3}ab$	$\frac{3}{8}a$

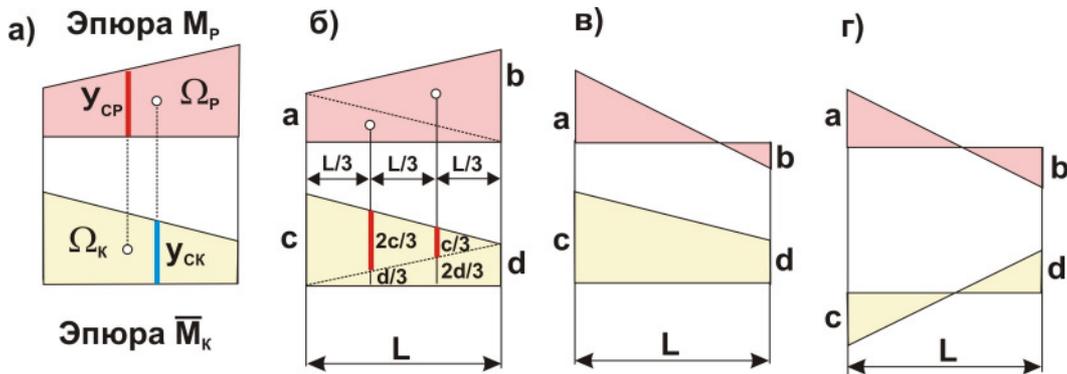


Рис.7

Когда перемножаются две эпюры, имеющие вид трапеции, то не надо находить положение центра тяжести площади одной из них. Следует одну из эпюр разбить на два треугольника и умножить площадь каждого из них на ординату под его центром тяжести из другой эпюры. Например, в случае, приведенном на рис.7,б, получим

$$\frac{aL}{2} \left( \frac{2}{3}c + \frac{1}{3}d \right) + \frac{bL}{2} \left( \frac{1}{3}c + \frac{2}{3}d \right) = \frac{L}{6} (2ac + 2bd + ad + bc). \quad (10)$$

В этой формуле произведение  $ac$  левых ординат обеих эпюр и произведение  $bd$  правых ординат берутся с коэффициентом, равным двум, а произведения  $ad$  и  $bc$  ординат, расположенных с разных сторон, - с коэффициентом, равным единице. С помощью формулы (10) можно перемножать эпюры, имеющие вид «перекрученных» трапеций; при этом произведения ординат, имеющих одинаковые знаки, берутся со знаком плюс, а имеющие разные знаки - со знаком минус.

Когда одна из эпюр (рис.8) очерчена по квадратной параболе (от равномерно распределенной нагрузки  $q$ ), то ее для перемножения с другой эпюрой рассматривают как сумму (рис.8, а) или разность (рис.8, б) трапецидальной и параболической эпюр.

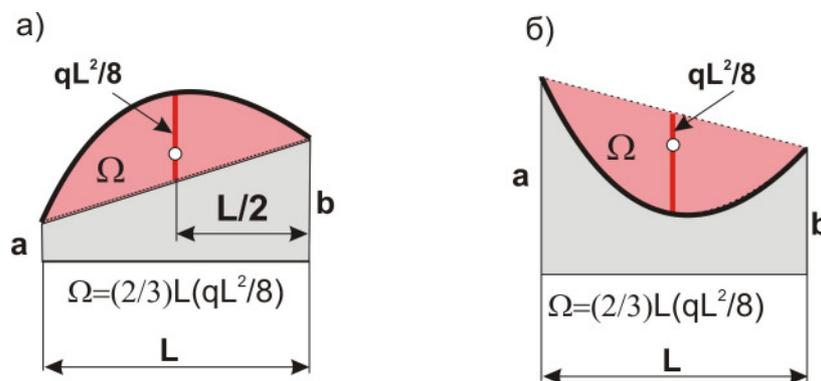


Рис.8

При использовании формулы Верещагина сложные геометрические фигуры разбивают на простые, для которых приходится вычислять площади и определять положение их центров тяжести. Всё это усложняет применение метода Верещагина в сравнении, например, с методом Симпсона. Поэтому применение формулы Верещагина целесообразно в том случае, когда площади геометрических фигур и положение их центров тяжести определяются просто, а также просто вычисляются ординаты других фигур, под центром тяжести первых.

### 2.2.3. Метод Симпсона

Приближенное значение интеграла Максвелла-Мора можно определить с помощью формулы Симпсона<sup>3</sup>

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + \dots + 4y_{2N-1} + y_{2N}) - \frac{h^5}{90}f^{(4)}(\xi), \quad (11)$$

где  $x_j = a + jh$ ,  $j = 0, 1, \dots, 2N$ ,  $h = \frac{b-a}{2N}$ ,  $a < \xi < b$ .

Для  $N = 1$ , т.е. в пределах участка будем брать только три значения  $f(a)$ ,  $f(c)$  и  $f(b)$  – значения подынтегральной функции  $f(x)$  на концах ( $f(a)$ ,  $f(b)$ ) и посередине  $f(c)$  интервала интегрирования;  $a$ ,  $b$ ,  $c$  – значения  $x$  в крайних ( $a$ ,  $b$ ) и средней ( $c$ ) точках интервала интегрирования.

При вычислении по формуле Симпсона (11) обе эпюры могут быть криволинейными, жёсткости стержня переменными, ось стержня криволинейной.

При криволинейной оси стержня от интеграла по дуговой координате  $s$  вдоль оси стержня

$$\int_0^{s_k} f(s)ds$$

нужно перейти к интегралу по координате вдоль прямолинейной оси, например,  $x$ :

<sup>3</sup> Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике. – Лейпциг: Тойбнер, 1979. – М.: Наука, 1980. – 976 с.

$$\int_0^{L_k} \frac{f(x)}{\cos \alpha} dx,$$

где  $\alpha$  – угол между касательной к оси стержня в точке с координатой  $x$  и осью  $x$ ;  $L_k$  – длина участка интегрирования.

Однако точное значение интеграла будет иметь место лишь тогда, когда ось стержня прямолинейна, жёсткость на участке постоянна, обе эпюры прямолинейны или одна из них прямолинейна, а вторая – квадратичная парабола. В других случаях для увеличения точности результатов интегрирования нужно уменьшить длину участка интегрирования  $L_k$ .

Применительно к эпюрам  $M_P$  и  $\bar{M}_K$  формула Симпсона имеет следующий вид: при переменной жёсткости на участке

$$\Delta_{KP} = \int_0^{L_k} \frac{M_P \bar{M}_K}{(EJ)_K} dx \approx \frac{L_k}{6} \left( \frac{M_P^l \bar{M}_K^l}{(EJ)_{Kl}} + 4 \frac{M_P^c \bar{M}_K^c}{(EJ)_{Kc}} + \frac{M_P^{np} \bar{M}_K^{np}}{(EJ)_{Knp}} \right), \quad (12)$$

при постоянной жёсткости на участке

$$\Delta_{KP} = \int_0^{L_k} \frac{M_P \bar{M}_K}{(EJ)_K} dx \approx \frac{L_k}{6(EJ)_K} \left( M_P^l \bar{M}_K^l + 4 M_P^c \bar{M}_K^c + M_P^{np} \bar{M}_K^{np} \right), \quad (13)$$

где верхние индексы  $l, c, np$  обозначают значения моментов  $M_P$  и  $\bar{M}_K$  в начале, середине и на конце участка интегрирования;  $L_k$  – длина участка интегрирования вдоль оси  $x$ ;  $(EJ)_{Kl}, (EJ)_{Kc}, (EJ)_{Knp}$  – значения изгибной жёсткости в начале, середине и на конце участка интегрирования.

#### Правило знаков

Если перемножаемые ординаты эпюр  $M_P$  и  $\bar{M}_K$  лежат с одной стороны, то принимаем знак плюс (+), в противном случае – знак минус (–).

## 2.2.4. Матричная форма вычисления перемещений

### 2.2.4.1. Сущность матричной формы вычисления перемещений

Для простоты изложения будем использовать упрощённую формулу (4) определения перемещений с учётом только деформации изгиба:

$$\Delta_{KP} = \sum \int \frac{\bar{M}_K M_P}{EI} ds$$

Рассмотрим один из интегралов, входящих в формулу (4), например, для участка  $i$ . Используя формулу Симпсона (13), получим:

$$\Delta_{KP}^i = \begin{bmatrix} \bar{M}_{iK}^l & \bar{M}_{iK}^c & \bar{M}_{iK}^{np} \end{bmatrix} \frac{L_i}{6 E_i J_i} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{iP}^l \\ M_{iP}^c \\ M_{iP}^{np} \end{bmatrix} \quad (14)$$

или

$$\Delta_{KP}^i = L_M^i B^i L_{MP}^i, \quad (15)$$

где  $L_M^i$  – матрица-строка изгибающих моментов на участке  $i$  от единичной нагрузки;  $L_{M_P}^i$  – матрица-столбец изгибающих моментов на участке  $i$  от заданной нагрузки;  $B^i$  – матрица податливости  $i$ -го участка, образованная из коэффициентов формулы Симпсона (13);

$$L_M^i = \begin{bmatrix} \bar{M}_{iK}^l & \bar{M}_{iK}^c & \bar{M}_{iK}^{pp} \end{bmatrix}, B^i = \frac{L_i}{6E_i J_i} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, L_{M_P}^i = \begin{bmatrix} M_{iP}^l \\ M_{iP}^c \\ M_{iP}^{pp} \end{bmatrix}.$$

Полное перемещение в точке  $K$  при  $n$  участках

$$\Delta_{KP} = \sum_{i=1}^n L_M^i B^i L_{M_P}^i \quad (16)$$

Это равенство можно записать в виде:

$$\Delta_{KP} = L_{\bar{M}} B L_{M_P}, \quad (17)$$

где  $L_{\bar{M}}$  – матрица-строка изгибающих моментов, образованная из матриц участков  $L_M^{(i)}$ ,  $L_{M_P}$  – матрицы  $\bar{M}$  и  $M_P$ ;  $B$  – квазидиагональная матрица податливости упругой системы

$$L_{\bar{M}} = \begin{bmatrix} L_M^{(1)} & L_M^{(2)} & \dots & L_M^{(n)} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} B^{(1)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & B^{(2)} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & B^{(n)} \end{bmatrix}, L_{M_P} = \begin{bmatrix} L_{M_P}^{(1)} \\ L_{M_P}^{(2)} \\ \dots \\ L_{M_P}^{(n)} \end{bmatrix}.$$

где  $0$  – нулевая матрица.

#### 2.2.4.2. Алгоритм определения перемещений в матричной форме

1. Строим эпюру изгибающих моментов  $M_P$  от заданной нагрузки.
2. Строим эпюру изгибающих моментов  $\bar{M}_K$  от единичной силы ( $P_K=1$  или  $M_K=1$ ), приложенной в точке, в которой имеется перемещение.
3. Определяется число участков интегрирования. При этом учитываются одновременно виды эпюр  $M_P$  и  $\bar{M}_K$ , строение рамы (балки), жёсткость стержней.
4. На эпюрах  $M_P$  и  $\bar{M}_K$  указываются знаки в соответствии с принятым правилом знаков.
5. На каждом участке задаются три или два значения изгибающих моментов.
6. Формируются матрицы изгибающих моментов  $L_{M_P}^i$  и  $L_M^i$  по участкам и затем матрицы моментов  $L_{M_P}$  и  $L_{\bar{M}}$  для всей рамы в целом. Очевидно, что сразу можно формировать матрицы  $L_{M_P}$  и  $L_{\bar{M}}$ .
7. Формируются матрицы податливости участков  $B^i$ , а затем матрица податливости рамы (балки)  $B$ .
8. Производится перемножение матриц  $C = L_{\bar{M}} \cdot B$ ,  $D = C \cdot L_{M_P}$ .
9. Искомое перемещение  $\Delta = D$ .
- 10.

### 3. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

#### 3.1. Требуется:

1. Построить необходимые для расчетов на прочность и жесткость эпюры внутренних силовых факторов в брусках упругих систем:  
схема 1

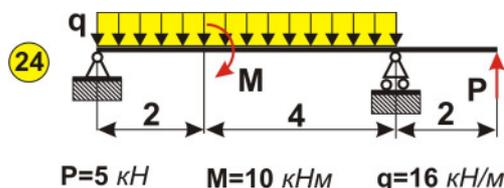
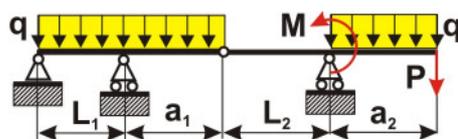
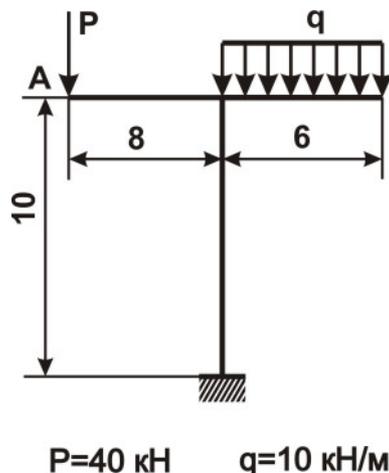


схема 2



Вариант	Размеры, м				Нагрузки		
	$L_1$	$L_2$	$a_1$	$a_2$	$P$ $m$	$q$ $m/m$	$M$ $m/m$
в	3	2	1	1	4	2	4

схема 3



2. Определить опасное сечение.
3. Подобрать размеры поперечных сечений стального бруса ( $[\sigma]=160 \text{ МПа}$ ) из условия прочности на изгиб:
  - схема 1 и 3 – кольцевое поперечное сечение с внешним  $D$  и внутренним  $d$  диаметрами ( $d/D=0.8$ );
  - схема 2 – подобрать номер двутавра;
 определить прогиб и угол поворота сечения упругой системы методами:
  - аналитическим;
  - Верещагина, если эпюры  $M_P$  и  $\bar{M}_K$  описываются линейными зависимостями);
  - Симпсона;
  - матричным,
 в точке приложения сосредоточенной силы (схема 1);

в шарнире (схема 2);  
в сечении, обозначенном точкой **A** (схема 3).

### 3.2. Расчет упругих систем в программном комплексе MathCAD

#### Алгоритм решения задач

1. Определяют реакции связей для заданной нагрузки (грузового состояния) и строят эпюру изгибающих моментов  $M_P$ .
2. По эпюре  $M_P$  определяют опасное сечение, находят максимальный изгибающий момент  $M_{max}$ .
3. Из условия прочности по нормальным напряжениям  $\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W_y} \leq [\sigma]$  подбирают размер поперечного сечения балки и вычисляют его жесткость  $EJ$ .
4. Прикладывают к балке только одну единичную силу  $P = 1$  по направлению искомого перемещения (первое единичное состояние), определяют реакции связей и строят эпюру изгибающих моментов  $M_1$ . По формуле Мора вычисляют линейные перемещения поперечного сечения балки.
5. Прикладывают к балке единичный момент  $M_0 = 1$  по направлению искомого перемещения (второе единичное состояние), определяют реакции связей и строят эпюру  $M_2$ . По формуле Мора вычисляют угловые перемещения поперечного сечения балки.

#### 3.2.1. Схема 1

Для балки, представленной на рис.9, требуется определить:

- вертикальное перемещение точки приложения сосредоточенной силы;
- угол поворота этого сечения балки.

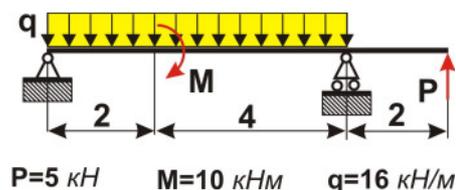


Рис.9

#### Грузовое состояние (ГС)

$$\begin{aligned}
 \text{Дано:} \quad q &:= 16 \cdot 10^3 & P &:= 5 \cdot 10^3 & M_0 &:= 10 \cdot 10^3 \\
 L_1 &:= 2 & L_2 &:= 4 & L_3 &:= 2 & \sigma_d &:= 160 \cdot 10^6 \\
 E &:= 2 \cdot 10^{11} & L_{12} &:= L_1 + L_2 & L_{123} &:= L_{12} + L_3
 \end{aligned}$$

ГС Решение:

ГС Определение опорных реакций

$$Y_A := 1 \quad R_B := 1$$

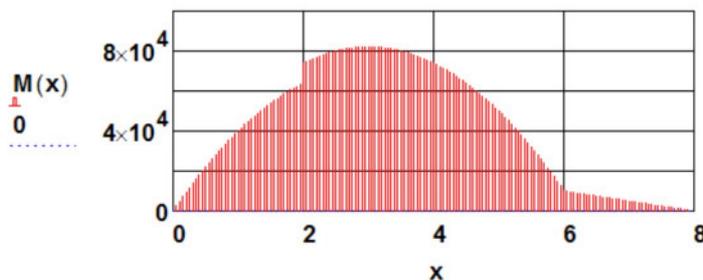
$$\text{Given } P \cdot L + R_B \cdot L_{12} - \frac{q \cdot L_{12}^2}{2} - M_0 = 0 \quad P \cdot L_3 + \frac{q \cdot L_{12}^2}{2} - M_0 - Y_A \cdot L_{12} = 0$$

$$\begin{pmatrix} Y_A \\ R_B \end{pmatrix} := \text{Find}(Y_A, R_B) \quad Y_A = 4.8 \times 10^4 \quad R_B = 4.3 \times 10^4$$

$$\text{ГС Проверка: } Y_A + R_B + P - q \cdot L_{12} = 0$$

$$M(x) := \begin{cases} Y_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} & \text{if } 0 \leq x < L_1 \\ Y_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} + M_0 & \text{if } L_1 \leq x < L_{12} \\ Y_A \cdot x - q \cdot L_{12} \cdot \left(x - \frac{L_{12}}{2}\right) + M_0 + R_B \cdot (x - L_{12}) & \text{if } L_{12} \leq x \leq L \end{cases}$$

$$x := 0, 0.05 \dots L$$



### Подбор поперечного сечения бруса

$$\alpha := 0.8 \quad W(D) := \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot (1 - \alpha^4) \quad n := 10000 \quad h := \frac{L}{n} \quad i := 0 \dots n$$

$$m_i := M(i \cdot h) \quad M_{\max} := \max(m) \quad M_{\max} = 8.2 \times 10^4 \quad D := 1 \quad \text{Given}$$

$$W(D) = \frac{M_{\max}}{\sigma_d} \quad D := \text{Find}(D) \quad D = 0.207 \quad d := \alpha \cdot D \quad d = 0.165$$

$$J := \frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot (1 - \alpha^4) \quad J = 5.299 \times 10^{-5} \quad EJ := E \cdot J \quad EJ = 1.06 \times 10^7$$

При определении максимального момента весь отрезок интегрирования  $[0, L]$  разбили на **10000** частей и в каждом узле сеточной области вычислили момент  $m_i = M(i \cdot h)$ , а затем из вновь созданного массива чисел нашли наибольшее. Если из эпюры изгибающих моментов следует, что наибольшее по модулю значение момента находится в отрицательной зоне, то  $M_{\max} = |\min(m)|$ .

Единое состояние (ЕС сила)

Дано:  $P := 1$



Решение:

ЕС\_сила. Определение опорных реакций

$$Y_{A1P} := 1 \quad R_{B1P} := 1$$

Given  $P \cdot L + R_{B1P} \cdot L_{12} = 0$

$$P \cdot L_3 - Y_{A1P} \cdot L_{12} = 0$$

$$\begin{pmatrix} Y_{A1P} \\ R_{B1P} \end{pmatrix} := \text{Find}(Y_{A1P}, R_{B1P})$$

$$Y_{A1P} = 0.333 \quad R_{B1P} = -1.333$$

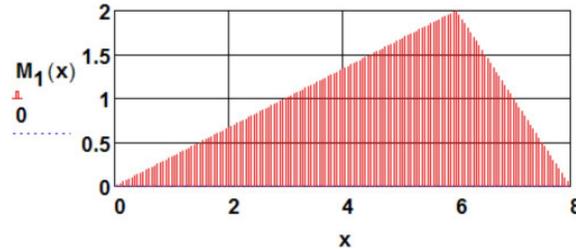
ЕС\_сила. Проверка:

$$Y_{A1P} + R_{B1P} + P = 0$$

ЕС\_сила. Определение внутренних силовых факторов

$$M_1(x) := \begin{cases} Y_{A1P} \cdot x & \text{if } 0 \leq x < L_1 \\ Y_{A1P} \cdot x & \text{if } L_1 \leq x < L_{12} \\ Y_{A1P} \cdot x + R_{B1P} \cdot (x - L_{12}) & \text{if } L_{12} \leq x \leq L \end{cases}$$

$$x := 0, 0.05 \dots L$$



**Определение линейного перемещения**

Контрольная проверка:

$$\Delta_P := \int_0^L M(x) \cdot M_1(x) dx \quad \Delta_P = 3.547 \times 10^5$$

Аналитический метод

$$\Delta_{PA} := \frac{\int_0^L M(x) \cdot M_1(x) dx}{EJ} \quad \Delta_{PA} = 0.033$$

Метод Симпсона

$$\Delta_{PC} := \frac{1}{6 \cdot EJ} \cdot \left[ \begin{aligned} & (M(0) \cdot M_1(0) + 4 \cdot M(1) \cdot M_1(1) + M(2-h) \cdot M_1(2-h)) \cdot L_1 \dots \\ & + (M(2+h) \cdot M_1(2+h) + 4 \cdot M(4) \cdot M_1(4) + M(6-h) \cdot M_1(6-h)) \cdot L_2 \dots \\ & + (M(6+h) \cdot M_1(6+h) + 4 \cdot M(7) \cdot M_1(7) + M(L) \cdot M_1(L)) \cdot L_3 \end{aligned} \right]$$

$$\Delta_{PC} = 0.033$$

Матричный метод

$$B_1 := \frac{L_1}{EJ \cdot 6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 := \frac{L_2}{EJ \cdot 6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_3 := \frac{L_3}{EJ \cdot 6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

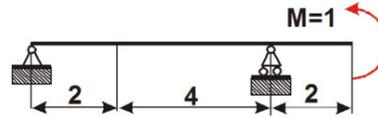
$$L_{M_1} := \begin{pmatrix} M_1(0) \\ M_1(1) \\ M_1(2-h) \end{pmatrix} \quad L_{M_2} := \begin{pmatrix} M_1(2+h) \\ M_1(4) \\ M_1(6-h) \end{pmatrix} \quad L_{M_3} := \begin{pmatrix} M_1(6+h) \\ M_1(7) \\ M_1(L) \end{pmatrix}$$

$$L_{MP_1} := \begin{pmatrix} M(0) \\ M(1) \\ M(2-h) \end{pmatrix} \quad L_{MP_2} := \begin{pmatrix} M(2+h) \\ M(4) \\ M(6-h) \end{pmatrix} \quad L_{MP_3} := \begin{pmatrix} M(6+h) \\ M(7) \\ M(L) \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{PM} := \sum_{j=1}^3 \left( L_{M_j}^T \cdot B_j \cdot L_{MP_j} \right) \quad \Delta_{PM} = 0.033$$

**Единичное состояние (ЕС момент)**

Дано:  $M_o := 1$



Решение:

ЕС\_момент. Определение опорных реакций

$$Y_{A1M} := 1 \quad R_{B1M} := 1$$

Given  $M_o + R_{B1M} \cdot L_{12} = 0 \quad M_o - Y_{A1M} \cdot L_{12} = 0$

$$\begin{pmatrix} Y_{A1M} \\ R_{B1M} \end{pmatrix} := \text{Find}(Y_{A1M}, R_{B1M}) \quad Y_{A1M} = 0.167 \quad R_{B1M} = -0.167$$

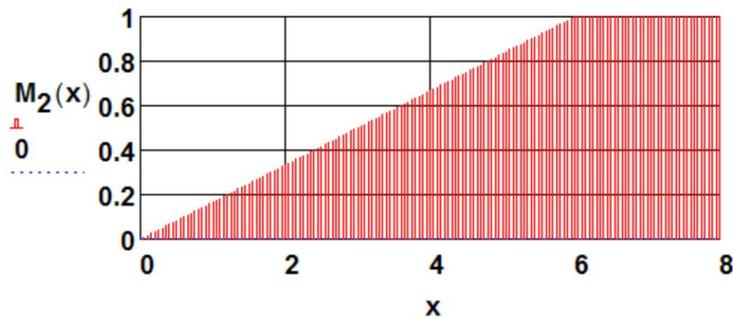
ЕС\_момент. Проверка:

$$Y_{A1M} + R_{B1M} = 0$$

ЕС\_момент. Определение внутренних силовых факторов

$$x := 0, 0.05 \dots L$$

$$M_2(x) := \begin{cases} Y_{A1M} \cdot x & \text{if } 0 \leq x < L_1 \\ Y_{A1M} \cdot x & \text{if } L_1 \leq x < L_{12} \\ Y_{A1M} \cdot x + R_{B1M} \cdot (x - L_{12}) & \text{if } L_{12} \leq x \leq L \end{cases}$$



**Определение углового перемещения**

Аналитический метод

$$\Delta_{MA} := \frac{\int_0^L M(x) \cdot M_2(x) dx}{EJ} \quad \frac{\Delta_{MA}}{\text{deg}} = 0.977$$

Метод Симпсона

$$\Delta_{MC} := \frac{1}{6 \cdot EJ} \cdot \left[ \begin{aligned} & (M(0) \cdot M_2(0) + 4 \cdot M(1) \cdot M_2(1) + M(2-h) \cdot M_2(2-h)) \cdot L_1 \dots \\ & + (M(2+h) \cdot M_2(2+h) + 4 \cdot M(4) \cdot M_2(4) + M(6-h) \cdot M_2(6-h)) \cdot L_2 \dots \\ & + (M(6+h) \cdot M_2(6+h) + 4 \cdot M(7) \cdot M_2(7) + M(L) \cdot M_2(L)) \cdot L_3 \end{aligned} \right]$$

$$\frac{\Delta_{MC}}{\text{deg}} = 0.977$$

### Матричный метод

$$L_{M_1} := \begin{pmatrix} M_2(0) \\ M_2(1) \\ M_2(2-h) \end{pmatrix} \quad L_{M_2} := \begin{pmatrix} M_2(2+h) \\ M_2(4) \\ M_2(6-h) \end{pmatrix} \quad L_{M_3} := \begin{pmatrix} M_2(6+h) \\ M_2(7) \\ M_2(L) \end{pmatrix}$$

$$L_{MP_1} := \begin{pmatrix} M(0) \\ M(1) \\ M(2-h) \end{pmatrix} \quad L_{MP_2} := \begin{pmatrix} M(2+h) \\ M(4) \\ M(6-h) \end{pmatrix} \quad L_{MP_3} := \begin{pmatrix} M(6+h) \\ M(7) \\ M(L) \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{MM} := \sum_{j=1}^3 \left( L_{M_j}^T \cdot B_j \cdot L_{MP_j} \right) \quad \frac{\Delta_{MM}}{\text{deg}} = 0.977$$

По результатам расчета вертикальное перемещение точки приложения силы составило **3,3 см**, а угол поворота - **0,977°**.

### 3.2.2. Схема 2

Для балки, представленной на *рис.10*, требуется определить:

- вертикальное перемещение шарнира **C**;
- взаимный угол поворота сечений балки в шарнире **C**.

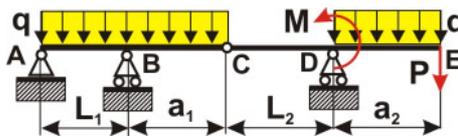


Рис.10

#### Грузовое состояние (ГС)

Дано:  $q := 20 \cdot 10^3$      $P := 40 \cdot 10^3$      $M_g := 40 \cdot 10^3$      $\sigma_d := 160 \cdot 10^6$

$L_1 := 3$      $L_2 := 2$      $a_1 := 1$      $a_2 := 1$      $L_{12} := L_1 + a_1$      $L_{13} := L_{12} + L_2$

$L := L_{13} + a_2$      $E := 2 \cdot 10^{11}$

#### ГС Решение:

Определение опорных реакций     $Y_A := 1$      $R_B := 1$      $R_D := 1$

Given  $-P \cdot L + R_D \cdot L_{13} + R_B L_1 + M_g - q \cdot a_2 \cdot \left( L - \frac{a_2}{2} \right) - q \cdot \frac{L_{12}^2}{2} = 0$

$-P \cdot (L_2 + a_2) - q \cdot \left( L_2 + \frac{a_2}{2} \right) + M_g + R_D \cdot L_2 = 0$

$-q \cdot (L_{12} + a_2) - P + Y_A + R_B + R_D = 0$

$\begin{pmatrix} Y_A \\ R_B \\ R_D \end{pmatrix} := \text{Find}(Y_A, R_B, R_D)$      $Y_A = 2.833 \times 10^4$      $R_B = 4.667 \times 10^4$

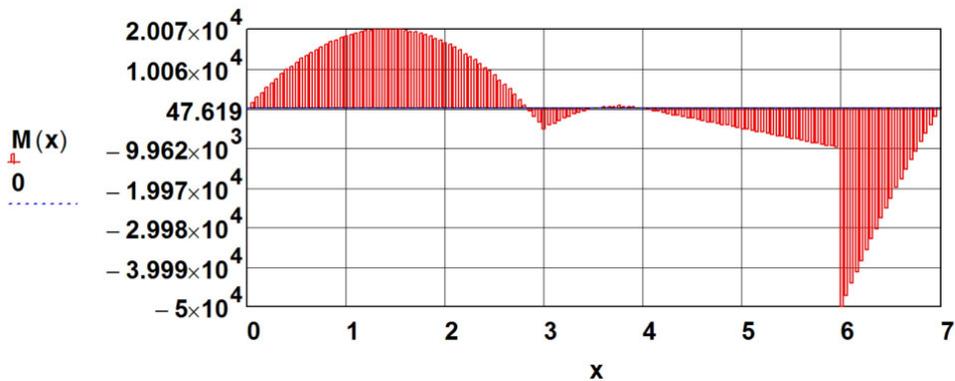
$R_D = 6.5 \times 10^4$

ГС Проверка:  $Y_A + R_B + R_D - P - q \cdot (L_{12} + a_2) = 0$

### ГС Определение внутренних силовых факторов

$$M(x) := \begin{cases} Y_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} & \text{if } 0 \leq x < L_1 \\ Y_A \cdot x - \frac{q \cdot x^2}{2} + R_B \cdot (x - L_1) & \text{if } L_1 \leq x < L_{12} \\ Y_A \cdot x + R_B \cdot (x - L_1) - q \cdot L_{12} \cdot \left(x - \frac{L_{12}}{2}\right) & \text{if } L_{12} \leq x < L_{13} \\ Y_A \cdot x + R_B \cdot (x - L_1) - q \cdot L_{12} \cdot \left(x - \frac{L_{12}}{2}\right) - M_g \dots & \text{if } L_{13} \leq x \leq L \\ + R_D \cdot (x - L_{13}) - \frac{q \cdot (x - L_{13})^2}{2} & \end{cases}$$

$$x := 0, 0.05 \dots L$$



### Подбор поперечного сечения бруса

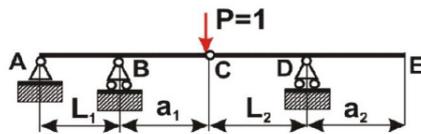
$$n := 10000 \quad h := \frac{L}{n} \quad i := 0 \dots n \quad m_i := M(i \cdot h) \quad M_{\max} := \max(m)$$

$$M_{\min} := \min(m) \quad M_{\max} = 2.007 \times 10^4 \quad M_{\min} = -4.998 \times 10^4$$

$$M_{\max} := -M_{\min} \quad W := \frac{M_{\max}}{\sigma_d} \quad W = 3.124 \times 10^{-4}$$

$$\text{Выбираем двутавр №24а.} \quad J_y := 3800 \cdot 10^{-8} \quad EJ := E \cdot J_y \quad EJ = 7.6 \times 10^6$$

### Единичное состояние (ЕС сила)



$$\text{Дано: } P := 1$$

Решение:

ЕС\_сила.

Определение опорных реакций

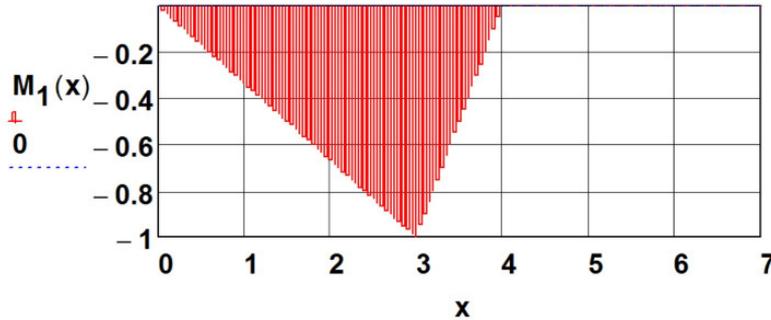
$$Y_{A1} := 1 \quad R_{B1} := 1$$

Given  $-P \cdot L_{12} + R_{B1} \cdot L_1 = 0$        $-P \cdot a_1 - Y_{A1} \cdot L_1 = 0$

$\begin{pmatrix} Y_{A1} \\ R_{B1} \end{pmatrix} := \text{Find}(Y_{A1}, R_{B1})$        $Y_{A1} = -0.333$        $R_{B1} = 1.333$

EC\_сила. Проверка:  $Y_{A1} + R_{B1} - P = 0$

$$M_1(x) := \begin{cases} Y_{A1} \cdot x & \text{if } 0 \leq x < L_1 \\ Y_{A1} \cdot x + R_{B1} \cdot (x - L_1) & \text{if } L_1 \leq x \leq L_{12} \\ 0 & \text{if } L_{12} \leq x \leq L_{13} \\ 0 & \text{if } L_{13} \leq x \leq L \end{cases}$$



### Определение линейного перемещения

Аналитический метод  $\Delta_{CPA} := \frac{\int_0^L M(x) \cdot M_1(x) dx}{EJ}$        $\Delta_{CPA} = -2.193 \times 10^{-3}$

Метод Симпсона  $z_1 := \frac{L_1}{2}$        $z_2 := L_1 - h$        $z_3 := L_1 + h$        $z_4 := L_1 + \frac{a_1}{2}$

$z_5 := L_{12} - h$        $z_6 := L_{12} + h$        $z_7 := L_{12} + \frac{L_2}{2}$        $z_8 := L_{13} - h$

$z_9 := L_{13} + h$        $z_{10} := L_{13} + \frac{a_2}{2}$

$$\Delta_{CPC} := \frac{1}{6 \cdot EJ} \cdot \left[ \begin{aligned} & (M(0) \cdot M_1(0) + 4 \cdot M(z_1) \cdot M_1(z_1) + M(z_2) \cdot M_1(z_2)) \cdot L_1 \dots \\ & + (M(z_3) \cdot M_1(z_3) + 4 \cdot M(z_4) \cdot M_1(z_4) + M(z_5) \cdot M_1(z_5)) \cdot a_1 \dots \\ & + (M(z_6) \cdot M_1(z_6) + 4 \cdot M(z_7) \cdot M_1(z_7) + M(z_8) \cdot M_1(z_8)) \cdot L_2 \dots \\ & + (M(z_9) \cdot M_1(z_9) + 4 \cdot M(z_{10}) \cdot M_1(z_{10}) + M(L) \cdot M_1(L)) \cdot a_2 \end{aligned} \right]$$

$\Delta_{CPC} = -2.195 \times 10^{-3}$

Матричный метод  $B_1 := \frac{L_1}{EJ \cdot 6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$        $B_2 := \frac{a_2}{EJ \cdot 6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B_3 := \frac{L_2}{EJ \cdot 6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$        $B_4 := \frac{a_2}{EJ \cdot 6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$        $L_{M_1} := \begin{pmatrix} M_1(0) \\ M_1(z_1) \\ M_1(z_2) \end{pmatrix}$

$$L_{M_2} := \begin{pmatrix} M_1(z_3) \\ M_1(z_4) \\ M_1(z_5) \end{pmatrix} \quad L_{M_3} := \begin{pmatrix} M_1(z_6) \\ M_1(z_7) \\ M_1(z_8) \end{pmatrix} \quad L_{M_4} := \begin{pmatrix} M_1(z_9) \\ M_1(z_{10}) \\ M_1(L) \end{pmatrix}$$

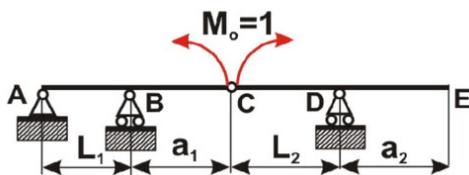
$$L_{MP_1} := \begin{pmatrix} M(0) \\ M(z_1) \\ M(z_2) \end{pmatrix} \quad L_{MP_2} := \begin{pmatrix} M(z_3) \\ M(z_4) \\ M(z_5) \end{pmatrix} \quad L_{MP_3} := \begin{pmatrix} M(z_6) \\ M(z_7) \\ M(z_8) \end{pmatrix}$$

$$L_{MP_4} := \begin{pmatrix} M(z_9) \\ M(z_{10}) \\ M(L) \end{pmatrix} \quad \Delta_{CPM} := \sum_{j=1}^4 \left( L_{M_j}^T \cdot B_j \cdot L_{MP_j} \right) \quad \Delta_{CPM} = -2.195 \times 10^{-3}$$

### Определение углового перемещения

Единичное состояние (ЕС момент)

Дано:  $M_o := 1$



Решение:

ЕС\_момент.

Определение опорных реакций

$$Y_{A1m} := 1 \quad R_{B1m} := 1 \quad R_{D1m} := 1$$

$$\text{Given} \quad M_o - M_o + R_{B1m} \cdot L_1 + R_{D1m} \cdot L_{13} = 0$$

$$M_o - R_{D1m} \cdot L_2 = 0$$

$$Y_{A1m} + R_{B1m} + R_{D1m} = 0$$

$$\begin{pmatrix} Y_{A1m} \\ R_{B1m} \\ R_{D1m} \end{pmatrix} := \text{Find}(Y_{A1m}, R_{B1m}, R_{D1m}) \quad Y_{A1m} = 0.5$$

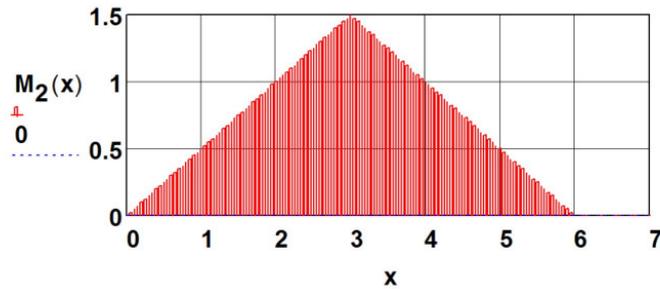
$$R_{B1m} = -1 \quad R_{D1m} = 0.5$$

ЕС\_момент. Проверка:  $Y_{A1m} + R_{B1m} + R_{D1m} = 0$

ЕС\_момент. Определение внутренних силовых факторов

$$M_2(x) := \begin{cases} Y_{A1m} \cdot x & \text{if } 0 \leq x < L_1 \\ Y_{A1m} \cdot x + R_{B1m} \cdot (x - L_1) & \text{if } L_1 \leq x < L_{12} \\ Y_{A1m} \cdot x + R_{B1m} \cdot (x - L_1) + M_o - M_o & \text{if } L_{12} \leq x \leq L_{13} \\ [Y_{A1m} \cdot x + R_{B1m} \cdot (x - L_1)] + M_o - M_o \dots & \text{if } L_{13} \leq x \leq L \\ + R_{D1m} \cdot (x - L_{13}) \end{cases}$$

$$x := 0, 0.05 \dots L$$



Аналитический метод

$$\Delta_{CMA} := \frac{\int_0^L M(x) \cdot M_2(x) dx}{EJ} \quad \frac{\Delta_{CMA}}{\text{deg}} = 0.163$$

Метод Симпсона

$$\Delta_{CМС} := \frac{1}{6 \cdot EJ} \cdot \left[ \begin{aligned} & (M(0) \cdot M_2(0) + 4 \cdot M(z_1) \cdot M_2(z_1) + M(z_2) \cdot M_2(z_2)) \cdot L_1 \dots \\ & + (M(z_3) \cdot M_2(z_3) + 4 \cdot M(z_4) \cdot M_2(z_4) + M(z_5) \cdot M_2(z_5)) \cdot a_1 \dots \\ & + (M(z_6) \cdot M_2(z_6) + 4 \cdot M(z_7) \cdot M_2(z_7) + M(z_8) \cdot M_2(z_8)) \cdot L_2 \dots \\ & + (M(z_9) \cdot M_2(z_9) + 4 \cdot M(z_{10}) \cdot M_2(z_{10}) + M(L) \cdot M_2(L)) \cdot a_2 \end{aligned} \right]$$

$$\frac{\Delta_{CМС}}{\text{deg}} = 0.163$$

Матричный метод

$$B_1 := \frac{L_1}{EJ \cdot 6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 := \frac{a_2}{EJ \cdot 6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_3 := \frac{L_2}{EJ \cdot 6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_4 := \frac{a_2}{EJ \cdot 6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$L_{M_1} := \begin{pmatrix} M_2(0) \\ M_2(z_1) \\ M_2(z_2) \end{pmatrix}$$

$$L_{M_2} := \begin{pmatrix} M_2(z_3) \\ M_2(z_4) \\ M_2(z_5) \end{pmatrix}$$

$$L_{M_3} := \begin{pmatrix} M_2(z_6) \\ M_2(z_7) \\ M_2(z_8) \end{pmatrix}$$

$$L_{M_4} := \begin{pmatrix} M_2(z_9) \\ M_2(z_{10}) \\ M_2(L) \end{pmatrix}$$

$$L_{MP_1} := \begin{pmatrix} M(0) \\ M(z_1) \\ M(z_2) \end{pmatrix}$$

$$L_{MP_2} := \begin{pmatrix} M(z_3) \\ M(z_4) \\ M(z_5) \end{pmatrix}$$

$$L_{MP_3} := \begin{pmatrix} M(z_6) \\ M(z_7) \\ M(z_8) \end{pmatrix}$$

$$L_{MP_4} := \begin{pmatrix} M(z_9) \\ M(z_{10}) \\ M(L) \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{CMM} := \sum_{j=1}^4 (L_{M_j}^T \cdot B_j \cdot L_{MP_j}) \quad \frac{\Delta_{CMM}}{\text{deg}} = 0.163$$

По результатам расчета вертикальное перемещение сечения **A** составило **0,2195 см**, а взаимный угол поворота торцов основной и присоединенной балок в шарнире **C** составил - **0,163°**.

### 3.2.3. Схема 3

Для рамы, представленной на *рис.11*, требуется определить:

- вертикальное перемещение сечения **A**;
- угол поворота сечений **A** рамы.

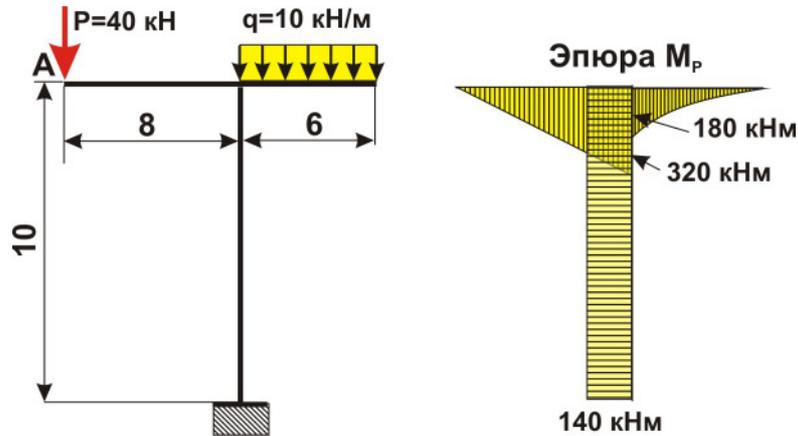


Рис.11

Для определения перемещений сечения **A** рамы строим эпюры изгибающих моментов:

- для грузового состояния -  $M_P$  (*рис.11*);
- для первого единичного состояния (рама загружена только единичной силой  $P=1$ ) -  $M_1$  (*рис.12*);
- для второго единичного состояния (рама загружена только парой с моментом  $M=1$ ) -  $M_2$  (*рис.12*).

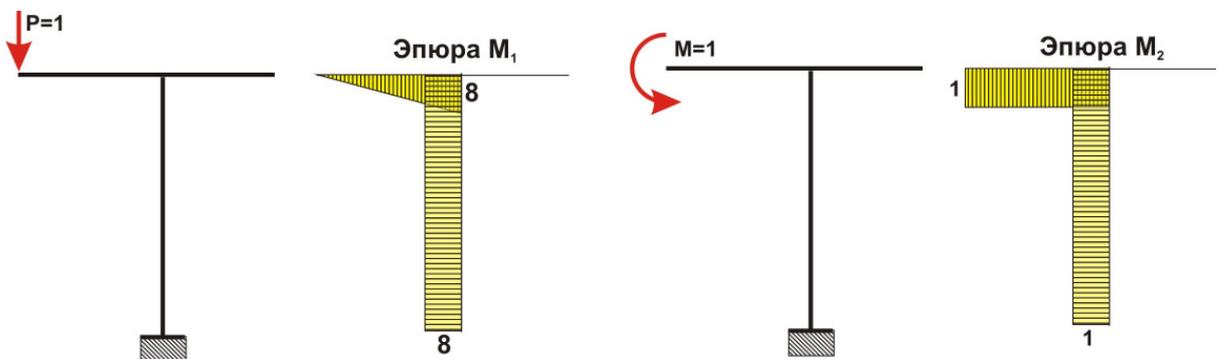


Рис.12

Для такого типа эпюр, конечно, наиболее простым методом вычисления перемещений будет метод Верещагина, который позволяет оценить эти перемещения «в уме». Однако с учебной целью перемещения сечения **A** мы вычислим всеми известными нам методами.

#### Грузовое состояние (ГС)

Дано:  $E := 2 \cdot 10^{11}$      $\sigma_d := 160 \cdot 10^6$      $q := 10 \cdot 10^3$      $P := 40 \cdot 10^3$   
 $L_1 := 8$      $L_2 := 6$      $H := 10$      $L_{12} := L_1 + L_2$      $L := L_{12} + H$

ГС Решение:

ГС Определение опорных реакций:

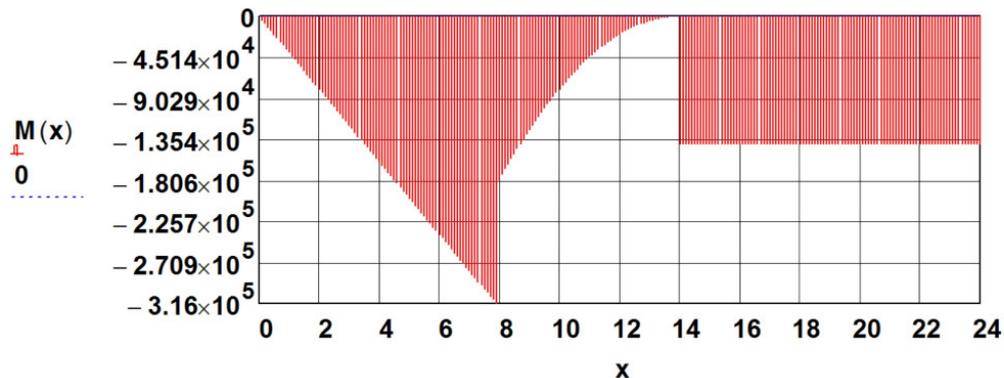
$$N := -P - q \cdot L_2 \quad M_3 := P \cdot L_1 - \frac{q \cdot L_2^2}{2} \quad N = -1 \times 10^5 \quad M_3 = 1.4 \times 10^5$$

Здесь  $N$  - нормальная сила в заделке,  $M_3$  - момент в заделке.

ГС Определение внутренних силовых факторов

$$M(x) := \begin{cases} -P \cdot x & \text{if } 0 \leq x < L_1 \\ -P \cdot x + M_3 - N \cdot (x - L_1) - q \cdot \frac{(x - L_1)^2}{2} & \text{if } L_1 \leq x < L_{12} \\ -M_3 & \text{if } L_{12} \leq x \leq L \end{cases}$$

$$x := 0, 0.1 \dots L$$



Так как **MathCAD** не приспособлен для построения эпюр в рамах, то мы стойку рамы присоединили к ригелю, и поэтому до  $x = 14$  м – это эпюра изгибающих моментов в ригеле, а после  $x = 14$  м на отрезке  $[14 \ 24]$  - эпюра изгибающих моментов в стойке.

Подбор поперечного сечения бруса

$$\alpha := 0.8 \quad W(D) := \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot (1 - \alpha^4) \quad n := 10000 \quad h := \frac{L}{n} \quad i := 0 \dots n$$

$$m_i := M(i \cdot h) \quad M_{\max} := \max(m) \quad M_{\max} = 0 \quad M_{\min} := \min(m)$$

$$M_{\min} = -3.2 \times 10^5 \quad M_{\max} := -M_{\min} \quad D := 1 \quad \text{Given} \quad W(D) = \frac{M_{\max}}{\sigma_d}$$

$$D := \text{Find}(D) \quad D = 0.326 \quad d := \alpha \cdot D \quad d = 0.26$$

$$J := \frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot (1 - \alpha^4) \quad J = 3.255 \times 10^{-4} \quad EJ := E \cdot J \quad EJ = 6.51 \times 10^7$$

Единичное состояние (ЕС сила)

Дано:  $P_e := 1$

ЕС Решение:

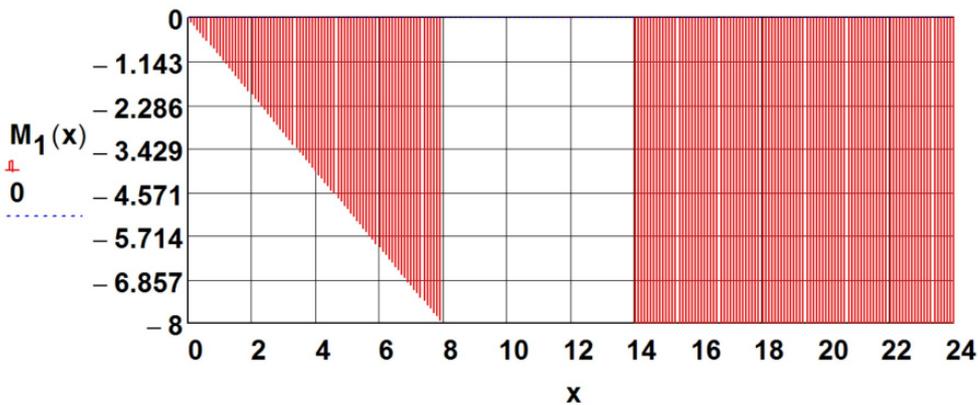
ЕС Определение опорных реакций:

$$N_{P1} := -P_e \quad M_{P13} := P_e \cdot L_1 \quad N_{P1} = -1 \quad M_{P13} = 8$$

ГС Определение внутренних силовых факторов

$$M_1(x) := \begin{cases} -P_e \cdot x & \text{if } 0 \leq x < L_1 \\ -P_e \cdot x + M_{P13} - N_{P1} \cdot (x - L_1) & \text{if } L_1 \leq x \leq L_{12} \\ -M_{P13} & \text{if } L_{12} \leq x \leq L \end{cases}$$

$$x := 0, 0.1 \dots L$$



**Определение линейного перемещения**

Аналитический метод 
$$\Delta_{APB} := \frac{\int_0^L M(x) \cdot M_1(x) dx}{EJ} \quad \Delta_{APB} = 0.277$$

Метод Верещагина 
$$\Delta_{APB} := \frac{1}{EJ} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot M(L_1 - h) \cdot L_1 \cdot \frac{2}{3} \cdot M_1(L_1 - h) + M_3 \cdot H \cdot M_{P13} \right)$$
  

$$\Delta_{APB} = 0.277$$

Метод Симпсона 
$$z_1 := \frac{L_1}{2} \quad z_2 := L_1 - h \quad z_3 := L_1 \quad z_4 := L_1 + \frac{L_2}{2}$$
  

$$z_5 := L_{12} - h \quad z_6 := L_{12} \quad z_7 := L_{12} + \frac{H}{2} \quad z_8 := L$$

$$\Delta_{APC} := \frac{1}{6 \cdot EJ} \cdot \left[ \begin{array}{l} (M(0) \cdot M_1(0) + 4 \cdot M(z_1) \cdot M_1(z_1) + M(z_2) \cdot M_1(z_2)) \cdot L_1 \dots \\ + (M(z_3) \cdot M_1(z_3) + 4 \cdot M(z_4) \cdot M_1(z_4) + M(z_5) \cdot M_1(z_5)) \cdot L_2 \dots \\ + (M(z_6) \cdot M_1(z_6) + 4 \cdot M(z_7) \cdot M_1(z_7) + M(z_8) \cdot M_1(z_8)) \cdot H \end{array} \right]$$

$$\Delta_{APC} = 0.277$$

Матричный метод

$$B_1 := \frac{L_1}{EJ \cdot 6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B_2 := \frac{L_2}{EJ \cdot 6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_3 := \frac{H}{EJ \cdot 6} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad L_{M_1} := \begin{pmatrix} M_1(0) \\ M_1(z_1) \\ M_1(z_2) \end{pmatrix} \quad L_{M_2} := \begin{pmatrix} M_1(z_3) \\ M_1(z_4) \\ M_1(z_5) \end{pmatrix}$$

$$L_{M_3} := \begin{pmatrix} M_1(z_6) \\ M_1(z_7) \\ M_1(z_8) \end{pmatrix} \quad L_{MP_1} := \begin{pmatrix} M(0) \\ M(z_1) \\ M(z_2) \end{pmatrix} \quad L_{MP_2} := \begin{pmatrix} M(z_3) \\ M(z_4) \\ M(z_5) \end{pmatrix}$$

$$L_{MP_3} := \begin{pmatrix} M(z_6) \\ M(z_7) \\ M(z_8) \end{pmatrix} \quad \Delta_{APM} := \sum_{j=1}^3 (L_{M_j}^T \cdot B_j \cdot L_{MP_j}) \quad \Delta_{APM} = 0.277$$

## Определение углового перемещения

### Единичное состояние (ЕС момент)

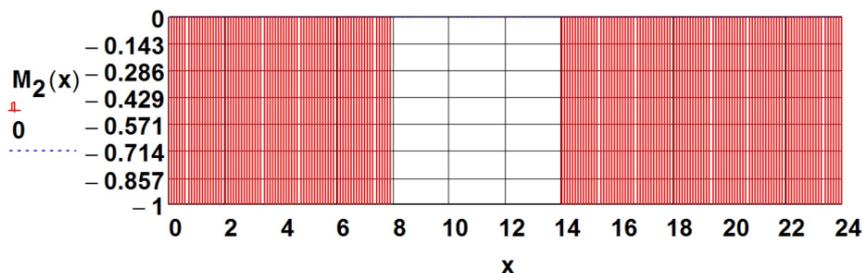
Дано:  $M_0 := 1$

Решение: ЕС\_момент. Определение опорных реакций  $M_{M13} := 1$

ЕС Определение внутренних силовых факторов

$$M_2(x) := \begin{cases} -M_{M13} & \text{if } 0 \leq x < L_1 \\ -M_{M13} + M_{M13} & \text{if } L_1 \leq x \leq L_{12} \\ -M_{M13} & \text{if } L_{12} \leq x \leq L \end{cases}$$

$$x := 0, 0.1 \dots L$$



## Определение углового перемещения

Аналитический метод

$$\Delta_{AMA} := \frac{\int_0^L M(x) \cdot M_2(x) dx}{EJ} \quad \frac{\Delta_{AMA}}{\text{deg}} = 2.359$$

Метод Верещагина

$$\Delta_{AMB} := \frac{1}{EJ} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot M(L_1 - h) \cdot L_1 \cdot M_2(L_1 - h) + M_3 \cdot H \cdot M_{M13} \right)$$

$$\frac{\Delta_{AMB}}{\text{deg}} = 2.358$$

Метод Симпсона

$$z_1 := \frac{L_1}{2} \quad z_2 := L_1 - h \quad z_3 := L_1 \quad z_4 := L_1 + \frac{L_2}{2}$$

$$z_5 := L_{12} - h \quad z_6 := L_{12} \quad z_7 := L_{12} + \frac{H}{2} \quad z_8 := L$$

$$\Delta_{AMC} := \frac{1}{6 \cdot EJ} \cdot \left[ \begin{aligned} & (M(0) \cdot M_2(0) + 4 \cdot M(z_1) \cdot M_2(z_1) + M(z_2) \cdot M_2(z_2)) \cdot L_1 \dots \\ & + (M(z_3) \cdot M_2(z_3) + 4 \cdot M(z_4) \cdot M_2(z_4) + M(z_5) \cdot M_2(z_5)) \cdot L_2 \dots \\ & + (M(z_6) \cdot M_2(z_6) + 4 \cdot M(z_7) \cdot M_2(z_7) + M(z_8) \cdot M_2(z_8)) \cdot H \end{aligned} \right]$$

$$\frac{\Delta_{AMC}}{\text{deg}} = 2.359$$

Матричный метод

$$L_{M_1} := \begin{pmatrix} M_2(0) \\ M_2(z_1) \\ M_2(z_2) \end{pmatrix} \quad L_{M_2} := \begin{pmatrix} M_2(z_3) \\ M_2(z_4) \\ M_2(z_5) \end{pmatrix} \quad L_{M_3} := \begin{pmatrix} M_2(z_6) \\ M_2(z_7) \\ M_2(z_8) \end{pmatrix}$$

$$L_{MP_1} := \begin{pmatrix} M(0) \\ M(z_1) \\ M(z_2) \end{pmatrix} \quad L_{MP_2} := \begin{pmatrix} M(z_3) \\ M(z_4) \\ M(z_5) \end{pmatrix} \quad L_{MP_3} := \begin{pmatrix} M(z_6) \\ M(z_7) \\ M(z_8) \end{pmatrix}$$

$$\Delta_{AMM} := \sum_{j=1}^3 \left( L_{M_j}^T \cdot B_j \cdot L_{MP_j} \right) \quad \frac{\Delta_{AMM}}{\text{deg}} = 2.359$$

По результатам расчета вертикальное перемещение сечения **A** составило **27,7 см**; угол поворота составил **2,359°**.

### 3.3. Расчет упругих систем в программном комплексе SCAD<sup>4</sup>

При расчете перемещений, указанных в задании сечений, будем использовать размеры поперечных сечений подобранные в **MathCAD**.

#### 3.3.1. Схема 1

1. Загружаем программный комплекс. В полях ввода панели **Новый проект** введем наименование проекта **Перемещения\_Схема\_1** и такое же название объекта. Из списка **Тип схемы** выберем **Система общего вида** и щелкнем по кнопке **Единицы измерения**. Зададим единицы измерения геометрических и силовых параметров расчета: сосредоточенные силы будем измерять в  $kH$ , равномерно распределённую нагрузку в  $kH/m$ , размеры сечений в  $см$ . Щелкнем по кнопке **ОК**. Сохраним новый проект в файле **Перемещения\_Схема\_1**. После выполнения этих операций открывается главное окно конечно-элементного пакета **SCAD**.
2. Работу по созданию нового проекта начнем с формирования расчетной схемы. Для этого установим курсор на раздел **Расчетная схема** дерева и нажмем левую кнопку мыши.
3. Активизируем на инструментальной панели раздел **Узлы и элементы**. На появившейся панели, состоящей всего из двух кнопок, нажимаем кнопку **Узлы**  и задаем узлы – границы участков балки.
4. Нажимаем кнопку **Элементы** . Вводим стержни, соединяющие границы участков пространственного бруса. В результате в окне отображения графической информации появится изображение балки (рис.13).

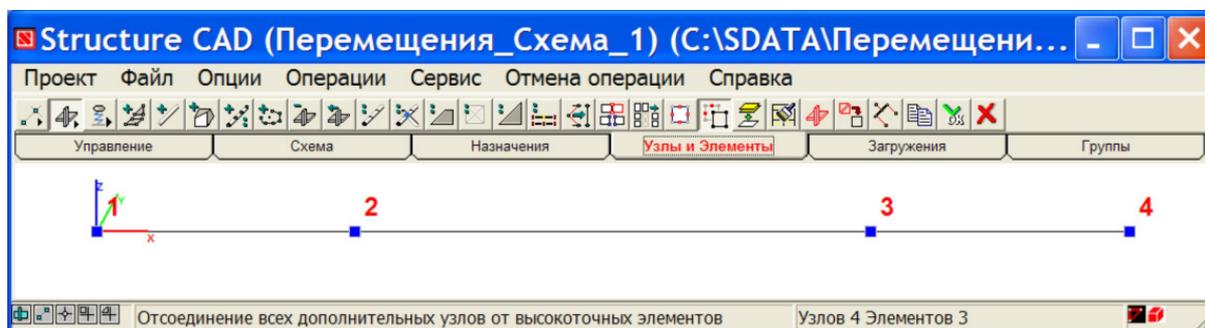
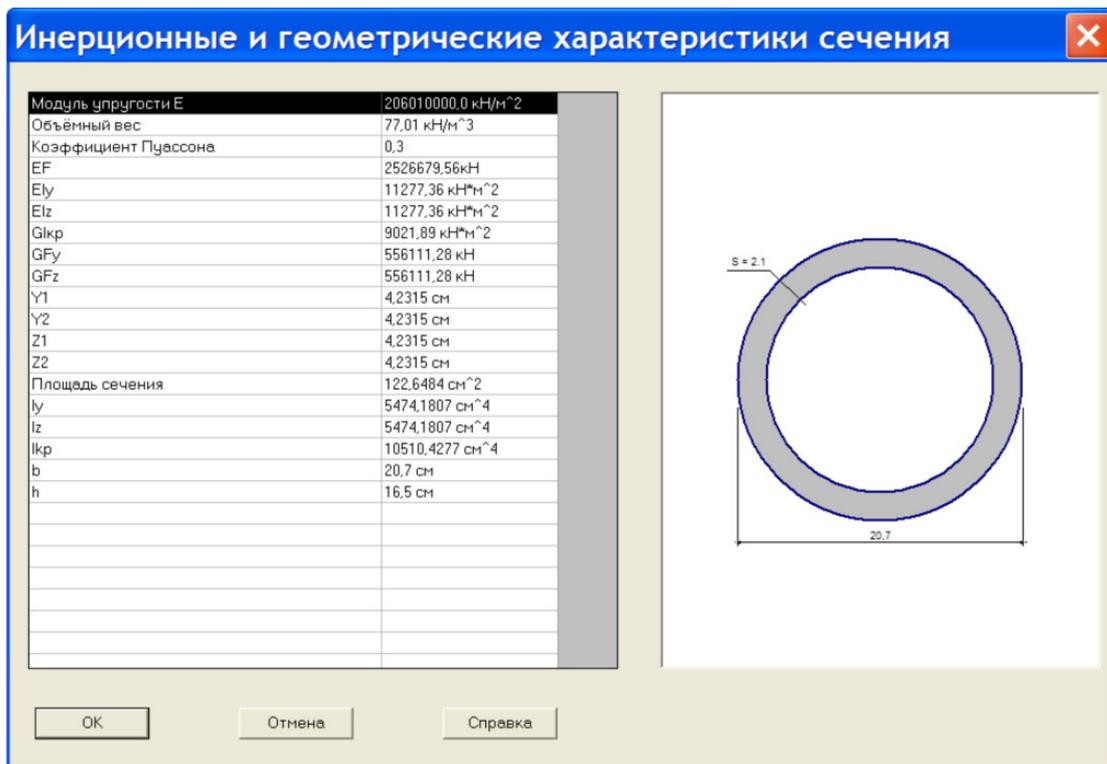


Рис.13

5. Разобьем участки бруса на элементы длиной **20 см**.
6. Задаём физико-механические характеристики элементов расчетной схемы в разделе **Назначения**. Активизируем кнопку  **Назначение жесткости стержням**. Для конечно-элементного расчета пространственного бруса мы должны назначить жесткость его элементам. Зададим материал балки и размеры поперечных сечений участков балки, полученные в **MathCAD**. Нажмем на клавишу **Характеристики сечения**. Появится форма **Инерционные и геометрические характеристики сечения**. Щелкнем на этой форме по клавише **ОК**. В графическом окне выделяем все элементы балки и в главном меню нажимаем кнопку .

<sup>4</sup> В.С. Карпиловский, Э.З. Криксунов, А.Ф. Маляренко, А.В. Перельмутер, М.А. Перельмутер. Вычислительный комплекс SCAD. - М.: Издательство АСВ, 2007. – 596 с.



Прикладываем к брусу заданную нагрузку и задаём граничные условия. На рис.14 приведены связи, имитирующие шарнирно-неподвижную и шарнирно-подвижную опоры. На рис.15 приведены нагрузки, приложенные к балке, и опорные закрепления.

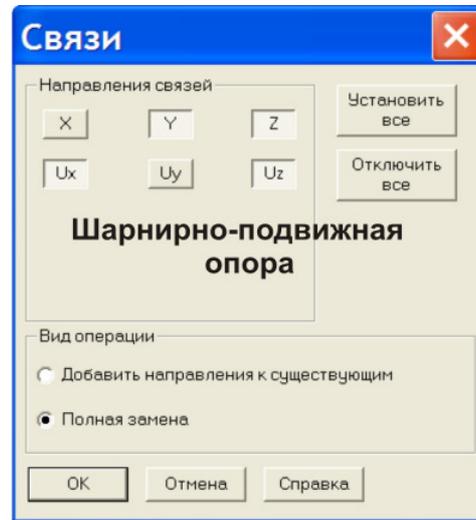
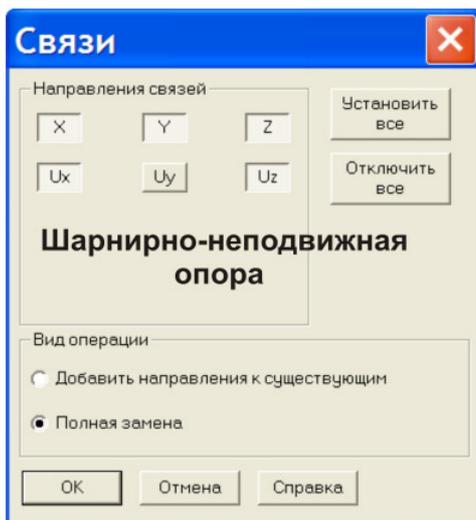


Рис.14

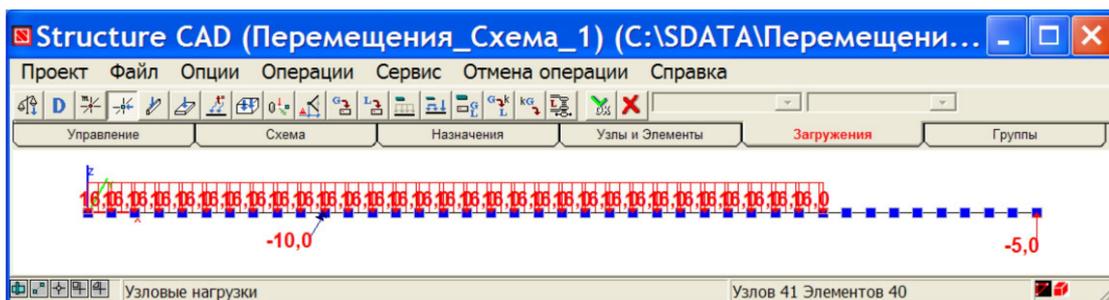


Рис.15

7. Выполняем конечно-элементный расчет балки. Полученные в результате расчета эпюра изгибающих моментов и деформированная схема балки приведены на *рис.16* и *17* соответственно.

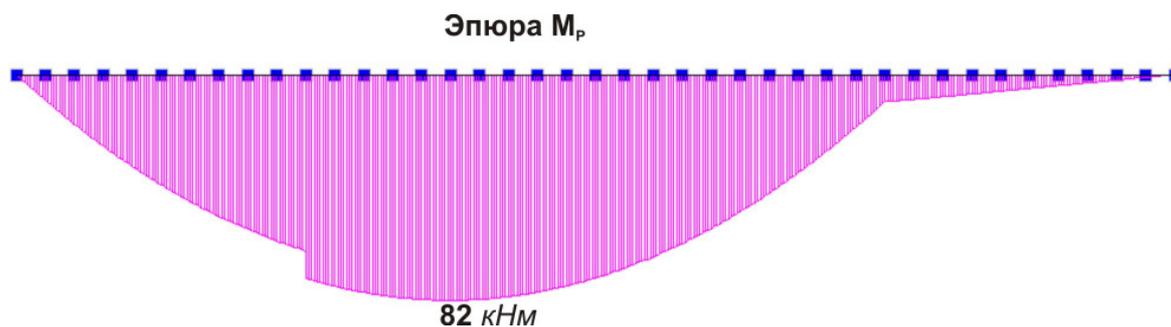


Рис.16

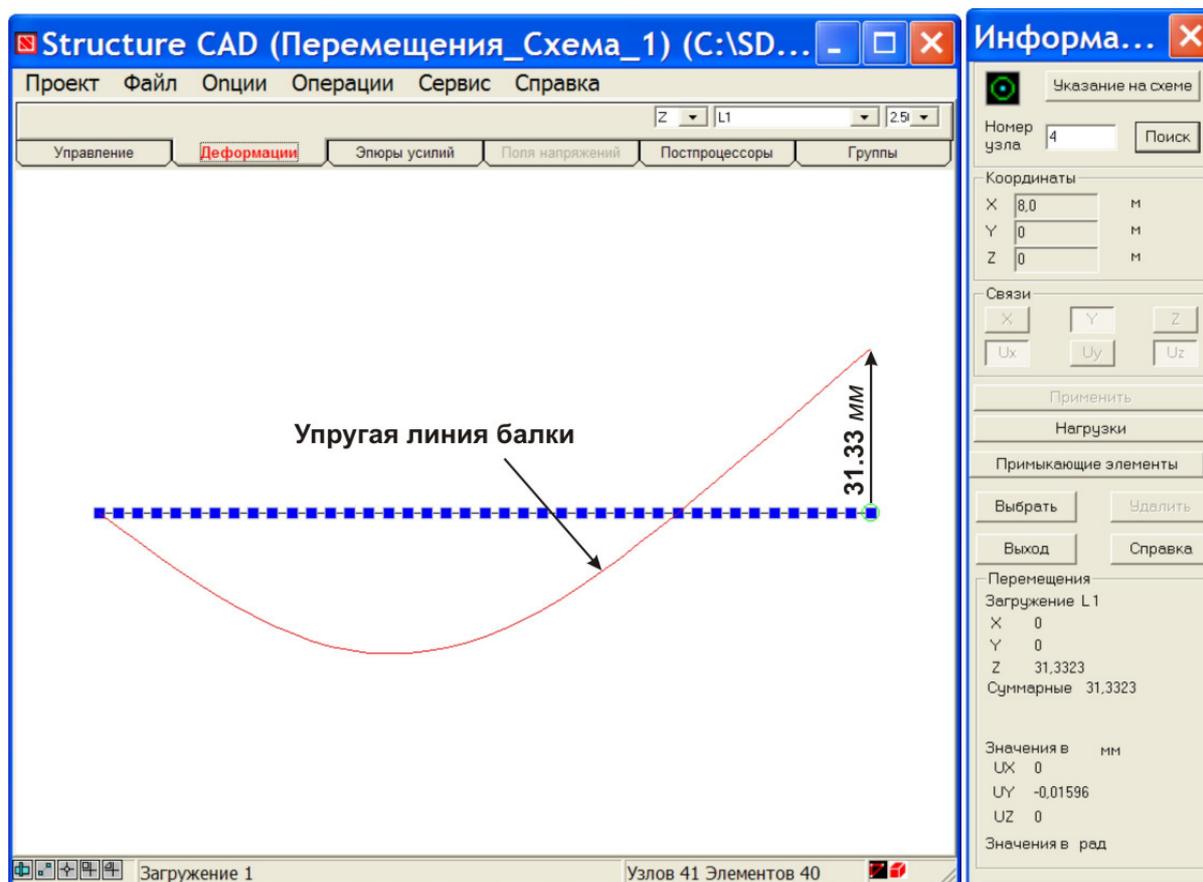


Рис.17

Ранее в **MathCAD** мы получили  $M_{max} = 8,2 \cdot 10^4 \text{ Нм}$ , что в точности совпадает с величиной этого параметра, полученной в **SCAD**. Величины перемещений в сопоставляемых расчетах не совпадают, но близки: линейные перемещения в **MathCAD** -  $\Delta_{pA} = 0,03347 \text{ м}$  или  $\Delta_{pA} = 33,47 \text{ мм}$ , в **SCAD** -  $\Delta_{pA} = 31,33 \text{ мм}$ ; угловые перемещения по модулю в **MathCAD**  $\Delta_{MA} = 0,01705 \text{ рад}$ , в **SCAD**  $\Delta_{MA} = 0,01596 \text{ рад}$ . Это различие обусловлено несовпадением жесткостей поперечных сечений балок **EJ**: в **MathCAD**  $EJ = 1,05977 \cdot 10^7 \text{ Нм}^2$ ; в **SCAD**  $EJ = 1,12773 \cdot 10^7 \text{ Нм}^2$  (см. форму **Инерционные и геометрические характеристики сечения**). Если в **MathCAD** подставить жесткость поперечного сечения балки, используемую в **SCAD**, то результаты расчетов практически совпадут.

### 3.3.2. Схема 2

1. Повторите первые два пункта алгоритма создания конечно-элементной модели, указанные в разделе 3.3.1. **Схема 1**.
2. Нажмите кнопку  **Узлы**. Воспользовавшись иконкой  **Ввод узлов**, с помощью диалогового окна **Ввод узлов** задайте узлы со следующими координатами: (0,0,0), (3,0,0), (4,0,0), (6,0,0), (7,0,0) м. Для отображения на экране вводимых узлов необходимо активизировать фильтр  **Узлы**. На панели **Фильтры отображения** нажмите кнопку  номера узлов.
3. Активизируйте кнопку  **Элементы** и кнопку  **Номера элементов** панели **Фильтры отображения**. Щелкните левой клавишей мыши по кнопке  **Добавление стержней** и затем последовательно по узлам 1...6. В результате этих операций узлы будут соединены прямыми линиями.
4. Разбейте отрезок длиной  $L_1$  на 15 элементов, отрезки длиной  $a_1$  и  $a_2$  – на 5 элементов, отрезок длиной  $L_2$  на 10 элементов. В окне отображения графической информации модель балки примет вид, показанный на *рис.18*.

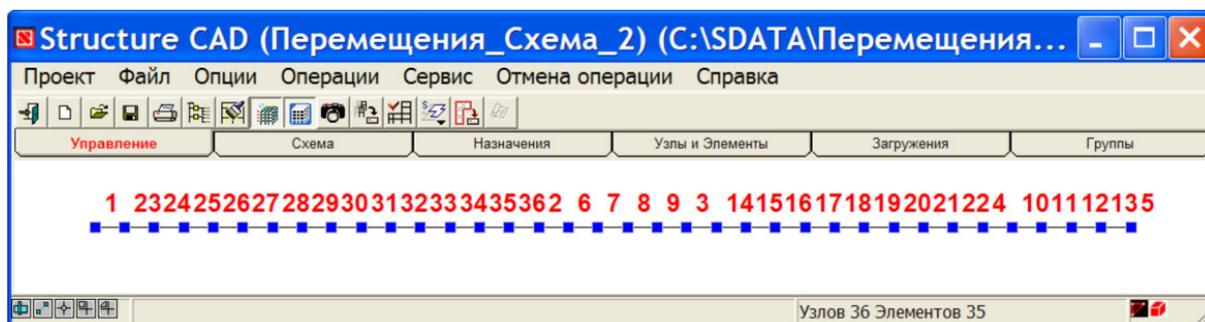


Рис.18

5. В разделе «**Назначения**» задайте жесткость балки. Активизируйте кнопку  и в окне **Жесткости стержневых элементов**, включите радиокнопку **Профили металлопроката** и выберите двутавр **№24а** с уклоном полок по ГОСТ 8239-56, который определили в **MathCAD**, воспользовавшись таблицей сортамента прокатных профилей, приведенной в задачнике В.К. Качурина<sup>5</sup>. Так как **SCAD** - современная программа, то в её базе данных профилей с буквой «а» нет и нам придется выбирать новый профиль, ближайший по геометрическим характеристикам к профилю **№24а**. Если принять профиль **№24** (ГОСТ 8239-56 -  $289 \text{ см}^3$ ) (*рис.19*):

$$J_y = 3460 \text{ см}^4; z_{max} = h / 2 = 12 \text{ см}; W = \frac{J_y}{z_{max}} = 288 \text{ см}^3;$$

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{4.998 \cdot 10^5}{288} = 173.3 \text{ МПа},$$

т.е. балка будет перегружена на  $\frac{\sigma_{max} - [\sigma]}{[\sigma]} 100\% = 8,3\%$ , что недопустимо. Поэтому выберем следующий по номеру профиль **№27** (*рис.20*), для которого  $W = 371 \text{ см}^3$ ,

$$\sigma_{max} = \frac{M_{max}}{W} = \frac{4.998 \cdot 10^5}{371} = 134,7 \text{ МПа},$$

т.е. балка будет недогружена на  $\left| \frac{\sigma_{max} - [\sigma]}{[\sigma]} \right| 100\% = 15,8\%$ .

<sup>5</sup> Сборник задач по сопротивлению материалов под редакцией В.К. Качурина. – М.: Наука, 1970. – 432 с.

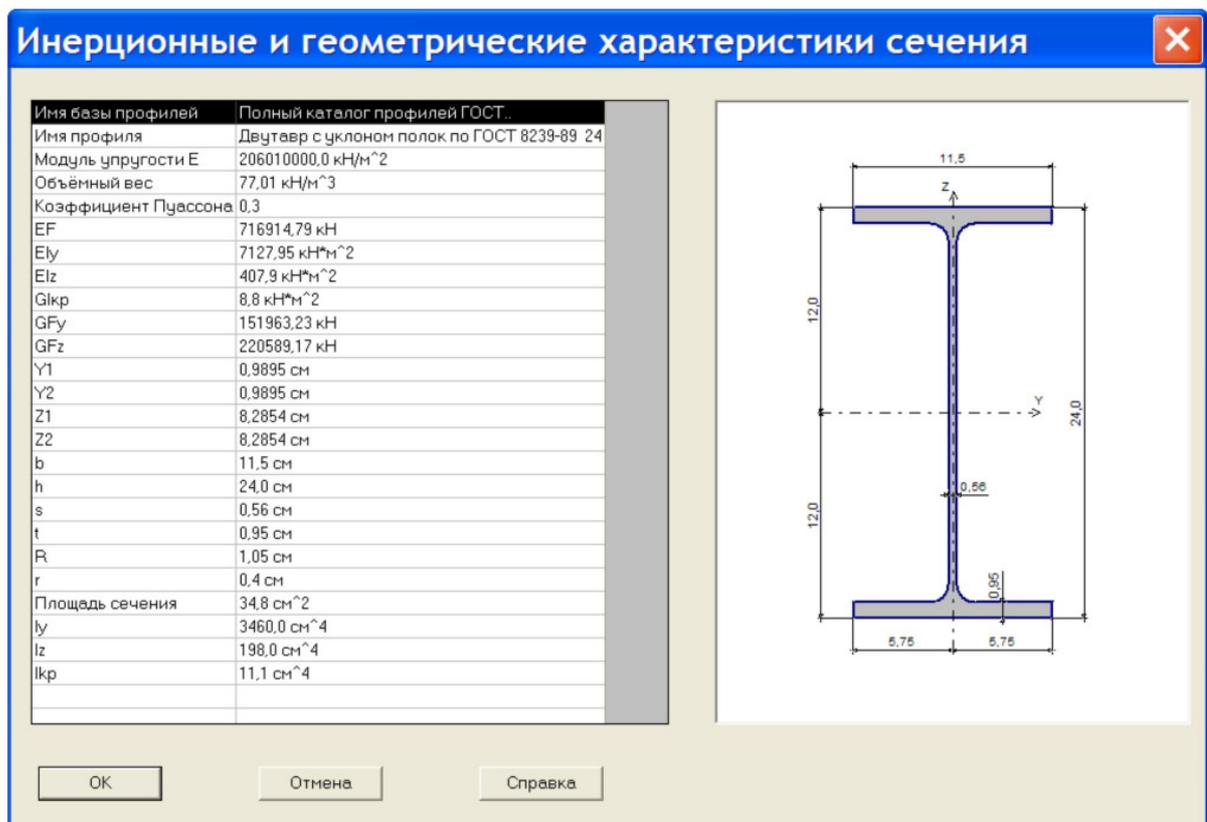
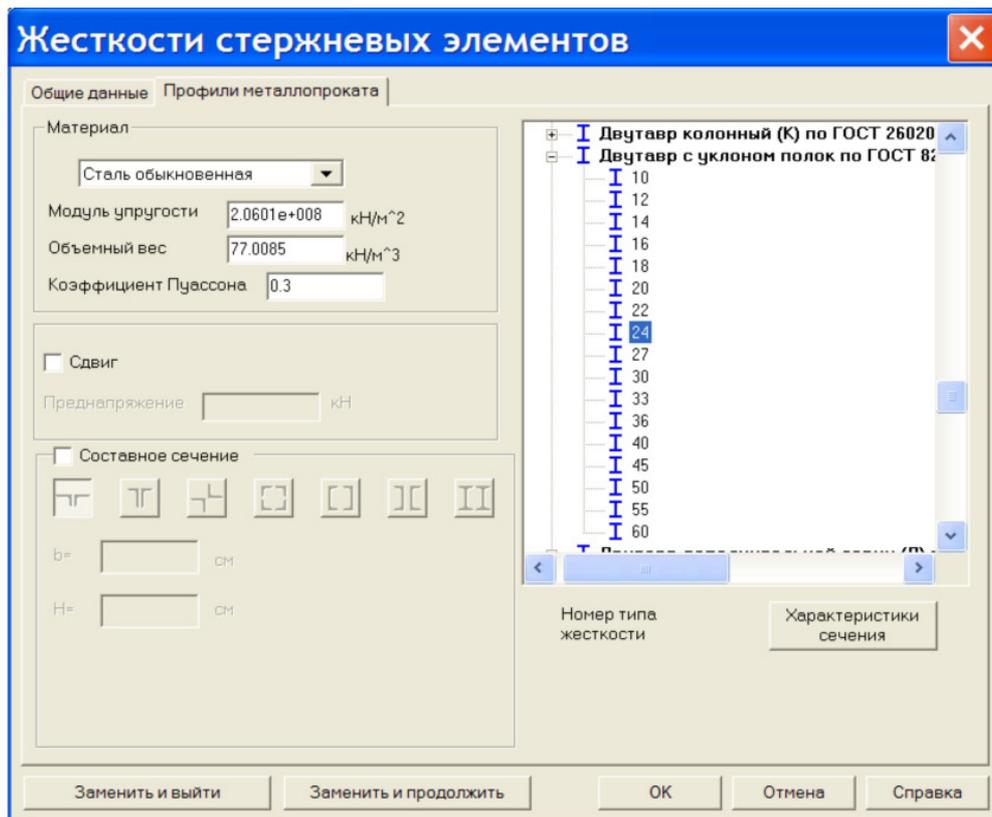


Рис.19

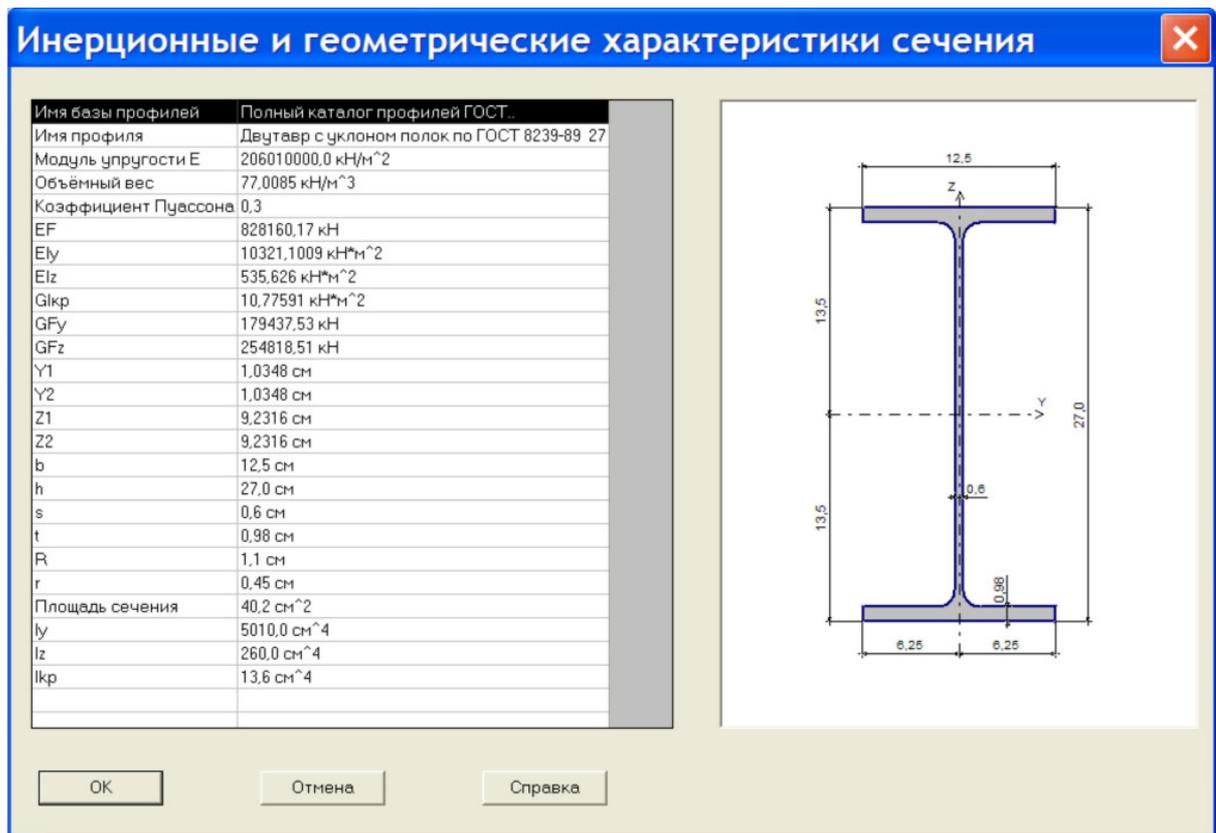


Рис.20

В этом случае балка будет недогружена на **15,8%** и прогибы будут меньше ранее вычисленных в **MathCAD**.

Выделите все элементы балки и подтвердите Ваш выбор нажатием на клавишу .

Если изменить в **MathCAD** жесткость поперечного сечения балки  $EJ = 7,6 \cdot 10^6 \text{ Нм}^2$  на  $EJ = 10,321 \cdot 10^6 \text{ Нм}^2$  (рис.20), то вертикальное перемещение шарнира **C** составит **0,1615 мм**.

6. Задайте кинематические граничные условия. Запретите перемещение узлу **1** (шарнирно-неподвижная опора **A**, рис.10) в направлении осей **x**, **y** и **z** и повороты вокруг осей **x** и **z**; для узлов **2** и **4** (шарнирно-подвижные опоры **B** и **D**, рис.10) запретите перемещения в направлении осей **y** и **z** и повороты вокруг осей **x** и

**z**. Для отображения связей на расчетной схеме щелкнем по кнопке фильтра , для отображения общей системы координат – по кнопке фильтра .

7. Вставляем в третий узел шарнир. В разделе «Назначение» нажимаем кнопку  **Установка шарниров**. Появится панель **Условия примыкания стержней** (рис.21, а), на которой освобождаем угловую связь относительно оси **y**. В рабочем окне щелкаем по третьему узлу (рис.21, б), который соединяет **9** и **15** элементы. Появится панель **Элементы в мишени** с просьбой выбрать элемент (рис.21, в). Выберем **15** элемент и подтвердим наш выбор щелкнув по кнопке **OK** основного меню. В результате этих действий в третьем узле появится шарнир (рис.21, г).

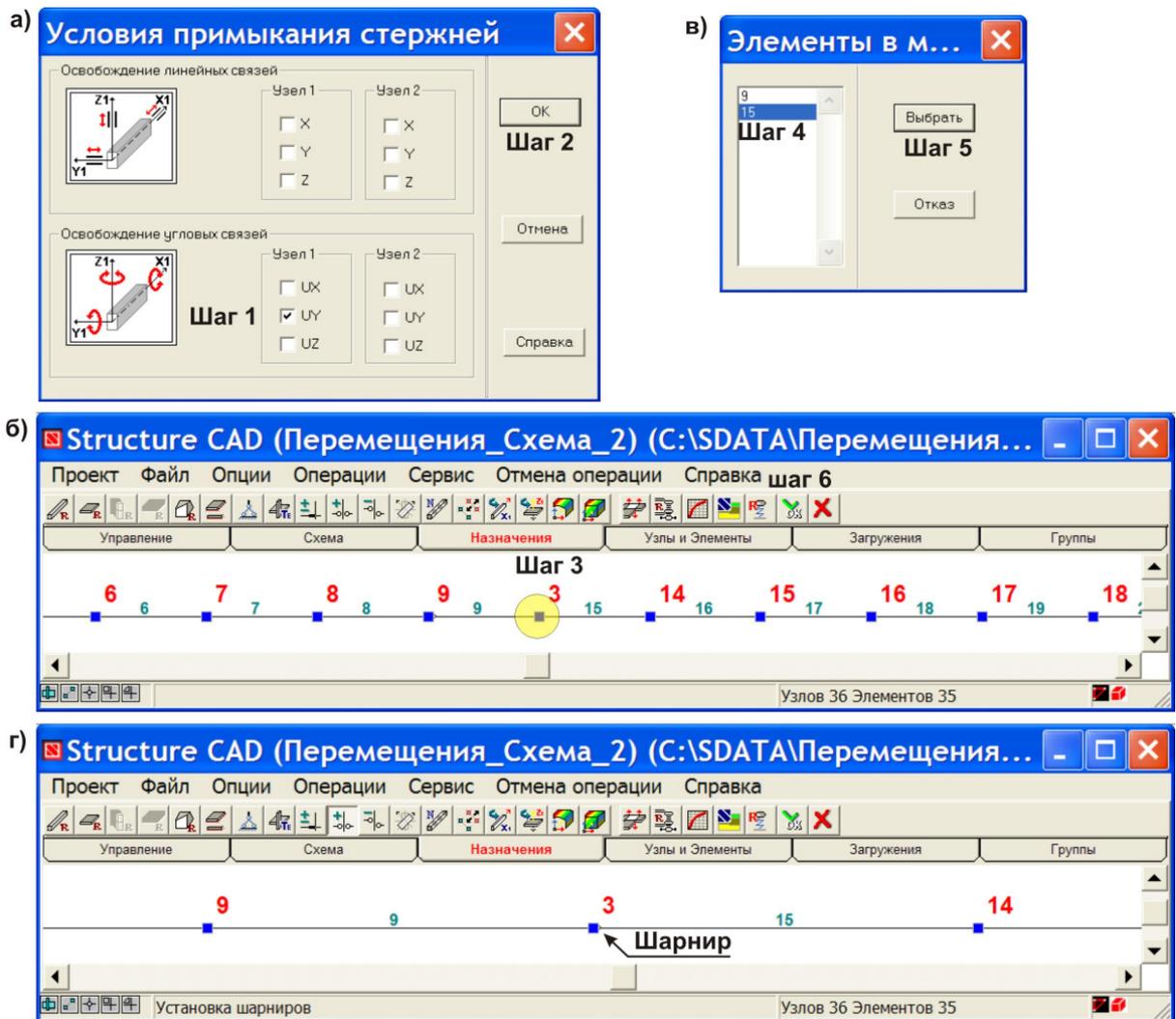


Рис.21

- Откройте раздел **Загрузки** и задайте нагрузку на балку. Для отображения величин введенных нагрузок активизируйте кнопку фильтра . Внешний вид созданной конечно-элементной модели балки показан на *рис.22*.

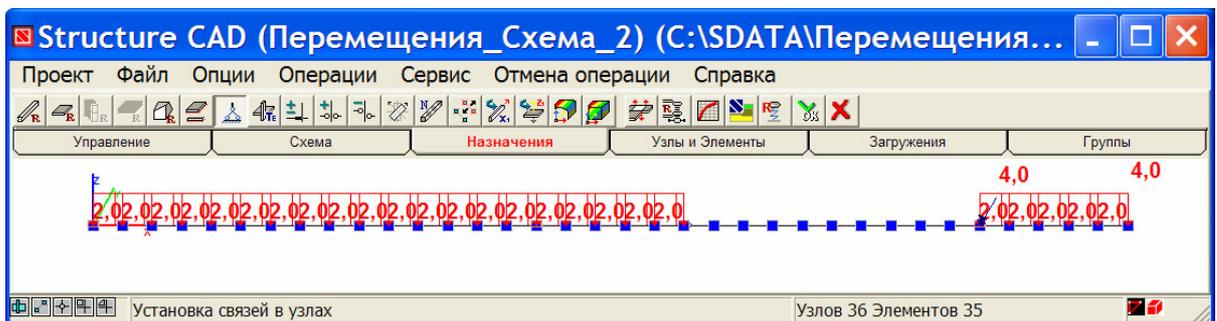


Рис.22

- Выполните расчет балки и затем переходите к графическому анализу полученных результатов.
- В разделе **Деформации** проверьте соответствие деформированной схемы балки заданной нагрузке и опорным закреплениям (*рис.23*). Внешний вид деформированной схемы балки возмущений не вызывает: на опорах перемещения оси балки равны нулю, в шарнире наблюдается излом. Если включить фильтр отображения **Инфор-**

мация об узле, то можно получить информацию о величине вертикального перемещения шарнира **C**. Она составила **0,1615 мм**, что совпадает с величиной этого параметра, вычисленного в **MathCAD**.

11. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов приведены на *рис.24*.

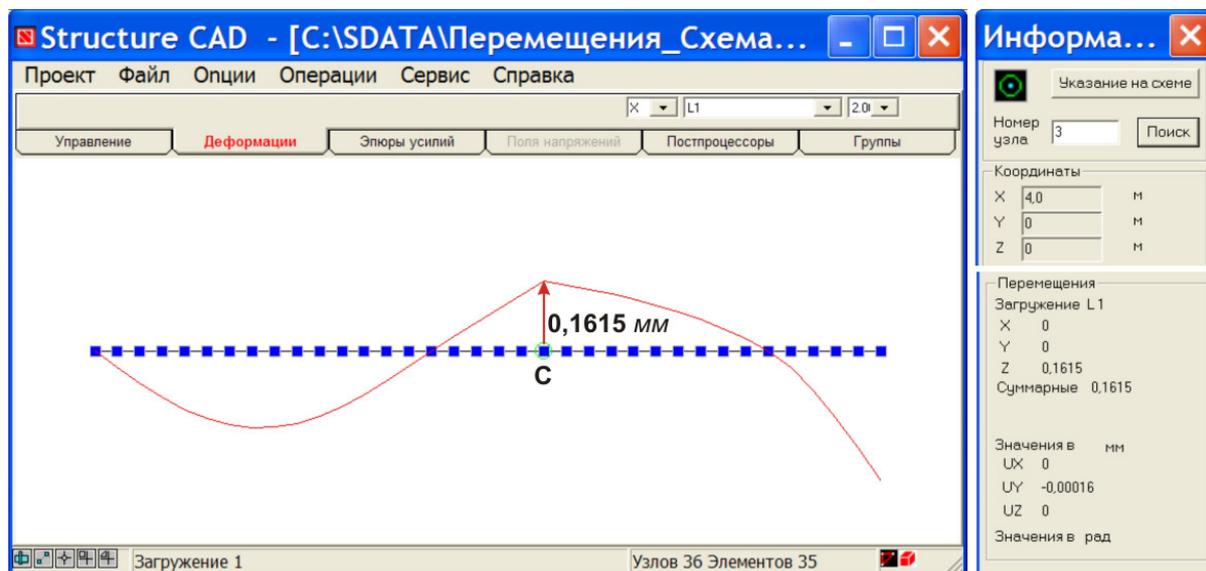


Рис.23

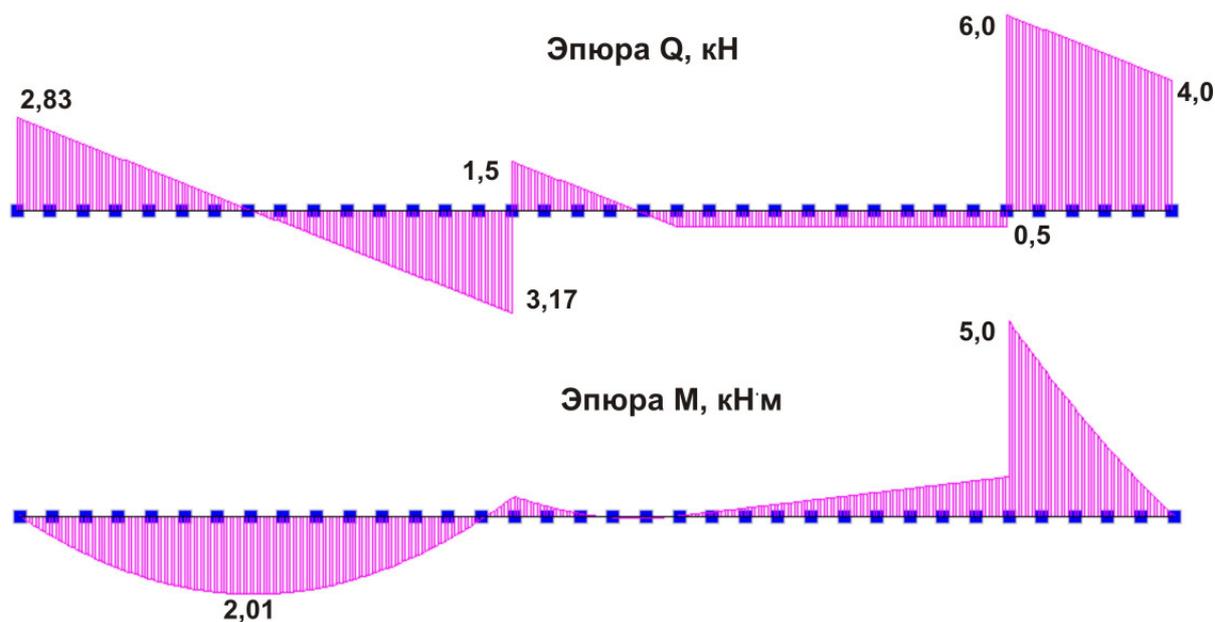


Рис.24

### 3.3.3. Схема 3

1. Повторите первые два пункта алгоритма создания конечно-элементной модели, указанные в разделе 3.3.1. **Схема 1**.
2. Нажмите кнопку  **Узлы**. Воспользовавшись иконкой  **Ввод узлов**, с помощью диалогового окна **Ввод узлов** задайте узлы со следующими координатами: **(0,0,0)**, **(8,0,0)**, **(14,0,0)**, **(8,0,-10)** м. Для отображения на экране вводимых

узлов необходимо активизировать фильтр  **Узлы**. На панели **Фильтры отображения** нажмите кнопку  номера узлов.

3. Активизируйте кнопку  **Элементы** и кнопку  **Номера элементов** панели **Фильтры отображения**. Щелкните левой клавишей мыши по кнопке  **Добавление стержней** и затем последовательно по узлам **1...4**. В результате этих операций узлы будут соединены прямыми линиями.
4. Разбейте левую консоль ригеля на **8** элементов, правую – на **6** элементов, стойку рамы – на **10** элементов.
5. В разделе «**Назначения**» задайте такую жесткость поперечных сечений рамы, какая была получена в **MathCAD**. Активизируйте кнопку  и в окне **Жесткости стержневых элементов**, включите радиокнопку **Параметрические сечения** и задайте трубу с поперечным сечением: внешний диаметр трубы **0,326** м, внутренний – **0.260** м.

Как следует из *рис.25*, жесткостные характеристики поперечных сечений рамы немного превышают значения, полученные в **MathCAD**, что может привести к различным значениям линейных и угловых перемещений поперечных сечений рамы в этих двух расчетах.

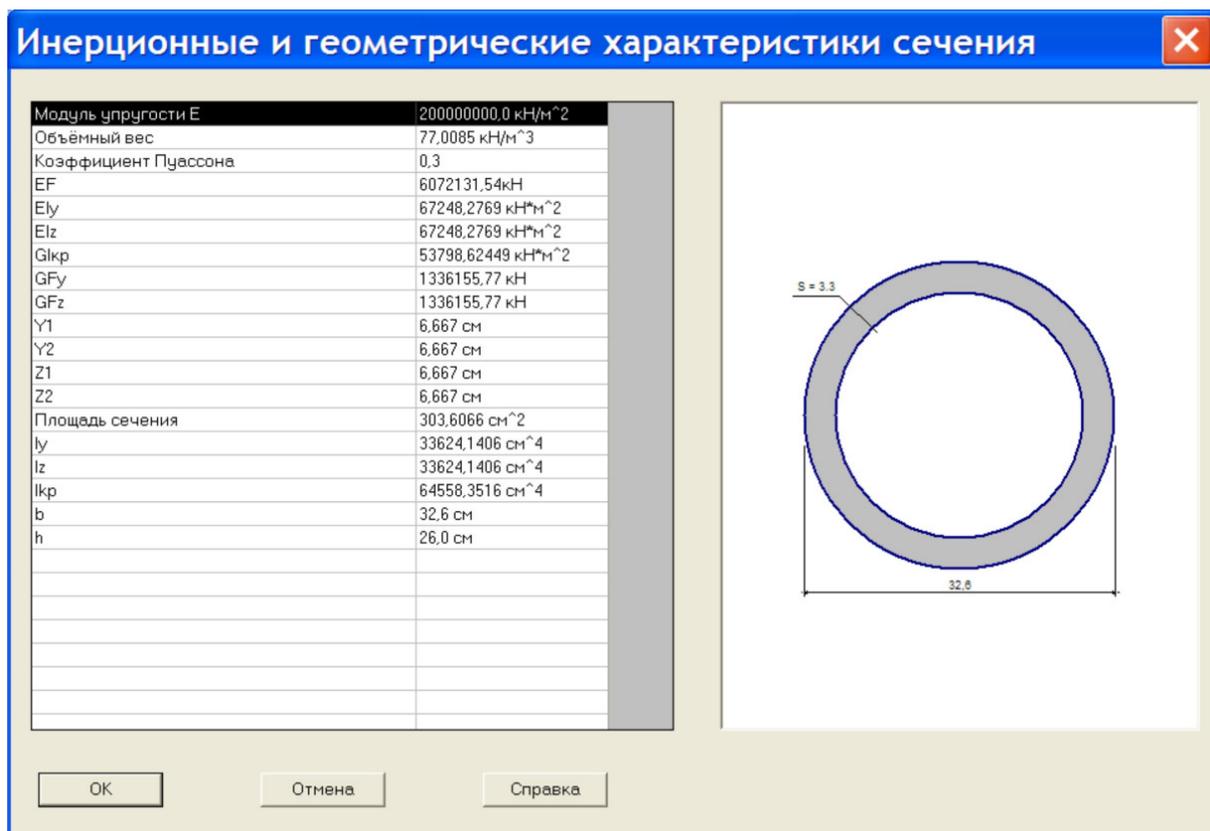


Рис.25

6. Задайте кинематические граничные условия. Запретите все перемещения четвертому узлу. Для отображения связей на расчетной схеме щелкнем по кнопке фильтра , для отображения общей системы координат – по кнопке фильтра .

7. Откройте раздел **Загрузки** и задайте нагрузку на раму. Для отображения величин введенных нагрузок активизируйте кнопку фильтра . Внешний вид созданной конечно-элементной модели балки показан на *рис.26*.

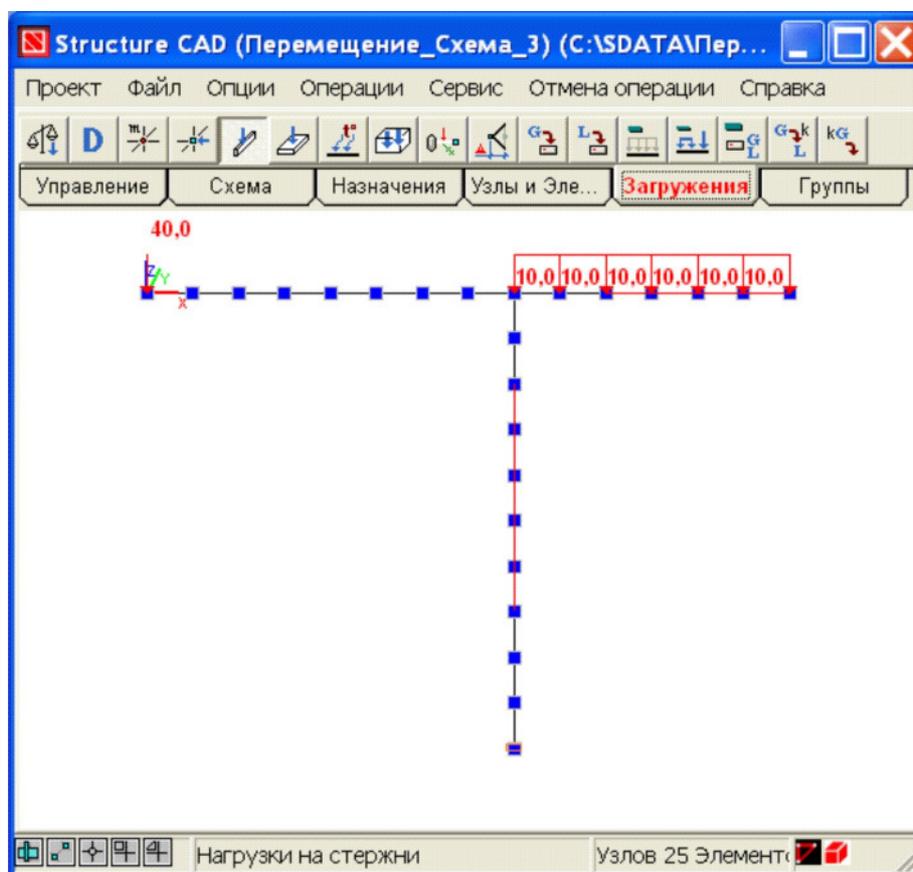


Рис.26

8. В разделе **Деформации** проверьте соответствие деформированной схемы балки заданной нагрузке и опорным закреплениям (*рис.27*). Внешний вид деформированной схемы рамы возмущений не вызывает: в заделке линейные и угловые перемещения равны нулю, ригель и стойка рамы деформируются в соответствии с заданной нагрузкой. Включите фильтр отображения **Информация об узле** и сопоставьте величины вертикальных и угловых перемещений сечения **A**, полученные в результате расчетов в двух программных комплексах: **MathCAD** и **SCAD**. Модуль перемещения центра тяжести сечения **A** в направлении оси **z**: в **MathCAD** - **27,7 см**, в **SCAD** - **27,21 см**; угол поворота: в **MathCAD** - **0,041 рад**, в **SCAD** - **0,040 рад**.

В первом приближении можно считать, что результаты расчетов совпадают.

9. Эпюры нормальных, поперечных сил и изгибающих моментов приведены на *рис.28*.

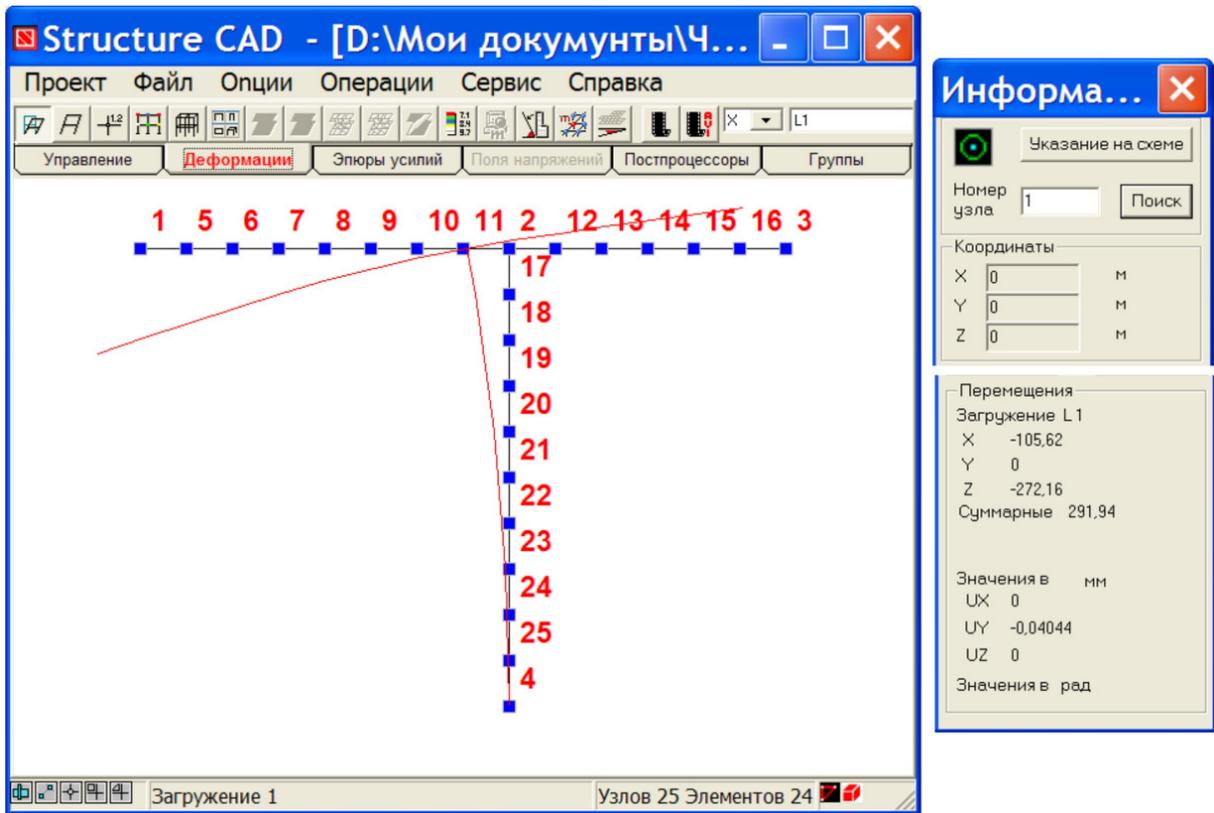


Рис.27

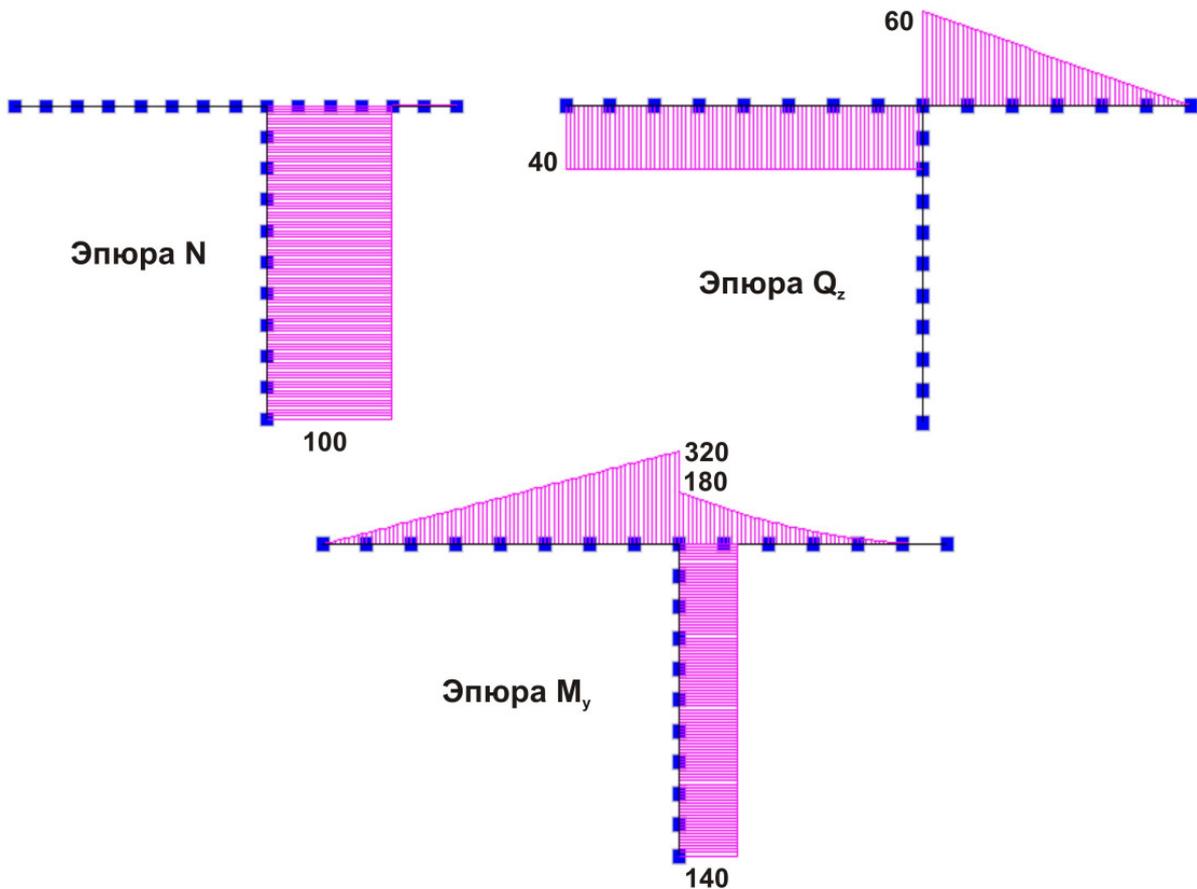


Рис.28

### 3.4. Расчет упругих систем в программном комплексе Patran 2005

#### 3.4.1. Схема 1

1. Запустите систему **MSC.Patran**.
2. В главном меню нажмите кнопку **File New**, в открывшейся форме **New Database** задайте имя новой базы данных и щелкните по клавише **OK**.
2. Одновременно с текущим окном просмотра графических символов **MSC.Patran** появится форма **New Model Preference**, на которой задайте все коды специфических форм и опций внутри **MSC.Patran** (рис.29).

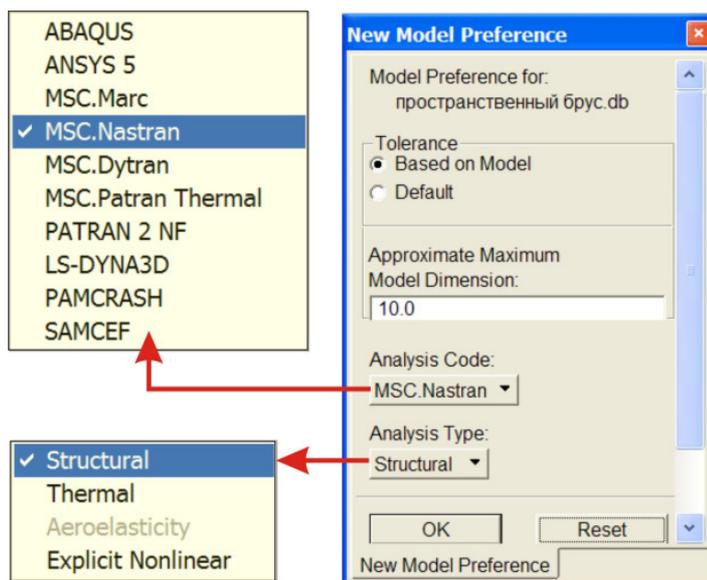


Рис.29

На этой форме установите:

*Tolerance:*

*Analysis Code:*

*Analysis Type:*

**OK**

**Based on Model**

**MSC.Nastran**

**Structural**

3. Определите настройки пользователя. Из главного меню выберите комплект зависимых форм (рис.30).

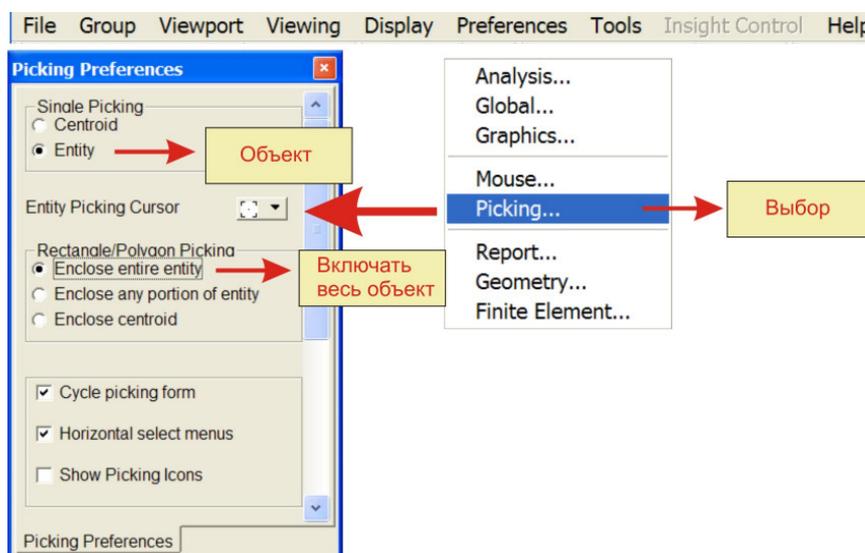


Рис.30

**Preferences / Picking...**

*Single Picking:*  
*Rectangle / Polygon Picking:*  
**Close**

**Entity**  
**Enclose entire entity**

4. Создайте геометрию балки. Активизируйте приложение **Geometry** (рис.31).

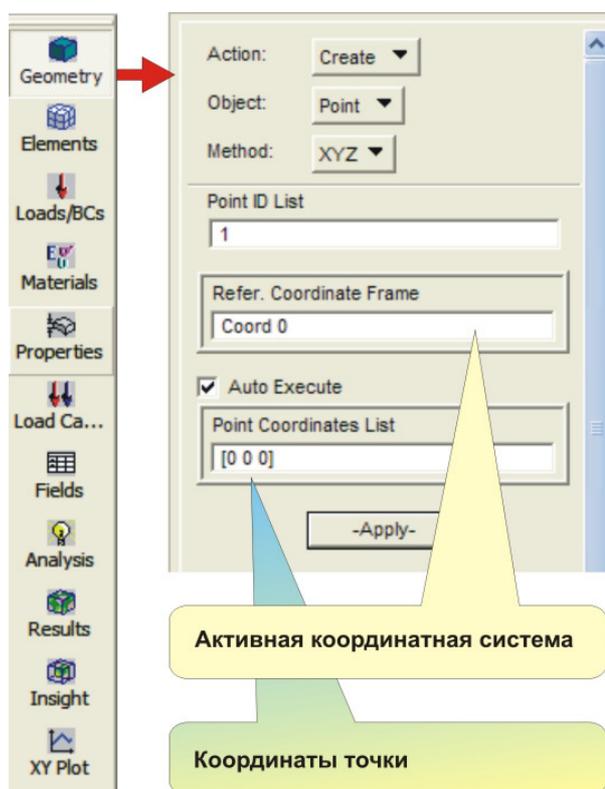


Рис.31

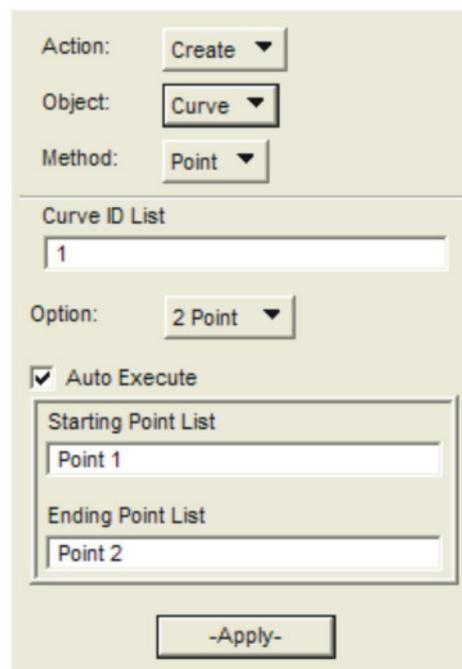


Рис.32

5. В открывшейся одноименной панели задайте команды (рис.31):

*Action:* **Create**  
*Object:* **Point**  
*Method:* **XYZ**

6. В поле **Point Coordinates List** введите координаты первого узла и нажмите клавишу **Apply**. Операцию повторяйте до тех пор, пока не будут введены координаты всех узлов. Для того чтобы контролировать положение введенных точек, активизи-

руйте кнопку  «**Положение точек**».

7. На панели **Geometry** нажмите клавишу **Point** и активизируйте опцию **Curve**. Панель **Geometry** примет вид, изображенный на рис.32.

8. Последовательно щелкая по стартовой и конечной точкам, соедините их линиями. Получите изображение оси балки.

9. Для создания конечно-элементной сетки откройте приложение **Elements** и на появившейся форме **Finite Elements** для каждого из участков балки задайте число элементов (число элементов на участках можно принять равным одной десятой их длины).

Для первого участка вводим:

*Action:* **Create**  
*Object:* **Mesh Seed**  
*Type:* **Uniform**  
*Number:* **10**  
*Curve List:* **List 1**

## Apply

Если переключатель Auto Execute включен, то нажимать на клавишу Apply не надо

Для всех остальных участков повторите перечисленные выше действия.  
Создайте конечно-элементную сетку:

<i>Action:</i>	<b>Create</b>
<i>Object:</i>	<b>Mesh</b>
<i>Type:</i>	<b>Curve</b>
<i>Topology:</i>	<b>Bar 2</b>
<i>Curve List:</i>	<b>List 1</b>
<b>Apply</b>	

Для всех остальных участков повторите перечисленные действия.

Для удаления совпадающих узлов выполните операцию **Equivalence**.

10. Задайте свойства материала бруса такие же, как в **SCAD**: модуль продольной упругости  $2.0601 \cdot 10^{11}$  Па, коэффициент Пуассона **0.3**. Откройте форму приложения

**Materials** нажатием клавиши . На форме **Materials** задайте:

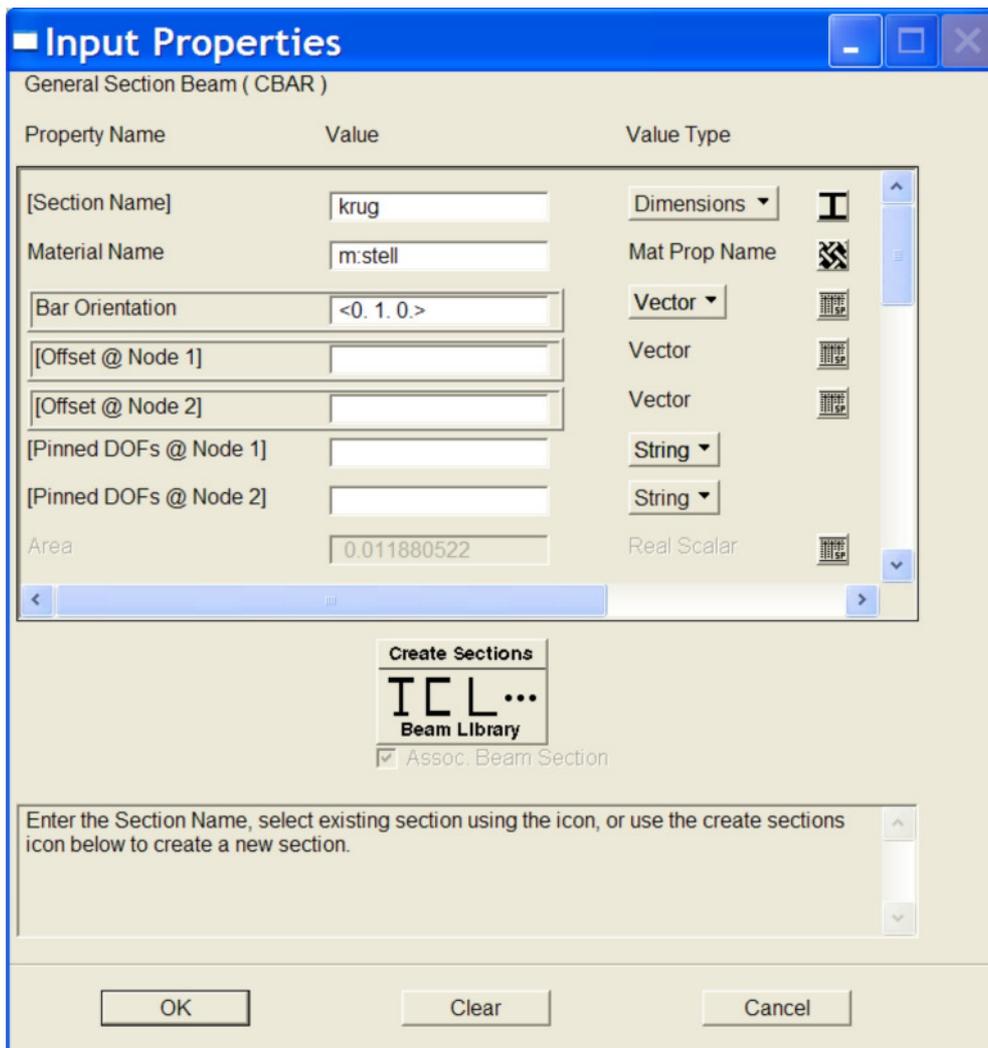
<i>Action:</i>	<b>Create</b>
<i>Object:</i>	<b>Isotropic</b>
<i>Method:</i>	<b>Manual Input</b>
<i>Material Name:</i>	<b>Steel</b>
<b>Input Properties...</b>	
<i>Constitutive Model:</i>	<b>Linear Elastic</b>
<i>Elastic Modulus:</i>	<b>2.0601e11</b>
<i>Poisson's Ratio:</i>	<b>0.3</b>
<i>Density:</i>	
<b>OK</b>	
<b>Apply</b>	

11. Определите свойства элементов. Откройте форму приложения **Properties**

нажатием кнопки . На появившейся панели **Element Properties** задайте:

<i>Action:</i>	<b>Create</b>
<i>Object:</i>	<b>1D</b>
<i>Type:</i>	<b>Beam</b>
<i>Property Set Name:</i>	<b>Krug</b>
<i>Options:</i>	<b>General Section</b> <b>Standard Formulation</b>
<b>Input Properties...</b>	

Появится форма



Щёлкаем по кнопке  и задаём сечение  
*Section Name:* **Krug**



Щёлкаем по кнопке   
*Material Name:* **m:steel**  
*Bar Orientation* **<0 1 0>**  
**OK**  
*Select Members:* **Curve 1:3**  
**Add**



Action:  
Object:  
Method:  
Apply

Access Results  
Attach XDB  
Result Entities

Если расчет выполнен правильно, в информационной строке появится сообщение **End: Attach Result File**, и можно перейти к анализу результатов расчета.

15. Приложение **Results** открывается нажатием на клавишу . **MSC.Patran**.

	Action:	Create
	Object:	Quick Plot
При нажатой кнопке 	Окно: <b>Select Results Cases</b>	Default, A1: Static Subcase
<b>Select Results</b> в окнах	Окно: <b>Select Fringe Results</b>	Displacements, Translation
выбирают интересующую	Окно: <b>Select Deformation Result</b>	Displacements, Translation
информацию, например:		
При нажатой кнопке 	Определяют атрибуты полос	
При нажатой кнопке 	Определяют атрибуты деформированной модели	

На рис. 34 приведена информация о деформированном состоянии балки.

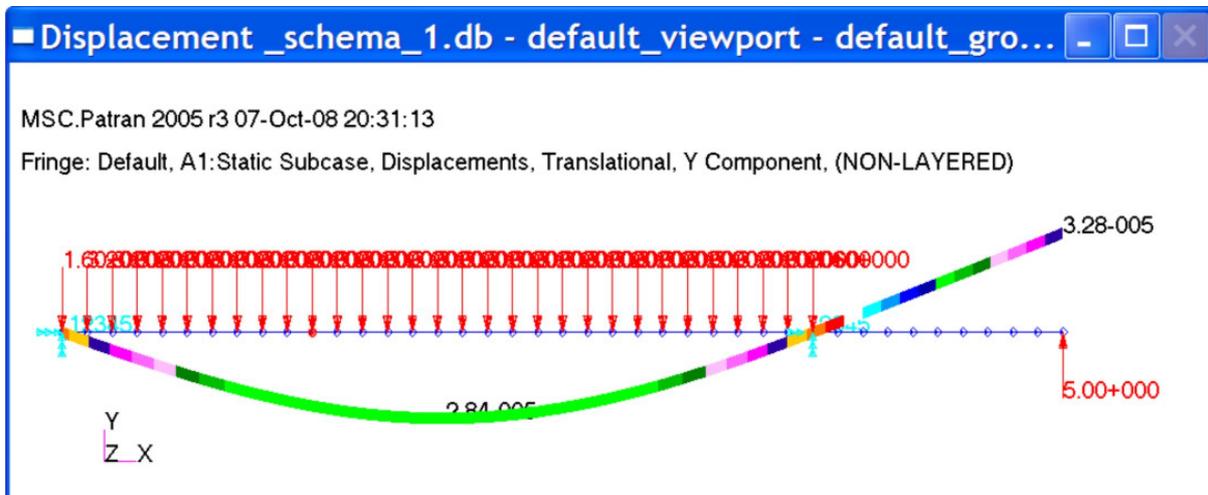


Рис.34

Как следует из рис.34, величины вертикальных перемещений в точке приложения сосредоточенной силы, вычисленные в программных комплексах **SCAD** и **Patran**, близки.

### 3.4.2. Схема 2

1. Повторите первые четыре пункта алгоритма создания конечно-элементной модели, описанные в разделе 3.4.1 Схема 1.
2. Создайте геометрию балки в приложении **Geometry**.

В поле **Point Coordinates List** введите координаты первого узла и нажмите клавишу **Apply**. Операцию повторяйте до тех пор, пока не будут введены координаты

наты всех узлов. Для того чтобы контролировать положение введенных точек, активизируйте кнопку  «Положение точек».

На панели **Geometry** нажмите клавишу **Point** и активизируйте опцию **Curve**. Последовательно щелкая по стартовой и конечной точкам, соедините их линиями. Получите изображение оси балки.

3. Для создания конечно-элементной сетки откройте приложение **Elements** и на появившейся форме **Finite Elements** для каждого из участков бруса задайте число элементов. На отрезке длиной  $L_1$  - **15** элементов, на отрезках длиной  $a_1$  и  $a_2$  - **5** элементов, на отрезке длиной  $L_2$  - **10** элементов.

Для первого участка вводим:

<i>Action:</i>	<b>Create</b>
<i>Object:</i>	<b>Mesh Seed</b>
<i>Type:</i>	<b>Uniform</b>
<i>Number:</i>	<b>15</b>
<i>Curve List:</i>	<b>List 1</b>
	Если переключатель Auto Execute включен, то нажимать на клавишу Apply не надо
	<b>Apply</b>

Для всех остальных участков повторите перечисленные выше действия. Создайте конечно-элементную сетку:

<i>Action:</i>	<b>Create</b>
<i>Object:</i>	<b>Mesh</b>
<i>Type:</i>	<b>Curve</b>
<i>Topology:</i>	<b>Bar 2</b>
<i>Curve List:</i>	<b>List 1</b>
	<b>Apply</b>

Для всех остальных участков повторите перечисленные действия.

Для удаления совпадающих узлов и создания шарнира **C** выполните операцию **Equivalence**.

- A. Активизируем команду **Action ► Create ► Equivalence**. Появившаяся измененная панель **Finite Elements** показана на *рис.35*. С шарниром **C** совпадают **22** и **23** узлы. С целью исключения этих узлов из операции **Equivalence**, так как в дальнейшем на их основе будет создан идеальный шарнир **C**, щелчком в окне **Nodes to be excluded** активизируем его, затем в графическом окне выделяем узлы **22** и **23**. В окне **Nodes to be excluded** появится запись **Node 22** и **23** (*рис.35*). Щелкнем по кнопке **Apply**. В графическом окне будут отмечены узлы, для которых выполнена операция **Equivalence**, а на информационной панели появится сообщение о том, что удалены два узла.

- B. Создаём **MPC** для шарниров **22** и **23**. На форме **Finite Elements** устанавливаем опции:

<b>Action ► Create</b>
<b>Object ► MPC</b>
<b>Type ► Explicit</b>

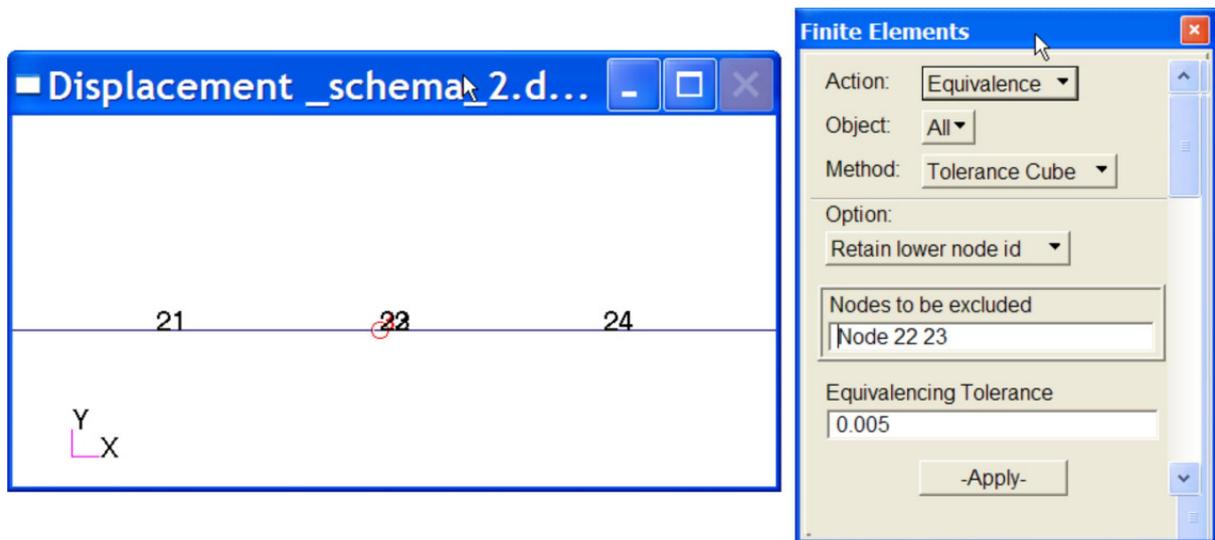


Рис.35

На изменившейся внешней вид панели **Finite Elements** нажимаем клавишу **Define Terms**. Появится одноименная панель (рис.36), на которой таблицы **Dependent Terms** (зависимые от условий задачи величины; может быть задана только одна величина), **Independent Terms** (независимые величины; могут быть заданы несколько величин) и окно **Node List** пока пусты, опция **Create Dependent** – активизирована.

- C. В окне отображения графической информации щелкаем по **22** узлу. Имя узла появляется в окне **Node List** панели **Define Terms** (рис.36).
  - D. В окне **DOFs** панели **Define Terms** указываем, на какие степени свободы будут наложены связи (в нашем случае при нажатой клавише **Shift** щелкаем левой клавишей мыши по **UX, UY** и **UZ**). Щелкаем по клавише **Apply**. Опция **Create Dependent** автоматически закрывается, опция **Create Independent** становится активной.
  - E. В окне **Node List** вводим **Node 44** и щелкаем по клавишам **Apply** на панели **Define Terms** и панели **Finite Elements**.
4. Задайте свойства материала бруса такие же, как в **SCAD**: модуль продольной упругости  $2.0601 \cdot 10^{11}$  Па, коэффициент Пуассона **0.3**. Откройте форму приложения **Materials** нажатием клавиши . На форме **Materials** задайте:

Action:	<b>Create</b>
Object:	<b>Isotropic</b>
Method:	<b>Manual Input</b>
Material Name:	<b>Steel</b>
<b>Input Properties...</b>	
Constitutive Model:	<b>Linear Elastic</b>
Elastic Modulus:	<b>2.0601e11</b>
Poisson's Ratio:	<b>0.3</b>
Density:	
<b>OK</b>	
<b>Apply</b>	

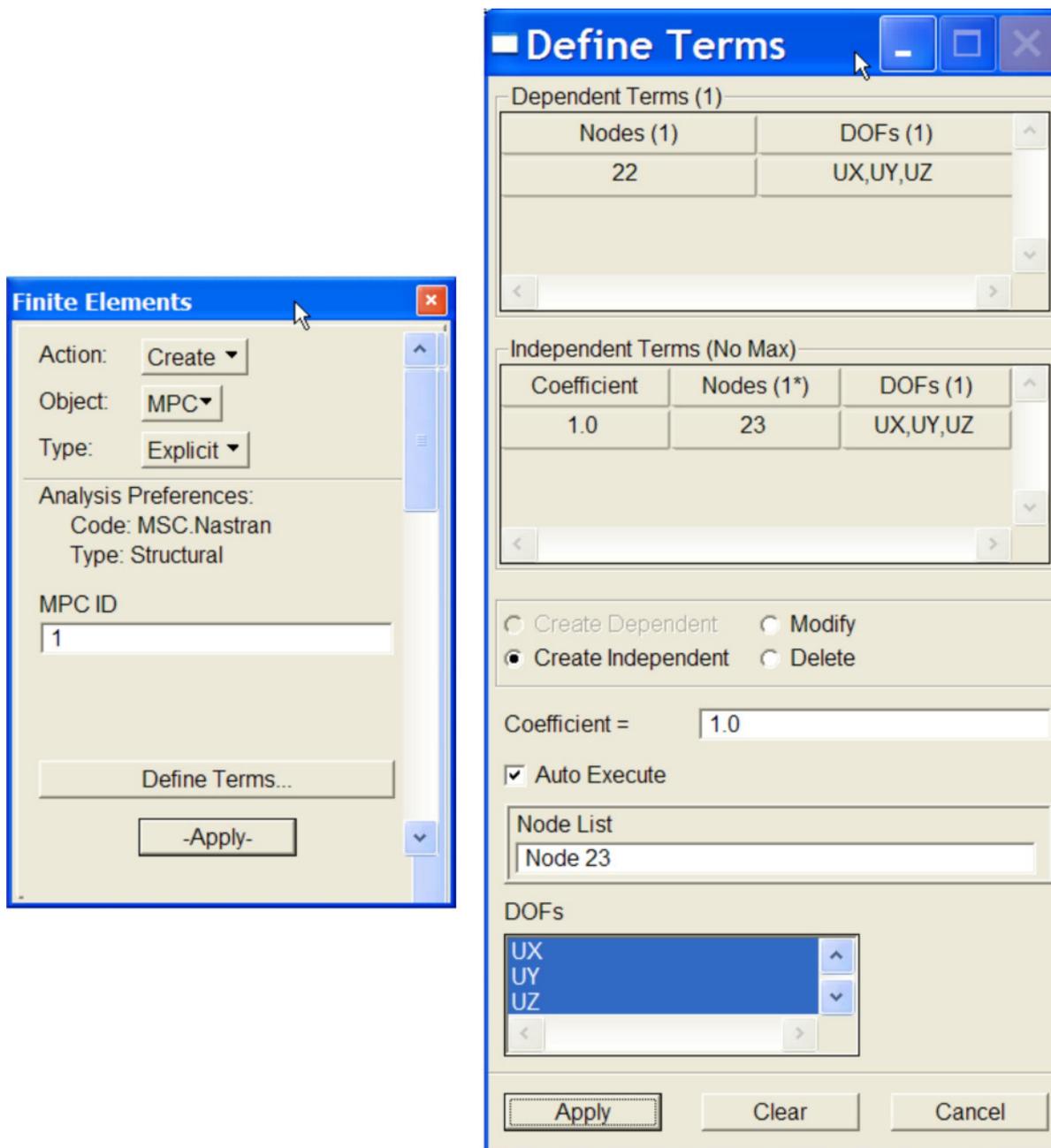


Рис.36

4. Определите свойства элементов балки. Жесткость стержневых элементов задайте такую же, как у двутавра **№24a** с уклоном полок по ГОСТ 8239-56, номер которого определили в **MathCAD**.

Откройте форму приложения **Properties** нажатием кнопки . На появившейся панели **Element Properties** задайте:

*Action:*

*Object:*

*Type:*

*Property Set Name:*

*Options:*

**Input Properties...**

Появится форма

**Create**

**1D**

**Beam**

**Two-Tauri**

**General Section**

**Standard Formulation**

**Input Properties**

General Section Beam ( CBAR )

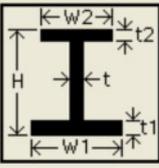
Property Name	Value	Value Type
[Section Name]	Two-Tauri	Dimensions
Material Name	m:steel	Mat Prop Name
Bar Orientation	<0 1 0>	Vector
[Offset @ Node 1]		Vector
[Offset @ Node 2]		Vector
[Pinned DOFs @ Node 1]		String
[Pinned DOFs @ Node 2]		String
Area	0.0034226	Real Scalar

Create Sections  
  
 Assoc. Beam Section

Enter the Bar Orientation or select a field with the icon. Specify if this value is a Vector or Node ID with the dropdown.

OK Clear Cancel

Щёлкаем по кнопке  и задаём сечение  
*Section Name:* **Two-Tauri**



H	0.23999999
W1	0.115
W2	0.115
t	0.0055999998
t1	0.0094999997
t2	0.0094999997

Щёлкаем по кнопке   
*Material Name:* **m:steel**

Bar Orientation  
OK  
Select Members:  
Add  
Apply

<0 1 0>

Curve 1:4

Геометрические характеристики заданного поперечного сечения балки приведены на *рис.37*.

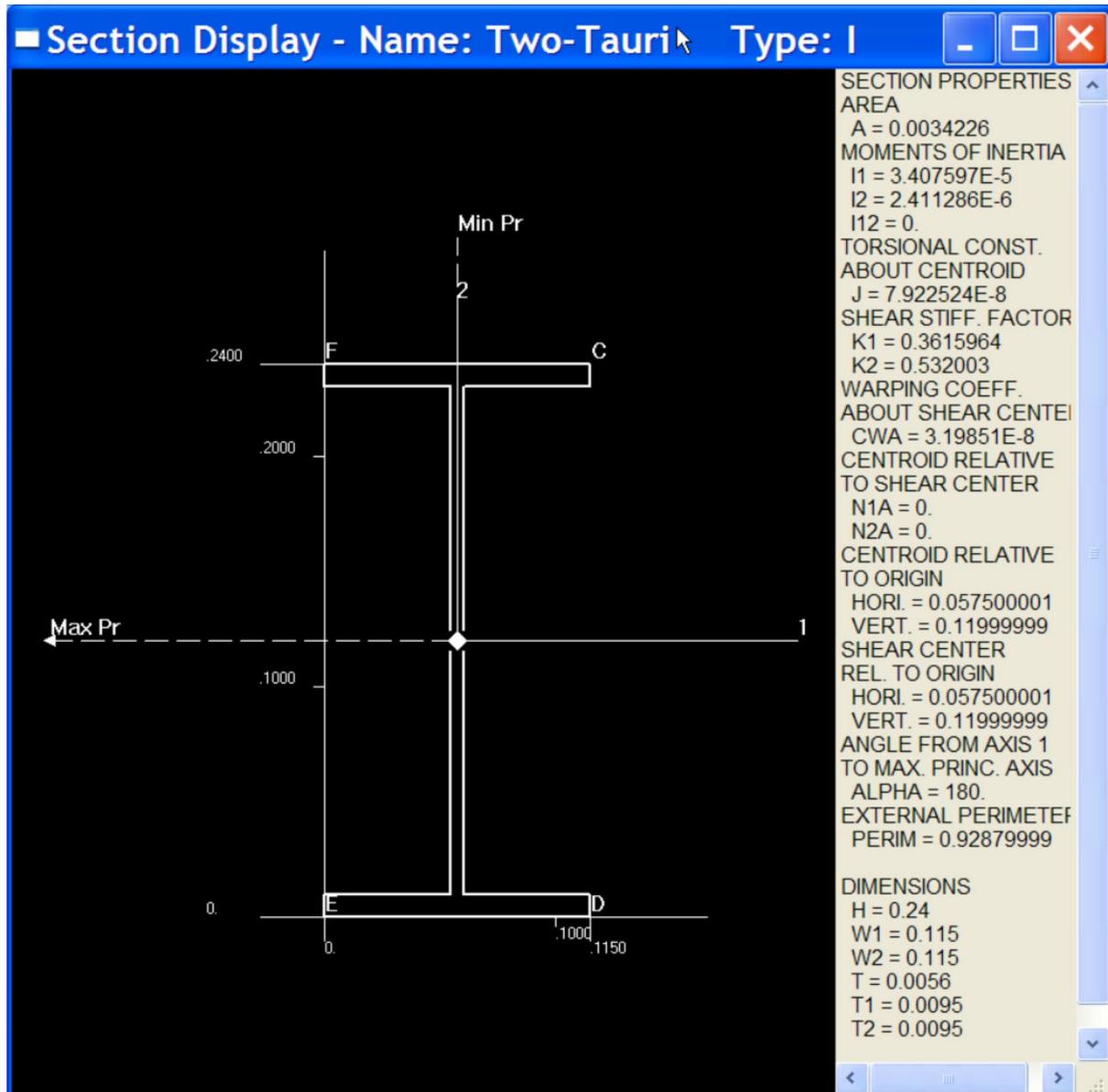


Рис.37

5. На форме **Loads/Boundary Conditions** задайте граничные условия: силовые и кинематические. Равномерно распределённую нагрузку на втором участке задайте с помощью опции **Distributed Load**.

В результате в окне отображения графической информации балка будет выглядеть так, как показано на *рис.38*. Обратите внимание, что все силовые факторы приложены к оси балки. По этой причине некоторых стрелок у векторов нагрузок не видно.

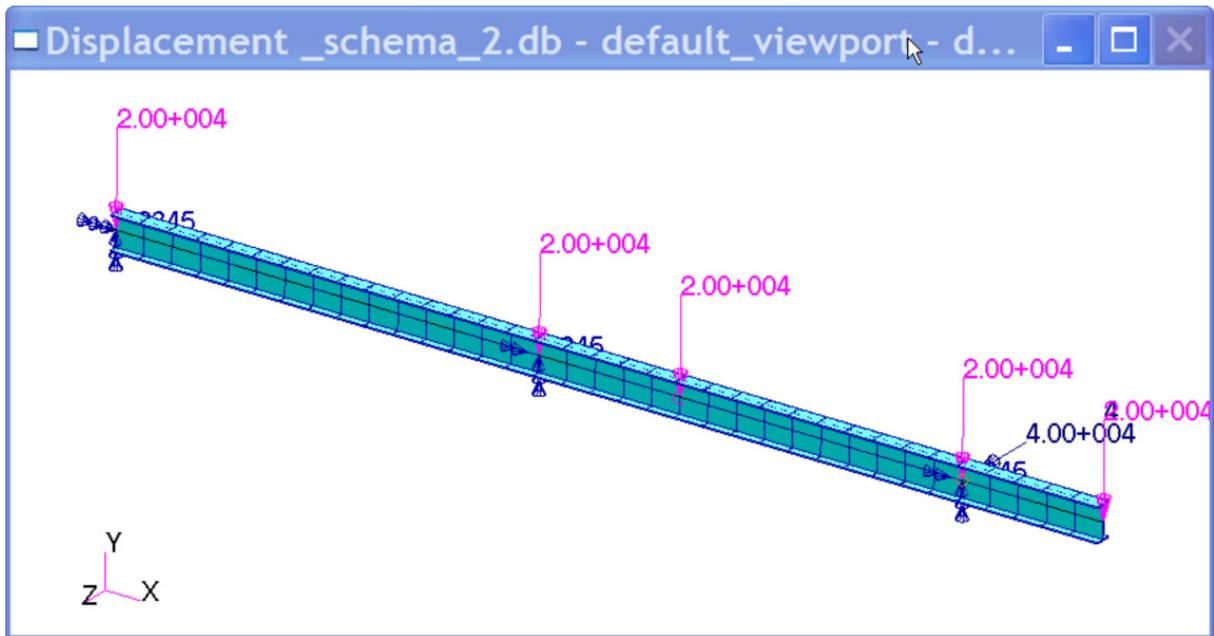


Рис.38

6. Модель готова к анализу. Открываем приложение **Analysis**.

<i>Action:</i>	<b>Analyze</b>
<i>Object:</i>	<b>Entire Model</b>
<i>Method:</i>	<b>Full Run</b>
<i>Code:</i>	<b>MSC.Nastran</b>
<i>Type:</i>	<b>Structural</b>
<i>Job Name:</i>	<b>Displacement_schema_2</b>
	<b>Apply</b>

7. В результате этих действий запустится вычислительная программа **Nastran**. После окончания вычислений необходимо результаты расчета сделать доступными в **MSC.Patran**. Для этого активизируем команду **Action ► Access Results** и нажимаем клавишу **Apply**:

<i>Action:</i>	<b>Access Results</b>
<i>Object:</i>	<b>Attach XDB</b>
<i>Method:</i>	<b>Result Entities</b>
	<b>Apply</b>

Если расчет выполнен правильно, в информационной строке появится сообщение **End: Attach Result File**, и можно перейти к анализу результатов расчета.

8. Приложение **Results** открывается нажатием на клавишу  **Results**. **MSC.Patran**.

При нажатой кнопке  <b>Select Results</b> в окнах выбирают интересующую	<i>Action:</i>	<b>Create</b>
	<i>Object:</i>	<b>Quick Plot</b>
	<i>Окно:</i>	<b>Default, A1: Static Sub-case</b>
	<i>Окно:</i>	<b>Select Results Cases</b>
	<i>Окно:</i>	<b>Select Fringe Results</b>
		<b>Displacements, Translation</b>

информацию, например:

Окно: **Select Deformation Result**

**Displacements, Translation**

При нажатой кнопке



Определяют атрибуты полос

При нажатой кнопке



Определяют атрибуты деформированной модели

На рис. 39 приведена информация о деформированном состоянии балки.

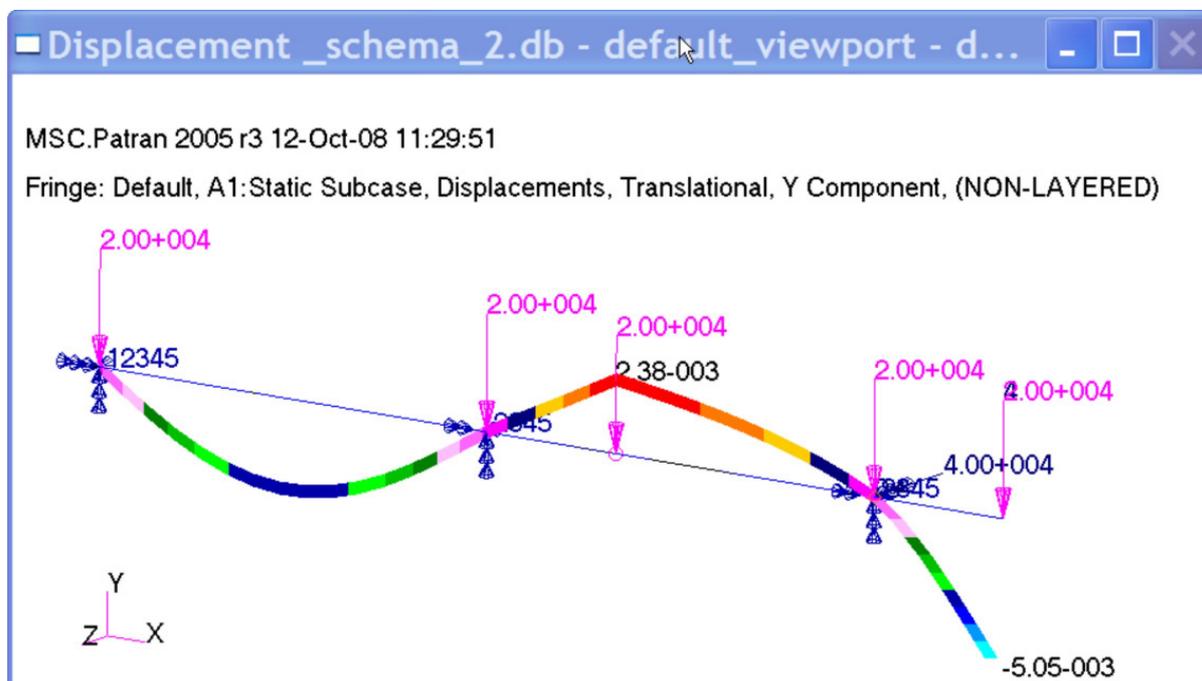


Рис.39

Как следует из рис.39, величины вертикальных перемещений в шарнире **C**, вычисленные в программных комплексах **MathCAD** и **Patran**, близки.

### 3.4.3. Схема 3

1. Повторите первые четыре пункта алгоритма создания конечно-элементной модели, описанные в разделе 3.4.1 Схема 1.
2. Создайте геометрию рамы в приложении **Geometry**.
3. Для создания конечно-элементной сетки откройте приложение **Elements** и на появившейся форме **Finite Elements** для каждого из участков рамы задайте число элементов: на левой консоли ригеля **8** элементов, на правой – **6** элементов, на стойке рамы – **10** элементов.

Для первого участка вводим:

Action:  
Object:  
Type:  
Number:  
Curve List:

**Apply**

**Create  
Mesh Seed  
Uniform  
8  
List 1**

Если переключатель Auto Execute включен, то нажимать на клавишу Apply не надо

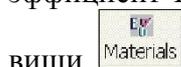
Для всех остальных участков повторите перечисленные выше действия.  
Создайте конечно-элементную сетку:

<i>Action:</i>	<b>Create</b>
<i>Object:</i>	<b>Mesh</b>
<i>Type:</i>	<b>Curve</b>
<i>Topology:</i>	<b>Bar 2</b>
<i>Curve List:</i>	<b>List 1</b>
	<b>Apply</b>

Для всех остальных участков повторите перечисленные действия.

Для удаления совпадающих узлов выполните операцию **Equivalence**.

5. Задайте свойства материала бруса: модуль продольной упругости  $2.0 \cdot 10^{11}$  Па, коэффициент Пуассона **0.3**. Откройте форму приложения **Materials** нажатием клавиши



На форме **Materials** задайте:

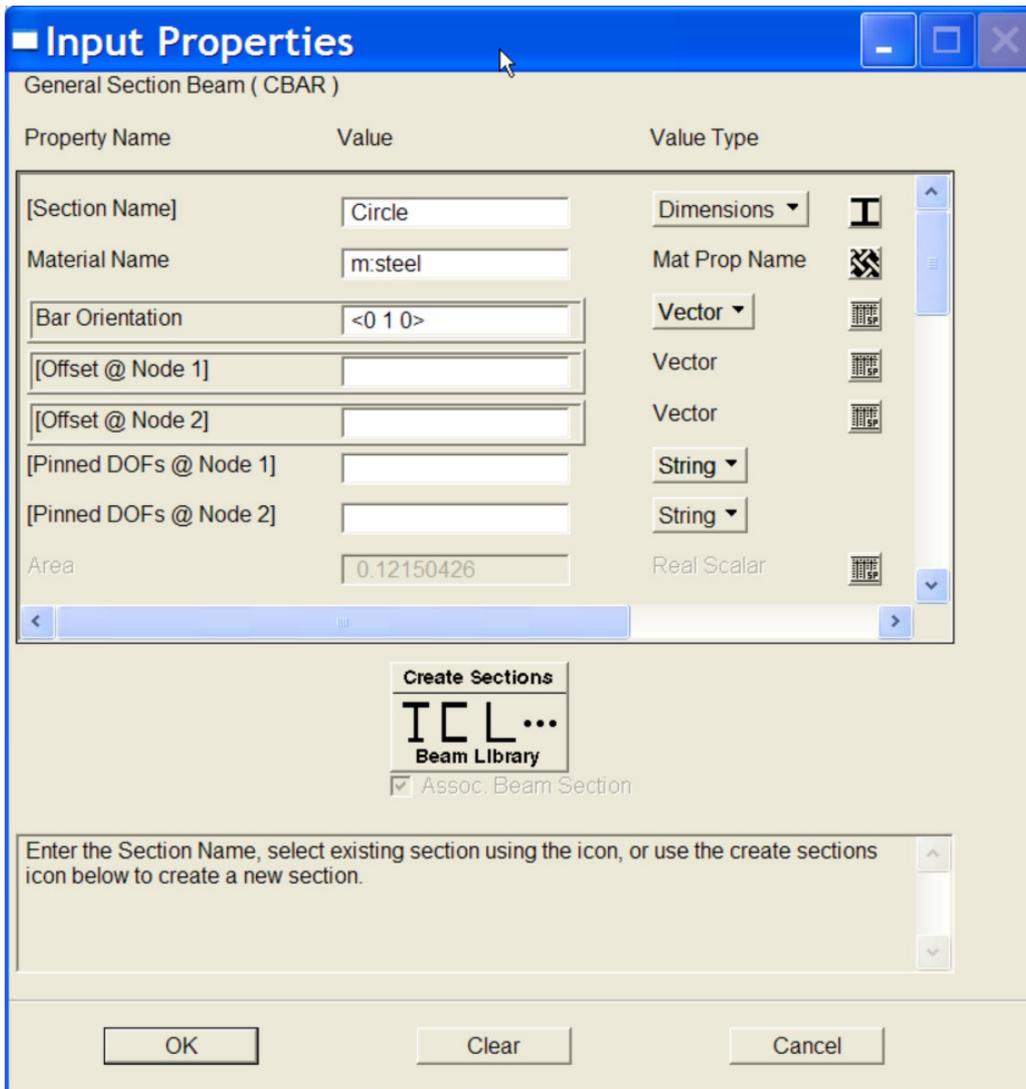
<i>Action:</i>	<b>Create</b>
<i>Object:</i>	<b>Isotropic</b>
<i>Method:</i>	<b>Manual Input</b>
<i>Material Name:</i>	<b>Steel</b>
<b>Input Properties...</b>	
<i>Constitutive Model:</i>	<b>Linear Elastic</b>
<i>Elastic Modulus:</i>	<b>2.0e11</b>
<i>Poisson's Ratio:</i>	<b>0.3</b>
<i>Density:</i>	
	<b>OK</b>
	<b>Apply</b>

6. Определите свойства элементов балки. Жесткость стержневых элементов задайте такую же, как у двутавра **№24a** с уклоном полок по ГОСТ 8239-56, номер которого определили в **MathCAD**.

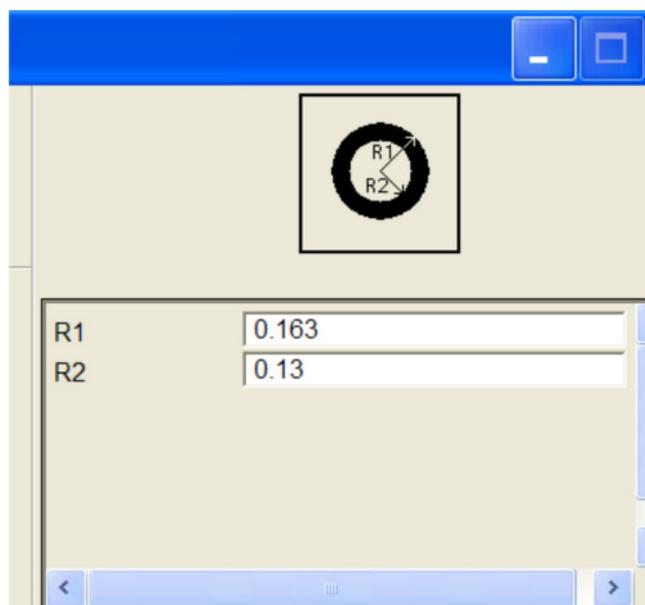
Откройте форму приложения **Properties** нажатием кнопки . На появившейся панели **Element Properties** задайте:

<i>Action:</i>	<b>Create</b>
<i>Object:</i>	<b>1D</b>
<i>Type:</i>	<b>Beam</b>
<i>Property Set Name:</i>	<b>Circle</b>
<i>Options:</i>	<b>General Section</b>
	<b>Standard Formulation</b>
<b>Input Properties...</b>	

Появится форма



Щёлкаем по кнопке  и задаём сечение **Circle**  
*Section Name:*



Щёлкаем по кнопке 

Material Name:

m:steel

Bar Orientation  
Для ригеля  
Для стойки

<0 1 0>

<1 0 0>

OK

Select Members:

Curve 1:4

Add

Apply

Геометрические характеристики заданного поперечного сечения балки приведены на *рис.40*.

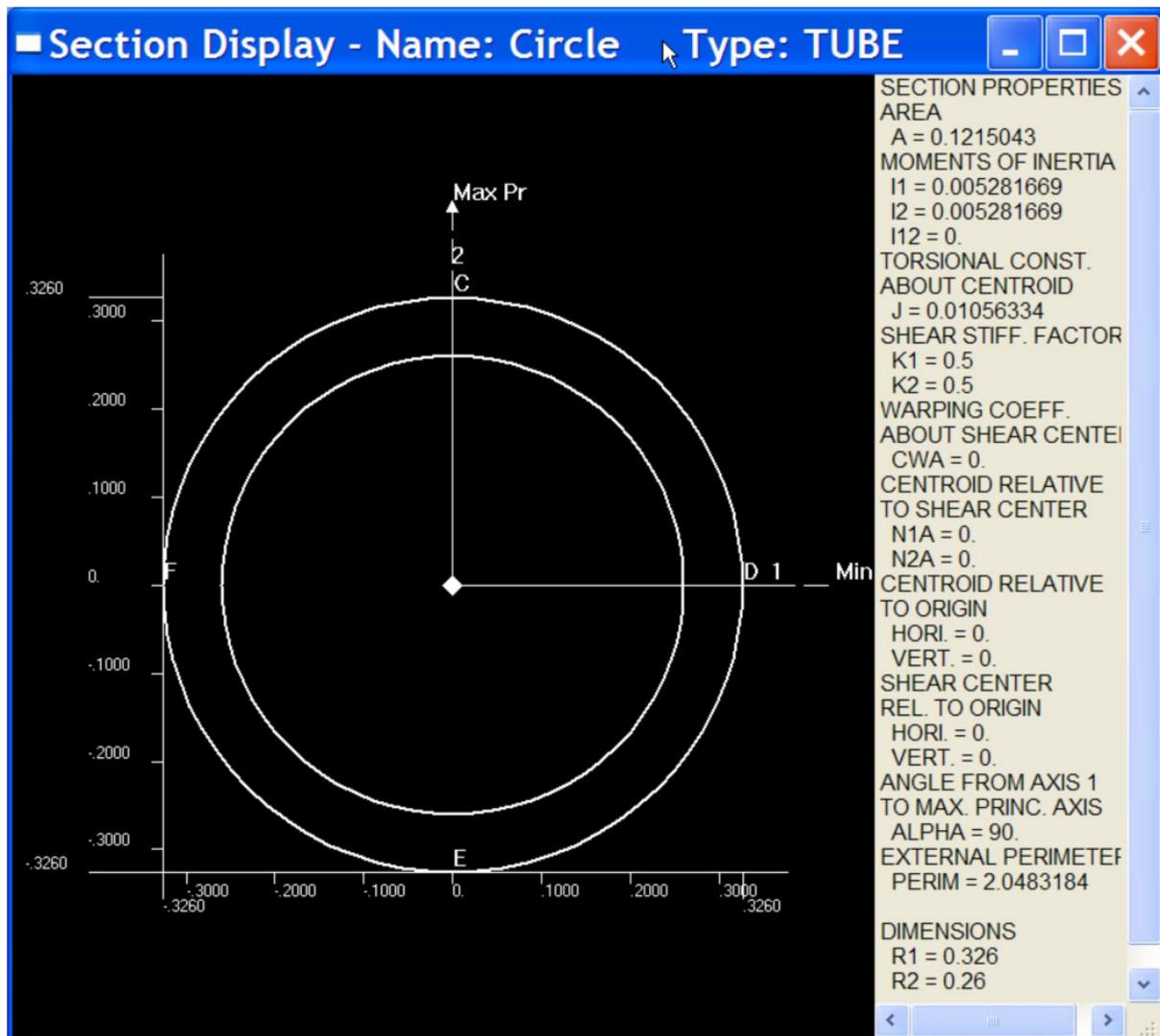


Рис.40

7. На форме **Loads/Boundary Conditions** задайте граничные условия: силовые и кинематические. Равномерно распределённую нагрузку на втором участке задайте с помощью опции **Distributed Load**.

В результате в окне отображения графической информации рама будет выглядеть так, как показано на *рис.41*. Обратите внимание, что все силовые факторы приложены к оси рамы. По этой причине некоторых стрелок у векторов нагрузок не видно.

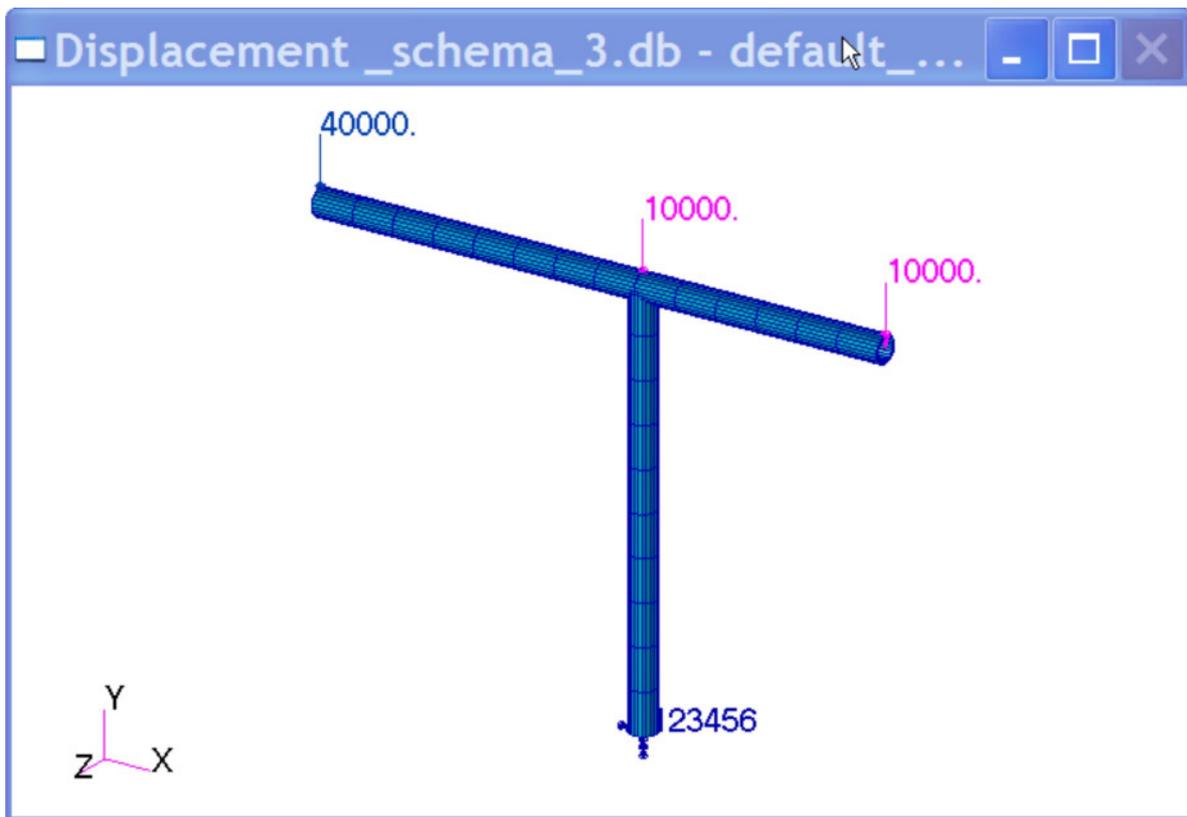


Рис.41

8. Модель готова к анализу. Открываем приложение **Analysis**.

<i>Action:</i>	<b>Analyze</b>
<i>Object:</i>	<b>Entire Model</b>
<i>Method:</i>	<b>Full Run</b>
<i>Code:</i>	<b>MSC.Nastran</b>
<i>Type:</i>	<b>Structural</b>
<i>Job Name:</i>	<b>Displacement_schema_3</b>
	<b>Apply</b>

9. В результате этих действий запустится вычислительная программа **Nastran**. После окончания вычислений необходимо результаты расчета сделать доступными в **MSC.Patran**. Для этого активизируем команду **Action ► Access Results** и нажимаем клавишу **Apply**:

<i>Action:</i>	<b>Access Results</b>
<i>Object:</i>	<b>Attach XDB</b>
<i>Method:</i>	<b>Result Entities</b>
	<b>Apply</b>

Если расчет выполнен правильно, в информационной строке появится сообщение **End: Attach Result File**, и можно перейти к анализу результатов расчета.

10. Приложение **Results** открывается нажатием на клавишу  **MSC.Patran**.

<i>Action:</i>	<b>Create</b>
<i>Object:</i>	<b>Quick Plot</b>

При нажатой кнопке  **Select Results** в окнах выбирают интересующую информацию, например:

Окно: **Select Results Cases**

Default, A1: Static Subcase

Окно: **Select Fringe Results**

Displacements, Translation

Окно: **Select Deformation Result**

Displacements, Translation

При нажатой кнопке 

Определяют атрибуты полос

При нажатой кнопке 

Определяют атрибуты деформированной модели

На рис. 42 приведена информация о деформированном состоянии рамы.

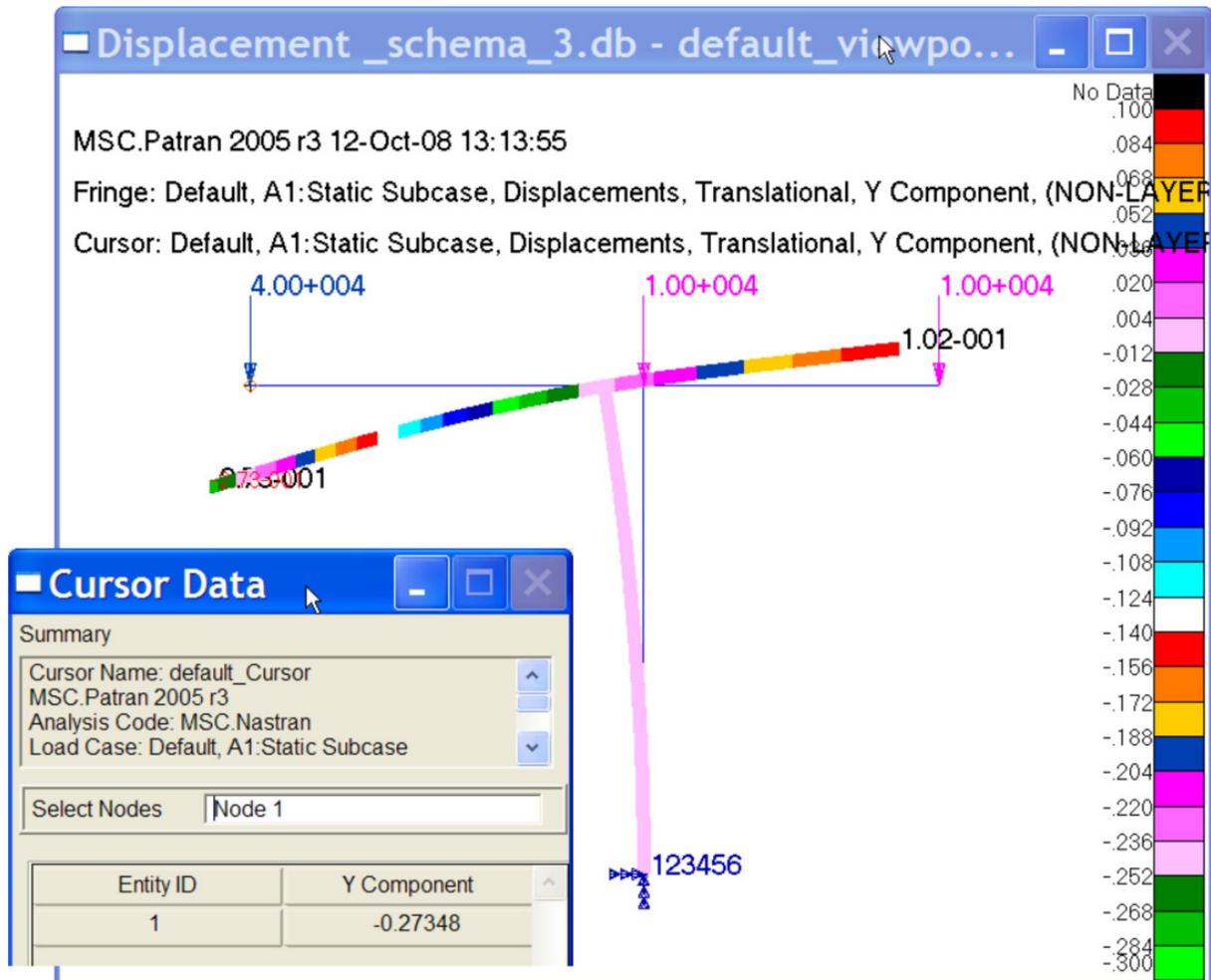


Рис.42

Как следует из рис.42, величины вертикальных перемещений в шарнире **C**, вычисленные в программных комплексах **MathCAD**, **SCAD** и **Patran**, близки.

#### 4. ВОПРОСЫ ДЛЯ САМОПРОВЕРКИ

1. Как выражается работа внешних статически приложенных сил через величины этих сил и соответствующих перемещений?
2. Как выражается работа внешних статически приложенных сил через внутренние усилия, возникающие в поперечных сечениях стержневой системы?
3. Как формулируется теорема о взаимности работ?
4. Как формулируется теорема о взаимности перемещений?
5. Как записывается формула Максвелла-Мора?
6. Что такое действительное (или грузовое) и единичное (или фиктивное) состояния?
7. В каком порядке производится определение линейных и угловых перемещений по формуле Мора?
8. Как определяются взаимные линейные перемещения каких-либо точек сооружения? То же, взаимные угловые перемещения двух каких-либо сечений?
9. Как производится перемножение эпюр по правилу Верещагина?
10. Как по правилу Верещагина производится перемножение эпюр, ограниченных ломаными линиями?
11. Запишите формулу Симпсона для вычисления интеграла Максвелла-Мора.
12. Запишите алгоритм вычисления перемещений в матричной форме.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. – М.: Высш. школа, 1989. – 624 с. (и последующие издания).
2. Сопротивление материалов //А.Ф. Смирнов, А.В. Александров и др. / Под ред. А.Ф. Смирнова. – М.: Высш. школа, 1975. – 480 с. (и последующее издания).
3. Заславский Б.В. Краткий курс сопротивления материалов. – М.: Машиностроение, 1986. – 328 с.
4. Ицкович Г.М., Винокуров А.И., Минин Л.С. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов. - М.: Высш. шк., 1970. – 540 с.
5. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики: Учебное пособие для студентов вузов// Г.К. Клейн и др.; Под ред. Г.К. Клейна.– М.: Высшая школа, 1980. - 384 с.
6. Жилкин В.А. Элементы прикладной и строительной механики сельхозмашин. Применение программ **MathCAD**, **SCAD**, **MSC.Patran-Nastran 2005**.– Челябинск: ЧГАУ, 2007. - 345 с.