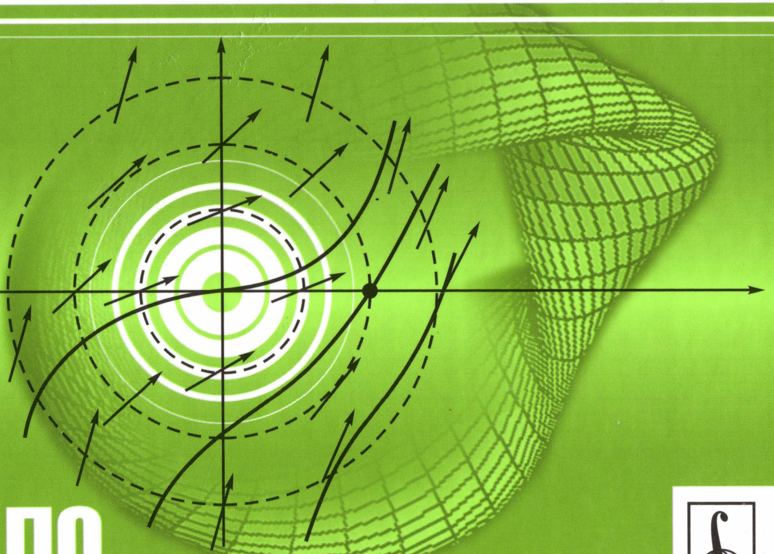
Н. Г. ТАКТАРОВ

СПРАВОЧНИК ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ



ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВУЗОВ

URSS

Н. Г. Тактаров

СПРАВОЧНИК ПО ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКЕ
ДЛЯ СТУДЕНТОВ ВУЗОВ

Издание стереотипное

URSS
МОСКВА

ББК 22.1я73 92

Тактаров Николай Григорьевич

Справочник по высшей математике для студентов вузов.
Изд. стереотип. — М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2019. — 880 с.

Настоящий справочник содержит все главные разделы высшей математики — от математического анализа и алгебры до математической логики и дифференциальной геометрии, включая аналитическую геометрию, теорию функций комплексной переменной, теорию дифференциальных уравнений, вариационное исчисление, векторный и тензорный анализ, теорию вероятностей, математическую статистику, теорию множеств и численные методы. Наряду с теоретическим материалом в справочник включено более 500 примеров с подробными решениями. Способ изложения материала в сочетании с объемом содержащейся информации дает отличную возможность применения справочника в современных учебных программах и в то же время ставит данную книгу в один ряд с лучшими классическими справочниками по высшей математике. Доступное изложение материала позволяет использовать справочник и для самостоятельного изучения математики.

Издание предназначено в основном для студентов, аспирантов и преподавателей университетов, институтов и высших инженерно-технических заведений. Оно будет, несомненно, полезно всем, кто изучает высшую математику.

Издательство «Книжный дом “ЛИБРОКОМ”».
117335, Москва, Нахимовский пр-т, 56.
Формат 70×100/32. Печ. л. 27,5. Зак. № 5959.

Отпечатано в ОАО ИПК «Ульяновский Дом печати».
432980, Ульяновск, ул. Гончарова, д. 14.

ISBN 978-5-397-06653-2

24970 ID 245855

9 785397 066532

Оглавление

Глава 1

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА. АЛГЕБРА

1.1. Действительные числа

1.1.1. Свойства действительных чисел

1.1.1.1. Рациональные и иррациональные числа

Натуральными называются числа $1, 2, 3, \ldots$. Числа $\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ носят название **целых чисел**.

Все **действительные** (или **вещественные**) числа подразделяются на рациональные и иррациональные числа. **Рациональным** называется число, которое можно представить в виде дроби p/q, где p, q — целые числа ($q \neq 0$), а также в виде конечной или бесконечной десятичной периодической дроби. Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются **иррациональными. Иррациональное число может быть представлено только в виде бесконечной непериодической десятичной дроби.** Натуральные и целые числа относятся к рациональными.

Пример 1. Числа $\dfrac{3}{4} = 0{,}75$ и $\dfrac{7}{11} = 0{,}636363\ldots$ являются рациональными. Числа $\sqrt{3} = 1{,}732050\ldots$ и $\pi = 3{,}141592\ldots$ — иррациональные.

1.1.1.2. Свойства сложения и умножения действительных чисел

Для любых действительных чисел a и b определены единственным образом числа $a + b$ и ab, называемые **суммой** и **произведением** этих чисел соответственно.

Сложение и умножение действительных чисел обладают следующими свойствами (a, b, c — любые действительные числа).

1) $a + b = b + a$, $ab = ba$ (коммутативность).
2) $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a(bc) = (ab)c$ (ассоциативность).

3) $a(b+c) = ab + ac$ (дистрибутивность).
4) Существует единственное число 0 (**нуль**) такое, что $a + 0 = a$.
5) Для любого числа a существует число b такое, что $a + b = 0$ $(b = -a)$.
6) Существует единственное число 1 (**единица**) такое, что $1 \cdot a = a$.
7) Для любого числа $a \neq 0$ существует число b такое, что $ab = 1$ $(b = 1/a)$.

1.1.1.3. Сравнение действительных чисел

Для любых двух действительных чисел a, b справедливо одно из трех соотношений: $a = b$, $a > b$, $a < b$.

При этом для любых действительных чисел a, b, c:

1) из $a < b$ и $b < c$ следует $a < c$;
2) из $a < b$ следует $a + c < b + c$;
3) если $a < b$ и $c > 0$, то $ac < bc$.

Если $a < b$, то пишут также $b > a$. Если $a < b$ или $a = b$, то пишут $a \leqslant b$. Число $a > 0$ называется **положительным**, $a < 0$ — **отрицательным**.

1.1.2. Непрерывность множества всех действительных чисел

Пусть множество всех **рациональных** чисел разбито на два таких непустых подмножества A и B (**классы**), что каждое рациональное число принадлежит только одному классу и из принадлежности чисел a и b классам A и B соответственно следует, что $a < b$. Тогда такое разбиение (называемое **сечением**) определяет:

1) Рациональное число, если класс A имеет наибольшее число или же класс B имеет наименьшее число.
2) Иррациональное число, если класс A не имеет наибольшего числа, а класс B наименьшего числа (**свойство непрерывности множества всех действительных чисел**). Множество всех рациональных чисел не обладает свойством непрерывности.

Пример 2. Если класс A состоит из рациональных чисел $a < \sqrt{3}$, а класс B — из рациональных чисел $b > \sqrt{3}$, то класс A не имеет наибольшего числа, в класс B — наименьшего. Для иррационального числа $\sqrt{3} = 1{,}732050\ldots$ можно взять бесконечную последовательность рациональных чисел $1{,}7 < 1{,}73 < 1{,}732 < \ldots < \sqrt{3}$, не превышающих числа $\sqrt{3}$, аналогично строится последовательность рациональных чисел $1{,}8 > 1{,}74 > 1{,}733 > \ldots > \sqrt{3}$, превышающих число $\sqrt{3}$.

Из вышеприведенных свойств действительных чисел следуют все остальные их свойства. Далее, для краткости, действительные (вещественные) числа обычно будем называть просто числами, если не оговорено противное.

1.1.3. Абсолютная величина

Абсолютная величина $|a|$ числа a определяется следующим образом:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если} \quad a \geqslant 0, \\ -a, & \text{если} \quad a < 0. \end{cases}$$

Свойства абсолютной величины:

1) $|a| \geqslant 0$, $|-a| = |a|$, $-|a| \leqslant a \leqslant |a|$, из $|a| = 0$ следует $a = 0$.
2) $|ab| = |a||b|$, $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$.
3) $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a + b| \leqslant |a| + |b|$.
4) $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b| \leqslant |a| + |b|$.
5) Из $|a| \leqslant A$, $|b| \leqslant B$ следует $|a + b| \leqslant A + B$ и $|ab| \leqslant AB$.

1.1.4. Некоторые часто встречающиеся постоянные

$$\sqrt{2} = 1{,}414214 = 1 : 0{,}707107, \qquad \pi = 3{,}141593 = 1 : 0{,}318310,$$

$$\sqrt{3} = 1{,}732051 = 1 : 0{,}577350, \qquad \sqrt{\pi} = 1{,}772454 = 1 : 0{,}564190,$$

$$\sqrt{10} = 3{,}162278 = 1 : 0{,}316228, \qquad \sqrt{2\pi} = 2{,}506628 = 1 : 0{,}398942,$$

$$\sqrt[3]{2} = 1{,}259921 = 1 : 0{,}793701, \qquad \frac{\pi}{2} = 1{,}570796,$$

$$e = 2{,}718282 = 1 : 0{,}367879, \qquad \frac{\pi}{3} = 1{,}047198,$$

$$e^2 = 7{,}389056 = 1 : 0{,}135335, \qquad \lg\pi = 0{,}497150,$$

$$\sqrt{e} = 1{,}648721 = 1 : 0{,}606531, \qquad \ln\pi = 1{,}144730,$$

$$\ln 10 = 2{,}302585 = 1 : 0{,}434294, \qquad e^{\pi} = 23{,}140693 = 1 : 0{,}043214,$$

$$\lg e = 0{,}434294, \qquad 180^\circ : \pi = 57^\circ{,}295780,$$

$$\ln 2 = 0{,}693147, \qquad \pi : 180 = 0{,}017453,$$

$$\ln 3 = 1{,}098612, \qquad \pi^2 = 9{,}869604 = 1 : 0{,}101321,$$

Постоянная Эйлера $C = 0{,}577216$.

n	$n!$	$1 : n!$	$\lg n!$
0	1	1	0,000000
1	1	1	0,000000
2	2	0,5	0,301030
3	6	0,166667	0,778151
4	24	0,041667	1,380021
5	120	0,008333	2,079182
6	720	0,001389	2,857333
7	5 040	0,000198	3,702431
8	40 320	0,000025	4,605520
9	362 880	0,000003	5,559763

n	2^n	2^{-n}
1	2	0,5
2	4	0,25
3	8	0,125
4	16	0,0625
5	32	0,03125
6	64	0,015625
7	128	0,007813
8	256	0,003906
9	512	0,001953
10	1 024	0,000971
11	2 048	0,000488
12	4 096	0,000244
13	8 192	0,000122
14	16 384	0,000061

1.1.5. Геометрическое изображение чисел и числовых множеств

1.1.5.1. Числовая ось

Пусть на некоторой прямой (рис. 1.1) заданы две различные точки O (**начало отсчета**) и E (**единичная точка**). Длина отрезка OE, называемого **единичным** (или **масштабным**) отрезком, принимается за единицу измерения длин всех отрезков на этой прямой. Направление на этой прямой от точки O к E называется **положительным направлением** и обозначается стрелкой, а направление

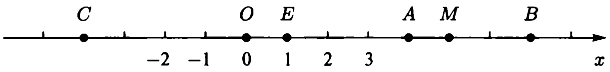


Рис. 1.1

от E к O — **отрицательным**. Прямая, с заданным на ней положительным направлением, называется **осью**. Ось с заданным началом отсчета длин и единичным отрезком называется **числовой прямой** (**числовой осью**, или **осью координат**). Обозначение: ось Ox.

Пусть A и B — две точки на оси Ox. **Направленным** называется отрезок, для которого указано, какая из его граничных точек A и B считается его **началом**, а какая — **концом**. Направленный отрезок, для которого A — начало, B — конец, обозначается $\overline{AB}$ (или $\overrightarrow{AB}$). Направление от начала отрезка к концу принимается за направление отрезка. Отрезок $\overline{BA}$ направлен от точки B к A. **Величиной** AB направленного отрезка $\overline{AB}$ на оси координат называется число, равное его длине $|\overline{AB}|$ (измеренной масштабным отрезком), взятой со знаком плюс (или минус), если направление $\overline{AB}$ и оси Ox совпадают (или противоположны). Величины отрезков $\overline{AB}$ и $\overline{BA}$ отличаются только знаками: $AB = -BA$. Если точки A и B совпадают, то $AB = 0$. На рис. 1.1 имеем: $OA = |\overline{OA}|$, $OC = -|\overline{OC}|$. Если направление от точки A к B положительное, то говорят, что точка B расположена правее точки A, а точка A — левее точки B.

Каждому числу соответствует единственная точка на числовой оси. Положительное (отрицательное) число a (c) изображается точкой A (C), лежащей правее (левее) точки O, причем длина отрезка $\overline{OA}$ ($\overline{OC}$) равна a ($|c|$) (рис. 1.1). И наоборот, каждой точке M оси Ox соответствует некоторое число x (называемое **координатой** точки M), равное длине отрезка $\overline{OM}$, взятой с надлежащим знаком. Точкам O и E соответствуют числа 0 и 1 соответственно. Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между множествами всех действительных чисел и всех точек на числовой оси. По этой причине часто не делается различий между понятиями «точка» и «число». Числовая ось обладает свойством **непрерывности.**

1.1.5.2. Некоторые числовые множества

Пусть a и b ($a < b$) — некоторые числа. Тогда множество всех чисел (точек) x, для которых:

1) $a < x < b$, называется **ограниченным интервалом** и обозначается $(a; b)$;
2) $a \leqslant x \leqslant b$, — **отрезком** $[a; b]$;
3) $a < x \leqslant b$, $a \leqslant x < b$, называются **конечными полуинтервалами** $(a; b]$ и $[a; b)$ соответственно;

4) $a \leqslant x < +\infty$; $-\infty < x \leqslant a$, — **бесконечными полуинтервалами** $[a; +\infty)$ и $(-\infty; a]$ соответственно;
5) $a < x < +\infty$; $-\infty < x < a$, — **бесконечными интервалами** $(a; +\infty)$ и $(-\infty; a)$ соответственно.

Все вышеперечисленные числовые множества называются также **промежутками**. При этом $[a; b]$ называют **замкнутым промежутком**, $(a; b)$ — **открытым промежутком**; a, b — **концы промежутка**, $(b-a)$ — **длина промежутка.** Числовые промежутки изображаются в виде геометрических промежутков на числовой оси Ox (рис. 1.1). Множество всех действительных чисел, а также вся числовая ось обозначаются одним из следующих способов: $-\infty < x < +\infty$ или $(-\infty; +\infty)$.

1.1.6. Грани числовых множеств

Числовое множество X называется **ограниченным сверху (снизу)**, если существует число C такое, что $x \leqslant C$ $(x \geqslant C)$ для всех x из X. Число C называется **верхней (нижней) границей** множества X. Множество, ограниченное и сверху, и снизу, называется **ограниченным.**

Пусть X — ограниченное снизу числовое множество. Число $m = \inf X$ называется **нижней гранью** множества X, если каждое число x из X удовлетворяет неравенству $x \geqslant m$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существует x' из X такое, что $x' < m + \varepsilon$. Аналогично, число $M = \sup X$ называется **верхней гранью** множества X, если каждое x из X удовлетворяет неравенству $x \leqslant M$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует x' из X такое, что $x' > M - \varepsilon$.

Если множество X не ограничено снизу (сверху), то полагают, что

$$\inf X = -\infty \quad (\sup X = +\infty).$$

Верхняя (нижняя) грань является наименьшим (наибольшим) числом, ограничивающим множество сверху (снизу). При этом $\inf X$ и $\sup X$ могут либо принадлежать, либо не принадлежать множеству X. Если $\inf X$ $(\sup X)$ принадлежит X, то он называется **минимальным (максимальным)** элементом X. Обозначение: $\min X$ $(\max X)$.

Любое непустое ограниченное сверху (снизу) множество имеет и притом только одну верхнюю (нижнюю) грань.

Пример 3. Для множества $X = (a; b]$ точка a является нижней гранью $a = \inf X$, а b — верхней $b = \sup X$. Причем нижняя грань a не принадлежит X, а верхняя грань b — принадлежит, т. е. $\sup X = \max X = b$.

Примечание. Если a — некоторая точка (действительное число) на оси Ox, δ — любое положительное число, то интервал $(a-\delta, a+\delta)$, содержащий точку a, называется (открытой) **δ-окрестностью** (или просто **окрестностью**) **точки** a. При этом $a - \delta < x < a + \delta$ или $|x - a| < \delta$. Если точка a совпадает с символом ∞, то ее окрестность: $|x| > 1/\delta$.

1.2. Некоторые сведения из элементарной алгебры. Логарифмы. Арифметическая и геометрическая прогрессии

1.2.1. Степени и корни

Если n — натуральное число, то a^n является произведением n сомножителей, равных a. При $a \neq 0$ по определению $a^0 = 1$. Нулевая степень числа нуль не имеет смысла.

Если $a > 0$ и n — натуральное, то **арифметическим корнем** n-й степени из a называется единственное положительное число, n-я степень которого равна a. Обозначение: $\sqrt[n]{a}$ или $a^{1/n}$. Если $a < 0$, то корень определяется лишь при нечетном n. Для $a = 0$ имеем $\sqrt[n]{0} = 0$. Если рассматриваются оба значения (положительное и отрицательное) корня четной степени из $a > 0$, то говорят об **алгебраическом корне**.

Пусть $a \geqslant 0$, m и n — натуральные числа. Тогда по определению:

$$a^{m/n} \equiv (\sqrt[n]{a})^m \equiv \sqrt[n]{a^m} \equiv (a^{1/n})^m, \quad a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad (a \neq 0).$$

Для любых рациональных и иррациональных чисел p, q справедливы равенства

$$a^p a^q = a^{p+q}, \quad (a^p)^q = a^{pq}, \quad (ab)^p = a^p b^p, \quad a^p : a^q = a^{p-q} \quad (a > 0,\ b > 0).$$

1.2.2. Некоторые часто используемые формулы

Если a, b — некоторые числа, то:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2,$$
$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2 b + 3ab^2 \pm b^3,$$

. . . .

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$
$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (m = 1, 2, 3, \ldots, n-1), \quad C_n^m = C_n^{n-m},$$

где $n!$ — **факториал** целого числа $n \geqslant 0$, определяемый формулами

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \quad (n > 0), \quad 0! = 1,$$

и представляющий собой произведение всех натуральных чисел от 1 до n.

Формула для $(a + b)^n$ называется **биномом Ньютона.**

Для любых чисел a, b, c выполняются следующие формулы

$$
\begin{aligned}
(a+b+c)^2 &= a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc,\\
a^2-b^2 &= (a-b)(a+b),\\
a^3-b^3 &= (a-b)(a^2+ab+b^2),\\
a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2),\\
a^n-b^n &= (a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1})\\
&\quad (n \text{ — любое натуральное число}),\\
a^n-b^n &= (a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\ldots+ab^{n-2}-b^{n-1})\\
&\quad (n \text{ — четное натуральное число}),\\
a^n+b^n &= (a+b)(a^{n-1}-a^{n-2}b+\ldots-ab^{n-2}+b^{n-1})\\
&\quad (n \text{ — нечетное натуральное число}).
\end{aligned}
$$

Значения биномиальных коэффициентов

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} \quad (0! = 1)$$

$n \backslash m$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1									
2	1	2	1								
3	1	3	3	1							
4	1	4	6	4	1						
5	1	5	10	10	5	1					
6	1	6	15	20	15	6	1				
7	1	7	21	35	35	21	7	1			
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1		
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1	
10	1	10	45	120	210	252	210	120	45	10	1

1.2.3. Некоторые средние значения

1) **Среднее арифметическое** n величин $a_1, \ldots, a_n$

$$\frac{1}{n}(a_1+a_2+\ldots+a_n).$$

2) **Среднее геометрическое** n величин

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}.$$

3) **Среднее квадратичное** n величин

$$\sqrt{\frac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)}.$$

4) **Среднее гармоническое** n величин

$$n : \left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

1.2.4. Некоторые неравенства

1) $|a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leqslant |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|$, где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — любые действительные или комплексные числа.
2)
$$1 : \frac{1}{n}\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leqslant \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \ldots + a_n) \leqslant$$
$$\leqslant \sqrt{\frac{1}{n}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)},$$
где все действительные $a_1, a_2, \ldots, a_n$ положительны; равенства выполняются только при $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.
3) **Неравенство Коши—Буняковского**:
$$|a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n| \leqslant \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}\sqrt{b_1^2 + \ldots + b_n^2},$$
где все действительные a_i, b_i произвольны. Равенство выполняется только при $a_1 : b_1 = \ldots = a_n : b_n$.
4) **Неравенство Чебышёва**: если $a_1 \leqslant a_2 \leqslant \ldots \leqslant a_n$ и $b_1 \leqslant b_2 \leqslant \ldots \leqslant b_n$ или $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots \geqslant a_n$ и $b_1 \geqslant b_2 \geqslant \ldots \geqslant b_n$ (все a_i, b_i — положительны), то
$$(a_1 + \ldots + a_n)(b_1 + \ldots + b_n) \leqslant n(a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n),$$
равенство выполняется лишь при $a_1 = \ldots = a_n$ и $b_1 = \ldots = b_n$.

1.2.5. Некоторые конечные суммы

$$1 + 2 + 3 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$
$$1 + 3 + 5 + \ldots + (2n-1) = n^2,$$
$$2 + 4 + 6 + \ldots + 2n = n(n+1),$$

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\frac{n}{6}(2n^2+3n+1),$$

$$1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3=\frac{n^2}{4}(n^2+2n+1).$$

1.2.6. Пропорции

Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то $ad=cb$ и

$$\frac{ma+nb}{pa+qb}=\frac{mc+nd}{pc+qd},$$

где m, n, p, q — любые числа. В частности,

$$\frac{a\pm b}{b}=\frac{c\pm d}{d},\quad \frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}.$$

1.2.7. Деление полинома на полином

Деление полинома на полином, аналогичное делению целых чисел, рассмотрим на конкретных примерах. Полиномы (делимое, делитель и промежуточные результаты) должны быть расположены по убывающим степеням переменной x, при этом старшая степень делителя не должна превышать старшей степени делимого. Степень последнего остатка меньше степени делителя.

Пример 4. Разделим полином $6x^3+11x^2-3x+1$ (делимое) на полином $3x^2-2x+1$ (делитель).

Решение.

$$\begin{array}{r|l}
6x^3+11x^2-3x\ \ +1 & 3x^2-2x+1 \\ \cline{2-2}
-\ \underline{6x^3-4x^2\ \ +2x\qquad} & 2x+5 \\
15x^2-5x\ \ +1 & \\
-\ \underline{15x^2-10x+5} & \\
5x-4 &
\end{array}$$

Здесь $2x+5$ — частное от деления, $5x-4$ — остаток от деления. Следовательно можно записать:

$$\frac{6x^3+11x^2-3x+1}{3x^2-2x+1}=2x+5+\frac{5x-4}{3x^2-2x+1}. \qquad \triangleright$$

Пояснение. Делим $6x^3$ на $3x^2$, результат $2x$ — первое слагаемое частного. Умножим делитель на $2x$ и результат вычтем из делимого, получим первый остаток. Делим $15x^2$ на $3x^2$, найдем второе слагаемое частного, равное 5. Умножим делитель на 5 и вычтем из первого остатка, получим второй (и последний) остаток, степень которого меньше степени делителя.

Пример 5. Разделим полином $x^3 - a^3$ на полином $x - a$.

Решение.

$$
\begin{array}{r|l}
-\;\; x^3 - a^3 & x - a \\
\underline{x^3 - ax^2} & \overline{x^2 + ax + a^2} \\
-\;\; ax^2 - a^3 & \\
\underline{ax^2 - a^2x} & \\
-\;\; a^2x - a^3 & \\
\underline{a^2x - a^3} & \\
0 &
\end{array}
$$

Здесь деление осуществляется без остатка, частное равно $x^2 + ax + a^2$, т. е.

$$\frac{x^3 - a^3}{x - a} = x^2 + ax + a^2. \qquad \triangleright$$

1.2.8. Алгебраические уравнения

1.2.8.1. Уравнения. Системы уравнений

Пусть $f(x)$ и $g(x)$ — два выражения, содержащие одну переменную x. **Решить уравнение** $f(x) = g(x)$ с одной **неизвестной** x означает найти все его **решения** (**корни**), т. е. такие значения x, при подстановке которых в уравнение вместо x, значения $f(x)$ и $g(x)$ равны. Говорят, что такие значения x **удовлетворяют данному уравнению**. Например, уравнение $2x - 4 = 0$ имеет один корень $x = 2$.

Нулем функции $y = f(x)$ называется точка x_0, являющаяся корнем уравнения $f(x) = 0$, т. е. $f(x_0) = 0$. Число x_0 называется m-**кратным нулем (корнем)** полинома $P(x)$, если x_0 — m-кратный корень уравнения $P(x) = 0$, т. е. $P(x) = (x - x_0)^m Q(x)$, где $Q(x)$ — полином и $Q(x_0) \neq 0$. Нулям функции соответствуют точки пересечения или точки касания графика функции с осью абсцисс. Например, функция $y = x^3 - 6x^2 + 9x \equiv x(x-3)^2$ имеет однократный (**простой**) нуль в точке $x_1 = 0$ и двукратный нуль в точке $x_2 = 3$ (рис. 1.2).

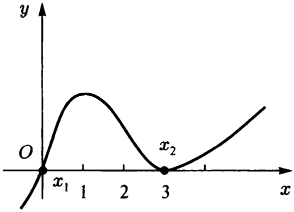


Рис. 1.2

Пусть X — множество **допускаемых значений**, которые может принимать неизвестная x. В зависимости от множества X уравнение может не иметь решений в X (тогда оно называется **неразрешимым** в множестве X), либо иметь конечное или бесконечное множество решений (**разрешимое** в X уравнение). Например, уравнение $x^2 = 2$ неразрешимо в множестве рациональных чисел, а в множестве действительных чисел имеет два решения $\sqrt{2}$ и $-\sqrt{2}$. Уравнение $x^2 = -1$ неразрешимо в множестве действительных чисел, но разрешимо в множестве комплексных чисел. Уравнение $\sin x = 0$ имеет бесконечное множество решений для действительных x. Если решениями уравнения являются все числа из множества X, то оно называется **тождеством** в множестве X. Например, уравнение $\sqrt{x^2} = x$ является тождеством в множестве неотрицательных действительных чисел ($x \geqslant 0$), но не является тождеством в множестве всех действительных чисел.

Чтобы подчеркнуть тождественность какого-либо равенства, вместо знака «$=$» иногда применяют знак «$\equiv$» (например: $(x-1)(x+1) \equiv x^2-1$). Выражение $a \equiv b$ означает также, что a **по определению** равно b.

Уравнение $f(x) = 0$, в котором $f(x)$ — полином от переменной x, называется **алгебраическим уравнением**. Все остальные уравнения являются **неалгебраическими**, в том числе и **иррациональные уравнения**, содержащие неизвестную x под знаком корня. Неалгебраические уравнения, в которых неизвестная x содержится под знаком трансцендентных функций называются **трансцендентными уравнениями.** К ним относятся **тригонометрические, показательные** и **логарифмические уравнения**.

В общем случае уравнение может содержать n неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(x_1, x_2, \dots, x_n).$$

Здесь каждая неизвестная x_i имеет свое множество допускаемых значений X_i ($i = 1, 2, \dots, n$). **Решением (корнем)** уравнения называется такая конечная последовательность чисел (т. е. набор n чисел, расположенных в определенном порядке) $(a_1, a_2, \dots, a_n)$ из соответствующих множеств допускаемых значений, при подстановке которых в уравнение вместо неизвестных $x_1, x_2, \dots, x_n$, левая часть уравнения равна правой. **Решить уравнение** — значит найти множество всех его решений. Например, уравнение $x^2 + y^2 = 1$ имеет бесконечное множество решений: $(0; 1)$, $(1; 0)$, $(\sqrt{2}/2; \sqrt{2}/2)$, ... для действительных x и y.

Системой уравнений с неизвестными $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется совокупность уравнений, для которых требуется найти конечную последовательность n чисел $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, одновременно удовлетворяющих каждому из этих уравнений. Такие последовательности чисел называются **решениями системы уравнений.** Например, система двух уравнений с тремя неизвестными

$$x - y + z = 3, \quad x + y - z = 1$$

имеет бесконечное множество решений: $(2; -1; 0)$, $(2; 0; 1)$, ... **Решить систему уравнений** — значит найти множество всех ее решений.

Если удается последовательно исключить неизвестные из уравнений системы, например, выражая какую-либо неизвестную в одном из уравнений через другие неизвестные и подставляя ее в остальные уравнения, то решение системы сводится к решению одного уравнения с одним неизвестным.

1.2.8.2. Решение алгебраических уравнений

Линейное уравнение (уравнение первой степени) $ax = b$ $(a \neq 0)$ имеет единственное решение $x = b/a$.

Квадратное уравнение (уравнение второй степени) $ax^2+bx+c=0$ $(a \neq 0)$ имеет два корня в множестве комплексных чисел:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Если коэффициенты a, b, c — любые комплексные числа, то $\sqrt{b^2 - 4ac}$ — одно из двух значений квадратного корня. При этом $x_1 + x_2 = -b/a$, $x_1 x_2 = c/a$ (**теорема Виета**).

В случае действительных a, b, c корни x_1, x_2 либо действительные различные, если **дискриминант** $D \equiv b^2 - 4ac > 0$; либо действительные равные, если $D = 0$; либо комплексно сопряженные, если $D < 0$.

Делением на a квадратное уравнение приводится к виду

$$x^2 + px + q = 0, \quad p = \frac{b}{a}, \quad q = \frac{c}{a}.$$

Тогда

$$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Квадратный полином в левой части квадратного уравнения может быть представлен в виде произведения (**разложение на множители**)

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2),$$
$$x^2 + px + q = (x - x_1)(x - x_2).$$

Теорема Виета для кубического уравнения $x^3 + rx^2 + sx + t = 0$:

$$x_1 + x_2 + x_3 = -r, \quad x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = s, \quad x_1x_2x_3 = -t$$
$$(x_1, x_2, x_3 \text{ — корни уравнения}).$$

Биквадратное уравнение $ax^4+bx^2+c=0$ при помощи замены неизвестной $x^2 = t$ приводится к квадратному уравнению $at^2 + bt + c = 0$. Если t_1, t_2 — корни квадратного уравнения, то 4 корня биквадратного уравнения находятся из равенств $x^2 = t_1$, $x^2 = t_2$.

Общий вид алгебраического уравнения с одной неизвестной x:

$$P_n(x) \equiv a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 = 0 \quad (a_n \neq 0).$$

Здесь **коэффициенты** a_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ — действительные или комплексные числа, n — **степень полинома** $P_n(x)$, a_0 — свободный член.

Если $P_n(x) = (x - x_1)^m P_{n-m}(x)$ $(1 \leqslant m \leqslant n)$, где $P_{n-m}(x)$ — полином степени $(n - m)$ и $P_{n-m}(x_1) \neq 0$, то x_1 называется **корнем уравнения порядка** (или **кратности**) m. Если x_1 не является корнем (т. е. $P_n(x_1) \neq 0$), то $P_n(x) = (x - x_1)Q(x) + P_n(x_1)$, где $Q(x)$ — некоторый полином (**теорема Безу**).

Каждое алгебраическое уравнение $P_n(x) = 0$ степени n с действительными или комплексными коэффициентами имеет ровно n корней, если корень кратности m принять за m корней. Если **уравнение с действительными коэффициентами (действительное уравнение)** $P_n(x) = 0$ имеет комплексные корни, то все они встречаются комплексно сопряженными парами $\alpha + i\beta$ и $\alpha - i\beta$, т. е. число комплексных корней четное. Поэтому действительное уравнение нечетной степени всегда имеет хотя бы один действительный корень.

Разложение полиномов на множители. Если корни действительного или комплексного полинома $P_n(x)$ равны $x_1, \ldots, x_k$ и имеют кратности $m_1, \ldots, m_k$ $(m_1 + \ldots + m_k = n)$, то полином можно представить в виде произведения

$$P_n(x) = a_n(x - x_1)^{m_1} \ldots (x - x_k)^{m_k}.$$

Каждая пара множителей $(x - x_1)(x - x_2)$, соответствующая паре комплексно сопряженных корней $x_1 = \alpha + i\beta$, $x_2 = \alpha - i\beta$, объединяется в один действительный квадратный множитель

$$(x - \alpha)^2 + \beta^2 = x^2 + px + q \quad (p = -2\alpha,\ q = \alpha^2 + \beta^2).$$

1.2.9. Логарифмы

Логарифмом действительного числа $A > 0$ по действительному **основанию** a $(a > 0,\ a \neq 1)$ называется показатель степени x, в которую надо возвести a, чтобы получить число A, т. е. $A = a^x$. Обозначение: $x = \log_a A$. Например, $\log_2 8 = \log_2 2^3 = 3$, $\log_3(1/9) = \log_3 3^{-2} = -2$, $\log_2 1 = \log_2 2^0 = 0$.

При заданном основании каждому действительному числу $A > 0$ соответствует единственный логарифм. Действие нахождения логарифма какого-либо выражения называется его **логарифмированием**.

Свойства логарифмов:

1) $a^{\log_a A} = A$; 2) $\log_a a = 1$; 3) $\log_a a^p = p$; 4) $\log_a 1 = 0$;

5) $\log_a(AB) = \log_a A + \log_a B$;

6) $\log_a\left(\dfrac{A}{B}\right) = \log_a A - \log_a B$;

7) $\log_a A^p = p\log_a A$;

8) $\log_a \sqrt[n]{A} = \dfrac{1}{n}\log_a A$;

9) $\log_b A = (\log_a A)\cdot(\log_b a) = \dfrac{\log_a A}{\log_a b}$;

10) $\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$.

Логарифмы по основанию $a = 10$ называются **десятичными логарифмами** и обозначаются $\lg A$. В частности $\lg 10^n = n$. Целая часть десятичного логарифма называется **характеристикой**, а дробная часть — **мантиссой**. Например, $\lg 137 = \lg(10^2 \cdot 1{,}37) = 2 + \lg 1{,}37 = 2{,}13672$, характеристика равна 2, а мантисса равна 0,13672. Поскольку $\lg(10^n B) = n + \lg B$ (n — целое), то десятичные логарифмы чисел, отличающихся множителем 10^n, имеют разные характеристики, но одинаковые мантиссы. Поэтому в **логарифмических таблицах** приводятся лишь мантиссы целых чисел. Для нахождения числа по его десятичному логарифму применяются **таблицы антилогарифмов**. Если $x = \lg A$, то число A называется **антилогарифмом** числа x.

Натуральные логарифмы. Основанием **натуральных логарифмов** (обозначение: $\ln A$) служит трансцендентное число e, равное

$$e = \lim_{n \to \infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2{,}718281828\ldots .$$

Для перехода от десятичных логарифмов к натуральным и наоборот применяются формулы:

$$\ln A = \frac{\lg A}{\lg e} = (\ln 10)\lg A \approx (2{,}302585)\lg A,$$

$$\lg A = \frac{\ln A}{\ln 10} = (\lg e)\ln A \approx (0{,}434294)\ln A.$$

1.2.10. Арифметическая прогрессия

Арифметической прогрессией называется конечная последовательность чисел, в которой каждый последующий член, начиная со второго, получается из предыдущего прибавлением к нему одного и того же числа d, называемого **разностью прогрессии:**

$$a_1, \quad a_1 + d, \quad a_1 + 2d, \quad \ldots, \quad a_1 + (n-1)d.$$

Общий член прогрессии равен:

$$a_k = a_1 + (k-1)d \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Прогрессия называется **возрастающей (убывающей)** если $d > 0$ ($d < 0$). Примером арифметической прогрессии является конечная последовательность натуральных чисел $1, 2, \ldots, n$ ($d = 1$). Свойство прогрессии: $a_k = (a_{k-1} + a_{k+1})/2$.

Сумма всех n членов прогрессии равна

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \equiv \sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{(a_1 + a_n)n}{2} = \frac{n}{2}\bigl[2a_1 + d(n-1)\bigr].$$

1.2.11. Геометрическая прогрессия

Геометрической прогрессией называется конечная последовательность чисел, в которой каждый последующий член, начиная со второго, получается из предыдущего умножением его на одно и то же число $q \neq 0$, называемого **знаменателем** прогрессии:

$$a_1 q^0, \quad a_1 q, \quad \ldots, \quad a_1 q^{n-1}.$$

Общий член прогрессии равен

$$a_k = a_1 q^{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Например, $1, 1 \cdot 2, 1 \cdot 2^2, \ldots, 1 \cdot 2^{n-1}$ $(q = 2)$. Прогрессия называется **возрастающей (убывающей)**, если $q > 1$ $(0 < q < 1)$. При $q < 0$ прогрессия **знакочередующаяся**. Свойство прогрессии: $a_k = \sqrt{a_{k-1} \cdot a_{k+1}}$.

Сумма всех n членов прогрессии равна (при $q \neq 1$):

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1} = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}.$$

1.3. Матрицы и определители. Системы линейных уравнений

1.3.1. Матрицы и определители

1.3.1.1. Основные понятия

Матрицей размера $m \times n$ (или $m \times n$-**матрицей**) называется прямоугольная таблица, составленная из элементов некоторого множества (обычно из действительных или комплексных чисел), имеющая m строк и n столбцов:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Элемент матрицы a_{ij} расположен в i-й строке (первый индекс) и j-м столбце (второй индекс), где $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$.

Применяются и другие способы записи матриц:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad \begin{Vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

а также $\|a_{ij}\|$; $\|a_{ij}\|_{m,n}$; $[a_{ij}]$; $[a_{ij}]_{m,n}$; (a_{ij}). Матрицы обозначаются большими латинскими буквами: $A, B, C, \ldots$. Матрица, у которой $m = n$, называется **квадратной матрицей** порядка n. Матрица размера $1 \times n$, состоящая из одной строки, называется **матрицей-строкой** (или **вектор-строкой**), а матрица размера $n \times 1$ — **матрицей-столбцом** (или **вектор-столбцом**). Далее матрицу-строку будем записывать в виде: $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$, а матрицу-столбец одним из способов:

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} \equiv \{a_1, a_2, \ldots, a_n\} \equiv (a_1, a_2, \ldots, a_n)^T.$$

Любое число можно рассматривать как 1×1-матрицу, состоящую из одного элемента.

В квадратной матрице порядка n элементы a_{ii} $(i = 1, 2, \ldots, n)$ называются **диагональными** и расположены на **главной диагонали** матрицы. Сумма всех диагональных элементов называется **следом** матрицы. Обозначение:

$$\mathrm{Tr}\, A \equiv \mathrm{Sp}\, A = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}.$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, не лежащие на главной диагонали, равны нулю

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_{22} & \ldots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

называется **диагональной**. Если в диагональной матрице порядка n каждый элемент $a_{ii} = 1$, то матрица называется **единичной** и обозначается E или I (а также E_n или I_n):

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{bmatrix}.$$

Вводя **символ Кронекера**

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad i \neq j, \\ 1, & \text{если} \quad i = j, \end{cases}$$

единичную матрицу можно записать в виде $E = (\delta_{ij})$. Матрица любого размера, в которой все элементы равны нулю, называется **нулевой** и обозначается (0) или просто 0.

Матрица A^T размера $n \times m$, получающаяся из матрицы A размера $m \times n$ заменой строк соответствующими столбцами, называется **транспонированной** к матрице A:

$$A^T \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

или $A^T \equiv (a_{ij})^T = (a_{ji})$. При этом $(A^T)^T = A$.

Пример 6. При **транспонировании** вектор-строка переходит в вектор-столбец и наоборот:

$$(a_1, a_2, \dots, a_n)^T = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}^T = (a_1, a_2, \dots, a_n).$$

1.3.1.2. Определитель квадратной матрицы

Каждой **квадратной** матрице порядка n с действительными или комплексными числовыми элементами $A = (a_{ij})$ можно поставить в соответствие единственное число D, называемое **определителем** (или **детерминантом**) матрицы A или просто **определителем** n-го порядка.

Определитель матрицы $A = (a_{ij})$ обозначается одним из следующих четырех символов:

$$D \equiv \det A \equiv \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

и определяется следующим образом.

Определитель первого порядка для матрицы (a_{11}), состоящей из одного элемента (числа), равен самому этому числу, т. е. $\det (a_{11}) = a_{11}$.

Определитель второго порядка по определению равен

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

т. е. находится как произведение элементов на главной диагонали минус произведение двух остальных элементов.

Определитель третьего порядка определяется равенством

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Определитель порядка $n-1$, получающийся из матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n вычеркиванием i-й строки и j-го столбца, на пересечении которых находится элемент a_{ij}, называется **минором** M_{ij} элемента a_{ij}. Например, для матрицы третьего порядка ($n = 3$)

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad M_{13} = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}, \quad \ldots$$

являются минорами элементов $a_{11}, a_{12}, a_{13}, \ldots$ соответственно.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется число, равное $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$.

Определитель второго порядка можно записать теперь в виде

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12},$$

где

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = a_{22}, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -a_{21}.$$

Для определителя третьего порядка аналогично записываем

$$D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13},$$

где

$$A_{11} = (-1)^{1+1}M_{11} = M_{11} = a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32},$$
$$A_{12} = (-1)^{1+2}M_{12} = -M_{12},$$
$$A_{13} = (-1)^{1+3}M_{13} = M_{13}.$$

Пусть нам известно правило вычисления определителя произвольной квадратной матрицы порядка $n-1$. Тогда, по определению для произвольной квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n определитель равен:

$$D \equiv \det A = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \ldots + a_{1n}A_{1n}.$$

При этом говорят, что определитель **разложен по первой строке.** Аналогичным образом определитель может быть разложен по любой строке и любому столбцу, например, по второй строке и третьему столбцу соответственно

$$\det A = a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + \ldots + a_{2n}A_{2n} = a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + \ldots + a_{n3}A_{n3}.$$

Вычисление определителя порядка n, таким образом, сводится к вычислению определителей порядка $n-1$, каждый из которых выражается через определители порядка $n-2$ и т. д., до тех пор, пока вычисления не сведутся к нахождению определителей второго порядка.

Пример 7. Вычислить определитель третьего порядка

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разложим определитель по первой строке: $D = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}$, где $a_{11} = 3$, $a_{12} = 1$, $a_{13} = -2$;

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -3 & 2 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 13, \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 23,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 2.$$

Следовательно, $D = 3 \cdot 13 + 1 \cdot 23 + (-2) \cdot 2 = 58$. ▷

Свойства определителей.

1) Определитель транспонированной матрицы A^T равен определителю исходной матрицы A, т. е. определитель не изменяется при замене строк столбцами.
2) При перестановке любых двух строк (двух столбцов) изменяется только знак определителя, при неизменной его абсолютной величине.
3) Определитель равен нулю, если соответствующие (т. е. имеющие одинаковые порядковые номера) элементы двух строк или двух столбцов пропорциональны, в частности, равны.
4) Множитель, общий для всех элементов любой строки (или столбца), можно вывести за знак определителя. Если все элементы какой-либо строки (столбца) умножить на некоторое число, то определитель умножится на это число.
5) Определитель не изменится, если к элементам какой-либо строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на любое число.
6) Определитель **треугольной** матрицы (т. е. такой, все элементы которой, расположенные ниже, либо выше главной диагонали, равны нулю) равен произведению элементов главной диагонали

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

7)

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{jk} = \delta_{ij}D; \quad \sum_{k=1}^{n} a_{ki}A_{kj} = \delta_{ij}D,$$

где δ_{ij} — символ Кронекера, $D = \det(a_{ij})$, A_{ij} — алгебраические дополнения.

1.3.2. Действия над матрицами

1.3.2.1. Равенство матриц

Две матрицы $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ называются **равными** (запись: $A = B$), если они имеют одинаковый размер $m \times n$ и все элементы, стоящие на одинаковых местах, равны между собой, т. е. $a_{ij} = b_{ij}$ $(i = 1, 2, \dots, m;\ j = 1, 2, \dots, n)$.

1.3.2.2. Сумма матриц

Суммой $A + B$ двух матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ одинакового размера $m \times n$ называется матрица $C = (c_{ij})$ такого же размера с элементами $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, т. е.

$$C = A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & \dots & a_{2n} + b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} + b_{m1} & a_{m2} + b_{m2} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{bmatrix}.$$

Аналогично определяется **разность** матриц

$$C = A - B \quad (c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}).$$

1.3.2.3. Умножение матрицы на число

Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ **на число** α (или произведением числа α на матрицу A) называется матрица $A\alpha$ (или αA), все элементы которой получаются из элементов матрицы A умножением на это число, т. е.

$$A\alpha = \alpha A = (\alpha a_{ij}) = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \dots & \alpha a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \dots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}.$$

Вышеперечисленные действия обладают следующими свойствами:

1) $A + B = B + A$;
2) $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B$;
3) $A + (B + C) = (A + B) + C$;
4) $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$;
5) $\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A$,

где A, B, C — матрицы одинакового размера, α, β — любые числа.

1.3.2.4. Противоположная матрица

Матрица $-A \equiv (-1)A = (-a_{ij})$ называется **противоположной** для матрицы $A = (a_{ij})$ любого размера. Сумма $A + (-A) = A - A = (0)$ равна нулевой матрице.

Пример 8. Для числа $\alpha = 2$ и матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

имеем

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 0 & 9 \end{bmatrix}, \quad -A = \begin{bmatrix} -1 & -5 & -2 \\ 1 & -2 & -4 \end{bmatrix}, \quad 2 \cdot A = A \cdot 2 = \begin{bmatrix} 2 & 10 & 4 \\ -2 & 4 & 8 \end{bmatrix}.$$

1.3.2.5. Умножение матриц

Пусть $A = (a_{ik})$ и $B = (a_{kj})$ — две матрицы размера $m \times n$ и $n \times s$ соответственно (т. е. число столбцов n матрицы A равно числу строк матрицы B), тогда для этих матриц определено **произведение** $C = AB$, где $C = (c_{ij})$ — матрица размера $m \times s$ с элементами

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \ldots + a_{in} b_{nj}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m; \; j = 1, 2, \ldots, s).$$

Таким образом, чтобы найти элемент c_{ij}, стоящий в i-й строке и j-м столбце матрицы $C = AB$, надо элементы i-й строки первой матрицы (т. е. A) умножить на соответствующие элементы j-го столбца второй матрицы (т. е. B) и сложить полученные произведения (т. е. «умножают строки на столбцы»). Отметим, что произведение двух ненулевых матриц $A \neq (0)$ и $B \neq (0)$ может оказаться равным нулевой матрице. Например,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

В связи с этим, из равенства $AB = AC$, т. е. $A(B - C) = (0)$ при $A \neq (0)$, вообще говоря не следует, что $B - C = (0)$, или $B = C$.

Пример 9.

$$AB \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -6 & 5 \\ -1 & 13 & 3 \end{bmatrix}.$$

Свойства умножения матриц.

1) $A(BC) = (AB)C$;
2) $(A + B)C = AC + BC$;
3) $C(A + B) = CA + CB$;
4) $\alpha(AB) = (\alpha A)B = A(\alpha B)$,

где A, B, C — матрицы, α — число.

Произведения AB и BA матриц A и B определены одновременно, в частности, для квадратных матриц одного порядка. Умножение матриц **некоммутативно**, т. е. произведение двух матриц зависит, вообще говоря, от порядка сомножителей ($AB \neq BA$).

Пример 10.

$$AB \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 8 \end{bmatrix}, \qquad BA \equiv \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Здесь $AB \neq BA$.

Для произвольных (не квадратных) матриц A, B может оказаться даже, что произведение AB имеет смысл, а произведение BA — не имеет.

Матрицы A, B, для которых $AB = BA$, называются **перестановочными** (**коммутативными**). Так, например, единичная матрица E_n перестановочна с любой квадратной матрицей порядка n:

$$AE_n = E_n A = A.$$

Если A и B — квадратные матрицы одного порядка, то

$$\det(AB) = \det(BA) = (\det A) \cdot (\det B).$$

Справедливы следующие равенства для транспонированных матриц

$$(A+B)^T = A^T + B^T, \quad (AB)^T = B^T A^T.$$

Для квадратной матрицы A справедливо

$$\det A^T = \det A.$$

1.3.2.6. Обратная матрица

Квадратная матрица называется **невырожденной** (**вырожденной**), если ее определитель не равен (равен) нулю.

Обратной матрицей (обозначение: A^{-1}) по отношению к невырожденной квадратной матрице A называется такая матрица, которая при умножении на A как слева, так и справа, дает единичную матрицу

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Для каждой невырожденной квадратной матрицы существует единственная обратная матрица. Вырожденная квадратная матрица обратной не имеет.

Справедливы равенства

$$(A^{-1})^{-1} = A, \quad (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad \det A^{-1} = \frac{1}{\det A}, \quad (A^{-1})^T = (A^T)^{-1}.$$

Нахождение обратной матрицы для невырожденной матрицы A проводится в следующей последовательности.

1) Находим определитель $D \equiv \det A \neq 0$.
2) Для всех элементов a_{ij} матрицы A находим алгебраические дополнения A_{ij}.
3) Составляем матрицу из алгебраических дополнений $\widetilde{A} = (A_{ij})$, а затем транспонированную матрицу $\widetilde{A}^T = (A_{ji})$, которая получится из $\widetilde{A}$ путем перестановки местами строк и столбцов с одинаковыми номерами:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & \ldots & A_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{A}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & \ldots & A_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{1n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix}.$$

4) Разделив все элементы матрицы $\widetilde{A}^T$ на величину определителя D, получим обратную матрицу

$$A^{-1} = \frac{1}{D}\widetilde{A}^T = \begin{bmatrix} \frac{A_{11}}{D} & \ldots & \frac{A_{n1}}{D} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{A_{1n}}{D} & \ldots & \frac{A_{nn}}{D} \end{bmatrix}.$$

Пример 11. Для матрицы в примере 7 найти обратную матрицу.

Решение.

1) $D \equiv \det A = 58$.
2) $A_{11} = 13$, $A_{12} = 23$, $A_{13} = 2$, $A_{21} = 7$, $A_{22} = -1$, $A_{23} = 10$, $A_{31} = -4$, $A_{32} = -16$, $A_{33} = -14$.
3) Запишем матрицы $\widetilde{A}$ и $\widetilde{A}^T$:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 13 & 23 & 2 \\ 7 & -1 & 10 \\ -4 & -16 & -14 \end{bmatrix}, \quad \widetilde{A}^T = \begin{bmatrix} 13 & 7 & -4 \\ 23 & -1 & -16 \\ 2 & 10 & -14 \end{bmatrix}.$$

4) Обратная матрица равна

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{13}{58} & \frac{7}{58} & -\frac{4}{58} \\ \frac{23}{58} & -\frac{1}{58} & -\frac{16}{58} \\ \frac{2}{58} & \frac{10}{58} & -\frac{14}{58} \end{bmatrix}.$$

▷

1.3.3. Ранг матрицы

Если в произвольной матрице $A = (a_{ij})$ размера $m \times n$ выбрать любые k строк и k столбцов, где $k \leqslant \min(m, n)$, то элементы, стоящие на пересечении этих строк и столбцов образуют матрицу размера $k \times k$. Определитель этой матрицы называется **минором** k-го порядка матрицы A.

Рангом матрицы A называется наивысший из порядков отличных от нуля миноров этой матрицы.

Таким образом, матрица A имеет ранг r, если:

1) существует хотя бы один минор порядка r, не равный нулю;
2) все миноры порядка $r+1$ и выше равны нулю.

Ранг матрицы, состоящей из одних нулей, по определению равен нулю.

Дефектом матрицы называется разность между наименьшим из чисел m, n и рангом матрицы r.

Пример 12. Найти ранг матрицы $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -4 & 1 \end{bmatrix}$.

Решение. В матрице содержится не равный нулю минор порядка 2

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 13 \neq 0,$$

а все миноры порядка 3 равны нулю. Следовательно, ранг $r = 2$, а дефект равен $3 - 2 = 1$. ▷

Ранг матрицы не изменяется при следующих **элементарных преобразованиях**:

1) при перестановке любых двух строк,
2) при умножении любой строки на число, не равное нулю,
3) при сложении любой строки с другой строкой, умноженной на некоторое число;

а также при транспонировании матрицы.

Аналогичные свойства справедливы и для столбцов. На этих свойствах ранга матрицы основан удобный на практике способ нахождения ранга, использующий метод Гаусса (см. 16.2).

Пример 13. Найти ранг матрицы из примера 12.

Решение. Производя элементарные преобразования матрицы A в примере 12 по методу Гаусса, запишем последовательность преобразованных матриц

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & -4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{13}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & \frac{13}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{13}{3} & -\frac{8}{3} & \frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Последняя матрица содержит ненулевые миноры второго порядка, все миноры третьего порядка равны нулю, так как третья строка состоит из нулевых элементов. Следовательно, ранг исходной матрицы A равен 2. ▷

1.3.4. Матрицы со специальными свойствами симметрии

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ с действительными или комплексными элементами называется:

1) **симметричной**, если $A^T = A$, т. е. если $a_{ij} = a_{ji}$;
2) **антисимметричной (кососимметричной)**, если $A^T = -A$, т. е. если $a_{ij} = -a_{ji}$;
3) **ортогональной**, если $A^T A = AA^T = E$, т. е. если $A^T = A^{-1}$.

Любую квадратную матрицу A можно единственными способом представить (разложить) как сумму симметричной и антисимметричной матриц:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

Пример 14. Разложим матрицу A на симметричную (первое слагаемое справа) и антисимметричную (второе слагаемое):

$$A \equiv \begin{bmatrix} 1 & 4 & -5 \\ 2 & -3 & 8 \\ 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 6 \\ -2 & 6 & -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Квадратная матрица $A = (a_{ij})$ с комплексными элементами называется:

1) **эрмитовой**, если $A^T = \overline{A}$, т. е. если $a_{ji} = \bar{a}_{ij}$, где $\overline{A} = (\bar{a}_{ij})$ — матрица, **комплексно сопряженная** к A, полученная из A заменой ее элементов на комплексно сопряженные;
2) **косоэрмитовой (антиэрмитовой)**, если $A^T = -\overline{A}$, т. е. если $a_{ji} = -\bar{a}_{ij}$;
3) **унитарной**, если $\overline{A}^T A = A\overline{A}^T = E$, т. е. если $A^T = \overline{A}^{-1}$.

Любая комплексная квадратная матрица A может быть единственным способом представлена (разложена) в виде суммы эрмитовой и антиэрмитовой матриц $A = H_1 + iH_2$, где $H_1 = \frac{1}{2}(A + \overline{A}^T)$ — эрмитова матрица, а $H_2 = \frac{1}{2i}(A - \overline{A}^T)$ — антиэрмитова.

1.3.5. Системы линейных уравнений

1.3.5.1. Основные понятия

Система m уравнений с n неизвестными $x_1, x_2, \ldots, x_n$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m, \end{aligned} \tag{1.1}$$

или

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

где a_{ij} — **коэффициенты**, b_i — **свободные члены**, называется **системой линейных уравнений**. Если все $b_i = 0$, то система называется **однородной**, в противном случае — **неоднородной**.

Матрицы

$$A \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}, \qquad (A, B) \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

называются **матрицей системы** и **расширенной матрицей системы** соответственно.

Решением системы линейных уравнений называется конечная последовательность n чисел, т. е. набор n чисел $(c_1, c_2, \ldots, c_n)$, расположенных в определенном порядке, принадлежащих множеству допускаемых значений и удовлетворяющих одновременно каждому из уравнений системы при подстановке этих чисел вместо соответствующих неизвестных. **Решить систему уравнений** — значит найти множество всех ее решений. Система линейных уравнений может иметь либо одно решение, состоящее из набора n чисел, либо бесконечное множество решений, либо ни одного решения. Система, не имеющая ни одного решения, называется **несовместной**, в противном случае — **совместной.**

Две системы уравнений (или два уравнения) называются **равносильными** (**эквивалентными**), если они имеют одинаковые множества решений.

1.3.5.2. Решение систем линейных уравнений

Вводя обозначения

$$X \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad B \equiv \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

систему уравнений (1.1) можно записать в виде **матричного уравнения**

$$A \cdot X = B, \tag{1.2}$$

где A — матрица системы (1.1).

Рассмотрим сначала решение системы (1.1) в случае $m = n$, когда число неизвестных совпадает с числом уравнений.

1. Метод обратной матрицы. При $m = n$ матрица A системы (1.1) — квадратная. Пусть $D = \det A \neq 0$. Умножая матричное уравнение (1.2) **слева**

на обратную матрицу A^{-1}, получим

$$(A^{-1}A)X = A^{-1}B.$$

Отсюда следует (так как $A^{-1}A = E$, $EX = X$), что **единственное** решение системы имеет вид

$$X = A^{-1}B,$$

или

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{D} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \ldots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \ldots & A_{n2} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ A_{1n} & A_{2n} & \ldots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \equiv \frac{1}{D} \begin{bmatrix} D_1 \\ D_2 \\ \vdots \\ D_n \end{bmatrix}, \qquad (1.3)$$

где $D_i = \sum\limits_{j=1}^{n} A_{ji}b_j$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Таким образом,

$$x_1 = \frac{1}{D}(A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \ldots + A_{n1}b_n) \equiv \frac{D_1}{D} \quad \text{и т. д.}$$

Пример 15. Методом обратной матрицы решить систему уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 - 2x_3 &= 6, \\ 5x_1 - 3x_2 + 2x_3 &= -4, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 &= -2. \end{aligned}$$

Решение. Используя выражение обратной матрицы A^{-1}, найденное в примере 11, получим

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{58} \begin{bmatrix} 13 & 7 & -4 \\ 23 & -1 & -16 \\ 2 & 10 & -14 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ -4 \\ -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{58} \begin{bmatrix} 58 \\ 174 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Искомое решение: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$ или $(1; 3; 0)$. ▷

2. Формулы Крамера. Из матричного равенства (1.3) следуют **формулы Крамера,** дающие решение системы линейных уравнений:

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad \ldots, \quad x_n = \frac{D_n}{D},$$

где

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{4}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}, \quad D_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & \ldots & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ \multicolumn{5}{c}{\dotfill} \\ a_{n1} & \ldots & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Здесь определитель D_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ получается из определителя D путем замены в нем i-го столбца на столбец свободных членов системы (1.1).

Пример 16. Решить по формулам Крамера систему в примере 15.

Решение.

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 5 & -3 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 58, \qquad D_1 = \begin{vmatrix} 6 & 1 & -2 \\ -4 & -3 & 2 \\ -2 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 58,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 6 & -2 \\ 5 & -4 & 2 \\ 4 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 174, \qquad D_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 6 \\ 5 & -3 & -4 \\ 4 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = 1, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = 3, \quad x_3 = \frac{D_3}{D} = 0. \qquad \triangleright$$

Однородная система линейных уравнений (все $b_i = 0$) всегда имеет **нулевое (тривиальное) решение**: $x_1 = 0,\ x_2 = 0,\ \ldots,\ x_n = 0$. Если при $m = n$ определитель $D \equiv \det A \neq 0$, то однородная система имеет единственное решение, являющееся нулевым. Для того чтобы однородная система линейных уравнений при $m = n$ имела также решение, отличающееся от нулевого, необходимо и достаточно выполнение условия $D \equiv \det A = 0$.

3. Метод Гаусса решения системы состоит в последовательном исключении неизвестных из уравнений этой системы. **Алгоритм метода** приведен в 16.2. В общем случае $m \neq n$.

Пример 17. Методом Гаусса решить систему уравнений из примера 15.

Решение. Используя алгоритм метода Гаусса, получим последовательность расширенных матриц (знаком * отмечены ведущие элементы):

$$\begin{bmatrix} 3^* & 1 & -2 & 6 \\ 5 & -3 & 2 & -4 \\ 4 & -2 & -3 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & \left(-\frac{14}{3}\right)^* & \frac{16}{3} & -14 \\ 0 & -\frac{10}{3} & -\frac{1}{3} & -10 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & 3 \\ 0 & 0 & \left(\frac{87}{21}\right)^* & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 2 \\ 0 & 1 & -\frac{8}{7} & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Переходя в обратном направлении от последней расширенной матрицы к исходной, будем иметь: $x_3 = 0$, $x_2 = 3 + \frac{8}{7}x_3 = 3$, $x_1 = 2 - \frac{1}{3}x_2 + \frac{2}{3}x_3 = 1$. $\triangleright$

4. В общем случае число неизвестных n не равно числу уравнений системы m, так что $n < m$, $n > m$ или $n = m$.

Если ранг r_1 матрицы A системы (1.1) и ранг r_2 расширенной матрицы (A, B) не равны друг другу ($r_1 \neq r_2$), то эта система несовместна (не имеет решения).

Теорема Кронекера—Капелли. Система уравнений (1.1) совместна (т. е. имеет решение) тогда и только тогда, когда матрица системы A и расширенная матрица (A, B) имеют одинаковые ранги ($r_1 = r_2 = r$). При этом, если $r = n$, то решение единственно. В частности, однородная система имеет только нулевое решение. В общем случае, если $r < n$, то решение не единственно, при этом однородная система имеет ненулевые решения.

Пример 18. Решить систему уравнений

$$x_1 + 2x_2 = 1, \quad 2x_1 + 4x_2 = 3.$$

Решение. Ранги матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \quad (A, B) = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

равны соответственно $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Поскольку $r_1 \neq r_2$, система несовместна, т. е. не имеет решения. Действительно, умножая первое уравнение системы на 2 и вычитая из второго, приходим к противоречию: «$0 = 1$», показывающему несовместность системы. ▷

Пример 19. Решить систему уравнений

$$x_1 + x_2 = 3, \quad x_1 - x_2 = 2, \quad x_1 + 2x_2 = 4.$$

Решение. Ранги матриц

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad (A, B) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

соответственно равны $r_1 = 2$, $r_2 = 3$. Система несовместна, так как $r_1 \neq r_2$. ▷

Пример 20. Решить систему уравнений

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 &= 10, \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 &= -5, \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 5x_4 &= -15. \end{aligned}$$

Решение. Используя алгоритм метода Гаусса (см. 16.2.1), получим последовательность расширенных матриц (знаком $*$ отмечены ведущие элементы):

$$\begin{bmatrix} 2^* & 1 & 3 & 1 & 10 \\ 3 & -2 & 1 & -4 & -5 \\ 1 & -3 & -2 & -5 & -15 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \dfrac{1}{2} & \dfrac{3}{2} & \dfrac{1}{2} & 5 \\ 0 & \left(-\dfrac{7}{2}\right)^* & -\dfrac{7}{2} & -\dfrac{11}{2} & -20 \\ 0 & -\dfrac{7}{2} & -\dfrac{7}{2} & -\dfrac{11}{2} & -20 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & 5 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{11}{7} & \frac{40}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Здесь ранги матриц A и (A, B) равны $r_1 = r_2 = 2$, т. е. система совместна. Так как $r < n$ $(2 < 4)$, то решение не единственно. В последней расширенной матрице третья строка нулевая и может быть отброшена. В результате получим систему двух уравнений

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 5, \quad x_2 + x_3 + \frac{11}{7}x_4 = \frac{40}{7},$$

которую перепишем в виде

$$x_1 + \frac{1}{2}x_2 = 5 - \frac{3}{2}x_3 - \frac{1}{2}x_4, \quad x_2 = \frac{40}{7} - x_3 - \frac{11}{7}x_4.$$

Вводя обозначения $x_3 \equiv p_1$, $x_4 \equiv p_2$, где p_1, p_2 — произвольные действительные числа (параметры), получим:

$$x_2 = \frac{40}{7} - p_1 - \frac{11}{7}p_2, \quad x_1 = \frac{15}{7} - p_1 + \frac{2}{7}p_2.$$

Следовательно, множество решений системы имеет вид:

$$\left(\frac{15}{7} - p_1 + \frac{2}{7}p_2, \frac{40}{7} - p_1 - \frac{11}{7}p_2, p_1, p_2\right) =$$
$$= \left(\frac{15}{7}, \frac{40}{7}, 0, 0\right) + p_1(-1, -1, 1, 0) + p_2\left(\frac{2}{7}, -\frac{11}{7}, 0, 1\right).$$

Множество решений соответствующей однородной системы $AX = (0)$ имеет вид

$$p_1(-1, -1, 1, 0) + p_2\left(\frac{2}{7}, -\frac{11}{7}, 0, 1\right).$$

▷

Пример 21. Решить систему уравнений

$$2x_1 + x_2 = 1, \quad x_1 - x_2 = 2, \quad x_1 - 2x_2 = 3.$$

<u>*Решение*</u>. Применяя алгоритм Гаусса, получим

$$\begin{bmatrix} 2^* & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \left(-\frac{3}{2}\right)^* & \frac{3}{2} \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{5}{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ранги A и (A, B) равны между собой $r_1 = r_2 = 2$ и равны числу неизвестных, следовательно, система имеет единственное решение: $x_2 = -1$, $x_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x_2 = 1$ или $(1; -1)$. ▷

Глава 2

СИСТЕМЫ КООРДИНАТ. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА. ТЕНЗОРЫ. ВЕКТОРНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

2.1. Прямоугольные системы координат

2.1.1. Прямоугольная система координат на плоскости

Координатами точки называются числа, определяющие ее положение на линии, на поверхности, или в пространстве.

Две взаимно перпендикулярные оси координат Ox и Oy, пересекающиеся в точке O (**начало координат**) и имеющие одинаковые длины масштабных отрезков OE_1 и OE_2, образуют **декартову прямоугольную** (или просто **декартову**) **систему координат** на плоскости, проходящей через две эти оси (рис. 2.1). Длина отрезка OE_1 (или OE_2) берется за единицу измерения длин всех отрезков на плоскости. Положительные направления осей Ox и Oy, т. е. направления от точки O к точкам E_1 и E_2 соответственно, выбираются таким образом, что поворот отрезка OE_1 на 90° до совмещения с отрезком OE_2 виден происходящим против часовой стрелки (**правая система координат**). Если этот поворот происходит по часовой стрелке, то система координат называется **левой**. Далее везде рассматриваются только правые системы координат. Декартова система координат, а также плоскость в которой лежат оси координат, обозначается Oxy. Оси Ox и Oy называются **осью абсцисс** и **осью ординат** соответственно. Оси координат делят плоскость на четыре части, которые называют **четвертями** или **квадрантами** и нумеруют римскими цифрами I, II, III, IV (рис. 2.1). Прямые, проходящие через какую-либо точку M на плоскости параллельно осям Oy и Ox, пересекают ось Ox в точке M_1, а ось Oy — в точке M_2, соответственно. Величина $OM_1 \equiv x$ направленного отрезка $\overline{OM}_1$, т. е. его длина $|\overline{OM}_1|$, взятая со знаком плюс (или минус), если направления $\overline{OM}_1$ и оси Ox совпадают (или противоположны), называется **абсциссой** точки M. Аналогично определяется величина $OM_2 \equiv y$, называемая **ординатой** точки M. Величины x и y называются **координатами** точки M (рис. 2.1). Начало координат O имеет координаты $x = 0$, $y = 0$. Если точка M имеет координаты x и y, то пишут: $M(x, y)$. Координаты точки, выражаемые конкретными числами, например, $M(2; 1)$, будем отделять друг от друга точкой с запятой. Первой в скобках указывают абсциссу, а второй — ординату. Таким, образом, координаты точки образуют упорядоченную пару чисел (x, y), т. е. набор двух чисел, в котором указано, какое число считается первым, а какое — вторым. В заданной декартовой системе координат каждой точке M на плоскости соответствует единственная упорядоченная пара чисел (x, y), являющихся ее координатами, и обратно, любой упорядоченной паре чисел (x, y) соответствует единственная точка $M(x, y)$ на плоскости. То есть между всеми точками плоскости и упорядоченными парами чисел устанавливается взаимно однозначное соответствие. Начало координат O имеет координаты $(0; 0)$, точка E_1 — координаты $(1; 0)$, точка E_2 — координаты $(0; 1)$.

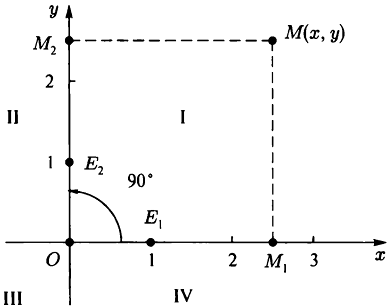


Рис. 2.1

В общем случае применяются также прямолинейные системы координат, в которых угол между осями координат не равен 90°, а масштабные отрезки OE_1 и OE_2 имеют разную длину. Такие системы координат называются **общими декартовыми** или **аффинными** системами координат. Если при этом длины OE_1 и OE_2 одинаковые, то система координат называется **косоугольной**.

2.1.2. Прямоугольная система координат в пространстве

Декартова прямоугольная (или просто **декартова**) **система координат** $Oxyz$ в пространстве (рис. 2.2) определяется заданием трех взаимно перпендикулярных **осей координат**: Ox (**ось абсцисс**), Oy (**ось ординат**), Oz (**ось аппликат**), пересекающихся в точке O (**начало координат**) и имеющих масштабные отрезки OE_1, OE_2, OE_3 одинаковой длины. Длина этих отрезков принимается за единицу измерения длин всех остальных отрезков. Направления осей координат от точки O к точкам E_i $(i = 1, 2, 3)$ называются положительными направлениями осей, а противоположные направления — отрицательными. Плоскости Oyz, Ozx, Oxy, проходящие через пары осей координат, называются **координатными плоскостями**. Проведем через какую-либо точку M пространства три плоскости, параллельные трем координатным плоскостям. Точки пересечения этих плоскостей с осями Ox, Oy, Oz обозначим M_1, M_2, M_3 (рис. 2.2). Величины $OM_1 \equiv x$, $OM_2 \equiv y$, $OM_3 \equiv z$ направленных отрезков $\overline{OM}_1$, $\overline{OM}_2$, $\overline{OM}_3$ называются **координатами точки** M. Координаты x, y, z называются соответственно **абсциссой, ординатой, аппликатой** точки M. Начало координат O имеет координаты $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$. Если точка M имеет координаты x, y, z, то пишут: $M(x, y, z)$. В частности точки E_1, E_2, E_3 имеют координаты $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(0; 0; 1)$ соответственно (координаты, выраженные в числах, отделяются друг от друга точкой с запятой).

При задании системы координат между точками пространства и упорядоченными тройками чисел (x, y, z) (т. е. такими наборами трех чисел, в которых указано, какое из них считается первым, вторым, третьим) устанавливается взаимно однозначное соответствие: каждой точке M пространства соответствует тройка чисел, а каждой тройке чисел — единственная точка в пространстве. Декартова система координат в пространстве называется **правой**, если поворот отрезка OE_1 на угол 90° до совмещения с отрезком OE_2 виден из точки E_3 происходящим против часовой стрелки. В противном случае система координат называется **левой**. Далее везде используется только правая система координат. Три координатные плоскости делят пространство на 8 октантов, нумеруемых римскими цифрами от I до VIII.

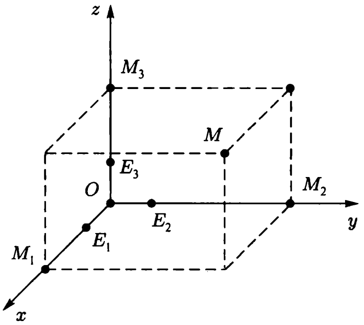


Рис. 2.2

В общем случае в пространстве применяются также **общие декартовы (аффинные)** и **косоугольные системы координат** (см. 2.1.1).

2.2. Криволинейные системы координат

2.2.1. Полярная система координат

Полярная система координат на плоскости (рис. 2.3) состоит из заданной точки O (**полюса**) и лучей, выходящих из точки O, один из которых OE называется **полярной осью** (длина OE принимается за единицу измерения длин). Если задана полярная система координат, то с каждой точкой M плоскости можно связать два числа ρ и φ — **полярные координаты** точки, где ρ — длина отрезка OM, называемая **полярным радиусом**, а φ — угол EOM, называемый **полярным углом**, который считается положительным при отсчете от полярной оси OE против часовой стрелки и отрицательным в противном случае. Если точка M имеет полярные координаты ρ (первая координата) и φ (вторая координата), то пишут $M(\rho, \varphi)$. Полярные координаты могут принимать значения из промежутков: $0 \leqslant \rho < +\infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, но иногда рассматривают отрицательные полярные углы, а также углы, превышающие 2π. При условии $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ каждой точке M плоскости (исключая полюс O, для которого $\rho = 0$, а угол φ неопределен, т. е. принимает любые значения) соответствует единственная пара чисел (ρ, φ) и обратно, каждой паре чисел (ρ, φ), $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $\rho > 0$, соответствует единственная точка.

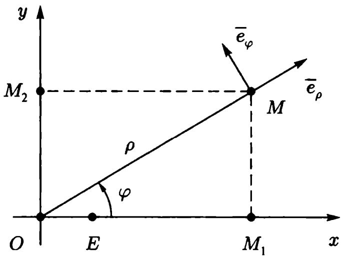


Рис. 2.3

Координатными линиями в полярной системе координат (т. е. такими линиями, вдоль которых изменяется только лишь одна координата, а другая — постоянна) являются концентрические окружности $\rho = \text{const}$ с центром в точке O и лучи $\varphi = \text{const}$, выходящие из точки O. На пересечении двух координатных линий (при заданных ρ и φ) и находится точка $M(\rho, \varphi)$.

Если ось Ox декартовой системы координат Oxy совпадает (включая масштабные отрезки) с полярной осью OE, а начало координат O совпадает с полюсом (рис. 2.3), то декартовы (x, y) и полярные (ρ, φ) координаты точки M связаны соотношениями

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

Здесь $x \equiv OM_1$, $y \equiv OM_2$.

Единичные базисные векторы $\bar{e}_\rho$ и $\bar{e}_\varphi$ направлены по касательным к соответствующим координатным линиям в сторону возрастания координаты и изменяются от точки к точке.

2.2.2. Криволинейные системы координат в пространстве

2.2.2.1. Цилиндрическая система координат

Цилиндрическая система координат (рис. 2.4) определяет положение точки M в пространстве посредством трех координат (масштаб измерения длины предполагается заданным): ρ, φ, z. Здесь первая координата ρ — длина отрезка OM', где M' — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость Oxy $(0 \leqslant \rho < +\infty)$; вторая координата φ — угол между положительной полуосью Ox и отрезком OM', φ считается положительным при отсчете от полуоси Ox против часовой стрелки, если смотреть со стороны положительного направления оси Oz $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$; третья координата $z = M'M$ совпадает с аппликатой $z = OM''$ точки M в декартовой системе координат, совмещенной с цилиндрической системой (рис. 2.4) (промежуток изменения:

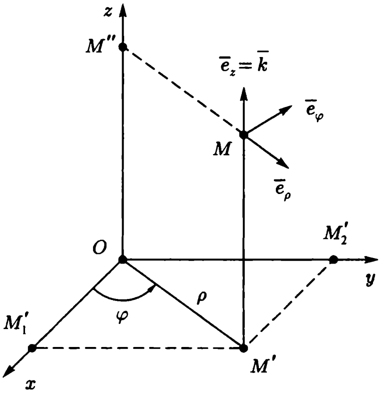


Рис. 2.4

$-\infty < z < +\infty$). Если точка M имеет цилиндрические координаты ρ, φ, z, то пишут: $M(\rho, \varphi, z)$. Цилиндрические координаты точки $M(\rho, \varphi, z)$ связаны с ее декартовыми координатами (x, y, z) соотношениями

$$x = \rho\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi, \quad z = z;$$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \quad \left(\sin\varphi = \frac{y}{\rho}\right), \quad z = z.$$

Здесь $x \equiv OM_1'$ — абсцисса, $y \equiv OM_2'$ — ордината точки M' (или M). Предполагается, что в обеих системах координат использованы равные единицы масштаба.

Координатными поверхностями в цилиндрической системе координат (т. е. такими поверхностями, вдоль которых одна из координат постоянна, а две другие изменяются) являются: круговые цилиндры $\rho = \text{const}$, полуплоскости $\varphi = \text{const}$, плоскости $z = \text{const}$. На пересечении трех координатных поверхностей (при заданных ρ, φ, z) находится точка $M(\rho, \varphi, z)$. Линии пересечения каждых двух координатных поверхностей называются **координатными линиями**. Здесь — это две прямые и окружность, проходящие через точку M.

Попарно ортогональные **единичные базисные векторы** $\bar{e}_\rho, \bar{e}_\varphi, \bar{e}_z = \bar{k}$, образующие правую тройку, направлены по касательным к соответствующим координатным линиям в сторону возрастания координаты и изменяются при переходе от точки к точке (рис. 2.4).

2.2.2.2. Сферическая система координат

Сферическая система координат (рис. 2.5) определяет положение точки M в пространстве посредством трех координат: ρ, θ, φ (масштаб измерения длины предполагается заданным). Здесь первая координата ρ — длина отрезка OM $(0 \leqslant \rho < +\infty)$; вторая координата θ — угол между положительной полуосью Oz и отрезком OM, положительное направление отсчета θ от полуоси Oz показано стрелкой на рис. 2.5 $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$; φ — угол между положительной полуосью Ox и отрезком OM' (M' — основание перпендикуляра, опущенного из точки M на плоскость Oxy), положительное направление отсчета φ от полуоси Ox показано стрелкой на рис. 2.5 $(0 \leqslant \varphi < 2\pi)$. Если точка M имеет сферические координаты ρ, θ, φ, то пишут: $M(\rho, \theta, \varphi)$. Если декартова система координат совмещена со сферической системой так, что в обеих системах равные единицы масштаба (рис. 2.5), то для любой точки M ее сферические координаты связаны с декартовыми координатами соотношениями:

$$x = \rho\cos\varphi\sin\theta, \quad y = \rho\sin\varphi\sin\theta, \quad z = \rho\cos\theta;$$

$$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \quad \cos\theta = \frac{z}{\rho}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} \quad \left(\sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right).$$

Здесь $x \equiv OM_1'$ — абсцисса, $y \equiv OM_2'$ — ордината точки M' (или M), $z \equiv OM''$ — аппликата точки M.

Координатные поверхности: сферы $\rho = \text{const}$ с центром в точке O, круговые конусы $\theta = \text{const}$, полуплоскости $\varphi = \text{const}$. На пересечении этих трех

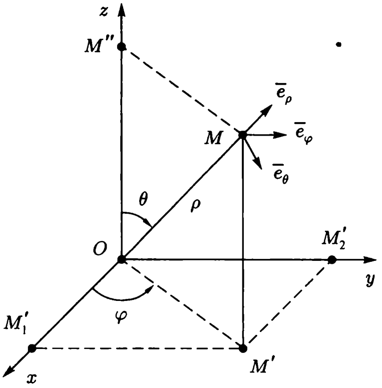


Рис. 2.5

поверхностей (при заданных ρ, θ, φ) находится точка $M(\rho, \theta, \varphi)$. **Координатные линии:** две окружности и луч, проходящие через точку M и являющиеся линиями пересечения каждых из двух координатных поверхностей.

Попарно ортогональные единичные **базисные векторы** $\bar{e}_\rho, \bar{e}_\theta, \bar{e}_\varphi$, образующие правую тройку, направлены по касательным к соответствующим координатным линиям в сторону роста координаты вдоль линии (рис. 2.5).

2.3. Векторная алгебра

2.3.1. Основные понятия

Величины, каждое значение которых может быть выражено только одним числом (обычно действительным), называются **скалярными величинами** или **скалярами** (например: длина, угол, площадь, объем, время, масса, температура и т. д.).

Величины, определяемые заданием некоторого числа и направлением в пространстве, называются **векторными величинами** или **векторами** (например: скорость, ускорение, сила и т. д.).

Вектором называется направленный отрезок прямой в пространстве, т. е. такой отрезок, для которого указано, какая из двух его граничных точек считается первой (**начало вектора**), а какая — второй (**конец вектора**). Вектор, начало которого — точка A, а конец — точка B, обозначается $\overline{AB}$ или $\overrightarrow{AB}$, а также $\bar{a}$ или $\vec{a}$ (рис. 2.6). Направление от начала вектора к концу считается направлением вектора и обозначается на рисунке стрелкой. Начало A вектора $\overline{AB}$ называется также его **точкой приложения**. **Длиной** (или **модулем**) вектора называется длина отрезка $\overline{AB}$. Обозначения модуля: $|\overline{AB}|$, $|\bar{a}|$ или a.

Векторы подразделяются на связанные, скользящие и свободные, в зависимости от того, для описания каких физических величин они используются. **Связанным** называется вектор, начало которого (точка приложения) фиксировано. Например, вектор скорости движущейся точки. **Скользящим** называется вектор, который можно, не изменяя его длины и направления, переносить

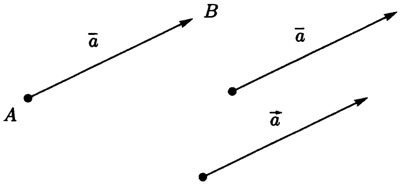


Рис. 2.6

вдоль одной и той же прямой (рис. 2.7). Каждый скользящий вектор $\bar{a}$ можно рассматривать также как бесконечное множество направленных отрезков, лежащих на одной прямой, имеющих равную длину и одинаковое направление. Каждый вектор из этого множества равен $\bar{a}$. Скользящим вектором является, например, сила, приложенная к абсолютно твердому телу. **Свободным** называется вектор, который можно переносить в пространстве параллельно самому себе, не изменяя его длины и направления. Точка приложения свободного вектора не определена (может быть любой). Каждый свободный вектор $\bar{a}$ можно рассматривать как бесконечное множество направленных отрезков, имеющих равную длину, одинаковое направление, параллельных друг другу и приложенных к разным точкам пространства. Каждый вектор из этого множества равен вектору $\bar{a}$ (рис. 2.6). Свободным является, например, вектор скорости поступательно движущегося абсолютно твердого тела. Далее везде рассматриваются только свободные векторы (если не оговорено противное).

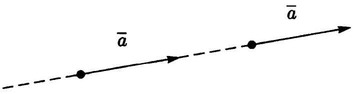


Рис. 2.7

Вектор $\vec{0}$, начало и конец которого совпадают, называется **нулевым**, его модуль равен 0, а направление неопределенное (любое). Вектор $\overline{BA}$ называется **противоположным** вектору $\overline{AB}$. Вектор, противоположный вектору $\bar{a}$, обозначается $-\bar{a}$. Вектор, длина которого равна 1, называется **единичным вектором** или **ортом**. Векторы, лежащие на одной прямой или на параллельных прямых, называются **коллинеарными** и могут иметь либо одинаковые, либо противоположные направления. Свободные векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются **равными** ($\bar{a} = \bar{b}$), если они коллинеарны, имеют равные модули и одинаковые направления. Векторы не являются равными, если не выполняется хотя бы одно из этих трех условий. Векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях, называются **компланарными**.

В **векторной алгебре** рассматриваются следующие действия над векторами: умножение на число, сложение, вычитание, умножение векторов.

2.3.2. Умножение векторов на число и их сложение

1. Произведением вектора $\bar{a}$ на число λ называется вектор $\bar{c} = \lambda\bar{a}$, коллинеарный вектору $\bar{a}$, имеющий длину $|c| = |\lambda|\cdot|\bar{a}|$ и направление, совпадающее с направлением $\bar{a}$ при $\lambda > 0$, либо противоположное направлению $\bar{a}$ при $\lambda < 0$ (рис. 2.8).

2. Сумма двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ определяется следующим образом. При помощи параллельного переноса приведем векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (если они неколлинеарны) к общему началу, т. е. приложим их к одной точке A (рис. 2.9). Вектор $\bar{c}$, приложенный к точке A и совпадающий с диагональю параллелограмма,

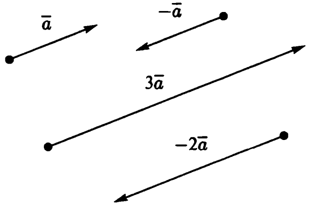


Рис. 2.8

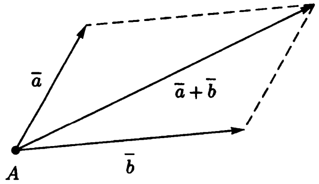


Рис. 2.9

построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$ как на сторонах, называется суммой векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (**правило параллелограмма**). Запись: $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$.

Второе определение суммы векторов. Приложим вектор $\bar{a}$ к точке A, а к концу вектора $\bar{a}$ приложим вектор $\bar{b}$ (рис. 2.10). Тогда вектор $\bar{c}$, идущий из точки A (начало вектора $\bar{a}$) в конец вектора $\bar{b}$, будет суммой $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$ (**правило треугольника**).

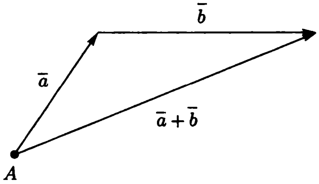


Рис. 2.10

3. Разность $\bar{a} - \bar{b}$ находится как сумма $\bar{a} + (-\bar{b})$ (рис. 2.11). Разность $\bar{a} - \bar{b}$ может быть найдена также как вектор, идущий из конца вектора $\bar{b}$ в конец вектора $\bar{a}$ (рис. 2.12).

Несколько векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$, в общем случае не компланарных, можно сложить по **правилу многоугольника**: к концу вектора $\bar{a}_1$ приложим вектор $\bar{a}_2$, к концу которого приложим вектор $\bar{a}_3$ и т. д. до $\bar{a}_n$. Тогда сумма векторов $\bar{b} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_n$ определяется как вектор $\bar{b}$,

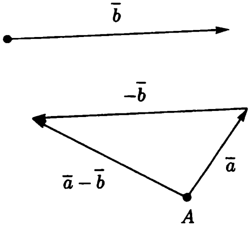


Рис. 2.11

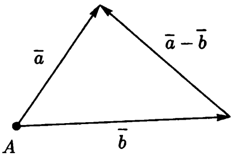


Рис. 2.12

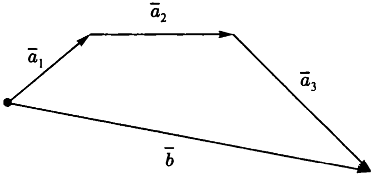


Рис. 2.13

замыкающий ломаную и идущий из начала первого вектора (т. е. $\bar{a}_1$) в конец последнего вектора (т. е. $\bar{a}_n$) (рис. 2.13). Если складываемые векторы не компланарны, то ломаная не лежит в одной плоскости.

4. Свойства действий сложения векторов и умножения их на число:

1) $\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a}$;
2) $\bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}$;
3) $\lambda(\mu\bar{a})=(\lambda\mu)\bar{a}$;
4) $(\lambda+\mu)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a}$;
5) $\lambda(\bar{a}+\bar{b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$;
6) $(-1)\bar{a}=-\bar{a}$;
7) $\bar{a}-\bar{a}=0$;
8) $\bar{a}+\bar{0}=\bar{a}$.

Для любых векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ выполняются неравенства:

$$\big||\bar{a}|-|\bar{b}|\big| \leqslant \big|\bar{a}\pm\bar{b}\big| < |\bar{a}|+|\bar{b}|.$$

5. Разложение вектора по базису.

Линейной комбинацией векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ с действительными коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ называется вектор

$$\bar{b}=\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\ldots+\lambda_n\bar{a}_n.$$

Векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ называются **линейно независимыми,** если равенство

$$\lambda_1\bar{a}_1+\lambda_2\bar{a}_2+\ldots+\lambda_n\bar{a}_n=\bar{0}$$

выполняется только для $\lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_n=0$.

В противном случае векторы называются **линейно зависимыми**. Если два вектора $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ неколлинеарны, то они линейно независимы. Если три вектора $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ некомпланарны, то они линейно независимы. Всякий вектор $\bar{a}$, лежащий на плоскости, содержащей векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2$, может быть **разложен** в виде линейной комбинации $\bar{a}=C_1\bar{a}_1+C_2\bar{a}_2$, где коэффициенты C_1, C_2 называются **координатами (компонентами)** вектора $\bar{a}$ относительно векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ (рис. 2.14). Аналогично, любой вектор $\bar{a}$ в пространстве может быть записан в виде (т. е. **разложен** по векторам $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$)

$$\bar{a}=C_1\bar{a}_1+C_2\bar{a}_2+C_3\bar{a}_3.$$

Это разложение по векторам $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ иногда записывается в виде

$$\bar{a}=(C_1, C_2, C_3).$$

Совокупность трех линейно независимых векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ (а в случае плоскости — двух векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2$), взятых в определенном порядке, образует **базис**. Если $\bar{a}=(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $\bar{b}=(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, то $\bar{a}+\bar{b}=(\alpha_1+\beta_1, \alpha_2+\beta_2, \alpha_3+\beta_3)$,

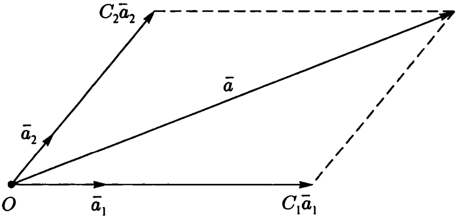


Рис. 2.14

$\lambda\bar{a} = (\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, \lambda\alpha_3)$. Если базисные векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ приложены к одной точке O и поворот от вектора $\bar{a}_1$ к вектору $\bar{a}_2$ на кратчайший угол виден из конца вектора $\bar{a}_3$ происходящим против часовой стрелки, то говорят, что эти векторы образуют **правую тройку векторов** (или **правую систему**), в противном случае — **левую тройку** (или **систему**).

6. Декартовы прямоугольные координаты вектора. Если в пространстве задана (правая) прямоугольная декартова система координат $Oxyz$, то в качестве базисных векторов можно взять три единичных попарно перпендикулярных

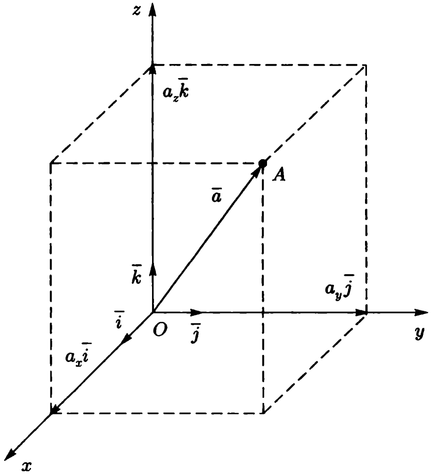


Рис. 2.15

друг другу вектора (**орта**) $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ осей координат Ox, Oy, Oz соответственно (рис. 2.15). Тогда

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k},$$

где числа a_x, a_y, a_z называются **декартовыми (прямоугольными) координатами** (или **компонентами**) вектора $\bar{a}$. Базис, состоящий из взаимно перпендикулярных ортов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, называется **ортонормированным**. Сложение векторов $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$ проводится по правилу:

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z) \equiv (a_x + b_x)\bar{i} + (a_y + b_y)\bar{j} + (a_z + b_z)\bar{k};$$

умножение вектора на число: $\lambda\bar{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z)$. Если векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ равны, то их координаты соответственно равны: $a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$.

Вектор $\bar{r} = \overline{OM}$, идущий от фиксированной точки, обычно от начала координат O, к заданной точке $M(x, y, z)$ пространства, называется **радиус-вектором** точки M (рис. 2.16). Разложение радиус-вектора $\bar{r} = \overline{OM}$ в базисе $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ имеет вид

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}.$$

Здесь x, y, z — декартовы координаты точки M. Обозначая через α, β, γ углы между радиус-вектором $\bar{r}$ и векторами $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ (рис. 2.16), можно записать

$$x = r \cdot \cos\alpha, \quad y = r \cdot \cos\beta, \quad z = r \cdot \cos\gamma,$$

где $r = |\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ — длина вектора $\bar{r}$. Величины $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются **направляющими косинусами** радиус-вектора $\bar{r}$. Любой свободный

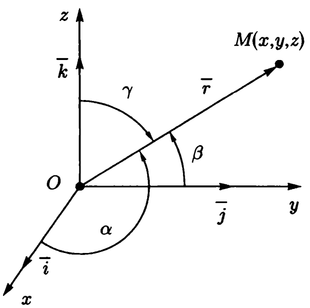


Рис. 2.16

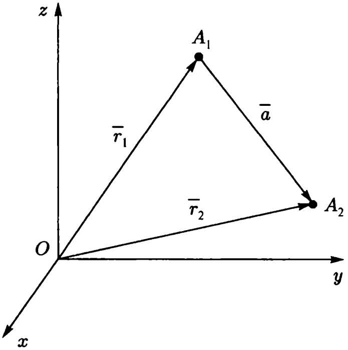


Рис. 2.17

вектор $\bar{a}$ может быть перенесен параллельно самому себе и приложен к любой точке пространства, тогда как радиус-вектор по определению приложен к фиксированной точке.

Выражения координат вектора $\bar{a} = \overline{A_1 A_2}$ (рис. 2.17) через координаты радиус-векторов его начала $\bar{r}_1 = \overline{OA}_1$ и конца $\bar{r}_2 = \overline{OA}_2$ находятся по формулам ($\bar{a} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$):

$$a_x = x_2 - x_1, \quad a_y = y_2 - y_2, \quad a_z = z_2 - z_1,$$

где $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$.

Длина $|\bar{a}|$ вектора $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ находится по формуле

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Расстояние d между точками $A_1(x_1, y_1, z_1)$ и $A_2(x_2, y_2, z_2)$ равно

$$d \equiv |\bar{a}| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

2.3.3. Скалярное произведение векторов

Скалярным произведением двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число (скаляр), равное произведению длин этих векторов на косинус угла φ между ними: $|\bar{a}||\bar{b}|\cos\varphi$. Обозначения: $\bar{a}\bar{b}$, $\bar{a} \cdot \bar{b}$, $(\bar{a}, \bar{b})$.

Обозначая через $\bar{e} = \bar{a}/|\bar{a}|$ (т. е. $\bar{a} = \bar{e}|\bar{a}|$) единичный вектор, коллинеарный вектору $\bar{a}$, можно записать

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = |\bar{a}|\bar{e} \cdot \bar{b} = |\bar{a}| \operatorname{Пр}_{\bar{e}} \bar{b}.$$

Число $\operatorname{Пр}_{\bar{e}} \bar{b} \equiv \bar{e} \cdot \bar{b} = |\bar{b}|\cos\varphi$ называется (**алгебраической**) **проекцией** вектора $\bar{b} = \overline{AB}$ на направление $\bar{e}$ вектора $\bar{a}$. С вектором $\bar{e}$ можно связать ось Oa, положительное направление которой определяется **направляющим вектором** (или **ортом**) $\bar{e}$, лежащим на оси (рис. 2.18). Опустим из точек A и B перпенди-

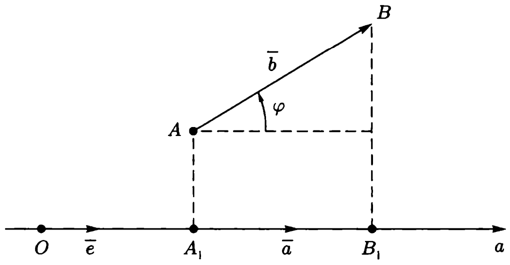


Рис. 2.18

куляры AA_1 и BB_1 на ось Oa. Тогда проекция вектора $\bar{b} = \overline{AB}$ на ось Oa будет равна длине вектора $\overline{A_1B_1}$ на оси Oa, взятой со знаком плюс (или минус), если направление $\overline{A_1B_1}$ совпадает (или противоположно) с положительным направлением оси Oa. Вектор $\overline{A_1B_1}$ называется при этом **составляющей** вектора $\overline{AB}$ по оси Oa. Проекция вектора $\bar{b}$ на ось Oa иногда обозначается $b_a \equiv \bar{e} \cdot \bar{b}$. Пусть $\bar{b} = \bar{b}_1 + \bar{b}_2 + \ldots + \bar{b}_n$, тогда $b_a = b_{1a} + b_{2a} + \ldots + b_{na}$, т. е. проекция суммы векторов на некоторую ось равна сумме проекций этих векторов на ту же ось.

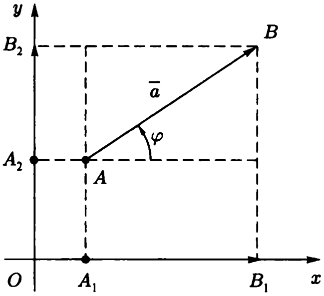


Рис. 2.19

Справедливы равенства

$$a_x = \text{Пр}_{\bar{i}}\, \bar{a} = \bar{i}\bar{a},$$
$$a_y = \text{Пр}_{\bar{j}}\, \bar{a} = \bar{j}\bar{a},$$
$$a_z = \text{Пр}_{\bar{k}}\, \bar{a} = \bar{k}\bar{a}.$$

где a_x, a_y, a_z — декартовы координаты вектора $\bar{a}$. В частности,

$$\overline{AB} = \overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j},$$

где $\overline{A_1B_1}$ и $\overline{A_2B_2}$ — **составляющие вектора** $\bar{a} = \overline{AB}$ по осям Ox и Oy соответственно (рис. 2.19).

Свойства скалярного произведения.

1) $\bar{a}\bar{b} = \bar{b}\bar{a}$;
2) $(\lambda\bar{a})\bar{b} = \lambda(\bar{a}\bar{b})$;
3) $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a}\bar{b} + \bar{a}\bar{c}$;
4) $\bar{a}\bar{b} = 0$, только если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ перпендикулярны или хотя бы один из векторов нулевой;
5) $\bar{a}\bar{a} \equiv \bar{a}^2 = |\bar{a}|^2$.

Из этих свойств, в частности, следует, что линейные комбинации векторов перемножаются по тем же правилам, что и обычные полиномы в алгебре.

Пример 1.

$$(2\bar{a} + 3\bar{b})(\bar{a} - 2\bar{b}) = (2\bar{a} + 3\bar{b})\bar{a} + (2\bar{a} + 3\bar{b})(-2\bar{b}) = 2\bar{a}^2 + 3\bar{b}\bar{a} +$$
$$+ (2\bar{a})(-2\bar{b}) + (3\bar{b})(-2\bar{b}) = 2\bar{a}^2 + 3\bar{a}\bar{b} - 4\bar{a}\bar{b} - 6\bar{b}^2 = 2\bar{a}^2 - \bar{a}\bar{b} - 6\bar{b}^2.$$

Для базисных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ справедливы равенства:

$$\bar{i}\bar{i} = \bar{j}\bar{j} = \bar{k}\bar{k} = 1, \quad \bar{i}\bar{j} = \bar{j}\bar{k} = \bar{k}\bar{i} = 0.$$

Пример 2. $(\bar{i} - \bar{j})(\bar{j} + \bar{k}) = \bar{i}\bar{j} + \bar{i}\bar{k} - \bar{j}\bar{j} - \bar{j}\bar{k} = -1.$

Выражение скалярного произведения через координаты векторов. Если

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \equiv (a_x, a_y, a_z),$$
$$\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k} \equiv (b_x, b_y, b_z),$$

то

$$\bar{a}\bar{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z.$$

Если $\bar{a} = \bar{a}_1 + \bar{a}_2 + \ldots + \bar{a}_n$, то

$$a_x = a_{1x} + a_{2x} + \ldots + a_{nx},$$
$$a_y = a_{1y} + a_{2y} + \ldots + a_{ny},$$
$$a_z = a_{1z} + a_{2z} + \ldots + a_{nz}.$$

Угол φ между векторами $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$ можно найти по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}||\bar{b}|} = \frac{a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

Косинусы углов α, β, γ, образуемых вектором $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ с векторами базиса $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, называются **направляющими косинусами** вектора $\bar{a}$:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{a}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{a}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{a},$$

где $a \equiv |\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$. Свойство направляющих косинусов:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

В частности, для радиус-вектора (рис. 2.16):

$$\cos\alpha = \frac{x}{r}, \quad \cos\beta = \frac{y}{z}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{r},$$

где $r \equiv |\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

Условием перпендикулярности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ является

$$\bar{a}\bar{b} = a_xb_x + a_yb_y + a_zb_z = 0.$$

Пример 3. Даны три точки $A(1;1)$, $B(3;3)$, $C(3;1)$ на плоскости. Найти угол $\varphi = \sphericalangle BAC$.

Решение. $\bar{a} = \overline{AB} = \bar{r}_B - \bar{r}_A = (x_B - x_A,\ y_B - y_A) = (2;2)$, где x_A, x_B; y_A, y_B — координаты точек A и B. Аналогично, $\bar{b} = \overline{AC} = \bar{r}_C - \bar{r}_A = (2;0)$. Отсюда и находим

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a}\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|} = \frac{2\cdot2 + 2\cdot0}{\sqrt{2^2+2^2}\sqrt{2^2+0^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \quad \varphi = 45^\circ. \qquad \triangleright$$

2.3.4. Векторное произведение

1. Векторное произведение двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ (обозначения: $\bar{a} \times \bar{b}$ или $[\bar{a}, \bar{b}]$) называется такой вектор $\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b}$, который определяется тремя условиями:

1) его модуль равен $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \sin\varphi$, где φ — угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$, не превосходящий π (рис. 2.20).
2) вектор $\bar{c}$ перпендикулярен плоскости, в которой лежат $\bar{a}$ и $\bar{b}$.
3) вектор $\bar{c}$ направлен так, что поворот от $\bar{a}$ к $\bar{b}$ на угол φ виден из конца вектора $\bar{c}$ совершающимся против часовой стрелки, т. е. упорядоченный набор векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образует правую тройку.

Модуль векторного произведения двух неколлинеарных векторов $\bar{a} = \overline{AB}$ и $\bar{b} = \overline{AD}$ равен площади параллелограмма $ABCD$, построенного на этих векторах как на сторонах (рис. 2.20).

Свойства векторного произведения.

1) $\bar{a} \times \bar{b} = -\bar{b} \times \bar{a}$;
2) $(\lambda\bar{a}) \times \bar{b} = \lambda(\bar{a} \times \bar{b})$;
3) $\bar{a} \times \bar{a} = \bar{0}$;
4) $\bar{a} \times (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}$;
5) $\bar{a}(\bar{a} \times \bar{b}) = 0$;
6) $\bar{b}(\bar{a} \times \bar{b}) = 0$;
7) $\bar{a} \times \bar{b} = 0$, только если $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны, или хотя бы один из векторов нулевой.

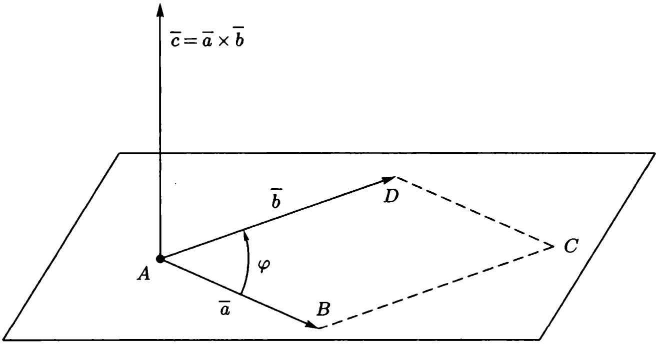


Рис. 2.20

Справедливо равенство:

$$(\bar{a}\times\bar{b})^2 = a^2b^2 - (\bar{a}\cdot\bar{b})^2 \quad (a\equiv|\bar{a}|,\ b\equiv|\bar{b}|).$$

Линейные комбинации векторов перемножаются как обычные полиномы, но с учетом порядка сомножителей, так как при изменении этого порядка знак векторного произведения изменяется на противоположный.

Пример 4.

$$(2\bar{a}+3\bar{b})\times(\bar{a}-2\bar{b}) = (2\bar{a}+3\bar{b})\times\bar{a} + (2\bar{a}+3\bar{b})\times(-2\bar{b}) =$$
$$= 2\bar{a}\times\bar{a} + 3\bar{b}\times\bar{a} - 4\bar{a}\times\bar{b} - 6\bar{b}\times\bar{b} = -3\bar{a}\times\bar{b} - 4\bar{a}\times\bar{b} = -7\bar{a}\times\bar{b}.$$

Для базисных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ справедливы равенства:

$$\bar{i}\times\bar{i} = \bar{j}\times\bar{j} = \bar{k}\times\bar{k} = 0, \quad \bar{i}\times\bar{j} = \bar{k}, \quad \bar{j}\times\bar{k} = \bar{i}, \quad \bar{k}\times\bar{i} = \bar{j}.$$

Пример 5. $(\bar{i}-\bar{j})\times(\bar{j}+\bar{k}) = \bar{i}\times\bar{j} + \bar{i}\times\bar{k} - \bar{j}\times\bar{j} - \bar{j}\times\bar{k} = \bar{k} - \bar{j} + \bar{i}.$

Выражение векторного произведения через координаты векторов. Если

$$\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k} \equiv (a_x, a_y, a_z),$$
$$\bar{b} = b_x\bar{i} + b_y\bar{j} + b_z\bar{k} \equiv (b_x, b_y, b_z),$$
$$\bar{c} = c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k} \equiv (c_x, c_y, c_z),$$

то

$$\bar{c}\equiv\bar{a}\times\bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \bar{i}\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \bar{j}\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \bar{k}\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} =$$
$$= (a_yb_z - a_zb_y)\bar{i} + (a_zb_x - a_xb_z)\bar{j} + (a_xb_y - a_yb_x)\bar{k},$$

т. е. $c_x = a_yb_z - a_zb_y$, $c_y = a_zb_x - a_xb_z$, $c_z = a_xb_y - a_yb_x$.

Условие коллинеарности векторов $\bar{a}$ **и** $\bar{b}$:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Пример 6. Найти площадь треугольника, построенного на векторах $\bar{a} = (1;1;1)$, $\bar{b} = (1;1;-1)$, приложенных к одной точке.

<u>Решение</u>. $\bar{c} = \bar{a}\times\bar{b}$; $c_x = 1\cdot(-1) - 1\cdot1 = -2$, $c_y = 1\cdot1 - 1\cdot(-1) = 2$, $c_z = 1\cdot1 - 1\cdot1 = 0$; $\bar{c} = (-2;2;0)$; $|\bar{c}| = \sqrt{c_x^2 + c_y^2 + c_z^2} = 2\sqrt{2}$. Площадь треугольника равна половине площади параллелограмма, т. е. $\sqrt{2}$ (рис. 2.20). ▷

2. Двойным векторным произведением векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ называется вектор

$$\bar{d} \equiv \bar{a}\times(\bar{b}\times\bar{c}),$$

который может быть найден либо непосредственно, при помощи выполнения двух векторных умножений подряд (сначала внутри скобок), либо по формуле

$$\bar{a} \times (\bar{b} \times \bar{c}) = \bar{b}(\bar{a} \cdot \bar{c}) - \bar{c}(\bar{a} \cdot \bar{b}),$$

где в круглых скобках — скалярные произведения.

2.3.5. Смешанное произведение

Смешанным (или **векторно-скалярным**) произведением трех векторов

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z), \quad \bar{b} = (b_x, b_y, b_z), \quad \bar{c} = (c_x, c_y, c_z),$$

взятых в указанном порядке, называется число (скаляр), равное скалярному произведению вектора $\bar{a}$ на векторное произведение векторов $\bar{b}$ и $\bar{c}$, т. е.

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}).$$

Обозначения смешанного произведения: $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c})$ или $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$, $(\bar{a}\bar{b}\bar{c})$.

Свойства смешанного произведения.

1) $\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) \equiv (\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = (\bar{b}, \bar{c}, \bar{a}) = (\bar{c}, \bar{a}, \bar{b}) = -(\bar{b}, \bar{a}, \bar{c}) = -(\bar{c}, \bar{b}, \bar{a}) = -(\bar{a}, \bar{c}, \bar{b})$;
2) $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = 0$ только если $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ компланарны, или хотя бы один из векторов нулевой;
3) $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) > 0$, если тройка векторов правая,
   $(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) < 0$, если тройка левая.

Смешанное произведение некомпланарных векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком плюс

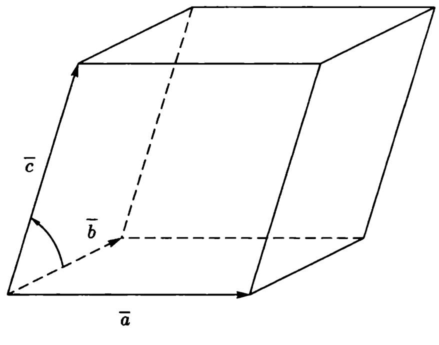


Рис. 2.21

(или минус), если тройка векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ правая (или левая) (рис. 2.21). В частности, $(\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}) = 1$.

Смешанное произведение может быть выражено через координаты векторов в виде определителя

$$(\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \equiv D.$$

Условие компланарности трех векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ записывается в виде равенства нулю ($D \equiv 0$) определителя, выражающего смешанное произведение этих векторов.

2.4. Замена системы координат

2.4.1. Параллельный перенос системы координат

Пусть даны две декартовы системы координат с одинаковыми единицами масштаба: **первая (старая)** — $Oxyz$ и **вторая (новая)** — $O'x'y'z'$, соответственные оси которых Ox и $O'x'$, Oy и $O'y'$, Oz и $O'z'$ параллельны (рис. 2.22). Радиус-векторы точки M в первой и второй системах координат, обозначаемые

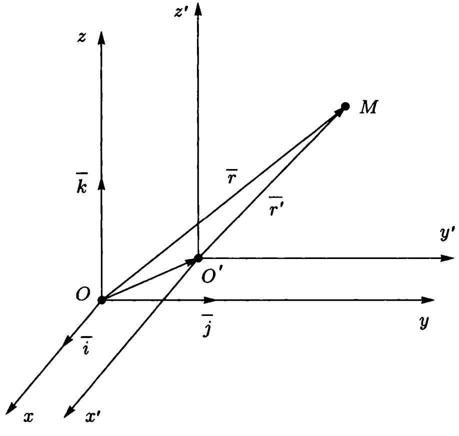


Рис. 2.22

$OM \equiv \bar{r}$ и $\overline{O'M} \equiv \bar{r}'$, связаны равенством $\bar{r} = \bar{r}' + \overline{OO'}$, из которого следуют соотношения между координатами точки M в обеих системах координат:

$$x = x' + x_0 \quad (x' = x - x_0),$$
$$y = y' + y_0 \quad (y' = y - y_0),$$
$$z = z' + z_0 \quad (z' = z - z_0),$$

где $\overline{OO'} = (x_0, y_0, z_0)$ — радиус-вектор точки O' в системе $Oxyz$; x, y, z и x', y', z' — координаты точки M в первой и второй системах координат. Для базисных векторов справедливы равенства: $\bar{i} = \bar{i}'$, $\bar{j} = \bar{j}'$, $\bar{k} = \bar{k}'$. В этих базисах любой вектор $\bar{a}$ имеет разложения $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{a} = (a'_x, a'_y, a'_z)$. При этом

$$a_x = a'_x, \quad a_y = a'_y, \quad a_z = a'_z.$$

2.4.2. Поворот системы координат

Пусть даны две декартовы системы координат: **первая (старая)** — $Ox_1x_2x_3$ и **вторая (новая)** — $Ox'_1x'_2x'_3$ (здесь для координат введены обозначения $x \equiv x_1$, $y \equiv x_2$, $z \equiv x_3$) с ортонормированными базисами $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ и $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ и совпадающими в точке O началами координат (рис. 2.23). Предполагается, что положение векторов второго базиса по отношению к первому базису задано. Обозначая координаты одной и той же точки M в первой и второй системах координат x_1, x_2, x_3 и x'_1, x'_2, x'_3, запишем радиус-вектор $\bar{r} = \overline{OM}$ этой точки в виде

$$\bar{r} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3, \quad \bar{r} = x'_1\bar{e}'_1 + x'_2\bar{e}'_2 + x'_3\bar{e}'_3.$$

Приравнивая оба эти выражения, т. е.

$$\sum_{i=1}^{3} x'_i\bar{e}'_i = \sum_{j=1}^{3} x_j\bar{e}_j,$$

и умножая скалярно обе части этого равенства последовательно на $\bar{e}'_1, \bar{e}'_2, \bar{e}'_3$ с учетом ортонормированности базисов, получим формулы преобразования координат точки при переходе от старой системы координат к новой

$$\begin{aligned} x'_1 &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \alpha_{13}x_3, \\ x'_2 &= \alpha_{21}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{23}x_3, \\ x'_3 &= \alpha_{31}x_1 + \alpha_{32}x_2 + \alpha_{33}x_3, \end{aligned} \tag{2.1}$$

или

$$x'_i = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}x_j,$$

где $\alpha_{ij} = \bar{e}'_i\bar{e}_j$; $i, j = 1, 2, 3$; $\det[\alpha_{ij}] > 0$.

Векторы обоих базисов связаны равенством

$$\bar{e}_i' = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}\bar{e}_j \quad (i = 1, 2, 3). \tag{2.2}$$

Из девяти коэффициентов α_{ij} только три можно задавать произвольно, так как они связаны между собой шестью соотношениями

$$\sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij}^2 = 1 \quad (i = 1, 2, 3); \quad \sum_{k=1}^{3} \alpha_{ik}\alpha_{jk} = 0 \quad (i \neq j;\ i, j = 1, 2, 3),$$

выражающими ортонормированность базиса, т. е.

$$\bar{e}_i' \cdot \bar{e}_j' = \delta_{ij},$$

где δ_{ij} — **символ Кронекера**:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad i = j, \\ 1 & \text{при} \quad i \neq j \quad (i, j = 1, 2, 3). \end{cases}$$

Вектор $\bar{a}$ может быть разложен как в первом, так и во втором базисе

$$\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3 = a_1'\bar{e}_1' + a_2'\bar{e}_2' + a_3'\bar{e}_3',$$

где $a_i' = \sum\limits_{j=1}^{3} \alpha_{ij}a_j$. При этом $(a_1')^2 + (a_2')^2 + (a_3')^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$.

2.5. Тензоры

2.5.1. Основные понятия

Декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$ в пространстве обозначим через K, а через K' — систему $Ox_1'x_2'x_3'$, в которую переходит система K при повороте ее вокруг некоторой оси, проходящей через точку O (рис. 2.23).

Скаляр, т. е. величина, значение которой выражается только одним числом (см. 2.3.1), по определению не изменяется при повороте системы координат (является инвариантным).

Обобщением понятия скаляра является **вектор** (свободный), т. е. величина, определяемая заданием упорядоченной тройки чисел (компонент). Любой вектор по определению инвариантен относительно изменения системы координат, т. е.

$$a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3 = a_1'\bar{e}_1' + a_2'\bar{e}_2', a_3'\bar{e}_3'$$

(за исключением базисных векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$, которые поворачиваются вместе с осями координат). Из инвариантности вектора следует, что его компоненты

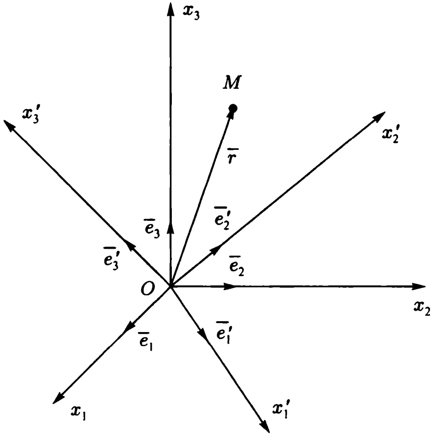


Рис. 2.23

при переходе от системы K к системе K' преобразуются по формуле, аналогичной (2.1):

$$a_j' = \sum_{j=1}^{3} \alpha_{ij} a_j \quad (\det[\alpha_{ij}] > 0). \tag{2.3}$$

Обобщением понятия вектора является **тензор**.

Тензором второго ранга называется инвариантная величина, определяемая совокупностью девяти действительных чисел T_{ij} $(i, j = 1, 2, 3)$, преобразующихся при переходе от системы K к K' по формуле

$$T_{ij}' = \sum_{k=1}^{3} \sum_{m=1}^{3} \alpha_{ik} \alpha_{jm} T_{km} \quad (i, j = 1, 2, 3). \tag{2.4}$$

Числа T_{ij} называются **компонентами тензора**.

Тензор обозначается одним из следующих способов:

$$T \equiv (T_{ij}) \equiv \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix}$$

или просто T_{ij}.

Рангом (или **порядком**) тензора называется число индексов его компонент. В общем случае тензор ранга r имеет 3^r компонент $T_{ij\ldots m}$ (всего r индексов).

Любой скаляр является тензором нулевого ранга. Любой вектор (кроме базисных) представляет собой тензор первого ранга. Коэффициенты α_{ij} перехода от системы K к K' не образуют тензора, так как их индексы относятся к осям разных систем.

Пример 7. Если $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, b_3)$ — векторы, то набор из девяти произведений $T_{ij} = a_i b_j$ $(i, j = 1, 2, 3)$ является тензором $T = (a_i b_j)$, так как его компоненты преобразуются по формуле (2.4).

Пример 8. Тензор (см. символ Кронекера в 1.3.1.1)

$$(\delta_{ij}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

в любой системе координат K' имеет вид $\delta'_{ij} = \delta_{ij}$ и называется **единичным тензором**.

Запись тензора в инвариантном виде. Для записи тензора в инвариантном виде (аналогичном записи вектора $\bar{a} = a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3$) вводится понятие **диады** (или **аффинора**).

Диадой (или **аффинором**) называется **диадное произведение** любых двух векторов, в том числе и базисных $\bar{e}_i, \bar{e}_j$, которое по определению задается записью одного вектора за другим в **определенном порядке,** например $\bar{e}_1\bar{e}_2$ или $\bar{e}_2\bar{e}_1$ (следует отличать от скалярного произведения), при этом $\bar{e}_1\bar{e}_2 \neq \bar{e}_2\bar{e}_1$.

Инвариантная запись тензора T имеет вид:

$$T = \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}\bar{e}_i\bar{e}_j.$$

При этом в системах K и K' соответственно:

$$T = \sum_{i,j=1}^{3} T_{ij}\bar{e}_i\bar{e}_j = \sum_{i,j=1}^{3} T'_{km}\bar{e}_k{}'\bar{e}_m{}'.$$

Здесь $\bar{e}_i\bar{e}_j$ и $\bar{e}_k{}'\bar{e}_m{}'$ — диады $(i, j, k, m = 1, 2, 3)$.

Например, тензор $(a_i b_j)$ представляет собой диаду (аффинор) $\bar{a}\bar{b}$, которую можно записать в виде комбинации диад $\bar{e}_i\bar{e}_j$:

$$\begin{aligned} \bar{a}\bar{b} &= (a_1\bar{e}_1 + a_2\bar{e}_2 + a_3\bar{e}_3)(b_1\bar{e}_1 + b_2\bar{e}_2 + b_3\bar{e}_3) = \\ &= \bar{e}_1\bar{e}_1 a_1 b_1 + \bar{e}_1\bar{e}_2 a_1 b_2 + \bar{e}_1\bar{e}_3 a_1 b_3 + \bar{e}_2\bar{e}_1 a_2 b_1 + \bar{e}_2\bar{e}_2 a_2 b_2 + \\ &\quad + \bar{e}_2\bar{e}_3 a_2 b_3 + \bar{e}_3\bar{e}_1 a_3 b_1 + \bar{e}_3\bar{e}_2 a_3 b_2 + \bar{e}_3\bar{e}_3 a_3 b_3. \end{aligned}$$

Симметричные и антисимметричные тензоры. Тензор T_{ij}, удовлетворяющий условию $T_{ij} = T_{ji}$, называется **симметричным**. Если $T_{ij} = -T_{ji}$, то говорят, что тензор **антисимметричный**. Любой тензор T_{ij} можно представить в виде суммы симметричного S_{ij} и антисимметричного A_{ij} тензора:

$$T_{ij} = S_{ij} + A_{ij},$$

где $S_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} + T_{ji})$, $A_{ij} = \frac{1}{2}(T_{ij} - T_{ji})$.

2.5.2. Тензорная алгебра

Суммой тензоров одинакового ранга A_{ij} и B_{ij} называют тензор C_{ij} вида

$$C_{ij} = A_{ij} + B_{ij}.$$

Любой тензор можно представить как сумму нескольких тензоров одинакового ранга.

Произведением тензора A_{ij} **на скаляр** λ называется тензор B_{ij} с компонентами $B_{ij} = \lambda A_{ij}$.

Произведением тензоров (в общем случае различного ранга) A_{ij} и B_{km} называется тензор C_{ijkm} с компонентами

$$C_{ijkm} = A_{ij}B_{km}.$$

Произведение тензоров зависит, вообще говоря, от порядка сомножителей. Ранг произведения тензоров равен сумме рангов сомножителей.

Свертывание тензора A_{ijk} по индексам j и k проводится следующим образом. Индексы j и k полагаются равными друг другу, а затем по ним проводится суммирование. Получающийся в результате свертывания тензор называется **сверткой тензора** A_{ijk} по индексам j и k. В данном случае свертка является вектором (тензором ранга 1)

$$B_i = \sum_{j=1}^{3} A_{ijj}.$$

В результате одного свертывания ранг тензора уменьшается на два. Свертывание можно применять к тензорам любого ранга большего либо равного двум. Сверткой тензора второго ранга T_{ij} является скаляр, называемый **следом** тензора:

$$\mathrm{Sp}\,(T_{ij}) = T_{11} + T_{22} + T_{33}$$

и инвариантный относительно преобразования координат.

Например, следом тензора $a_i b_j$ (где a_i, b_j — компоненты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$) является скалярное произведение $\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$.

Свертка тензора T_{ij} с вектором a_j является некоторым вектором b_i:

$$b_i = \sum_{j=1}^{3} T_{ij}a_j.$$

Следовательно, тензор можно рассматривать как **оператор**, преобразующий вектор $\bar{a}$ в вектор $\bar{b}$.

Правило частного. Пусть даны равенства

$$\sum_{i=1}^{3} T_i a_i = b, \quad \sum_{j=1}^{3} T_{ij} a_j = b_i, \quad \sum_{j=1}^{3} T_{ij} A_{jk} = B_{ik},$$

где $b, a_i, b_i, A_{lk}, B_{ik}$ — известные тензоры.

Тогда T_i, T_{ij} также являются тензорами. В частности, если $\sum\limits_{i,j=1}^{3} T_{ij} A_{ij}$ — скаляр, то T_{ij} — тензор.

Перестановка индексов. Если компоненты тензора B_{kji} выражаются через компоненты тензора A_{ijk} по формуле $B_{kji} = A_{ijk}$, то говорят, что B_{kji} получен из A_{ijk} **перестановкой индексов** i и k. В общем случае тензоры A и B отличаются друг от друга. Тензор называется **симметричным** (или **антисимметричным**) по какой-либо совокупности индексов, если при перестановке любых двух индексов из этой совокупности его компоненты не меняют (или меняют) знак на противоположный.

2.5.3. Свойства симметричных тензоров второго ранга

Пусть T_{ij} — симметричный тензор, т.е. $T_{ij} = T_{ji}$ $(i, j = 1, 2, 3)$. Из девяти его компонент независимы только шесть, так как $T_{12} = T_{21}$, $T_{13} = T_{31}$, $T_{23} = T_{32}$. С этим тензором можно связать поверхность, определяемую уравнением

$$\sum_{i,j=1}^{3} T_{ij} x_i x_j \equiv T_{11} x_1^2 + T_{22} x_2^2 + T_{33} x_3^2 + 2T_{12} x_1 x_2 + 2T_{13} x_1 x_3 + 2T_{23} x_2 x_3 = 1. \quad (2.5)$$

Выражение в левой части (2.5) называется **квадратичной формой** от переменных x_1, x_2, x_3. Уравнение (2.5) определяет поверхность второго порядка, называемую **тензорной поверхностью**, центр которой находится в начале координат: эллипсоид, гиперболоид, цилиндрическую поверхность или две параллельные плоскости. В частности, если $T_{11} > 0$, $T_{22} > 0$, $T_{33} > 0$, то поверхность является эллипсоидом.

Если вектор a_j преобразуется в вектор

$$b_i = \sum_{j=1}^{3} T_{ij} a_j,$$

то вектор a_j, для которого

$$\sum_{j=1}^{3} T_{ij} a_j = \lambda a_i$$

(λ — число), называется **собственным вектором** тензора T_{ij}. Следовательно, в результате преобразования собственный вектор $\bar{a}$ переходит в коллинеарный ему вектор $\lambda\bar{a}$. Здесь число λ называется **собственным значением** тензора, соответствующим данному собственному вектору $\bar{a}$. Уравнение

$$\sum_{j=1}^{3} T_{ij}a_j = \lambda a_i$$

для нахождения собственных векторов можно записать в виде

$$\sum_{j=1}^{3} T_{ij}a_j = \lambda \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij}a_j$$

(δ_{ij} — символ Кронекера), или

$$\sum_{j=1}^{3}(T_{ij} - \lambda\delta_{ij})a_j = 0. \tag{2.6}$$

Однородное уравнение (2.6) имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю $\det(T_{ij} - \lambda\delta_{ij}) = 0$, т. е.

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{2.7}$$

Собственные значения λ_i $(i = 1, 2, 3)$ находятся как корни **характеристического уравнения** (2.7), имеющего третью степень относительно λ. Все собственные значения симметричного тензора T_{ij} являются действительными числами (положительными, отрицательными или равными нулю). Собственные векторы $\bar{a}_i$ и $\bar{a}_j$, соответствующие различным собственным значениям $\lambda_i \neq \lambda_j$, ортогональны друг другу, т. е. их скалярное произведение равно нулю: $\bar{a}_i\bar{a}_j = 0$.

Если все собственные значения разные и $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$, то тензорная поверхность — трехосный эллипсоид. При этом существуют три взаимно перпендикулярных собственных вектора, направленных вдоль полуосей эллипсоида.

Взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ тензорной поверхности, направления которых совпадают с направлениями собственных векторов, называются **главными осями** тензора, а значения $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ называются **главными значениями** тензора. Если в качестве осей координат повернутой системы K' выбрать главные оси, то тензор T_{ij} в системе

K' примет вид

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}, \quad \text{где } \lambda_1 = T'_{11},\ \lambda_2 = T'_{22},\ \lambda_3 = T'_{33}.$$

Уравнение тензорной поверхности в системе K' имеет вид

$$\lambda_1(x'_1)^2 + \lambda_2(x'_2)^2 + \lambda_3(x'_3)^2 = 1.$$

Если при этом только два из трех положительных собственных значений одинаковые, то получим эллипсоид вращения. Вполне определено только одно главное направление, а два других, перпендикулярных к нему, можно выбрать произвольно (при условии их взаимной перпендикулярности). Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 > 0$, то эллипсоид переходит в сферу. Направления всех трех главных осей становятся при этом неопределенными, т. е. можно выбрать любые три взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр сферы.

2.6. Векторные пространства

2.6.1. Понятие векторного пространства

Векторное (линейное) n-мерное пространство является обобщением понятия множества всех свободных векторов обычного трехмерного геометрического пространства.

Вектором $\bar{x}$ n-мерного действительного векторного пространства (или **n-мерным вектором**) называется упорядоченная система n действительных чисел: $\bar{x} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Числа $x_1, x_2, \dots, x_n$ называются координатами вектора $\bar{x}$.

Пример 9. Векторами в смысле данного определения являются:

1) строки и столбцы матрицы размера $m \times n$, соответственно n- и m-мерными векторами;
2) свободные векторы на плоскости и в пространстве представляют собой соответственно двумерные и трехмерные векторы;
3) каждое решение системы линейных уравнений с n неизвестными является n-мерным вектором.

Два вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ считаются **равными** тогда и только тогда, когда их соответствующие координаты одинаковы, т. е. $x_1 = y_1$, $x_2 = y_2$, $\dots$, $x_n = y_n$. Всякое векторное равенство равносильно n скалярным равенствам.

Вектор $\bar{0} = (0; 0; \dots; 0)$ (всего n нулей) называется **нулевым вектором.**

Суммой векторов $\bar{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ называется вектор $\bar{z} = \bar{x} + \bar{y} \equiv (z_1, z_2, \dots, z_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$, т. е. $z_i = x_i + y_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Свойства сложения векторов.

$$1)\ \bar{x}+\bar{y}=\bar{y}+\bar{x};\quad 2)\ (\bar{x}+\bar{y})+\bar{z}=\bar{x}+(\bar{y}+\bar{z});\quad 3)\ \bar{x}+\bar{0}=\bar{x}; \tag{2.8}$$

4) для любого вектора $\bar{x}$ существует **противоположный** ему вектор $\bar{y} \equiv -\bar{x}$ такой, что $\bar{x}+\bar{y}=\bar{0}$.

Произведением вектора $\bar{x}$ на действительное число α называется вектор $\bar{y}=(y_1,y_2,\dots,y_n)=\alpha\bar{x}=(\alpha x_1,\alpha x_2,\dots,\alpha x_n)$, т. е. $y_i=\alpha x_i$ $(i=1,2,\dots,n)$.

Свойства умножения вектора на число.

$$\begin{gathered}1)\ 1\bar{x}=\bar{x};\quad 2)\ 0\bar{x}=0;\quad 3)\ (-1)\bar{x}=-\bar{x};\quad 4)\ \alpha(\bar{x}+\bar{y})=\alpha\bar{x}+\alpha\bar{y};\\ 5)\ \alpha(\beta\bar{x})=(\alpha\beta)\bar{x};\quad 6)\ (\alpha+\beta)\bar{x}=\alpha\bar{x}+\beta\bar{x}.\end{gathered} \tag{2.9}$$

Любое множество n-мерных векторов, в котором определены операции сложения векторов и умножения их на действительное число, не выходящие за пределы этого множества и обладающие свойствами (2.8) и (2.9), называется **векторным (линейным) пространством.** В частности, множество всех n-мерных векторов образует n-мерное векторное пространство, обозначаемое через L_n. Число n координат вектора называется **размерностью** векторного пространства.

Пример 10.

1) Множество всех векторов на плоскости является двумерным векторным пространством. Если векторы $\bar{a}=(a_x,a_y)$, $\bar{b}=(b_x,b_y)$ лежат в данной плоскости, то векторы $\bar{a}+\bar{b}=(a_x+b_x,a_y+b_y)$, $\alpha\bar{a}=(\alpha a_x,\alpha a_y)$ также лежат в этой плоскости.
2) Множество всех векторов в трехмерном пространстве образует векторное пространство.

Если координаты векторов, а также числа, на которые умножаются векторы, являются комплексными, то говорят о **комплексном векторном пространстве**.

Примечание. Векторным пространством, в общем случае, называется множество элементов **любой природы**, в котором определены операции сложения элементов и умножения их на число, действительное или комплексное, удовлетворяющие условиям (2.8) и (2.9). Рассмотренное выше n-мерное действительное векторное пространство является лишь одним из частных случаев векторного пространства общего вида. Другой частный случай — векторное пространство $C[a;b]$, элементами которого являются функции $f(x)$, непрерывные на некотором отрезке $[a;b]$. Действительно, сумма любых двух непрерывных функций непрерывна, а также непрерывна функция, умноженная на любое число. Введенные операции, не выходящие за пределы множества $C[a;b]$, удовлетворяют условиям (2.8), (2.9).

2.6.2. Линейная зависимость векторов

Векторы $\bar{x}_1,\bar{x}_2,\dots,\bar{x}_m$ с комплексными координатами, принадлежащие n-мерному векторному пространству, называются **линейно зависимыми,** если существуют действительные или комплексные числа $C_1, C_2, \ldots, C_m$, не все равные нулю и такие, что

$$C_1\bar{x}_1 + C_2\bar{x}_2 + \ldots + C_m\bar{x}_m = \bar{0}. \tag{2.10}$$

Если равенство (2.10) возможно только при $C_1 = C_2 = \ldots = C_m = 0$, то векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m$ называются **линейно независимыми.** Выражение в левой части (2.10) называется **линейной комбинацией** векторов $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$ с коэффициентами $C_1, \ldots, C_m$. Если несколько векторов линейно зависимы, то хотя бы один из них является линейной комбинацией остальных, например, если $C_m \neq 0$, то из (2.10) следует

$$\bar{x}_m = -\frac{C_1}{C_m}\bar{x}_1 - \frac{C_2}{C_m}\bar{x}_2 - \ldots - \frac{C_{m-1}}{C_m}\bar{x}_{m-1}.$$

Пример 11. Для трехмерного векторного пространства линейная зависимость двух векторов означает, что они коллинеарны. Если два вектора неколлинеарны, то они линейно независимы. Линейная зависимость трех векторов означает их компланарность. Если три вектора некомпланарны, то они линейно независимы.

Выражая векторы $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$ через их координаты: $\bar{x}_i \equiv \{x_{1i}, x_{2i}, \ldots, x_{ni}\}$, равенство (2.10) можно записать в виде

$$C_1\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{21} \\ \vdots \\ x_{n1} \end{bmatrix} + C_2\begin{bmatrix} x_{12} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{n2} \end{bmatrix} + \ldots + C_m\begin{bmatrix} x_{1m} \\ x_{2m} \\ \vdots \\ x_{nm} \end{bmatrix} = 0$$

или в виде системы n уравнений относительно коэффициентов C_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$

$$\begin{aligned} C_1x_{11} + C_2x_{12} + \ldots + C_mx_{1m} &= 0, \\ C_1x_{21} + C_2x_{22} + \ldots + C_mx_{2m} &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ C_1x_{n1} + C_2x_{n2} + \ldots + C_mx_{nm} &= 0. \end{aligned} \tag{2.11}$$

Если система (2.11) имеет (или не имеет) ненулевые решения, то векторы $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_m$ линейно зависимы (или независимы).

Рассмотрим матрицу размера $n \times m$

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \cdots & x_{nm} \end{bmatrix}. \tag{2.12}$$

Пусть ранг этой матрицы равен r (см. 1.3.3). Система (2.11) с m неизвестными $C_1, C_2, \ldots, C_m$ (предполагается, что $m \leqslant n$) имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда $r < m$ (см. 1.3.5). Следовательно, векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m$ линейно зависимы, если $r < m$, и линейно независимы, если $r = m$. Таким образом, ранг r матрицы X равен наибольшему числу линейно независимых векторов, содержащихся в данной их совокупности. Если $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_r$ — линейно независимые векторы из данной их совокупности, то всякий другой вектор из совокупности может быть записан в виде линейной комбинации этих r векторов. Если $m > n$, то ранг матрицы X очевидно не превышает n.

Пример 12. Исследовать на линейную зависимость совокупность векторов

$$\bar{x}_1 = \{3; -1; 2; 1\}, \quad \bar{x}_2 = \{1; 4; -2; 2\}, \quad \bar{x}_3 = \{-2; 5; -4; 1\}.$$

Решение. Ранг матрицы

$$X = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ -1 & 4 & 5 \\ 2 & -2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

равен $r = 2$ (см. пример 13 в 1.3.3). Следовательно, данные три вектора линейно зависимы. Это видно также из равенства $\bar{x}_2 - \bar{x}_1 - \bar{x}_3 = 0$. ▷

2.6.3. Базис пространства. Координаты вектора

Наибольшее число линейно независимых векторов n-мерного векторного пространства L_n равно размерности n этого пространства. Всякая совокупность n линейно независимых векторов пространства L_n называется **базисом** этого пространства.

Система n линейно независимых единичных векторов (ортов)

$$\begin{gathered} \bar{e}_1 = (1; 0; \ldots; 0), \\ \bar{e}_2 = (0; 1; \ldots; 0), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \bar{e}_n = (0; 0; \ldots; 1) \end{gathered}$$

называется **каноническим базисом** пространства L_n.

Если $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ — какой-либо базис пространства L_n, то любой вектор $\bar{a}$ этого пространства может быть представлен и притом единственным образом, в виде линейной комбинации векторов этого базиса

$$\bar{a} = C_1\bar{a}_1 + C_2\bar{a}_2 + \ldots + C_n\bar{a}_n, \tag{2.13}$$

где числа C_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ называются координатами вектора $\bar{a}$ в данном базисе. Если не оговорено противное, то координаты любого вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ в пространстве L_n задаются в каноническом базисе:

$$\bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + \ldots + x_n\bar{e}_n. \tag{2.14}$$

Пример 13. В двумерном пространстве L_2 разложение вектора $\bar{a}$ в базисе $\bar{a}_1, \bar{a}_2$ имеет вид $\bar{a} = C_1\bar{a}_1 + C_2\bar{a}_2$.

Подпространство. Размерность

Пусть имеется k ($k \leqslant n$) линейно независимых векторов в пространстве L_n:

$$\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k. \tag{2.15}$$

Тогда множество всех векторов, полученных по формуле

$$\bar{x} = C_1\bar{x}_1 + C_2\bar{x}_2 + \ldots + C_k\bar{x}_k, \tag{2.16}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_k$ — любые числа, называется **линейным подпространством** L_k пространства L_n. Говорят также, что векторы $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_k$ образуют подпространство L_k.

Некоторое множество L'_n векторов, принадлежащих L_n, тогда и только тогда является линейным подпространством пространства L_n, когда для любых векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$, принадлежащих L'_n, векторы $\bar{x} + \bar{y}$ и $\alpha\bar{x}$ (α — любое действительное число) также принадлежит L'_n, в частности, вектор 0 принадлежит L'_n.

Подпространство L_k само является векторным пространством, базис которого состоит из k векторов (2.15). Наибольшее число k линейно-независимых векторов, принадлежащих подпространству L_k, называется **размерностью** этого подпространства. При этом $k \leqslant n$. Следовательно, в n-мерном пространстве L_n имеются, в частности, следующие подпространства: L_0 — нулевой размерности, состоящее из одного нулевого вектора $\bar{0}$; L_1 — одного измерения (т. е. его размерность равна 1); L_2 — двух измерений и т. д. до L_n — самого пространства n измерений.

Пример 14. Пусть L_3 — трехмерное векторное пространство, образованное всеми векторами, выходящими из некоторой точки O (рис. 2.24), с каким-либо базисом $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2, \bar{a}_3$. Тогда одномерные подпространства L_1 образуются совокупностями всех векторов, лежащих на любой прямой, проходящей через точку O, например, на прямой, определяемой вектором $\bar{a}_1$, т. е. совокупностью векторов $C_1\bar{a}_1$. С каждой прямой,

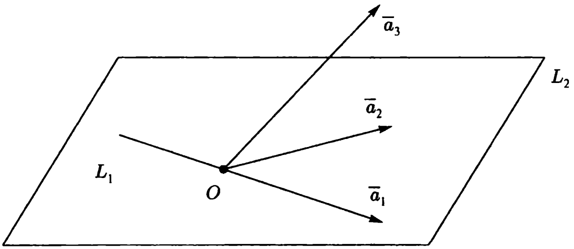


Рис. 2.24

проходящей через точку O, связано одномерное подпространство. Двумерные подпространства L_2 образуются совокупностями всех векторов, лежащих на любой плоскости, проходящей через точку O, например, на плоскости, проходящей через векторы $\bar{a}_1, \bar{a}_2$, т. е. совокупностью векторов $C_1\bar{a}_1 + C_2\bar{a}_2$. С каждой плоскостью, проходящей через точку O, связано двумерное подпространство.

2.6.4. Евклидовы векторные пространства

Действительное n-мерное векторное пространство, в котором каждым двум векторам ставится в соответствие действительное число (скалярное произведение этих векторов), называется **n-мерным евклидовым пространством E_n**.

Скалярным произведением двух векторов $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ называется число $(\bar{x}, \bar{y})$, равное

$$(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n. \tag{2.17}$$

Свойства скалярного произведения.

$$\begin{aligned} &1)\ (\bar{x}, \bar{y}) = (\bar{y}, \bar{x}), \quad (\alpha\bar{x}, \bar{y}) = \alpha(\bar{x}, \bar{y});\\ &2)\ (\bar{x} + \bar{y}, \bar{z}) = (\bar{x}, \bar{z}) + (\bar{y}, \bar{z});\\ &3)\ (\bar{x}, \bar{x}) > 0 \quad \text{для всех} \quad \bar{x} \neq 0, \quad (\bar{x}, \bar{x}) = 0 \quad \text{для} \quad \bar{x} = \bar{0}. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Пример 15. Евклидовым пространством является:

1) Множество всех векторов на плоскости в обычном геометрическом пространстве. Скалярное произведение векторов $\bar{a} = (a_x, a_y)$ и $\bar{b} = (b_x, b_y)$ равно $(\bar{a}, \bar{b}) = a_xb_x + a_yb_y$.
2) Множество всех векторов в трехмерном геометрическом пространстве с обычным скалярным произведением (см. 2.3.3).

Модуль вектора. Модулем (длиной, нормой) вектора $\bar{x}$ называется неотрицательное действительное число

$$|\bar{x}| = +\sqrt{(\bar{x}, \bar{x})} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}.$$

Обозначения модуля: $|\bar{x}|$ или $\|\bar{x}\|$.

Единичным вектором (ортом) называется вектор, модуль которого равен 1. Вектор $\bar{x}/|\bar{x}|$ является единичным для любого вектора $\bar{x} \neq \bar{0}$.

Свойства модуля вектора следуют из свойств скалярного произведения:

$$\begin{aligned} &1)\ |\bar{x}| \geqslant 0; \quad 2)\ |\bar{x}| = 0 \quad \text{только при} \quad \bar{x} = \bar{0};\\ &3)\ |\lambda\bar{x}| = |\lambda| \cdot |\bar{x}|; \quad 4)\ |\bar{x} + \bar{y}| \leqslant |\bar{x}| + |\bar{y}| \end{aligned} \tag{2.19}$$

для всех векторов и действительных чисел λ.

Для любых векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ справедливо неравенство $|(x, y)| \leqslant |\bar{x}| \cdot |\bar{y}|$.

Углом между ненулевыми векторами $\bar{x}$ и $\bar{y}$ называется действительное число φ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi)$, определяемое равенством

$$\cos\varphi = \frac{(\bar{x}, \bar{y})}{|\bar{x}| \cdot |\bar{y}|}.$$

Ортогональность. Два вектора $\bar{x}$ и $\bar{y}$ пространства E_n называются **ортогональными (перпендикулярными)**, если $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Угол φ между ненулевыми ортогональными векторами равен $\pi/2$. Нулевой вектор ортогонален любому вектору пространства. Совокупность векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m$ называется **ортогональной системой**, если она не содержит нулевого вектора и любые два ее вектора ортогональны друг другу, т. е. $(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = 0$ $(i \neq j)$. Если, кроме попарной ортогональности, все векторы $\bar{x}_i$ единичные, т. е.

$$(\bar{x}_i, \bar{x}_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, & i \neq j, \\ 1, & i = j, \end{cases}$$

то система векторов называется **ортонормированной**.

Свойства ортогональных систем.

1. Векторы ортогональной системы линейно независимы.
2. В n-мерном пространстве E_n ортогональная система содержит не более n векторов.

Базис $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \ldots, \bar{\varepsilon}_n$ пространства E_n, образованный ортонормированной системой, называется **ортонормированным базисом** $(\bar{\varepsilon}_i\bar{\varepsilon}_j = \delta_{ij})$. Простейший ортонормированный базис пространства E_n состоит из ортов $\bar{e}_1 = (1; 0; \ldots; 0)$, $\bar{e}_2 = (0; 1; \ldots; 0)$, $\ldots$, $\bar{e}_n = (0; 0; \ldots; 1)$. Очевидно что $\bar{e}_i\bar{e}_j = \delta_{ij}$. Если $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, где x_i — координаты вектора в ортонормированном базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$, то $x_i = (\bar{x}, \bar{e}_i)$.

Любой базис $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ евклидова пространства может быть преобразован в некоторый ортонормированный базис $\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \ldots, \bar{\varepsilon}_n$ **методом ортогонализации Шмидта.** Рассмотрим этот метод на примере произвольного базиса $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3$ в трехмерном пространстве. Сначала построим ортогональную систему векторов $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \bar{b}_3$ по формулам:

$$\bar{b}_1 = \bar{a}_1, \quad \bar{b}_2 = \bar{a}_2 - \frac{(\bar{a}_2, \bar{b}_1)}{(\bar{b}_1, \bar{b}_1)}\bar{b}_1, \quad \bar{b}_3 = \bar{a}_3 - \frac{(\bar{a}_3, \bar{b}_1)}{(\bar{b}_1, \bar{b}_1)}\bar{b}_1 - \frac{(\bar{a}_3, \bar{b}_2)}{(\bar{b}_2, \bar{b}_2)}\bar{b}_2,$$

а затем ортонормированный базис

$$\bar{\varepsilon}_1 = \frac{\bar{b}_1}{|\bar{b}_1|}, \quad \bar{\varepsilon}_2 = \frac{\bar{b}_2}{|\bar{b}_2|}, \quad \bar{\varepsilon}_3 = \frac{\bar{b}_3}{|\bar{b}_3|}.$$

Здесь скалярное произведение находится по формуле (2.17).

Пример 16. Базис $\bar{a}_1 = (2; -1; 1)$, $\bar{a}_2 = (-1; 2; 1)$, $\bar{a}_3 = (1; 2; 4)$ трехмерного пространства преобразуем в ортонормированный методом ортогонализации Шмидта.

Координаты векторов записываются в базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Получим:

$$\bar{b}_1 = \bar{a}_1 = (2; -1; 1); \quad (\bar{b}_1, \bar{b}_1) = 6, \quad (\bar{a}_2, \bar{b}_1) = -3;$$

$$\bar{b}_2 = (-1; 2; 1) + \frac{3}{6}(2; -1; 1) = \left(0; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right);$$

$$(\bar{b}_2, \bar{b}_2) = \frac{9}{2}, \quad (\bar{a}_3, \bar{b}_1) = 4, \quad (\bar{a}_3, \bar{b}_2) = 9;$$

$$\bar{b}_3 = (1; 2; 4) - \frac{4}{6}(2; -1; 1) - 2\left(0; \frac{3}{2}; \frac{3}{2}\right) = \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{3}\right);$$

$$|\bar{b}_1| = \sqrt{(\bar{b}_1, \bar{b}_1)} = \sqrt{6}, \quad |\bar{b}_2| = \frac{3}{\sqrt{2}}, \quad |\bar{b}_3| = \frac{1}{\sqrt{3}};$$

$$\bar{\varepsilon}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{1}{\sqrt{6}}\right), \quad \bar{\varepsilon}_2 = \left(0; \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \quad \bar{\varepsilon}_3 = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Примечание. **Евклидовым пространством** в общем случае называется действительное векторное пространство, состоящее из элементов любой природы (см. примечание в 2.6.1), в котором определено **скалярное произведение**, удовлетворяющее условиям (2.18). Рассмотренное выше n-мерное евклидово пространство со скалярным произведением (2.17) является частным случаем евклидова пространства общего вида. Другим частным случаем является пространство $C[a; b]$ функций, непрерывных на отрезке $[a; b]$ (называемое **пространством непрерывных функций**) со скалярным произведением любых двух элементов, т. е. непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$, определяемым соотношением

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx. \tag{2.20}$$

Условия (2.18) при этом выполняются. **Норма** $\|f\|$ вектора (элемента) $f(x)$ евклидова пространства $C[a; b]$ определяется равенством $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. В одном и том же векторном пространстве скалярное произведение и норму можно определить различными способами. Например, в пространстве $C[a; b]$ можно ввести также норму $\|f\| = \max\limits_{[a;b]} |f(x)|$.

2.7. Гильбертово пространство

Гильбертовым пространством H (действительным или комплексным) называется произвольное бесконечномерное векторное пространство (действительное или комплексное), в котором:

1) определено **скалярное произведение** (x, y) любых двух элементов x и y, принадлежащих H, являющееся в общем случае комплексным числом, удовлетворяющим условиям:

   1а) $(x, y) = (\overline{y, x})$, где черта означает комплексное сопряжение (при этом (x, x) — действительное число);

1б) $$(x+y,z)=(x,z)+(y,z); \tag{2.21}$$

1в) $(\lambda x, y) = \lambda(x,y)$, λ — любое комплексное число;

1г) $(x,x) \geqslant 0$; $(x,x) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$; число $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ называется **нормой** элемента x;

2) для любой последовательности элементов x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ пространства, удовлетворяющей условию $\|x_m - x_n\| \to 0$ (при $m, n \to \infty$), существует элемент x, принадлежащий H, такой, что $\|x_n - x\| \to 0$ при $n \to \infty$ (свойство **полноты** пространства). При этом говорят, что последовательность элементов x_n **сходится** к элементу x.

Бесконечномерность пространства H означает, что для любого натурального n найдется n линейно независимых элементов.

Два элемента x и y называются **ортогональными**, если $(x,y) = 0$. Последовательность элементов $x_1, x_2, \ldots$ называется **ортонормированной системой** $\{x_n\}$, если все эти элементы попарно ортогональны и имеют норму, равную единице. Примером ортонормированной системы в пространстве всех функций, разлагающихся в ряд Фурье в интервале $(-\pi; \pi)$, является **тригонометрическая система** $\{\varphi_n(t)\}$, $n = 1, 2, \ldots$:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}, \quad \ldots, \quad \frac{\cos nt}{\sqrt{\pi}}, \quad \frac{\sin nt}{\sqrt{\pi}}, \quad \ldots. \tag{2.22}$$

Рядом Фурье элемента g по ортонормированной системе $\{x_n\}$ называется ряд вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} g_n x_n, \quad \text{где} \quad g_n = (g, x_n) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ортонормированная система $\{x_n\}$ называется **полной**, если кроме нулевого элемента не существует никакого другого элемента данного пространства, который был бы ортогонален всем элементам x_n системы $\{x_n\}$. В частности, тригонометрическая система (2.22) является полной ортонормированной системой. Полная ортонормированная система $\{x_n\}$ в гильбертовом пространстве H называется **ортонормированным базисом** этого пространства. Для любого элемента g пространства H справедливо единственное разложение в ряд Фурье в ортонормированном базисе $\{x_n\}$:

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n x_n, \tag{2.23}$$

где $g_n = (g, x_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$; причем $\|g\| = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |g_n|^2$, где числовой ряд в правой части последнего равенства сходится.

Если $f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n x_n$ и $g = \sum_{n=1}^{\infty} g_n x_n$, то скалярное произведение

$$(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n \bar{g}_n.$$

Гильбертово пространство l_2

Элементами этого пространства являются бесконечные числовые последовательности $x = (x_1, x_2, \ldots)$ такие, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2$ сходятся (здесь x_n — действительные или комплексные числа). Сумма любых двух элементов $x = (x_1, x_2, \ldots)$, $y = (y_1, y_2, \ldots)$ и произведение элемента x на любое число λ определяются соотношениями

$$x + y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ \ldots), \qquad \lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots).$$

Скалярное произведение элементов x и y из l_2 по определению равно

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n,$$

где черта означает комплексное сопряжение.

Норма элемента x равна

$$\|x\| = \sqrt{(x, x)} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots}\ .$$

Скалярное произведение удовлетворяет неравенству

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \cdot \|y\|.$$

Пространство l_2 полно (свойство 2 полноты выполняется). В качестве ортонормированного базиса в пространстве l_2 можно взять бесконечную систему единичных попарно ортогональных векторов $e_1 = (1; 0; \ldots)$, $e_2 = (0; 1; 0; \ldots)$, $e_3 = (0; 0; 1; 0; \ldots)$, $\ldots$. Для любого вектора x из l_2 справедливо единственное разложение по базису $\{e_n\}$, имеющее вид

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 + \ldots\ .$$

Гильбертово пространство всех функций, разлагающихся в тригонометрический ряд Фурье в интервале $(-\pi < t < \pi)$

Скалярное произведение любых двух элементов $f(t)$ и $g(t)$ этого пространства равно

$$(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t)\, dt.$$

В качестве базиса можно взять тригонометрическую систему (2.22). Разложение функции $f(t)$ в этом базисе $f(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n \varphi_n(t)$ является тригонометрическим рядом Фурье этой функции, причем

$$f_1 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} \frac{f(t)}{\sqrt{2\pi}}\,dt, \quad f_2 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\cos t}{\sqrt{\pi}}\,dt, \quad f_3 = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin t}{\sqrt{\pi}}\,dt, \quad \ldots .$$

2.8. Преобразование координат вектора при изменении базиса

1. Пусть $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ и $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \ldots, \bar{e}_n'$ — два базиса в одном и том же n-мерном действительном или комплексном векторном пространстве L_n. Векторы первого (старого) базиса $\bar{e}_i$ разложим во втором (новом) базисе $\bar{e}_i'$

$$\bar{e}_j = \sum_{i=1}^{n} S_{ij}\bar{e}_i' \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.24}$$

Любой вектор $\bar{x}$ пространства L_n может быть разложен в каждом из этих базисов:

$$\bar{x} = \sum_{j=1}^{n} x_j \bar{e}_j = \sum_{i=1}^{n} x_i' \bar{e}_i'. \tag{2.25}$$

Подставляя (2.24) в (2.25), получим

$$x_i' = \sum_{j=1}^{n} S_{ij} x_j \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{2.26}$$

Здесь $S = (S_{ij})$ — **матрица перехода** от первого базиса ко второму, причем $\det(S_{ij}) \neq 0$.

Запишем (2.26) в матричном виде

$$X' = SX, \quad X' = \begin{bmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{2.27}$$

Из (2.27) следует

$$X = S^{-1}X'. \tag{2.28}$$

Примечание. В n-мерном комплексном векторном пространстве с базисными ортами $\bar{e}_1 = (1;0;\ldots;0)$, $\bar{e}_2 = (0;1;\ldots;0)$, $\ldots$, $\bar{e}_n = (0;0;\ldots;1)$ скалярное произведение любых двух векторов $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ с комплексными координатами определяется равенством

$$(\bar{x}, \bar{y}) = x_1 y_1^* + x_2 y_2^* + \ldots + x_n y_n^*,$$

где знак $*$ означает комплексное сопряжение. Скалярное произведение удовлетворяет свойствам (2.21). Длина (норма) вектора $\bar{x}$ определяется равенством

$$\|x\| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \ldots + |x_n|^2}.$$

Ненулевые векторы $\bar{x}$ и $\bar{y}$ называются ортогональными, если $(\bar{x}, \bar{y}) = 0$. Базисные векторы $\bar{e}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ортонормированы, т. е. попарно ортогональны и имеют единичную длину.

2. Если оба базиса $\bar{e}_i$ и $\bar{e}_i'$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ ортонормированы (т. е. $(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \delta_{ij}$ и $(\bar{e}_i' \bar{e}_j') = \delta_{ij}$ где δ_{ij} — символ Кронекера), то из (2.24) следует $S_{ij} = (\bar{e}_i', \bar{e}_j)$. Из (2.24) и условия ортонормированности обоих базисов следует

$$\sum_{i=1}^{n} S_{ij} S_{ik} = \delta_{jk},$$

т. е. $S^T S = E$. Следовательно, матрица перехода S ортогональна.

Свойства матрицы перехода.

1) $S^T = S^{-1}$;

2) $\sum\limits_{k=1}^{n} S_{ik} S_{jk} = \delta_{ij}, \quad \sum\limits_{k=1}^{n} S_{ki} S_{kj} = \delta_{ij}$;

3) $\sum\limits_{k=1}^{n} S_{ik}^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} S_{ki}^2 = 1, \quad (\det S)^2 = 1, \quad \det S = \pm 1.$

Матрицы S^T и S^{-1} также ортогональны.

2.9. Линейные преобразования (линейные операторы)

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — две упорядоченные системы переменных, рассматриваемые как координаты двух векторов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ в одном и том же действительном или комплексном векторном пространстве L_n с базисом

$\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$, связанных соотношениями

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n), \end{aligned} \tag{2.29}$$

где $f_1, f_2, \ldots, f_n$ — заданные однозначные функции.

Правило (2.29), по которому каждому вектору $\bar{x} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i \bar{e}_i$ из L_n сопоставляется однозначно определенный вектор $\bar{y} = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \bar{e}_i$ из L_n, называется **преобразованием** пространства L_n. Здесь все векторы, включая базисные, предполагаются записанными в виде матриц-столбцов (см. 1.3.1):

$$\bar{e}_1 = \{1; 0; \ldots; 0\}, \quad \ldots, \quad \bar{e}_n = \{0; 0; \ldots, 1\}.$$

Преобразование (2.29) называется **линейным**, если

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n, \end{aligned} \tag{2.30}$$

где коэффициенты a_{ij} — действительные или комплексные числа. Линейное преобразование (2.30) векторного пространства L_n называется также **линейным оператором** в L_n. Преобразование (2.30) можно записать в матричном виде $\bar{y} = A\bar{x}$ или

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

Здесь квадратная матрицы $A = (a_{ij})$, состоящая из коэффициентов линейного преобразования, называется **матрицей линейного оператора (линейного преобразования)** или просто **линейным оператором** A в пространстве L_n. Координатами вектора $A\bar{e}_j$ являются элементы j-го столбца матрицы (оператора) A, т. е. $a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}$.

Если $\det A \neq 0$, то оператор A называется **невырожденным**, в противном случае — **вырожденным**. Оператор A невырожден тогда и только тогда, когда ранг матрицы A равен размерности пространства L_n. Если $\det A \neq 0$, то существует **обратное** (по отношению к $\bar{y} = A\bar{x}$) преобразование $\bar{x} = A^{-1}\bar{y}$. Если $\det A = 0$, то соотношение $\bar{y} = A\bar{x}$ преобразует n-мерное пространство L_n в его подпространство меньшего числа измерений.

Свойства линейного оператора A.

$$A(\bar{x}+\bar{y}) = A\bar{x} + A\bar{y}, \quad A(\alpha\bar{x}) = \alpha A\bar{x}, \tag{2.32}$$

где $\bar{x}$, $\bar{y}$ — любые векторы из L_n, α — любое число.

Пример 17. В двумерном координатном пространстве (на плоскости Ox_1x_2) задан оператор

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Этот оператор преобразует векторы $\bar{e}_1 = \{1; 0\}$ и $\bar{e}_2 = \{0; 1\}$ в векторы

$$\bar{e}_1' = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix}, \quad \bar{e}_2' = \begin{bmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

То есть векторы $\bar{e}_1'$ и $\bar{e}_2'$ получаются поворотом векторов $\bar{e}_1$ и $\bar{e}_2$ соответственно на угол φ против часовой стрелки. Аналогично, вектор $\bar{y} = A\bar{x}$ получается из вектора $\bar{x}$ на плоскости поворотом его на угол φ без изменения длины.

Пример 18. В пространстве L_n оператор E_n, представляемый единичной матрицей (см. 1.3) осуществляет **тождественное преобразование**, оставляющее все векторы в L_n без изменения.

Примечание. Линейное отображение векторного пространства L_n в векторное пространство L_m представляется аналогично при помощи матрицы размера $m \times n$.

Действия над линейными преобразованиями (линейными операторами) A и B в пространстве L_n:

$$(A+B)\bar{x} = A\bar{x} + B\bar{x}, \quad (\alpha A)\bar{x} = \alpha(A\bar{x}), \quad (BA)\bar{x} = B(A\bar{x}), \tag{2.33}$$

где $\bar{x}$ — любой вектор, записанный в виде матрицы-столбца, α — любое число. Операторы $A+B$, αA, AB — также линейные. Представляющие их матрицы получаются из матриц A и B при помощи соответствующих действий над этими матрицами. Например, если $\bar{y} = A\bar{x}$, $\bar{z} = By$, то $\bar{z} = B(Ax) = (BA)\bar{x}$.

Представление линейного оператора в различных базисах. Пусть дано некоторое линейное преобразование (оператор) $\bar{y} = A\bar{x}$ в пространстве L_n, представляемое матрицей A в базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ и преобразующее вектор $\bar{x}$ в вектор $\bar{y}$ (оба вектора записаны в виде матриц-столбцов). Введем в этом же пространстве второй базис $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \ldots, \bar{e}_n'$. Тогда согласно (2.28) имеем $\bar{x} = S^{-1}\bar{x}'$, $\bar{y} = S^{-1}\bar{y}'$. Следовательно, преобразование $\bar{y} = A\bar{x}$ во втором базисе принимает вид $\bar{y}' = (SAS^{-1})\bar{x}' = A'\bar{x}'$. Оператор A имеет во втором базисе вид $A' = SAS^{-1}$. Обозначая $V = S^{-1}$, запишем $A' = V^{-1}AV$. Матрица B называется **подобной** матрице A, если существует невырожденная матрица V такая, что $B = V^{-1}AV$. Подобие матриц — свойство взаимное.

В частности, в действительном трехмерном пространстве, откладывая векторы от начала координат, можно считать числа x_1, x_2, x_3 координатами вектора $\{x_1, x_2, x_3\}$ или координатами его конца, т. е. точки. При переходе от первого базиса ко второму (см. 2.4.2) имеем

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} S_{ij}x_j \quad (S_{ij} \equiv \alpha_{ij}),$$

или $\bar{x}' = S\bar{x}$, где S — матрица перехода от первого базиса ко второму. Пусть дано преобразование $\bar{y} = A\bar{x}$ ($\det A \neq 0$) вектора $\bar{x}$ в $\bar{y}$ в первом базисе $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Выясним вид этого преобразования во втором базисе $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'$. Имеем: $\bar{x} = S^{-1}\bar{x}'$, $\bar{y} = S^{-1}\bar{y}'$, где все векторы записываются как матрицы-столбцы. Тогда во втором базисе $\bar{y}' = A'\bar{x}'$, где $A' = SAS^{-1}$.

2.10. Собственные значения и собственные векторы матриц

В результате линейного преобразования вида $\bar{y} = A\bar{x}$ в комплексном n-мерном пространстве вектор $\bar{x}$ преобразуется в вектор $\bar{y}$.

Собственным вектором квадратной матрицы (или оператора) A с действительными или комплексными элементами, определяющей линейное преобразование, называется ненулевой вектор $\bar{x}$ такой, что

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}, \tag{2.34}$$

где λ — некоторое число, называемое **собственным значением** матрицы (или оператора) A, соответствующим собственному вектору $\bar{x}$. При этом исходный вектор $\bar{x}$ (записанный в виде матрицы-столбца) переходит в коллинеарный ему вектор $\lambda\bar{x}$. Если $\bar{x}$ — собственный вектор матрицы A, то вектор $C\bar{x}$, где C — любое число, также будет собственным вектором для A. Уравнение (2.34) можно записать в виде $A\bar{x} = \lambda E\bar{x}$, где E — единичная матрица ($E\bar{x} = \bar{x}$), или в виде

$$(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}. \tag{2.35}$$

Здесь матрица $A - \lambda E$ называется **характеристической матрицей**. Матричное уравнение (2.35) представляет собой систему однородных линейных уравнений относительно координат собственного вектора $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, которая имеет ненулевые решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю, т. е. $\det(A - \lambda E) = 0$, или

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \tag{2.36}$$

Уравнение $P_n(\lambda) = 0$, где $P_n(\lambda)$ — характеристический полином n-й степени, получающийся в результате раскрытия определителя в (2.36), называется **характеристическим уравнением** матрицы A. Корни этого уравнения (действительные или комплексные) являются собственными значениями матрицы A. Совокупность всех собственных значений матрицы A называется ее **спектром**. Если $\lambda = \lambda_i$ — какое-либо собственное значение матрицы A, т. е. $P_n(\lambda_i) = 0$, то подставив λ_i в матричное уравнение (2.35), получим систему уравнений для нахождения собственных векторов матрицы A, соответствующих собственному значению λ_i:

$$\begin{aligned} &(a_{11} - \lambda_i)x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ &a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda_i)x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + (a_{nn} - \lambda_i)x_n = 0. \end{aligned} \tag{2.37}$$

Определитель однородной системы (2.37) $\det(A - \lambda_i E) = 0$, следовательно, система имеет ненулевые решения, дающие собственные векторы, соответствующие значению λ_i. Если матрица $A - \lambda_i E$ имеет ранг r $(r < n)$, то существуют $m = n - r$ линейно независимых собственных векторов $\bar{x}^{(i1)}$, $\bar{x}^{(i2)}, \ldots, \bar{x}^{(im)}$, соответствующих собственному значению λ_i. Причем любая линейная комбинация этих векторов

$$C_1\bar{x}^{(i1)} + C_2\bar{x}^{(i2)} + \ldots + C_m\bar{x}^{(im)} \neq 0$$

также будет собственным вектором, соответствующим значению λ_i. Число линейно независимых собственных векторов, соответствующих одному и тому же корню характеристического уравнения, не превышает кратности этого корня. Если кратность корня равна 1, то этому собственному значению соответствует единственный (с точностью до коэффициента пропорциональности) собственный вектор.

Пример 19. Для нахождения собственных значений и собственных векторов матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 1 & 4-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 5 = 0,$$

корни которого (т. е. собственные значения матрицы) равны $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 5$. Координаты собственных векторов $\bar{x}^{(1)}$, соответствующих значению $\lambda_1 = 1$, найдем из системы уравнений

$$(A - \lambda_1 E)\bar{x} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \bar{0} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы $A-\lambda_1 E$ равен 1. Взяв, например, $x_1 = 3$, $x_2 = -1$, запишем собственный вектор в виде

$$\bar{x}^{(1)} = \{3; -1\} \equiv \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Собственным будет также всякий вектор $C_1\bar{x}^{(1)}$, где C_1 — любое число $\neq 0$. Аналогично для $\lambda_2 = 5$ составляем систему уравнений $(A - \lambda_2 E)\bar{x} = 0$ или

$$\begin{cases} -3x_1 + 3x_2 = 0, \\ \quad x_1 - x_2 = 0. \end{cases}$$

Положив, например, $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, получим $\bar{x}^{(2)} = \{1; 1\}$. Собственным будет и любой вектор $C_2\bar{x}^{(2)}$ $(C_2 \neq 0)$

Пример 20. Матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

имеет характеристическое уравнение $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$, корни которого $\lambda_1 = 1 - i$, $\lambda_2 = 1 + i$. Этим собственным значениям соответствуют собственные векторы: $\bar{x}^{(1)} = C_1\{1, -i\}$, $\bar{x}^{(2)} = C_2\{1, i\}$, где C_1, C_2 — любые, не равные нулю числа.

Пример 21. Матрица

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

имеет характеристическое уравнение $\lambda^2(\lambda - 3) = 0$, корни которого $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 3$. Для двукратного корня $\lambda_1 = 0$ имеем матричное уравнение $(A - \lambda_1 E)\bar{x} = 0$. Соответствующая система состоит из трех одинаковых уравнений $x_1 + x_2 + x_3 = 0$. Ранг матрицы A равен 1, т. е. существуют два линейно независимых собственных вектора, соответствующих значению $\lambda_1 = 0$. В качестве этих двух векторов возьмем, например, $\bar{x}^{(11)} = \{1; -1; 0\}$, $\bar{x}^{(12)} = \{-1; 0; 1\}$. Ненулевые линейные комбинации этих собственных векторов $C_1\bar{x}^{(11)} + C_2\bar{x}^{(12)}$ также являются собственными векторами, лежащими на плоскости, проходящей через векторы $x^{(11)}$, $x^{(12)}$, выходящими из начала координат. Для $\lambda_3 = 3$ имеем матричное уравнение $(A - \lambda_3 E)\bar{x} = 0$. Ранг матрицы $A - \lambda_3 E$ равен 2. Из трех уравнений соответствующей системы одно является следствием двух других, поэтому ограничимся двумя уравнениями: $x_1 - 2x_2 = -x_3$, $x_1 + x_2 = 2x_3$. Полагая $x_3 = 1$, получим $x_1 = 1$, $x_2 = 1$. Следовательно, $\bar{x}^{(3)} = \{1; 1; 1\}$. Собственным будет также любой вектор $C_3\bar{x}^{(3)}$ $(C_3 \neq 0)$.

Свойства собственных значений и собственных векторов матриц (операторов)

1) Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения квадратной матрицы A порядка n, то

$$\det A = \lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_n, \qquad \operatorname{Sp} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n,$$

где $\operatorname{Sp} A$ — след (т. е. сумма диагональных элементов) матрицы A.

Для следа матрицы A используется также обозначение $\operatorname{Tr} A$. Таким образом, для квадратной матрицы A порядка n имеем

$$\operatorname{Sp} A \equiv \operatorname{Tr} A = a_{11} + \ldots + a_{nn}.$$

2) Если λ — собственное значение матрицы A, то матрица

$$B = C_0 A^0 + C_1 A^1 + \ldots + C_m A^m \quad (A^0 \equiv E,\ A^1 \equiv A)$$

имеет собственное значение

$$C_0 \lambda^0 + C_1 \lambda^1 + \ldots + C_m \lambda^m.$$

Если $\det A \neq 0$, то собственное значение матрицы $A^{-m} \equiv (A^{-1})^m$, где m — натуральное число, равно λ^{-m}.

3) Каждая (квадратная) матрица A является корнем своего характеристического многочлена $P_n(\lambda)$, т. е. $P_n(A) = 0$ (**теорема Гамильтона—Кэли**).
4) Собственные векторы, соответствующие различным собственным значениям матрицы, линейно независимы.
5) Подобные матрицы имеют одинаковые характеристические многочлены и одинаковые собственные значения (с учетом их кратности).
6) Свойство вектора быть собственным для какого-либо линейного оператора не зависит от выбора базиса.
7) Пусть действительная симметричная матрица (оператор) A в n-мерном пространстве имеет n линейно независимых собственных векторов. Тогда в ортонормированном базисе, ортами которого являются единичные собственные векторы $\bar{e}_1', \bar{e}_2', \ldots, \bar{e}_n'$, матрица (оператор) A примет диагональный вид

$$A' = \begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{vmatrix},$$

т. е. все элементы, не лежащие на главной диагонали, равны нулю. Здесь λ_i — собственные значения, соответствующие собственным векторам.

Всякую симметричную квадратную матрицу (оператор) A в n-мерном пространстве, характеристический многочлен которой имеет n корней, можно привести к диагональному виду посредством преобразования подобия $A' = V^{-1} A V$, где V — некоторая невырожденная матрица.

Свойства действительных симметричных матриц

1) Все собственные значения действительной симметричной матрицы действительны.

Примечание. Действительными являются также все собственные значения любой эрмитовой матрицы, т. е. такой, что $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$.

2) Собственные векторы действительной симметричной матрицы, соответствующие различным собственным значениям, являются взаимно ортогональными. Из собственных векторов может быть построен ортогональный базис.

3) Всякая действительная симметричная матрица преобразованием подобия может быть приведена к диагональному виду.

4) Число линейно независимых собственных векторов, соответствующих каждому собственному значению, равно его кратности.

5) Для действительной симметричной матрицы A всегда можно найти такую ортогональную матрицу V, что матрица $A' = V^{-1}AV = V^TAV$ будет диагонального вида.

Пример 22. Привести к диагональному виду симметричную матрицу

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Решение. Собственные значения матрицы: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$. Собственные векторы: $\bar{x}^{(1)} = \{1; 1; 1\}$, $\bar{x}^{(21)} = \{-1; 1; 0\}$, $\bar{x}^{(22)} = \{-1; 0; 1\}$. Положим $\bar{x}^{(2)} = \bar{x}^{(21)}$, а $\bar{x}^{(3)}$ найдем из условия ортогональности векторов $\bar{x}^{(21)}$ и $\bar{x}^{(3)} = C_1\bar{x}^{(21)} + C_2\bar{x}^{(22)} = \{-C_1 - C_2; C_1; C_2\}$, т. е. $2C_1 + C_2 = 0$. Примем $C_1 = -1$, тогда $C_2 = 2$. Находим: $\bar{x}^{(3)} = -\bar{x}^{(21)} + 2\bar{x}^{(22)} = \{-1; -1; 2\}$. Собственные векторы $\bar{x}^{(1)}, \bar{x}^{(2)}, \bar{x}^{(3)}$ попарно ортогональны. Нормируя эти векторы, получим ортонормированный базис

$$\bar{\varepsilon}_1 = \left\{\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}\right\}, \quad \bar{\varepsilon}_2 = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}; 0\right\}, \quad \bar{\varepsilon}_3 = \left\{-\frac{1}{\sqrt{6}}; -\frac{1}{\sqrt{6}}; \frac{2}{\sqrt{6}}\right\},$$

Столбцы ортогональной матрицы V, осуществляющей преобразование подобия, состоят из координат векторов $\bar{\varepsilon}_1$, $\bar{\varepsilon}_2$, $\bar{\varepsilon}_3$, т. е.

$$V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}.$$

Следовательно, матрица A переходит в диагональную матрицу

$$A' = V^TAV = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}. \qquad \triangleright$$

2.11. Квадратичные формы

Пусть $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\bar{x}^T = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — соответственно вектор-строка и вектор-столбец, $A=(a_{ij})$ — действительная симметричная $(a_{ij}=a_{ji})$ матрица порядка n. **Квадратичной формой** от n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется выражение

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \tag{2.38}$$

или

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \bar{x}A\bar{x}^T.$$

Матрица A называется здесь матрицей квадратичной формы.

В частности, при $n = 3$ квадратичная форма имеет вид

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3,$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ — некоторые числа.

Если в квадратичной форме (2.38) перейти при помощи линейного преобразования $\bar{x} = B\bar{x}'$, где B — невырожденная матрица, к переменным $\bar{x}' = \{x_1', x_2', \ldots, x_n'\}$, то квадратичная форма примет вид

$$\varphi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}'x_i'x_j'$$

где матрица $A'=(a_{ij}')$ связана с матрицей $A=(a_{ij})$ соотношением $A'=B^TAB$. Если преобразование ортогонально, т.е. $B^T = B^{-1}$, тогда будем иметь равенство $A' = B^{-1}AB$.

Пример 23.

$$\varphi(x_1, x_2) = (x_1, x_2)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{12}x_1x_2.$$

Здесь $a_{12} = a_{21}$.

2.11.1. Приведение квадратичной формы к каноническому виду

Каждая действительная квадратичная форма (2.38) при помощи линейного преобразования $\bar{x} = V\bar{y}$ от переменных $\bar{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ к переменным $\bar{y} = \{y_1, \ldots, y_n\}$, где V — некоторая ортогональная матрица, может быть приведена к **каноническому виду (нормальному виду,** или **сумме квадратов**):

$$\varphi(y_1, \ldots, y_n) = \lambda_1y_1^2 + \lambda_2y_2^2 + \ldots + \lambda_ny_n^2, \tag{2.39}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — собственные значения матрицы A (число слагаемых в (2.39), соответствующих кратному собственному значению, равно его кратности). Столбцы матрицы V состоят из координат ортонормированной системы базисных векторов матрицы A (см. пример 22).

2.11.2. Классификация квадратичных форм

Действительная квадратичная форма

$$\varphi = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

называется: 1) **положительно определенной**, 2) **отрицательно определенной**, 3) **неотрицательной**, 4) **неположительной**, если для каждой совокупности действительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, не равных нулю одновременно, выполняются соответственно неравенства: 1) $\varphi > 0$, 2) $\varphi < 0$, 3) $\varphi \geqslant 0$, 4) $\varphi \leqslant 0$. Неотрицательные и неположительные формы называются также **знакопостоянными** (**квазизнакоопределенными**). Все остальные квадратичные формы являются **неопределенными** (или **знакопеременными**) (при этом φ может иметь попеременно либо положительный, либо отрицательный знак в зависимости от выбора совокупности чисел x_i, не все из которых одновременно равны нулю), либо **равными тождественно нулю**. В случае знакопостоянных (квазизнакоопределенных) форм для всех значений x_i $(i = 1, \ldots, n)$ выполняется $\varphi \geqslant 0$ или $\varphi \leqslant 0$, и имеется такая совокупность x_i, одновременно не равных нулю, для которой $\varphi = 0$.

Действительная квадратичная форма (не равная тождественно нулю) является: 1) положительно определенной, 2) отрицательно определенной, 3) неотрицательной, 4) неположительной, 5) неопределенной в зависимости от величины собственных значений матрицы $A = (a_{ij})$, которые соответственно: 1) все положительны, т. е. $\lambda_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$; 2) все отрицательны, т. е. $\lambda_i < 0$ $(i = 1, \ldots, n)$; 3) среди λ_i есть равные нулю, а все остальные положительны, 4) среди λ_i есть равные нулю, а все остальные отрицательны, 5) среди λ_i есть как положительные, так и отрицательные и тогда φ в (2.38) в зависимости от значений x_i или φ в (2.39) в зависимости от y_i может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Для положительной определенности действительной квадратичной формы необходимо и достаточно, чтобы каждый из следующих определителей был положительным

$$D_1 = a_{11}, \quad D_1 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \ldots, \quad D_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Для отрицательной определенности квадратичной формы необходимо и достаточно выполнение неравенств: $D_1 < 0$, $D_2 > 0$, $D_3 < 0$, $D_4 > 0$, ... (**критерий Сильвестра**).

Пример 24. Привести к каноническому виду квадратичную форму

$$\varphi = -x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3.$$

Решение. Матрица A этой квадратичной формы имеет вид, приведенный в примере 22. Собственные значения матрицы: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -2$. При помощи преобразования переменных $\bar{x} = V\bar{y}$, где $\bar{x} = \{x_1, x_2, x_3\}$, $\bar{y} = \{y_1, y_2, y_3\}$, а матрица V найдена в решении примера 22, данная квадратичная форма приводится к каноническому виду $\varphi = y_1^2 - 2y_2^2 - 2y_3^2$. ▷

2.11.3. Одновременное приведение двух квадратичных форм к сумме квадратов

Пусть имеются две действительные формы

$$\varphi_1 = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j, \quad \varphi_2 = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij} x_i x_j,$$

причем φ_1 — положительно определенная. Требуется найти линейное преобразование (не обязательно ортогональное), приводящее обе квадратичные формы одновременно к сумме квадратов. Вначале, при помощи линейного преобразования $\bar{x} = V\bar{y}$, где V — некоторая ортогональная матрица, приведем форму φ_1 к каноническому виду

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^{n} \mu_i y_i^2,$$

при этом форма φ_2 примет вид

$$\varphi_2 = \sum_{i,j=1}^{n} b'_{ij} y_i y_j.$$

Вводя новые переменные $z_i = y_i\sqrt{\mu_i}$, получим

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^{n} z_i^2, \quad \varphi_2 = \sum_{i,j=1}^{n} b''_{ij} z_i z_j.$$

Произведем затем ортогональное преобразование $\bar{z} = G\bar{z}'$ от переменных $\bar{z} = \{z_1, \ldots, z_n\}$ к переменным $\bar{z}' = \{z'_1, \ldots, z'_n\}$, приводящее форму φ_2 к каноническому виду. При этом φ_1 останется суммой квадратов. Окончательно получим

$$\varphi_1 = \sum_{i=1}^{n} (z'_i)^2, \quad \varphi_2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (z'_i)^2.$$

Здесь λ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — некоторые числа, для нахождения которых составим квадратичную форму

$$\Phi = \varphi_2 - \lambda\varphi_1 = \sum_{i,j=1}^{n} (b_{ij} - \lambda a_{ij}) x_i x_j,$$

где λ — параметр. В результате перехода к переменным z'_i форма Φ примет вид

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i - \lambda)(z'_i)^2.$$

Определитель, составленный из коэффициентов формы Φ в переменных x_i, равен

$$\det\left[b_{ij} - \lambda a_{ij}\right],$$

а в переменных z'_i:

$$\det\left[(\lambda_i - \lambda)\delta_{ij}\right] = (\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)\ldots(\lambda_n - \lambda).$$

Обозначая через D невырожденную матрицу результирующего преобразования $\bar{x} = D\bar{z}'$ от переменных $\bar{x} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ к переменным $\bar{z}' = \{z'_1, \ldots, z'_n\}$ (это преобразование в общем случае неортогонально), найдем, что в переменных z'_i форма Φ будет иметь матрицу $C' = D^T C D$, где C — матрица формы Φ в переменных x_i, символ T означает транспонирование. Имеем:

$$\det C' = \det\left(D^T C D\right) = (\det D^T)(\det C)(\det D) = (\det C)(\det D)^2,$$

где $\det D \neq 0$ и не содержит λ.

Отсюда следует, что полиномы, равные $\det C'$ и $\det C$, имеют одинаковые корни $\lambda = \lambda_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, которые находятся из уравнения

$$\begin{vmatrix} b_{11} - \lambda a_{11} & \ldots & b_{1n} - \lambda a_{1n} \\ b_{21} - \lambda a_{21} & \ldots & b_{2n} - \lambda a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} - \lambda a_{n1} & \ldots & b_{nn} - \lambda a_{nn} \end{vmatrix} = 0. \tag{2.40}$$

Таким образом, задача одновременного приведения двух квадратичных форм к сумме квадратов сводится к нахождению корней уравнения (2.40).

Глава 3

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Аналитическая геометрия — раздел математики, изучающий простейшие геометрические образы (прямые, плоскости, линии и поверхности второго порядка) алгебраическими средствами с применением метода координат, согласно которому положение каждой точки геометрического образа определяется заданием чисел, называемых координатами точки (см. 2.1). Далее везде применяются правые декартовы (прямоугольные) системы координат, если не оговорено противное.

3.1. Аналитическая геометрия на плоскости

3.1.1. Метод координат

Сущность **метода координат** заключается в следующем. Пусть на плоскости задана прямоугольная (декартова) система координат Oxy (см. 2.1.1) и некоторая линия L (рис. 3.1). **Уравнением линии** L относительно системы Oxy называется такое соотношение $F(x, y) = 0$ (не являющееся тождеством), связывающее переменные x и y, которому удовлетворяют координаты x и y каждой точки $M(x, y)$, лежащей на L, и не удовлетворяют координаты точек, не лежащих на L. Говорят при этом, что уравнение $F(x, y) = 0$ задает (или определяет) соответствующую линию L. Линию можно рассматривать как множество всех таких точек на плоскости, координаты которых удовлетворяют данному уравнению. Метод координат позволяет изучать геометрические свойства линий алгебраическими средствами. Например, задача нахождения точек пересечения двух линий, заданных двумя

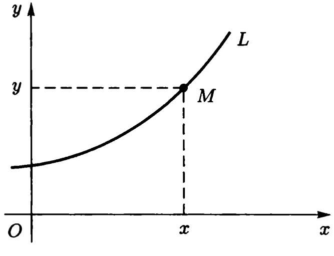


Рис. 3.1

уравнениями, сводится к решению системе этих двух уравнений. В полярной системе координат уравнение линии имеет вид $F(\rho, \varphi) = 0$.

Пример 1. Точка $M(3; 4)$ лежит на линии, определяемой уравнением $x^2+y^2-25=0$, а точка $P(1; 1)$ не лежит на ней. Линии с уравнениями $x^2+y^2-25=0$ и $2x-y=0$ пересекаются в двух точках: $M_1(\sqrt{5}; 2\sqrt{5})$ и $M_2(-\sqrt{5}; -2\sqrt{5})$.

В аналитической геометрии на плоскости рассматриваются обычно линии, уравнения которых являются алгебраическими уравнениями первой и второй степеней:

$$Ax + By + C = 0, \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0,$$

называемые алгебраическими линиями первого и второго порядка соответственно. Линиями первого порядка являются только прямые линии. К линиям второго порядка относятся: окружность, эллипс, гипербола, парабола, пары прямых. Другие, более сложные линии изучаются в **алгебраической геометрии** и **дифференциальной геометрии**.

3.1.2. Основные формулы

3.1.2.1. Расстояние d между двумя точками $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

3.1.2.2. Деление отрезка в данном отношении

Даны точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$. Координаты точки $M(x, y)$, лежащей на прямой M_1M_2 и делящей направленный отрезок $\overline{M_1M_2}$ в отношении $m_1/m_2 = \lambda$, т. е.

$$\frac{\overline{M_1M}}{\overline{MM_2}} = \frac{m_1}{m_2} = \lambda \quad (\lambda \neq -1)$$

находятся по формулам

$$x = \frac{m_2x_1 + m_1x_2}{m_1 + m_2} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda}, \quad y = \frac{m_2y_1 + m_1y_2}{m_1 + m_2} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}. \qquad (3.1)$$

Если $\lambda > 0$ — точка M лежит внутри отрезка $\overline{M_1M_2}$, а если $\lambda < 0$ $(\lambda \neq -1)$ — точка M лежит вне $\overline{M_1M_2}$. Координаты **середины отрезка** $\overline{M_1M_2}$ $(\lambda = 1)$:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

При $\lambda = 0$ точка M совпадает с M_1. Если $\lambda \to \pm\infty$, то точка $M \to M_2$.

3.1.2.3. Пусть даны точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$, $M_4(x_4, y_4)$. Тогда **угол** α **между направленными отрезками** $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_3M_4}$ находится по формуле

$$\cos\alpha = \frac{(x_2 - x_1)(x_4 - x_3) + (y_2 - y_1)(y_4 - y_3)}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\sqrt{(x_4 - x_3)^2 + (y_4 - y_3)^2}}.$$

3.1.2.4. Площадь треугольника с вершинами $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ находится по формуле

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2}\left[x_1(y_2 - y_3) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_1 - y_2)\right].$$

Здесь берется знак минус, если значение определителя отрицательно, и плюс — в противном случае, так как $S > 0$.

3.1.3. Преобразование декартовых координат

Уравнение какой-либо линии имеет разный вид в различных декартовых системах координат. Зная уравнение линии в одной (старой) системе координат Oxy, можно найти ее уравнение в другой (новой) системе $O'x'y'$, если известны **формулы преобразования** координат точки при переходе от одной системы к другой. На плоскости общие формулы преобразования (см. 2.4) упрощаются и принимают следующий вид.

1) При параллельном переносе осей координат (рис. 3.2)

$$\begin{aligned} x &= x' + x_0, \\ y &= y' + y_0, \end{aligned} \quad \text{или} \quad \begin{aligned} x' &= x - x_0, \\ y' &= y - y_0, \end{aligned} \tag{3.2}$$

где x_0, y_0 — координаты точки O' в старой системе Oxy; $x = OM_1$, $y = OM_2$, $x' = O'M_1'$, $y' = O'M_2'$.

2) При повороте осей координат вокруг начала координат O на угол α, который считается положительным при повороте против часовой стрелки и отрицательным в противном случае (рис. 3.3)

$$\begin{aligned} x &= x'\cos\alpha - y'\sin\alpha, \\ y &= x'\sin\alpha + y'\cos\alpha, \end{aligned} \tag{3.3}$$

или

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \end{aligned}$$

где $x = OM_1$, $y = OM_2$, $x' = OM_1'$, $y' = OM_2'$ — координаты точки M в старой и новой системах координат.

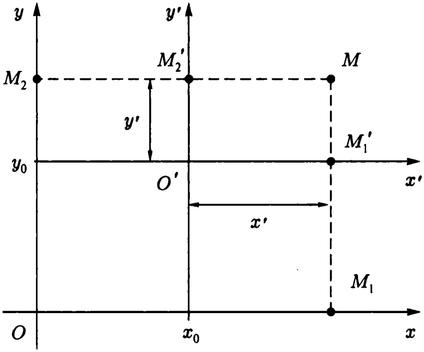


Рис. 3.2

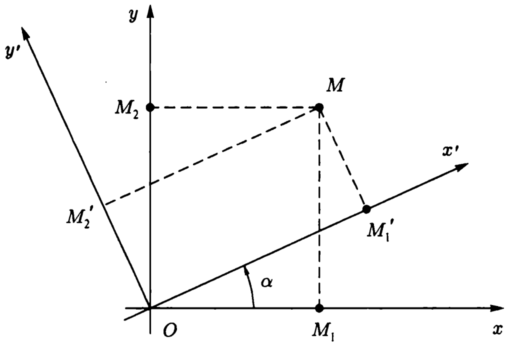


Рис. 3.3

При одновременном параллельном переносе и повороте осей координат **формулы преобразования** имеют вид:

$$
\begin{aligned}
x &= x_0 + x' \cos\alpha - y' \sin\alpha, \\
y &= y_0 + x' \sin\alpha + y' \cos\alpha,
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

или

$$
\begin{aligned}
x' &= (x - x_0)\cos\alpha + (y - y_0)\sin\alpha, \\
y' &= -(x - x_0)\sin\alpha + (y - y_0)\cos\alpha.
\end{aligned}
$$

Вышеприведенные формулы преобразования координат не изменяют расстояния между двумя точками, величину угла между двумя векторами и площадь треугольника.

3.1.4. Прямая линия

3.1.4.1. Общее (полное) уравнение прямой линии (алгебраической линии первого порядка) является алгебраическим уравнением первой степени относительно декартовых координат x и y

$$Ax + By + C = 0, \tag{3.5}$$

где постоянные A и B не равны нулю одновременно. При $A = 0$ (или $B = 0$) прямая параллельна оси Ox (или Oy). Если $C = 0$, то прямая проходит через начало координат.

3.1.4.2. Уравнение прямой с угловым коэффициентом

Если $B \neq 0$, то уравнение (3.5) можно записать в виде

$$y = kx + b \quad \left(k = -\frac{A}{B},\ b = -\frac{C}{B}\right), \tag{3.6}$$

где $k = \operatorname{tg}\alpha$ называется **угловым коэффициентом** прямой; α — угол между данной прямой и положительным направлением оси Ox (угол α считается положительным при отсчете против часовой стрелки, и отрицательным — в противном случае) (рис. 3.4); $b = OM$ — ордината точки $M(0, b)$ пересечения прямой с осью Oy. Если $b = 0$, то прямая проходит через начало координат.

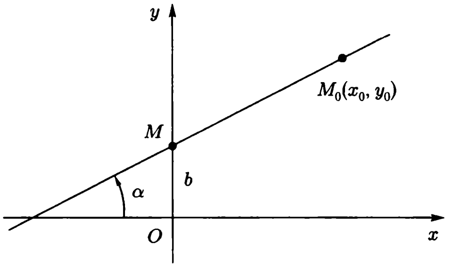


Рис. 3.4

3.1.4.3. Уравнение прямой в отрезках

Уравнение прямой в отрезках получается из уравнения (3.5) делением обеих его частей на $(-C)$:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \left(a=-\frac{C}{A}\neq 0,\ b=-\frac{C}{B}\neq 0\right). \tag{3.7}$$

Прямая пересекает оси Ox и Oy в точках $M_1(a,0)$ и $M_2(0,b)$ соответственно (рис. 3.5) и отсекает на осях отрезки с величинами a и b, которые могут иметь любые знаки. Если прямая параллельна какой-либо оси, то один из соответствующих отрезков не существует (обращается в бесконечность).

Пример 2. Пусть $2x-3y+6=0$ — общее уравнение прямой. Тогда уравнение с угловым коэффициентом: $y=\frac{2}{3}x+2$. Уравнение в отрезках:

$$\frac{x}{(-3)}+\frac{y}{2}=1 \quad (a=-3,\ b=2).$$

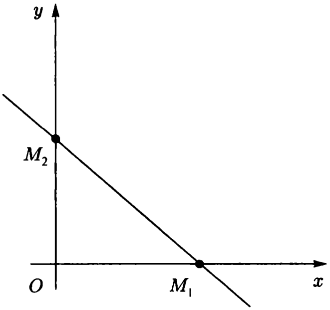


Рис. 3.5

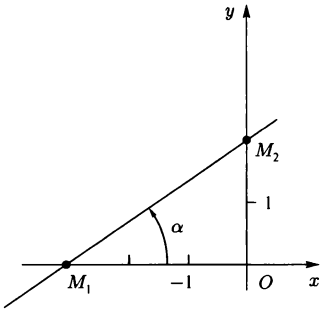


Рис. 3.6

Для построения прямой отложим отрезки с величинами $OM_1=-3$, $OM_2=2$ на осях Ox и Oy и проведем через точки $M_1(-3;0)$ и $M_2(0;2)$ прямую (рис. 3.6). Угловой коэффициент $k=\operatorname{tg}\alpha=2/3$.

3.1.4.4. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M_0(x_0,y_0)$ и имеющей заданный угловой коэффициент (заданное направление) k

(рис. 3.4) имеет вид

$$y-y_0=k(x-x_0). \tag{3.8}$$

Уравнение (3.8) является также уравнением **пучка прямых**, проходящих через точку $M_0(x_0,y_0)$ в различных направлениях (при разных значениях k).

3.1.4.5. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad \left(k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}\right). \tag{3.9}$$

3.1.4.6. Нормальное (или нормированное) уравнение прямой:

$$x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0, \tag{3.10}$$

где $p \geqslant 0$ — длина перпендикуляра OK, опущенного из начала координат на данную прямую (рис. 3.7), φ — угол между положительным направлением оси Ox и направлением перпендикуляра $\overline{OK}$. Угол φ $(0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi)$ отсчитывается против часовой стрелки (в положительном направлении). Нормальное уравнение прямой (3.10) может быть получено из общего уравнения $Ax + By + C = 0$, умножением его на **нормирующий множитель**

$$\mu = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2}},$$

где знак μ всегда противоположен знаку C. Если $C = 0$, то знак μ берется произвольно.

3.1.4.7. Расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1)$ до прямой с уравнением

$$Ax + By + C = 0$$

(или $x \cos\varphi + y \sin\varphi - p = 0$) равно (рис. 3.7):

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} = |x_1 \cos\varphi + y_1 \sin\varphi - p|.$$

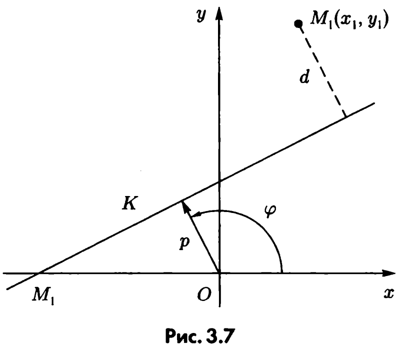


Рис. 3.7

Пример 3. Пусть даны прямая $3x + 4y - 5 = 0$ и точка $M(-4; 3)$. Тогда нормальное уравнение прямой $\frac{3}{5}x + \frac{4}{5}y - 1 = 0$ ($\mu = 1/5$). Расстояние от точки M до прямой:

$$d = \frac{|3 \cdot (-4) + 4 \cdot 3 - 5|}{\sqrt{9 + 16}} = 1.$$

3.1.4.8. Взаимное расположение прямой и точек

Пусть дана прямая $F(x, y) \equiv Ax + By + C = 0$ и две точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$. Тогда точки M_1, M_2 лежат по разные стороны от этой прямой, если числа $F(x_1, y_1)$ и $F(x_2, y_2)$ имеют противоположные знаки. Точки лежат по одну сторону от прямой, если эти числа имеют одинаковые знаки.

3.1.4.9. Три точки $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2)$, $M_3(x_3, y_3)$ находятся на одной прямой в том и только в том случае, когда

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3.1.5. Взаимное расположение прямых

3.1.5.1. Координаты точки $M_0(x_0, y_0)$ пересечения двух прямых L_1 и L_2, задаваемых уравнениями

$$A_1x + B_1y + C_1 = 0 \quad \text{и} \quad A_2x + B_2y + C_2 = 0 \tag{3.11}$$

или

$$y = k_1x + b_1 \quad \text{и} \quad y = k_2x + b_2, \tag{3.12}$$

находятся по формулам

$$x_0 = \frac{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{b_1 - b_2}{k_2 - k_1}, \qquad y_0 = \frac{\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}} = \frac{k_2b_1 - k_1b_2}{k_2 - k_1},$$

т. е. являются решением системы двух уравнений этих прямых.

3.1.5.2. Угол α_{12} между двумя пересекающимися прямыми L_1 и L_2 (взятыми в данном порядке), задаваемыми уравнениями (3.11) и (3.12), отсчитываемый против часовой стрелки при повороте прямой L_1 вокруг точки M_0 их пересечения до первого совмещения с прямой L_2 (рис. 3.8), находится

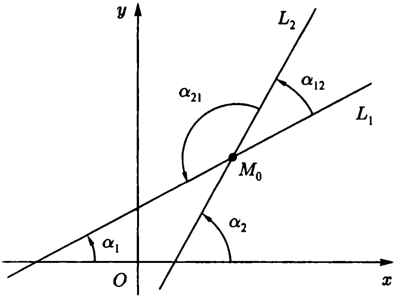


Рис. 3.8

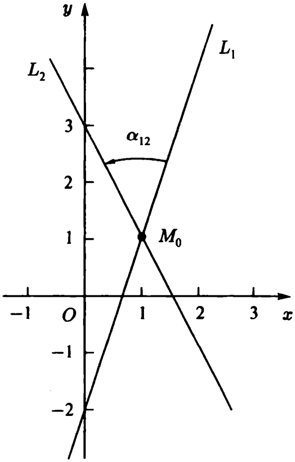


Рис. 3.9

по одной из формул:

$$\operatorname{tg}\alpha_{12} = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{A_1A_2 + B_1B_2} = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2},$$

$$\cos\alpha_{12} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{k_2 - k_1}{\sqrt{1 + k_1^2}\sqrt{1 + k_2^2}}, \qquad (3.13)$$

$$\sin\alpha_{12} = \frac{A_1B_2 - A_2B_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2}} = \frac{1 + k_1k_2}{\sqrt{1 + k_1^2}\sqrt{1 + k_2^2}}.$$

Углы α_1, α_2 и α_{12} $(0 \leqslant \alpha_{12} < \pi)$ связаны соотношением $\alpha_{12} = \alpha_2 - \alpha_1$. Поменяв местами k_1 и k_2 в формулах (3.13), получим тангенс (косинус, синус) угла $\alpha_{21} = \pi - \alpha_{12}$.

Примечание. Если хотя бы одна из прямых L_1, L_2 параллельна оси Oy, угол α_{12} может быть найден при помощи простых геометрических построений.

Пример 4. Даны две прямые (L_1) $y = 3x - 2$, (L_2) $y = -2x + 3$ (рис. 3.9). Точка M_0 $(1; 1)$ пересечения этих прямых находится из решения системы уравнений прямых. По одной из формул (3.13) находим

$$\operatorname{tg}\alpha_{12} = \frac{-2 - 3}{1 + 3(-2)} = 1, \quad \alpha_{12} = 45^\circ.$$

3.1.5.3. Прямые (3.11) или (3.12) **параллельны**, если

$$A_1A_2 - B_1B_2 = 0 \quad \left(\text{или} \quad \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}\right) \quad \text{или} \quad k_1 = k_2.$$

3.1.5.4. Прямые (3.11) или (3.12) **перпендикулярны**, если

$$A_1A_2 + B_1B_2 = 0 \quad \text{или} \quad k_1k_2 = -1.$$

3.1.5.5. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и **параллельной прямой** $y = kx + b$ или $Ax + By + C = 0$:

$$y - y_0 = k(x - x_0) \quad \text{или} \quad A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \tag{3.14}$$

3.1.5.6. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и **перпендикулярной к прямой** $y = kx + b$ или $Ax + By + C = 0$:

$$y - y_0 = -\frac{1}{k}(x - x_0) \quad \text{или} \quad A(y - y_0) - B(x - x_0) = 0. \tag{3.15}$$

3.1.5.7. Расстояние между параллельными прямыми $Ax + By + C_1 = 0$, $Ax + By + C_2 = 0$ $(C_1 \neq C_2)$:

$$d = \left| \frac{C_1 - C_2}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|.$$

3.1.5.8. Три прямые $A_ix + B_iy + C_i = 0$ $(i = 1, 2, 3)$ пересекаются в одной точке, либо параллельны, если

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

3.1.6. Линии второго порядка (конические сечения)

3.1.6.1. Основные понятия

1. Линией второго порядка (л. в. п.) называется множество точек $M(x, y)$ плоскости, декартовы координаты которых удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени относительно x и y с действительными коэффициентами:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0 \tag{3.16}$$

или

$$(a_{11}x + a_{12}y + a_{13})x + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23})y + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}) = 0,$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, 3)$.

Уравнение (3.16), называемое общим уравнением л. в. п., можно записать также в матричном виде:

$$\bar{r}A\bar{r}^T + 2\bar{a}\bar{r}^T + a_{33} = 0, \tag{3.17}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, \quad \bar{a} = (a_{13}, a_{23}), \quad \bar{r} = (x, y),$$

$$\bar{r}^T = \{x, y\} \text{ — матрица-столбец.}$$

Три величины

$$S = a_{11} + a_{22}, \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{3.18}$$

называются **инвариантами** уравнения (3.16) или (3.17), так как они не изменяются при параллельном переносе и повороте осей координат (3.2)–(3.4).

Л. в. п. на плоскости называют также **коническими сечениями**, так как они могут быть получены в сечении прямого кругового конуса соответствующей плоскостью. Например, если секущая плоскость перпендикулярна оси конуса, то в сечении получается окружность или точка.

2. Центры, диаметры и главные оси л. в. п. Точка C называется **центром симметрии** какой-либо геометрической фигуры (или просто ее **центром**), если каждой точке A данной фигуры соответствует такая точка A' этой же фигуры, что отрезок AA' проходит через точку C и делится этой точкой пополам.

Прямая линия называется **осью симметрии** какой-либо геометрической фигуры, если каждой точке B данной фигуры соответствует такая точка B' этой же фигуры, что отрезок BB' пересекает эту ось, перпендикулярен к ней и делится в точке пересечения с ней пополам.

Центральными называются л. в. п., имеющие единственный центр. Л. в. п., не имеющие центра или имеющие множество центров, называются **нецентральными**. Л. в. п., для которых инвариант $D \neq 0$, являются центральными; если $D = 0$, то л. в. п. — нецентральная. Координаты центра $C(x_0, y_0)$ центральной л. в. п. находятся из системы уравнений $a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13} = 0$, $a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23} = 0$, т. е.

$$x_0 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{13} & a_{12} \\ a_{23} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}, \quad y_0 = -\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}. \tag{3.19}$$

Хордой л. в. п. называется отрезок прямой, соединяющий любые две точки линии. Середины параллельных хорд любой л. в. п. лежат на одной прямой, называемой **диаметром** л. в. п., сопряженным данному направлению хорд. Все диаметры центральной л. в. п. пересекаются в ее центре. Для нецентральной л. в. п. все диаметры параллельны либо совпадают. Два диаметра центральной л. в. п., каждый из которых делит пополам хорды, параллельные другому диаметру, называются **взаимно сопряженными**. Диаметр л. в. п., перпендикулярный к сопряженному ему направлению хорд, называется **главной осью** л. в. п., являющейся осью симметрии л. в. п. Каждая центральная л. в. п. имеет либо две взаимно перпендикулярные главные оси, либо бесконечное множество различных главных осей в случае окружности. Нецентральная л. в. п. имеет одну главную ось. Точки пересечения л. в. п. с ее главными осями называются **вершинами** л. в. п.

Направления главных осей и нормальных к ним направлений совпадают с направлениями собственных векторов симметричной матрицы A в (3.17); собственные значения λ_1, λ_2 — всегда действительны и находятся из характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^2 - S\lambda + D = 0, \tag{3.20}$$

где $S = \lambda_1 + \lambda_2$, $D = \lambda_1\lambda_2$. Условие $\lambda_1 > 0$ всегда может быть достигнуто умножением уравнения (3.16) на (-1). Направления главных осей л. в. п. и сопряженных им хорд называются **главными направлениями** л. в. п. Только у окружности главные направления неопределенны, т. е. могут быть любыми, но перпендикулярными. Парабола имеет единственную главную ось и два главных направления.

3.1.6.2. Приведение уравнения линии второго порядка к каноническому виду

Существует декартова система координат, в которой общее уравнение л. в. п. (3.16) приводится к одному из девяти простейших (**канонических**) видов.

1. Для нахождения этой системы координат можно воспользоваться непосредственно преобразованиями координат (см. 3.1.3). Повернем сначала оси координат на угол α, где

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}};$$

при нахождении угла α могут быть полезными формулы

$$\cos 2\alpha = \frac{1}{\pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\alpha}}, \quad \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 + \cos 2\alpha}{2}}, \quad \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2\alpha}{2}}.$$

Затем применим формулы преобразования (3.3), тогда уравнение (3.16) примет вид

$$a'_{11}(x')^2 + a'_{22}(y')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0, \tag{3.21}$$

т. е. исключается слагаемое с $x' \cdot y'$. Если $a_{12} = 0$, то поворот осей не нужен. Если $a_{11} = a_{22}$, то $\operatorname{tg} 2\alpha$ обращается в бесконечность, т. е. $2\alpha = \pm\pi/2$ или $\alpha = \pm\pi/4$.

2. Если в (3.21) $a'_{11} \neq 0$, $a'_{22} \neq 0$, то применяя преобразование

$$x' = x'' - \frac{a'_{13}}{a'_{11}}, \quad y' = y'' - \frac{a'_{23}}{a'_{22}},$$

где x'', y'' — новые координаты, получим уравнение

$$a'_{11}(x'')^2 + a'_{22}(y'')^2 = -a''_{33}. \tag{3.22}$$

Если $a''_{33} \neq 0$, то из (3.22) следует:

$$\frac{(x'')^2}{k_1} + \frac{(y'')^2}{k_2} = 1, \tag{3.23}$$

где $k_1 = -\dfrac{a''_{33}}{a'_{11}}$, $k_2 = -\dfrac{a''_{33}}{a'_{22}}$. Если обе величины k_1, k_2 положительны, то получим уравнение линии, называемой **эллипсом** (частным случаем которого при $k_1 = k_2$ является **окружность**). Если $k_1 < 0$, $k_2 < 0$, то получается уравнение **мнимого эллипса**, не имеющего действительных точек. Если одна из k_1 и k_2 положительна, а другая — отрицательна, то получается уравнение **гиперболы**. Если в (3.22) $a''_{33} = 0$, то получим уравнение $a'_{11}(x'')^2 + a'_{22}(y'')^2 = 0$. При этом, если a'_{11}, a'_{22} разного знака, то получим **пару пересекающихся прямых**. Если a'_{11}, a'_{22} одинакового знака, то получим **пару мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке** $(0; 0)$.

3. Пусть один из коэффициентов a'_{11}, a'_{22} в (3.21) равен нулю (например, $a'_{22} = 0$). Тогда (3.21) примет вид

$$a'_{11}(x')^2 + 2a'_{13}x' + 2a'_{23}y' + a'_{33} = 0. \tag{3.24}$$

Если $a'_{23} \neq 0$, то из (3.24) получим уравнение **параболы**:

$$y' = -\frac{a'_{11}}{2a'_{23}}(x')^2 - \frac{a'_{13}}{a'_{23}}x' - \frac{a'_{33}}{2a'_{23}}. \tag{3.25}$$

Если $a'_{23} = 0$, то из (3.24) получим уравнение $a'_{11}(x')^2 + 2a'_{13}x' + a'_{33} = 0$, представляющее либо **пару параллельных прямых** (при $\delta = (a'_{13})^2 - a'_{11}a'_{33} > 0$), либо **пару мнимых параллельных прямых** (при $\delta < 0$), либо **пару слившихся прямых** (при $\delta = 0$).

Аналогично рассматривается случай $a'_{11} = 0$, $a'_{22} \neq 0$. Всего, таким образом, получается девять канонических видов уравнений л. в. п.

Записывая (3.25) в виде

$$y' = a(x')^2 + bx' + c, \tag{3.26}$$

где a, b, c легко получаются из (3.25); находя вершину параболы по формулам

$$x_0' = -\frac{b}{2a}, \quad y_0' = \frac{4ac - b^2}{4a},$$

перенося начало координат в точку (x_0', y_0') и применяя преобразование координат

$$x' = x'' + x_0', \quad y' = y'' + y_0',$$

можно записать уравнение (3.26) в виде $y'' = a(x'')^2$ или в каноническом виде $(x'')^2 = \pm 2py''$, где $p = 1/(2|a|)$; знак выбирается в зависимости от знака a. Если $a_{11}' = 0$, $a_{22}' \neq 0$, то уравнение параболы имеет канонический вид $(y'')^2 = \pm 2px''$.

4. Для нахождения системы координат, в которой общее уравнение л. в. п. (3.16) приводится к каноническому виду, можно найти сначала собственные векторы матрицы A в (3.17), соответствующие собственным значениям λ_1, λ_2, а затем выбрать новые оси координат в направлении этих векторов. В случае центральной л. в. п. начало новой системы координат следует взять в центре $C(x_0, y_0)$ и применить преобразование координат (3.4), в котором α — угол между положительным направлением оси Ox и одним из двух главных направлений л. в. п.

5. Если инвариант $\Delta = 0$, то л. в. п. распадается на две различные или совпадающие прямые. Если $\Delta \neq 0$, то л. в. п. нераспадающаяся. К нераспадающимся л. в. п. относятся: эллипс и окружность, гипербола, парабола, мнимый эллипс, не имеющий ни одной действительной точки.

3.1.6.3. Окружность

Окружность — замкнутая л. в. п., все точки которой одинаково удалены от фиксированной точки, называемой **центром окружности**. Общее уравнение окружности

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2, \tag{3.27}$$

где R — радиус окружности, $C(x_0, y_0)$ — ее центр (рис. 3.10). Отрезок AB, соединяющий любые две точки A и B окружности, называется **хордой** (рис. 3.10). Хорда, проходящая через центр, называется **диаметром** и имеет наибольшую длину. Диаметр, проходящий через середину хорды, перпендикулярен к ней. Окружность радиуса R с центром в начале координат O (рис. 3.11) имеет уравнение **канонического вида**

$$x^2 + y^2 = R^2.$$

Уравнению $Ax^2 + Ay^2 + Bx + Cy + D = 0$ соответствует окружность, если выполнено условие

$$B^2 + C^2 - 4AD > 0.$$

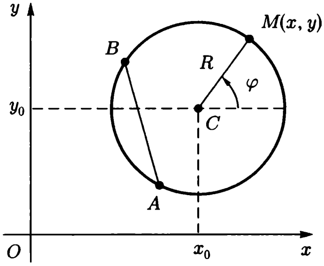


Рис. 3.10

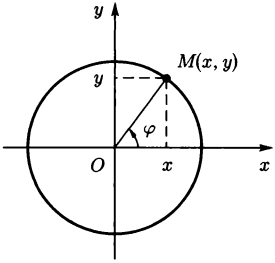


Рис. 3.11

Ее центр $C(x_0, y_0)$ и радиус R находятся по формулам

$$x_0 = -\frac{B}{2A}, \quad y_0 = -\frac{C}{2A}, \quad R^2 = \frac{B^2 + C^2 - 4AD}{4A^2}.$$

Уравнение окружности с центром $C(x_0, y_0)$ и радиусом R в **параметрической форме:**

$$x = x_0 + R\cos\varphi, \quad y = y_0 + R\sin\varphi, \tag{3.28}$$

где x, y — декартовы координаты ее произвольной точки $M(x, y)$, φ — угол между положительным направлением оси Ox и подвижным радиусом CM (рис. 3.10).

Длина окружности: $L = 2\pi R$; площадь круга: $S = \pi R^2$, где $\pi = 3{,}14159\ldots$.

Уравнение касательной к окружности $x^2 + y^2 = R^2$ в точке $M_1(x_1, y_1)$ имеет вид $x_1x + y_1y = R^2$.

3.1.6.4. Эллипс

Эллипсом называется множество точек $M(x, y)$ на плоскости (рис. 3.12), сумма расстояний $r_1 = MF_1$ и $r_2 = MF_2$ которых до двух фиксированных точек $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, называемых **фокусами эллипса,** остается постоянной: $r_1 + r_2 = 2a$ $(a > c)$. Точки A, B, C, D — **вершины** эллипса, точка O — его **центр**; $AB = 2a$, $CD = 2b$ $(a \geqslant b)$ — соответственно **большая** и **малая оси,** которые делятся точкой O пополам. Оси координат Ox и Oy являются главными осями эллипса. Эллипс — замкнутая центральная л. в. п., симметричная относительно главных осей Ox и Oy.

Каноническое уравнение эллипса в системе координат, начало которой совпадает с центром эллипса, а оси координат совмещены с осями эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.29}$$

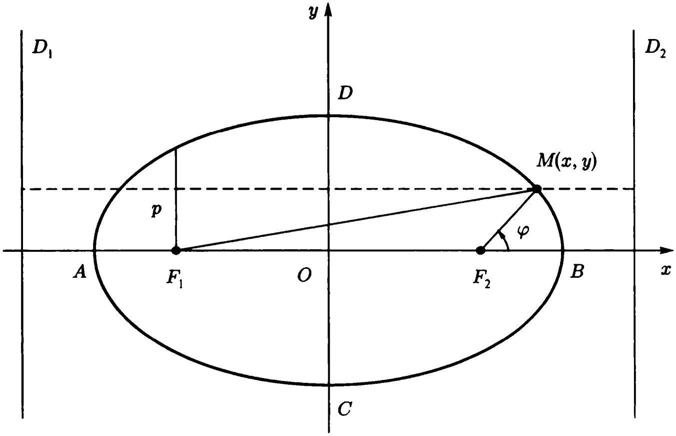


Рис. 3.12

где $b^2 = a^2 - c^2$ $(a \geqslant b)$; a, b — большая и малая полуоси; $F_1F_2 = 2c$ — **фокусное расстояние**. Если $a = b$, то $c = 0$ и фокусы совпадают. Уравнение (3.29) переходит при этом в уравнение окружности $x^2 + y^2 = a^2$. Величина

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} < 1$$

называется **эксцентриситетом** эллипса и характеризует его вытянутость (у окружности $e = 0$). Если $a < b$, то фокусы находятся на оси Oy и $c = \sqrt{b^2 - a^2}$, $e = c/b$. При помощи поворота осей координат на 90° можно привести этот случай к предыдущему $(a > b)$.

Уравнение эллипса в **параметрическом виде**

$$x = a\cos t, \quad y = b\sin t,$$

где t — параметр.

В полярной системе координат, полюс которой находится в фокусе F_2, а полярная ось направлена по оси Ox (рис. 3.12), уравнение эллипса имеет вид

$$\rho = \frac{p}{1 + e\cos\varphi} \quad \left(p = \frac{b^2}{a}\right),$$

где p — **фокальный параметр**, равный половине хорды, проходящей через фокус параллельно малой оси CD.

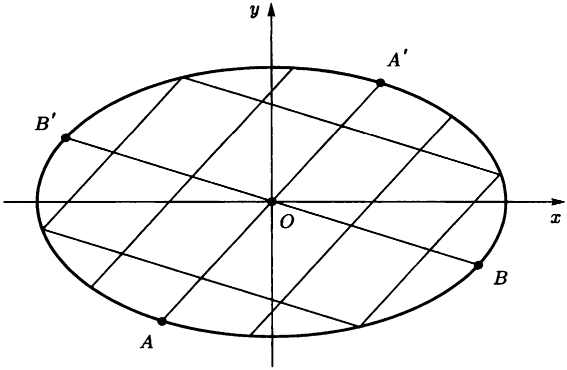


Рис. 3.13

Две прямые D_1 и D_2 с уравнениями $x = -a/e$ и $x = a/e$, параллельные малой оси CD, называются **директрисами** эллипса (рис. 3.12). Для любой точки M эллипса справедливо

$$\frac{r_1}{d_1} = \frac{r_2}{d_2} = e,$$

где d_1 и d_2 — расстояния от M до директрис D_1 и D_2 (рис. 3.12).

Отрезок прямой, соединяющий любые две точки эллипса, называется **хордой**. Хорды, проходящие через центр, называются **диаметрами**. Множество середин хорд, параллельных какому-либо диаметру, само лежит на другом диаметре. Оба эти диаметра AA' и BB' называются взаимно сопряженными (рис. 3.13).

Примечание 1. В аналитической геометрии диаметром л. в. п. иногда называют также всю бесконечную прямую, проходящую через концы диаметра, понимаемого как отрезок.

Радиус кривизны R эллипса (3.29) в точке $M_0(x_0, y_0)$ равен

$$R = a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}\right)^{3/2} = \frac{(r_1r_2)^{3/2}}{ab}.$$

Уравнение **касательной** к эллипсу (3.29) в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$\frac{xx_0}{a^2} + \frac{yy_0}{b^2} = 1.$$

Площадь эллипса $S = \pi ab$.

Примечание 2. Если уравнение эллипса (инвариант $D > 0$) задано в общем виде (3.16), то полуоси a и b могут быть найдены по формулам:

$$a^2 = -\frac{1}{\lambda_2}\frac{\Delta}{D} = -\frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2^2}, \quad b^2 = -\frac{1}{\lambda_1}\frac{\Delta}{D} = -\frac{\Delta}{\lambda_1^2\lambda_2},$$

где $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 > 0$, а координаты центра — по формулам (3.19). Значения $\lambda_1\lambda_2$ находятся из уравнения (3.20).

3.1.6.5. Гипербола

Гиперболой называется множество точек $M(x, y)$ на плоскости (рис. 3.14), разность (по абсолютной величине) расстояний $r_1 = MF_1$, $r_2 = MF_2$ которых до двух фиксированных точек $F_1(-c, 0)$ и $F_2(c, 0)$, называемых **фокусами** гиперболы, остается постоянной, т. е. $|r_1 - r_2| = 2a < 2c$. Гипербола состоит из двух бесконечных ветвей: правой ($x > 0$) и левой ($x < 0$). Для правой ветви $r_1 - r_2 = 2a$, для левой $r_1 - r_2 = -2a$. Точки A и B — вершины гиперболы, O — центр гиперболы, делящий **фокусное расстояние** $F_1F_2 = 2c$ пополам. Отрезок AB длиной $2a$ называется **действительной** (или **фокальной**) **осью**, а отрезок CD длиной $2b$ — **мнимой осью.** Оси координат Ox (на которой лежат фокусы) и Oy являются **главными осями** гиперболы (осями симметрии).

Каноническое уравнение гиперболы в декартовой системе координат, начало которой совпадает с центром, а на оси Ox находятся фокусы гиперболы, имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{3.30}$$

где a и b — действительная и мнимая полуоси, $b^2 = c^2 - a^2$.

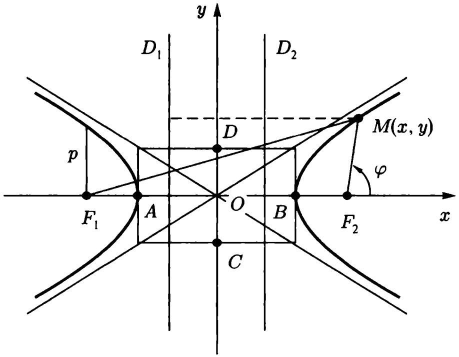


Рис. 3.14

Величина

$$e = \frac{c}{a} = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} > 1$$

называется **эксцентриситетом** гиперболы.

Уравнение гиперболы в **полярной системе координат**, полюс которой совмещен с фокусом F_2, а полярная ось имеет положительное направление оси Ox (рис. 3.14)

$$\rho = \frac{\pm p}{1 \mp e\cos\varphi},$$

где $p = b^2/a$ — **фокальный параметр**, равный половине длины хорды, проходящей через фокус параллельной мнимой оси CD, верхние знаки в числителе и знаменателе относятся к правой ветви ($x > 0$), нижние знаки — к левой ($x < 0$).

Уравнение гиперболы в **параметрической** форме

$$x = a\operatorname{ch} t, \quad y = b\operatorname{sh} t,$$

где t — параметр.

Две прямые (рис. 3.14) с уравнениями $y = \dfrac{b}{a}x$ и $y = -\dfrac{b}{a}x$, к которым неограниченно приближаются ветви гиперболы при $x \to \pm\infty$, называются **асимптотами** гиперболы.

Прямые D_1 и D_2 (рис. 3.14) с уравнениями $x = -a/e$ и $x = a/e$, параллельные мнимой оси CD, называются **директрисами**. Если d_1, d_2 — расстояния от любой точки гиперболы $M(x, y)$ до соответствующих директрис, то $\dfrac{r_1}{d_1} = \dfrac{r_2}{d_2} = e$.

При $a = b$ гипербола называется **равнобочной (равносторонней)** и имеет уравнение $x^2 - y^2 = a^2$. Ее асимптоты перпендикулярны друг другу. Если в этом случае взять в качестве осей координат асимптоты, то уравнение равнобочной гиперболы примет вид $xy = a^2/2$. Ее ветви расположены в 1-й и 3-й четвертях (рис. 3.15).

Радиус кривизны гиперболы (3.30) в точке $M_0(x_0, y_0)$ равен

$$R = a^2b^2\left(\frac{x_0^2}{a^4} + \frac{y_0^2}{b^4}\right)^{3/2} = \frac{(r_1r_2)^{3/2}}{ab}.$$

Уравнение **касательной** к гиперболе (3.30) в точке $M_1(x_1, y_1)$:

$$\frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} = 1.$$

Гипербола с каноническим уравнением

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{3.31}$$

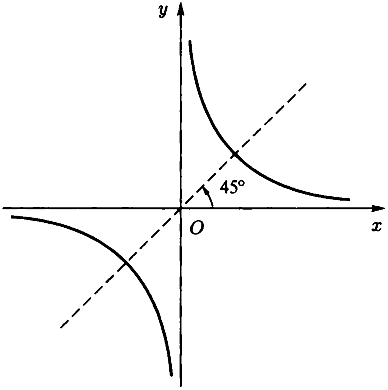


Рис. 3.15

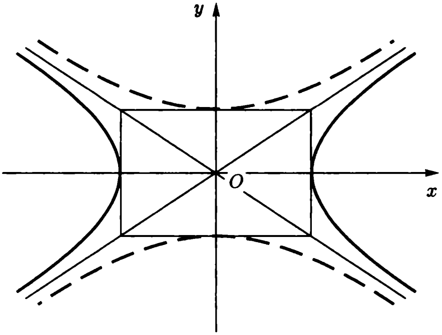


Рис. 3.16

называется **сопряженной** с гиперболой (3.30). Ее фокусы лежат на оси Oy. Обе эти **взаимно сопряженные** гиперболы, имеющие общие асимптоты, изображены на рис. 3.16, из них (3.31) — штриховой линией. Действительная ось каждой из взаимно сопряженных гипербол является мнимой осью другой, и наоборот.

Середины параллельных **хорд** гиперболы лежат на одной прямой, проходящей через центр и называемой **диаметром**. Отрезки диаметров делятся в центре пополам. Через середины хорд, параллельных какому-либо диаметру

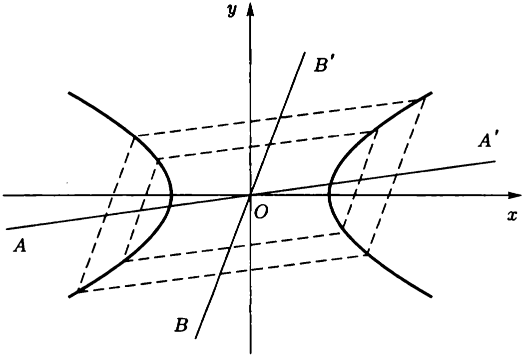


Рис. 3.17

AA', проходит другой диаметр BB' (рис. 3.17). Оба эти диаметра называются **взаимно сопряженными**. Диаметры данной гиперболы являются одновременно диаметрами сопряженной с ней гиперболы.

Примечание. Если уравнение гиперболы (инвариант $D < 0$) задано в общем виде (3.16), то полуоси a и b в уравнении (3.30) могут быть найдены по формулам:

$$a^2 = -\frac{1}{\lambda_1}\frac{\Delta}{D} = -\frac{\Delta}{\lambda_1^2\lambda_2}, \quad b^2 = \frac{1}{\lambda_2}\frac{\Delta}{D} = \frac{\Delta}{\lambda_1\lambda_2^2},$$

где $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 < 0$. Значения λ_1, λ_2 находятся из уравнения (3.20), а координаты центра — по формулам (3.19).

3.1.6.6. Парабола

Параболой называется множество точек $M(x, y)$ плоскости (рис. 3.18), расстояние $r = MF$ которых до фиксированной точки $F(p/2, 0)$, называемой **фокусом**, равно расстоянию $d = MK$ до фиксированной прямой D с уравнением $x = -p/2$, называемой **директрисой,** т. е. $r = d = x + p/2$, где p — **фокальный параметр**, равный расстоянию FA от фокуса до директрисы или половине длины хорды, проходящей через фокус параллельно директрисе. Прямая AF, проходящая через фокус F и перпендикулярная директрисе, называется **главной осью** параболы, точка пересечения O которой с параболой называется **вершиной** параболы. Вершина делит пополам расстояние $AF = p$ от фокуса до директрисы. **Эксцентриситет** параболы $e = \dfrac{MK}{MF} = 1$. Парабола — нецентральная л. в. п., имеющая одну бесконечную ветвь, симметричную относительно главной оси.

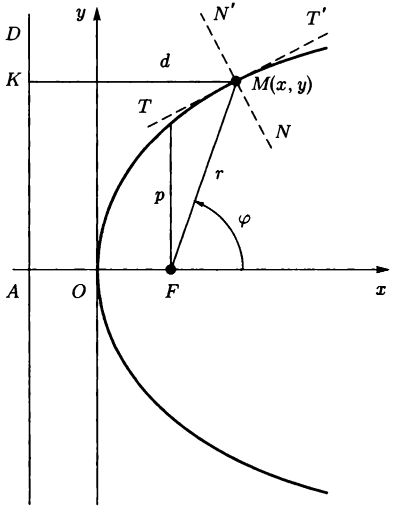


Рис. 3.18

Каноническое уравнение параболы в декартовой системе координат Oxy, начало которой совпадает с вершиной O, а ось Ox направлена по главной оси от вершины к фокусу, имеет вид

$$y^2 = 2px. \tag{3.32}$$

Направления осей Ox и Oy (рис. 3.18) называются **главными направлениями,** из них только Ox является осью симметрии, т. е. главной осью.

Уравнение параболы в **полярной системе координат**, полюс которой совмещен с фокусом, а полярная ось направлена вдоль оси Ox (рис. 3.18)

$$\rho = r = \frac{p}{1 - \cos\varphi}.$$

Если главной осью параболы является ось Oy, фокусом — точка $F(0, p/2)$, а директрисой — прямая $y = -p/2$, то каноническое уравнение параболы (рис. 3.19) имеет вид

$$x^2 = 2py. \tag{3.33}$$

Уравнения парабол, симметричных параболам (3.32) и (3.33) относительно осей Oy и Ox, имеют соответственно вид:

$$y^2 = -2px, \quad x^2 = -2py. \tag{3.34}$$

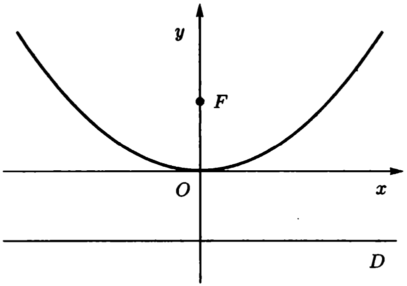


Рис. 3.19

Соответствующим поворотом осей координат уравнения (3.33) и (3.34) приводятся к виду (3.32).

Середины параллельных хорд параболы лежат на одной, параллельной главной оси параболы (рис. 3.20) и называемой **диаметром**. Диаметр, соответствующий хордам, параллельным директрисе, является главной осью.

Уравнение параболы с осью, параллельной оси Oy (рис. 3.21)

$$y = ax^2 + bx + c.$$

Ее фокальный параметр $p = 1/(2|a|)$. При $a > 0$ парабола обращена вершиной вниз (рис. 3.21), при $a < 0$ — вверх. Координаты вершины $M_0(x_0, y_0)$

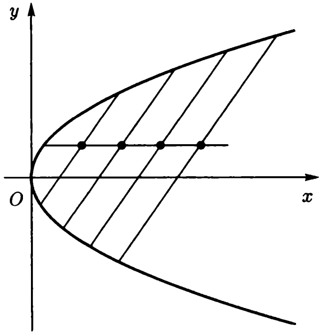


Рис. 3.20

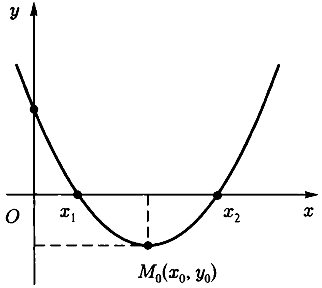


Рис. 3.21

параболы:

$$x_0 = -\frac{b}{2a}, \quad y_0 = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Координаты x_1 и x_2 точек пересечения параболы с осью Ox находятся из условия $y = 0$. Точка пересечения параболы с осью Oy находится из условия $x = 0$.

Уравнения параболы с осью, параллельной оси Ox

$$x = ay^2 + by + c.$$

Радиус кривизны параболы (3.32) в точке $M(x, y)$:

$$R = \frac{(p + 2x)^{3/2}}{\sqrt{p}}.$$

Причем $R = p$ в вершине параболы $(0; 0)$.

Касательная к параболе (3.32) в точке $M_1(x_1, y_1)$ имеет уравнение

$$yy_1 = p(x + x_1).$$

Касательная TT' и нормаль NN' к параболе в точке M являются биссектрисами углов между фокальным радиус-вектором $\overline{FM}$ точки M параболы и диаметром KM, проходящим через точку M (рис. 3.18).

Примечание. Если уравнение параболы (инвариант $D = 0$) задано в общем виде (3.16) и при этом $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, то соответствующим выбором новой системы координат уравнение параболы можно привести к виду $x^2 = 2py$, где $p = \frac{1}{\lambda_1}\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_1}}$, Δ — инвариант (3.18). А при $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 > 0$ — к виду $y^2 = 2px$, $p = \frac{1}{\lambda_2}\sqrt{-\frac{\Delta}{\lambda_2}}$. Значения λ_1, λ_2 находятся из уравнения (3.20). Условия $\lambda_1 > 0$ (или $\lambda_2 > 0$) можно достичь умножением уравнения (3.16) на (-1).

3.2. Аналитическая геометрия в пространстве

3.2.1. Уравнение поверхности и линии

Пусть в пространстве задана декартова (прямоугольная) система координат $Oxyz$ и некоторая поверхность Σ. **Уравнением поверхности** Σ в заданной системе координат называется такое соотношение $F(x, y, z) = 0$, связывающее переменные x, y, z, которому удовлетворяют координаты каждой точки $M(x, y, z)$, лежащей на этой поверхности, и не удовлетворяют координаты любой точки, не лежащей на Σ. Говорят при этом, что уравнение **задает** (или **определяет**) **соответствующую поверхность**. Метод координат позволяет изучать геометрические свойства поверхности путем изучения уравнения этой поверхности средствами алгебры. Поверхность можно рассматривать как множество всех таких точек пространства, координаты которых удовлетворяют данному уравнению.

Пример 5. Точка $(2; 2; 1)$ лежит на поверхности с уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ (сфера с центром в начале координат, радиус которой равен 3), точка $(2; -1; 3)$ не лежит на ней.

Пример 6. Уравнение $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ задает только одну точку $(0; 0; 0)$. Тогда как уравнение $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$ не задает никакого геометрического объекта, так как не имеет действительных решений.

Линию L в пространстве можно рассматривать как линию пересечения двух поверхностей Σ_1 и Σ_2. **Уравнением линии** L называется система двух уравнений $F_1(x, y, z) = 0$ и $F_2(x, y, z) = 0$, определяющих поверхности Σ_1 и Σ_2. Координаты каждой точки, лежащей на линии L, удовлетворяют одновременно обоим этим уравнениям.

Пример 7. Система уравнений двух плоскостей Σ_1 и Σ_2:

$$x + 2y + z = 3, \quad x - y + z = 1$$

определяет прямую L, являющуюся линией пересечения этих плоскостей.

Линии и поверхности в пространстве можно задавать также **параметрически** при помощи вспомогательных переменных — **параметров**.

Непрерывной кривой L в пространстве называется множество точек $M(x, y, z) \equiv M(\bar{r})$, координаты которых заданы как непрерывные однозначные функции от одного действительного параметра t, принимающего значения на некотором конечном или бесконечном промежутке $-\infty \leqslant t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \leqslant +\infty$:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t)$$

или $\bar{r} = \bar{r}(t)$, где $\bar{r}(x, y, z)$ — радиус-вектор точки $M(x, y, z)$ на кривой L.

Непрерывная кривая называется **простой кривой** (или **кривой Жордана**), если разным значениям параметра t соответствуют разные точки этой кривой (т. е. кривая не имеет точек самопересечения и самоналегания). Если начальная точка (при $t = t_1$) и конечная точка (при $t = t_2$) простой кривой совпадают, то она называется **замкнутой простой** кривой. Незамкнутая (либо замкнутая) простая кривая может быть получена непрерывной деформацией отрезка прямой (либо всей окружности). Простая кривая называется **гладкой**, если функции $x(t), y(t), z(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$ имеют непрерывные производные, одновременно не обращающиеся в нуль, т. е. $|x'(t)| + |y'(t)| + |z'(t)| > 0$ в промежутке (t_1, t_2). В каждой внутренней точке (т. е. $t_1 < t < t_2$) такая кривая имеет единственную касательную, непрерывно изменяющую свое направление. Точки кривой, в которых $|x'(t)| + |y'(t)| + |z'(t)| = 0$, называются ее **особыми точками**. В особой точке кривая не имеет касательной. Простая **кусочно гладкая** кривая (незамкнутая или замкнутая) состоит из конечного числа отрезков (дуг) гладких кривых.

Непрерывной поверхностью Σ называется множество точек

$$M(x, y, z) \equiv M(\bar{r}),$$

координаты которых заданы как однозначные непрерывные функции от двух действительных параметров u, v:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

или $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, где (u, v) — переменная точка некоторой области Ω на плоскости Ouv; $\bar{r}(x, y, z)$ — радиус-вектор точки $M(x, y, z)$ на поверхности Σ. Непрерывная **связная** (см. 8.7.1) поверхность, не имеющая самопересечений и самоналеганий, называется **простой поверхностью**. Кусок простой незамкнутой поверхности (например, полусферы) может быть получен путем непрерывных деформаций (растяжений, сжатий, изгибаний) единого куска плоскости, возможно, имеющего отверстия. Простая поверхность, ограниченная кусочно гладкой замкнутой кривой, называется **гладкой**, если в каждой ее внутренней точке $M(\bar{r}(u, v))$ частные производные функций $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ по u, v непрерывны, т. е. существует единственная, изменяющаяся непрерывно касательная плоскость. Простая поверхность (незамкнутая или замкнутая) называется **кусочно гладкой**, если она состоит из конечного числа гладких поверхностей.

В аналитической геометрии в пространстве рассматриваются поверхности, уравнениями которых являются алгебраические уравнения первой и второй степеней:

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Eyz + 2Fxz + 2Gx + 2Hy + 2Mz + N = 0,$$

называемые **алгебраическими поверхностями первого** и **второго порядка** соответственно. Поверхностями первого порядка являются только плоскости. К поверхностям второго порядка относятся: цилиндрические поверхности, сфера, эллипсоид, гиперболоиды, коническая поверхность, параболоиды, пары плоскостей. Основной способ изучения и классификации поверхностей второго порядка заключается в таком выборе декартовой системы координат, в которой уравнение данной поверхности имеет наиболее простой **стандартный** (или **канонический**) вид.

3.2.2. Основные формулы в декартовых координатах

3.2.2.1. Расстояние d между двумя точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ в пространстве

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

3.2.2.2. Координаты x, y, z и радиус-вектор $\bar{r}_M$ точки $M(x, y, z)$, лежащей на прямой M_1M_2 и делящей направленный отрезок $\overline{M_1M_2}$ в отношении $m_1 : m_2 = \lambda$, т. е. $\overline{M_1M} : \overline{MM_2} = m_1 : m_2 = \lambda : 1$ $(\lambda \neq -1)$, находятся по формулам:

$$x = \frac{m_2x_1 + m_1x_2}{m_1 + m_2} = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda},$$

$$y = \frac{m_2y_1 + m_1y_2}{m_1 + m_2} = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda},$$

$$z = \frac{m_2z_1 + m_1z_2}{m_1 + m_2} = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1 + \lambda},$$

$$\bar{r}_M = \frac{m_2\bar{r}_1 + m_1\bar{r}_2}{m_1 + m_2} = \frac{\bar{r}_1 + \lambda \bar{r}_2}{1 + \lambda},$$

где $\bar{r}_1 = \overline{OM}_1$, $\bar{r}_2 = \overline{OM}_2$ — радиус-векторы точек M_1 и M_2. Если $\lambda < 0$ $(\lambda \neq -1)$, то точка M лежит вне отрезка $\overline{M_1M_2}$. Для середины $M(x, y, z)$ отрезка $\overline{M_1M_2}$ имеем

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}, \quad \bar{r}_M = \frac{\bar{r}_1 + \bar{r}_2}{2}.$$

3.2.2.3. Направляющие косинусы вектора $\bar{d} = \overline{M_1M_2} = \bar{r}_2 - \bar{r}_1$, где $\bar{r}_1 = \overline{OM}_1$, $\bar{r}_2 = \overline{OM}_2$:

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|}, \quad \cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|}, \quad \cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{|\bar{r}_2 - \bar{r}_1|},$$

$$|\bar{r}_2 - \bar{r}_1| = \sqrt{(x_1 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2},$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1,$$

где $|\bar{r}_2 - \bar{r}_1| = d$ — расстояние между точками M_1 и M_2.

3.2.2.4. Проекции вектора $\bar{d} = \overline{M_1M_2}$ на оси Ox, Oy, Oz соответственно равны:

$$d_x = x_2 - x_1 = d\cos\alpha, \quad d_y = y_2 - y_1 = d\cos\beta, \quad d_z = z_2 - z_1 = d\cos\gamma,$$

$$d_x^2 + d_y^2 + d_z^2 = d^2.$$

3.2.2.5. Объем V **треугольной пирамиды (тетраэдра)** с вершинами в точках P_1, P_2, P_3, P_4, равен абсолютной величине выражения

$$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix},$$

где x_i, y_i, z_i ($i = 1, 2, 3, 4$) в определителе — координаты вершин. Равенство $V = 0$ является необходимым и достаточным условием расположения четырех точек в одной плоскости.

Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$, приложенных к одной точке, равен абсолютной величине смешанного произведения (см. 2.3.5) этих трех векторов.

3.2.3. Плоскость

3.2.3.1. Общее (полное) уравнение плоскости (алгебраической поверхности первого порядка) является алгебраическим уравнением первой степени относительно декартовых (прямоугольных) координат x, y, z

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{3.35}$$

где постоянные A, B, C не равны нулю одновременно. Если в уравнении (3.35) хотя бы один коэффициент равен нулю, уравнение называется **неполным.** Если $D = 0$, то плоскость проходит через начало координат. При $A = 0$ (или $B = 0$, или $C = 0$) плоскость параллельна соответственно оси Ox (или Oy, или Oz). Если $A = B = 0$ (или $A = C = 0$, или $B = C = 0$), то плоскость параллельна соответственно плоскости Oxy (Oxz, или Oyz).

3.2.3.2. Уравнение плоскости в **векторной форме**:

$$\bar{r}\overline{N} + D = 0, \tag{3.36}$$

где $\bar{r} \equiv (x, y, z)$ — радиус-вектор переменной точки плоскости $M(x, y, z)$, $\overline{N} \equiv (A, B, C)$ — вектор перпендикулярный к данной плоскости и называемый **нормальным вектором** (рис. 3.22). Направляющие косинусы вектора $\overline{N}$

$$\cos\alpha = \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}, \quad \cos\gamma = \frac{C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Вектор $\bar{n} = \dfrac{\overline{N}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$ называется **единичным** вектором нормали к плоскости ($|\bar{n}| = 1$).

3.2.3.3. Нормальное уравнение плоскости:

$$\mp x\cos\alpha \mp y\cos\beta \mp z\cos\gamma - p = 0, \tag{3.37}$$

где $p = \dfrac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \geqslant 0$ — длина перпендикуляра OM, опущенного из начала координат на данную плоскость (рис. 3.22); верхние знаки ($-$) в (3.37) берутся при $D > 0$; а нижние знаки ($+$), если $D < 0$; при $D = 0$ берутся либо только верхние, либо только нижние знаки.

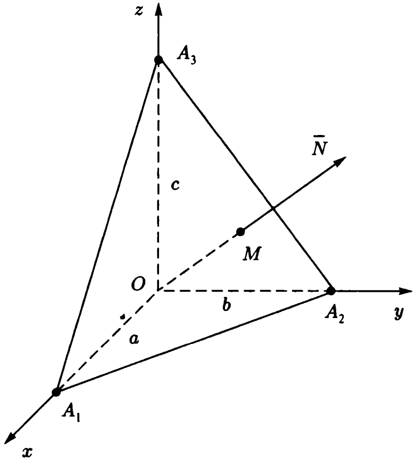


Рис. 3.22

Пример 8. Записать в нормальном виде уравнение плоскости $x + 2y - 2z + 6 = 0$.

Решение. Найдем величину

$$\mu = \mp\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \mp\frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \mp\frac{1}{3}.$$

Здесь $D = 6 > 0$, поэтому берем верхний знак, и $\mu = -1/3$. Умножив обе части данного уравнения на $\mu = -1/3$, получим нормальное уравнение плоскости

$$-\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y + \frac{2}{3}z - 2 = 0. \qquad \triangleright$$

3.2.3.4. Уравнение плоскости в отрезках:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1, \tag{3.38}$$

где $a = -D/A$, $b = -D/B$, $c = -D/C$ — величины отрезков, отсекаемых плоскостью на осях Ox, Oy, Oz в точках $A_1(a, 0, 0)$, $A_2(0, b, 0)$, $A_3(0, 0, c)$ (рис. 3.22).

3.2.3.5. Параметрические уравнения плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$:

$$x = x_0 + a_x u + b_x v, \quad y = y_0 + a_y u + b_y v, \quad z = z_0 + a_z u + b_z v;$$

или

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + u\bar{a} + v\bar{b},$$

где $\bar{r}_0 = \overline{OM}_0$, $\bar{a}$ и $\bar{b}$ — два вектора, лежащие на данной плоскости.

3.2.3.6. Уравнение плоскости, перпендикулярной вектору $\overline{N}(A, B, C)$ и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \equiv M_0(\bar{r}_0)$,

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0 \tag{3.39}$$

или в векторном виде

$$\overline{N}(\bar{r} - \bar{r}_0) = 0 \quad (\overline{N}\bar{r} + D = 0, \text{ где } D = -\overline{N}\bar{r}_0),$$

выражающем ортогональность векторов $\overline{N}$ и $\bar{r} - \bar{r}_0$, где $\bar{r}$ — радиус-вектор произвольной (переменной) точки $M(x, y, z) \equiv M(\bar{r})$ на плоскости. Уравнение (3.39) является также уравнением плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$.

3.2.3.7. Уравнение плоскости, проходящей через три данные точки $M_i(x_i, y_i, z_i) \equiv M_i(\bar{r}_i)$ $(i = 1, 2, 3)$, не лежащие на одной прямой:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

или в векторном виде

$$(\bar{r} - \bar{r}_1, \bar{r}_2 - \bar{r}_1, \bar{r}_3 - \bar{r}_1) = 0,$$

представляющем собой равенство нулю смешанного произведения (см. 2.3.5) трех векторов, лежащих в данной плоскости.

3.2.4. Прямая линия

3.2.4.1. Общее уравнение прямой линии в пространстве может быть представлено системой уравнений двух плоскостей

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 &= 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 &= 0, \end{aligned} \tag{3.40}$$

на пересечении которых эта прямая находится. При этом предполагается, что коэффициенты A_1, B_1, C_1 не пропорциональны коэффициентам A_2, B_2, C_2, соответственно.

3.2.4.2. Уравнение прямой в векторном виде

$$\bar{r}\overline{N}_1 + D_1 = 0, \quad \bar{r}\overline{N}_2 + D_2 = 0,$$

где $\overline{N}_1 \equiv (A_1, B_1, C_1)$, $\overline{N}_2 \equiv (A_2, B_2, C_2)$, $\bar{r} \equiv (x, y, z)$.

3.2.4.3. Уравнение прямой, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1) \equiv M_1(\bar{r}_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2) \equiv M_2(\bar{r}_2)$:

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

или в векторном виде $(\bar{r} - \bar{r}_1) \times (\bar{r}_2 - \bar{r}_1) = 0$.

3.2.4.4. Уравнение прямой, проходящей через данную фиксированную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в данном направлении, задаваемом **направляющим вектором** прямой $\bar{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$:

$$\frac{x - x_0}{a_x} = \frac{y - y_0}{a_y} = \frac{z - z_0}{a_z} \quad \textbf{(каноническое уравнение)} \qquad (3.41)$$

или в **векторно-параметрическом виде**

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \bar{a}t,$$

где t — параметр, $\bar{r} = \overline{OM}$, $\bar{r}_0 = \overline{OM}_0$ (рис. 3.23).

Уравнение прямой в **параметрическом виде**:

$$x = x_0 + a_x t, \quad y = y_0 + a_y t, \quad z = z_0 + a_z t. \qquad (3.42)$$

Уравнение (3.41) связано с уравнениями (3.40):

$$a_x = \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \quad a_y = \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \quad a_z = \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}$$

или $\bar{a} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2$. Уравнение (3.41) можно записать также в векторном виде $(\bar{r} - \bar{r}_0) \times \bar{a} = 0$.

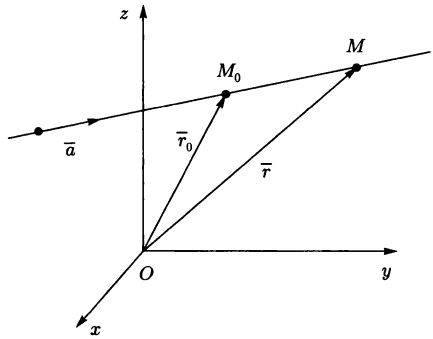


Рис. 3.23

3.2.5. Взаимное расположение точек, прямых и плоскостей

3.2.5.1. Угол α между двумя прямыми с уравнениями вида (3.41) и направляющими векторами $\bar{a}_1 \equiv (a_{1x}, a_{1y}, a_{1z})$ и $\bar{a}_2 \equiv (a_{2x}, a_{2y}, a_{2z})$ находятся по формуле

$$\cos\alpha = \frac{\bar{a}_1\bar{a}_2}{|\bar{a}_1|\cdot|\bar{a}_2|} = \frac{a_{1x}a_{2x} + a_{1y}a_{2y} + a_{1z}a_{2z}}{\sqrt{a_{1x}^2 + a_{1y}^2 + a_{1z}^2}\sqrt{a_{2x}^2 + a_{2y}^2 + a_{2z}^2}}.$$

Прямые с направляющими векторами $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ **параллельны** при условии $\bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = 0$, т. е.

$$\frac{a_{1x}}{a_{2x}} = \frac{a_{1y}}{a_{2y}} = \frac{a_{1z}}{a_{2z}}.$$

Условие перпендикулярности прямых $\bar{a}_1\bar{a}_2 = 0$, т. е.

$$a_{1x}a_{2x} + a_{1y}a_{2y} + a_{1z}a_{2z} = 0.$$

3.2.5.2. Угол β между двумя плоскостями $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ находится по формуле

$$\cos\beta = \frac{\bar{N}_1\bar{N}_2}{|\bar{N}_1|\cdot|\bar{N}_2|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}},$$

где $\bar{N}_1 \equiv (A_1, B_1, C_1)$, $\bar{N}_2 \equiv (A_2, B_2, C_2)$.

Две плоскости **параллельны** при условии $\bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = 0$, т. е.

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}.$$

Две плоскости **перпендикулярны** при условии $\bar{N}_1\bar{N}_2 = 0$, т. е.

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

3.2.5.3. Угол γ между прямой (3.41) и плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле

$$\sin\gamma = \frac{|\bar{N}\bar{a}|}{|\bar{N}|\cdot|\bar{a}|} = \frac{|Aa_x + Ba_y + Ca_z|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}}.$$

Здесь угол $\gamma = 90^\circ - \gamma_1$, где γ_1 — угол между векторами $\bar{N}$ и $\bar{a}$; $\bar{N} \equiv (A, B, C)$.

Прямая и плоскость параллельны, если $\bar{N}\bar{a} = 0$, т. е.

$$Aa_x + Ba_y + Ca_z = 0.$$

Прямая и плоскость перпендикулярны, если $\overline{N} \times \bar{a} = 0$, т. е.

$$\frac{a_x}{A} = \frac{a_y}{B} = \frac{a_z}{C}.$$

3.2.5.4. Пусть две непараллельные плоскости $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$ определяют некоторую прямую. Уравнение множества всех плоскостей, проходящих через эту прямую (называемого **пучком плоскостей**), имеет вид

$$m_1(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + m_2(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0,$$

где m_1, m_2 — любые числа, не равные нулю одновременно.

3.2.5.5. Расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ равно

$$d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{3.43}$$

3.2.5.6. Расстояние d от точки $M_1(x_1, y_1, z_1) \equiv M_1(\bar{r}_1)$ до прямой $\bar{r} = \bar{r_0} + \bar{a}t$ равно

$$d = \frac{|\bar{a} \times (\bar{r}_1 - \bar{r}_0)|}{|\bar{a}|},$$

где $\bar{a} \equiv (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{r}_1 - \bar{r}_0 \equiv (x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0)$.

3.2.5.7. Кратчайшее расстояние d между двумя прямыми $\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{a}_1t$ и $\bar{r} = \bar{r}_2 + \bar{a}_2t$:

а) если прямые не параллельны, то

$$d = \frac{|(\bar{r}_2 - \bar{r}_1, \bar{a}_1, \bar{a}_2)|}{|\bar{a}_1 \times \bar{a}_2|},$$

где под знаком абсолютной величины в числителе стоит смешанное произведение векторов,

б) если прямые параллельны, то

$$d = \frac{|(\bar{r}_2 - \bar{r}_1) \times \bar{a}_1|}{|\bar{a}_1|}.$$

3.2.5.8. Расстояние d между параллельными плоскостями $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ и $Ax + By + Cz + D_2 = 0$ $(D_1 \neq D_2)$:

$$d = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

3.2.5.9. Координаты точки пересечения трех плоскостей находятся из решения системы уравнений этих плоскостей. Три плоскости могут не иметь ни одной общей точки, могут иметь бесконечное множество точек пересечения (если они проходят через одну прямую), либо иметь только одну общую точку.

3.2.5.10. Взаимное расположение плоскости $F(x, y, z) \equiv Ax + By + Cz + D = 0$ и двух точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Если точки лежат по разные стороны от плоскости, то знаки чисел $F(x_1, y_1, z_1)$ и $F(x_2, y_2, z_2)$ противоположны, если по одну сторону — то одинаковы.

3.2.5.11. Координаты точки пересечения прямой, заданной в виде (3.40) с плоскостью находятся посредством решения системы трех уравнений, из которых одно определяет плоскость а два других — прямую. Если прямая задана в параметрическом виде (3.42), то значение t_1 параметра для точки пересечения M_1 прямой с плоскостью $Ax + By + Cz + D = 0$ находится подстановкой выражений для x, y, z из уравнений (3.42) в уравнение плоскости. Координаты x_1, y_1, z_1 точки M_1 находятся затем из трех уравнений прямой линии.

3.2.5.12. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной к прямой $\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{a}t$ с направляющим вектором $\bar{a}$, имеет вид $\bar{a}(\bar{r} - \bar{r}_0) = 0$, т. е.

$$a_x(x - x_0) + a_y(y - y_0) + a_z(z - z_0) = 0.$$

3.2.5.13. Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной к плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$:

$$\bar{r} = \bar{r}_0 + \overline{N}t,$$

где $\bar{r}_0 = \overline{OM}_0$, $\overline{N} \equiv (A, B, C)$, t — параметр.

3.2.5.14. Уравнение плоскости, проходящей через заданную прямую $\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{a}t$ и заданную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$, выражается в виде равенства нулю смешанного произведения трех векторов

$$(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{r}_1 - \bar{r}_0, \bar{a}) = 0.$$

3.2.5.15. Уравнение плоскости, параллельной двум заданным неколлинеарным векторам $\bar{a}_1$ и $\bar{a}_2$ и проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0) \equiv M_0(\bar{r}_0)$:

$$(\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{a}_1, \bar{a}_2) = 0.$$

Аналогично находится уравнение плоскости, проходящей через одну из двух заданных (непараллельных) прямых и параллельной второй прямой.

3.2.5.16. Уравнение плоскости, перпендикулярной к заданной плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ и проходящей через заданную прямую $\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{a}t$:

$$(\bar{r} - \bar{r}_1, \bar{a}, \overline{N}) = 0, \quad \text{где} \quad \overline{N} \equiv (A, B, C).$$

3.2.5.17. Уравнение перпендикуляра, опущенного из заданной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на заданную прямую $\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{a}t$, определяется системой уравнений двух плоскостей:

$$\bar{a}(\bar{r} - \bar{r}_0) = 0 \quad \text{и} \quad (\bar{r} - \bar{r}_0, \bar{r}_1 - \bar{r}_0, \bar{a}) = 0.$$

3.2.5.18. Уравнение прямой, перпендикулярной одновременно к двум заданным прямым $\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{a}_1 t$ и $\bar{r} = \bar{r}_2 + \bar{a}_2 t$, определяется системой уравнений двух плоскостей:

$$(\bar{r} - \bar{r}_1, \bar{a}_1, \bar{a}) = 0 \quad \text{и} \quad (\bar{r} - \bar{r}_2, \bar{a}_2, \bar{a}) = 0,$$

где $\bar{a} = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2$.

3.2.5.19. Условие, при котором две прямые $\bar{r} = \bar{r}_1 + \bar{a}_1 t$ и $\bar{r} = \bar{r}_2 + \bar{a}_2 t$ пересекаются либо находятся в одной плоскости:

$$(\bar{r}_2 - \bar{r}_1, \bar{a}_1, \bar{a}_2) = 0.$$

3.2.6. Поверхности второго порядка

3.2.6.1. Основные понятия

1. **Поверхностью второго порядка** (п. в. п.) называется множество точек $M(x, y, z)$ в пространстве, координаты которых в декартовой (прямоугольной) системе координат $Oxyz$ удовлетворяют алгебраическому уравнению второй степени относительно x, y, z с действительными коэффициентами:

$$\begin{aligned} a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + \\ + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \end{aligned} \tag{3.44}$$

или

$$\begin{aligned} (a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z + a_{14})x + (a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z + a_{24})y + \\ + (a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z + a_{34})z + (a_{41}x + a_{42}y + a_{43}z + a_{44}) = 0, \end{aligned}$$

где $a_{ij} = a_{ji}$ $(i, j = 1, 2, 3, 4)$.

Уравнение (3.44) может и не представлять никакого действительного геометрического образа, если оно не имеет действительных решений. В этом случае говорят, что уравнение представляет мнимую п. в. п.

Уравнение (3.44) в матричном виде

$$\bar{r}A\bar{r}^T + 2\bar{a}\bar{r}^T + a_{44} = 0, \tag{3.45}$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad \bar{r} = (x, y, z), \quad \bar{r}^T = \{x, y, z\}, \quad \bar{a} = (a_{14}, a_{24}, a_{34}).$$

Четыре величины

$$S = a_{11} + a_{22} + a_{33}, \quad T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D = \det A \equiv \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \tag{3.46}$$

являются инвариантами уравнения (3.44) или (3.45) относительно параллельного переноса и поворота осей координат (см. 2.4.1 и 2.4.2).

Основные свойства п. в. п. (3.44) могут быть изучены при помощи **характеристической квадратичной формы**

$$\Phi(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz,$$

всегда действительные собственные числа которой $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ находятся из ее **характеристического уравнения**

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad \text{или} \quad \lambda^3 - S\lambda^2 + T\lambda - D = 0, \tag{3.47}$$

где $S = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $T = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_1\lambda_3$, $D = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

2. Наряду с **центром симметрии** и **осью симметрии** (см. 3.1.6.1) п. в. п. может иметь также **плоскость симметрии**. Плоскость называется **плоскостью симметрии** какой-либо геометрической фигуры, если каждой точке A этой фигуры соответствует такая точка A' этой же фигуры, что отрезок AA' перпендикулярен к этой плоскости и делится пополам в точке пересечения с ней.

Середины параллельных хорд любой п. в. п. лежат в одной плоскости, называемой **диаметральной плоскостью**. Прямая, по которой пересекаются две диаметральные плоскости, называется **диаметром**. В случае центральной поверхности ($D \neq 0$), все диаметры п. в. п. пересекаются в одной-единственной точке, называемой ее центром. Для нецентральной поверхности, не имеющей центра, либо имеющей множество центров ($D = 0$), все ее диаметры параллельны или лежат в одной плоскости. В системе координат $Oxyz$, начало которой совпадает с центром поверхности, каждой точке п. в. п. $\bar{r} = (x, y, z)$ соответствует точка поверхности $\bar{r}' = (-x, -y, -z)$. Координаты центра

$C(x_0, y_0, z_0)$ центральной п. в. п. находятся как решение системы уравнений

$$\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 + a_{14} &= 0,\\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 + a_{24} &= 0,\\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 + a_{34} &= 0. \end{aligned} \tag{3.48}$$

Переходя к новым координатам $x' = x - x_0$, $y' = y - y_0$, $z' = z - z_0$, уравнение центральной п. в. п. можно записать в виде

$$a_{11}(x')^2 + a_{22}(y')^2 + a_{33}(z')^2 + 2a_{12}x'y' + 2a_{13}x'z' + 2a_{23}y'z' + \frac{\Delta}{D} = 0. \tag{3.49}$$

Диаметральная плоскость, перпендикулярная соответствующим ей хордам, называется **главной плоскостью** п. в. п. и является ее плоскостью симметрии. Только у цилиндров плоскости симметрии, перпендикулярные к образующим, не являются главными плоскостями. Диаметр, являющийся линией пересечения двух главных плоскостей, называется **главной осью** п. в. п., которая является также осью симметрии.

П. в. п. (центральная или нецентральная), для которой $\Delta \neq 0$, называется **невырожденной**. В противном случае ($\Delta = 0$) — **вырожденной**. К вырожденным поверхностям относятся конусы, цилиндры, пары плоскостей. Если уравнение вырожденной п. в. п. распадается на два уравнения первого порядка с действительными или комплексными коэффициентами, определяющими две действительные или мнимые плоскости, то говорят, что поверхность **распадающаяся.** Каждая невырожденная п. в. п. имеет хотя бы одну главную ось. Всякая центральная п. в. п. имеет не менее трех взаимно перпендикулярных главных осей.

3. Направления собственных векторов матрицы A в (3.45), соответствующих ее собственным значениями $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, называют **главными направлениями** характеристической квадратичной формы $\Phi(x, y, z)$ с матрицей A. Направляющие косинусы $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ главных направлений, являющихся направлениями собственных векторов матрицы A, находятся из системы трех уравнений

$$\begin{aligned} (a_{11} - \lambda)\cos\alpha + a_{12}\cos\beta + a_{13}\cos\gamma &= 0,\\ a_{21}\cos\alpha + (a_{22} - \lambda)\cos\beta + a_{23}\cos\gamma &= 0,\\ a_{31}\cos\alpha + a_{32}\cos\beta + (a_{33} - \lambda)\cos\gamma &= 0, \end{aligned} \tag{3.50}$$

где λ — собственное значение матрицы A. В случае, когда все три корня $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ уравнения (3.47) не равны нулю, система (3.50) определяет для каждого из этих корней направляющие косинусы главной оси. В случае простого (однократного) корня $\lambda = 0$, ему соответствует единственная главная ось, направляющие косинусы которой находятся из (3.50). Если $\lambda = 0$ — двукратный корень, то п. в. п. будет параболическим цилиндром, либо парой параллельных плоскостей. Например, параболический цилиндр имеет одну главную плоскость и не имеет главных осей.

3.2.6.2. Приведение уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду

Существует декартова (прямоугольная) система координат, в которой общее уравнение п. в. п., в зависимости от значений его коэффициентов, приводится к одному из семнадцати простейших **стандартных** (или **канонических**) видов, определяющих соответствующие п. в. п.

1. В случае центральной п. в. п. ($D \neq 0$; $\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 \neq 0$) в новой системе координат K', полученной из старой параллельным переносом осей (начало системы K' помещено в центр $C(x_0, y_0, z_0)$ поверхности), уравнение п. в. п. (3.44) примет вид (3.49), т. е. исчезают слагаемые первой степени.

Переходя затем к декартовой системе координат K'', начало которой совмещено с центром $C(x_0, y_0, z_0)$ поверхности, а оси координат Cx'', Cy'', Cz'' совпадают по направлению с ортонормированными собственными векторами $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ матрицы A в (3.45), уравнение (3.49) можно записать в виде

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + \lambda_3(z'')^2 + \frac{\Delta}{D} = 0, \tag{3.51}$$

т. е. исчезают произведения координат. Такое преобразование называется **преобразованием к главным осям.** При этом всегда можно полагать $\lambda_1 > 0$. Это достигается, например, умножением уравнения (3.44) на (-1).

Если какое-либо собственное значение $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$, т. е. имеет кратность 2, то любое направление, перпендикулярное к единственному направлению, соответствующему значению $\lambda_3 \neq 0$, является главным направлением, соответствующим значению $\lambda_1 = \lambda_2$. В этом случае имеется бесконечное множество троек линейно независимых векторов. При необходимости одну из этих троек векторов следует ортогонализировать (см. 2.5.3) и нормировать для получения ортонормированных собственных векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$. Если $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$, то каждое направление является главным. В качестве $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ при этом можно взять любые три попарно ортогональных единичных вектора. Нахождение главных направлений п. в. п. сводится к нахождению ненулевых направляющих косинусов, удовлетворяющих системе (3.50) при некотором значении λ, равном нулю или нет. Для нахождения матрицы перехода $S \equiv V^T$ от системы координат K' к K'' (см. 2.4 и 2.9) следует воспользоваться методом, приведенном в 2.10 (см решение примера 22).

В зависимости от значения коэффициентов и их знаков, уравнение (3.51) содержит в себе следующие частные случаи: 1) действительные эллипсоиды, 2) мнимые эллипсоиды, 3) однополостные гиперболоиды, 4) двухполостные гиперболоиды, 5) действительные конусы, 6) мнимые конусы.

2. Если п. в. п. нецентральная ($D = 0$), то хотя бы одно из трех собственных значений равно нулю ($\lambda_1 \neq 0$, $\lambda_2 \neq 0$, $\lambda_3 = 0$). Приведение уравнения (3.44) к каноническому виду проводится при этом сначала переходом к системе координат K', полученной поворотом системы $Oxyz$ вокруг старого начала координат O (см. 2.4.2) так, что новые оси Ox', Oy', Oz' становятся параллельными ортонормированным собственным векторам $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ матрицы A. В результате уравнение (3.44) примет вид

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a_{44} = 0. \tag{3.52}$$

Если $a'_{34} \neq 0$ (т.е. $\Delta \neq 0$), то преобразование координат $x' = x'' + x'_0$, $y' = y'' + y'_0$, $z' = z'' + z'_0$ (где x'_0, y'_0, z'_0 находятся из трех уравнений: $\lambda_1 x'_0 + a'_{14} = 0$, $\lambda_2 y'_0 + a'_{24} = 0$, $\lambda_1(x'_0)^2 + \lambda_2(y'_0)^2 + 2a'_{14}x'_0 + 2a'_{24}y'_0 + 2a'_{34}z'_0 + a_{44} = 0$) переводит уравнение (3.52) к виду

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + 2a'_{34}z'' = 0. \tag{3.53}$$

Уравнение (3.53) содержит частные случаи: 1) параболоиды эллиптические, 2) параболоиды гиперболические.

При этом $\Delta > 0$, если λ_1 и λ_2 — разных знаков, и $\Delta < 0$, если λ_1 и λ_2 — одного знака.

Если $a'_{34} = 0$ (т.е. $\Delta = 0$), то уравнение (3.52) имеет вид

$$\lambda_1(x')^2 + \lambda_2(y')^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + a_{44} = 0. \tag{3.54}$$

Применяя к (3.54) преобразование $x' = x'' + x'_0$, $y' = y'' + y'_0$, $z' = z''$ (где x'_0, y'_0 находятся из двух уравнений: $\lambda_1 x'_0 + a_{14} = 0$, $\lambda_2 y'_0 + a'_{24} = 0$) приведем (3.54) к виду

$$\lambda_1(x'')^2 + \lambda_2(y'')^2 + a'_{44} = 0, \tag{3.55}$$

где $a'_{44} = \lambda_1(x'_0)^2 + \lambda_2(y'_0)^2 + 2a'_{14}x'_0 + 2a'_{24}y'_0 + a_{44}$.

Здесь возможны случаи: 1) $a'_{44} = 0$, 2) $a'_{44} \neq 0$.

Уравнению (3.55) соответствуют поверхности: 1) цилиндры эллиптические, 2) цилиндры гиперболические, 3) цилиндры эллиптические мнимые, 4) пары пересекающихся действительных плоскостей, 5) пары пересекающихся мнимых плоскостей.

Если $\lambda_1 = \lambda_3 = 0$, $\lambda_2 \neq 0$, то, направив ось Oy' новой системы координат по направлению собственного вектора, соответствующего значению $\lambda_2 \neq 0$, получим уравнение поверхности в виде

$$\lambda_2(y')^2 + 2a'_{14}x' + 2a'_{24}y' + 2a'_{34}z' + a_{44} = 0. \tag{3.56}$$

Уравнение (3.56) при $a'_{14} = a'_{34} = 0$ содержит частные случаи: 1) пары действительных параллельных плоскостей, 2) пары мнимых параллельных плоскостей, 3) пары совпадающих действительных плоскостей.

Если $a'_{34} \neq 0$, то применяя преобразование координат $x' = x''\cos\alpha - z''\sin\alpha$, $y' = y''$, $z' = x''\sin\alpha + z''\cos\alpha$, где $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{a'_{14}}{a'_{34}}$, приведем (3.56) к виду

$$\lambda_2(y'')^2 + 2a'_{24}y'' + 2bx'' + a_{44} = 0, \tag{3.57}$$

где $b = a'_{14}\cos\alpha + a'_{34}\sin\alpha$. Уравнение (3.57) является уравнением **параболического цилиндра**, образующие которого перпендикулярны плоскости $z'' = 0$. Всего, таким образом, **имеется семнадцать классов поверхностей второго порядка**.

3.2.6.3. Классификация поверхностей второго порядка

1. Нераспадающиеся поверхности:

Невырожденные ($\Delta \neq 0$):

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ — эллипсоид ($\Delta < 0$, $DS > 0$, $T > 0$),

2) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ — мнимый эллипсоид ($\Delta > 0$, $DS > 0$, $T > 0$),

3) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 1$ — однополостный гиперболоид ($\Delta > 0$, $DS \leqslant 0$ и (или) $T \leqslant 0$),

4) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$ — двухполостный гиперболоид ($\Delta < 0$, $DS \leqslant 0$ и (или) $T \leqslant 0$),

5) $\dfrac{x^2}{p} + \dfrac{y^2}{q} = 2z$ $(p > 0,\ q > 0)$ — эллиптический параболоид ($\Delta < 0$, $D = 0$),

6) $\dfrac{x^2}{p} - \dfrac{y^2}{q} = 2z$ $(p > 0,\ q > 0)$ — гиперболический параболоид ($\Delta > 0$, $D = 0$).

Вырожденные ($\Delta = 0$):

7) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — эллиптический цилиндр ($D = 0$, $T > 0$),

8) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = -1$ — мнимый эллиптический цилиндр ($D = 0$, $T > 0$),

9) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ — гиперболический цилиндр ($D = 0$, $T < 0$),

10) $y^2 = 2px$ — параболический цилиндр ($D = 0$, $T = 0$),

11) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ — конус ($D \neq 0$, $DS \leqslant 0$ и (или) $T \leqslant 0$),

12) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 0$ — мнимый конус (действительная точка) ($DS > 0$, $T > 0$).

2. Распадающиеся вырожденные поверхности ($\Delta = 0$, $D = 0$):

13) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 0$ — пара пересекающихся плоскостей,

14) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=0$ — пара мнимых пересекающихся плоскостей (действительная прямая),

15) $x^2=a^2$ — пара параллельных плоскостей,

16) $x^2=-a^2$ — пара мнимых параллельных плоскостей,

17) $x^2=0$ — пара совпадающих действительных плоскостей.

3.2.6.4. Невырожденные поверхности, конус и цилиндры

1. Эллипсоид — центральная замкнутая п. в. п. (рис. 3.24) с уравнением канонического вида

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1,$$

где a, b, c — **полуоси** эллипсоида. Если a, b, c — различные, то эллипсоид называется **трехосным**. При $a=b>c$ имеем **сжатый эллипсоид вращения (сфероид)**, полученный при вращении эллипса $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$, лежащего в плоскости $y=0$, вокруг оси Oz. Если $a=b<c$, то эллипсоид вращения **вытянутый**. При $a=b=c$ имеем **сферу** $x^2+y^2+z^2=a^2$ радиуса a. Сечение эллипсоида любой плоскостью является эллипсом (в частности, окружностью). Объем эллипсоида равен $\dfrac{4}{3}\pi abc$, объем сферы $\dfrac{4}{3}\pi a^3$.

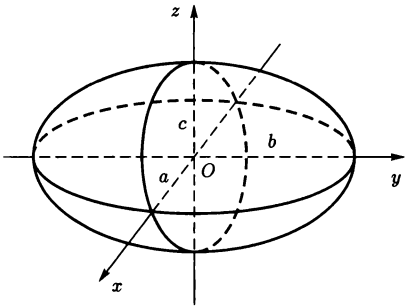


Рис. 3.24

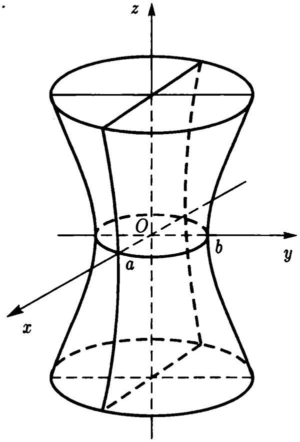


Рис. 3.25

2. Однополостный гиперболоид — незамкнутая центральная п. в. п. (рис. 3.25) с уравнением канонического вида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

где a, b, c — **полуоси**.

3. Двухполостный гиперболоид — незамкнутая центральная п. в. п. (рис. 3.26) с уравнением канонического вида:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

где a, b, c — **полуоси**.

Для обоих гиперболоидов любая плоскость, проходящая через ось Oz или параллельная оси Oz, пересекает их по гиперболам. Для однополостного гиперболоида эти линии пересечения могут быть также прямыми. Сечения обоих гиперболоидов плоскостями, параллельными плоскости Oxy, являются эллипсами. Если $a = b$, то имеем **гиперболоиды вращения**. Через любую точку однополостного гиперболоида проходят две прямые, полностью лежащие на его поверхности и называемые **прямолинейными образующими**. Такие поверхности называются **линейчатыми**.

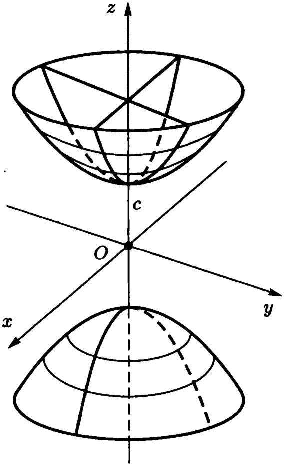


Рис. 3.26

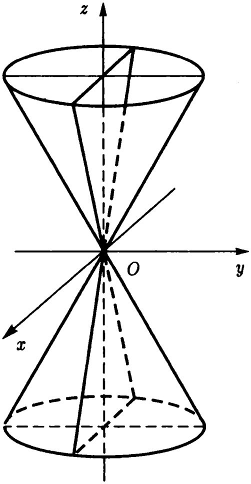


Рис. 3.27

4. Конус (коническая поверхность) — незамкнутая центральная п. в. п. (рис. 3.27) с каноническим уравнением:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0 \tag{3.58}$$

и с вершиной (центром) в начале координат. Осью симметрии конуса является ось Oz. Сечения конуса плоскостями, параллельными плоскости Oxy, являются эллипсами. При $a = b$ имеем **круглый** (или **прямой круговой**) **конус**.

Конус (3.58) является **асимптотическим конусом** для обоих гиперболоидов (однополостного и двухполостного), точки которых при удалении в бесконечность приближаются к этому конусу.

5. Эллиптический параболоид — нецентральная незамкнутая п. в. п. (рис. 3.28) с каноническим уравнением:

$$z = \frac{x^2}{2p} + \frac{y^2}{2q} \quad (p > 0,\ q > 0).$$

Плоские сечения, параллельные плоскости Oxy, — эллипсы. Плоские сечения, параллельные оси Oz, — параболы. При $p = q$ имеем **параболоид вращения**, получаемый вращением параболы $x^2 = 2pz$, лежащей в плоскости $y = 0$, вокруг оси Oz.

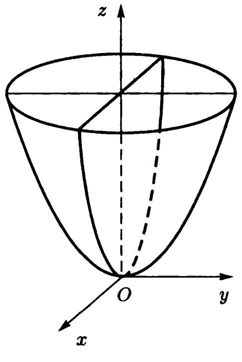


Рис. 3.28

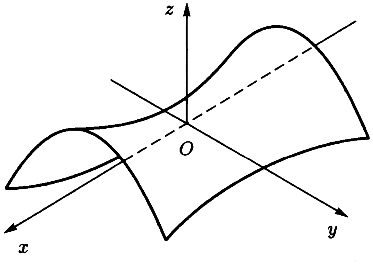


Рис. 3.29

6. Гиперболический параболоид — незамкнутая нецентральная п. в. п. (рис. 3.29) с каноническим уравнением:

$$z = \frac{x^2}{2p} - \frac{y^2}{2q} \quad (p > 0,\ q > 0).$$

Сечения, параллельные плоскостям Oxz и Oyz, — параболы. Сечения плоскостями, параллельными плоскости Oxy, — гиперболы (при $z \neq 0$) или две пересекающиеся прямые (при $z = 0$). Гиперболический параболоид — линейчатая поверхность: через каждую его точку проходят две прямые, целиком принадлежащие его поверхности.

7. **Цилиндры (цилиндрические поверхности)** — нецентральные незамкнутые п. в. п., форма которых определяется плоской кривой, называемой **направляющей**. Прямые линии (называемые **образующими**), перпендикулярные плоскости, содержащей направляющую, и проходящие через точки направляющей, образуют множество точек, из которых состоит цилиндрическая поверхность.

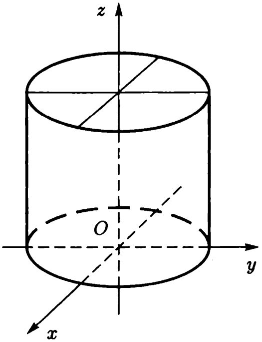


Рис. 3.30

а) Каноническое уравнение **эллиптического цилиндра** (рис. 3.30) имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Направляющая — эллипс в плоскости Oxy ($z = 0$). Образующие параллельны оси Oz. При $a = b$ получается **прямой круговой цилиндр** $x^2 + y^2 = a^2$.

б) Каноническое уравнение **гиперболического цилиндра** (рис. 3.31) имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

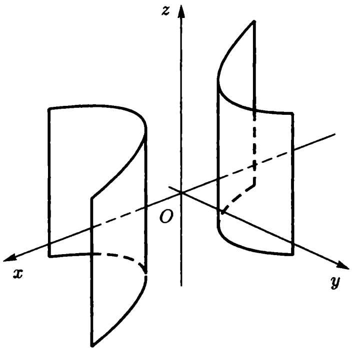


Рис. 3.31

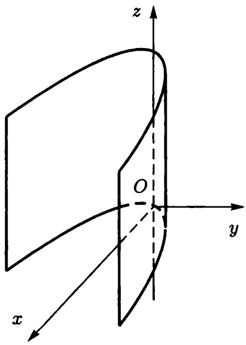


Рис. 3.32

Направляющая — гипербола в плоскости Oxy $(z = 0)$.

в) Каноническое уравнение **параболического цилиндра** (рис. 3.32) имеет вид:

$$y^2 = 2px.$$

Направляющая — парабола в плоскости Oxy $(z = 0)$.

Глава 4

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

4.1. Действительная функция одной действительной переменной

4.1.1. Понятие функции

Пусть дано множество $X = \{x\}$ всех действительных числовых значений, которые может принимать переменная величина x. Тогда, если каждому значению переменной x из заданного множества X по определенному правилу ставится в соответствие действительное число y, то говорят, что на множестве X **задана действительная функция** $y = f(x)$ (или $y = y(x)$) от одной действительной переменной x. Здесь величина x называется **независимой переменной** или **аргументом**, а y — зависимой переменной или **функцией**, поскольку она зависит от величины x. Символ f обозначает **функциональную зависимость**, т. е. правило, по которому каждому значению x ставится в соответствие значение y. Для обозначения аргумента, функции и функциональной зависимости могут использоваться и другие символы. Множество X всех возможных значений аргумента x называется **областью определения** (**областью задания**, или **областью существования**) функции. Множество $Y = \{y\}$ всех значений величины y называется **областью изменения** (или **множеством значений**) функции. Символами x и y обозначаются и сами переменные величины, и их отдельные частные значения. В простейших случаях множества X и Y являются некоторыми ограниченными или бесконечными **промежутками** на числовой оси (см. 1.1.5.2). Если каждому значению аргумента x соответствует только одно значение функции y, то функция называется **однозначной**, если несколько (возможно, даже бесконечное множество) значений y, то — **многозначной**. Любая заданная функция предполагается однозначной, если не оговорено противное.

Пример 1.

1) Функция $y = x^2$ определена на промежутке $X = (-\infty; +\infty)$, область изменения: $Y = [0; +\infty)$; т. е. $-\infty < x < +\infty$ и $0 \leqslant y < +\infty$.
2) Для функции $y = \sqrt{1 - x^2}$ соответственно: $X = [-1; 1]$, $Y = [0; +\infty)$.
3) Функция $y = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2}}$ задана в интервале $X = (-2; 2)$, на концах интервала, т. е. в точках $x = \pm 2$, функция не определена (стремится к бесконечности), область изменения: $Y = [0{,}5; +\infty)$.

4.1.2. Способы задания функций

Табличный способ задания функции представляет собой таблицу, в которой перечислены значения аргумента (обычно, только некоторые) и соответствующие им значения функции. Примерами являются таблицы логарифмов, тригонометрических функций и т. д.

Пример 2. Функция $y = f(x) \equiv x^2$ может быть задана при помощи таблицы некоторых ее значений:

x	-3	-2	-1	0
$y = f(x)$	9	4	1	0

x	1	2	3	...
$y = f(x)$	1	4	9	...

Графический способ задания функции $y = f(x)$ состоит в построении на плоскости с декартовой системой координат Oxy множества точек с координатами

$$(x, y) \equiv (x, f(x)),$$

называемого **графиком функции**

$$y = f(x).$$

Абсциссами этих точек являются значения аргумента x, а ординатами — соответствующие значения функции $f(x)$.

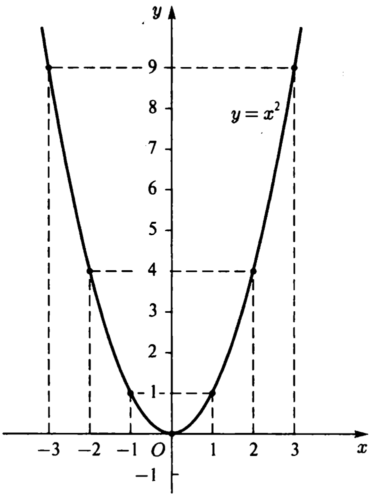


Рис. 4.1

Пример 3. На рис. 4.1 приведен график функции $y = x^2$.

Аналитический способ заключается в задании функции при помощи одной или нескольких формул, в которых указаны (перечислены) математические

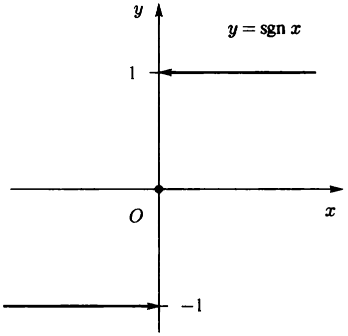


Рис. 4.2

действия над величиной x для нахождения y. В качестве области определения при этом берутся все те значения x, при которых выполнимы действия, указанные в этих формулах. В частности, все функции в примере 1 заданы аналитически.

Пример 4. Функция **сигнум**:

$$y = \operatorname{sgn} x \equiv \begin{cases} +1 & \text{при} \quad x > 0, \\ 0 & \text{при} \quad x = 0, \\ -1 & \text{при} \quad x < 0, \end{cases}$$

заданная аналитически, имеет область определения $X = (-\infty; +\infty)$, область изменения: $Y = \{-1; 0; 1\}$; ее график приведен на рис. 4.2.

Используются также и другие способы задания функций, например, при помощи **словесного описания**: **функция Дирихле** равна 1, если x — рациональное число, и равна 0, если x — иррациональное число. Для функции Дирихле: $X = (-\infty; +\infty)$, $Y = \{0; 1\}$. Часто применяется задание функций при помощи **предельного перехода**, например, в виде суммы сходящегося ряда:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots .$$

Если при аналитическом способе задания функция представлена в виде $y = f(x)$, то говорят, что она задана **явно** (например, $y = x^3$). Если переменные x и y связаны соотношением $F(x, y) = 0$, то говорят, что функция $y = f(x)$ задана **неявно** (например, $x^2 + y^2 = 4$). При **параметрическом** представлении функции соответствующие друг другу значения x и y выражаются в виде двух функций от вспомогательной переменной t, называемой **параметром**: $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $[0 \leqslant t \leqslant T]$. Например, параметрическое представление неявно заданной функции $x^2 + y^2 = 4$ можно записать в виде: $x = 2\cos t$, $y = 2\sin t$ $(0 \leqslant t < 2\pi)$. Исключая из этих двух функций параметр t, получим исходную связь между x и y.

Примечание. Неявная функция $x^2 + y^2 = 4$ двузначна: $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$ и распадается на две однозначные функции: $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = -\sqrt{4 - x^2}$.

4.1.3. Свойства функций. Функции со специальными свойствами

Если на одном и том же множестве X заданы две функциональные зависимости f и g, то можно определить **сумму** $f + g$, **разность** $f - g$, **произведение**

fg, **частное** f/g, как такие новые функциональные зависимости, частные значения которых находятся соответственно по формулам

$$f(x)+g(x),\quad f(x)-g(x),\quad f(x)g(x),\quad \frac{f(x)}{g(x)}\quad [g(x)\neq 0]$$

для каждого x из X.

Если на некотором множестве X определена функция $f(x)$, то, задавая произвольные числа $a\neq 0$, $b\neq 0$, $c\neq 0$, из функции $f(x)$ можно получить следующие функции: 1) $f(x)+b$, 2) $cf(x)$, 3) $f(x-a)$, 4) $f(cx)$, а также их комбинации. Функции 1) и 2) определены на том же множестве X, что и $f(x)$. График функции 1) получается из графика $f(x)$ параллельным сдвигом последнего вдоль оси Oy на величину b вверх ($b>0$) или вниз ($b<0$). График функции 2) получается из графика $f(x)$ умножением всех ординат графика $f(x)$ на величину c (с учетом ее знака) при тех же значениях абсцисс, т. е. путем равномерного растяжения графика $f(x)$ вдоль оси Oy в c раз. График функции 3) получается из графика $f(x)$ параллельным сдвигом вдоль оси Ox на величину a вправо ($a>0$), или влево ($a<0$). График функции 4) получается из графика $f(x)$ посредством деления всех абсцисс на величину c (с учетом знака) при тех же значениях ординат, т. е. путем равномерного сжатия графика $f(x)$ вдоль оси Ox в c раз.

Функция $f(x)$, определенная на некотором промежутке X, называется **периодической,** если существует число $T>0$ такое, что $f(x+T)=f(x)$ для любого x из X и $x+T$, принадлежащего X. При этом **наименьшее число $T>0$ называется периодом функции** $f(x)$. Например, функция $\cos nx$ (n — натуральное) является периодической с периодом $T=2\pi/n$, так как $\cos n\left(x+\dfrac{2\pi}{n}\right)=\cos nx$ при любом x из области определения $X=(-\infty;+\infty)$.

Функция $f(x)$, определенная на множестве X, симметричном относительно начала координат, называется **четной** [**нечетной**], если $f(-x)=f(x)$ [$f(-x)=-f(x)$]. График четной функции симметричен относительно оси Oy, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат (см. 3.1.6.1). Например, функции $y=x^2$, $y=\cos x$ — четные, а $y=x^3$, $y=\sin x$ — нечетные. Большинство функций не относятся ни к четным, ни к нечетным. Любая функция $f(x)$, определенная на множестве, симметричном относительно начала координат, может быть представлена в виде суммы четной и нечетной функций:

$$f(x)=\frac{1}{2}\left[f(x)+f(-x)\right]+\frac{1}{2}\left[f(x)-f(-x)\right].$$

Функция $y=f(x)$ называется **возрастающей** [**убывающей**] на множестве X, если для любых x_1, x_2 из X, удовлетворяющих условию $x_1<x_2$, выполняется строгое неравенство $f(x_1)<f(x_2)$ [$f(x_1)>f(x_2)$]. Если же $f(x_1)\leqslant f(x_2)$

$[f(x_1) \geqslant f(x_2)]$, то функция называется **неубывающей** [**невозрастающей**] на множестве X или **монотонной**. Возрастающие и убывающие функции называются **строго монотонными**. Например, функция $y = 2x$ возрастает на всей числовой оси. Функция называется **возрастающей в некоторой точке**, если она является возрастающей в некоторой достаточно малой окрестности этой точки.

Функция $f(x)$ называется **ограниченной**, (**неограниченной**) на множестве X, если множество Y всех ее значений $y = f(x)$ (где x принадлежит X) является ограниченным (неограниченным) множеством (см. 1.1.6). Например, функция $y = 2x$ не ограничена на всей числовой оси, но ограничена на любом отрезке $[a; b]$.

Сложной функцией называется функция от функции. Пусть $y = f(u)$ — функция от u, где $u = g(x)$ — функция от x, тогда y является сложной функцией от независимого аргумента x, т. е. $y = F(x) = f[g(x)]$ — функция, область определения которой состоит из тех значений x, для которых значения $u = g(x)$ входят в область определения функции $f(u)$. При этом величину u называют **промежуточным аргументом**. Возможны также сложные функции с двумя, тремя и т. д. **промежуточными аргументами**.

Пример 5.

1) $y = u^3$, $u = \sin x$; сложная функция $y = \sin^3 x$ имеет область определения $X = (-\infty; +\infty)$.
2) $y = \ln u$, $u = v^2$, $v = \sin x$, где u, v — промежуточные аргументы; областью определения сложной функции $y = \ln(\sin^2 x)$ является вся числовая ось, за исключением точек $x_n = n\pi$ (n — целое число), в которых $\sin x_n = 0$.

Пусть функция $y = f(x)$ задана на множестве X, а Y — множество ее значений. **Обратной функцией** для функции $y = f(x)$ называется такая функция $x = g(y)$, которая определена на множестве Y и ставит в соответствие каждому y из Y такое x из X, для которого $f(x) = y$. Чтобы найти функцию, обратную для $y = f(x)$, необходимо решить уравнение $f(x) = y$ относительно неизвестной x, т. е. выразить x через y. Две функции $y = f(x)$ и $x = g(y)$ называют также **взаимно обратными**, так как каждая из них является обратной для другой.

Пример 6. Обратными для функций: 1) $y = x^3$, 2) $y = e^x$, 3) $y = 2x + 1$ являются соответственно: 1) $x = \sqrt[3]{y}$, 2) $x = \ln y$, 3) $x = \frac{1}{2}(y - 1)$.

Функция $x = g(y)$, обратная для $y = f(x)$, может быть **многозначной**. Например, для функции $y = x^2$ обратная функция $x = \pm\sqrt{y}$ является двузначной. Для однозначности $x = g(y)$ необходимо и достаточно, чтобы разным значениям аргумента $x_1 \neq x_2$ соответствовали разные значения функции $y_1 \neq y_2$, т. е. каждому значению y соответствовало бы только одно значение x

такое, что $y = f(x)$. Для однозначности $x = g(y)$ достаточно, чтобы $y = f(x)$ являлась строго монотонной. При этом, поскольку $y = f(x)$ однозначна, она устанавливает **взаимно однозначное соответствие** между множествами X и Y. Если обратная функция $g(y)$ однозначна, то выполняются тождества:

$$f(g(y)) \equiv y, \quad g(f(x)) \equiv x$$

для всех x из X и всех y из Y.

Далее всегда подразумевается, что обратная функция однозначна, если не оговорено противное.

Пример 7. Функция $y = x^2$ строго монотонна на промежутках 1) $0 \leqslant x < +\infty$ и 2) $-\infty < x \leqslant 0$. В первом случае однозначная обратная для $y = x^2$ функция $x = \sqrt{y}$, а во втором случае $x = -\sqrt{y}$.

Графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $x = g(y)$, очевидно, совпадают. Если аргумент обратной функции обозначить, как это принято, через x, то она запишется в виде $y = g(x)$. В таких обозначениях графики взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$ симметричны друг другу относительно прямой $y = x$. В качестве примера, на рис. 4.3 приведены графики взаимно обратных функций $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ при $x \geqslant 0$.

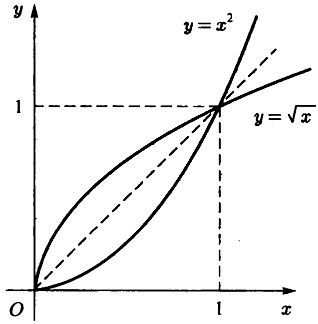


Рис. 4.3

Все функции подразделяются на **элементарные**, и **неэлементарные**. К основным элементарным функциям относятся: **степенная функция** $y = x^a$ (α — любое действительное число), **показательная функция** $y = a^x$, **логарифмическая функция** $y = \log_a x$, **тригонометрические функции, обратные тригонометрические функции, гиперболические функции, обратные гиперболические функции. Элементарными** называют также функции, полученные из основных элементарных функций с помощью четырех арифметических действий (сложения, вычитания, умножения, деления) и составления сложных функций с конечным числом промежуточных аргументов.

4.2. Числовые последовательности

4.2.1. Предел числовой последовательности

Числовой последовательностью (или просто **последовательностью**) называют действительную функцию, определенную на множестве натуральных чисел:

$f(n) = a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Последовательность записывается в виде $\{a_n\}$, или $\{a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots\}$, или $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Числа a_n называются **элементами** (или **членами**) последовательности. Например, последовательность $\{1/n\}$ состоит из элементов $1, 1/2, 1/3, \ldots$. Последовательность $\{a_n\}$ называется **ограниченной сверху (снизу)**, если существует действительное число $M(m)$ такое, что $x_n \leqslant M$ $(x_n \geqslant m)$ для всех n. Последовательность, ограниченная и сверху, и снизу, называется просто **ограниченной**: $m \leqslant x_n \leqslant M$ для всех n. Для ограниченной последовательности $|a_n| \leqslant K$, где K — наибольшее из чисел $|m|$, $|M|$.

Говорят, что последовательность $\{a_n\}$ имеет своим **пределом** число a (**сходится** к a, или **стремится** к a), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ выполняется неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$, т. е. при возрастании номера n элемент a_n неограниченно приближается к a. В этом случае пишут:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a, \quad \text{или} \quad \lim x_n = a, \quad \text{или} \quad x_n \to a.$$

Примечание. Неравенство $|a_n - a| < \varepsilon$ равносильно двум неравенствам $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$.

Последовательность, имеющая (не имеющая) предел, называется **сходящейся** (**расходящейся**). Предел постоянной величины равен самой этой величине.

Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, то он единственный.

Любая сходящаяся последовательность ограничена. Ограниченность последовательности — необходимое, но не достаточное условие сходимости.

Пример 8.

1) Для ограниченной последовательности $\{1/n\}$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty}\{1/n\} = 0$. Действительно, если зададим число $\varepsilon > 0$, то из неравенства
$$\left|\frac{1}{n} - 0\right| = \frac{1}{n} < \varepsilon \tag{1}$$
следует $n > 1/\varepsilon$. Если выбрать число $N > 1/\varepsilon$, то для всех $n > N$ неравенство (1) будет выполняться.

2) Ограниченная последовательность $\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\} = 0, \dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{3}, \ldots$ имеет предел
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n-1}{n} = 1.$$

3) Неограниченная последовательность $\{n\} = 1, 2, 3, \ldots$ является расходящейся (не имеющей предела).

4) Ограниченная последовательность $\{(-1)^n\} = -1, 1, -1, 1, \ldots$ расходится.

5) Ограниченная последовательность $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\} = -1, \dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}, \ldots$ стремится к 0.

Последовательность $\{a_n\}$ называется **неубывающей (невозрастающей)**, если $a_n \leqslant a_{n+1}$ ($a_n \geqslant a_{n+1}$) для всех n. В случае строгого неравенства $a_n < a_{n+1}$ ($a_n > a_{n+1}$) последовательность называется **возрастающей (убывающей)**. Неубывающие и невозрастающие последовательности называются **монотонными последовательностями**. Возрастающие и убывающие последовательности называют **строго монотонными**.

4.2.2. Признаки существования предела

1) Монотонная и ограниченная (с обеих сторон) последовательность имеет предел.
2) Если для элементов трех последовательностей $\{x_n\}, \{y_n\}, \{z_n\}$ выполняются неравенства $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.
3) **Критерий сходимости Коши.** Для существования предела последовательности $\{a_n\}$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число $N(\varepsilon)$ такое, что для всех $n > N$ и $p > 0$ выполнялось
$$|x_n - x_{n+p}| < \varepsilon.$$

4.2.3. Основные свойства сходящихся последовательностей

Пусть для последовательностей $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ существуют пределы $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, тогда:

1) Если $a_n \leqslant b_n$, то $a \leqslant b$.
2) $\lim\limits_{n\to\infty} (\alpha a_n \pm \beta b_n) = \alpha a \pm \beta b$, где α, β — действительные числа.
3) $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = ab$.
4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{a}{b}$ $(b \neq 0)$.
5) $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = |a|$.
6) Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a > 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[m]{a_n} = \sqrt[m]{a}$.

4.2.4. Число e

Последовательность с элементами
$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$
имеет предел
$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \equiv 2{,}718281828\ldots,$$
являющийся иррациональным числом.

4.2.5. Бесконечно малые и бесконечно большие последовательности

Последовательность $\{a_n\}$, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, называется **бесконечно малой**.

Последовательность $\{a_n\}$ называется **бесконечно большой**, если для любого $K > 0$ можно найти номер N такой, что при $n \geqslant N$ **все** элементы последовательности $|a_n| > K$. При этом говорят, что a_n **стремится к бесконечности**, и пишут: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ или $a_n \to \infty$. В частности, возможны случаи: $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$ или $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Например, последовательность $a_n = (-1)^n n$ является бесконечно большой, так как $|a_n| \to +\infty$ при $n \to \infty$. Любая бесконечно большая последовательность неограничена. Неограниченная последовательность может и не быть бесконечно большой. Например, неограниченная последовательность $\{1, 2, 1, 3, \ldots, 1, n, \ldots\}$ не является бесконечно большой, так как не все ее элементы могут превышать любое наперед заданное число $K > 0$.

Произведение $\{a_n b_n\}$ ограниченной последовательности $\{a_n\}$ на бесконечно малую последовательность $\{b_n\}$ является бесконечно малой последовательностью, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n b_n) = 0$.

Если $\{a_n\}$ — ограниченная последовательность, а $\{b_n\}$ — бесконечно большая последовательность, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Если $\{a_n\}$ — бесконечно малая последовательность то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \infty.$$

4.2.6. Неопределенности

Если $a_n \to 0$ и $b_n \to 0$, то выражение a_n/b_n называется **неопределенностью вида** $0/0$. Для $a_n \to \infty$ и $b_n \to \infty$ выражение a_n/b_n называется **неопределенностью вида** ∞/∞. Если $a_n \to 0$, $b_n \to \infty$, то выражение $a_n b_n$ — **неопределенность вида** $0\cdot\infty$. При $a_n \to +\infty$, $b_n \to +\infty$ (или $a_n \to -\infty$, $b_n \to -\infty$) выражение $a_n - b_n$ называется **неопределенностью вида** $\infty - \infty$. Нахождение соответствующего предела (если он существует) называется **раскрытием неопределенности**.

Пример 9.

1) Если $a_n = \dfrac{1}{n^2}$, $b_n = \dfrac{1}{n}$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$; $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} n = \infty$ (неопределенность $0/0$).

2) Если $a_n = n$, $b = \dfrac{1}{n^2}$, то $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n} = 0$ (неопределенность $\infty\cdot 0$ или ∞/∞).

3) Если $a_n = \sqrt{n}$, $b_n = \sqrt{n-1}$, то

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}} = 0$$

(неопределенность $\infty - \infty$).

4.2.7. Предельная точка последовательности

Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ — некоторая числовая последовательность. Возьмем произвольную возрастающую последовательность натуральных чисел $1 \leqslant p_1 < p_2 < \dots$ и выберем из последовательности $\{a_n\}$ элементы с номерами $p_1, p_2, \dots$, тогда последовательность $a_{p_1}, a_{p_2}, \dots$ называется **подпоследовательностью** последовательности $\{a_n\}$. Если последовательность $\{a_n\}$ сходится и имеет конечный предел a (или ∞), то любая ее подпоследовательность также сходится и имеет предел a (или ∞).

Конечное число c (или ∞) называется **предельной точкой (частичным пределом)** последовательности $\{a_n\}$, если существует такая ее подпоследовательность $\{a_{p_n}\}$, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_{p_n} = c$.

В любой окрестности предельной точки имеется бесконечное множество элементов последовательности $\{a_n\}$.

Любая ограниченная последовательность имеет хотя бы один конечный частичный предел (**теорема Больцано—Вейерштрасса**). Или иначе: из любой ограниченной последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторому числу. Если этот частичный предел единственный, то он и является конечным пределом последовательности.

Любая последовательность (ограниченная или нет) имеет частичные пределы (конечные, или $+\infty$, или $-\infty$). Наименьший частичный предел (конечный или бесконечный) последовательности $\{a_n\}$ называется **нижним пределом последовательности** и обозначается $\varliminf a_n$. Наибольший частичный предел называется **верхним пределом последовательности**: $\varlimsup a_n$. Если последовательность не ограничена снизу, то $\varliminf a_n = -\infty$, если не ограничена сверху, то $\varlimsup a_n = +\infty$. Равенство нижнего и верхнего пределов является необходимым и достаточным условием существования обычного предела (конечного или бесконечного) последовательности $\{a_n\}$, при этом $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \varliminf a_n = \varlimsup a_n$.

Пример 10.

1) Ограниченная последовательность

$$\{a_n\} = 1; 3; \frac{1}{2}; 3; \frac{1}{3}; 3; \frac{1}{4}; \dots; \frac{1}{n}; 3; \dots$$

имеет две предельные точки 0 и 3. Для подпоследовательности $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \ldots$ предел равен 0, а для подпоследовательности $3; 3; \ldots$ предел равен 3. При этом $\underline{\lim}\, a_n = 0$, $\overline{\lim}\, a_n = 3$. Нижний и верхний пределы не равны, следовательно, данная последовательность расходится.

2) Последовательность $\{a_n\} = 1; -1; 1; -1; \ldots$ имеет $\underline{\lim}\, a_n = -1$, $\overline{\lim}\, a_n = 1$ и является расходящейся.

3) Для последовательности

$$\{a_n\} = \frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{3}{4}; \frac{1}{8}; \frac{7}{8}; \ldots; \frac{1}{2^n}; \frac{2^n - 1}{2^n}; \ldots$$

имеем $\underline{\lim}\, a_n = 0$, $\overline{\lim}\, a_n = 1$. Последовательность расходится.

4.3. Предел функции

4.3.1. Определение предела

Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве $X = \{x\}$ и пусть точка $x = a$ такая, что она либо принадлежит множеству X, либо не принадлежит, но обладает тем свойством, что в любой ее ε-окрестности $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$ содержатся точки множества X, отличные от a. Такой точкой является, например, один из концов интервала.

Число A называется **пределом (предельным значением)** функции $y = f(x)$ в точке $x = a$, если для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех x, для которых $0 < |x - a| < \delta$, выполняется неравенство

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

Запись: $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ или $f(x) \to A$ $(x \to a)$.

Используется также другое определение предела.

Число A называется **пределом** функции $f(x)$ в точке a, если для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ значений x (все $x_n \neq a$) соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к A, т. е. по мере приближения x к a (при этом $x \neq a$) справа или слева, значение $f(x)$ неограниченно приближается к A.

Если функция $f(x)$ имеет в точке $x = a$ некоторое предельное значение, то оно в этой точке единственно, так как последовательность $\{f(x_n)\}$ может иметь только один предел.

Пределом постоянной величины называется сама эта величина.

Пример 11.

1) Для функции $y = x^2$ имеем $\lim\limits_{x \to 2} x^2 = 4$. Здесь функция определена при $x = 2$.

2) Функция $y = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ определена для всех $x \neq 1$. Сокращая дробь на $x-1$, так как $x \neq 1$, получим

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1} = \lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = \lim_{x\to 1}(x+1) = 2.$$

3) Функция $y = \cos(1/x)$, определенная при всех $x \neq 0$, не имеет предела при $x \to 0$, так как ее значения изменяются от -1 до $+1$, совершая бесчисленные колебания при $x \to 0$, не стремясь при этом ни к какому определенному числу.

Следующие два предела называются **замечательными**:

1) $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1;$

2) $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$

где иррациональное число $e = 2{,}718281828\ldots$ является, в частности, основанием **натуральных логарифмов**.

4.3.2. Критерий Коши существования конечного предела функции

Для того чтобы существовал конечный предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, как только $0 < |x_1 - a| < \delta$ и $0 < |x_2 - a| < \delta$, где x_1, x_2 — любые точки из области определения функции $f(x)$. При этом $f(x)$ не обязательно определена при $x = a$.

4.3.3. Односторонние пределы

Число A_1 называется **пределом слева** функции $f(x)$ в точке a, если она определена на некотором полуинтервале $[b; a)$ и существует предел $\lim\limits_{x_n\to a} f(x_n) = A_1$ для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, при условии $x_n < a$. Обозначения:

$$A_1 = \lim_{x\to a-0} f(x) \equiv f(a-0) \equiv \lim_{\substack{a\to a\\ x<a}} f(x).$$

Аналогично, число A_2 называется **пределом справа** функции $f(x)$ в точке a, если она определена на некотором полуинтервале $(a; c]$ и существует предел $\lim\limits_{x_n\to a} f(x_n) = A_2$ для любой сходящейся к a последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, при условии $x_n > a$. Обозначения:

$$A_2 = \lim_{x\to a+0} f(x) \equiv f(a+0) \equiv \lim_{\substack{a\to a\\ x>a}} f(x).$$

Для существования обычного предела функции $f(x)$ в точки a необходимо и достаточно равенство пределов слева и справа в этой точке. При этом

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x).$$

Пример 12. Для функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ (см. пример 4) имеем:

$$f(-0) = \lim_{x \to -0} f(x) = -1, \quad f(+0) = \lim_{x \to +0} f(x) = 1.$$

Число A называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$), если для любой бесконечно большой последовательности $\{x_n\}$ значений аргумента, все элементы которой, начиная с некоторого номера, положительны (или отрицательны), соответствующая последовательность значений функции $\{f(x_n)\}$ сходится к A. Запись:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \quad \Big(\text{или} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = A\Big).$$

Например, для функции $f(x) = \dfrac{1}{x}$ имеем $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x} = 0$.

4.3.4. Бесконечно малые и бесконечно большие функции

Если функция $f(x) \to 0$ при $x \to a$, где a — некоторое число, или $+\infty$, или $-\infty$, то она называется **бесконечно малой функцией** при $x \to a$ (или в точке $x = a$). Например, функция $f(x) = x^2 - 1$ является бесконечно малой при $x \to 1$ (в точке $x = 1$) и $x \to -1$ (в точке $x = -1$).

Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, то функция $\alpha(x) = f(x) - A$ является бесконечно малой при $x \to a$ (в точке $x = a$).

Функцию $f(x)$ называют **бесконечно большой функцией** при $x \to a$, где a — число, или $+\infty$, или $-\infty$, и пишут $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ (или $f(x) \to \infty$ при $x \to a$), если $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой этой точки, и для всякого числа $M > 0$ справедливо неравенство $|f(x)| > M$, как только $0 < |x - a| < \delta(M)$. Абсолютное значение $|f(x)|$ при этом неограниченно возрастает при $x \to a$ как слева, так и справа. Если при этом в некоторой окрестности точки a выполняется $f(x) > 0$ (или $f(x) < 0$), то пишут

$$\lim_{x \to a} f(x) = +\infty \quad \Big(\lim_{x \to a} f(x) = -\infty\Big).$$

Аналогично определяются бесконечно большие функции при $x \to +\infty$ и $x \to -\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = \infty, \quad \lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty.$$

Используется также понятие бесконечно большой функции, связанное с односторонними пределами:

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = +\infty,$$
$$\lim_{x\to a-0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = -\infty.$$

Если функция $f(x)$ — бесконечно малая при $x \to a$ и $f(x) \neq 0$ при $x \neq a$, то функция $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$ — бесконечно большая при $x \to a$. Если $g(x)$ — бесконечно большая при $x \to a$, то $f(x) = \dfrac{1}{g(x)}$ — бесконечно малая при $x \to a$. Например, $f(x) = x - 1$ — бесконечно малая при $x \to 1$, а функция $g(x) = \dfrac{1}{x-1}$ — бесконечно большая при $x \to 1$.

Пример 13.

1) $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ — бесконечно большая функция при $x \to 0$.
2) $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$ — бесконечно большая, т. е. $|f(x)| \to \infty$ при $x \to 1$. При этом $f(x) \to -\infty$ при $x \to 1$ слева ($x < 1$), $f(x) \to +\infty$ при $x \to 1$ справа ($x > 1$).

4.3.5. Действия над пределами

Если существуют пределы $\lim f(x) = A$ и $\lim g(x) = B$ при $x \to a$ (или $x \to \pm\infty$, или $x \to a \pm 0$), то

1) для любых чисел α и β $\lim[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha A + \beta B$;
2) $\lim f(x)g(x) = AB$;
3) $\lim \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$ $(B \neq 0)$.

Равенства 1) и 2) применимы к любому числу функций.

При вычислении пределов функций могут быть использованы следующие пределы:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{y\to 0}(1+y)^{1/y} = e,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1, \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1,$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a, \qquad \lim_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x} = 0 \quad (a > 0,\ a \neq 1),$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^a - 1}{x} = a, \quad \lim_{x\to+\infty}\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}.$$

Пример 14. $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3x^2+5x-2}{-x^2+6x+16}=$ {разложим числитель и знаменатель на множители, решая соответствующие квадратные уравнения} $=\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{3(x+2)\left(x+\frac{1}{3}\right)}{-(x+2)(x-8)}=$ {сократим дробь на $x+2$, так как $x\neq-2$, и положим после сокращения дроби $x\to-2$} $=\dfrac{3\left(-2+\frac{1}{3}\right)}{-2-8}=\dfrac{1}{2}$.

Пример 15. $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3x^2-2x+1}{2x^2+x}=$ {разделим числитель и знаменатель на x^2} $=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}}{2+\frac{1}{x}}=\dfrac{3-0+0}{2+0}=\dfrac{3}{2}$.

Пример 16. $\lim\limits_{x\to2}=\dfrac{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}{x^2-3x+2}=$ {разложим знаменатель на множители, решив квадратное уравнение, а также умножим числитель и знаменатель дроби на $\sqrt{5-x}+$ $+\sqrt{x+1}$} $=\lim\limits_{x\to2}\dfrac{-2(x-2)}{(x-2)(x-1)(\sqrt{5-x}+\sqrt{x+1})}=$ {сократим дробь на $x-2$ и примем затем $x=2$, так как $x\to2$} $=-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Пример 17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin 3x}{5x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3(\sin 3x)}{5(3x)}=\{3x\equiv y\}=\lim\limits_{y\to0}\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{\sin y}{y}=\dfrac{3}{5}\cdot1=\dfrac{3}{5}$.

Пример 18. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}\cdot3}=\left\{\dfrac{x}{3}\equiv y\right\}=\lim\limits_{y\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^y\right]^3=e^3$.

Другие приемы вычисления пределов с использованием **правила Лопиталя** и **формулы Тейлора** приведены в 5.7 и 5.8.

4.4. Асимптотические соотношения между функциями

Пусть $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ — две функции, определенные в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой этой точки (точки a может быть конечной, или $+\infty$, или $-\infty$), тогда:

1) Если существует число $A>0$ такое, что $0<\left|\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}\right|<A$ при $x\to a$, то говорят, что $\alpha(x)$ — функция **не высшего порядка малости,** чем $\beta(x)$

при $x \to a$, и пишут $\alpha(x) = O[\beta(x)]$ при $x \to a$. Читается: $\alpha(x)$ равно O большое от $\beta(x)$ при $x \to a$.

2) Если существует конечный предел

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A \neq 0 \quad (\beta(x) \neq 0 \text{ при } x \to a \text{ и } x \neq a),$$

то говорят, что функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ имеют **одинаковый порядок малости** при $x \to a$. Запись: $\alpha(x) = O^*[\beta(x)]$ при $x \to a$. При этом заведомо $\alpha(x) = O[\beta(x)]$ при $x \to a$.

3) Если предел $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 1$ ($\beta(x) \neq 0$ при $x \to a$ и $x \neq a$), то функции $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ называются **эквивалентными** (или **асимптотически равными**) при $x \to a$. Запись: $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$.

4) Если предел $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)} = 0$ ($\beta(x) \neq 0$ при $x \to a$ и $x \neq a$), то говорят, что функция $\alpha(x)$ имеет **более высокий порядок малости**, чем $\beta(x)$, при $x \to a$. Запись: $\alpha(x) = o[\beta(x)]$ при $x \to a$. Читается: $\alpha(x)$ равно o малое от $\beta(x)$ при $x \to a$.

Если $\alpha(x) = o[\beta(x)]$ при $x \to a$, то $\alpha(x) = \varepsilon(x) \cdot \beta(x)$, где $\varepsilon(x) \to 0$ при $x \to a$.

При $x \to 0$:

$$\sin x \sim x, \quad \ln(1+x) \sim x, \quad e^x - 1 \sim x, \quad \operatorname{tg} x \sim x,$$

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}, \quad \sqrt[n]{1+x} - 1 \sim \frac{x}{n}.$$

При вычислении пределов отношение двух функций можно заменять отношением эквивалентных функций.

Если $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\alpha(x)}{x^m} = A \neq 0$ $(m > 0)$, то $\alpha(x)$ называют **бесконечно малой порядка** m при $x \to 0$.

Если $\lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{\alpha(x)}{x^m} = A \neq 0$ $(m > 0)$, то $\alpha(x)$ называют **бесконечно большой порядка** m при $x \to +\infty$.

Показательная функция стремится к бесконечности при $x \to +\infty$ быстрее любой степени x^m, т. е.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^m} = +\infty.$$

Если $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\alpha(x)}{e^x} = A \neq 0$, то $\alpha(x)$ называется **бесконечно большой экспоненциального порядка** при $x \to +\infty$.

Если $\alpha(x) \sim \beta(x)$ при $x \to a$, то

$$\frac{\beta(x) - \alpha(x)}{\beta(x)} \to 0 \quad \text{при } x \to a,$$

т. е. $\beta(x) - \alpha(x) = o[\beta(x)]$.

Для обозначения бесконечно малой при $x \to a$ функции $\alpha(x)$ используется выражение $\alpha(x) = o(1)$ при $x \to a$. Например, $\alpha(x) \equiv e^{-x} = o(1)$ при $x \to +\infty$.

Пример 19.

1) $x^2 = o(x)$ при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{x} = 0$.
2) $1 - \cos x = o(x)$ при $x \to 0$,так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{x} = 0$.
3) $\operatorname{tg} x \sim x$ при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x}{x} = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}\right) = 1$.
4) $\sin x = O^*(x)$ при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1 \neq 0$; при этом также $\sin x = O(x)$ при $x \to 0$.
5) $x^2 + 2x = O(x)$ при $x \to 0$, так как $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+2x}{x} = 2 \neq 0$.
6) $3x^2 - x + 1 = O(x^2)$ при $x \to +\infty$, так как $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{3x^2 - x + 1}{x^2} = 3 \neq 0$.
7) $x^3 + x^2 \cos x \sim x^3$ при $x \to +\infty$, так как $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 + x^2\cos x}{x^3} = 1$.

4.5. Непрерывность функций

Функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки $x = x_0$, в том числе в самой точке x_0, называется **непрерывной** в точке x_0 (при $x = x_0$), если предел этой функции при $x \to x_0$ существует и равен значению функции в точке x_0:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0), \tag{4.1}$$

т. е. для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ такое, что при $|x - x_0| < \delta$ для всех x из области определения функции выполняется неравенство $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$. Равенство (4.1) можно записать также в виде $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to x_0} x\right)$, т. е. **можно переходить к пределу под знаком непрерывной функции**.

Вводя **приращение аргумента** $\Delta x = x - x_0$ и **приращение непрерывной функции** $f(x)$ в точке x_0, равное $\Delta y \equiv \Delta f = f(x) - f(x_0)$ (рис. 4.4), можно

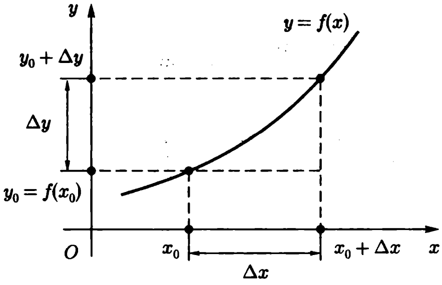


Рис. 4.4

записать

$$\lim_{\Delta x \to 0} \left[f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\right] = \lim_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0. \tag{4.2}$$

Следовательно, функция $y = f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки $x = x_0$, **непрерывна** в точке x_0, если в этой точке приращение Δy функции, соответствующее приращению аргумента Δx, является бесконечно малым при $\Delta x \to 0$. При этом любому сколь угодно малому приращению Δx соответствует также малое приращение Δy. График непрерывной в окрестности точки x_0 функции является отрезком непрерывной (сплошной) линии.

Пример 20.

1) Функция $y = C$ (C — постоянная) непрерывна в любой точке x_0, так как приращение функции $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = C - C = 0$ при любых x_0 и Δx. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.
2) Функция $y = x$ непрерывна в любой точке x_0, так как $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = (x_0 + \Delta x) - x_0 = \Delta x$. Следовательно, $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta x = 0$.
3) Функция $y = x^2$ непрерывна в любой точке x_0, так как $\Delta y = (x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2 = 2x_0\Delta x + (\Delta x)^2$ и $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.
4) Функция $y = 1/x$ непрерывна в любой точке $x_0 \neq 0$ и не является непрерывной в точке $x_0 = 0$.

Функция $f(x)$ называется **непрерывной слева (справа) (справа)** в точке x_0, если в этой точке предел слева (справа) существует и равен значению $f(x_0)$:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0) \quad \left[\lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0)\right].$$

Если функция непрерывна в некоторой точке и слева, и справа, то она просто непрерывна в этой точке. Функция $f(x)$ называется **непрерывной**

на данном множестве точек (интервале, отрезке и т. п.), если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Сумма, разность, произведение, а также отношение непрерывных функций (когда делитель не равен нулю) являются непрерывными функциями.

Если функция $u = u(x)$ непрерывна в точке x_0, а функция $y = f(u)$ непрерывна в точке $u_0 = u(x_0)$, то сложная функция $y = f(u(x)) = F(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$.

В частности, полином любой степени непрерывен во всех точках числовой оси. Отношение двух полиномов (т. е. дробно-рациональная функция) непрерывно в любой точке числовой оси, в которой знаменатель не равен нулю.

4.6. Точки разрыва функции и их классификация

Точка x_0, в которой функция не является непрерывной (иначе говоря, **разрывна**), называется **точкой разрыва** функции. В такой точке x_0 равенства (4.1) и (4.2) не выполняются: а) либо не существует $f(x_0)$, т. е. функция не определена при $x = x_0$; б) либо не существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$; в) либо обе части формулы (4.1) имеют смысл, но не равны друг другу.

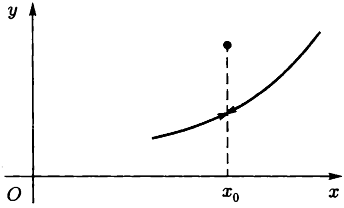


Рис. 4.5

1. Устранимый разрыв. Точка x_0 называется **точкой устранимого разрыва** функции $f(x)$, если в этой точке существует конечные односторонние пределы, равные друг другу

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = A,$$

но при этом функция либо не определена в точке x_0, либо ее значение $f(x_0)$ не равно предельному значению A в этой точке. Разрыв такого типа можно устранить, если принять значение функции при $x = x_0$ равным ее предельному значению в этой точке: $f(x_0) = A$. На рис. 4.5 изображен график функции, имеющей устранимый разрыв в точке $x = x_0$. Конец стрелки указывает на исключенную из графика точку.

2. Разрыв первого рода (конечный разрыв). Точка x_0 называется **точкой разрыва первого рода**, если в этой точке функция имеет конечные, но не равные друг другу односторонние пределы:

$$\lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \quad \big(\text{т. е.} \quad f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)\big).$$

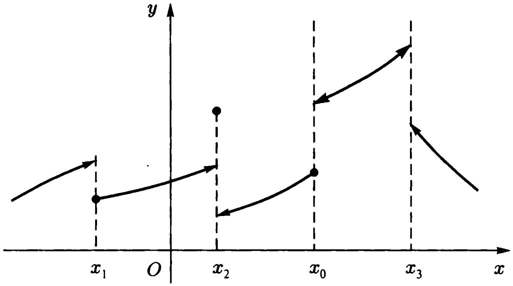


Рис. 4.6

На рис. 4.6 приведен график функции, непрерывной слева в точке разрыва первого рода x_0 и разрывной справа, а также имеющей разрывы первого рода в точках x_1, x_2, x_3.

Величина $|f(x_0+0) - f(x_0-0)|$ называется **скачком функции**.

Пример 21. Для функции $f(x) = \operatorname{sgn} x$ (см. пример 12) скачок в точке разрыва первого рода $x = 0$ равен $|f(+0) - f(-0)| = 2$. Эта функция разрывна и слева, и справа в точке $x = 0$, а ее значения $y = 0$ в точке $x = 0$ не равно ни левому, ни правому пределу.

3. **Разрыв второго рода.** Точка x_0 называется **точкой разрыва второго рода**, если в этой точке не существует левого или правого предела, или не существуют оба эти предела, или же хотя бы один из этих пределов бесконечен.

Пример 22. Функция $y = 1/x$ (рис. 4.7) имеет в точке $x = 0$ разрыв второго рода, так как

$$\lim_{x\to -0} y = -\infty, \quad \lim_{x\to +0} y = +\infty.$$

В этом случае говорят также, что функция имеет **бесконечный разрыв** в точке $x = 0$.

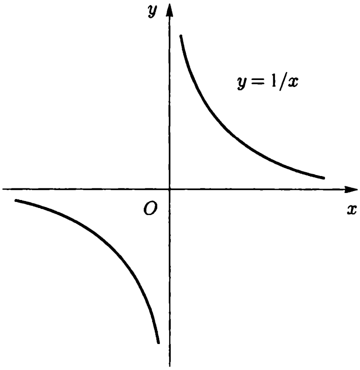


Рис. 4.7

На рис. 4.8 приведен график функции, имеющей бесконечные разрывы в точках x_1, x_2, x_3.

Функция $f(x)$ называется **кусочно непрерывной** на отрезке $[a; b]$, если она имеет односторонние пределы в точках a и b и непрерывна

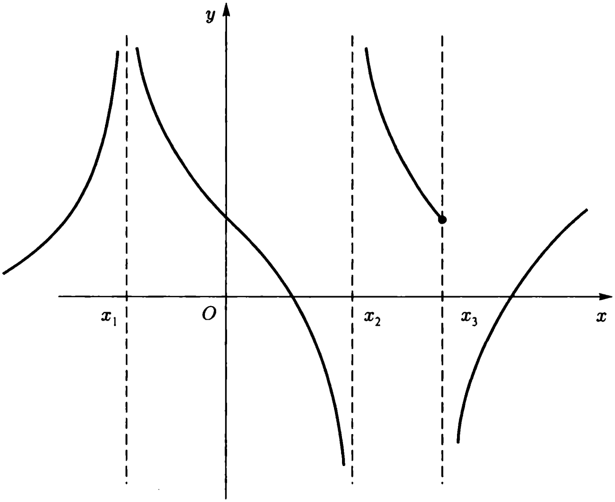


Рис. 4.8

во всех точках интервала $(a; b)$ за исключением конечного числа точек разрыва первого рода.

4.7. Свойства функций, непрерывных на отрезке

Функции, непрерывные на отрезке $[a; b]$, т. е. непрерывные в интервале $(a; b)$ и непрерывные справа в точке a и слева в точке b, обладают следующими свойствами.

1. Если функция $f(x)$ непрерывна на конечном отрезке $[a; b]$, то:

1) $f(x)$ ограничена на этом отрезке.
2) Существует минимум m и максимум M функции на $[a; b]$ (**теорема Вейерштрасса**).
3) Если числа $f(a) \neq 0$ и $f(b) \neq 0$ и имеют разные знаки, то в интервале $(a; b)$ существует хотя бы одна точка x_0, в которой $f(x_0) = 0$.
4) Если $f(a) \neq f(b)$, то функция принимает все промежуточные значения между $f(a)$ и $f(b)$ (**теорема Коши**).

5) Если m и M $(m < M)$ соответственно минимум и максимум $f(x)$ на $[a; b]$ и C — некоторое число, такое, что $m < C < M$, то в интервале $(a; b)$ существует точка x_0, в которой $f(x_0) = C$.

2. Если функция $y = f(x)$ непрерывна и строго возрастает (или убывает) на отрезке $[a; b]$ и имеет значения $A = f(a)$, $B = f(b)$, то на отрезке $[A; B]$ (или $[B; A]$) существует однозначная непрерывная строго возрастающая (или убывающая) обратная к $y = f(x)$ функция $y = g(x)$ (см. 4.1.3).

Пример 23. Функция $y = f(x) \equiv x^2$ непрерывна и строго возрастает на любом отрезке $[a; b]$, принадлежащем промежутку $[0; +\infty)$. На любом отрезке $[a^2; b^2]$ существует однозначная строго возрастающая обратная функция $y = g(x) \equiv \sqrt{x}$.

3. Функция $f(x)$ называется **равномерно непрерывной** на данном множестве $X = \{x\}$ (отрезке, интервале, полуинтервале и т. п.), если она определена на X и для всякого числа $\varepsilon > 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$, зависящее только от ε, такое, что $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$ для любых x_1, x_2, принадлежащих X и удовлетворяющих неравенству $|x_1 - x_2| < \delta$.

Если функция $f(x)$ равномерно непрерывна на X, то она и просто непрерывна на X.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$, то она равномерно непрерывна на нем (**теорема Кантора**).

Пример 24. Функция $f(x) = 1/x$ непрерывна в интервале $(0; 1)$, но не является равномерно непрерывной в этом интервале.

Глава 5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

5.1. Производная и ее геометрический смысл

5.1.1. Определение производной

Пусть $y = y(x) \equiv f(x)$ — функция, определенная в некоторой окрестности фиксированной точки x, в том числе в самой этой точке. Дадим аргументу x **приращение** Δx любого знака, такое, что новое его значение $x_1 = x + \Delta x$ также принадлежит этой окрестности. Тогда **приращение** Δy функции в точке x, соответствующее приращению аргумента Δx, равно

$$\Delta y \equiv \Delta f = f(x_1) - f(x) = f(x + \Delta x) - f(x).$$

Производной от функции $f(x)$ по x в данной фиксированной точке x называется предел (если он существует) отношения приращения функции Δy к соответствующему приращению аргумента Δx, когда Δx неограниченно стремится к нулю. Обозначения производной:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv y' \equiv y'_x \equiv \frac{dy}{dx} \equiv \frac{df(x)}{dx} \equiv f'(x). \quad (5.1)$$

Производная является мерой скорости изменения величины y относительно величины x. Функция называется **дифференцируемой** в некоторой точке x, если в этой точке существует ее конечная производная. Функция, дифференцируемая в некоторой точке, непрерывна в этой точке. Обратное утверждение в общем случае неверно. Действие нахождения производной от функции $f(x)$ называется **дифференцированием** функции по x. Если функция $y = f(x)$ определена в интервале $(a; b)$ и в каждой точке этого интервала имеет производную, то эта производная также является функцией от x, определенной в интервале $(a; b)$.

Пример 1. Найти производную от функции $y = x^2$ в точке x.

Решение. Задавая приращение Δx аргумента x, найдем соответствующее приращение функции $\Delta y = (x + \Delta x)^2 - x^2 = 2x\Delta x + (\Delta x)^2$. По определению производной:

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}(2x + \Delta x) = 2x. \qquad \triangleright$$

5.1.2. Геометрический смысл производной

Пусть подвижная точка $M_1(x_1, f(x_1))$ на графике непрерывной в интервале $(a; b)$ функции $y = f(x)$ (рис. 5.1) неограниченно приближается по графику к фиксированной точке $M(x, f(x))$ на графике (при этом $x_1 \to x$ или $\Delta x \to 0$). Тогда, в общем случае, будет изменятся угол между **направленной секущей** $\overline{MM_1}$ (т. е. прямой, проходящей через точки M, M_1 и направленной в сторону возрастания x) и положительным направлением оси Ox. Предельное положение (направленной) секущей при неограниченном приближении точки M_1 к точке M называется **(направленной) касательной** MT к графику функции в точке M. Производная $f'(x)$ (если она существует) в точке x равна тангенсу угла $\alpha(x)$ наклона касательной к положительной полуоси Ox, называемому угловым коэффициентом $k(x)$ касательной, т. е. $k(x) = \operatorname{tg} \alpha(x) = f'(x)$. При этом $-\pi/2 < \alpha < \pi/2$. Уравнение касательной к кривой $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0) \quad (y_0 = f(x_0)).$$

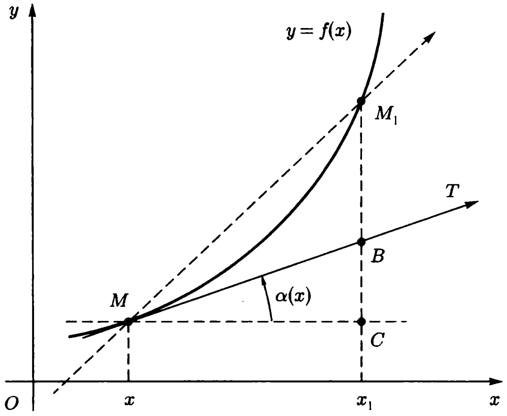


Рис. 5.1

5.1.3. Левая и правая производная

Левой (или **правой**) **производной** функции $f(x)$ в точке x называется левое (или правое) предельное значение отношения $\Delta y/\Delta x$ при $\Delta x \to 0$, т. е.

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x<0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv f'(x-0) \equiv f'_-(x) \quad \left(\text{или} \quad \lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta x>0}} \frac{\Delta y}{\Delta x} \equiv f'(x+0) \equiv f'_+(x)\right).$$

Левой (правой) производной от $f(x)$ в точке x соответствует **левая** MT_- (**правая** MT_+) **касательная** к графику $y = f(x)$ в точке $M(x, y)$, имеющая угловой коэффициент $f'_-(x)$ (или $f'_+(x)$).

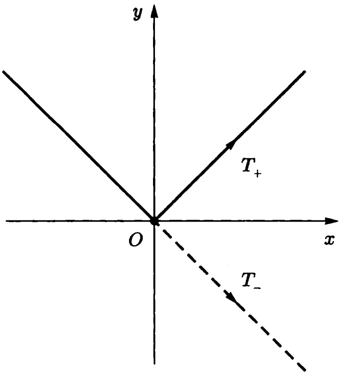


Рис. 5.2

Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x, то она имеет левую и правую производные и

$$f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x).$$

Если функция $f(x)$ имеет в точке x левую и правую производные и они равны, то $f(x)$ имеет в точке x обычную производную:

$$f'_-(x) = f'_+(x) = f'(x).$$

Если левая и правая производные существуют в точке x, но не равны друг другу, то обычная производная в точке x не существует.

Пример 2. Функция $f(x) = |x|$ имеет в точке $x = 0$ правую производную $f'_+(0) = 1$ и левую производную $f'_-(0) = -1$, но не имеет в точке $x = 0$ обычной производной. Такие точки графика, в которых левая и правая производные не равны, называются **угловыми**. Левая и правая касательные к графику в угловой точке $O(0; 0)$ обозначены OT_- и OT_+ (рис. 5.2). Обычная касательная в точке $O(0; 0)$ не существует.

5.1.4. Основные правила дифференцирования

Если функции $u(x), v(x), w(x)$ имеют производные в точке x и C — постоянная величина (число), то:

1) $C' = 0$.
2) $(Cu)' = Cu'$.
3) $(u + v - w)' = u' + v' - w'$.
4) $(uv)' = u'v + uv'$.
5) $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

6) $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$ (α — любое число).

7) $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$.

8) **Правило дифференцирования сложной функции.** Если функции $y = f(u)$ и $u = u(x)$ имеют производные, то

$$y'_x = f'(u) \cdot u'(x) \equiv y'_u \cdot u'_x \quad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du}\frac{du}{dx}\right).$$

Здесь индексы у производных показывают, по какой переменной производится дифференцирование.

9) **Логарифмическая производная.** Выражение

$$[\ln f(x)]' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

называется **логарифмической производной** от $f(x)$. Если $f(x) = u(x)^{v(x)}$ $(u > 0)$, то $\ln f(x) = v(x) \ln u(x)$. Отсюда следует:

$$f'(x) = (u^v)' = u^v\left(v' \ln u + u'\frac{v}{u}\right).$$

5.1.5. Производные основных элементарных функций

1) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α — любое действительное число), $x' = 1$, $(x^2)' = 2x$, $(\sqrt{x})' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

2) $(e^x)' = e^x$.

3) $(a^x)' = a^x \ln a \quad (0 < a \neq 1)$.

4) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

5) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a} \quad (x > 0,\ 0 < a \neq 1)$.

6) $(\sin x)' = \cos x$.

7) $(\cos x)' = -\sin x$.

8) $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$.

9) $(\operatorname{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$.

10) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (-1 < x < 1)$.

11) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1)$.

12) $(\operatorname{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$.

13) $(\operatorname{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

14) $(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x$.

15) $(\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x$.

16) $(\operatorname{th} x)' = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$.

17) $(\operatorname{cth} x)' = -\dfrac{1}{\operatorname{sh}^2 x} \quad (x \neq 0)$.

18) $(x^x)' = x^x(1 + \ln x) \quad (x > 0)$.

Пример 3. Найти производные сложных функций:

1) $y = \cos x^2$, $y'_x = \{y = \cos u,\ u = x^2\} = y'_u u'_x = -(\sin u)2x = -2x \sin x^2$;
2) $y = e^{\cos x}$, $y'_x = \{y = e^u,\ u = \cos x\} = y'_u u'_x = -e^u \sin x = -e^{\cos x} \sin x$;
3) $y = \cos(x^2-3x+1)$, $y'_x = \{y = \cos u,\ u = x^2-3x+1\} = y'_u u'_x = -(\sin u)(2x-3) =$ $= -(2x-3)\sin(x^2-3x+1)$.

5.1.6. Бесконечная производная

Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x и

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = +\infty \quad (\text{или} -\infty),$$

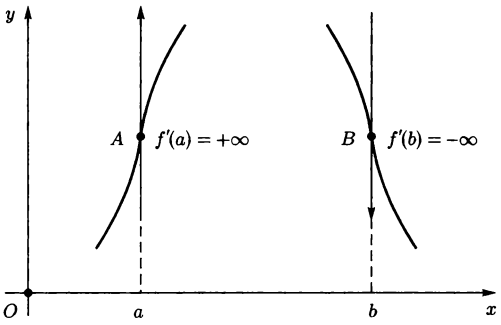


Рис. 5.3

то говорят, что в точке x функция $f(x)$ имеет **бесконечную производную**. При этом касательная к графику функции $y = f(x)$ параллельна оси Oy (рис. 5.3).

5.1.7. Дифференцирование неявных функций

Пусть дифференцируемая функция $y(x)$ задана в неявном виде $F(x, y) = 0$. Производная $y'(x)$ может быть найдена из равенства $F(x, y(x))'_x = 0$, в котором $F(x, y)$ рассматривается как сложная функция от x.

Пример 4. Найти производную y' функции $y(x)$, заданной неявно:

$$F(x, y) \equiv x^2 + 2xy - y^2 - 2x = 0.$$

Решение. Дифференцируя по x соотношение $F(x,y)=0$, в котором $y=y(x)$, получим

$$2x + 2y + 2xy' - 2yy' - 2 = 0,$$

откуда

$$y' = \frac{1 - x - y}{x - y}.$$

Аналогично находятся производные высших порядков, путем многократного дифференцирования равенства $F(x, y) = 0$ по x. ▷

5.2. Дифференциал функции

1. Пусть функция $f(x)$ от независимой переменной x определена в некоторой окрестности точки x. Если приращение Δy этой функции в точке x, связанное с приращением Δx, может быть представлено в виде

$$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = A(x)\Delta x + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x, \tag{5.2}$$

где $A(x)$ не зависит от Δx, $\alpha(\Delta x)$ — бесконечно малая функция аргумента Δx $[\alpha(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0]$, то главная линейная относительно Δx часть приращения Δy (при $A \neq 0$) называется **дифференциалом** dy функции $f(x)$ в точке x:

$$dy \equiv df = A(x)\Delta x. \tag{5.3}$$

Если $A(x) = 0$, то слагаемое $A \cdot \Delta x$ перестает быть главной частью приращения Δy, однако и в этом случае дифференциал определяется по формуле (5.3), при этом $dy = 0$.

2. Геометрически дифференциал функции $f(x)$ в точке x, соответствующий приращению Δx, представляет собой приращение $dy = CB$ (рис. 5.1) ординаты y касательной к графику функции, а приращение $\Delta y = CM_1$ является приращением ординаты графика функции $y = f(x)$.

Для существования дифференциала функции $f(x)$ необходимо и достаточно, чтобы она имела конечную производную (т. е. являлась бы дифференцируемой), при этом

$$dy = y'\Delta x \equiv f'(x)\Delta x.$$

Если $y = f(x) \equiv x$, то $dy = dx = \Delta x$, т. е. дифференциал и приращение независимой переменной равны между собой. Следовательно, $dy = f'(x)\,dx$. На основании этого производная может быть записана в виде отношения дифференциала dy функции к дифференциалу независимой переменной x, т. е.

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx}.$$

3. Для дифференцируемых функций $u(x)$ и $v(x)$ справедливы формулы:

1) $d(u \pm v) = du \pm dv$,
2) $d(uv) = u\,dv + v\,du$,
3) $d(cu) = c\,du$ (c — число),
4) $d\left(\dfrac{u}{v}\right) = \dfrac{v\,du - u\,dv}{v^2}$ $(v \neq 0)$.

4. Приращение дифференцируемой в точке x функции $f(x)$ можно на основании (5.2) записать в виде

$$\Delta y = dy + o(\Delta x).$$

Следовательно, при достаточно малом Δx справедлива приближенная формула

$$\Delta y \approx dy \quad \text{или} \quad f(x + \Delta x) \approx f(x) + f'(x)\Delta x, \tag{5.4}$$

которая широко используется в приближенных вычислениях. Относительная погрешность формулы (5.4) может быть сделана сколь угодно малой для достаточно малого Δx, при условии $f'(x) \neq 0$.

В частности, согласно формуле (5.4):

1) для $f(x) = \sin x$ при $x = 0$ имеем $\sin\Delta x \approx \Delta x$;
2) если $f(x) = e^x$ и $x = 0$, то $e^{\Delta x} \approx 1 + \Delta x$;
3) для $f(x) = (1 + x)^\alpha$ (α — любое действительное число) и $x = 0$ имеем $(1 + \Delta x)^\alpha \approx 1 + \alpha\Delta x$;
4) если $f(x) = \ln(1 + x)$ и $x = 0$, то $\ln(1 + \Delta x) \approx \Delta x$.

5.3. Производная обратной функции

Если функция $y = f(x)$ в интервале $(a; b)$ непрерывна, строго возрастает (или убывает) и имеет конечную производную $f'(x) \neq 0$, то обратная для $f(x)$

функция $x = g(y)$ также имеет производную и

$$g'(y) = \frac{1}{f'(x)} \quad \text{или} \quad x'_y = \frac{1}{y'_x} \quad \left[\frac{dx}{dy} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1}\right]. \tag{5.5}$$

Пример 5. Для функции $y = \arcsin x$ $(-1 < x < 1,\ -\pi/2 < y < \pi/2)$ обратной является $x = \sin y$ $(-\pi/2 < y < \pi/2)$. По формуле (5.5) находим

$$y'_x = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{(\sin y)'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Пример 6. Для функции $y = \arccos x$ $(-1 < x < 1,\ 0 < y < \pi)$ обратной является $x = \cos y$, следовательно

$$y'_x = \frac{1}{(\cos y)'_y} = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Пример 7. Для функции $y = \operatorname{arctg} x$ $(-\infty < x < +\infty)$ обратной является $x = \operatorname{tg} y$ $(-\pi/2 < y < \pi/2)$, следовательно

$$(\operatorname{arctg} x)'_x = \frac{1}{(\operatorname{tg} y)'_y} = \cos^2 y = \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Пример 8. Для функции $y = \operatorname{arcctg} x$ $(-\infty < x < +\infty)$ обратной является $x = \operatorname{ctg} y$ $(0 < y < \pi)$, следовательно

$$(\operatorname{arcctg} x)'_x = -\frac{1}{1 + \operatorname{ctg}^2 x} = -\frac{1}{1 + x^2}.$$

5.4. Дифференцирование функций, заданных параметрически

Пусть соответствующие друг другу значения величин x и y заданы в виде дифференцируемых функций от параметра t $(\alpha < t < \beta)$, т. е. $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$. Предполагается, что для функции $x = \varphi(t)$ существует однозначная обратная функция $t = \alpha(x)$, поэтому y может быть явно выражена через x, т. е. $y = \psi[\alpha(x)] \equiv f(x)$. Производная y по x находится по формуле

$$y' \equiv \frac{dy}{dx} = \frac{y'_t}{x'_t} \quad (x'_t \neq 0). \tag{5.6}$$

Пример 9. Найти производную функции, заданной параметрически, $x = \cos t$, $y = \sin t$ $(0 < t < \pi,\ -\pi < t < 0)$.

<u>Решение</u>. $y'_x = -\dfrac{\cos t}{\sin t} = -\operatorname{ctg} t$. В интервале $(0; \pi)$ функция $\varphi(t) = \cos t$ строго убывает, а в интервале $(-\pi; 0)$ —строго возрастает. В обоих интервалах $\varphi'(t) \neq 0$. ▷

5.5. Производные и дифференциалы высших порядков

5.5.1. Производные высших порядков

Если функция $f(x)$ определена в интервале $(a; b)$, то ее производная, если она существует в интервале $(a; b)$, также является некоторой функцией $f'(x)$, определенной в этом же интервале. Если функция $f'(x)$ имеет производную в интервале $(a; b)$, то эту производную называют **второй производной** от $f(x)$ и обозначают $y'' \equiv f''(x) \equiv f^{(2)}(x)$. При этом обычную производную y' называют еще **первой производной.** В общем случае производной порядка n (n-й производной) от $f(x)$ называется производная (если она существует) от производной порядка $n-1$:

$$f^{(n)}(x) = \left[f^{(n-1)}(x)\right]' \quad \text{или} \quad y^{(n)} = \left[y^{(n-1)}\right]'.$$

Функция, имеющая на некотором множестве конечную производную порядка n, называется n **раз дифференцируемой на этом множестве.**

Функция, n раз дифференцируемая и имеющая непрерывную производную $f^{(n)}(x)$ на некотором множестве, называется n раз непрерывно дифференцируемой на этом множестве.

Пример 10.

1) $(\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{2}\right)$; $(\sin x)'' = (\cos x)' = -\sin x = \sin\left(x + 2\dfrac{\pi}{2}\right)$;
$(\sin x)''' = (-\sin x)' = -\cos x = \sin\left(x + 3\dfrac{\pi}{2}\right)$; ...; $(\sin x)^{(n)} = \sin\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.
2) $(\cos x)^{(n)} = \cos\left(x + n\dfrac{\pi}{2}\right)$.
3) $(e^x)' = e^x$; $(e^x)'' = e^x$; ...; $(e^x)^{(n)} = e^x$.
4) $y = x^\alpha$ ($x > 0$, α — любое действительное число). $y' = \alpha x^{\alpha-1}$; $y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$; $y''' = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^{\alpha-3}$; ...; $y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}$. Если $\alpha = m$ (m — натуральное), то $(x^m)^{(m)} = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot m = m!$ и $(x^m)^{(n)} = 0$ при $n > m$. Например, $(x^4)' = 4x^3$, $(x^4)'' = (4x^3)' = 12x^2$, $(x^4)''' = (12x^2)' = 24x$, $(x^4)^{(4)} = (24x)' = 24$, $(x^4)^{(5)} = (24)' = 0$, все следующие производные равны нулю.
5) $(a^x)' = a^x \ln a$ ($a > 0$), $(a^x)'' = a^x \ln^2 a$, ..., $(a^x)^{(n)} = a^x \ln^n a$.
6) $(\ln x)^{(n)} = \dfrac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{x^n}$.

Для функции, заданной параметрически:

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t),$$

вторая производная равна

$$y'' \equiv \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{\dot\psi}{\dot\varphi}\right) = \frac{1}{\dot\varphi}\frac{d}{dt}\left(\frac{\dot\psi}{\dot\varphi}\right) = \frac{\dot\varphi\ddot\psi - \ddot\varphi\dot\psi}{(\dot\varphi)^3},$$

$$\dot\varphi \equiv \frac{d\varphi(t)}{dt}, \quad \dot\psi \equiv \frac{d\psi(t)}{dt}, \quad \ddot\varphi \equiv \frac{d^2\varphi(t)}{dt^2}, \quad \ddot\psi \equiv \frac{d^2\psi(t)}{dt^2}.$$

Аналогично находятся производные более высоких порядков.

5.5.2. Формула Лейбница

Если функции $u(x), v(x)$ имеют производные до порядка n включительно, то

$$(uv)^{(n)} = \sum_{i=0}^{n} C_n^i u^{(i)} v^{(n-i)},$$

где $u^{(0)} \equiv u$, $v^{(0)} \equiv v$, $C_n^i = \dfrac{n!}{i!(n-i)!}$, $0! = 1$.

5.5.3. Дифференциалы высших порядков

Пусть в интервале $(a; b)$ задана функция $y = f(x)$ независимого аргумента x, т. е. x не является функцией какой-либо другой переменной. Дифференциал $dy = f'(x)\,dx$, являющийся функцией от x и dx, называют также **первым дифференциалом**. Если функция $f'(x)$ дифференцируема в интервале $(a; b)$ и величина dx имеет заданное фиксированное значение, не зависящее от x в этом интервале, то, по определению, **вторым дифференциалом** функции $y = f(x)$ в точке x называют дифференциал от первого дифференциала в точке x. Обозначение:

$$d^2y = d(dy) = d[f'(x)\,dx] = dx \cdot d[f'(x)] = f''(x)(dx)^2 \equiv f''(x)\,dx^2.$$

Здесь dx — постоянная, т. е. $d^2x = d(dx) = (dx)'_x\,dx = 0$.

Дифференциалом порядка n (n-м дифференциалом) функции $y = f(x)$ называется дифференциал от дифференциала порядка $(n-1)$:

$$d^ny = d(d^{n-1}y) = f^{(n)}(x)\,dx^n. \tag{5.7}$$

Здесь $d^1y \equiv dy$, $d^2x = d^3x = \ldots = 0$.

Согласно (5.7) для производной порядка n функции $y = f(x)$ по **независимой** переменной x имеем

$$y^{(n)} \equiv f^{(n)}(x) = \frac{d^ny}{dx^n}. \tag{5.8}$$

Пример 11. Считая x независимой переменной, найдем дифференциалы:

$$d(x^3) = (x^3)'\,dx = 3x^2\,dx; \quad d^2(x^3) = (x^3)''\,dx^2 = 6x\,dx^2;$$

$$d^3(x^3) = 6\,dx^3; \quad d^4(x^3) = d^5(x^3) = \ldots = 0.$$

5.5.4. Инвариантность формы первого дифференциала

Дифференцируемую функцию $y = f(x)$ от независимой переменной x можно записать в виде сложной функции $y = f(x) = g[u(x)]$, где $g(u)$ и $u(x)$ — некоторые функции, дифференцируемые в точках u и x и $u = u(x)$.

Для первого дифференциала имеем

$$dy = y'_x\,dx = g'(u)u'(x)\,dx = y'_u u'_x\,dx = y'_u(u'_x\,dx) = y'_u\,du,$$

т. е. $dy = y'_x\,dx$ и $dy = y'_u\,du$. Следовательно, для обоих случаев, когда y рассматривается как функция от независимого аргумента x, или от зависимой переменной u (промежуточного аргумента u), форма первого дифференциала остается неизменной (**инвариантной**). Отсюда, в частности, следует, что

$$y'_x = \frac{dy}{dx}, \quad y'_u = \frac{dy}{du}.$$

Для второго дифференциала, используя формулу

$$d(uv) = u\,dv + v\,du,$$

получим:

$$d^2y = f''(x)\,dx^2 = d(dy) = d[g'(u)\,du] =$$
$$= (du)\,d[g'(u)] + g'(u)\,d(du) = g''(u)(du)^2 + g'(u)\,d^2u,$$

где $d^2u = u''(x)(dx)^2 \equiv u''(x)\,dx^2$.

Таким образом, форма второго дифференциала (а также всех дифференциалов высших порядков) зависит от того, рассматривается ли y как функция независимого аргумента x, или как функция от промежуточного (зависимого) аргумента u. В последнем случае добавляется, вообще говоря, не равное нулю слагаемое $g'(u)\,d^2u$, которое равно нулю только для $u(x) = ax + b$.

Пример 12. Для $y = f(x) = x^6$ имеем $dy = y'_x\,dx = 6x^5\,dx$, $d^2y = d(dy) = f''(x)\,dx^2 = 30x^4\,dx^2$. Если $u(x) = x^2$, $y = g(u) = u^3$, то $dy = y'_u\,du = 3u^2\,du = 3x^4 2x\,dx = 6x^5\,dx$; $d^2u = d(du) = 2\,dx^2$, $d^2y = d(dy) = d(3u^2\,du) = du\,d(3u^2) + 3u^2\,d^2u = 6u\,du^2 + 3u^2\,d^2u = 6x^2(2x\,dx)^2 + 3x^4(2\,dx^2) = 24x^4\,dx^2 + 6x^4\,dx^2 = 30x^4\,dx^2$.

5.6. Экстремум. Теоремы Ферма, Ролля, Лагранжа и Коши

5.6.1. Экстремум

Говорят, что функция $f(x)$, определенная в некоторой окрестности точки $x = c$, достигает в этой точке **локального максимума** (или **минимума**), если существует содержащаяся в области определения $f(x)$ окрестность этой точки

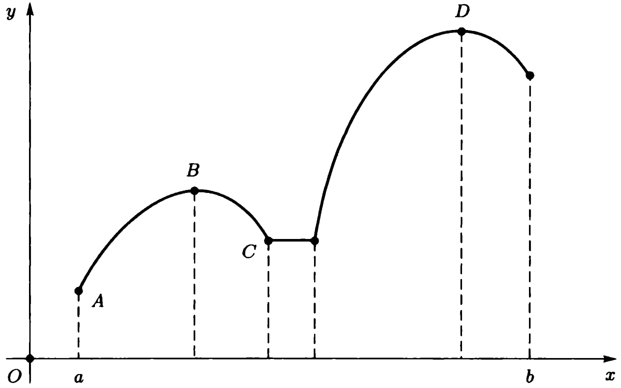


Рис. 5.4

$(c - \delta; c + \delta)$, во всех точках которой выполняется неравенство

$$f(c) \geqslant f(x) \quad (\text{или} \quad f(c) \leqslant f(x)). \tag{5.9}$$

Если вместо неравенств (5.9) выполняются строгие неравенства $f(c) > f(x)$ (или $f(c) < f(x)$) при $x \neq c$, то говорят о **строгом локальном максимуме** (или **минимуме**). В противном случае — о **нестрогом локальном максимуме** (**минимуме**).

Абсолютным максимумом (или **минимумом**) функции на некотором множестве называется ее наибольшее (или наименьшее) значение на этом множестве. Максимум или минимум функции (локальный или абсолютный) называют **экстремумом** (**локальным** или **абсолютным**).

Для функции $y = f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$, локальный экстремум может достигаться только во внутренних точках этого отрезка, но не в концевых точках a и b, так как $f(x)$ не определена в полной окрестности этих точек (слева и справа от них). На рис. 5.4 в точке A достигается строгий абсолютный минимум $f(x)$, в точке B — строгий локальный максимум, в точке C — нестрогий локальный минимум, в точке D одновременно достигаются строгие локальный и абсолютный максимумы. Можно также сказать, что в концевых точках a и b достигаются односторонние локальные экстремумы.

5.6.2. Теорема Ферма (необходимое условие локального экстремума дифференцируемой функции)

Если функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(a; b)$ и в некоторой точке c этого интервала имеет локальный максимум или минимум, то ее производная при $x = c$ равна нулю: $f'(c) =$

Геометрический смысл теоремы: касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке $(c, f(c))$ параллельная оси Ox.

5.6.3. Теорема Ролля

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, имеет конечную производную во всех точках интервала $(a; b)$ и $f(a) = f(b)$, то существует хотя бы одна точка c интервала $(a; b)$, в которой $f'(c) = 0$.

Геометрический смысл теоремы: на графике функции $y = f(x)$ существует такая точка $(c, f(c))$, в которой касательная к графику параллельна оси Ox.

5.6.4. Теорема Лагранжа

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$ и имеет конечную производную в интервале $(a; b)$, то в этом интервале найдется точка c такая, что справедлива формула

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b-a), \quad \text{или} \quad \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c), \tag{5.10}$$

называемая **формулой конечных приращений.**

Геометрический смысл теоремы на графике функции $y = f(x)$ существует точка $(c, f(c))$ такая, что касательная к графику в этой точке параллельна хорде (секущей), проходящей через точки $(a, f(a))$ и $(b, f(b))$. Если промежуточное число c записать в виде $c = a + \theta(b-a)$, где θ — некоторое число $(0 < \theta < 1)$, то формула (5.10) примет вид

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(a + \theta(b-a)), \tag{5.11}$$

или

$$f(a + \Delta x) - f(a) = \Delta x f'(a + \theta \Delta x) \quad (\Delta x = b - a).$$

В формуле (5.10) не обязательно полагать, что $b > a$.

5.6.5. Теорема Коши

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a; b]$, дифференцируемы в интервале $(a; b)$ и $g'(x) \neq 0$ для всех x из $(a; b)$, то в интервале $(a; b)$ существует точка c такая, что выполняется формула

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}. \tag{5.12}$$

В формуле (5.12) не обязательно $b > a$. Формула (5.10) — частный случай формулы (5.12) при $g(x) = x$.

5.6.6. Некоторые следствия из теоремы Лагранжа

1) Если функция $f(x)$ дифференцируема в интервале $(a; b)$ и $f'(x) = 0$ всюду в $(a; b)$, то $f(x)$ постоянна в $(a; b)$.
2) Функция $f(x)$, дифференцируемая в $(a; b)$, не убывает (не возрастает) в $(a; b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x) \geqslant 0$ ($f'(x) \leqslant 0$) всюду в $(a; b)$.
3) Для того чтобы функция $f(x)$, дифференцируемая в $(a; b)$, строго возрастала (строго убывала) в $(a; b)$, достаточно, чтобы $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) всюду в $(a; b)$.

5.6.7. Производная четной (нечетной) функции

Если функция $f(x)$ — четная (нечетная) и дифференцируема в интервале $(-a; a)$, то ее производная $f'(x)$ — нечетная (четная) функция.

5.7. Формула Тейлора. Вычисление пределов

1. Если функция $f(x)$ в некоторой окрестности $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ ($\delta > 0$) точки x_0 имеет производные порядка $(n + 1)$ (n — любое фиксированное натуральное число), то для каждого x из этой окрестности выполняется **формула Тейлора**:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + R_n(x) \qquad (5.13)$$

или

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n(x),$$

где

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Здесь $P_n(x)$ — **полином Тейлора**, $c = x_0 + \theta(x - x_0)$ ($0 < \theta < 1$), т. е. $x_0 < c < x$; $R_n(x)$ называется **остаточным членом формулы Тейлора в форме Лагранжа**. При $n = 0$ формула Тейлора сводится к формуле конечных приращений. Для каждой $f(x)$ выражение $P_n(x)$ единственно.

В частном случае, при $x_0 = 0$, из формулы (5.13) получается **формула Маклорена**:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k + R_n(x); \quad R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}. \qquad (5.14)$$

Другая запись формулы Тейлора (5.13) имеет вид:

$$f(x_0 + \Delta x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(\Delta x)^k + \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta \Delta x)}{(n+1)!}(\Delta x)^{n+1}, \tag{5.15}$$

где $\Delta x = x - x_0$.

2. Если $f(x)$ непрерывна вместе со своими производными до $(n+1)$-го порядка включительно на отрезке $[a; b]$, содержащем точки x_0 и x, то производная $f^{(n+1)}(x)$, в силу непрерывности, ограничена на $[a; b]$:

$$M_{n+1} = \max_{[a;b]} \left| f^{(n+1)}(x) \right| < +\infty.$$

Отсюда следует оценка для остаточного члена на отрезке $[a; b]$:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \left| x - x_0 \right|^{n+1} \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} L^{n+1}, \tag{5.16}$$

где $L = \max\{b - x_0, x_0 - a\}$.

Из (5.16) следует, что при фиксированном n:

$$|R_n(x)| = o(x - x_0)^n \quad \text{при} \quad x \to x_0.$$

Если $f(x)$ имеет производные любого порядка, ограниченные на отрезке $[a; b]$ одним и тем же числом $\left| f^{(n)} \right| \leqslant M$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$, то из (5.16) следует

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = 0$$

для любого фиксированного x из $[a; b]$.

Пример 13. Функция $f(x) = e^x$ имеет производные любого порядка на промежутке $(-\infty; +\infty)$: $f^{(k)}(x) = e^x$, $f^{(k)}(0) = 1$. Все производные ограничены на любом отрезке $[-a; a]$ $(a > 0)$ числом e^a. Формула Маклорена:

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + R_n(x); \quad R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta x} \quad (0 < \theta < 1),$$

где x может быть положительными или отрицательным.

Оценка остаточного члена на отрезке $[-a; a]$

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{a^{n+1}}{(n+1)!} e^a.$$

При этом $|R_n(x)| \to 0$ при $n \to \infty$ для любого x из $[-a; a]$.

3. Асимптотические оценки некоторых элементарных функций. Выражение, характеризующее поведение какой-либо функции $f(x)$ при $x \to x_0$, называется **асимптотической оценкой** этой функции (или **асимптотической формулой**). Из формулы Маклорена (5.14) получаются следующие асимптотические оценки, справедливые при $x \to 0$:

$$1)\ e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n),$$

$$2)\ \ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n),$$

$$3)\ (1+x)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots$$

$$\ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + o(x^n) \qquad (5.17)$$

(α — любое действительное число),

$$4)\ \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + o(x^{2n}),$$

$$5)\ \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \ldots + (-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1}).$$

Формулы (5.17) дают представление вышеперечисленных функций при малых значениях $|x|$ для любого фиксированного номера n.

4. Вычисление пределов при помощи формулы Тейлора.

Пример 14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x}{x^2\sin x} = \Big\{$ применяя четвертую формулу (5.17) при $n = 2$, получим

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4)\Big\} = \lim_{x\to 0}\frac{x - \frac{x^3}{3!} + o(x^4) - x}{x^3 - \frac{x^5}{3!} + x^2 o(x^4)} = \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{3!} + \alpha(x)}{1 - \frac{x^2}{3!} + x^2\alpha(x)} = -\frac{1}{3!} = -\frac{1}{6}.$$

Здесь $\alpha(x) = \dfrac{o(x^4)}{x^3} \to 0$ при $x \to 0$.

Пример 15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x - e^{-x^2/2}}{x^4} = \Big\{$ применяя пятую формулу (5.17)) при $n = 2$, получим $\cos x = 1 - \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^4}{4!} + o(x^5)$; первая формула (5.17) при $n = 2$ дает $e^t = 1 + t + \dfrac{t^2}{2} + o(t^2)$, отсюда при $t = -\dfrac{x^2}{2}$ следует $e^{-x^2/2} = 1 - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^4}{8} + o(x^4)\Big\} =$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}+o(x^5)-1+\frac{x^2}{2}-\frac{x^4}{8}+o(x^4)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\left[-\frac{1}{12}+\frac{o(x^5)}{x^4}+\frac{o(x^4)}{x^4}\right] = -\frac{1}{12}.$$

Здесь $\frac{o(x^5)}{x^4} \to 0$, $\frac{o(x^4)}{x^4} \to 0$ при $x \to 0$.

5.8. Раскрытие неопределенностей. Правило Лопиталя

5.8.1. Раскрытие неопределенности вида 0/0

Говорят, что отношение двух функций $\frac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой при $x \to a$ **неопределенность вида** $0/0$, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$. **Раскрыть неопределенность** — значит найти предел $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, если он существует.

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a (a — число, $+\infty$ или $-\infty$), за исключением, быть может самой точки a, а также $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ и $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$ в этой окрестности. Тогда, если существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a}\left[\frac{f'(x)}{g'(x)}\right]$, то справедливо равенство

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}, \tag{5.18}$$

выражающее **правило Лопиталя**. Аналогичное правило справедливо для односторонних пределов.

Примечание. Предел в левой части (5.18) может существовать, даже если предел в правой части не существует.

Если в результате применения правила Лопиталя снова получается неопределенность, то это правило может применяться повторно (если $f'(x)$, $g'(x)$ удовлетворяют тем же требованиям, что и $f(x)$ и $g(x)$) и т. д. многократно:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \ldots\,.$$

Пример 16.

1) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x^3-8} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{(x^2-4)'}{(x^3-8)'} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{2x}{3x^2} = \frac{1}{3}$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\sin x}{x^3}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-\sin x)'}{(x^3)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)'}{(3x^2)'}=\dfrac{1}{6}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=$
$=\dfrac{1}{6}\cdot 1=\dfrac{1}{6}.$

3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\ln(1+x)]'}{x'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{1+x}=1.$

4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\operatorname{ctg}x-1}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^2\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x\cos x-\sin x)'}{(x^2\sin x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\sin x}{2\sin x+x\cos x}=$
$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(-\sin x)'}{(2\sin x+x\cos x)'}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{-\cos x}{3\cos x-x\sin x}=-\dfrac{1}{3}.$

5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-e^{-x}}{\sin x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x+e^{-x}}{\cos x}=2.$

5.8.2. Раскрытие неопределенности вида ∞/∞

Говорят, что отношение двух функций $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ представляет собой при $x\to a$ (a — число, $+\infty$ или $-\infty$) **неопределенность вида** ∞/∞, если $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ ($+\infty$ или $-\infty$). Для раскрытия этой неопределенности, т. е. для нахождения предела $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, используется следующее **правило Лопиталя**: если $f(x)$ и $g(x)$ определены и дифференцируемы в некоторой окрестности точки a, за исключением, быть может, самой этой точки; $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$; $g(x)\neq 0$, $g'(x)\neq 0$ в указанной окрестности; тогда, если существует конечный или бесконечный предел $\lim\limits_{x\to a}\left[\dfrac{f'(x)}{g'(x)}\right]$, то

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{5.19}$$

Равенство (5.19) справедливо и для односторонних пределов. Формула (5.19) может применяться повторно (см. 5.8.1).

Пример 17.

1) При $\alpha>0$ имеем: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x^\alpha}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln x)'}{(x^\alpha)'}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{-1}}{\alpha x^{\alpha-1}}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\alpha x^\alpha}=0.$

2) Для вычисления следующего предела применим формулу (5.19) n раз:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^n}{e^{ax}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{nx^{n-1}}{ae^{ax}}=\ldots=\lim\frac{n!}{a^ne^{ax}}=0\quad(a>0).$$

3) При $\alpha>0$ имеем: $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}}=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}}=-\dfrac{1}{\alpha}\lim\limits_{x\to+0}x^\alpha=0.$

4) $\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{e^{-1/x}}{x^n}=\left\{\text{замена } \dfrac{1}{x}=y\right\}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{y^n}{e^y}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{n!}{e^y}=0$ (n — любое натуральное число).

5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{-1/x^2}}{x^{2n}}=\left\{\text{замена } \dfrac{1}{x^2}=y\right\}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{y^n}{e^y}=0$ (n — любое натуральное число).

6) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{\operatorname{tg}x}=\lim\limits_{x\to\pi/2}3\left(\dfrac{\cos x}{\cos 3x}\right)^2=3\left[\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cos x}{\cos 3x}\right]^2=3\left[\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{-\sin x}{-3\sin 3x}\right]^2=$
$=3\left(-\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{3}.$

5.8.3. Неопределенности вида $0\cdot\infty$, $\infty-\infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0

Неопределенности перечисленных видов сводятся к неопределенностям $0/0$ и ∞/∞ посредством алгебраических преобразований и логарифмирования.

Пример 18. Неопределенности $0\cdot\infty$ и $\infty-\infty$ сводятся к неопределенности $0/0$ или ∞/∞.

1) $\lim\limits_{x\to0}x\operatorname{ctg}x=\left\{\operatorname{ctg}x=\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}\right\}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\operatorname{tg}x}=\lim\limits_{x\to0}\left(1:\dfrac{1}{\cos^2 x}\right)=\lim\limits_{x\to0}\cos^2 x=1.$

2) При $\alpha>0$ имеем: $\lim\limits_{x\to+0}x^\alpha\ln x=\lim\limits_{x\to+0}\dfrac{\ln x}{x^{-\alpha}}=0$ (см. пример 17).

3) $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{\ln x}-\dfrac{1}{x-1}\right)=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)-\ln x}{(x-1)\ln x}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{\ln x+1-\dfrac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{-2}}{x^{-1}+x^{-2}}=\dfrac{1}{2}.$

Пример 19. Для сведения неопределенностей вида 0^0, 1^∞, ∞^0 к неопределенности $0\cdot\infty$ применяется равенство

$$f(x)^{g(x)}=\exp\{g(x)\ln f(x)\}\quad (f(x)>0),$$

где $\exp\{y\}\equiv e^y$.

1) $\lim\limits_{x\to+0}x^x=\lim\limits_{x\to0}\exp\{x\ln x\}=\{\lim\limits_{x\to+0}x\ln x=0 \text{ (см. пример 18)}\}=e^0=1.$

2) $\lim\limits_{x\to1}x^{\frac{1}{1-x}}=\lim\limits_{x\to1}\exp\left\{\dfrac{1}{1-x}\ln x\right\}=\left\{\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{1-x}\ln x=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^{-1}}{-1}=-1\right\}=e^{-1}.$
Здесь $\exp\{y\}\equiv e^y$.

3) $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+3x)^{1/x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\exp\left\{\dfrac{1}{x}\ln(1+3x)\right\}=\left\{\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x}\ln(1+3x)=\right.$
$\left.=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{3}{1+3x}=0\right\}=e^0=1.$

5.9. Возрастание и убывание функции. Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба

5.9.1. Достаточный признак возрастания и убывания функции

Функция называется **возрастающей** (или **убывающей**) в интервале $(a; b)$, если бóльшим значениям аргумента соответствуют бóльшие (или меньшие) значения функции. Для того чтобы дифференцируемая в интервале $(a; b)$ функция возрастала (или убывала) в этом интервале, достаточно, чтобы производная $f'(x)$ была положительной (или отрицательной) всюду в этом интервале. Таким образом, нахождение **интервалов монотонности** функции $f(x)$ сводится к нахождению интервалов знакопостоянства ее производной $f'(x)$.

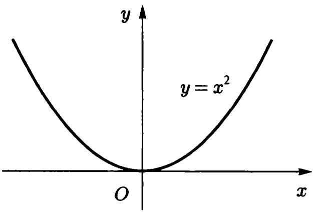


Рис. 5.5

Если для функции $f(x)$ производная $f'(a) > 0$ (или $f'(a) < 0$) в точке $x = a$, то $f(x)$ возрастает (или убывает) в точке $x = a$.

Пример 20. Для функции $y = x^2$ производная $y' = 2x < 0$ при $-\infty < x < 0$ (функция убывает); $y' > 0$ при $0 < x < +\infty$ (функция возрастает). В точке $x = 0$ данная функция не является ни возрастающей, ни убывающей (**стационарная точка**) (рис. 5.5).

5.9.2. Выпуклость и вогнутость кривой

Кривая (график функции $y = f(x)$, имеющей конечную производную) называется **выпуклой** (или **вогнутой**) в некотором интервале $(a; b)$, если эта кривая расположена ниже (или выше) любой касательной к кривой в этом интервале. Выпуклый (вогнутый) график функции называют также выпуклым вверх (выпуклым вниз).

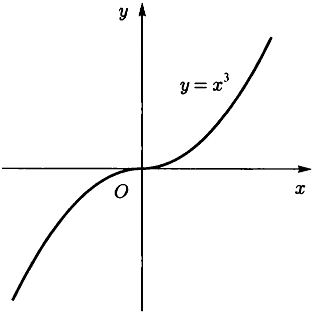


Рис. 5.6

Достаточное условие выпуклости (или вогнутости). В предположении существования конечной второй производной $f''(x)$ при $a < x < b$, график функции $y = f(x)$ является выпуклым (или вогнутым) в интервале $(a; b)$, если $f''(x) < 0$ (или $f''(x) > 0$) во всех точках этого интервала.

Если вторая производная функции $y = f(x)$ непрерывна и отрицательна (или положительна) в точке x_0, то в некоторой окрестности этой точки график $y = f(x)$ является выпуклым (или вогнутым).

Пример 21. График функции $y = f(x) \equiv x^3$ (рис. 5.6) является выпуклым при $-\infty < x < 0$ $(y'' = 6x < 0)$ и вогнутым при $0 < x < +\infty$ $(y'' > 0)$.

5.9.3. Точки перегиба

Пусть график непрерывной в интервале $(a; b)$ функции $y = f(x)$ имеет касательную (возможно, параллельную оси Oy) для любого x из $(a; b)$. Если при переходе величины x через некоторое значение x_0 в $(a; b)$ соответствующая точка $M(x, f(x))$ графика переходит с одной стороны касательной к графику в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ на другую, то говорят, что при $x = x_0$ график имеет **точку перегиба** M_0. Для краткости, точку x_0 также иногда называют точкой перегиба. Например, при $x = 0$ график $y = x^3$ имеет точку перегиба $O(0; 0)$, при этом касательная в точке O совпадает с осью Ox. При $x < 0$ точки графика лежат ниже касательной, а при $x > 0$ — выше.

В достаточно малой (двухсторонней) окрестности точки перегиба x_0 выпуклость графика $y = f(x)$ заменяется вогнутостью (или наоборот) при переходе через x_0.

Необходимое условие существования точки перегиба. Если функция $f(x)$ имеет конечную вторую производную в точке x_0 и график $y = f(x)$ имеет точку перегиба $M_0(x_0, f(x_0))$, то $f''(x_0) = 0$.

Достаточные условия существования точки перегиба. Первое условие. Пусть функция $y = f(x)$, непрерывная в точке x_0, имеет непрерывную вторую производную в некоторой (двухсторонней) окрестности точки x_0, за исключением, быть может, самой точки x_0, а график $y = f(x)$ имеет касательную (возможно, параллельную оси Oy) в точке $M_0(x_0, f(x_0))$. Тогда, если в этой окрестности $f''(x)$ меняет знак при переходе через x_0, то график $y = f(x)$ имеет точку перегиба M_0. Таким образом, точки перегиба графика $y = f(x)$ следует искать среди таких точек, для которых либо $f''(x) = 0$, либо $f''(x)$ бесконечна или не существует.

Пример 22.

1) График функции $y = x^3$ при $x = 0$ имеет перегиб, при этом $y''(0) = 0$ (рис. 5.6).
2) Функция $y = x^{1/3}$ непрерывна в точке $x = 0$. В точке $O(0; 0)$ ее график (рис. 5.7) имеет вертикальную касательную (ось Oy). При $x = 0$ первая и вторая производные обращаются в бесконечность. В точке $O(0; 0)$ график имеет перегиб, так как при переходе через $x = 0$ знак второй производной $y'' = -\frac{2}{9}\frac{1}{x^{5/3}}$ изменяется

с плюса на минус. При $x < 0$ ($y'' > 0$) график вогнутый, при $x > 0$ ($y'' < 0$) — выпуклый.

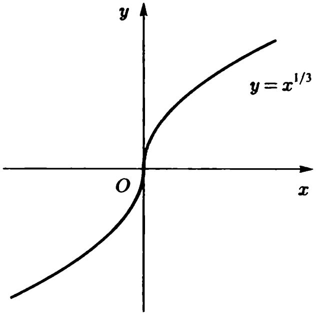


Рис. 5.7

Второе условие. Пусть функция $y = f(x)$ имеет в некоторой окрестности точки x_0 производную порядка n, а в самой точке x_0 — производную порядка $n+1$, при этом

$$f^{(2)}(x_0) = f^{(3)}(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0;$$
$$f^{(n+1)}(x_0) \neq 0.$$

Тогда, если n — четное число, то график $y = f(x)$ имеет перегиб при $x = x_0$.

Пример 23.

1) В условиях примера 21 в точке $x_0 = 0$ имеем $f'(0) = f''(0) = 0$, $f'''(0) = 6 \neq 0$. Следовательно, $x_0 = 0$ — точка перегиба.
2) Для функции $y = x^5$ находим $y^{(2)}(0) = y^{(3)}(0) = y^{(4)}(0) = 0$, $y^{(5)}(0) = 120 \neq 0$. В точке x_0 график имеет перегиб.

5.10. Нахождение максимумов и минимумов функций

В достаточно малой (двухсторонней) окрестности точки $x = c$ локального максимума (или минимума) непрерывной функции $f(x)$ значение $f(c)$ больше (или меньше) значений $f(x)$ для всех $x \neq c$ из этой окрестности (см. 5.6.1). Функция может иметь в области определения несколько локальных максимумов и минимумов, причем ее значение в некоторой точке локального минимума может оказаться больше ее значения в какой-либо точке локального максимума.

5.10.1. Необходимые условия локального экстремума (максимума и минимума) функции

Первое условие. Если производная $f'(x)$ функции $f(x)$ конечна в точке $x = c$, в которой $f(x)$ имеет локальный экстремум (максимум или минимум), то $f'(c) = 0$. Точка c, в которой $f'(c) = 0$, называется **стационарной точкой** для функции $f(x)$. Не всякая стационарная точка является точкой экстремума. Например, функция $y = x^3$ имеет стационарную точку $c = 0$, не являющуюся точкой экстремума.

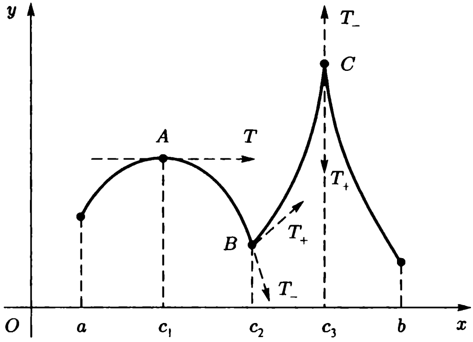


Рис. 5.8

Второе условие. Если непрерывная в точке $x = c$ функция $f(x)$ имеет локальный экстремум в этой точке, то либо $f'(c) = 0$ (если производная существует), либо $f'(c)$ не существует, либо бесконечна. Такие точки c называются **критическими**. На графике функции $y = f(x)$ (рис. 5.8) в точке максимума A с абсциссой $x = c_1$ касательная AT горизонтальна $(f'(c_1) = 0)$, в точке минимума B с абсциссой $x = c_2$ касательная не существует (левая BT_- и правая BT_+ касательные не лежат на одной прямой), в точке максимума C с абсциссой $x = c_3$ левая и правая производные обращаются в $+\infty$ и $-\infty$ соответственно, а левая CT_- и правая CT_+ касательные противоположно направлены и лежат на одной вертикальной прямой. Точки локального экстремума ищутся среди критических точек, которые проверяются затем при помощи одного из трех достаточных условий экстремума.

5.10.2. Достаточные условия строгого локального экстремума

Первое условие. Пусть: 1) функция $f(x)$ определена и непрерывна в некоторой двухсторонней окрестности критической точки $x = c$, для которой либо $f'(c) = 0$, либо $f'(c)$ не существует, либо бесконечна; 2) $f(x)$ имеет конечную производную $f'(x)$ всюду в этой окрестности, кроме, возможно, самой точки $x = c$; 3) слева от точки c и справа от нее в пределах указанной окрестности $f'(x)$ сохраняет знак (плюс или минус). Тогда $f(x)$ имеет в точке $x = c$ локальный минимум (или максимум), если производная $f'(x)$ отрицательна (или положительна) слева от точки $x = c$ (т. е. $x < c$) и положительна (или отрицательна) справа от $x = c$ (т. е. $x > c$) в указанной окрестности. Экстремум в точке c отсутствует, если при переходе через эту точку знак $f'(x)$ не изменяется. На рис. 5.8 при переходе (слева направо) через критическую точку $x = c_1$ знак $f'(x)$ изменяется с плюса на минус (максимум); при переходе через $x = c_2$ знак $f'(x)$ изменяется с минуса на плюс (минимум); при переходе через $x = c_3$ знак $f'(x)$ изменяется с плюса на минус (максимум).

Пример 24. Функция $y = x^{2/3}$ (рис. 5.9) непрерывна при $-\infty < x < +\infty$ и имеет конечную производную при $x \neq 0$, равную $y' = \frac{2}{3}x^{-1/3}$. При $x = 0$ левая и правая производные бесконечны: $y'_-(0) = -\infty$, $y'_+(0) = +\infty$. Производная имеет при $x = 0$ разрыв второго рода. Поскольку $y'(x) < 0$ при $x < 0$ и $y'(x) > 0$ при $x > 0$, в точке $x = 0$ данная функция имеет минимум.

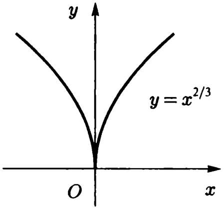


Рис. 5.9

Второе условие. Если функция $f(x)$ имеет в данной стационарной точке $x = c$ (т. е. $f'(c) = 0$) конечную вторую производную $f''(c) \neq 0$, то в этой точке функция $f(x)$ имеет максимум, если $f''(c) < 0$, и минимум, если $f''(c) > 0$. Если же $f''(c) = 0$, то $f(x)$ может либо иметь экстремум, либо не иметь его при $x = c$.

Пример 25.

1) Для функции $y = x^2$ имеем: $y'(0) = 0$, $y''(0) = 2 > 0$ (минимум при $x = 0$).
2) Для $y = x^3$ находим: $y'(0) = y''(0) = 0$ (экстремум при $x = 0$ отсутствует).
3) Функция $y = x^4$, для которой $y'(0) = y''(0) = 0$, имеет минимум при $x = 0$, так как $y' = 4x^3$ изменяет знак при переходе чрез $x = 0$.

Третье условие. Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную порядка n ($n \geqslant 1$ — целое число) в некоторой окрестности точки $x = c$ и производную порядка $n + 1$ в самой точке c, причем

$$f'(c) = f''(c) = \ldots = f^{(n)}(c) = 0; \quad f^{(n+1)}(c) \neq 0.$$

Тогда, если n — нечетное, то $f(x)$ имеет в точке c экстремум, а именно: 1) при $f^{(n+1)}(c) < 0$ — максимум, 2) при $f^{(n+1)}(c) > 0$ — минимум; если же n — четное и $f^{(n+1)}(c) \neq 0$, то в точке c функция $f(x)$ не имеет экстремума.

Пример 26. Для функции $y = (x - 1)^4$ имеем:

$$y'(1) = y''(1) = y'''(1) = 0, \quad y^{(4)}(1) = 24 > 0.$$

Следовательно, в точке $x = 1$ данная функция имеет локальный минимум.

5.10.3. Нахождение абсолютного экстремума

Наибольшее и наименьшее значения (**абсолютные экстремумы**) функции $f(x)$, непрерывной на отрезке $[a; b]$, достигаются или в критической точке (в которой производная $f'(x)$ либо равна нулю, либо не существует, либо бесконечна), или в концевых точках a и b отрезка $[a; b]$. Если $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — критические точки в интервале $(a; b)$, то наибольшее и наименьшее значения функции следует искать среди множества чисел: $\{f(a), f(c_1), f(c_2), \ldots, f(c_n), f(b)\}$. При этом нет необходимости выяснять характер (максимум или минимум) локального экстремума в критических точках.

Пример 27. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 3x - 2$ на отрезке $[0; 2]$.

Решение. Из условия $y' = 3x^2 - 3 = 0$ находим критические точки $x_1 = -1$, $x_2 = 1$, из которых только $x_2 = 1$ находится в данном отрезке. Наибольшее и наименьшее значения данной функции, которые ищем среди значений $y(0) = -2$, $y(1) = -4$, $y(2) = 0$, равны соответственно 0 и -4. ▷

5.11. Асимптоты графика функции

Говорят, что прямая $x = a$ является **вертикальной асимптотой** графика функции $y = f(x)$, если хотя бы один из односторонних пределов $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ или $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ равен $+\infty$ или $-\infty$.

Пример 28. График функции $y = 1/x$ (рис. 5.10) имеет вертикальную асимптоту $x = 0$ (ось Oy), так как $\lim\limits_{x \to 0+0} \dfrac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0-0} \dfrac{1}{x} = -\infty$.

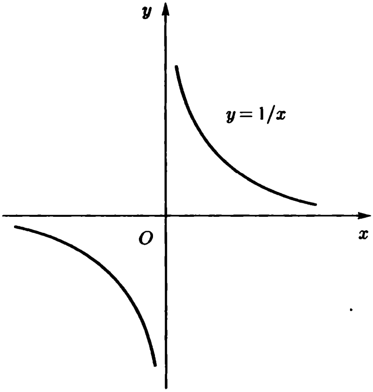


Рис. 5.10

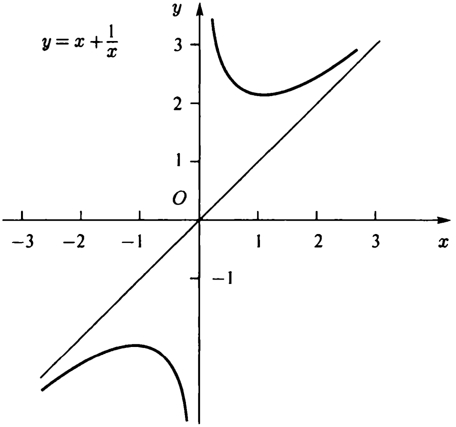


Рис. 5.11

Говорят, что прямая $y = kx + b$ является **наклонной асимптотой** графика функции $y = f(x)$ при $x \to +\infty$ (или $x \to -\infty$), если функцию $f(x)$ можно представить в виде $f(x) = kx + b + \alpha(x)$, где $\lim\limits_{x\to+\infty} \alpha(x) = 0$ (или $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha(x) = 0$), т. е. $|f(x) - kx - b|$ является бесконечно малой функцией при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$. График функции неограниченно приближается к асимптоте на бесконечности, т. е. при $x \to +\infty$ или (и) при $x \to -\infty$.

Пример 29. График функции $y = f(x) \equiv x + 1/x$ (рис. 5.11) имеет единственную наклонную асимптоту $y = x$ при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, так как $\lim\limits_{x\to\pm\infty} |f(x) - x| = \lim\limits_{x\to\pm\infty} = |1/x| = 0$.

Для того чтобы график функции $y = f(x)$ имел при $x \to +\infty$ $(x \to -\infty)$ наклонную асимптоту, необходимо и достаточно, чтобы существовали конечные пределы

$$\lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x} = k, \qquad \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} [f(x) - kx] = b,$$

тогда прямая $y = kx + b$ является асимптотой. При $k = 0$ прямая $y = b$ называется **горизонтальной асимптотой**.

Примечание. Кроме прямолинейных асимптот $y = kx + b$ могут рассматриваться также и **криволинейные асимптоты**.

Пример 30.

1) График функции $y=1+e^{-x}$ имеет горизонтальную асимптоту $y=1$ при $x\to+\infty$, так как
$$k=\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^{-x}}{x}=0,\quad b=\lim_{x\to+\infty}(1+e^{-x})=1.$$

2) График функции
$$y=\frac{2x^3+x^2}{x^2-1}$$
имеет две вертикальные асимптоты $x=-1$ и $x=1$, так как каждый из двух односторонних пределов в точках $x=-1$ и $x=1$ равен $+\infty$ или $-\infty$. Имеем далее
$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}=2,\quad b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{2x^3+x^2}{x^2-1}-2x\right)=1.$$
График данной функции имеет наклонную асимптоту $y=2x+1$ при $x\to+\infty$ и при $x\to-\infty$.

5.12. Построение графика функции

Для построения графика функции $y=f(x)$ необходимо качественное исследование поведения этой функции, в особенности в таких характерных точках, как точки разрыва, локального экстремума, перегиба, по следующей схеме:

1. Найти область определения функции, точки разрыва, промежутки непрерывности.
2. Выяснить наличие четности и нечетности функции, ее периодичности.
3. Найти точки пересечения графика с осями координат, интервалы знакопостоянства функции.
4. Найти асимптоты графика.
5. Найти первую и вторую производные, а также определить точки, в которых эти производные равны нулю, не существуют или обращаются в бесконечность.
6. Найти точки локального экстремума, а также значения функции в этих точках, промежутки возрастания и убывания функции, исследовать поведение функции в концевых точках области определения.
7. Найти промежутки выпуклости и вогнутости, точки перегиба, а также наклон касательных в этих точках.
8. Полученные результаты желательно занести в одну или несколько таблиц. При необходимости следует найти значения функции в некоторых промежуточных точках.
9. Построить примерный эскиз графика функции.

Пример 31. Построить график функции $y=\dfrac{(x-1)^3}{2x^2}$.

Решение.

1. Функция определена и непрерывна всюду на числовой прямой $-\infty < x < +\infty$, за исключением точки $x = 0$, в которой знаменатель дроби обращается в нуль. Односторонние пределы в точке $x = 0$:

$$\lim_{x\to 0-0} \frac{(x-1)^3}{2x^2} = -\infty, \quad \lim_{x\to 0+0} \frac{(x-1)^3}{2x^2} = -\infty.$$

Точка $x = 0$ — точка разрыва второго рода (бесконечный разрыв).

2. Функция не является периодической, ни четной, ни нечетной.
3. Точки пересечения графика с осью Ox ($y = 0$) находятся из условия $y = f(x) = 0$. Здесь имеется только одна такая точка с $x = 1$. Точек пересечения графика с осью Oy ($x = 0$) нет, так как при $x = 0$ функция не определена. При $x > 1$ значения $y = f(x)$ положительны, при $x < 1$ (кроме $x = 0$) — отрицательны.
4. Прямая $x = 0$ — единственная вертикальная асимптота. Оба односторонних предела при $x = 0$ равны $-\infty$.

Ищем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{(x-1)^3}{2x^3} = \frac{1}{2}, \quad b = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - kx] = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{-3x^2 + 3x - 1}{2x^2} = -\frac{3}{2}.$$

График имеет одну наклонную асимптоту $y = \frac{1}{2}x - \frac{3}{2}$ при $x \to \pm\infty$.

5. Находим производные:

$$y' = \frac{(x-1)^2(x+2)}{2x^3}, \quad y'' = \frac{3(x-1)}{x^4}.$$

При этом $y' = 0$ в точках $x = -2$, $x = 1$; y' обращается в бесконечность в точке $x = 0$, не принадлежащей области определения. Производная y'' равна нулю при $x = 1$ и обращается в бесконечность при $x = 0$.

6. Для нахождения точек экстремума и промежутков монотонности составим таблицу (критические точки: -2; 1; 0).

Промежуток значений x	$-\infty < x < -2$	$-2 < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < +\infty$
Знак y'	$+$	$-$	$+$	$+$
Поведение функции	возрастает	убывает	возрастает	возрастает

Из таблицы видно, что функция имеет в точке $x = -2$ локальный максимум и $f(-2) = -27/8 = -3{,}375$. В точке $x = 0$ минимума нет, так как при $x = 0$ функция не определена. В концевых точках области определения, т. е. при $x \to +\infty$ ($x \to -\infty$) функция $f(x) \to +\infty$ ($f(x) \to -\infty$). Следовательно, функция не достигает наибольшего и наименьшего значений в области определения.

7. Для нахождения промежутков выпуклости и вогнутости, а также точек перегиба, составим таблицу (точки, в которых y'' равно нулю, не существует или обращается в бесконечность: 0; 1)

Промежуток значений x	$-\infty < x < 0$	$0 < x < 1$	$1 < x < +\infty$
Знак y''	$-$	$-$	$+$
Поведение графика	выпуклый	выпуклый	вогнутый

Из этой таблицы видно, что график имеет одну точку перегиба с координатами $x = 1$, $y = f(1) = 0$. Касательная в точке перегиба горизонтальна, так как $y'(1) = 0$.

8. Вычислим значения функции в нескольких промежуточных точках:

x	-4	-3	-1	0,5	2	3	5
y	$-3{,}91$	$-3{,}56$	-4	$-0{,}125$	0,125	0,44	1,28

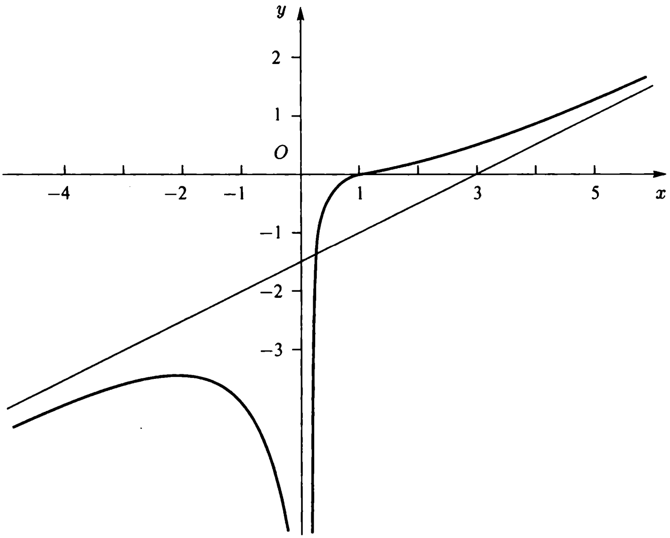


Рис. 5.12

9. Построим примерный эскиз графика функции (рис. 5.12). При этом точные значения координат найдены только для нескольких точек, которые соединяются затем плавной линией. ▷

Глава 6

ОСНОВНЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ФУНКЦИИ

6.1. Показательная (экспоненциальная) функция

Функция $y = a^x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$, определенная на множестве всех действительных чисел $-\infty < x < +\infty$, называется **показательной (экспоненциальной)** функцией. Функция принимает только положительные значения $(0 < y < +\infty)$, монотонна, возрастает при $a > 1$ (рис. 6.1) и убывает при $0 < a < 1$ (рис. 6.2), непрерывна, бесконечно раз дифференцируема, не имеет ни нулей, ни экстремумов. Ось Ox является асимптотой графика, проходящего чрез точку $(0; 1)$. Показательная функция $y = a^x$ может быть записана также в виде $y = e^{x \ln a} \equiv \exp\{x \ln a\}$, где $\exp\{t\} \equiv e^t$, $e = 2{,}781828\ldots$ — основание натуральных логарифмов. Графики функций $y = a^x$ и $y = a^{-x}$ взаимно симметричны относительно оси Oy.

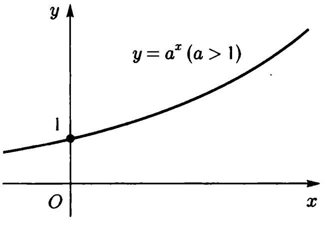


Рис. 6.1

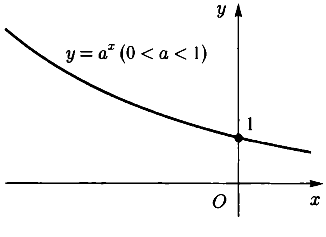


Рис. 6.2

6.2. Логарифмическая функция

Логарифмическая функция $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1$, область определения: $x > 0$, область изменения: $-\infty < y < +\infty)$ является обратной для показательной

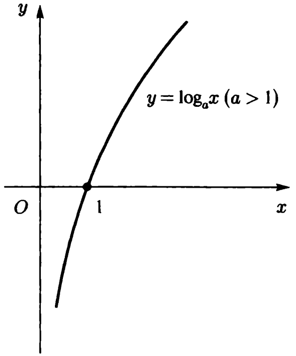


Рис. 6.3

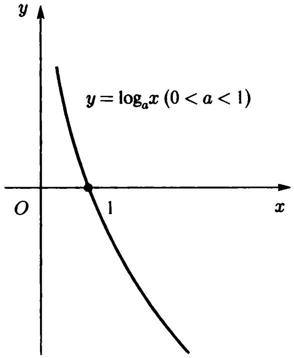


Рис. 6.4

функции $x = a^y$. Логарифмическую функцию можно записать также в виде

$$y = \log_a x = \frac{1}{\ln a} \ln x.$$

Функция монотонна, возрастает при $a > 1$ (рис. 6.3) и убывает при $0 < a < 1$ (рис. 6.4), непрерывна, бесконечно раз дифференцируема. Графики логарифмических функций проходят через точку $(1; 0)$. Асимптота — ось Oy. Графики функций $y = \log_a x$ и $y = a^x$ взаимно симметричны относительно прямой $y = x$.

6.3. Гиперболические функции

6.3.1. Гиперболический синус

Функция $y = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$, называемая **гиперболическим синусом**, определена при всех x, нечетная, монотонно возрастающая. Область изменения: $-\infty < y < +\infty$. График (рис. 6.5) проходит через точку $O(0; 0)$, являющуюся точкой перегиба. Обозначение: $y = \operatorname{sh} x$.

6.3.2. Гиперболический косинус

Функция $y = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}) \equiv \operatorname{ch} x$, называемая **гиперболическим косинусом**, определена при всех действительных x; область изменения: $1 \leqslant y < +\infty$;

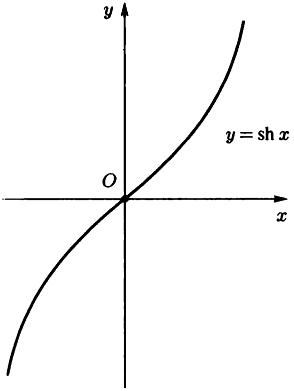


Рис. 6.5

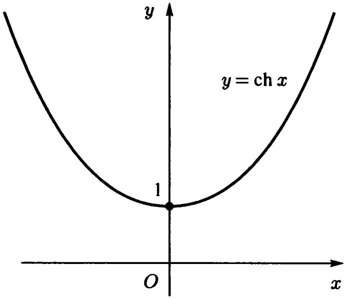


Рис. 6.6

четная, убывает при $x < 0$, возрастает при $x > 0$, при $x = 0$ — минимум. График (рис. 6.6) проходит через точку $(0; 1)$.

6.3.3. Гиперболический тангенс

Функция $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \equiv \operatorname{th} x$, называемая **гиперболическим тангенсом**, определена при $-\infty < x < +\infty$; область изменения: $-1 < x < 1$. Функция нечетная, монотонно возрастающая. Асимптоты: $y = 1$, $y = -1$. График (рис. 6.7) проходит через точку $O(0; 0)$, являющуюся точкой перегиба.

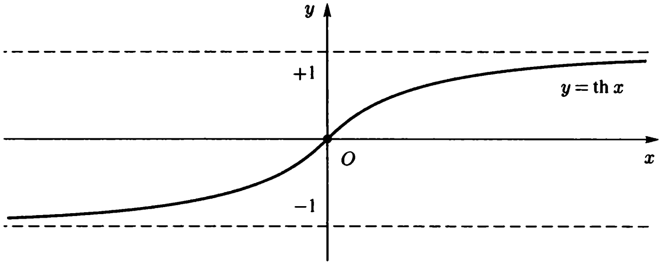


Рис. 6.7

6.3.4. Гиперболический котангенс

Функция $y = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \equiv \operatorname{cth} x$, называемая **гиперболическим котангенсом,** определена при всех $x \neq 0$; область изменения: $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$. Функция нечетная, монотонно убывает при $x < 0$ и при $x > 0$. Асимптоты: $x = 0$, $y = 1$, $y = -1$ (рис. 6.8).

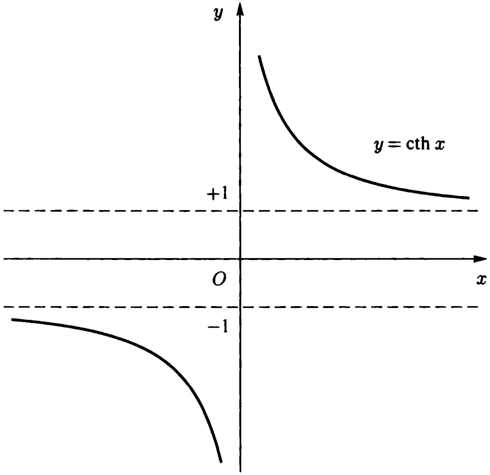


Рис. 6.8

6.3.5. Обратные гиперболические функции (ареафункции)

Эти функции определяют как решения уравнений (относительно переменной y) $\operatorname{sh} y = x$, $\operatorname{ch} y = x$, $\operatorname{th} y = x$, $\operatorname{cth} y = x$:

1) $y = \operatorname{Arsh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$ $(-\infty < x < +\infty)$.
2) $y = \operatorname{Arch} x = \ln(x \pm \sqrt{x^2 - 1})$ $(x \geqslant 1)$. Функция $y = \operatorname{Arch} x$ — двузначная. Для $x \geqslant 1$ и $0 \leqslant y < +\infty$ имеем $y = \operatorname{Arch} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1})$; а для $x \geqslant 1$ и $-\infty < y \leqslant 0$ соответственно $y = \operatorname{Arch} x = \ln(x - \sqrt{x^2 - 1})$.
3) $y = \operatorname{Arth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{1 + x}{1 - x}$ $(|x| < 1)$.
4) $y = \operatorname{Arcth} x = \dfrac{1}{2} \ln \dfrac{x + 1}{x - 1}$ $(|x| > 1)$.

Вышеперечисленные функции называются соответственно **ареасинус**, **ареакосинус**, **ареатангенс**, **ареакотангенс**. Графики обратных гиперболических функций получаются из графиков соответствующих гиперболических функций (рис. 6.5–6.8) зеркальным отображением относительно прямой $y = x$.

6.3.6. Некоторые соотношения между гиперболическими функциями

$$(\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x, \quad (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x,$$

$$(\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}, \quad (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x},$$

$$\int \operatorname{sh} x\, dx = \operatorname{ch} x + C, \quad \int \operatorname{ch} x\, dx = \operatorname{sh} x + C,$$

$$\int \operatorname{th} x\, dx = \ln \operatorname{ch} x + C, \quad \int \operatorname{cth} x\, dx = \ln |\operatorname{sh} x| + C,$$

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1, \quad \operatorname{sh} 2x = 2 \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{ch} 2x = \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x,$$

$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y,$$

$$\operatorname{th}(x \pm y) = \frac{\operatorname{th} x \pm \operatorname{th} y}{1 \pm \operatorname{th} x \cdot \operatorname{th} y},$$

$$\operatorname{sh} x \pm \operatorname{sh} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x \pm y}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{x \pm y}{2},$$

$$\operatorname{ch} x + \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{ch} \frac{x + y}{2} \cdot \operatorname{ch} \frac{x - y}{2},$$

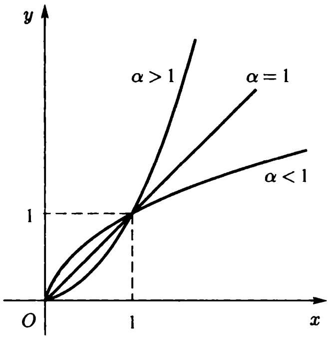
$$\operatorname{ch} x - \operatorname{ch} y = 2 \operatorname{sh} \frac{x + y}{2} \cdot \operatorname{sh} \frac{x - y}{2}.$$

6.4. Степенная функция

1. Пусть α — произвольное действительное число. **Общая степенная функция** $y = x^\alpha$ $(x > 0)$ определяется равенством

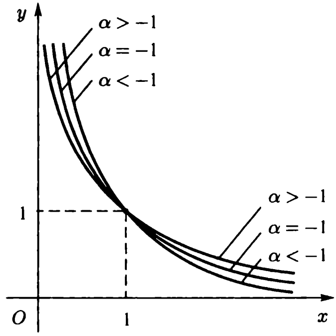
$$y = x^\alpha \equiv a^{\alpha \log_a x} \quad (a > 1).$$

При $\alpha > 0$ $(\alpha < 0)$ общая степенная функция возрастает (убывает). Функция непрерывна в промежутке $0 < x < +\infty$ и принимает положительные



$y = x^{\alpha}\,(\alpha > 0)$

Рис. 6.9



$y = x^{\alpha}\,(\alpha < 0)$

Рис. 6.10

значения. При $\alpha > 0$ функция определена также в точке $x = 0$ и равна нулю; при $\alpha < 0$ она не определена в точке $x = 0$. Если $\alpha = 0$, то $x^0 \equiv 1$ $(x \neq 0)$; 0^0 не имеет определенного смысла. На рис. 6.9, 6.10 приведены графики степенных функций для различных значений α.

2. Если n — натуральное число, то функция $y = x^n$ определена на всей числовой оси. Функция $y = x^{-n} = 1/x^n$ определена при всех $x \neq 0$. Функция $y = x$ называется **линейной**, ее график — прямая линия (рис. 6.11).

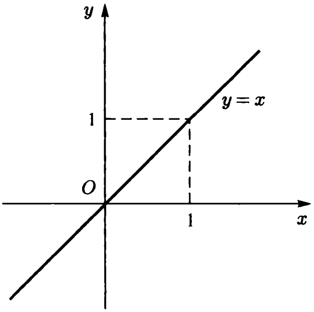


Рис. 6.11

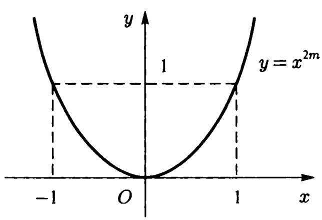


Рис. 6.12

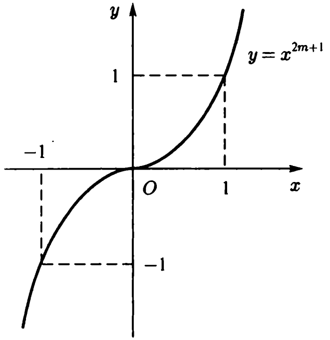


Рис. 6.13

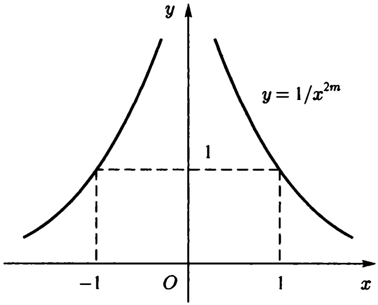


Рис. 6.14

График функции $y = x^n$ $(n \geqslant 2)$ называется **параболой n-го порядка**. При $n = 2m$ (т. е. четном) график симметричен относительно оси Oy (рис. 6.12), проходит через точки $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(-1; 1)$; ось Ox — касательная; минимум в точке $(0; 0)$. Если $n = 2m + 1$ (т. е. нечетное), то начало координат является центром симметрии графика (рис. 6.13); $O(0; 0)$ — точка перегиба; ось Ox — касательная; график проходит через точки $(0; 0)$, $(-1; -1)$, $(1; 1)$.

3. График функции $y = 1/x^n$ $(x \neq 0)$ при $n = 2m$ (четном) симметричен относительно оси Oy (рис. 6.14), проходит через точки $(1; 1)$, $(-1; 1)$, асимптоты — оси координат. Если $n = 2m + 1$ (нечетное), то центром симметрии графика (рис. 6.15) является начало координат; график проходит через точки $(1; 1)$, $(-1; -1)$; асимптоты — оси координат; $x = 0$ — точка разрыва.

4. Функция $y = x^{1/n} \equiv \sqrt[n]{x}$, где $n = 2m$ (четное), двузначна и определена при $x \geqslant 0$, график (рис. 6.16) проходит через точки $(0; 0)$, $(1; 1)$, $(1; -1)$; если $n = 2m + 1$ (нечетное), то функция определена при $-\infty < x < +\infty$; график (рис. 6.17) проходит через точки $O(0; 0)$ (точка перегиба), $(1; 1)$, $(-1; -1)$; ось Oy — касательная в точке $O(0; 0)$.

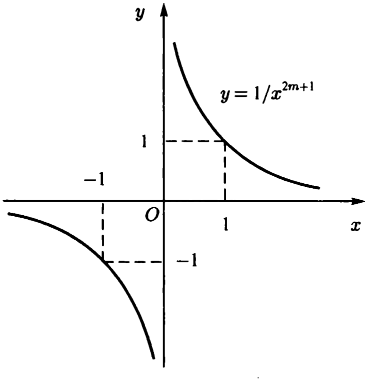


Рис. 6.15

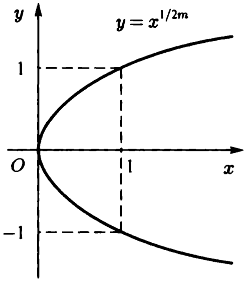


Рис. 6.16

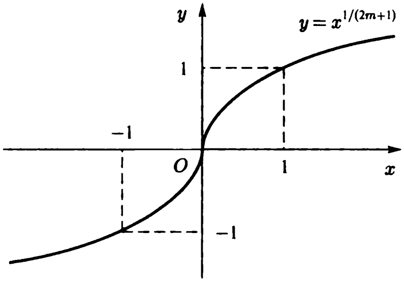


Рис. 6.17

5. Функция $y = x^{m/n}$ (m/n — несократимая дробь; m, n — натуральные числа) при n — нечетном и m — четном определена в промежутке $-\infty < x < +\infty$; ось Oy — ось симметрии графика (рис. 6.18) и, при $m < n$, одновременно касательная в точке $O(0; 0)$. График проходит через точки $(1; 1)$, $(-1; 1)$.

Если m — четное, n — нечетное и $m > n$, то график функции $y = x^{m/n}$, определенной при $-\infty < x < +\infty$, аналогичен графику $y = x^2$ (рис. 6.12); Oy — ось симметрии; Ox — касательная к графику в точке $O(0; 0)$.

Если m и n — нечетные, то график функции $y = x^{m/n}$, определенной при любом x, центрально симметричен относительно точки $O(0; 0)$; при $m > n$ график функции аналогичен графику $y = x^3$ (рис. 6.13); ось Ox — касательная к графику в точке $O(0; 0)$; при $m < n$ график функции аналогичен графику $y = x^{1/3}$ (рис. 6.17); ось Oy — касательная к графику в точке $O(0; 0)$.

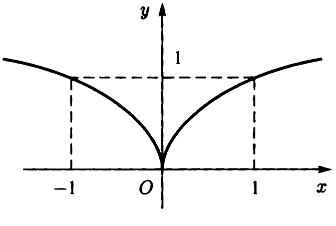


Рис. 6.18

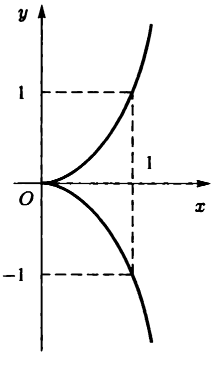


Рис. 6.19

При n — четном и $m > n$ функция $y = x^{m/n}$ двузначна и определена при $0 \leqslant x < +\infty$. Ось Ox — касательная к графику в точке $O(0; 0)$ (рис. 6.19).

Если n — четное и $m < n$, то график двузначной функции $y = x^{m/n}$ аналогичен графику $y = x^{1/2}$ (рис. 6.16).

6. Функция $y = x^{-m/n}$ (m, n — натуральные) имеет в точке $x = 0$ разрыв. Оси координат являются асимптотами графика. При n — четном функция определена в промежутке $0 < x < +\infty$, а при n — нечетном — для любого $x \neq 0$.

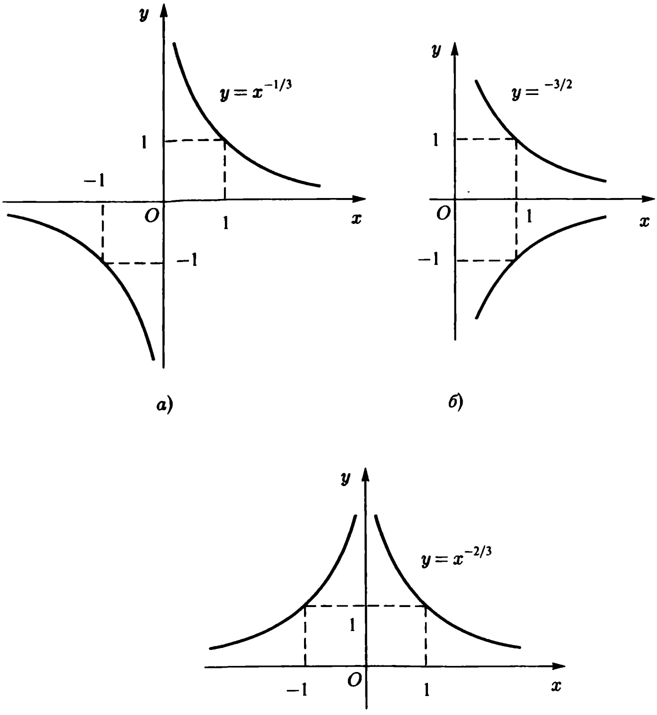


Рис. 6.20

Симметрия графиков относительно осей координат или начала координат зависит от четности и нечетности m и n. Все графики проходят через точку $(1; 1)$ (рис. 6.20 *а–в*).

6.5. Тригонометрические функции

6.5.1. Определения тригонометрических функций

Пусть φ — величина центрального угла AOM, опирающегося на дугу окружности AM длиной s (рис. 6.21). Угол измеряется в градусах или радианах. Радианная мера угла является безразмерной и равна отношению дуги s к радиусу окружности r, т. е. $\varphi = s/r$. За единицу измерения углов берется **радиан** — центральный угол, для которого $s = r$. Радианная мера полного угла равна 2π, а прямого $\pi/2$. Если $\overline{\varphi}$ — величина какого-либо угла в градусах, а φ — в радианах, то

$$\varphi = \frac{\pi}{180} \cdot \overline{\varphi} = 0{,}017453 \cdot \overline{\varphi},$$

$$\overline{\varphi} = \frac{180^\circ}{\pi} \varphi = 57{,}295780^\circ \cdot \varphi.$$

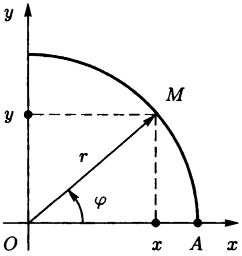


Рис. 6.21

Пусть $M(x, y)$ — точка на окружности радиуса r (рис. 6.21). Величина φ угла AOM, отсчитываемого от положительного направления OA оси Ox против часовой стрелки, считается положительной, а по часовой стрелке — отрицательной. **Тригонометрические функции** действительного аргумента φ определяются равенствами:

$$\sin\varphi = \frac{x}{r} \quad (\textbf{синус}), \qquad \cos\varphi = \frac{y}{r} \quad (\textbf{косинус}),$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{y}{x} = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} \quad (\textbf{тангенс}), \qquad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{x}{y} = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi} \quad (\textbf{котангенс}),$$

$$\sec\varphi = \frac{r}{x} = \frac{1}{\cos\varphi} \quad (\textbf{секанс}), \qquad \operatorname{cosec}\varphi = \frac{r}{y} = \frac{1}{\sin\varphi} \quad (\textbf{косеканс}).$$

Если $r = 1$, то $\sin\varphi = y$, $\cos\varphi = x$, где x и y — абсцисса и ордината точки M. Знаки значений тригонометрических функций зависят от координатной четверти, в которой находятся аргумент φ:

четверть	аргумент	$\sin\varphi$	$\cos\varphi$	$\mathrm{tg}\,\varphi$	$\mathrm{ctg}\,\varphi$
I	$0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$	+	+	+	+
II	$\frac{\pi}{2} < \varphi < \pi$	+	−	−	−
III	$\pi < \varphi < \frac{3}{2}\pi$	−	−	+	+
IV	$\frac{3}{2}\pi < \varphi < 2\pi$	−	+	−	−

Аргумент тригонометрических функций — угол, измеряемый в градусах или радианах. Далее везде, если не оговорено противное, углы измеряются в радианах, при этом аргумент считается числом, не имеющим размерности.

6.5.2. Свойства тригонометрических функций

Синус: $y = f(x) \equiv \sin x$. Область определения: $-\infty < x < +\infty$. Область изменения (множество значений): $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Функция нечетная; нули: $x_k = k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; периодическая с периодом $T = 2\pi$; точки экстремума: $x_k = \pi/2 + k\pi$; точки перегиба: $x_k = k\pi$; участки монотонности: возрастает при $-\pi/2 + 2k\pi < x < \pi/2 + 2k\pi$, убывает при $\pi/2 + 2k\pi < x < 3\pi/2 + 2k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. График приведен на рис. 6.22.

Косинус: $y = f(x) \equiv \cos x$ (рис. 6.23). Область определения: $-\infty < x < +\infty$. Множество значений: $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Функция четная; нули: $\pi/2 + k\pi$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$; периодическая с периодом $T = 2\pi$; точки экстремума: $x_k = k\pi$;

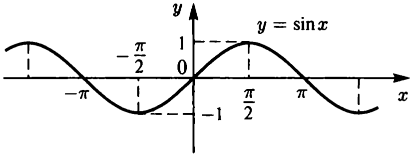


Рис. 6.22

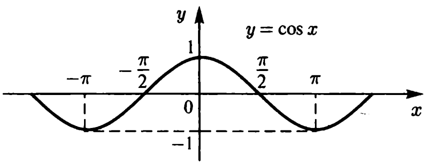


Рис. 6.23

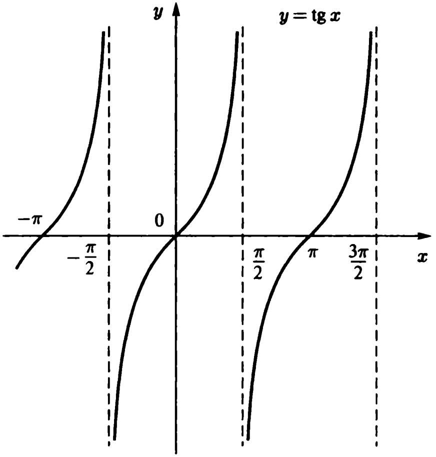


Рис. 6.24

точки перегиба: $\pi/2 + k\pi$; участки монотонности: возрастает при $-\pi + 2k\pi < x < 2k\pi$, убывает при $2k\pi < x < \pi + 2k\pi$ (здесь $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

Тангенс: $y = f(x) \equiv \operatorname{tg} x$ (рис. 6.24). Область определения: $-\infty < x < +\infty$, $x \neq \pi/2 + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Область изменения: $-\infty < y < +\infty$. Функция нечетная; нули $x_k = k\pi$ являются также точками перегиба; периодическая: $T = \pi$; участки монотонности: возрастает при $-\pi/2 + k\pi < x < \pi/2 + k\pi$; вертикальные асимптоты: $x = \pi/2 + k\pi$.

Котангенс: $y = f(x) \equiv \operatorname{ctg} x$ (рис. 6.25). Область определения: $-\infty < x < +\infty$, $x \neq k\pi$. Область изменения: $-\infty < y < +\infty$. Функция нечетная; нули $x_k = \pi/2 + k\pi$ являются также точками перегиба; периодическая: $T = \pi$; убывает при $k\pi < x < \pi + k\pi$; вертикальные асимптоты: $x = k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm, 2, \ldots$).

Секанс: $y = f(x) \equiv \sec x$ (рис. 6.26). Область определения: $-\infty < x < +\infty$, $x \neq \pi/2 + k\pi$. Область изменения: $-\infty < x \leqslant -1$, $1 \leqslant x < +\infty$. Функция четная; не имеет нулей; периодическая, $T = 2\pi$; точки экстремума: минимумы в точках $2k\pi$, максимумы в точках $\pi + 2k\pi$; участки монотонности (возрастания и убывания) отделены друг от друга соседними точками экстремума (при этом $x \neq \pi/2 + k\pi$); вертикальные асимптоты: $x = \pi/2 + k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$).

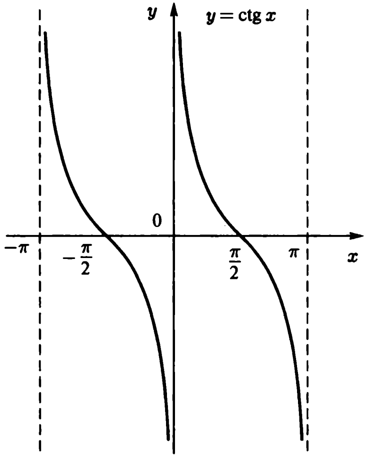


Рис. 6.25

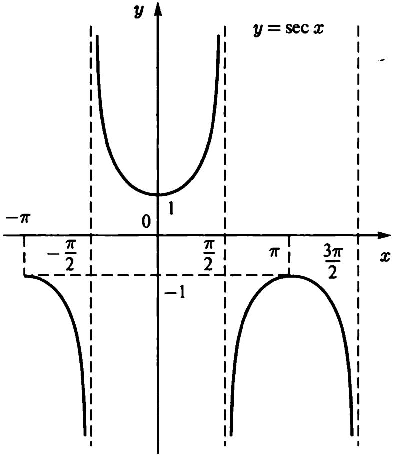


Рис. 6.26

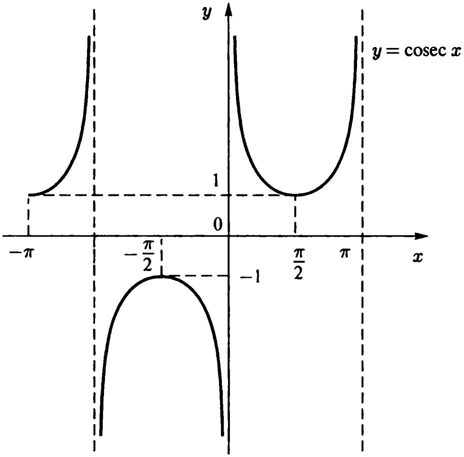


Рис. 6.27

Косеканс: $y = f(x) \equiv \operatorname{cosec} x$ (рис. 6.27). Область определения: $-\infty < x < +\infty$, $x \neq k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$). Область изменения: $-\infty < x \leqslant -1$, $1 \leqslant x < +\infty$. Функция нечетная; не имеет нулей; периодическая, $T = 2\pi$; точки экстремума: минимумы — в точках $\pi/2 + 2k\pi$, максимумы — в точках $3/2\pi + 2k\pi$; участки монотонности (возрастания и убывания) отделены друг от друга соседними точками экстремума (при этом $x \neq k\pi$); вертикальные асимптоты: $x = k\pi$.

6.5.3. Значения тригонометрических функций при некоторых значениях аргумента

Значение аргумента в радианах и градусах будем обозначать через φ и $\overline{\varphi}$ соответственно.

При $\varphi = 0$ ($\overline{\varphi} = 0°$): $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, $\operatorname{tg} 0 = 0$, $\operatorname{ctg} 0$ — не существует.

При $\varphi = \pi/6$ ($\overline{\varphi} = 30°$): $\sin(\pi/6) \equiv \sin 30° = 1/2$; $\cos(\pi/6) = \sqrt{3}/2 \approx 0{,}866025$; $\operatorname{tg}(\pi/6) = \sqrt{3}/3 \approx 0{,}577350$; $\operatorname{ctg}(\pi/6) = \sqrt{3} \approx 1{,}732051$.

При $\varphi = \pi/4$ ($\overline{\varphi} = 45°$): $\sin(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \approx 0{,}707107$; $\cos(\pi/4) = \sqrt{2}/2 \approx 0{,}707107$; $\operatorname{tg}(\pi/4) = 1$; $\operatorname{ctg}(\pi/4) = 1$.

При $\varphi = \pi/3$ ($\overline{\varphi} = 60°$): $\sin(\pi/3) = \sqrt{2}/2 \approx 0{,}866025$; $\cos(\pi/3) = 1/2$; $\operatorname{tg}(\pi/3) = \sqrt{3} \approx 1{,}732051$; $\operatorname{ctg}(\pi/3) = \sqrt{3}/3 \approx 0{,}577350$.

При $\varphi = \pi/2$ ($\bar{\varphi} = 90°$): $\sin(\pi/2) = 1$; $\cos(\pi/2) = 0$; $\operatorname{tg}(\pi/2)$ — не существует; $\operatorname{ctg}(\pi/2) = 0$.

Для нахождения значений редко применяемых функций $\sec\varphi$ и $\operatorname{cosec}\varphi$ можно воспользоваться их выражениями через $\cos\varphi$ и $\sin\varphi$ (в случае деления на нуль соответствующая функция не определена).

6.5.4. Формулы приведения

Если аргумент тригонометрической функции $\varphi \geqslant 2\pi$, то для нахождения значений функции надо учитывать ее периодичность. **Формулы приведения** позволяют сводить значения тригонометрических функций для значений аргумента во II, III, IV четвертях к значениям функции от аргументов в I четверти ($0 \leqslant x \leqslant \pi/2$).

1) $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cos\varphi$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \sin\varphi$,
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \operatorname{ctg}\varphi$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \operatorname{tg}\varphi$;

2) $\sin\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = \cos\varphi$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\sin\varphi$,
$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\operatorname{ctg}\varphi$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} + \varphi\right) = -\operatorname{tg}\varphi$;

3) $\sin(\pi \pm \varphi) = \mp\sin\varphi$, $\cos(\pi \pm \varphi) = -\cos\varphi$,
$\operatorname{tg}(\pi \pm \varphi) = \pm\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{ctg}(\pi \pm \varphi) = \pm\operatorname{ctg}\varphi$;

4) $\sin\left(\frac{3}{2}\pi \pm \varphi\right) = -\cos\varphi$, $\cos\left(\frac{3}{2}\pi \pm \varphi\right) = \pm\sin\varphi$,
$\operatorname{tg}\left(\frac{3}{2}\pi \pm \varphi\right) = \mp\operatorname{ctg}\varphi$, $\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi \pm \varphi\right) = \mp\operatorname{tg}\varphi$;

5) $\sin(2\pi - \varphi) = -\sin\varphi$, $\cos(2\pi - \varphi) = \cos\varphi$,
$\operatorname{tg}(2\pi - \varphi) = -\operatorname{tg}\varphi$, $\operatorname{ctg}(2\pi - \varphi) = -\operatorname{ctg}\varphi$.

6.5.5. Соотношения между тригонометрическими функциями одного аргумента

$$\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1, \quad \operatorname{tg}\varphi \cdot \operatorname{ctg}\varphi = 1,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}, \quad \operatorname{ctg}\varphi = \frac{\cos\varphi}{\sin\varphi}, \quad 1 + \operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{\cos^2\varphi},$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\varphi = \frac{1}{\sin^2\varphi}, \quad \sec\varphi = \frac{1}{\cos\varphi}, \quad \operatorname{cosec}\varphi = \frac{1}{\sin\varphi},$$

$$\sin\varphi = \pm\sqrt{1-\cos^2\varphi} = \frac{\operatorname{tg}\varphi}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\varphi}},$$

$$\cos\varphi = \pm\sqrt{1-\sin^2\varphi} = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\varphi}} = \frac{\operatorname{ctg}\varphi}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\varphi}},$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{ctg}\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = \frac{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}{\cos\varphi},$$

$$\operatorname{ctg}\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\pm\sqrt{1-\sin^2\varphi}}{\sin\varphi} = \frac{\cos\varphi}{\pm\sqrt{1-\cos^2\varphi}}.$$

Здесь знак перед каждым радикалом определяется координатной четвертью, в которой находится аргумент (угол) φ.

6.5.6. Тригонометрические функции половинного аргумента и кратных аргументов

1. Половинный аргумент $\varphi/2$.

$$\sin\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}, \quad \cos\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{1+\cos\varphi}} = \frac{1-\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\varphi}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\varphi}{1-\cos\varphi}} = \frac{1+\cos\varphi}{\sin\varphi} = \frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}.$$

Здесь знак перед радикалом определяется четвертью, в которой находится аргумент (угол) $\varphi/2$.

2. Кратные аргументы $n\varphi$ ($n = 2; 3; 4$).

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi},$$

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi = 1 - 2\sin^2\varphi = \frac{1-\operatorname{tg}^2\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi},$$

$$\operatorname{tg} 2\varphi = \frac{2\operatorname{tg}\varphi}{1-\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{2}{\operatorname{ctg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi},$$

$$\operatorname{ctg} 2\varphi = \frac{\operatorname{ctg}^2\varphi - 1}{2\operatorname{ctg}\varphi} = \frac{\operatorname{ctg}\varphi - \operatorname{tg}\varphi}{2},$$

$$\sin 3\varphi = 3\sin\varphi - 4\sin^3\varphi, \quad \cos 3\varphi = 4\cos^3\varphi - 3\cos\varphi,$$

$$\operatorname{tg} 3\varphi = \frac{3\operatorname{tg}\varphi - \operatorname{tg}^3\varphi}{1 - 3\operatorname{tg}^2\varphi}, \quad \operatorname{ctg} 3\varphi = \frac{\operatorname{ctg}^3\varphi - 3\operatorname{ctg}\varphi}{3\operatorname{ctg}^2\varphi - 1},$$

$$\sin 4\varphi = 8\cos^3\varphi\sin\varphi - 4\cos\varphi\sin\varphi,$$

$$\cos 4\varphi = 8\cos^4\varphi - 8\cos^2\varphi + 1,$$

$$\operatorname{tg} 4\varphi = \frac{4\operatorname{tg}\varphi - 4\operatorname{tg}^3\varphi}{1 - 6\operatorname{tg}^2\varphi + \operatorname{tg}^4\varphi}, \quad \operatorname{ctg} 4\varphi = \frac{\operatorname{ctg}^4\varphi - 6\operatorname{ctg}^2\varphi + 1}{4\operatorname{ctg}^3\varphi - 4\operatorname{ctg}\varphi}.$$

6.5.7. Тригонометрические функции суммы и разности двух аргументов

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta \mp 1}{\operatorname{ctg}\beta \pm \operatorname{ctg}\alpha}.$$

Здесь α и β — два аргумента (угла).

6.5.8. Суммы, разности и произведения тригонометрических функций

1. Суммы и разности функций.

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$p\cos\alpha + q\sin\alpha = r\sin(\alpha+\varphi) = r\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha - \varphi\right)$$

$\left(r = \sqrt{p^2+q^2},\ \sin\varphi = \frac{p}{r},\ \cos\varphi = \frac{q}{r};\ p \text{ и } q\right.$ могут иметь любой знак),

$$\cos\alpha + \sin\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{2}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha\cos\beta},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \pm\frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\sin\alpha\sin\beta}.$$

2. Произведения функций.

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right],$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left[\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right],$$

$$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{\operatorname{ctg}\alpha + \operatorname{ctg}\beta},$$

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta) = \cos^2\beta - \cos^2\alpha,$$

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\alpha.$$

6.5.9. Степени тригонометрических функций

$$\sin^2\varphi = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\varphi), \qquad \cos^2\varphi = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\varphi),$$

$$\sin^3\varphi = \frac{1}{4}(3\sin\varphi - \sin 3\varphi), \qquad \cos^3\varphi = \frac{1}{4}(3\cos\varphi + \cos 3\varphi),$$

$$\sin^4\varphi = \frac{1}{8}(\cos 4\varphi - 4\cos 2\varphi + 3), \quad \cos^4\varphi = \frac{1}{8}(\cos 4\varphi + 4\cos 2\varphi + 3).$$

6.5.10. Обратные тригонометрические функции

Функции, обратные к тригонометрическим функциям и называемые **круговыми функциями** (или **аркфункциями**, или **обратными тригонометрическим функциями**), определяются как решения уравнений $\sin y = x$, $\cos y = x$, $\operatorname{tg} y = x$, $\operatorname{ctg} y = x$ при каждом заданном значении x (относительно переменной y):

$$y = \operatorname{Arcsin} x, \quad y = \operatorname{Arccos} x, \quad y = \operatorname{Arctg} x, \quad y = \operatorname{Arcctg} x$$

и носят названия **арксинус**, **арккосинус**, **арктангенс**, **арккотангенс** соответственно. Таким образом, здесь находится значение аргумента тригонометрической функции y по заданному ее значению x, например, $\sin(\operatorname{Arcsin} x) = x$. Поскольку тригонометрические функции периодические, обратные к ним функции бесконечнозначны. Графики бесконечнозначных обратных функций получаются из графиков соответствующих тригонометрических функций зеркальным отображением относительно прямой $y = x$.

Однозначные ветви многозначных аркфункций (**главные значения**) обозначаются соответственно $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ (иногда используются обозначения $\sin^{-1} x$, $\cos^{-1} x$, $\operatorname{tg}^{-1} x$, $\operatorname{ctg}^{-1} x$) и определяются следующим образом:

Функция	Область определения	Область изменения	Монотонность
$y = \arcsin x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	$-\pi/2 \leqslant y \leqslant \pi/2$	возрастает
$y = \arccos x$	$-1 \leqslant x \leqslant 1$	$0 \leqslant y \leqslant \pi$	убывает
$y = \operatorname{arctg} x$	$-\infty < x < +\infty$	$-\pi/2 < y < \pi/2$	возрастает
$y = \operatorname{arcctg} x$	$-\infty < x < +\infty$	$0 < y < \pi$	убывает

Графики однозначных главных ветвей аркфункций приведены на рис. 6.28–6.31.

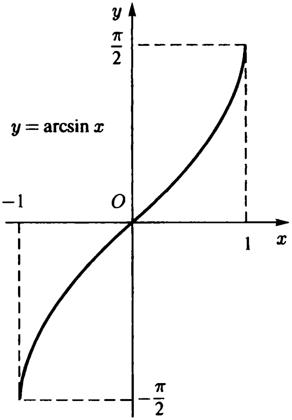


Рис. 6.28

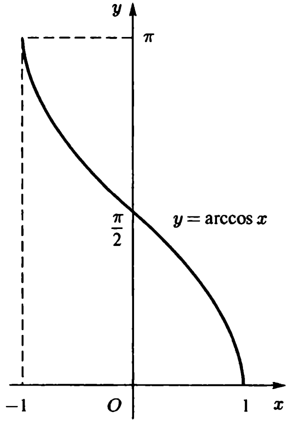


Рис. 6.29

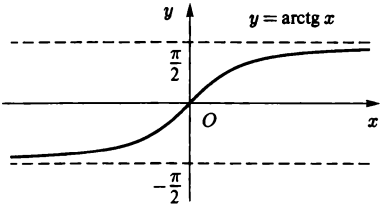


Рис. 6.30

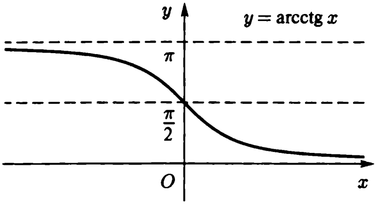


Рис. 6.31

В частности,

$$\arcsin 0{,}5 = \frac{\pi}{6} \ \left(\sin\frac{\pi}{6} = 0{,}5\right); \quad \arccos 0 = \frac{\pi}{2} \ \left(\cos\frac{\pi}{2} = 0\right);$$

$$\operatorname{arctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{3} \ \left(\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} = \sqrt{3}\right); \quad \operatorname{arcctg} 1 = \frac{\pi}{4} \ \left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4} = 1\right).$$

Многозначные аркфункции связаны с однозначными соотношениями:

$$\operatorname{Arcsin} x = (-1)^n \arcsin x + n\pi,$$

$$\operatorname{Arccos} x = \pm \arccos x + 2n\pi,$$

$$\operatorname{Arctg} x = \operatorname{arctg} x + n\pi,$$

$$\operatorname{Arcctg} x = \operatorname{arcctg} x + n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Некоторые соотношения между обратными тригонометрическими функциями.

$$\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2},$$

$$\operatorname{arctg} x + \operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2},$$

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x = \operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x = \operatorname{arcctg}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x = \arcsin\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\operatorname{arcctg} x = \pi - \operatorname{arcctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x = \arccos\frac{x}{\sqrt{1+x^2}},$$

$$\arcsin a + \arcsin b = \begin{cases} \arcsin\left(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right) & \text{при } ab \leqslant 0 \\ & \text{или } a^2+b^2 \leqslant 1; \\ \pi - \arcsin\left(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right) & \text{при } a>0, \\ & b>0 \text{ и } a^2+b^2>1; \\ -\pi - \arcsin\left(a\sqrt{1-b^2} + b\sqrt{1-a^2}\right) & \text{при } a<0, \\ & b<0 \text{ и } a^2+b^2>1; \end{cases}$$

$$\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg} b = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{a+b}{1-ab} & \text{при } ab<1; \\ \pi + \operatorname{arctg}\dfrac{a+b}{1-ab} & \text{при } a>0,\ ab>1; \\ -\pi + \operatorname{arctg}\dfrac{a+b}{1-ab} & \text{при } a<0,\ ab>1. \end{cases}$$

6.5.11. Тригонометрические уравнения

Общие решения тригонометрических уравнений 1) $\sin x = a$, 2) $\cos x = a$ (a — любое действительное число, $|a| \leqslant 1$); 3) $\operatorname{tg} x = b$, 4) $\operatorname{ctg} x = b$ (b — любое действительное число) имеют соответственно вид:

1) $x = (-1)^n \arcsin a + n\pi$,
2) $x = \pm \arccos a + 2n\pi$,
3) $x = \operatorname{arctg} b + n\pi$,
4) $x = \operatorname{arcctg} b + n\pi$, где $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Глава 7

ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

7.1. Первообразная и неопределенный интеграл

7.1.1. Первообразная функция

Функция $F(x)$, дифференцируемая в некотором интервале $(a; b)$, конечном или бесконечном, называется **первообразной функцией** (или просто **первообразной**) для функции $f(x)$ в этом интервале, если для каждого x из $(a; b)$ выполняется $F'(x) = f(x)$ или $dF(x) = F'(x)\,dx = f(x)\,dx$.

Пример 1.

1) Если $f(x) = 3x^2$, то первообразная $F(x) = x^3$ в промежутке $-\infty < x < +\infty$, так как $(x^3)' = 3x^2$ или $d(x^3) = 3x^2\,dx$.
2) Для $f(x) = \cos x$ имеем $F(x) = \sin x$ в промежутке $(-\infty; +\infty)$, так как $(\sin x)' = \cos x$ или $d(\sin x) = \cos x\,dx$.

Если $F_1(x)$ и $F_2(x)$ — любые две первообразные для $f(x)$ в интервале $(a; b)$, то всюду в этом интервале $F_2(x) - F_1(x) = C$, где C — некоторая постоянная. Две первообразные для одной и той же функции $f(x)$ могут различатся лишь на постоянную. Если $\Phi(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$ в $(a; b)$, то любая другая первообразная $F(x)$ для $f(x)$ в $(a; b)$ имеет вид: $F(x) = \Phi(x) + C$, где C — некоторая постоянная. График любой первообразной $F_2(x) = F_1(x) + C$ может быть получен из графика какой-либо одной первообразной $F_1(x)$ посредством параллельного переноса графика $y = F_1(x)$ вдоль оси Oy на величину $M_1M_2 = C$ (при любом значении x) вверх (если $C > 0$), или вниз (если $C < 0$) (рис. 7.1). Для любого x из $(a; b)$ угловые коэффициенты касательных M_1T_1 и M_2T_2 к графикам в точках M_1 и M_2 с одинаковой абсциссой x равны между собой. График любой из первообразных $F(x)$ называют **интегральной линией** функции $f(x)$. Через каждую точку проходит одна и только одна интегральная линия.

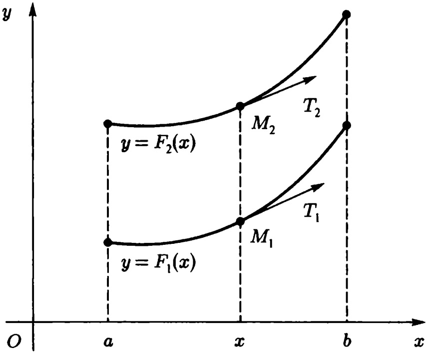


Рис. 7.1

7.1.2. Неопределенный интеграл

Неопределенный интеграл от функции $f(x)$ в интервале $(a; b)$ — это общее выражение для всех первообразных функции $f(x)$ в $(a; b)$, содержащихся в соотношении $F(x) = \Phi(x) + C$, где $\Phi(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$, C — любая постоянная. Обозначение неопределенного интеграла:

$$\int f(x)\,dx.$$

Здесь знак $\int$ называется **знаком интеграла**, $f(x)\,dx$ — **подынтегральным выражением**, $f(x)$ — **подынтегральной функцией**, x — **переменной интегрирования**. Таким образом, любая первообразная $F(x)$ для $f(x)$ в $(a; b)$ имеет вид:

$$F(x) = \int f(x)\,dx \equiv \Phi(x) + C,$$

где $\Phi(x)$ — одна из первообразных для $f(x)$ в $(a; b)$, C — любая постоянная. При этом $f(x)\,dx = F'(x)\,dx = dF(x) = d\Phi(x)$.

Для всякой функции $f(x)$, непрерывной в $(a; b)$, существует первообразная и неопределенный интеграл в $(a; b)$.

Действие нахождения неопределенного интеграла от функции $f(x)$, т. е. нахождение неизвестной функции по ее производной $f(x)$, называется **интегрированием** функции $f(x)$. Интегрирование и дифференцирование — взаимно обратные математические операции. Правильность интегрирования проверяется дифференцированием.

Пример 2. В условиях примера 1 имеем:

1) $\int 3x^2\,dx = x^3 + C$. Проверка: $(x^3 + C)' = 3x^2$.

2) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$. Проверка: $(\sin x + C)' = \cos x$.

Пример 3. Для функции $f(x) = 1/x$ $(x \neq 0)$ имеем при $x > 0$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C, \quad \text{так как} \quad (\ln x + C)' = \frac{1}{x};$$

соответственно при $x < 0$

$$\int \frac{dx}{x} = \ln(-x) + C, \quad \text{так как} \quad [\ln(-x) + C]' = \frac{1}{x}.$$

Объединяя оба эти результата, получим

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C \quad (x \neq 0).$$

7.1.3. Основные свойства неопределенного интеграла

1) $d\left[\int f(x)\,dx\right] = f(x)\,dx$ или $\left[\int f(x)\,dx\right]' = f(x)$.

2) $\int dF(x) = F(x) + C$.

3) $\int Af(x)\,dx = A\int f(x)\,dx$ ($A \neq 0$ — любое число).

4) $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx$.

7.1.4. Таблица основных неопределенных интегралов

1) $\int 0 \cdot dx = C$.

2) $\int 1 \cdot dx = x + C$.

3) $\int x^\alpha\,dx = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$ ($\alpha \neq -1$; если $\alpha < 0$, то $x \neq 0$).

4) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$ $(x \neq 0)$.

5) $\int e^x\,dx = e^x + C$.

6) $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$ $(0 < a \neq 1)$.

7) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C.$

8) $\int \cos x\,dx = \sin x + C.$

9) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = \int (1+\operatorname{ctg}^2 x)\,dx = -\operatorname{ctg} x + C \quad (x \neq n\pi,\ n = 0, \pm 1, \ldots).$

10) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \int (1+\operatorname{tg}^2 x)\,dx = \operatorname{tg} x + C \ (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n = 0, \pm 1, \ldots).$

11) $\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln|\cos x| + C \quad (x \neq \frac{\pi}{2} + n\pi,\ n = 0, \pm 1, \ldots).$

12) $\int \operatorname{ctg} x\,dx = \ln|\sin x| + C \quad (x \neq 2n\pi,\ n = 0, \pm 1, \ldots).$

13) $\int \operatorname{sh} x\,dx = \operatorname{ch} x + C.$

14) $\int \operatorname{ch} x\,dx = \operatorname{sh} x + C.$

15) $\int \operatorname{th} x\,dx = \ln\ \operatorname{ch} x + C.$

16) $\int \operatorname{cth} x\,dx = \ln|\operatorname{sh} x| + C \quad (x \neq 0).$

17) $\int \frac{dx}{\operatorname{ch}^2 x} = \operatorname{th} x + C.$

18) $\int \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x} = -\operatorname{cth} x + C \quad (x \neq 0).$

19) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C = -\arccos\frac{x}{a} + C_1 \quad (|x| < a,\ a > 0).$

20) $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arcctg}\frac{x}{a} + C_1 \quad (a \neq 0).$

21) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + a^2}} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right) + C = \operatorname{Arsh}\frac{x}{a} + C_1 \quad (a > 0).$

22) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 - a^2}\right| + C = \operatorname{Arch}\frac{x}{a} + C_1 \quad (|x| > a > 0).$

23) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C = \frac{1}{a}\operatorname{Arth}\frac{x}{a} + C_1 \quad (|x| < a,\ a > 0).$

24) $\int \frac{dx}{a^2 - x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C = \frac{1}{a}\operatorname{Arcth}\frac{x}{a} + C_1 \quad (|x| > a > 0).$

Формулы 1)–24) проверяются дифференцированием: производные правых частей этих формул равны соответствующим подынтегральным функциям.

Примечание. Если $F(x)$ — первообразная для $f(x)$, то

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C,$$

что доказывается по правилу дифференцирования сложной функции. Благодаря этому свойству таблица неопределенных интегралов может быть расширена.

Производная всякой элементарной функции является также элементарной функцией. В отличие от дифференцирования, результат интегрирования некоторых функций не может быть выражен в элементарных функциях, например:

$$\int e^{-x^2}\,dx, \quad \int \cos(x^2)\,dx, \quad \int \sin(x^2)\,dx,$$

$$\int \frac{dx}{\ln x} \quad (0<x\neq 1), \quad \int \frac{\cos x}{x}\,dx \quad (x\neq 0), \quad \int \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Функции, представляемые этими интегралами, хотя и существуют, но не являются элементарными.

7.1.5. Основные методы интегрирования

1. **Метод разложения.** Если $f(x)=f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)$, то

$$\int f(x)\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx + \ldots + \int f_n(x)\,dx.$$

Пример 4.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}\,dx = \int\left(\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx = \int (x^{1/2}+x^{-1/2})\,dx =$$
$$= \frac{2}{3}x^{3/2}+C_1+2x^{1/2}+C_2 = \frac{2}{3}x\sqrt{x}+2\sqrt{x}+C \quad (C=C_1+C_2).$$

Примечание. Обычно в промежуточных вычислениях не пишут произвольные постоянные для каждого интеграла.

2. **Метод подстановки (метод замены переменной интегрирования)** заключается в том, что вместо переменной интегрирования x в неопределенном интеграле

$$\int f(x)\,dx$$

вводится другая (вспомогательная) переменная t, связанная с x соотношением (подстановкой) $t=\varphi(x)$, $\varphi(x)$ — функция, имеющая непрерывную производную в некотором промежутке изменения x. Обычно подбирается такая функция $t = \varphi(x)$, что справедливо равенство $f(x) = g[\varphi(x)]\varphi'(x)$, где $g[\varphi(x)]$ — сложная функция от x, причем неопределенный интеграл

$$\int g(t)\,dt = G(t) + C$$

находится проще, чем исходный. Тогда

$$\int f(x)\,dx = G[\varphi(x)] + C.$$

Правильность этой формулы проверяется дифференцированием обеих ее частей с использованием правила дифференцирования сложной функции:

$$\frac{d}{dx}G[\varphi(x)] = G'[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)$$

и учетом равенства $G'(t) = g(t)$.

В частности, для интеграла

$$J = \int \frac{f'(x)}{f(x)}\,dx,$$

применяя подстановку $t = f(x)$, $dt = f'(x)\,dx$, получим

$$J = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + C = \ln|f(x)| + C \quad (f(x) \neq 0).$$

Если подынтегральная функция имеет вид $f(ax+b)$, то иногда интеграл удается найти подстановкой $t = ax + b$.

В ряде случаев может быть использована подстановка $x = \psi(t)$, где $\psi(t)$ имеет непрерывную производную в некотором промежутке изменения переменной t, приводящая к следующей формуле интегрирования

$$\int f(x)\,dx = \int f[\psi(t)]\psi'(t)\,dt + C,$$

в правой части которой после интегрирования следует вернуться к исходной переменной интегрирования x, используя функцию, обратную к $x = \psi(t)$.

Пример 5.

1) $\int \sin 2x\,dx = \left\{\text{подстановка: } t = 2x;\ \text{далее: } dt = (2x)'\,dx = 2\,dx,\ dx = \frac{dt}{2}\right\} = \frac{1}{2}\int \sin t\,dt = -\frac{1}{2}\cos t + C = \{$возвращаемся к исходной переменной x, используя равенство $t = 2x\} = -\frac{1}{2}\cos 2x + C$. Проверка: $\left[-\frac{1}{2}\cos 2x + C\right]' = \sin 2x$.

2) $\int \sqrt{3x-2}\,dx = \left\{t = 3x-2,\ dt = d(3x-2) = 3\,dx,\ dx = \frac{1}{3}\,dt\right\} = \int \frac{1}{3}\sqrt{t}\,dt =$
$= \frac{1}{3}\int t^{1/2}\,dt = \frac{1}{3}\frac{t^{3/2}}{3/2} + C = \frac{2}{9}(3x-2)^{3/2} + C.$

3) $\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^5 x} = \{t = \cos x,\ dt = (\cos x)'\,dx = -\sin x\,dx\} = -\int \frac{dt}{t^5} = -\int t^{-5}\,dt =$
$= \frac{1}{4}t^{-4} + C = \frac{1}{4\cos^4 x} + C.$

4) $\int \frac{dx}{2x+3} = \left\{t = 2x+3,\ dt = 2\,dx,\ dx = \frac{dt}{2}\right\} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t| + C =$
$= \frac{1}{2}\ln|2x+3| + C.$

5) $\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^{10}-3}} = \left\{t = x^5,\ dt = 5x^4\,dx,\ x^4\,dx = \frac{dt}{5}\right\} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-3}} =$
$= \ln\left|t + \sqrt{t^2-3}\right| + C = \ln\left|x^5 + \sqrt{x^{10}-3}\right| + C.$

6) $\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+1}} = \{$ Выделим в подкоренном выражении **полный квадрат**:
$-x^2-2x+1 = -(x^2+2x-1) = -(x^2+2x+1-2) = -(x+1)^2+2$. Подстановка:
$t = x+1\} = \int \frac{dt}{\sqrt{2-t^2}} = \arcsin\frac{t}{\sqrt{2}} + C = \arcsin\frac{x+1}{\sqrt{2}} + C.$

7) $\int e^{\sin x}\cos x\,dx = \{t = \sin x,\ dt = \cos x\,dx\} = \int e^t\,dt = e^t + C = e^{\sin x} + C.$

8) $\int \sqrt{a^2-x^2}\,dx = \{x = a\sin t\ (a > 0),\ dx = a\cos t\,dt,\ a^2 - x^2 = a^2 - a^2\sin^2 t =$
$= a^2\cos^2 t\} = \int a\cos t \cdot a\cos t\,dt = a^2\int \cos^2 t\,dt = \left\{\cos^2 t = \frac{1}{2}(1+\cos 2t)\right\} =$
$= \frac{a^2}{2}\int dt + \frac{a^2}{2}\int \cos 2t\,dt = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C = \{\sin 2t = 2\sin t\cos t = 2\sin t\times$
$\times\sqrt{1-\sin^2 t}\} = \frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{2}\sin t\cdot\sqrt{1-\sin^2 t} + C = \left\{t = \arcsin\frac{x}{a},\ \sin\left(\arcsin\frac{x}{a}\right) =\right.$
$\left.= \frac{x}{a}\right\} = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{a^2}{2}\cdot\frac{x}{a}\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} + C = \frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + C.$

3. Метод интегрирования по частям. Если функции $u(x)$ и $v(x)$ — непрерывно дифференцируемы в некотором интервале, то справедлива формула

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)\cdot v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx,$$

или

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du.$$

Пример 6.

1) $\int xe^x\,dx = \Big\{$обозначим: $u = x,\ dv = e^x\,dx$; отсюда следует: $du = dx,\ v = \int dv =$
$= \int e^x\,dx = e^x\Big\} = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x + C$. Проверка: $(xe^x - e^x + C)' = xe^x$.

2) $\int x\ln x\,dx = \Big\{u = \ln x,\ dv = x\,dx;\ du = (\ln x)'\,dx = \dfrac{dx}{x},\ v = \int dv = \int x\,dx =$
$= \dfrac{x^2}{2}\Big\} = (\ln x)\dfrac{x^2}{2} - \int \dfrac{x^2}{2}\,\dfrac{dx}{x} = \dfrac{x^2}{2}\ln x - \dfrac{x^2}{4} + C.$

3) $\int x\sin x\,dx = \Big\{u = x,\ dv = \sin x\,dx;\ du = dx,\ v = \int dv = \int \sin x\,dx = -\cos x\Big\} =$
$= -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C.$

4) $\int \ln x\,dx = \Big\{u = \ln x,\ dv = dx;\ du = \dfrac{dx}{x},\ v = \int dx = x\Big\} = (\ln x)x - \int x\dfrac{dx}{x} =$
$= x\ln x - x + C.$

5) $\int x^2\cos 3x\,dx = \Big\{u = x^2,\ dv = \cos 3x\,dx;\ du = (x^2)'\,dx = 2x\,dx,\ v = \int \cos 3x\,dx =$
$= \int \cos 3x\cdot\dfrac{1}{3}\,d(3x) = \dfrac{1}{3}\sin 3x\Big\} = \dfrac{1}{3}x^2\sin 3x - \dfrac{2}{3}\cdot J$, где $J = \int x\sin 3x\,dx$.

Интеграл J вычислим также по частям:

$$J = \int x\sin 3x\,dx = \Big\{u = x,\ dv = \sin 3x\,dx;\ du = dx,\ v = \int \sin 3x\,dx =$$
$$= \int \sin 3x\cdot\frac{1}{3}\cdot d(3x) = -\frac{1}{3}\cos 3x\Big\} = -\frac{1}{3}x\cos 3x + \frac{1}{9}\sin 3x + C.$$

Окончательно находим:

$$\int x^2\cos 3x\,dx = \frac{1}{3}x^2\sin 3x + \frac{2}{9}x\cos 3x - \frac{2}{27}\sin 3x + C.$$

6) $J = \int e^x\cos x\,dx = \Big\{u = e^x,\ dv = \cos x\,dx;\ du = e^x\,dx,\ v = \int dv = \int \cos x\,dx =$
$= \sin x\Big\} = e^x\sin x - \int \sin x\cdot e^x\,dx = e^x\sin x - J_1$, где $J_1 = \int e^x\cdot\sin x\,dx$.

Вычислим J_1 также по частям:

$$J_1 = \int e^x\sin x\,dx = \Big\{u = e^x,\ dv = \sin x\,dx;\ du = e^x\,dx,\ v = \int dv =$$
$$= \int \sin x\,dx = -\cos x\Big\} = -e^x\cos x + \int e^x\cos x\,dx = -e^x\cos x\,dx + J,$$

где $J = \int e^x \cos x\,dx$ — исходный интеграл. Имеем систему двух уравнений для нахождения J и J_1:

$$J = e^x \sin x - J_1, \quad J_1 = -e^x \cos x + J,$$

решая которую, найдем

$$J = \frac{1}{2}(e^x \sin x + e^x \cos x), \quad J_1 = \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x).$$

Проверка: $J' = e^x \cos x$, $J_1' = e^x \sin x$.

7.1.6. Интегрирование рациональных функций

1. Отношение двух действительных полиномов $P(x)$ и $Q(x)$, не имеющих общих множителей:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},$$

где

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \ldots + a_0,$$
$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_0,$$

называется **рациональной функцией** (**дробно-рациональной функцией**, или **рациональной дробью**). Если степень $P(x)$ меньше степени $Q(x)$, то дробь называется **правильной**, в противном случае — **неправильной**. Если дробь неправильная, то делением $P(x)$ на $Q(x)$ ее можно записать в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = W(x) + \frac{P_1(x)}{Q(x)},$$

где $W(x)$ — полином, называемый **целой частью**; $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ — правильная дробь.

Пример 7. $\dfrac{x^4 + x^2 - 3x}{x^2 + 1} = x^2 - \dfrac{3x}{x^2 + 1}$.

Правильные дроби вида:

$$\frac{A_k}{(x-c)^k}, \quad \frac{M_k x + N_k}{(x^2 + px + q)^k},$$

где k — натуральное число; c, p, q, A_k, M_k, N_k — действительные числа; квадратный полином $x^2 + px + q$ не имеет действительных корней ($p^2 - 4q < 0$), т. е. не раскладывается на действительные множители первой степени, называются **элементарными** (**простейшими**) рациональными дробями.

Для интегрирования неправильной дроби следует: 1) представить ее в виде суммы целой части и правильной дроби, 2) полином $Q(x)$ разложить на множители вида $x-c$ и x^2+px+q, где $p^2-4q<0$:

$$Q(x)=b_n(x-c_1)^{\alpha_1}\dots(x-c_r)^{\alpha_r}(x^2+p_1x+q_1)^{\beta_1}\dots(x^2+p_sx+q_s)^{\beta_s},$$

3) правильную дробь $\dfrac{P_1(x)}{Q(x)}$ разложить на сумму элементарных дробей, при этом каждому сомножителю $(x-c)^\alpha$ в разложении $Q(x)$ на множители соответствует сумма элементарных дробей

$$\frac{A_1}{x-c}+\frac{A_2}{(x-c)^2}+\dots+\frac{A_\alpha}{(x-c)^\alpha},$$

а каждому сомножителю $(x^2+px+q)^\beta$ — сумма элементарных дробей

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\dots+\frac{M_\beta x+N_\beta}{(x^2+px+q)^\beta}.$$

При этом некоторые из коэффициентов $A_\alpha, M_\alpha, N_\alpha$ могут оказаться равными нулю. Для нахождения неизвестных коэффициентов разложения дроби P_1/Q на сумму элементарных дробей следует привести эти элементарные дроби к общему знаменателю $Q(x)$ и сравнить затем коэффициенты при одинаковых степенях x в числителях обеих частей равенства. В результате получается система уравнений для нахождения этих коэффициентов. В этом и состоит **метод неопределенных коэффициентов** разложения рациональной дроби на элементарные.

Пример 8. Разложить на сумму элементарных дробей правильную дробь

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{x}{x^4-x^2+2x+2}.$$

Решение. Разложим $Q(x)$ на множители:

$$Q(x)=x^4-x^2-2x+2=(x-1)^2(x^2+2x+2),$$

причем полином x^2+2x+2 не имеет действительных корней ($p^2-4q=-4<0$). Разложение на сумму элементарных дробей запишем в виде

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-1}+\frac{A_2}{(x-1)^2}+\frac{M_1x+N_1}{x^2+2x+2}.$$

Приводя к общему знаменателю $Q(x)$ дроби в правой части равенства, складывая их и приравнивая числители в обеих частях равенства, получим:

$$P(x)=A_1(x-1)(x^2+2x+2)+A_2(x^2+2x+2)+(M_1x+N_1)(x-1)^2.$$

Раскрывая скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях, находим

$$\begin{cases} A_1 + M_1 = 0 \quad (x^3), \\ A_1 + A_2 - 2M_1 + N_1 = 0 \quad (x^2), \\ 2A_2 + M_1 - 2N_1 = 1 \quad (x), \\ -2A_1 + 2A_2 + N_1 = 0 \quad (x^0). \end{cases}$$

Решая эту систему, получим $A_1 = 1/25$, $A_2 = 1/5$, $M_1 = -1/25$, $N_1 = -8/25$. Следовательно, искомое разложение имеет вид

$$\frac{x}{x^4 - x^2 - 2x + 2} = \frac{1}{25(x-1)} + \frac{1}{5(x-1)^2} - \frac{x+8}{25(x^2+2x+2)}. \qquad \triangleright$$

Пример 9. $\dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{9x^2 - 22x + 11}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6} = \dfrac{9x^2 - 22x + 11}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \dfrac{A}{x-1} + \dfrac{B}{x-2} + \dfrac{C}{x-3}.$

Аналогично примеру 8 получим

$$9x^2 - 22x + 11 = x^2(A + B + C) + x(-5A - 4B - 3C) + 6A + 3B + 2C.$$

Имеем систему трех уравнений:

$$1)\ \ 9 = A + B + C, \quad 2)\ \ 22 = 5A + 4B + 3C, \quad 3)\ \ 11 = 6A + 3B + 2C,$$

решая которую, найдем $A = -1$, $B = -3$, $C = 13$. Следовательно, исходная дробь имеет разложение

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = -\frac{1}{x-1} - \frac{3}{x-2} + \frac{13}{x-3}.$$

Интегрирование правильной рациональной дроби сводится к интегрированию элементарных дробей.

2. Интегрирование элементарных дробей.

1) $\displaystyle\int \frac{A\,dx}{x-c} = A\ln|x-c| + C.$

2) $\displaystyle\int \frac{A\,dx}{(x-c)^k} = -\frac{A}{(k-1)(x-c)^{k-1}} + C \quad (k \geqslant 2).$

Интегралы вида 1), 2) вычисляются подстановкой $t = x - c$.

3) Интеграл вида

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}\,dx \quad (p^2 - 4q < 0)$$

вычисляется посредством выделения полного квадрата:

$$x^2 + px + q = x^2 + 2\left(\frac{p}{2}\right)x + \frac{p^2}{4} - \frac{p^2}{4} + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4},$$

и использованием подстановки $t = x + \dfrac{p}{2}$. В результате получим

$$x^2 + px + q = t^2 + a^2,$$

где $a^2 = q - \dfrac{p^2}{4} > 0$, что позволяет свести исходный интеграл к двум табличным:

$$\int \frac{Mx + N}{x^2 + px + q}\,dx = \frac{M}{2}\ln(x^2 + px + q) + \frac{2N - Mp}{\sqrt{4q - p^2}}\operatorname{arctg}\left(\frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}\right) + C.$$

4) Интеграл

$$\int \frac{Mx + N}{(x^2 + px + q)^k}\,dx \quad (k \geqslant 2)$$

подстановкой $t = x + \dfrac{p}{2}$ приводится к виду

$$\int \frac{Mt + L}{(t^2 + a^2)^k}\,dt,$$

где $a^2 = q - \dfrac{p^2}{4}$, $L = \dfrac{2N - Mp}{2}$, интегрирование которого сводится к нахождению двух интегралов, из которых первый вычисляется подстановкой $u = t^2 + a^2$:

$$\int \frac{Mt}{(t^2 + a^2)^k}\,dt = -\frac{M}{2(k-1)(t^2 + a^2)^{k-1}} + C,$$

а второй — по **рекуррентной** (т. е. возвратной) формуле:

$$J_k = \int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^k} = \frac{1}{2(k-1)a^2}\left[\frac{t}{(t^2 + a^2)^{k-1}} + (2k - 3)\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{k-1}}\right].$$

Следовательно, вычисление интеграла J_k сводится к вычислению интеграла J_{k-1}. Повторяя вычисления $(k - 1)$ раз, приходим к интегралу

$$\int \frac{dt}{t^2 + a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{t}{a} + C.$$

Интеграл J_k можно вычислить также тригонометрической подстановкой $t = a \cdot \operatorname{tg} u$.

Пример 10.

1) С учетом примера 8 имеем:

$$\int \frac{x\,dx}{x^4 - x^2 - 2x + 2} = \frac{1}{25}\ln|x - 1| - \frac{1}{5(x-1)} - \frac{1}{50}\ln(x^2 + 2x + 2) - \frac{6}{25}\operatorname{arctg}(x + 1) + C.$$

2) Согласно примеру 9 имеем:

$$\int \frac{9x^2 - 22x + 11}{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}\,dx = -\ln|x - 1| - 3\ln|x - 2| + 13\ln|x - 3| + C.$$

3. Некоторые частные случаи разложения полиномов на действительные множители.

1) $x^3 + a^3 = (x + a)(x^2 - ax + a^2)$ $(p^2 - 4q \equiv -3a^2 < 0)$.

2) $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$ $(p^2 - 4q \equiv -3a^2 < 0)$.

3) $x^4 + a^4 = (x^2 + ax\sqrt{2} + a^2)(x^2 - ax\sqrt{2} + a^2)$ $(p^2 - 4q < 0)$.

4) $x^4 - a^4 = (x - a)(x + a)(x^2 + a^2)$.

(См. также формулы в 1.2.2.)

7.1.7. Интегрирование некоторых иррациональных выражений

Выбором соответствующей подстановки интегралы от некоторых иррациональных выражений удается свести к интегралам от рациональных функций. Далее будем обозначать через

$$R(u, v) = \frac{P(u, v)}{Q(u, v)}$$

рациональную функцию от аргументов u, v, где $P(u, v)$, $Q(u, v)$ — полиномы от двух аргументов u, v, например: $P(u, v) = 2u^2 + uv^2 - 3v^2 + u - v + 1$.

1. Интеграл вида

$$J = \int R\bigl(x, \sqrt[n]{ax + b}\bigr)\, dx$$

вычисляется подстановкой $t = \sqrt[n]{ax + b}$. При этом $t^n = ax + b$, $x = \dfrac{t^n - b}{a}$, $dx = \dfrac{1}{a} n t^{n-1}\, dt$. Получается интеграл от рациональной функции:

$$J = \frac{n}{a} \int R\left(\frac{t^n - b}{a}, t\right) t^{n-1}\, dt.$$

Пример 11. $\displaystyle\int \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}\, dx = \int \frac{\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{x^2}}{\sqrt[4]{x^2} + 1}\, dx = \{t = \sqrt[4]{x},\ x = t^4,\ dx = 4t^3\, dt\} =$
$\displaystyle = 4\int \frac{t + t^2}{t^2 + 1} t^3\, dt = 4\int \frac{t^5 + t^4}{t^2 + 1}\, dt =$ {делим числитель дроби на знаменатель} $=$
$\displaystyle = 4\int \left(t^3 + t^2 - t - 1 + \frac{2}{t^2 + 1}\right) dt = t^4 + \frac{4}{3}t^3 - 2t^2 - 4t + 8\operatorname{arctg} t + C$, где $t = \sqrt[4]{x}$.

2. Интеграл вида

$$J = \int R\left(x, \sqrt[n]{\frac{ax + b}{cx + d}}\right) \quad (ad - bc \neq 0)$$

вычисляется при помощи подстановки

$$t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}; \quad t^n = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad x = \frac{b-t^n d}{ct^n - a}, \quad dx = \frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt.$$

Следовательно,

$$J = \int R\left(\frac{b-t^n d}{ct^n-a}, t\right)\frac{(ad-bc)nt^{n-1}}{(a-ct^n)^2}\,dt.$$

Пример 12. $\int \frac{1}{x}\sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}}\,dx = \left\{t = \sqrt[3]{\frac{x-1}{x+1}},\ x = -\frac{t^3+1}{t^3-1},\ dx = \frac{6t^2\,dt}{(t^3-1)^2}\right\} =$ $= -6\int \frac{t^3\,dt}{(t^3-1)(t^3+1)}$. Затем интеграл от рациональной функции вычисляется согласно 7.1.6.

3. Интеграл вида

$$\int R\left[x, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\alpha}, \left(\frac{ax+b}{cx+d}\right)^{\beta}, \ldots\right] dx,$$

где R — рациональная функция от своих аргументов; $\alpha, \beta, \ldots$ — рациональные числа (простые дроби), при помощи подстановки

$$t^n = \frac{ax+b}{cx+d},$$

в которой n — наименьший общий знаменатель дробей $\alpha, \beta, \ldots$, приводится к интегралу от рациональной функции.

Пример 13. $J = \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x} - \sqrt[3]{x}}$. Здесь $\alpha = \frac{1}{2}, \beta = \frac{1}{3}$. Наименьший общий знаменатель $r = 6$. Подстановкой $t^6 = x$, $dx = 6t^5\,dt$ получим интеграл от рациональной функции

$$J = 6\int \frac{t^{15}\,dt}{t-1} = 6\int\left(t^{14} + t^{13} + t^{12} + \ldots + t + 1 + \frac{1}{t-1}\right)dt =$$

$$= 6\left(\frac{1}{15}t^{15} + \frac{1}{14}t^{14} + \frac{1}{13}t^{13} + \ldots + \frac{1}{2}t^2 + t + \ln|t-1|\right) + C,$$

где $t = \sqrt[6]{x}$.

4. Интеграл от **дифференциального бинома**

$$\int x^m (a + bx^n)^p\,dx,$$

где m, n, p — рациональные числа; $a \neq 0$, $b \neq 0$, может быть приведен к интегралу от рациональной функции только в следующих трех случаях (**теорема Чебышёва**):

1) Если p — целое число, то применяется подстановка $x = t^r$, где r — общий знаменатель дробей m и n.
2) Если $\dfrac{m+1}{n}$ — целое, то используется подстановка $a + bx^n = t^r$, где r — знаменатель дроби p.
3) Если $\dfrac{m+1}{n} + p$ — целое, то применяется подстановка $ax^{-n} + b = t^r$, где r — знаменатель дроби p.

При $n = 1$ эти три случая равносильны, соответственно, следующим:
1) p — целое,
2) m — целое,
3) $m + p$ — целое.

Пример 14. $J = \displaystyle\int \frac{x\,dx}{\sqrt{1+\sqrt[3]{x^2}}}$. Здесь $m = 1$, $n = \dfrac{2}{3}$, $p = -\dfrac{1}{2}$; $\dfrac{m+1}{n} = \dfrac{1+1}{2/3} = 3$. Имеем второй случай и $1+\sqrt[3]{x^2} = t^2$, $x = (t^2-1)^{3/2}$, $dx = 3t(t^2-1)^{1/2}\,dt$. Следовательно, $J = 3\displaystyle\int (t^2-1)^2\,dt = 3\int (t^4 - 2t^2 + 1)\,dt = \frac{3}{5}t^5 - 2t^3 + 3t + C$, где $t = \sqrt{1+x^{2/3}}$.

5. Интеграл вида

$$\int \frac{dx}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

находится выделением **полного квадрата** из квадратного полинома:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2-4ac}{4a}.$$

Затем используется подстановка $t = x + \dfrac{b}{2a}$.

6. Интегралы вида

$$\int R\left(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\right) dx \quad (a \neq 0)$$

сводятся к интегралам от рациональных функций при помощи одной из трех следующих **подстановок Эйлера**:

1) Если $a > 0$, то $\sqrt{ax^2+bx+c} + x\sqrt{a} = t$, $ax^2 + bx + c = (t - x\sqrt{a})^2$, $x = \dfrac{t^2-c}{b+2t\sqrt{a}}$, $\sqrt{ax^2+bx+c} = t - x\sqrt{a} = t - \dfrac{t^2-c}{b+2t\sqrt{a}}\cdot\sqrt{a}$. Подстановка применима в промежутке, где $ax^2 + bx + c \geqslant 0$.
2) Если $a < 0$, $c > 0$ $(ax^2 + bx + c \geqslant 0)$, то применяется подстановка $\sqrt{ax^2+bx+c} = xt + \sqrt{c}$, $x = \dfrac{2\sqrt{c}\,t - b}{a - t^2}$.

3) Если уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ при любом знаке a имеет два разных корня x_1, x_2 (нумерация корней несущественна), то применяется подстановка

$$t = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{x - x_1} = \sqrt{\frac{a(x - x_2)}{x - x_1}}, \quad x = \frac{x_1 t^2 - a x_2}{t^2 - a}.$$

Пример 15. $J = \displaystyle\int \frac{dx}{x + \sqrt{x^2 + x + 1}}$. Здесь $a = 1 > 0$, $b^2 - 4ac = -3 < 0$, $x^2 + x + 1 > 0$. Применяем первую подстановку $\sqrt{x^2 + x + 1} + x = t$, $x^2 + x + 1 = (t - x)^2 = t^2 - 2tx + x^2$, $x = \dfrac{t^2 - 1}{1 + 2t}$, $dx = 2\dfrac{t^2 + t + 1}{(1 + 2t)^2}\,dt$. Исходный интеграл сводится к интегралу от рациональной функции:

$$J = 2\int \frac{t^2 + t + 1}{t(1 + 2t)^2}\,dt.$$

7.1.8. Интегрирование тригонометрических, показательных и гиперболических функций

1. Для нахождения интегралов

$$1) \int \sin^{2n+1} x\,dx, \quad 2) \int \cos^{2n+1} x\,dx,$$

где n — натуральное число, применяют соответственно подстановки:

$$1)\ t = \cos x, \quad 2)\ t = \sin x.$$

Пример 16. $\displaystyle\int \sin^3 x\,dx = \int \sin^2 x \cdot \sin x\,dx = \int (1 - \cos^2 x)\sin x\,dx = \{t = \cos x,$ $dt = (\cos x)'\,dx = -\sin x\,dx\} = -\displaystyle\int (1 - t^2)\,dt = -t + \frac{t^3}{3} + C = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C$.

2. Для нахождения интегралов

$$1) \int \sin^{2n} x\,dx, \quad 2) \int \cos^{2n} x\,dx$$

подынтегральные функции вначале преобразуются при помощи применения (возможно, повторного) формул

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x).$$

Пример 17. $\displaystyle\int \sin^4 x\,dx = \int \left[\frac{1}{2}(1 - \cos 2x)\right]^2 dx = \frac{1}{4}\int (1 - 2\cos 2x + \cos^2 2x)\,dx =$ $= \left\{\cos^2 2x = \dfrac{1}{2}(1 + \cos 4x)\right\} = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int \left(1 - 2\cos 2x + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 4x\right) dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin 2x +$ $+ \dfrac{1}{32}\sin 4x + C$.

3. Если в интеграле вида

$$\int \cos^m x \cdot \sin^n x \, dx$$

хотя бы одно из чисел m и n — нечетное, то применяется подстановка $t = \sin x$ (при m — нечетном) или $t = \cos x$ (при n — нечетном).

Пример 18.

$$\int \cos^3 x \cdot \sin^2 x \, dx = \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x \, dx = \int (1 - \sin^2 x) \sin^2 x \cdot \cos x \, dx =$$
$$= \{t = \sin x, \; dt = \cos x \, dx\} =$$
$$= \int (1 - t^2) t^2 \, dt = \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} + C = \frac{1}{3} \sin^3 x - \frac{1}{5} \sin^5 x + C.$$

Если оба числа m и n — четные, то применяются формулы

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x), \quad \cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x), \quad \sin x \cdot \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x.$$

Пример 19.

$$\int \sin^2 x \cdot \cos^4 x \, dx = \int (\sin x \cdot \cos x)^2 \cos^2 x \, dx = \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cdot (1 + \cos 2x) \, dx =$$
$$= \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \, dx + \frac{1}{8} \int \sin^2 2x \cdot \cos 2x \, dx =$$
$$= \frac{1}{16} \int (1 - \cos 4x) \, dx + \frac{1}{16} \int \sin^2 2x \, d(\sin 2x) =$$
$$= \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$$

4. Интегралы вида

$$\int \sin mx \cdot \cos nx \, dx, \quad \int \sin mx \cdot \sin nx \, dx, \quad \int \cos mx \cdot \cos nx \, dx$$

вычисляются при помощи формул, приведенных в 6.5.8, **2**.

Пример 20.

$$\int \sin 3x \cdot \cos 2x \, dx = \frac{1}{2} \int [\sin (3x - 2x) + \sin (3x + 2x)] \, dx =$$
$$= \frac{1}{2} \int [\sin x + \sin 5x] \, dx = -\frac{1}{2} \cos x - \frac{1}{10} \cos 5x + C.$$

5. Интегралы

$$\int \operatorname{tg}^n x \, dx, \quad \int \operatorname{ctg}^n x \, dx,$$

где натуральное число $n > 1$, вычисляется путем выделения множителя $\operatorname{tg}^2 x$ или $\operatorname{ctg}^2 x$.

Пример 21.

$$\int \operatorname{tg}^3 x\, dx = \int \operatorname{tg}^2 x \cdot \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \cdot \operatorname{tg} x\, dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} \operatorname{tg} x\, dx =$$
$$= \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1\right) \operatorname{tg} x\, dx = \int \operatorname{tg} x \frac{dx}{\cos^2 x} - \int \operatorname{tg} x\, dx =$$
$$= \int \operatorname{tg} x\, d(\operatorname{tg} x) - \int \frac{\sin x}{\cos x}\, dx = \{\sin x\, dx = -d(\cos x)\} =$$
$$= \frac{1}{2} \operatorname{tg}^2 x + \ln|\cos x| + C.$$

6. Интегралы, подынтегральные функции которых содержат выражения: 1) $a^2 - x^2$, $\sqrt{a^2 - x^2}$; 2) $x^2 + a^2$, $\sqrt{x^2 + a^2}$; 3) $x^2 - a^2$, $\sqrt{x^2 - a^2}$, в ряде случаев удается вычислить при помощи подстановок: 1) $x = a \cdot \sin t$ или $x = a \cdot \cos t$; 2) $x = a \cdot \operatorname{tg} t$ или $x = a \cdot \operatorname{ctg} t$; 3) $x = \dfrac{a}{\sin t}$ или $x = \dfrac{a}{\cos t}$.

Пример 22.

1) $$\int \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \{x = a\cos t \ (0 \leqslant t \leqslant \pi),\ dx = -a\sin t\, dt\} = -a^2 \int \sin^2 t\, dt =$$
$$= -a^2 \int \frac{1}{2}(1 - \cos 2t)\, dt = -\frac{a^2}{2}t + \frac{a^2}{4}\sin 2t + C = \left\{t = \arccos\frac{x}{a},\ \sin 2t = 2\sin t \times\right.$$
$$\left.\times \cos t = 2\cos t \cdot \sqrt{1 - \cos^2 t} = 2\frac{x}{a}\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right\} = -\frac{a^2}{2}\arccos\frac{x}{a} + \frac{x}{2}\sqrt{a^2 - x^2} + C.$$

2) $$\int \frac{dx}{(x^2+1)^{3/2}} = \left\{x = \operatorname{tg} t,\ \left(-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}\right);\ dx = \frac{dt}{\cos^2 t};\ x^2 + 1 = \operatorname{tg}^2 t + 1 =\right.$$
$$\left.= \frac{1}{\cos^2 t}\right\} = \int \cos t\, dt = \sin t + C = \left\{t = \operatorname{arctg} x;\ \sin(\operatorname{arctg} x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right\} =$$
$$= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C.$$

3) $$\int \frac{\sqrt{x^2-1}}{x}\, dx = \left\{x = \frac{1}{\cos t}\left(0 \leqslant t < \frac{\pi}{2}\right);\ dx = \frac{\operatorname{tg} t \cdot dt}{\cos t};\ x^2 - 1 = \operatorname{tg}^2 t;\right.$$
$$\left.\sqrt{x^2 - 1} = \operatorname{tg} t\right\} = \int \operatorname{tg}^2 t \cdot dt = \int \frac{1 - \cos^2 t}{\cos^2 t}\, dt = \int \frac{dt}{\cos^2 t} - \int dt = \operatorname{tg} t - t + C =$$
$$= \left\{t = \arccos\frac{1}{x} = \operatorname{arctg}\sqrt{x^2 - 1}\right\} = \sqrt{x^2 - 1} - \arccos\frac{1}{x} + C.$$

7. Пусть $R(u, v)$ — рациональная функция. Тогда интеграл от функции $R(\sin x, \cos x)$ сводится к интегралу от рациональной функции (рационализируется) **универсальной тригонометрической подстановкой** $t = \operatorname{tg}(x/2)$ $(-\pi < x < \pi)$

в силу равенств:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = 2\cos^2\frac{x}{2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \quad x = 2\operatorname{arctg} t, \quad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Следовательно,

$$\int R(\cos x, \sin x)\,dx = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\frac{2}{1+t^2}\,dt.$$

Пример 23. $\displaystyle\int \frac{dx}{1+\cos x} = \left\{t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}\right\} = \int dt = t + C = \operatorname{tg}\frac{x}{2} + C.$

Частные случаи рационализации интеграла от функции $R(\sin x, \cos x)$

1) Если $R(\sin x, \cos x)$ нечетна относительно $\sin x$, т. е.

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то применяется подстановка $t = \cos x$.

2) Если $R(\sin x, \cos x)$ нечетна относительно $\cos x$, т. е.

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x),$$

то используется подстановка $t = \sin x$.

3) Если

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x),$$

то применяется подстановка $t = \operatorname{tg} x$ (или $t = \operatorname{ctg} x$).

Пример 24.

1) $$\int\frac{dx}{\sin x} = \int\frac{\sin x\,dx}{\sin^2 x} = \{t = \cos x,\ dt = -\sin x\,dx\} = -\int\frac{dt}{1-t^2} =$$
$$= -\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1+t}{1-t}\right| + C = \frac{1}{2}\ln\frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C.$$

2) $$\int\frac{\sin^2 x}{\cos^3 x}\,dx = \int\frac{\sin^2 x\cos x}{\cos^4 x}\,dx = \{t = \sin x,\ dt = \cos x\,dx\} = \int\frac{t^2\,dt}{(1-t^2)^2}.$$

Исходный интеграл рационализировался.

3) $$\int\frac{\sin x\cos x}{\sin^4 x + \cos^4 x}\,dx = \left\{t = \operatorname{tg} x,\ x = \operatorname{arctg} t,\ dx = \frac{dt}{1+t^2},\ \cos^2 x = \frac{1}{1+t^2},\right.$$
$$\left.\sin^2 x = 1 - \cos^2 x = \frac{t^2}{1+t^2}\right\} = \int\frac{t\,dt}{1+t^4} = \frac{1}{2}\int\frac{d(t^2)}{1+(t^2)^2} = \{t^2 = u\} =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{arctg} u + C = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}^2 x) + C.$$

8. Если $P(x)$ — полином степени n, то:

1) $$\int P(x)\cos ax\,dx = \frac{\sin ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \ldots\right] + \frac{\cos ax}{a^2}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \ldots\right] + C.$$

2) $$\int P(x)\sin ax\,dx = -\frac{\cos ax}{a}\left[P(x) - \frac{P''(x)}{a^2} + \frac{P^{(4)}(x)}{a^4} - \ldots\right] + \frac{\sin ax}{a^2}\left[P'(x) - \frac{P'''(x)}{a^2} + \frac{P^{(5)}(x)}{a^4} - \ldots\right] + C.$$

3) $$\int P(x)e^{ax}\,dx = e^{ax}\left[\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \ldots + (-1)^n\frac{P^{(n)}(x)}{a^{n+1}}\right] + C.$$

9. Если $P(x)$ — полином степени n, то следующие интегралы находятся (многократным) интегрированием по частям:

1) $\int P(x)e^{ax}\,dx$.

2) $\int P(x)\sin(bx+c)\,dx$.

3) $\int P(x)\cos(bx+c)\,dx$.

4) $\int P(x)e^{ax}\sin(bx+c)\,dx$.

5) $\int P(x)e^{ax}\cos(bx+c)\,dx$.

В частности,

1) $$\int x^n e^{ax}\,dx = \frac{1}{a}x^n e^{ax} - \frac{n}{a}\int x^{n-1}e^{ax}\,dx.$$

2) $$\int x^n \sin bx\,dx = -\frac{x^n}{b}\cos bx + \frac{n}{b}\int x^{n-1}\cos bx\,dx.$$

3) $$\int x^n \cos bx\,dx = \frac{x^n \sin bx}{b} - \frac{n}{b}\int x^{n-1}\sin bx\,dx.$$

4) $$\int xe^{ax}\sin bx\,dx = \frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) - \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}\left[(a^2-b^2)\sin bx - 2ab\cos bx\right].$$

5) $$\int xe^{ax}\cos bx\,dx = \frac{xe^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) - \\ - \frac{e^{ax}}{(a^2+b^2)^2}\left[(a^2-b^2)\cos bx + 2ab\sin bx\right].$$

6) $$\int e^{ax}\sin bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx).$$

7) $$\int e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{e^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx).$$

10. Если $R(u,v)$ — рациональная функция, то интегралы вида

$$\int R(\operatorname{sh} x, \operatorname{ch} x)\,dx$$

могут быть вычислены, если гиперболические функции выразить через показательные.

Пример 25.

$$\int \frac{dx}{\operatorname{ch} x + 1} = 2\int \frac{dx}{e^x + e^{-x} + 2} = \left\{t = e^x,\ x = \ln t,\ dx = \frac{dt}{t}\right\} = \\ = 2\int \frac{dt}{t(t+t^{-1}+2)} = 2\int \frac{dt}{(t+1)^2} = -\frac{2}{t+1} + C = -\frac{2}{e^x+1} + C.$$

7.2. Определенный интеграл

7.2.1. Свойства и геометрический смысл определенного интеграла

1. Определение

Пусть функция $y = f(x)$ определена и ограничена на (конечном) отрезке $[a; b]$, $a < b$. Разобьем $[a; b]$ на n промежутков произвольными точками x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ так, что $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$ (рис. 7.2). На каждом из частичных отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ возьмем произвольную промежуточную точку ξ_i $(x_{i-1} \leqslant \xi_i \leqslant x_i)$, найдем значения функции $f(\xi_i)$ и составим сумму, называемую **интегральной суммой**:

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}).$$

Пусть при неограниченном увеличении числа n отрезков разбиения наибольшая из длин этих отрезков $\max \Delta x_i$ стремится к нулю. Если при этом

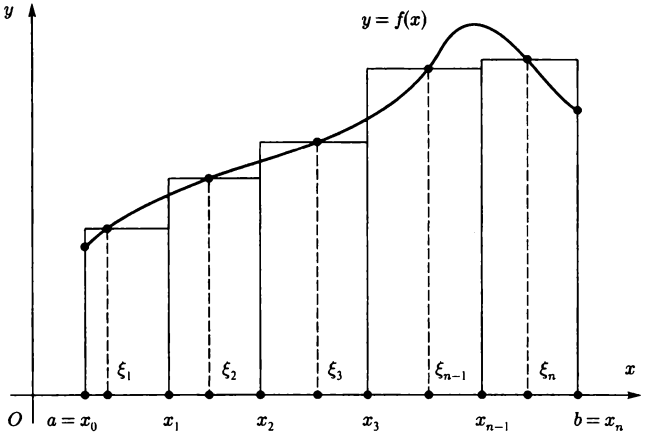


Рис. 7.2

существует конечный предел J интегральных сумм J_n, то функция $f(x)$ называется **интегрируемой (по Риману)** на отрезке $[a; b]$, а предел

$$J = \lim_{\max \Delta x_i \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \qquad (7.1)$$

называется **определенным интегралом (по Риману)** от функции $f(x)$ по отрезку $[a; b]$ и обозначается

$$J = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Согласно этому определению интеграла для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon)$ такое, что при любом разбиении отрезка $[a; b]$ на частичные отрезки с длинами $\max \Delta x_i < \delta$, и независимо от выбора промежуточных точек ξ_i, выполняется неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - J \right| < \varepsilon.$$

В выражении определенного интеграла функция $f(x)$ называется **подынтегральной функцией,** x — **переменной интегрирования**, числа a и b соответственно **нижним** и **верхним пределами интегрирования**. Значение интеграла зависит от пределов a и b, функции $f(x)$ и не зависит от обозначения переменной интегрирования, например

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt.$$

Классы функций, интегрируемых (по Риману) на отрезке $[a;b]$:

1) непрерывные на $[a;b]$ функции,
2) функции, ограниченные на $[a;b]$ и имеющие на $[a;b]$ конечное или счетное множество точек разрыва,
3) ограниченные и монотонные на $[a;b]$ функции.

Интегрируемая на $[a;b]$ функция интегрируема и на любом отрезке, содержащемся в $[a;b]$. Функция, неограниченная на отрезке $[a;b]$, не интегрируема на этом отрезке. Ограниченность функции — необходимое условие ее интегрируемости.

2. Геометрический смысл определенного интеграла

Если $f(x) \geqslant 0$ на отрезке $[a;b]$, $a < b$, то определенный интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

численно равен площади S криволинейной трапеции — плоской фигуры, ограниченной линиями: 1) ось Ox, 2) график $y = f(x)$, 3) прямые $x = a$ и $x = b$ (рис. 7.2). Интегральная сумма J_n равна площади ступенчатой фигуры, состоящей из n прямоугольников. Площадь i-го прямоугольника равна $f(\xi_i)\Delta x_i$. Если $f(x)$ принимает на $[a;b]$ разные знаки, то площадь криволинейной трапеции равна

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

3. Свойства определенного интеграла

Если нижеперечисленные интегралы существуют, то:

1) $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

2) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx.$

3) $\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_a^c f(x)\,dx + \int\limits_c^b f(x)\,dx$ (a, b, c — любые числа).

4) $\int\limits_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx \pm \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

5) $\int\limits_a^b kf(x)\,dx = k\int\limits_a^b f(x)\,dx$ (k — любое число).

6) Из условия $f(x) \leqslant g(x)$ на $[a; b]$, $a < b$, следует

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx.$$

7) Из условия $m \leqslant f(x) \leqslant M$ на $[a; b]$, $a < b$, следует

$$m(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant M(b-a).$$

8) $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|$ $(a \leqslant b)$.

9) Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$, то при изменении ее значения в некоторой точке c отрезка $[a; b]$ значение интеграла

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

не изменяется.

4. Формулы среднего значения (теоремы о среднем значении)

1) Если функция $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$ и $m \leqslant f(x) \leqslant M$, то существует число $\bar{f}$ $(m \leqslant \bar{f} \leqslant M)$ такое, что

$$\bar{f} = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)\,dx,$$

называемое средним значением функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

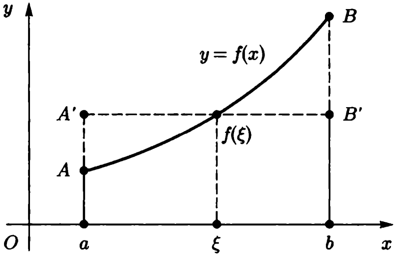


Рис. 7.3

2) Если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то найдется хотя бы одна точка ξ $(a < \xi < b)$ такая, что

$$\int_a^b f(x)\,dx = f(\xi)(b-a).$$

Здесь $\overline{f} = f(\xi)$. **Геометрический смысл формулы:** существует хотя бы одна точка ξ $(a < \xi < b)$ такая, что площадь криволинейной трапеции $aABb$ (рис. 7.3) равна площади прямоугольника $aA'B'b$ со сторонами $b-a$ и $f(\xi)$.

3) Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы на $[a; b]$ и $m \leqslant f(x) \leqslant M$ на $[a; b]$, а также $g(x) \geqslant 0$ (или $g(x) \leqslant 0$) на всем отрезке $[a; b]$. Тогда существует число μ $(m \leqslant \mu \leqslant M)$ такое, что

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = \mu \int_a^b g(x)\,dx.$$

В частности, если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то существует хотя бы одно такое число ξ $(a < \xi < b)$, что

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = f(\xi) \int_a^b g(x)\,dx.$$

4) Если функции $f(x)$ и $g(x)$ ограничены и интегрируемы на $[a; b]$, а, кроме того, $g(x)$ — монотонна на $[a; b]$, то на $[a; b]$ существует такое число ξ, что

$$\int_a^b f(x)g(x)\,dx = g(a) \int_a^\xi f(x)\,dx + g(b) \int_\xi^b f(x)\,dx.$$

7.2.2. Определенный интеграл как функция верхнего и (или) нижнего предела интегрирования

Если функция $f(t)$ интегрируема на отрезке $[a; b]$, то для любого x $(a \leqslant x \leqslant b)$ функция интегрируема также на отрезке $[a, x]$, причем интеграл

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \tag{7.2}$$

называемый **интегралом с переменным верхним пределом**, является непрерывной на $[a; b]$ функцией верхнего предела x. Здесь переменная интегрирования обозначена t. **Геометрический смысл:** функция $\Phi(x)$ численно равна переменной (зависящей от x) площади фигуры $aAB'x$ (рис. 7.4). Приращение $\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)$ функции $\Phi(x)$ равно приращению площади этой фигуры. Аналогично определяется **интеграл с переменным нижним пределом**. Если интегрируемая на $[a; b]$ функция $f(t)$ непрерывна в точке x $(a \leqslant x \leqslant b)$, то в этой точке существует производная от $\Phi(x)$:

$$\Phi'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Phi(x + \Delta x) - \Phi(x)}{\Delta x} = \frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)\,dt\right] = f(x).$$

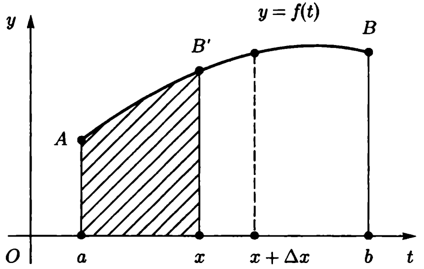


Рис. 7.4

Следовательно, если $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, то для нее существует первообразная. При этом в качестве одной из первообразных можно взять интеграл (7.2), т. е. **неопределенный интеграл** от функции $f(x)$, непрерывной на $[a; b]$, можно записать в виде

$$F(x) = \Phi(x) + C = \int f(x)\,dx = \int_a^x f(t)\,dt + C \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{7.3}$$

Часто используется также запись

$$\int f(x)\,dx = \int\limits_a^x f(x)\,dx + C.$$

7.2.3. Формула Ньютона—Лейбница

1-й вывод формулы

Записывая любую первообразную $F(x)$ для функции $f(x)$, непрерывной на $[a; b]$, в виде

$$F(x) = \int\limits_a^x f(t)\,dt + C$$

и полагая сначала $x = a$, получим

$$F(a) = \int\limits_a^a f(t)\,dt + C = C;$$

полагая затем $x = b$, найдем

$$F(b) = \int\limits_a^b f(t)\,dt + C = \int\limits_a^b f(x)\,dx + F(a),$$

где переменная интегрирования обозначена x. Из двух предыдущих равенств следует формула **Ньютона—Лейбница**

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) \equiv F(x)\Big|_a^b. \tag{7.4}$$

Выражение в правой части (7.4) читается: «$F(x)$ с двойной подстановкой от a до b».

Пример 26.

1) $\int\limits_{-1}^{2} x^2\,dx = \left\{\text{одна из первообразных: } F(x) = \frac{x^3}{3}\right\} = F(x)\Big|_{-1}^{2} = F(2) - F(-1) =$
$= \frac{2^3}{3} - \frac{(-1)^3}{3} = 3.$

2) $\int\limits_0^{\pi} \sin x\, dx = \{F(x) = -\cos x\} = (-\cos x)\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 1 + 1 = 2.$

3) $\int\limits_{-1}^{1} e^{-x}\, dx = \{F(x) = -e^{-x}\} = -e^{-x}\Big|_{-1}^{1} = -\dfrac{1}{e} + e.$

4) $\int\limits_0^{\sqrt{3}} \dfrac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \left(\ln\left|x + \sqrt{x^2+1}\right|\right)\Big|_0^{\sqrt{3}} = \ln(\sqrt{3} + 2).$

2-й вывод формулы

Разобьем отрезок $[a; b]$, на котором определена и непрерывна функция $f(x)$, на частичные отрезки произвольным образом точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b.$$

Пусть $F(x)$ — какая-либо первообразная для $f(x)$, тогда, используя формулу конечных приращений (5.10), получим

$$\begin{aligned} &F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0) = \\ &= \left[F(x_n) - F(x_{n-1})\right] + \left[F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})\right] + \ldots + \left[F(x_1) - F(x_0)\right] = \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[F(x_i) - F(x_{i-1})\right] = \sum_{i=1}^{n} F'(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i. \end{aligned}$$

Переходя в правой части предыдущего равенства к пределу, когда

$$\max \Delta x_i \to 0,$$

получим формулу (7.4).

7.2.4. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле

1. Замена переменной

Если: 1) функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a; b]$, 2) функция $x = g(t)$ определена и непрерывна вместе со своей производной $g'(t)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, где $a = g(\alpha)$, $b = g(\beta)$, 3) сложная функция $f(g(t))$ определена и непрерывна на $[\alpha, \beta]$, то справедлива формула

$$\int\limits_a^b f(x)\, dx = \int\limits_\alpha^\beta f(g(t))g'(t)\, dt.$$

Пример 27.

1) $\int\limits_0^a \sqrt{a^2 - x^2}\, dx = \Big\{x = g(t) \equiv a\sin t,\ g'(t) = a\cos t;\ 0 = a\sin\alpha,\ a = a\sin\beta$; примем $\alpha = 0,\ \beta = \frac{\pi}{2}$, т. е. $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\Big\} = \int\limits_0^{\pi/2} a\sqrt{1-\sin^2 t}\, a\cos t\, dt = \int\limits_0^{\pi/2} a^2\cos^2 t\, dt =$

$$= \frac{a^2}{2}\int\limits_0^{\pi/2}(1+\cos 2t)\, dt = \frac{a^2}{2}\left(t + \frac{1}{2}\sin 2t\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi a^2}{4}.$$

2) $\int\limits_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx = \{x = g(t) \equiv e^t,\ g'(t) = e^t;\ 1 = e^\alpha,\ e = e^\beta,\ \alpha = 0,\ \beta = 1\} =$

$$= \int\limits_0^1 t\, dt = \frac{t^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{1}{2}.$$

3) $\int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{x^2 - 2x + 5}} = \int\limits_0^2 \frac{dx}{\sqrt{(x-1)^2 + 4}} = \{t = x - 1,\ x = g(t) \equiv t + 1,\ g'(t) = 1;$ при $x = 0$ и $x = 2$ имеем соответственно $\alpha = -1,\ \beta = 1\} = \int\limits_{-1}^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2+4}} =$

$$= \ln\left(t + \sqrt{t^2+4}\right)\Big|_{-1}^1 = \ln\frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}-1}.$$

2. Интегрирование по частям

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ имеют непрерывные производные на отрезке $[a; b]$, то

$$\int\limits_a^b u(x)v'(x)\, dx = [u(x)v(x)]\Big|_a^b - \int\limits_a^b v(x)u'(x)\, dx.$$

Пример 28.

1) $\int\limits_0^{\pi/2} x\cos x\, dx = \left\{u = x,\ dv = v'\, dx = \cos x\, dx,\ v = \int dv = \sin x\right\} =$

$$= (x\cdot\sin x)\Big|_0^{\pi/2} - \int\limits_0^{\pi/2}\sin x\, dx = [x\sin x + \cos x]\Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2} - 1.$$

2) $\int\limits_1^3 \ln x\,dx = \left\{u = \ln x,\ dv = v'\,dx = dx,\ v = \int dv = x\right\} = (x\ln x)\Big|_1^3 - \int\limits_1^3 x\frac{dx}{x} =$
$= (x\ln x - x)\Big|_1^3 = 3\ln 3 - 2.$

3) $\int\limits_0^1 xe^x\,dx = \{u = x,\ dv = v'\,dx = e^x\,dx,\ v = e^x\} = (xe^x)\Big|_0^1 - \int\limits_0^1 e^x\,dx =$
$= (xe^x - e^x)\Big|_0^1 = 1.$

7.3. Несобственные интегралы

Несобственные интегралы являются обобщением понятия обычного (**собственного**) определенного интеграла на случай бесконечного промежутка интегрирования и неограниченной подынтегральной функции. Для определения интеграла при этом, кроме предельного перехода в интегральной сумме, требуется еще один предельный переход.

7.3.1. Несобственные интегралы первого рода

Пусть функция $f(x)$ определена при $x \geqslant a$ и (собственно) интегрируема на любом конечном отрезке $[a; b]$. Если существует **конечный** предел

$$\lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx, \tag{7.5}$$

то он называется **сходящимся несобственным интегралом первого рода** от $f(x)$ на промежутке $[a; +\infty)$. Обозначение:

$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{b\to+\infty}\int\limits_a^b f(x)\,dx. \tag{7.6}$$

Если не существует конечный предел (7.5), то выражение (7.6) называется **расходящимся несобственным интегралом первого рода**.

Пример 29.

1) $\int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}\int\limits_0^b e^{-x}\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty}(-e^{-x})\Big|_0^b = \lim\limits_{b\to+\infty}(e^0 - e^{-b}) = 1.$

Интеграл сходится, так как существует предел.

2) $\int\limits_{0}^{+\infty} \cos x\,dx = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{0}^{b} \cos x\,dx = \lim\limits_{x\to+\infty} [\sin b - \sin 0] = \lim\limits_{b\to+\infty} \sin b.$

Интеграл расходится, так как предел не существует.

3) $\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} \int\limits_{1}^{b} \frac{dx}{x} = \lim\limits_{b\to+\infty} (\ln x)\Big|_1^b = \lim\limits_{b\to+\infty} \ln b = +\infty.$

Интеграл расходится, так как конечный предел не существует.

Аналогично определяются следующие несобственные интегралы:

$$1)\ \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx, \qquad 2)\ \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$$

в предположении, что оба несобственных интеграла в правой части равенства сходятся. Сумма этих интегралов не зависит от выбора a.

Пример 30.

$$J = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2\,dx}{x^2+4} = J_1 + J_2 = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{2\,dx}{x^2+4} + \int\limits_{0}^{+\infty} \frac{2\,dx}{x^2+4}.$$

$$J_1 = \lim_{b_1\to-\infty} \int\limits_{b_1}^{0} \frac{2\,dx}{x^2+4} = \lim_{b_1\to-\infty} \left(-\operatorname{arctg}\frac{b_1}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$J_2 = \lim_{b_2\to+\infty} \int\limits_{0}^{b_2} \frac{2\,dx}{x^2+4} = \lim_{b_2\to+\infty} \left(\operatorname{arctg}\frac{b_2}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Ответ: $J = J_1 + J_2 = \pi$.

Формула Ньютона—Лейбница для сходящегося несобственного интеграла (7.6) имеет вид

$$\int\limits_{a}^{+\infty} f(x)\,dx = F(+\infty) - F(a),$$

где $F(+\infty) = \lim\limits_{b\to+\infty} F(b)$.

К несобственным интегралам может быть применено интегрирование по частям, а также замена переменной, при условии строгой монотонности функции $x = g(t)$.

Геометрический смысл интеграла

Сходящийся несобственный интеграл (7.6) представляет площадь заштрихованной бесконечной полосы под графиком $y = f(x)$ (рис. 7.5).

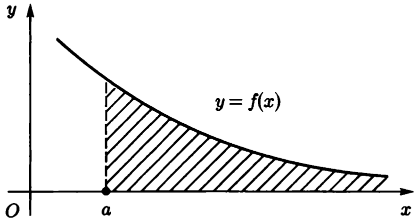


Рис. 7.5

Несобственный интеграл, свойства

Если соответствующие интегралы существуют, то:

$$1)\ \int_a^{+\infty} [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \pm \int_a^{+\infty} g(x)\, dx.$$

$$2)\ \int_a^{+\infty} kf(x)\, dx = k \int_a^{+\infty} f(x)\, dx \quad (k \text{ — любое число}).$$

Абсолютная и условная сходимость несобственного интеграла

Говорят, что несобственный интеграл (7.6) **сходится абсолютно**, если существует (сходится) несобственный интеграл от $|f(x)|$:

$$\int_a^{+\infty} |f(x)|\, dx. \tag{7.7}$$

Если же интеграл (7.6) сходится, но интеграл (7.7) расходится, то интеграл (7.6) называется **условно сходящимся**. Если интеграл (7.6) сходится абсолютно, то он сходится и условно, обратное неверно.

Признаки сходимости:

1) Если $f(x) \geqslant 0$, $g(x) \geqslant 0$ и при $a \leqslant x < +\infty$ выполняется $f(x) \leqslant g(x)$, то из сходимости а) $J_1 = \int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx$ следует сходимость б) $J_2 = \int\limits_a^{+\infty} f(x)\, dx$,

а из расходимости б) следует расходимость а), и выполняется неравенство $J_2 \leqslant J_1$.

2) Если $|f(x)| \leqslant g(x)$ при $x \geqslant a$ и $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится, то $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ сходится абсолютно.

3) Если при $0 < a \leqslant x < +\infty$ функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству $|f(x)| \leqslant c/x^p$, где p, c — постоянные ($p > 1$), то интеграл
$$\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$$
сходится; если же $f(x) \geqslant c/x^p$, где $p \leqslant 1$ и $c > 0$, то этот интеграл расходится.

4) Если при $p > 1$ существует конечный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} |f(x)|x^p = C$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)\,dx$ $(a > 0)$ сходится; если же при $p \leqslant 1$ существует положительный предел $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)x^p = c > 0$, то этот интеграл (при $a > 0$) расходится.

Несобственный интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{dx}{x^p}$ $(a > 0)$ расходится при $p \leqslant 1$ и сходится при $p > 1$, при этом
$$\int\limits_a^{+\infty} \frac{dx}{x^p} = \frac{a^{1-p}}{p-1}.$$

5) Если $g(x)$ монотонно стремится к нулю при $x \to +\infty$, а $f(x)$ имеет ограниченную первообразную $\Phi(x) = \int\limits_a^{x} f(t)\,dt$, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} f(x)g(x)\,dx$ сходится, в общем случае не абсолютно (т. е. условно).

Пример 31. Интеграл $\int\limits_a^{+\infty} \dfrac{\cos x}{x^p}\,dx$ $(a > 0)$ сходится при $p > 0$, так как $g(x) = \dfrac{1}{x^p} \to 0$ монотонно при $x \to +\infty$, а первообразная $\int\limits_a^{x} \cos x\,dx$ ограничена. В частности, при

$p = 1$ интеграл сходится условно, так как

$$\int_a^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x}\, dx \geqslant \int_a^{+\infty} \frac{\cos^2 x}{x}\, dx = \int_a^{+\infty} \frac{1+\cos 2x}{2x}\, dx = \frac{1}{2}\int_a^{+\infty} \frac{dx}{x} + \int_a^{+\infty} \frac{\cos 2x}{2x}\, dx,$$

причем первый интеграл справа — расходящийся, а второй — сходящийся, так как, интегрируя по частям, получим:

$$\int_a^{\infty} \frac{\cos 2x}{2x}\, dx = \{t = 2x\} = \frac{1}{2}\int_{2a}^{\infty} \frac{\cos t}{t}\, dt = \frac{1}{2}\int_{2a}^{\infty} \frac{d(\sin t)}{t} =$$

$$= \frac{\sin t}{2t}\bigg|_{2a}^{\infty} + \frac{1}{2}\int_{2a}^{\infty} \frac{\sin t}{t^2}\, dt = -\frac{\sin 2a}{4a} + \frac{1}{2}\int_{2a}^{\infty} \frac{\sin t}{t^2}\, dt,$$

где интеграл в последнем равенстве сходится по признаку 3).

При $p = 2$ интеграл сходится абсолютно, так как

$$\int_a^{+\infty} \frac{|\cos x|}{x^2}\, dx \leqslant \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{a}.$$

Главное значение интеграла

Если интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\, dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)\, dx$$

расходится, но существует предел

$$\lim_{b\to+\infty} \int_{-b}^{b} f(x)\, dx = A,$$

то число A называют **главным значением несобственного интеграла в смысле Коши** и обозначают:

$$\text{V. p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, dx = A.$$

Пример 32. $\text{V. p.} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, dx}{1+x^2} = \lim_{b\to+\infty} \int_{-b}^{b} \frac{x\, dx}{1+x^2} = 0$, так как подынтегральная функция нечетна на $[-b, b]$. При этом сам несобственный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\, dx}{1+x^2} = \int_{-\infty}^{a} \frac{x\, dx}{1+x^2} + \int_{a}^{+\infty} \frac{x\, dx}{1+x^2} \quad \text{расходится.}$$

7.3.2. Несобственные интегралы второго рода

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $[a; b)$, ограничена на любом отрезке $[a; b']$, $a \leqslant b' = b-\varepsilon < b$ $(0 < \varepsilon < b-a)$, но не ограничена в окрестности $[b-\varepsilon; b)$ точки b (т. е. $\lim\limits_{x\to b-0} |f(x)| = \infty$). Такая точка b называется **особой точкой (точкой разрыва)** функции $f(x)$. Если при этом $f(x)$ (собственно) интегрируема на каждом отрезке $[a; b']$, заключенном в промежутке $[a; b)$, то выражение

$$\lim_{b'\to b-0} \int_a^{b'} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx, \tag{7.8}$$

называется **несобственным интегралом второго рода** от $f(x)$ по промежутку $[a; b)$. Несобственный интеграл (7.8) обозначается так же, как и обычный (собственный) интеграл:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx. \tag{7.9}$$

Если существует (или не существует) конечный предел (7.8), то несобственный интеграл (7.9) называется **сходящимся** (или **расходящимся**).

Пример 33.

1) Вычислим интеграл $J = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x}}$. Точка $x = 1$ — особая, так как подынтегральная функция неограниченно возрастает при $x \to 1$ слева. Предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-\varepsilon}} = \lim_{\varepsilon\to+0} (-2\sqrt{1-x})\Big|_0^{1-\varepsilon} = 2$$

существует, следовательно, интеграл сходится, и $J = 2$.

2) Интеграл $\int\limits_0^1 \frac{dx}{(1-x)^2}$ расходится, так как предел

$$\lim_{\varepsilon\to+0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(1-x)^2} = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\frac{1}{1-x}\right)\Big|_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\frac{1}{\varepsilon} - 1\right) = +\infty,$$

т. е. не существует конечный предел.

Если особой является точка $x = a < b$, то, по определению,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{a'\to a+0} \int_{a'}^{b} f(x)\,dx = \lim_{\varepsilon\to+0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)\,dx.$$

В случае, когда a и b — две особые точки функции $f(x)$, то, по определению,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx,$$

где c — любая точка в интервале $(a;b)$. Предполагается, что оба несобственных интеграла в правой части равенства сходятся.

Если единственная особая точка x_0 функции $f(x)$ лежит внутри $[a;b]$ (точки a и b — не особые), то, по определению,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^{x_0} f(x)\,dx + \int_{x_0}^b f(x)\,dx = \lim_{x_0' \to x_0 - 0} \int_a^{x_0'} f(x)\,dx + \lim_{x_0'' \to x_0 + 0} \int_{x_0''}^b f(x)\,dx$$

$$(x_0' = x_0 - \varepsilon',\ x_0'' = x_0 + \varepsilon''). \qquad (7.10)$$

Предполагается, что оба несобственных интеграла в правой части (7.10) сходятся по отдельности. Определение (7.10) распространяется на случай любого конечного числа особых точек функции $f(x)$ внутри $[a;b]$, либо внутри промежутка $[a;+\infty)$.

Главное значение интеграла

Если интеграл (7.10) расходится, но существует предел

$$\lim_{\varepsilon \to +0}\left[\int_a^{x_0-\varepsilon} f(x)\,dx + \int_{x_0+\varepsilon}^b f(x)\,dx\right] = \mathrm{V.\,p.} \int_a^b f(x)\,dx,$$

то он называется **главным значением несобственного интеграла в смысле Коши** (правая часть равенства является обозначением).

Геометрический смысл интеграла

Сходящийся несобственный интеграл (7.8) представляет площадь заштрихованной бесконечной полосы (рис. 7.6).

Пример 34. Подынтегральная функция $f(x) = \dfrac{1}{x^p}$ интеграла $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^p}$ $(p > 0)$ имеет единственную особую точку $x = 0$, так как $f(x) \to +\infty$ при $x \to 0$ справа. Для выяснения сходимости интеграла найдем предел

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int_\varepsilon^1 \frac{dx}{x^p} = \lim_{\varepsilon \to +0} \left.\frac{x^{1-p}}{1-p}\right|_\varepsilon^1 = \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{1-p}(1 - \varepsilon^{1-p}) = \begin{cases} \dfrac{1}{1-p}, & \text{если } p < 1, \\ +\infty, & \text{если } p > 1. \end{cases}$$

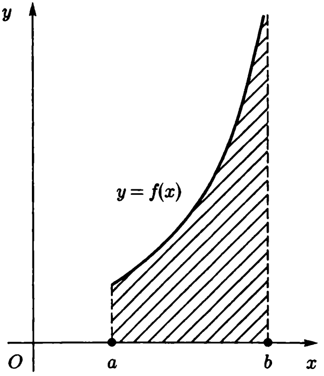


Рис. 7.6

Если $p = 1$, то

$$\lim_{\varepsilon\to+0}\int_{\varepsilon}^{1}\frac{dx}{x} = \lim_{\varepsilon\to+0}\ln x\Big|_{\varepsilon}^{1} = -\lim_{\varepsilon\to+0}\ln\varepsilon = +\infty.$$

Следовательно, данный интеграл сходится при $p < 1$ и расходится при $p \geqslant 1$.

Пример 35. В интеграле

$$J = \int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}}$$

подынтегральная функция имеет единственную особую точку $x = 0$ внутри отрезка $[-1; 1]$. Имеем

$$\int_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} = \int_{-1}^{0}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} + \int_{0}^{1}\frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}} =$$

$$= \lim_{\varepsilon'\to+0}\int_{-1}^{-\varepsilon'} x^{-2/3}\,dx + \lim_{\varepsilon''\to+0}\int_{\varepsilon''}^{1} x^{-2/3}\,dx = \lim_{\varepsilon'\to+0} 3x^{1/3}\Big|_{-1}^{-\varepsilon'} + \lim_{\varepsilon''\to+0} 3x^{1/3}\Big|_{\varepsilon''}^{1} = 3 + 3 = 6.$$

Интеграл сходится и $J = 6$.

Пример 36. Несобственный интеграл $\displaystyle\int_{1}^{3}\frac{dx}{x-2}$ расходится. Найдем его главное значение:

$$\text{V. p.}\int_{1}^{4}\frac{dx}{x-2} = \lim_{\varepsilon\to+0}\left[\int_{1}^{2-\varepsilon}\frac{dx}{x-2} + \int_{2+\varepsilon}^{4}\frac{dx}{x-2}\right] =$$

$$= \lim_{\varepsilon\to+0}\bigl(\ln|x-2|\bigr)\Big|_{1}^{2-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to+0}\bigl(\ln|x-2|\bigr)\Big|_{2+\varepsilon}^{4} = \ln 2.$$

Признаки сходимости интегралов вида (7.9), подынтегральные функции которых имеют единственную особую точку $x = b$:

1) Если в промежутке $[a; b)$ выполняются неравенства $0 \leqslant f(x) \leqslant g(x)$, то из сходимости интеграла а) $J_1 = \displaystyle\int_{a}^{b} g(x)\,dx$ следует сходимость б) $J_2 = \displaystyle\int_{a}^{b} f(x)\,dx$, и выполняется неравенство $J_2 \leqslant J_1$. Из расходимости интеграла б) следует расходимость интеграла а).

2) Если $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$ на $[a; b)$ и существует конечный предел

$$\lim_{x \to b-0} \frac{f(x)}{g(x)} = K > 0,$$

то интегралы а) и б) сходятся одновременно или расходятся одновременно. В качестве функций $g(x)$ удобно применять функции $g(x) = \dfrac{1}{(b-x)^p}$ $(p > 0)$.

Аналогичные признаки сходимости могут быть сформулированы и для интегралов второго рода других видов.

7.3.3. Сведение несобственных интегралов второго рода к интегралам первого рода

Если функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $[a; b)$ и b — особая точка $f(x)$, то, проводя в интеграле $\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx$ замену переменной $x = b - \dfrac{1}{t}$, $dx = \dfrac{dt}{t^2}$, $\dfrac{1}{b-a} \leqslant t \leqslant \dfrac{1}{\varepsilon}$, будем иметь

$$\int\limits_a^{b-\varepsilon} f(x)\,dx = \int\limits_{1/(b-a)}^{1/\varepsilon} f\left(b - \frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt.$$

При этом из сходимости одного из интегралов

$$\int\limits_a^{b} f(x)\,dx, \qquad \int\limits_{1/(b-a)}^{\infty} f\left(b - \frac{1}{t}\right)\frac{1}{t^2}\,dt$$

следует сходимость другого, а также равенство обоих интегралов.

Интегралы второго рода (аналогично интегралам первого рода) можно интегрировать по частям и при помощи замены переменной.

7.3.4. Некоторые несобственные интегралы

1) $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} e^{-ax}\,dx = \frac{1}{a}$ $(a > 0)$.

2) $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} xe^{-ax}\,dx = \frac{1}{a^2}$ $(a > 0)$.

3) $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} e^{-a^2x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$ $(a > 0)$.

4) $\displaystyle\int\limits_0^{\infty} xe^{-a^2x^2}\,dx = \frac{1}{2a^2}$.

5) $\int\limits_0^\infty x^2 e^{-a^2x^2}\,dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{4a^3}\quad (a > 0).$

6) $\int\limits_0^\infty e^{-a^2x^2}\cos bx\,dx = \dfrac{\sqrt{\pi}}{2a}e^{-b^2/4a^2}\quad (a > 0).$

7) $\int\limits_0^\infty \dfrac{x\,dx}{e^x+1} = \dfrac{\pi^2}{12}.$ 8) $\int\limits_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx = -C = -0{,}577215665.$

9) $$\int\limits_0^\infty \frac{\sin ax}{x}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2} & \text{при}\quad a > 0, \\ -\dfrac{\pi}{2} & \text{при}\quad a < 0. \end{cases}$$

10) $\int\limits_0^\infty \dfrac{\cos ax\,dx}{b^2+x^2} = \dfrac{\pi}{2b}e^{-ab}\quad (a \geqslant 0,\ b > 0).$

11) $\int\limits_{-\infty}^\infty \sin(x^2)\,dx = \int\limits_{-\infty}^\infty \cos(x^2)\,dx = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}.$

12) $\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin^2 ax}{x}\,dx = \int\limits_0^\infty \dfrac{\cos^2 ax}{x}\,dx = \infty.$

13) $\int\limits_0^\infty \dfrac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \int\limits_0^\infty \dfrac{\cos x}{\sqrt{x}} = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}.$

7.4. Геометрические приложения определенного интеграла

7.4.1. Вычисление площадей плоских фигур

1. Площадь S **криволинейной трапеции** $aABb$ (рис. 7.7), расположенной между осью Ox и графиком непрерывной функции $y = f(x)$ ($f(x) \geqslant 0$ на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$), равна

$$S = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Если $f(x) \leqslant 0$ на $[a; b]$, то

$$S = -\int_a^b f(x)\,dx.$$

Если $f(x)$ принимает значения разных знаков на $[a; b]$, то

$$S = \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

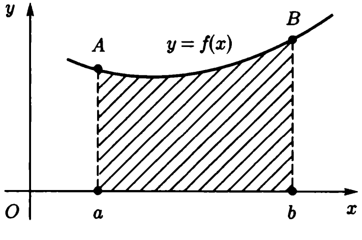


Рис. 7.7

При этом отрезок $[a; b]$ разбивается на промежутки знакопостоянства $f(x)$. Фигуры более сложной формы разбивают на несколько криволинейных трапеций.

2. Площадь S фигуры $A_1A_2B_2B_1$, ограниченной графиками $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$, $x = a$, $x = b$ $(a < b)$ (рис. 7.8), равна

$$S = \int_a^b \left|f_2(x) - f_1(x)\right| dx.$$

Для нахождения площади фигуры, ограниченной двумя пересекающимися (в двух точках) графиками функций, вначале находят точки пересечения из уравнения $f_1(x) = f_2(x)$, имеющего корни x_1, x_2 $(x_1 < x_2)$, которые берутся в качестве пределов интегрирования: $a = x_1$, $b = x_2$.

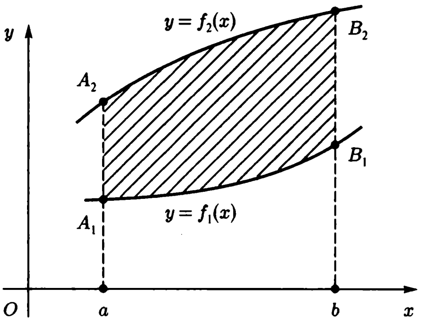


Рис. 7.8

Пример 37. Площадь эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ равна $S = 2\frac{b}{a}\int\limits_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \pi ab$.

Здесь $y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$.

Пример 38. Найти площадь фигуры, ограниченной графиками функций $y = x^2$, $y = \sqrt{x}$ (рис. 7.9).

Решение. Точки пересечения графиков: $x^2 = \sqrt{x}$, $x^4 = x$, $x(x^3 - 1) = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $y_1 = 0$, $y_2 = 1$. Искомая площадь

$$S = \int\limits_0^1 (\sqrt{x} - x^2)\,dx = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{6}. \qquad \triangleright$$

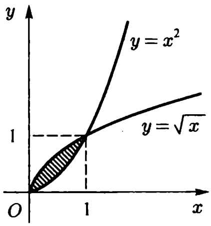


Рис. 7.9

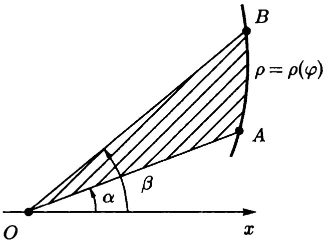


Рис. 7.10

3. Площадь S сектора OAB (рис. 7.10), ограниченного дугой непрерывной кривой AB, с уравнением в полярных координатах $\rho = \rho(\varphi)$ $(\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta)$ и двумя лучами OA $(\varphi = \alpha)$ и OB $(\varphi = \beta)$, равна

$$S = \frac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta [\rho(\varphi)]^2\,d\varphi.$$

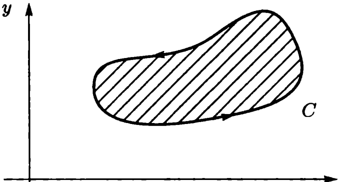


Рис. 7.11

4. Площадь фигуры, ограниченной кривой, заданной параметрически. Пусть $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$ — параметрические уравнения кусочно гладкой замкнутой кривой C, обход которой при возрастании параметра t совершается против часовой стрелки, при этом фигура, лежащая внутри кривой, остается слева (рис. 7.11). Тогда площадь S этой фигуры равна

$$S = \int_0^T x(t)y'(t)\,dt = -\int_0^T y(t)x'(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^T \left[x(t)y'(t) - x'(t)y(t)\right]\,dt.$$

Пример 39. Площадь, ограниченная эллипсом $x = a\cos t$, $y = b\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, равна

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (ab\cos^2 t + ab\sin^2 t)\,dt = \frac{ab}{2}\int_0^{2\pi} dt = \pi ab.$$

См. также пример 37.

7.4.2. Вычисление длин дуг плоских кривых

1. Длина l дуги гладкой кривой AB (рис. 7.12), заданной непрерывно дифференцируемой функцией $y = f(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, равна

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx.$$

2. Длина дуги кривой, заданной параметрически $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant T)$, где $\varphi(t), \psi(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции, равна

$$l = \int_0^T \sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\,dt.$$

Дифференциал (элемент) длины дуги:

$$dl = \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

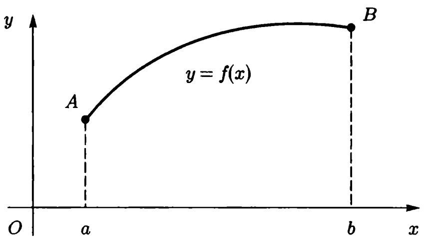


Рис. 7.12

3. Длина дуги кривой, заданной в полярных координатах уравнением $\rho = \rho(\varphi)$ $(\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta)$, где $\rho(\varphi)$ — непрерывно дифференцируемая функция, находится по формуле

$$l = \int\limits_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2}\, d\varphi.$$

Пример 40.

1) Длина дуги окружности $y = \sqrt{1 - x^2} \geqslant 0$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ равна:

$$l = \int\limits_0^1 \sqrt{1 + \frac{x^2}{1 - x^2}}\, dx = \int\limits_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x \Big|_0^1 = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

2) В параметрической форме задано уравнение дуги окружности: $x = \cos t$, $y = \sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$. Длина дуги

$$l = \int\limits_0^{\pi/2} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t}\, dt = \int\limits_0^{\pi/2} dt = t \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

3) В полярных координатах уравнение дуги окружности: $\rho = 1$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$. Длина дуги

$$l = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi = \varphi \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{2}.$$

7.4.3. Вычисление объемов

1. Объем V тела (рис. 7.13), заключенного между плоскостями $x = a$ и $x = b$, для которого известна площадь $S = S(x)$ $[a \leqslant x \leqslant b]$ сечения его плоскостью, перпендикулярной оси Ox в точке x, находится по формуле

$$V = \int\limits_a^b S(x)\, dx.$$

2. Объем V тела (рис. 7.13), полученного вращением вокруг оси Ox криволинейной трапеции $aABb$ (лежащей в плоскости Oxy): $a \leqslant x \leqslant b$, $0 \leqslant y \leqslant f(x)$, где $f(x)$ — непрерывная функция, находится по формуле

$$V = \pi \int\limits_a^b [f(x)]^2\, dx.$$

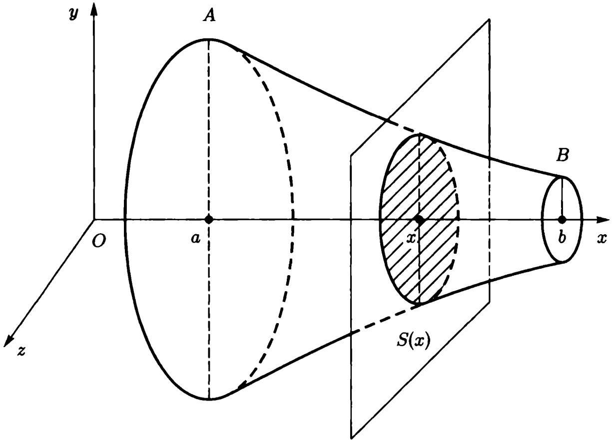


Рис. 7.13

Пример 41. Найти объем тела, полученного вращением эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \left(y = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}\right)$$

вокруг оси Ox.

<u>Решение</u>. $V = \pi \int\limits_{-a}^{a} b^2\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi b^2\left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right)\Big|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi ab^2.$ ▷

7.4.4. Вычисление площади поверхности вращения

Площадь S поверхности, образованной вращением вокруг оси Ox дуги AB графика функции $y = f(x)$ $[a \leqslant x \leqslant b]$, где $f(x)$ — непрерывно дифференцируемая функция (рис. 7.13), определяется формулой

$$S = 2\pi \int\limits_{a}^{b} |f(x)|\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx,$$

или, для параметрически заданной кривой $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ $[0 \leqslant t \leqslant T]$,

$$S = 2\pi \int\limits_{0}^{T} |\psi(t)|\sqrt{[\varphi'(t)]^2 + [\psi'(t)]^2}\, dt.$$

Пример 42. Вычислить площадь S поверхности, образованной вращением дуги кривой $y = \operatorname{ch} x$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ вокруг оси Ox.

Решение.

$$S = 2\pi \int_0^1 \operatorname{ch} x \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x}\, dx = 2\pi \int_0^1 \operatorname{ch}^2 x\, dx =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_0^1 (e^{2x} + 2 + e^{-2x})\, dx = x \left\{ t = e^x,\ x = \ln t,\ dx = \frac{dt}{t} \right\} =$$

$$= \frac{\pi}{2} \int_1^e (t^2 + 2 + t^{-2})\, t^{-1}\, dt = \frac{\pi}{2} \left(\frac{e^2}{2} - \frac{1}{2e^2} + 2 \right).$$

▷

Глава 8

ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

8.1. Основные понятия. Предел функции. Непрерывность

8.1.1. Основные понятия

Пусть задано множество $E=\{(x,y)\}$ упорядоченных пар действительных чисел. Упорядоченность означает, что указано, какое из двух чисел пары берется первым, а какое — вторым. При перестановке местами этих чисел получается, в общем случае, уже другой элемент множества E.

Если каждой паре чисел (x,y) из заданного множества E по определенному правилу ставится в соответствие действительное число z, то говорят, что на множестве E **задана (действительная) функция** $z=z(x,y)$ (**или** $z=f(x,y)$) **от двух переменных** x **и** y. Переменные x,y называются **независимыми переменными** (или **аргументами**), z — **зависимой переменной** (или **функцией**). Буква f обозначает **функциональную зависимость** переменных x,y,z. Поскольку каждой паре чисел (x,y) на плоскости Oxy соответствует точка $M(x,y)$ с координатами x,y, то говорят также, что функция $z=f(x,y)$ задана на множестве $E=\{M\}$ точек плоскости Oxy, и пишут: $z=z(M)$ или $z=f(M)$. Множество E называется **областью определения** (**областью задания**, или **областью существования**) функции. Число z, соответствующее определенной паре чисел (x,y), называется (**частным**) **значением** функции в точке $M(x,y)$.

Множество $Z=\{z\}$ всех частных значений функции $z=f(x,y)$ называется **множеством значений функции** (или **областью ее изменения**). Различают **однозначные** и **многозначные** функции. Любая заданная функция всегда считается однозначной, если не оговорено противное. Функция может быть задана как в **явном виде**: $z=z(x,y)$, так и в **неявном виде**: $F(x,y,z)=0$.

Графиком функции $z=f(x,y)$ в трехмерном пространстве $Oxyz$ называется множество точек $\overline{M}(x,y,z)$ с координатами x,y,z, где $z=f(x,y)$ (обычно график является некоторой поверхностью). Для построения графика

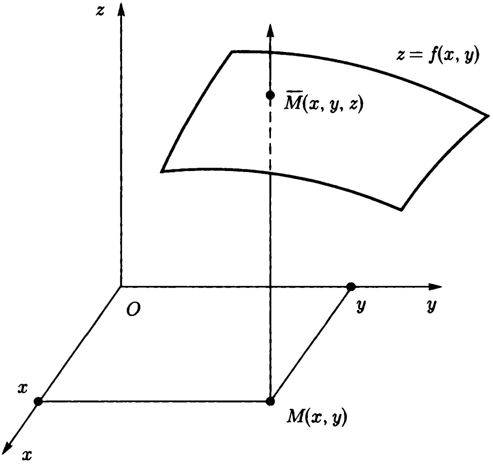


Рис. 8.1

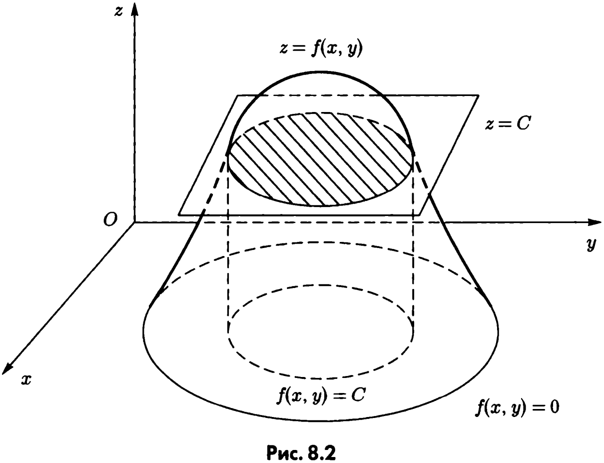


Рис. 8.2

функции $z = f(x, y)$ в точках $M(x, y)$ множества E на плоскости Oxy проводятся перпендикуляры к этой плоскости, на которых откладываются числовые значения функции $M\overline{M} = z = f(x, y)$ (рис. 8.1). Формулу $z = f(x, y)$ называют **уравнением поверхности**.

Линией уровня (или **изолинией**) функции $z = f(x, y)$ называется линия на плоскости Oxy с уравнением $f(x, y) = C$, где C — некоторое число из области изменения функции. Линия уровня является проекцией на плоскость Oxy кривой пересечения графика $z = f(x, y)$ с плоскостью $z = C$, параллельной плоскости Oxy (рис. 8.2). Изменяя C, получим различные линии уровня.

Пример 1.

1) $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Область определения: $x^2 + y^2 \leqslant 1$ — круг радиуса 1, с центром в начале координат. Множество значений функции: $0 \leqslant z \leqslant 1$. Графиком функции является верхняя ($z \geqslant 0$) полусфера радиуса 1. Линии уровня — окружности $x^2 + y^2 = C \leqslant 1$ на плоскости Oxy.
2) Функция $z = x^2 + y^2$ определена на всей плоскости Oxy. Множество значений: $[0; +\infty)$. График: параболоид вращения. Линии уровня: окружности $x^2 + y^2 = C \geqslant 0$.
3) $z = \ln(xy)$. Область определения: множество точек, для которых $xy > 0$. Множество значений: $-\infty < z < +\infty$. Линии уровня: гиперболы $xy = e^C$.

Аналогично случаю двух переменных рассматриваются множества E, состоящие из упорядоченных систем n чисел $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, на которых задаются функции $z = f(x_1, \ldots, x_n) \equiv f(M)$ от n переменных $x_1, \ldots, x_n$ или от точек $M(x_1, \ldots, x_n)$ n-мерного **координатного (векторного) пространства** E^n, представляющего собой множество всевозможных упорядоченных систем n чисел $(x_1, \ldots, x_n)$ или точек M с координатами $x_1, \ldots, x_n$. Множество $E = \{M\}$ в E^n, на котором задана функция $z = f(M)$, называется **областью определения (задания)** этой функции. Для функций более чем двух переменных наглядное представление в виде графика, в общем случае, невозможно. Множество точек в пространстве E^n, координаты которых удовлетворяют уравнению $f(x_1, \ldots, x_n) = C$, где C — число, называется **поверхностью уровня** функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$.

Расстояние $d(M', M'')$ между двумя точками

$$M'(x'_1, \ldots, x'_n) \quad \text{и} \quad M''(x''_1, \ldots, x''_n)$$

пространства E^n определяется по формуле

$$d(M', M'') = \sqrt{(x'_1 - x''_1)^2 + (x'_2 - x''_2)^2 + \ldots + (x'_n - x''_n)^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x'_i - x''_i)^2}.$$

Множество всех точек $\{M\}$ в пространстве E^n, координаты $x_1, \ldots, x_n$ которых удовлетворяют неравенству $d(M, M_0) \leqslant R$, где R — некоторое число, называется **n-мерным шаром в E^n**; точка M_0 — центр шара. Если выполняется строгое неравенство $d(M, M_0) < R$, то множество $\{M\}$ называется **открытым n-мерным шаром**. Множество точек, для которых $d(M, M_0) = R$, называется **n-мерной сферой**.

Множество точек, определяемое неравенствами $|x_i - x_i^0| \leqslant d_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, называется **n-мерным параллелепипедом** с центром в точке $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. В случае строгих неравенств $|x_i - x_i^0| < d_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ имеем **открытый параллелепипед**.

Окрестностью (**ε-окрестностью**) точки $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ в E^n называется любой открытый шар $d(M, M_0) < \varepsilon$ с центром M_0.

Прямоугольной окрестностью точки M_0 называют любой открытый параллелепипед с центром M_0.

Точка M множества $\{M\}$ называется его **внутренней** точкой, если существует такая ε-окрестность точки M, все точки которой принадлежат $\{M\}$. Точка M называется **граничной точкой** множества $\{M\}$, если в любой ее ε-окрестности имеются точки как принадлежащие множеству $\{M\}$, так и не принадлежащие ему, при этом сама M может не принадлежать $\{M\}$. Множество в E^n, все точки которого внутренние, называется **открытым**. Множество $\{M\}$, все граничные точки которого принадлежат ему, называется **замкнутым**.

Непрерывной кривой в E^n называется множество точек в E^n, координаты $x_1, \ldots, x_n$ которых являются непрерывными функциями параметра t:

$$x_1 = \varphi_1(t), \quad \ldots, \quad x_n = \varphi_n(t) \quad (\alpha \leqslant t \leqslant \beta).$$

График такой кривой в E^n состоит из одного сплошного куска без разрывов.

Множество $\{M\}$ в E^n называется **связным**, если любые две его точки $M'(x_1', \ldots, x_n')$ и $M''(x_1'', \ldots, x_n'')$ можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат $\{M\}$. В частности, связная поверхность в E^3 состоит из одного куска, возможно, с отверстиями.

Открытое связное множество $\{M\}$ называется **областью**. **Границей** области называется множество всех ее граничных точек. Примеры областей: совокупность всех внутренних точек круга или квадрата на плоскости. Множество $\overline{\{M\}}$, получающееся присоединением к области $\{M\}$ всех ее граничных точек, называется **замкнутой областью**. Область называется **ограниченной**, если все ее точки находятся внутри некоторого шара. В противном случае область называется **неограниченной**.

8.1.2. Предел функции нескольких переменных

Пусть функция $z = f(M)$ определена на множестве $E = \{M\}$ в E^n и пусть $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ — точка E^n такая, что она либо принадлежит множеству E, либо не принадлежит, но в любой сколь угодно малой ее ε-окрестности содержатся точки множества E, отличные от M_0.

Определение 1. Число A называется **пределом функции** $z = f(M)$ в точке M_0, если для любой сходящейся к точке M_0 последовательности точек $M_1, M_2, \dots, M_n, \dots$, принадлежащих E и отличных от M_0, последовательность соответствующих значений функции $f(M_1), f(M_2), \dots, f(M_n), \dots$ сходится к A. Обозначение:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A \quad \text{или} \quad \lim_{\substack{x_i \to x_i^0 \\ (i=1,2,\dots,n)}} f(x_1, \dots, x_n) = A.$$

Определение 2. Число A называется пределом функции $z = f(M)$ в точке M_0 (или при $M \to M_0$), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta = \delta(\varepsilon, M_0) > 0$ такое, что $|f(M) - A| < \varepsilon$, если только M принадлежит E и $0 < d(M, M_0) < \delta$.

Пусть область определения функции $f(M)$ в E^n неограничена. Число A называется пределом $f(M)$ при $M \to \infty$ (обозначение: $\lim\limits_{M \to \infty} f(M) = A$), если для любого $\varepsilon > 0$ существует число R такое, что для всех M из области определения функции, для которых $d(O, M) > R$ $[O \equiv (0; 0; \dots; 0)]$, выполняется неравенство $|f(M) - A| < \varepsilon$.

Действия над пределами функций нескольких переменных аналогичны таковым для функций одной переменной. Понятия бесконечно малых и бесконечно больших функций нескольких переменных вводятся также аналогично.

8.1.3. Непрерывные функции нескольких переменных

Функция $z = f(M)$, заданная на множестве $E = \{M\}$ в E^n, называется **непрерывной в точке** M_0, принадлежащей E, если предел этой функции в точке M_0 существует и равен ее значению в этой точке:

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0) \quad \text{или} \quad \lim_{M \to M_0} f(M) = f\Big(\lim_{M \to M_0} M\Big).$$

Следовательно, если $f(M)$ непрерывна в M_0, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon, M_0) > 0$ такое, что для всех M из E, удовлетворяющих условию $d(M, M_0) < \delta$, справедливо неравенство $|f(M) - f(M_0)| < \varepsilon$. Точки, в которых функция не является непрерывной, называются ее **точками разрыва**. Функция $f(M)$ называется **непрерывной в данной области**, если она непрерывна в любой ее точке.

Полным приращением Δz функции $z = f(M)$ в точке M_0 (при переходе от точки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ к точке $M(x_1, \dots, x_n)$, где M_0 и M принадлежат области определения функции) называется разность

$$\Delta z = f(M) - f(M_0) = f\big(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_n^0 + \Delta x_n\big) - f\big(x_1^0, \dots, x_n^0\big),$$

где $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Для непрерывности функции $f(M)$ в точке M_0 необходимо и достаточно, чтобы

$$\lim_{M\to M_0}\Delta z=\lim_{\substack{\Delta x_i\to 0\\(i=1,2,\ldots,n)}}\Delta z=0.$$

Равномерная непрерывность. Функция $f(M)$ называется **равномерно непрерывной** в области $\{M\}$ пространства E^n, если для каждого $\varepsilon>0$ существует $\delta(\varepsilon)>0$, зависящее только от ε, такое, что для любых точек M' и M'' из $\{M\}$ выполняется неравенство $|f(M')-f(M'')|<\varepsilon$, как только $d(M',M'')<\delta$.

Частным приращением функции $z=f(x_1,\ldots,x_n)$ в точке $M(x_1,\ldots,x_n)$, соответствующим приращению Δx_i аргумента x_i (номер i задан) при фиксированных значениях остальных аргументов x_j $(j\neq i)$, называется разность

$$\Delta_{x_i}z=f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i+\Delta x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)-\\-f(x_1,x_2,\ldots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\ldots,x_n)\quad(i=1,2,\ldots,n).$$

Предполагается, что значения функции берутся в точках, принадлежащих области ее определения.

Непрерывность сложной функции. Пусть на некотором множестве D пространства E^m заданы функции $x_1=\varphi_1(t_1,\ldots,t_m)$, $\ldots$, $x_n=\varphi_n(t_1,\ldots,t_m)$, ставящие в соответствие каждой точке множества D точку $M(x_1,\ldots,x_n)$ множества $\{M\}$ в пространстве E^n. Пусть на множестве $\{M\}$ задана функция $z=f(x_1,\ldots,x_n)$. Тогда функция

$$z=F(t_1,\ldots,t_m)\equiv f\big(\varphi_1(t_1,\ldots,t_m),\ldots,\varphi_n(t_1,\ldots,t_m)\big),$$

определенная на множестве D пространства E^m, называется **сложной функцией**. Сложная функция F непрерывна в точке $(t_1^0,\ldots,t_m^0)$, если функции $\varphi_1,\ldots,\varphi_n$ и f непрерывны в соответствующих точках.

Пример 2. Пусть $x_1=e^{2t}$, $x_2=e^{-3t}$ $(-\infty<t<+\infty)$; $z=\ln(x_1x_2)$ (область определения состоит из точек, для которых $x_1x_2>0$). Функция $z=F(t)=\ln x_1+\ln x_2=-t$ является сложной.

Свойства непрерывных функций.

1) Сумма, разность, произведение, а также отношение непрерывных функций (когда делитель не равен нулю) являются непрерывными функциями.
2) Если $z=f(M)$ непрерывна в точке M_0 и $f(M_0)>0$ (или $f(M_0)<0$), то существует окрестность точки M_0 такая, что для всех точек M из этой окрестности $f(M)>0$ (или $f(M)<0$).
3) Если $f(M)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве $\{M\}$, то она ограничена на $\{M\}$.
4) Если $f(M)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве $\{M\}$, то она достигает на $\{M\}$ своих наибольшего и наименьшего значений.

5) Если $f(M)$ непрерывна на ограниченном замкнутом множестве, то она равномерно непрерывна на этом множестве.

6) Если $f(M)$ непрерывна в области $\{M\}$ и в точках M_1 и M_2 этой области принимает значения $a_1 = f(M_1)$ и $a_2 = f(M_2)$ $(a_1 < a_2)$, то для каждого числа a $(a_1 < a < a_2)$ найдется точка M, принадлежащая $\{M\}$ и такая, что $f(M) = a$.

8.2. Дифференциальное исчисление функций нескольких переменных

8.2.1. Частные производные

1. Пусть функция $f(M)$ определена в некоторой (открытой) окрестности фиксированной точки $M(x_1, \dots, x_n)$ пространства E^n. **Частной производной** функции $z = f(M) \equiv f(x_1, \dots, x_n)$ по аргументу x_i в точке M называется предел (если он существует) отношения частного приращения $\Delta_{x_i} z$ этой функции к соответствующему приращению аргумента Δx_i, когда Δx_i стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i} = \lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + \Delta x_i, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{\Delta x_i}.$$

Обозначения частной производной:

$$\lim_{\Delta x_i \to 0} \frac{\Delta_{x_i} z}{\Delta x_i} = \frac{\partial z}{\partial x_i} \equiv \frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv f'_{x_i} \equiv z'_{x_i} \equiv f'_{x_i}(x_1, \dots, x_n). \qquad (8.1)$$

Примечание. Частная производная (8.1) определена только для внутренних, но не для граничных точек области определения функции.

Функция $f(M)$ называется **дифференцируемой по** x_i в точке M, если существует ее конечная частная производная (8.1) в этой точке.

Согласно определению, для нахождения частной производной функции $f(x_1, \dots, x_n)$ по аргументу x_i следует найти обыкновенную производную от функции одной переменной x_i:

$$f\left(x_1^0, x_2^0, \dots, x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0, \dots, x_n^0\right),$$

считая все остальные аргументы $x_j = x_j^0$ $(j \neq i)$ постоянными величинами.

Пример 3.

1) $z = 3x^2 + 2xy + y^3$ (здесь $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$), $\partial z/\partial x = 6x + 2y$ (переменная y при этом считается постоянной, т. е. ее производная по x равна 0), $\partial z/\partial y = 2x + 3y^2$ (при этом x считается постоянной).

2) $z = e^{xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = ye^{xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = xe^{xy}$.

3) $z = \operatorname{arctg}\dfrac{x}{y}$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{1}{1 + x^2/y^2}\cdot\dfrac{1}{y} = \dfrac{y}{x^2+y^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{x}{x^2+y^2}$.

4) $z = \sin(x^2 - xy)$, $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (2x - y)\cos(x^2 - xy)$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -x\cos(x^2 - xy)$.

Примечание. При $n > 1$ из существования у функции $f(M)$ конечных частных производных по всем аргументам $x_1, x_2, \ldots, x_n$ в данной точке M в общем случае не следует ее непрерывность в этой точке.

2. Геометрический смысл частной производной. Пусть $z = f(x, y)$ — функция двух переменных. Частная производная $f'_x(x_0, y_0)$ (если она существует) равна тангенсу угла наклона к оси Ox касательной к сечению графика функции $f(x, y)$ плоскостью $y = y_0$ в точке с абсциссой x_0. Производная $f'_y(x_0, y_0)$ равна тангенсу угла между осью Oy и касательной к сечению графика функции $z = f(x, y)$ плоскостью $x = x_0$ в точке с ординатой y_0.

3. Частные производные высших порядков. Пусть $f(M)$ определена на некотором открытом множестве E. Если $f(M)$ имеет частные производные $\partial f/\partial x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ во всех точках множества E, то эти производные сами являются функциями от $M(x_1, \ldots, x_n)$.

Частные производные высших порядков функции $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ (если они существуют) определяются формулами

$$\frac{\partial^2 f(M)}{\partial x_i^2} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f(M)}{\partial x_i}\right) \equiv f''_{x_i x_i}(M) \equiv f''_{x_i^2}(M);$$

$$\frac{\partial^2 f(M)}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f(M)}{\partial x_k}\right) \equiv f''_{x_i x_k}(M);$$

$$\frac{\partial^3 f(M)}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial^2 f(M)}{\partial x_j \partial x_k}\right) \equiv f'''_{x_i x_j x_k}(M) \quad \text{и т. д.}$$

Число $m = 1, 2, \ldots$ произведенных дифференцирований называют **порядком** частной производной. Производные, начиная со второго порядка, называются смешанными, если дифференцирование проводится по аргументам, из которых хотя бы два — разные, например, $f''_{x_i x_j}$, $f''_{x_i^2 x_j}$ $(i \neq j)$.

Пример 4. Для функции $z = e^{xy}$ (см. пример 3) имеем:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = (1 + xy)\, e^{xy},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = (1 + xy)\, e^{xy}, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = x^2 e^{xy},$$

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right) = (2x + x^2 y)\, e^{xy} \quad \text{и т. д.}$$

В общем случае значение смешанной производной зависит от последовательности вычисления промежуточных частных производных. Однако, в частности,

$$\frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_k} = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_k \partial x_i} \quad (i \neq k)$$

в точке M_0, если функция $z = f(M) \equiv f(x_1, \ldots, x_n)$ определена вместе со своими производными

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}, \ \frac{\partial f}{\partial x_k}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}$$

в некоторой окрестности точки M_0 и, кроме того, $f''_{x_i x_k}$ и $f''_{x_k x_i}$ непрерывны в точке M_0. Это утверждение распространяется на непрерывные смешанные производные любого порядка, отличающиеся друг от друга лишь последовательностью дифференцирования.

8.2.2. Дифференциал функции

1. Функция $z = f(M) \equiv f(x_1, \ldots, x_n)$ называется (один раз) **дифференцируемой** в точке $M(x_1, \ldots, x_n)$, содержащейся в области определения $f(M)$ вместе с некоторой своей окрестностью, если для каждой точки $M_1(x_1 + \Delta x_1, \ldots, x_n + \Delta x_n)$ из этой окрестности полное приращение Δz функции в точке M может быть представлено в виде

$$\Delta z \equiv \Delta f(M) = F(M_1) - f(M) = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n + o(\rho), \quad (8.2)$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_n$ — величины, не зависящие от $\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n$; $o(\rho)$ — бесконечно малая более высокого порядка по сравнению с

$$\rho = \sqrt{(\Delta x_1)^2 + \ldots + (\Delta x_n)^2},$$

т. е. $\lim\limits_{\rho \to 0}\left[\dfrac{o(\rho)}{\rho}\right] = 0$. Линейная часть

$$dz \equiv df = A_1 \Delta x_1 + A_2 \Delta x_2 + \ldots + A_n \Delta x_n$$

приращения называется **(первым) дифференциалом** или **полным дифференциалом** функции $f(M)$ в точке M, при этом $\Delta z = dz + o(\rho)$. Если $f(M)$ дифференцируема в точке $M(x_1, \ldots, x_n)$, т. е. выполняется равенство (8.2), то в этой точке существуют все частные производные первого порядка и $f'_{x_i}(M) = A_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ [**необходимое условие дифференцируемости**].

Если $f(M)$ имеет в некоторой точке M все **непрерывные** частные производные первого порядка, то она дифференцируема и имеет первый дифференциал в этой точке [**достаточное условие дифференцируемости**]. Если функция (один раз) дифференцируема в некоторой точке M, то она непрерывна в этой точке, так как $\lim\limits_{M_1\to M} \Delta z = 0$. Одного только существования частных производных недостаточно для дифференцируемости и даже непрерывности функции. Функция $f(M)$ называется **дифференцируемой на множестве** $\{M\}$ в E^n, если она дифференцируема в каждой точке M этого множества.

2. Геометрический смысл дифференциала. Пусть $z = f(x, y)$ — функция, дифференцируемая в некоторой точке $M_0'(x_0, y_0, 0)$ на плоскости Oxy. Если перейти из точки M_0' в точку $M_1'(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y, 0)$, то аппликата (координата z) касательной к графику $z = f(x, y)$ плоскости в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, где $z_0 = f(x_0, y_0)$, получит приращение, равное дифференциалу функции $f(x, y)$ в точке $M_0'(x_0, y_0, 0)$:

$$df(M_0') \equiv df(x_0, y_0) = f_x'(x_0, y_0)\Delta x + f_y'(x_0, y_0)\Delta y,$$

и станет равной $z_0 + df(M_0')$. При этом приращение аппликаты графика $z = f(x, y)$ равно полному приращению Δz функции $f(x, y)$ в точке M_0', так что $z_1 = f(M_1') = f(M_0') + \Delta z = z_0 + \Delta z$.

3. Для **независимых переменных** $x_1, x_2, \ldots, x_n$ вводят понятие (независимых) дифференциалов dx_i и принимают $\Delta x_i = dx_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, следовательно, дифференциал функции равен

$$df(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\partial f}{\partial x_1}\, dx_1 + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\, dx_n \equiv \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}\, dx_i,$$

где все частные производные берутся в точке $M(x_1, \ldots, x_n)$. Величина df зависит от $x_1, \ldots, x_n$ и $dx_1, \ldots, dx_n$. При этом $d(dx_i) = 0$, т. е величины dx_i являются некоторыми числами, не зависящими от $x_1, \ldots, x_n$. Если $z = x_i$, то $dz = dx_i = \dfrac{\partial x_i}{\partial x_i}\Delta x_i = \Delta x_i$.

8.2.3. Правило дифференцирования сложной функции

Пусть $z = f(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i = \varphi_i(t_1, \ldots, t_m)$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Если все функции $x_i = \varphi_i(t_1, \ldots, t_m)$ дифференцируемы в некоторой точке $P_0(t_1^0, \ldots, t_m^0)$, а функция $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ дифференцируема в соответствующей точке $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, где $x_i^0 = \varphi_i(t_1^0, \ldots, t_m^0)$, то сложная функция $z = F(t_1, \ldots, t_m) \equiv f(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ дифференцируема в точке P_0, при этом ее частные производные в точке P_0 равны:

$$\frac{\partial z}{\partial t_i} = \frac{\partial F}{\partial t_i} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{\partial x_2}{\partial t_i} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{\partial x_n}{\partial t_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t_i} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Здесь производные $\partial z/\partial x_j$ берутся в точке M_0, а производные $\partial x_j/\partial t_i$ — в точке P_0.

Если функции $\varphi_i(t)$ зависят от одного аргумента t, то $z = F(t)$ — функция одного аргумента, при этом

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

Пример 5. Производная сложной функции $z = \ln(x_1x_2)$, где $x_1 = e^{2t}, x_2 = e^{-3t}$ (см. пример 2), равна

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial z}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} = \frac{x_2}{x_1x_2}2e^{2t} + \frac{x_1}{x_1x_2}(-3)e^{-3t} = -1.$$

Теорема Эйлера об однородных функциях. Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ называется **однородной функцией степени** α, если для каждого числа t выполняется равенство $f(tx_1, \ldots, tx_n) = t^\alpha f(x_1, \ldots, x_n)$. Если функция f — однородная, степени α и дифференцируемая, то

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_i}x_i = \alpha f(x_1, \ldots, x_n).$$

Пример 6. Функция $z = f(x_1, x_2) \equiv x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2$ — однородная степени 2, так как $f(tx_1, tx_2) = t^2 f(x_1, x_2)$. При этом $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}x_1 + \dfrac{\partial f}{\partial x_2}x_2 = 2f$.

Полная производная. Пусть в функции $z = f(x, y_1, \ldots, y_s)$ переменные y_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ зависят от x. Производная от z по x с учетом этой зависимости называется **полной производной** и равна

$$\frac{dz}{dx} \equiv \frac{df}{dx} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y_1}\frac{dy_1}{dx} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial y_s}\frac{dy_s}{dx}.$$

8.2.4. Дифференцирование неявной функции

Пусть функция y от аргумента x задана **неявно** в виде функционального уравнения $F(x, y) = 0$, где функция $F(x, y)$ непрерывна вместе со своими частными производными первого и второго порядков в некоторой области пространства E^2. Если существует однозначная функция $y = f(x)$, определенная в некотором интервале, в котором выполняется равенство $F(x, f(x)) = 0$ и $F'_y(x, f(x)) \neq 0$, то производные y' и y'' находятся по формулам

$$y' = -\frac{F'_x}{F'_y}, \quad y'' = -\frac{1}{(F'_y)^3}\left[F''_{xx}(F'_y)^2 - 2F''_{xy}F'_xF'_y + F''_{yy}(F'_x)^2\right],$$

где в частных производных следует принять $y = f(x)$. В частности, для нахождения y' можно продифференцировать $F(x, f(x)) = 0$ по x, т. е. $F'_x + F'_y f'(x) = 0$, и выразить затем $y' = f'(x)$. Выражение для y'' находится дифференцированием по x формулы для y' с учетом того, что $F'_x(x, y)$, $F'_y(x, y)$ — сложные функции от x.

Пример 7.

1) Пусть $F(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 4 = 0$ $(-2 < x < 2,\ 0 < y \leqslant 2)$, тогда $y = \sqrt{4 - x^2}$ и
$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{(x^2 + y^2 - 4)'_x}{(x^2 + y^2 - 4)'_y} = -\frac{x}{y},$$
где x и y в правой части связаны соотношением $x^2 + y^2 - 4 = 0$. Если $x = 1$, $y = \sqrt{3}$, то $y'(1) = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$. Поскольку $F'_x = 2x$, $F'_y = 2y$, $F''_{xx} = 2$, $F''_{xy} = 0$, $F''_{yy} = 2$, то имеем $y'' = -(x^2 + y^2)y^{-3} = -4y^{-3}$. Отсюда, при $x = 1$, $y = \sqrt{3}$, находим $y''(1) = -\dfrac{4}{3\sqrt{3}}$.

2) $F(x, y) \equiv x^3 - e^y = 0$ $(x > 0,\ -\infty < y < +\infty)$. Здесь $y = 3 \ln x$. Дифференцируя $F(x, y) = 0$ по x, находим $3x^2 - e^y y' = 0$, $y' = \dfrac{3x^2}{e^y} = \dfrac{3}{x}$.

3) $F(x, y) \equiv \operatorname{arctg} \dfrac{y}{x} - \ln \sqrt{x^2 + y^2} = 0$ $(x \neq 0,\ y \neq 0)$. Находим:
$$F'_x = -\frac{x + y}{x^2 + y^2}, \quad F'_y = \frac{x - y}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{x + y}{x - y}.$$

4) $F(x, y) \equiv x - \cos y = 0$ $(-1 < x < 1,\ 0 < y < \pi)$. Здесь $y = \arccos x$. Дифференцируя $F(x, y) = 0$ по x, получим
$$1 + y' \sin y = 0, \quad y' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - \cos^2 y}} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

8.2.5. Производная по направлению. Градиент

1. Пусть функция $u = f(M) \equiv f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ в E^n. Проведем через M_0 некоторую ось, т. е. прямую, положительное направление которой задается единичным направляющим вектором $\bar{l}$ с координатами $l_i = \cos \alpha_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, где α_i — углы между вектором $\bar{l}$ и положительными направлениями осей координат, а положение точки M на этой оси определяется величиной s направленного отрезка $\overline{M_0 M}$.

Предел
$$\frac{du}{ds} \equiv \frac{df}{ds} = \lim_{s \to 0} \frac{f(x_1^0 + s l_1, \ldots, x_n^0 + s l_n) - f(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{s}$$
(если он существует) называется **производной по направлению** $\bar{l}$ от функции $u = f(M)$ в точке M_0 (для этой производной используется также обозначение du/dl).

Если $f(M)$ дифференцируема в точке M_0, то для нее существует производная по любому направлению $\bar{l}$ и

$$\frac{du}{ds} = \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1} l_1 + \ldots + \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n} l_n = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_i} \cos\alpha_i.$$

2. Вектор

$$\operatorname{grad} u \equiv \operatorname{grad} f \equiv \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right),$$

где частные производные берутся в точке $M(x_1, \ldots, x_n)$, называется **градиентом** функции $u = f(M)$ в точке M. Производная от $f(M)$ по направлению $\bar{l}$ равна проекции градиента на это направление:

$$\frac{df(M)}{ds} = \bar{l} \cdot \operatorname{grad} f(M) = |\operatorname{grad} f(M)| \cdot \cos\varphi,$$

где φ — угол между векторами $\bar{l}$ и $\operatorname{grad} f$. Модуль градиента равен

$$|\operatorname{grad} f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)^2}.$$

Градиент функции в точке M характеризует направление и величину наибольшего роста этой функции в данной точке, т. е. производная df/ds максимальна в направлении градиента, когда $\varphi = 0$ и $\cos\varphi = 1$.

Если вектор $\bar{l}(M)$ является касательным к поверхности уровня $u = f(x_1, \ldots, x_n) = C$ в точке M, лежащей на этой поверхности, то

$$\frac{df(M)}{ds} = \bar{l}(M) \cdot \operatorname{grad} f(M) = 0,$$

т. е. градиент перпендикулярен к поверхности уровня.

Пример 8. Для функции $f(r)$, где $r = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, имеем:

$$\operatorname{grad} f(r) = \left(\frac{\partial f(r)}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f(r)}{\partial x_n} \right) = \left(f'(r)\frac{\partial r}{\partial x_1}, \ldots, f'(r)\frac{\partial r}{\partial x_n} \right) =$$

$$= \left\{ \frac{\partial r}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}} = \frac{x_i}{r} \right\} = f'(r)\left(\frac{x_1}{r}, \ldots, \frac{x_n}{r} \right) = f'(r)\frac{\bar{r}}{r},$$

где $\bar{r} \equiv (x_1, \ldots, x_n)$ — радиус-вектор точки $M(x_1, \ldots, x_n)$. Производная от $f(r)$ по любому направлению $\bar{l}$ равна

$$\frac{df}{ds} = f'(r)\frac{(\bar{r} \cdot \bar{l})}{r} = \frac{1}{r} f'(r)(x_1 l_1 + \ldots + x_n l_n).$$

Если: 1) $f(r) = r$, то $\operatorname{grad} f(r) = \bar{r}/r$, 2) $f(r) = 1/r$, то $\operatorname{grad} f(r) = -\bar{r}/r^3$.

Примечание. В трехмерном пространстве E^3 для функции $u = f(x, y, z)$ имеем:

$$\operatorname{grad} f(x, y, z) = \bar{i}\frac{\partial f}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial f}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial f}{\partial z},$$

$$\frac{df}{ds} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial f}{\partial z}\cos\gamma,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\bar{l}$.

3. Производная функции вдоль кривой. Пусть $x_i = \varphi_i(t)$ $(\alpha \leqslant t \leqslant \beta)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — параметрические уравнения кривой L в пространстве E^n. Если функции φ_i — непрерывно дифференцируемые, то производная от дифференцируемой функции $f(x_1, \ldots, x_n)$, где $x_i = \varphi_i(t)$, вдоль кривой L определяется формулой

$$\frac{df}{dt} = \frac{df[\varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)]}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \ldots + \frac{\partial f}{\partial x_n}\frac{dx_n}{dt}.$$

Величина df/dt является также производной от функции f по направлению вектора касательной к кривой L. Если $t = s$ — длина дуги кривой L, то

$$\frac{dx_1}{ds}, \frac{dx_2}{ds}, \ldots, \frac{dx_n}{ds}$$

— направляющие косинусы единичного вектора $\bar{\tau}$ касательной и

$$\frac{df(M)}{ds} = \bar{\tau}(M) \cdot \operatorname{grad} f(M).$$

8.2.6. Инвариантность формы первого дифференциала

Любую функцию $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ от независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ (т. е., не являющихся функциями от других переменных), определенную в некоторой области $\{M\}$ пространства E^n, можно различными способами записать в виде сложной функции $z = g(u_1, \ldots, u_m)$, где функции $u_j = \varphi_j(x_1, \ldots, x_n)$ определены в области $\{M\}$. Пусть функция $f(M) \equiv f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет в точке M области $\{M\}$ все непрерывные частные производные первого порядка, тогда она дифференцируема и ее (первый) дифференциал равен

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial z}{\partial x_n}dx_n = \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial z}{\partial x_i}dx_i.$$

Пусть функции $z = g(u_1, \ldots, u_m)$ и $u_j = \varphi_j(x_1, \ldots, x_n)$ имеют все непрерывные частные производные первого порядка в соответствующих точках пространств E^m и E^n, тогда, по правилу дифференцирования сложной функции, имеем

$$dz = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_i}\, dx_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial z}{\partial u_j} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) dx_i =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial z}{\partial u_j} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\, dx_i \right) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial z}{\partial u_j}\, du_j.$$

Следовательно, форма первого дифференциала **инвариантна**, одинакова как для независимых, так и для зависимых переменных.

Свойства дифференциала. Из инвариантности формы первого дифференциала, в частности, следует, что если $u(x_1, \ldots, x_n)$ и $v(x_1, \ldots, x_n)$ — дифференцируемые функции, то выполняются равенства:

$$d(c \cdot u) = c\, du \quad (c \text{ — постоянная}), \qquad d(u \pm v) = du \pm dv,$$
$$d(u \cdot v) = u\, dv + v\, du, \qquad d\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\, du - u\, dv}{v^2} \quad (v \neq 0).$$

Например, если $z = u \cdot v$, то, рассматривая z как функцию двух переменных u, v, имеем

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\, du + \frac{\partial z}{\partial v}\, dv = v\, du + u\, dv,$$

где u, v — функции от $x_1, \ldots, x_n$. Непосредственный вывод предыдущей формулы:

$$dz = d(uv) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (u \cdot v)}{\partial x_i}\, dx_i = \sum_{i=1}^{n} v\, \frac{\partial u}{\partial x_i}\, dx_i + \sum_{i=1}^{n} u\, \frac{\partial v}{\partial x_i}\, dx_i = v\, du + u\, dv.$$

Предварительное вычисление полного дифференциала функции может значительно упростить нахождение ее частных производных.

Пример 9. Для функции $z = e^{xy}$ имеем, обозначая $xy = u$, $dz = (e^u)'_u\, du = e^u\, du = e^{xy}\, d(xy) = e^{xy} y\, dx + e^{xy} x\, dy$. Коэффициенты при dx и dy равны частным производным: $z'_x = ye^{xy}$, $z'_y = xe^{xy}$. Далее, $d(z'_x) = d(ye^{xy}) = y^2 e^{xy}\, dx + (1 + xy)e^{xy}\, dy$. Следовательно, $z''_{xx} = y^2 e^{xy}$, $z''_{xy} = (1 + xy)e^{xy}$.

8.2.7. Дифференциалы высших порядков

1. Пусть $x_1, \ldots, x_n$ — **независимые переменные** и функция $z = f(M) \equiv f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет все непрерывные частные производные до порядка m включительно (т. е. m раз дифференцируема) в точке $M(x_1, \ldots, x_n)$ пространства E^n. **Дифференциал** $d^s z$ **порядка** s от функции $z = f(M)$ определяется как (первый) дифференциал от дифференциала порядка $(s - 1)$, т. е. $d^s z = d(d^{s-1}z)$ $(s = 2, 3, \ldots)$. При этом дифференциалы $dz, d^{s-1}z, d^s z$ берутся при одних и тех же заданных значениях независимых дифференциалов $dx_1, \ldots, dx_n$, которые рассматриваются как постоянные, не зависящие от $x_1, \ldots, x_n$ (т. е. $d(dx_i) = 0$). Таким образом,

$$d^2z = d(dz) = d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_i}\, dx_i\right) = \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial z}{\partial x_i}\, dx_i\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(d\frac{\partial z}{\partial x_i}\right) dx_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 z}{\partial x_j \partial x_i}\, dx_j\, dx_i, \tag{8.3}$$

где все производные берутся в точке M. В силу равенства смешанных производных $z''_{x_i x_j} = z''_{x_j x_i}$ второй дифференциал представляет собой квадратичную форму от величин $dx_1, \ldots, dx_n$:

$$d^2z(M) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, dx_i\, dx_j \quad \bigl(a_{ij} \equiv z''_{x_i x_j}(M)\bigr).$$

В частности, для функции $z = f(x, y)$ имеем:

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy,$$

$$d^2z = d(dz) = d\left(\frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}(dx)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(dy)^2.$$

Обычно пишут: $(dx)^2 \equiv dx^2$, $(dy)^2 \equiv dy^2$ и т. д.

Аналогично вычисляется дифференциал $d^3z = d(d^2z)$ и т. д. Дифференциал s-го порядка может быть записан в виде **символической формулы**

$$d^s z = \left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^s z.$$

Согласно символической формуле, для функции $z = f(x, y)$ имеем:

$$d^2z = \left(dx\,\frac{\partial}{\partial x} + dy\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z = \left(dx^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\,dx\,dy\,\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + dy^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)z =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\, dx^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\, dx\, dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\, dy^2,$$

$$d^3z = \left(dx\,\frac{\partial}{\partial x} + dy\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^3 z = z'''_{x^3}\, dx^3 + 3z'''_{x^2y}\, dx^2\, dy + 3z'''_{xy^2}\, dx\, dy^2 + z'''_{y^3}\, dy^3.$$

Примечание. Выражение $\left(dx\,\frac{\partial}{\partial x} + dy\,\frac{\partial}{\partial y}\right)^s$ может быть найдено по формуле бинома Ньютона $(a + b)^s$.

2. Дифференциалы высших порядков от функций зависимых аргументов. Пусть функция $z = f(x_1, \dots, x_n)$ представлена в виде сложной функции $z = g(u_1, \dots, u_m)$, где $u_j = \varphi_j(x_1, \dots, x_n)$. Пусть функции g и φ_j имеют все непрерывные частные производные второго порядка. Имеем:

$$d^2z = d(dz) = d\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{\partial z}{\partial u_j}\, du_j\right) = \sum_{j=1}^{m}\left[\left(d\frac{\partial z}{\partial u_j}\right) du_j + \frac{\partial z}{\partial u_j}\, d^2u_j\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 z}{\partial u_i \partial u_j}\, du_i\, du_j + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial z}{\partial u_j}\, d^2u_j. \tag{8.4}$$

Таким образом, формы выражений второго дифференциала (8.3) и (8.4) отличаются друг от друга, т. е. второй и все последующие дифференциалы не обладают, в общем случае, инвариантностью формы. Второй и последующие дифференциалы имеют инвариантную форму в частном случае линейных функций u_j:

$$u_j = a_{j0} + a_{j1}x_1 + a_{j2}x_2 + \ldots + a_{jn}x_n.$$

Если $z = g[u_1(x), u_2(x), \dots, u_m(x)] = f(x)$, то

$$d^2z = d(dz) = \frac{d^2f}{dx^2}\, dx^2 = \left[\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 g}{\partial u_i \partial u_j}\frac{du_i}{dx}\frac{du_j}{dx} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial g}{\partial u_j}\frac{d^2u_j}{dx^2}\right] dx^2.$$

8.2.8. Формула Тейлора для функций нескольких переменных

Пусть функция $z = f(M) \equiv f(x_1, \dots, x_n)$ имеет непрерывные частные производные по всем своим аргументам до порядка $m+1$ включительно в некоторой ε-окрестности точки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$, тогда для любой точки

$$M(x_1, \dots, x_n) = M(x_1^0 + \Delta x_1, \dots, x_n^0 + \Delta x_n)$$

из этой ε-окрестности приращение

$$\Delta z \equiv \Delta f(M_0) = f(M) - f(M_0)$$

функции может быть представлено в виде **формулы Тейлора** с центром в точке M_0:

$$\Delta f(M_0) = f(M) - f(M_0) =$$

$$= df(M_0) + \frac{1}{2!}\, d^2f(M_0) + \ldots + \frac{1}{m!}d^m f(M_0) + \frac{1}{(m+1)!}d^{m+1}f(P),$$

где $P(x_1^0 + \theta\Delta x_1, \dots, x_n^0 + \theta\Delta x_n)$ $(0 < \theta < 1)$ — точка в заданной ε-окрестности, в выражениях дифференциалов $d^s f$ $(s = 1, 2, \dots, m+1)$ дифференциалы dx_i аргументов x_i равны их приращениям $\Delta x_i = x_i - x_i^0$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

Формула Тейлора может быть записана также в виде:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1^0, \dots, x_n^0) +$$
$$+\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(x_1^0, \dots, x_n^0) + R_m(x_1, \dots, x_n),$$
$$R_m(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{(m+1)!}\left(\Delta x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \dots + \Delta x_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m+1} \times$$
$$\times f(x_1^0 + \theta\Delta x_1, \dots, x_n^0 + \theta\Delta x_n) \qquad (0 < \theta < 1).$$

Здесь R_m — **остаточный член формулы Тейлора в форме Лагранжа**; $x_i = x_i^0 + \Delta x_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$.

При $m=1$ формула Тейлора для функции $z=f(x_1,\dots,x_n)$ принимает вид:

$$f(x_1, \dots, x_n) = f(x_1^0, \dots, x_n^0) + \sum_{i=1}^{n} f'_{x_i}\Delta x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} f''_{x_i x_j}\Delta x_i \Delta x_j,$$

где производные f'_{x_i} и $f''_{x_i x_j}$ берутся в точках x_i^0 и $x_i^0+\theta\Delta x_i$ $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ соответственно.

Формула Тейлора для функции $z = f(x, y)$ при $m = 2$:

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + \left[f'_x(x_0, y_0)\Delta x + f'_y(x_0, y_0)\Delta y\right] +$$
$$+\frac{1}{2}\left[f''_{xx}(x_0, y_0)\Delta x^2 + 2f''_{xy}(x_0, y_0)\Delta x\Delta y + f''_{yy}(x_0, y_0)\Delta y^2\right] + R_2(x, y);$$
$$R_2(x,y) = \frac{1}{6}\left[f'''_{xxx}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x^3 + \right. \tag{8.5}$$
$$+ 3f'''_{xxy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x^2\Delta y +$$
$$\left.+ 3f'''_{xyy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta x\Delta y^2 + f'''_{yyy}(x_0 + \theta\Delta x, y_0 + \theta\Delta y)\Delta y^3\right]$$
$$(0 < \theta < 1, \quad \Delta x = x - x_0, \quad \Delta y = y - y_0).$$

Если функция $z=f(x,y)$ бесконечно дифференцируема и для любой точки $M(x,y)$ из ε-окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$ выполняется условие $\lim\limits_{m\to\infty} R_m(x,y) = 0$, то $f(x,y)$ может быть представлена в виде степенного ряда (**ряда Тейлора**) в данной окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$:

$$f(x,y) = f(x_0, y_0) + \sum_{m+n\geqslant 1}^{\infty} \frac{1}{m!n!} f^{(m+n)}_{x^m y^n}(x_0, y_0)\Delta x^m \Delta y^n,$$

здесь $f'_{x^0}(x,y) = f'_{y^0}(x,y) \equiv f(x,y)$; $0! = 1$.

При $x_0 = y_0 = 0$ ряд Тейлора переходит в **ряд Маклорена**.

Пример 10. Разложим функцию $f(x, y) = e^x \sin y$ по формуле Тейлора в окрестности точки $O(0;0)$ при $m = 2$ (до остаточного члена $R_2(x, y)$ включительно). Область определения функции: $|x| < +\infty$, $|y| < +\infty$. Частные производные: $f'_x = e^x \sin y$, $f'_y = e^x \cos y$, $f''_{x^2} = e^x \sin y$, $f''_{xy} = e^x \cos y$, $f''_{y^2} = -e^x \sin y$, $f'''_{x^3} = e^x \sin y$, $f'''_{x^2y} = e^x \cos y$, $f'''_{xy^2} = -e^x \sin y$, $f'''_{y^3} = -e^x \cos y$. Подставляя значения первых и вторых производных при $x = y = 0$ в формулу (8.5) и учитывая, что $\Delta x = x - 0 = x$, $\Delta y = y - 0 = y$, получим искомое разложение

$$f(x, y) = e^x \sin y = y + xy + R_2(x, y),$$

$$R_2(x, y) = \frac{1}{6}\left[e^{\theta x}(x^3 - 3xy^2)\sin\theta y + e^{\theta x}(3x^2y - y^3)\cos\theta y\right] \quad (0 < \theta < 1).$$

Если $|x|$ и $|y|$ малы по сравнению с 1, то $e^x \sin y \approx y + xy$ с точностью до членов второго порядка включительно.

8.2.9. Теория неявных функций

8.2.9.1. Неявные функции одной переменной

Пусть $F(x, y)$ — функция двух переменных x и y, определенная на некотором множестве D точек $M(x, y)$ плоскости Oxy. Если существует непустое множество точек $M(x, y)$, принадлежащих D, координаты x, y которых удовлетворяют равенству $F(x, y) = 0$ и при этом X — множество всех таких значений x, каждому из которых соответствует хотя бы одно значение y такое, что $F(x, y) = 0$, то говорят, что на множестве X определена неявно (уравнением $F(x, y) = 0$) функция $y = f(x)$, в общем случае, многозначная. Для всех x из X при этом тождественно $F(x, f(x)) = 0$.

Пример 11. Уравнение $F(x, y) \equiv x^2 + y^2 - 4 = 0$ ($|x| \leqslant 2$) определяет неявно двузначную функцию $y = \pm\sqrt{4 - x^2}$, которая распадается на две однозначные: $y = +\sqrt{4 - x^2}$ и $y = -\sqrt{4 - x^2}$, соответствующие верхней ($y \geqslant 0$) и нижней ($y \leqslant 0$) полуокружностям.

Теорема существования. Пусть функция $F(x, y)$ определена и непрерывна вместе со своими частными производными первого порядка в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) плоскости Oxy и при этом $F(x_0, y_0) = 0$, $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$. Тогда существует некоторая окрестность $|x - x_0| < \delta$ ($\delta > 0$) точки x_0, в которой определена единственная однозначная непрерывно дифференцируемая функция $y = f(x)$ такая, что $y_0 = f(x_0)$ и для всех x из указанной δ-окрестности точки x_0 выполняется тождественное равенство $F(x, f(x)) = 0$. Если $F(x, y)$ (непрерывно) дифференцируема m раз, то функция $f(x)$ также непрерывно дифференцируема m раз. Правило дифференцирования неявной функции см. в 8.2.4.

Примечание. При выполнении условий теоремы существования явное разрешение уравнения $F(x, y) = 0$ относительно $y = f(x)$ не всегда возможно, однако в любом случае производная y' находится согласно 8.2.4.

8.2.9.2. Неявные функции нескольких переменных

Неявная функция $u = f(x_1, \dots, x_n)$ переменных $x_1, \dots, x_n$ задается функциональным уравнением $F(x_1, \dots, x_n; u) = 0$, где функция F определена на некотором множестве точек пространства E^{n+1}.

Пример 12. Уравнение $F(x, y; u) \equiv x^2 + y^2 + u^2 - 1 = 0$ $(x^2 + y^2 \leqslant 1)$ задает неявно двузначную функцию $u = \pm\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, распадающуюся на две однозначные. Кроме указанных двух функций, уравнение $F = 0$ задает также бесконечное множество других функций на множестве $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Теорема существования. Пусть функция $F(x_1, \dots, x_n; u)$ от $n+1$ переменной определена и непрерывна вместе со всеми своими частными производными первого порядка в некоторой окрестности D точки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0; u^0)$ пространства E^{n+1} и при этом $F(x_1^0, \dots, x_n^0; u^0) = 0$, $F'_u(x_1^0, \dots, x_n^0; u^0) \neq 0$. Тогда найдется окрестность $d(M, M_0) < \delta$ $(\delta > 0)$ точки $M_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ пространства E^n такая, что в ней существует единственная однозначная дифференцируемая (имеющая все непрерывные частные производные первого порядка) функция $u = f(x_1, \dots, x_n)$, для которой $u^0 = f(x_1^0, \dots, x_n^0)$ и $F\big(x_1, \dots, x_n; u(x_1, \dots, x_n)\big) = 0$ тождественно для каждой точки $M'(x_1, \dots, x_n)$ из указанной δ-окрестности. Если F дифференцируема m раз, то функция f также m раз дифференцируема.

Частные производные функции $u = f(x_1, \dots, x_n)$, заданной неявно уравнением $F(x_1, \dots, x_n; u) = 0$, находятся по формулам:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i} + \frac{\partial F}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x_i} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial u}{\partial x_i} = -\frac{F'_{x_i}}{F'_u} \quad (i = 1, 2, \dots, n).$$

8.2.9.3. Геометрический смысл теоремы существования

Пусть Σ — некоторая поверхность с уравнением $F(x, y, z) = 0$ в системе координат $Oxyz$ и при этом производные F'_x, F'_y, F'_z непрерывны на поверхности Σ. Точка $M(x, y, z)$ на поверхности Σ называется **особой**, если в этой точке **одновременно** $F'_x(M) = F'_y(M) = F'_z(M) = 0$. В окрестности особой точки уравнение $F(x, y, z) = 0$ не разрешимо однозначно относительно хотя бы одной из переменных x, y, z, т. е. кусок поверхности Σ вблизи особой точки не имеет однозначных проекций на координатные плоскости. Точки поверхности Σ, не являющиеся особыми, называются **обыкновенными**. В окрестности обыкновенной точки кусок поверхности Σ может быть спроецирован однозначно хотя бы на одну из координатных плоскостей.

8.2.9.4. Вычисление частных производных порядка, выше первого, от функции $u = f(x, y)$, заданной неявно уравнением $F(x, y; u) = 0$, проводится в следующей последовательности. Пусть, например, требуется найти производную $\dfrac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$. Дифференцируя равенство $\dfrac{\partial u}{\partial x} = -\dfrac{\partial F}{\partial x}\Big/\dfrac{\partial F}{\partial u}$ по y, учитывая, что F'_x, F'_u —функции от аргументов x, y, u, из которых u — функция от x, y (т. е. F'_x, F'_y —сложные функции от x, y), получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{-\dfrac{\partial F}{\partial u}\cdot\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial F}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}\right)}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial u}\right)^2},$$

где

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial u \partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F}{\partial u}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial u} + \frac{\partial^2 F}{\partial u^2}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Пример 13. Для функции $u = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ $(x^2 + y^2 < 4,\ u > 0)$, заданной неявно уравнением $F(x, y; u) \equiv x^2 + y^2 + u^2 - 4 = 0$, имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial F}{\partial x}\Big/\frac{\partial F}{\partial u} = -\frac{x}{u}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y}\Big/\frac{\partial F}{\partial u} = -\frac{y}{u},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{x}{u}\right) = -x\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{u}\right) = \frac{x}{u^2}\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{xy}{u^3},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} = -\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{xy}{u^3}\right) = -x\left(\frac{1}{u^3} + \frac{3y^2}{u^5}\right) \quad \text{и т. д.}$$

Отметим, что $\partial F/\partial u = 2u = 0$ при $x^2 + y^2 = 4$, т. е. условия теоремы существования неявной функции не выполняются в точках окружности $x^2 + y^2 = 4$ на плоскости Oxy. Уравнение $F(x, y; u) = 0$ однозначно неразрешимо относительно u в любой окрестности таких точек.

8.2.9.5. Неявные функции, определяемые системой уравнений

Совокупность m неявных функций $u_1, \ldots, u_m$ от независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$ может быть задана при помощи системы m функциональных уравнений:

$$\begin{aligned} &F_1(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m) = 0, \\ &F_2(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m) = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &F_m(x_1, \ldots, x_n; u_1, \ldots, u_m) = 0, \end{aligned} \tag{8.6}$$

так что функции $u_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ ищутся как решение этой системы, т. е. при подстановке функций $u_i = \varphi_i$ в уравнения (8.6) получаются тождества.

Теорема об однозначной разрешимости системы уравнений (8.6) относительно функций $u_1, \dots, u_m$ и дифференцируемости этих функций. Пусть функции $F_j(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m)$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ определены в некоторой окрестности D точки $M_0(\overset{0}{x}_1, \dots, \overset{0}{x}_n; \overset{0}{u}_1, \dots, \overset{0}{u}_m)$ пространства E^{n+m} и непрерывны в D вместе со своими $n+m$ частными производными первого порядка. Тогда, если $F_j(M_0) = 0$ и **якобиан (функциональный определитель Якоби)**

$$\det\left[\frac{\partial F_j}{\partial x_i}\right] \equiv \frac{\partial(F_1, \dots, F_m)}{\partial(u_1, \dots, u_m)} \equiv \begin{vmatrix} \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_1}{\partial u_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial F_1}{\partial u_1} & \cdots & \dfrac{\partial F_m}{\partial u_m} \end{vmatrix} \neq 0,$$

т. е. отличен от нуля в точке M_0, то система (8.6) определяет в некоторой окрестности D' точки $M_0'(\overset{0}{x}_1, \dots, \overset{0}{x}_n)$ пространства E^n единственные однозначные (один раз) дифференцируемые функции $u_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$, для которых $\varphi_i(\overset{0}{x}_1, \dots, \overset{0}{x}_n) = \overset{0}{u}_i$ и тождественно удовлетворяются уравнения (8.6) в каждой точке окрестности D'. Если все функции F_j дифференцируемы s раз, то все φ_i также дифференцируемы s раз. Дифференциалы du_i и dx_k связаны линейными уравнениями

$$dF_j = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_k}\, dx_k + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_j}{\partial u_i}\, du_i = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

Частные производные $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_k}, \dots, \dfrac{\partial u_m}{\partial x_k}$ могут быть найдены (например, по формулам Крамера) из системы m линейных уравнений

$$\frac{\partial F_j}{\partial x_k} + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial F_j}{\partial u_i}\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0 \quad (j = 1, \dots, m;\ k = 1, \dots, n), \tag{8.7}$$

получаемых дифференцированием сложных функций

$$F_j(x_1, \dots, x_n; u_1, \dots, u_m) = 0,$$

где $u_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$, по x_k. Определитель системы (8.7) (якобиан) не равен нулю в окрестности точки M_0. Частные производные от $u_1, \dots, u_m$ по $x_1, \dots, x_n$ второго и большего порядков получаются дифференцированием выражений $\partial u_i/\partial x_k$.

8.2.10. Отображения. Зависимость функций

1. Отображения. Пусть в некоторой окрестности точки $P_0(\overset{0}{x}_1, \dots, \overset{0}{x}_n)$ заданы функции $u_i = \varphi_i(x_1, \dots, x_n)$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Эти функции определяют **отображение** окрестности $\{P\}$ точки P_0 на некоторое множество $\{P'\}$

в n-мерном пространстве переменных $u_1, \ldots, u_n$. Это отображение называется **взаимно однозначным**, если каждой точке P из $\{P\}$ соответствует только одна точка P' из $\{P'\}$ и при этом каждая точка P' соответствует только одной точке P. Если функции $u_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ определены в окрестности точки P_0 и имеют там непрерывные частные производные первого порядка по всем своим аргументам, а якобиан

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0$$

в точке P_0, то функции φ_i определяют взаимно однозначное отображение некоторой окрестности $\{P\}$ точки $P_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ на некоторую окрестность $\{P'\}$ точки $P_0'(u_1^0, \ldots, u_n^0)$, где $u_i^0 = \varphi_i(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Функции $x_j = \psi_j(u_1, \ldots, u_n)$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$, осуществляющие **обратное отображение**, также дифференцируемы в окрестности точки P_0'. Взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение, осуществляемое непрерывными функциями φ_i и ψ_j, называется **гомеоморфным**.

Пусть система непрерывно дифференцируемых по всем аргументам функций $y_i = f(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ осуществляет отображение (называемое **непрерывно дифференцируемым**) открытого множества G точек $A(x_1, \ldots, x_n)$ на некоторое множество G' точек $B(y_1, \ldots, y_n)$. Пусть, кроме того, система непрерывно дифференцируемых по всем аргументам функций $z_i = g_i(y_1, \ldots, y_2)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ осуществляет отображение открытого множества точек $B(y_1, \ldots, y_n)$ на некоторое множество точек $C(z_1, \ldots, z_n)$. Тогда можно рассматривать **сложное отображение (композицию**, или **суперпозицию отображений**) некоторого открытого множества точек $A(x_1, \ldots, x_n)$ на множество точек $C(z_1, \ldots, z_n)$, определяемое системой непрерывно дифференцируемых по всем аргументам функций

$$z_i = g_i\bigl(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_n(x_1, \ldots, x_n)\bigr) \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Якобианы этих непрерывно дифференцируемых отображений связаны между собой равенствами:

$$\frac{\partial(z_1, \ldots, z_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \det\left[\frac{\partial z_i}{\partial x_j}\right] = \det\left[\sum_{s=1}^{n} \frac{\partial z_i}{\partial y_s} \cdot \frac{\partial y_s}{\partial x_j}\right] =$$

$$= \det\left[\frac{\partial z_i}{\partial y_s}\right] \cdot \det\left[\frac{\partial y_s}{\partial x_j}\right] = \frac{\partial(z_1, \ldots, z_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \cdot \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)}.$$

В частности, композиция двух взаимно обратных отображений является тождественным отображением с якобианом, равным 1, т. е.

$$\frac{\partial(x_1, \ldots, x_n)}{\partial(y_1, \ldots, y_n)} \cdot \frac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = 1$$

для всех точек $(x_1, \ldots, x_n)$ из G.

Если G — область в E^n и якобиан непрерывно дифференцируемого отображения $\dfrac{\partial(y_1, \ldots, y_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} \neq 0$ в G, то множество G' в E^n, на которое отображается область G, является также областью. При этом взаимная однозначность между точками областей G и G' является локальной, т.е. выполняется только в окрестности некоторой точки P_0 области G и не обязательно во всей области G.

Пример 14. Преобразование $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$ цилиндрических координат точек трехмерного пространства в декартовы координаты осуществляет отображение области G пространства E^3, состоящей из точек, координаты которых (ρ, φ, z) ограничены условиями: $\rho > 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, $-\infty < z < +\infty$, на область G', содержащую все точки пространства E^3, за исключением точек $(0, 0, z)$, лежащих на оси Oz. Функции, осуществляющие данное отображение, непрерывно дифференцируемы в G, а якобиан

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial\rho} & \dfrac{\partial x}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial x}{\partial z} \\ \dfrac{\partial y}{\partial\rho} & \dfrac{\partial y}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial y}{\partial z} \\ \dfrac{\partial z}{\partial\rho} & \dfrac{\partial z}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -\rho\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \rho \neq 0,$$

так как $\rho > 0$. Следовательно, данное отображение является взаимно однозначным отображением указанных областей G и G'. Однако, если координата φ произвольна, т.е. $-\infty < \varphi < +\infty$, то отображение является лишь локально взаимно однозначным, так как каждой точке (x, y, z) соответствует при этом бесконечное множество точек (ρ, φ, z) с одинаковыми ρ и z, но отличающимися на $2\pi n$ значениями φ.

2. Зависимость функций. Функции $u_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ называются **зависимыми** в некоторой области G пространства E^n, если существует функция $F(u_1, \ldots, u_m)$ от m аргументов такая, что для всех точек из G выполняется равенство $F\big(f(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_m(x_1, \ldots, x_n)\big) = 0$. В противном случае функции u_i называются **независимыми** в области G. **Линейная зависимость (независимость)** функций является частным случаем их зависимости (независимости) в области G.

Достаточное условие независимости функций. Пусть функции $u_i = f_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, m;\ n \geqslant m)$ определены и дифференцируемы в окрестности некоторой точки $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Тогда, если якобиан этих функций по каким-либо m аргументам не равен нулю в M_0, то данные функции независимы в некоторой окрестности M_0.

Примечание. При $m > n$ функции $u_1, \ldots, u_m$ всегда зависимы.

Пример 15. Для функций $u_1 = x_1^2 + x_2^2$, $u_2 = x_1 + x_2$ якобиан равен

$$\frac{\partial(u_1, u_2)}{\partial(x_1, x_2)} = \begin{vmatrix} 2x_1 & 2x_2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x_1 - x_2).$$

Функции u_1, u_2 независимы всюду в любой окрестности каждой точки (x_1, x_2), не содержащей точек прямой $x_2 = x_1$, в точках которой якобиан обращается в нуль.

8.2.11. Замена переменных в дифференциальных выражениях

1. Выражения с обыкновенными производными. Пусть в некотором дифференциальном выражении

$$F(x, y, y'_x, y''_{xx}, \ldots) = C,$$

где C — некоторая постоянная, $y = y(x)$ — функция от x, требуется ввести новые переменные: функцию $u = u(t)$ и независимую переменную t, которые связаны со старыми переменными x, y соотношениями

$$x = f(t, u), \quad y = g(t, u). \tag{8.8}$$

Предполагается, что все рассматриваемые функции дифференцируемы достаточное число раз. Дифференциалы функций (8.8) равны:

$$dx = \frac{\partial f}{\partial t}\,dt + \frac{\partial f}{\partial u}\,du, \quad dy = \frac{\partial g}{\partial t}\,dt + \frac{\partial g}{\partial u}\,du,$$

где $du = \dfrac{du}{dt}\,dt$. Отсюда следует:

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt} = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial t} + \dfrac{\partial g}{\partial u}\dfrac{du}{dt}}{\dfrac{\partial f}{\partial t} + \dfrac{\partial f}{\partial u}\dfrac{du}{dt}} \equiv \frac{g'_t + g'_u \cdot u'_t}{f'_t + f'_u \cdot u'_t}, \\ y''_{xx} &= \frac{d(y'_x)/dt}{dx/dt} = \frac{1}{f'_t + f'_u \cdot u'_t}\,\frac{d}{dt}\left[\frac{g'_t + g'_u \cdot u'_t}{f'_t + f'_u \cdot u'_t}\right]. \end{aligned} \tag{8.9}$$

Аналогично находятся последующие производные. В результате исходное дифференциальное выражение примет вид

$$F_1(t, u, u'_t, u''_{tt}, \ldots) = C.$$

При замене одного только аргумента (при старой функции y), согласно соотношению $x = f(t)$ (при этом $y = y(x) = y(f(t))$), имеем:

$$\begin{aligned} y'_x &= \frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(t)}\frac{dy}{dt}, \\ y''_{xx} &= \frac{d(y'_x)}{dx} = \frac{d(y'_x)/dt}{dx/dt} = \frac{1}{[f'(t)]^3}\left[f'(t)\frac{d^2y}{dt^2} - f''(t)\frac{dy}{dt}\right] \quad \text{и т. д.} \end{aligned}$$

При замене одной только функции (при старом аргументе x), согласно соотношению $y = g(u)$, где $u = u(x)$, имеем:

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{dg(u)}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

$$y''_{xx} = \frac{d(y'_x)}{dx} = \frac{dg(u)}{du} \cdot \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2g(u)}{du^2}\left(\frac{du}{dx}\right)^2 \quad \text{и т. д.}$$

Примечание. Если старые переменные x, y связаны с новыми t, u соотношениями $t = \varphi(x, y)$, $u = \psi(x, y)$, то переход к новым переменным проводится аналогично изложенному в п. 2.

Пример 16. Преобразовать дифференциальное уравнение $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+y}{x-y}$ к полярной системе координат, т. е. перейти к новым переменным $\rho(\varphi)$ (функция) и φ (аргумент), согласно соотношениям $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

Решение. Согласно (8.9), получим (вводя обозначения $t \equiv \varphi$, $u \equiv \rho$, $f(t, u) \equiv \rho\cos\varphi$, $g(t, u) = \rho\sin\varphi$):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\rho\cos\varphi + \sin\varphi \cdot \dfrac{d\rho}{d\varphi}}{-\rho\sin\varphi + \cos\varphi \cdot \dfrac{d\rho}{d\varphi}}.$$

Исходное дифференциальное уравнение в новых переменных после некоторых преобразований принимает вид $d\rho/d\varphi = \rho$. ▷

2. Выражения с частными производными. Предположим, что в дифференциальном выражении

$$F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}, \ldots\right) = C,$$

где C — постоянная величина; x, y — независимые переменные; $z = z(x, y)$ — функция, требуется перейти к новым независимым переменным u, v и новой функции $w = w(u, v)$, которые связаны со старыми переменными соотношениями

$$x = f(u, v, w); \quad y = g(u, v, w); \quad z = h(u, v, w). \tag{8.10}$$

Дифференциалы функций (8.10) равны

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial f}{\partial u}\,du + \frac{\partial f}{\partial v}\,dv + \frac{\partial f}{\partial w}\,dw = \frac{\partial f}{\partial u}\,du + \frac{\partial f}{\partial v}\,dv + \frac{\partial f}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\,du + \frac{\partial w}{\partial v}\,dv\right), \\ dy &= \frac{\partial g}{\partial u}\,du + \frac{\partial g}{\partial v}\,dv + \frac{\partial g}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\,du + \frac{\partial w}{\partial v}\,dv\right), \\ dz &= \frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy = \frac{\partial h}{\partial u}\,du + \frac{\partial h}{\partial v}\,dv + \frac{\partial h}{\partial w}\left(\frac{\partial w}{\partial u}\,du + \frac{\partial w}{\partial v}\,dv\right). \end{aligned} \tag{8.11}$$

Подставляя выражения dx и dy из (8.11) в выражение dz и приравнивая затем коэффициенты при du и dv, получим систему двух уравнений

$$\frac{\partial z}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right]+\frac{\partial z}{\partial y}\left[\frac{\partial g}{\partial u}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right]=\frac{\partial h}{\partial u}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u},$$
$$\frac{\partial z}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right]+\frac{\partial z}{\partial y}\left[\frac{\partial g}{\partial v}+\frac{\partial g}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right]=\frac{\partial h}{\partial v}+\frac{\partial h}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v},$$

из которой можно выразить производные $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ через $\partial w/\partial u$, $\partial w/\partial v$. Выражения производных второго порядка от z по x и y находятся при помощи дифференциалов от производных первого порядка z'_x и z'_y. Аналогично вычисляются производные от z более высоких порядков.

Если заменяются только независимые переменные, но не функция, т. е. $x = f(u, v)$, $y = g(u, v)$, $z = w$, то выражения производных z'_x, z'_y через z'_u, z'_v находятся из системы уравнений

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial u},\qquad \frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial g}{\partial v},$$

решая которую (например, по формулам Крамера) относительно $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$, получим

$$\frac{\partial z}{\partial x}=a_{11}\frac{\partial z}{\partial u}+a_{12}\frac{\partial z}{\partial v},\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=a_{21}\frac{\partial z}{\partial u}+a_{22}\frac{\partial z}{\partial v},\tag{8.12}$$

где a_{ij} $(i, j = 1; 2)$ — функции от u, v. Вторые производные от z по x, y находятся дифференцированием первых производных по формулам (8.12), в частности:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=a_{11}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)+a_{12}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=$$
$$=a_{11}\frac{\partial}{\partial u}\left(a_{21}\frac{\partial z}{\partial u}+a_{22}\frac{\partial z}{\partial u}\right)+a_{12}\frac{\partial}{\partial v}\left(a_{21}\frac{\partial z}{\partial u}+a_{22}\frac{\partial z}{\partial v}\right)=$$
$$=a_{11}\left(\frac{\partial a_{21}}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial u}+a_{21}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}+\frac{\partial a_{22}}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}+a_{22}\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\right)+$$
$$+a_{12}\left(\frac{\partial a_{21}}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial u}+a_{21}\frac{\partial^2 z}{\partial v\partial u}+\frac{\partial a_{22}}{\partial v}\frac{\partial z}{\partial v}+a_{22}\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right).$$

Если старые x, y, z и новые u, v, w переменные связаны соотношениями

$$u=\varphi(x,y,z),\qquad v=\psi(x,y,z),\qquad w=\theta(x,y,z)$$

и при этом $z = z(x, y)$ и $w = w(u, v)$, то

$$du = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right),$$

$$dv = \frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\psi}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right),$$

$$dw = \frac{\partial w}{\partial u}\,du + \frac{\partial w}{\partial v}\,dv = \frac{\partial\theta}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\theta}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\theta}{\partial z}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\,dx + \frac{\partial z}{\partial y}\,dy\right).$$

Подставляя эти выражения для du и dv в dw и приравнивая коэффициенты при dx и dy, получим систему двух уравнений, из которой можно выразить $\partial z/\partial x$, $\partial z/\partial y$ через $\partial w/\partial u$, $\partial w/\partial v$. Чтобы выразить вторые производные, надо записать дифференциалы от первых производных и т. д.

Если заменяются только независимые переменные и они связаны соотношениями $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$, $w \equiv z$, то производные от функции z по старым переменным x, y и по новым переменным u, v связаны соотношениями

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y},$$

где $z(u, v) = z\big(x(u, v), y(u, v)\big)$, а $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ — соотношения, обратные к $u = \varphi(x, y)$, $v = \psi(x, y)$.

Примечание. Старые и новые переменные могут быть связаны также неявными выражениями $F_i(x, y, z, u, v, w) = 0$ $(i = 1, 2, 3)$, допускающими разрешение относительно u, v, w и относительно x, y, z.

Пример 17. Оператор Лапласа $\Delta z \equiv \dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, где $z = z(x, y)$, преобразовать к полярной системе координат, согласно соотношениям $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$.

Решение. Здесь преобразуются только независимые переменные, а функция z не преобразуется. Имеем:

$$dx = \cos\varphi\, d\rho - \rho\sin\varphi\, d\varphi, \quad dy = \sin\varphi\, d\rho + \rho\cos\varphi\, d\varphi,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}\, dx + \frac{\partial z}{\partial y}\, dy = \frac{\partial z}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}(\cos\varphi\, d\rho - \rho\sin\varphi\, d\varphi) + \frac{\partial z}{\partial y}(\sin\varphi\, d\rho + \rho\cos\varphi\, d\varphi) = \frac{\partial z}{\partial \rho}\, d\rho + \frac{\partial z}{\partial \varphi} d\varphi.$$

Приравнивая коэффициенты при $d\rho$ и $d\varphi$, находим

$$\frac{\partial z}{\partial x}\cos\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\sin\varphi = \frac{\partial z}{\partial \rho}; \quad -\frac{\partial z}{\partial x}\rho\sin\varphi + \frac{\partial z}{\partial y}\rho\cos\varphi = \frac{\partial z}{\partial \varphi}.$$

Отсюда следует

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \rho}\cos\varphi - \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\sin\varphi}{\rho}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \rho}\sin\varphi + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\cdot\frac{\cos\varphi}{\rho}.$$

Используя предыдущие формулы, находим:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \cos\varphi\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) - \frac{\sin\varphi}{\rho}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) =$$

$$= \cos^2\varphi\,\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} - \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho}\frac{\partial^2 z}{\partial\rho\partial\varphi} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2} + \frac{\sin^2\varphi}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho} + \frac{2\sin\varphi\cos\varphi}{\rho^2}\frac{\partial z}{\partial\varphi}.$$

Аналогично вычисляется $\partial^2 z/\partial y^2$. Оператор Лапласа в полярных координатах принимает вид

$$\Delta z = \frac{\partial^2 z}{\partial\rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial z}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\varphi^2}. \qquad \triangleright$$

8.2.12. Экстремум функции нескольких переменных

1. Определение экстремума. Пусть функция $z = f(M) \equiv f(x_1, \ldots, x_n)$ определена в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ пространства E^n. Говорят, что функция $f(M)$ имеет в точке M_0 **локальный максимум** (или **локальный минимум**), если существует ε-окрестность этой точки, содержащаяся в области определения функции, такая, что для каждой точки M из этой окрестности выполняется неравенство

$$f(M) \leqslant f(M_0) \quad \big(\text{или} \quad f(M) \geqslant f(M_0)\big).$$

Соответствующее значение функции $f(M_0)$ называют при этом ее **максимальным** (или **минимальным**) **значением**. Локальные максимум и минимум имеют общее название **локальный экстремум**. В случае строгих неравенств $f(M) < f(M_0)$ $(f(M) > f(M_0))$, выполняющихся для всех точек M из указанной окрестности, не совпадающих с точкой M_0, говорят о **строгом экстремуме**, в противном случае — о **нестрогом экстремуме**. В достаточно малой окрестности точки экстремума M_0 приращение функции $\Delta z = f(M) - f(M_0)$ сохраняет знак: $\Delta z \leqslant 0$ в случае максимума, $\Delta z \geqslant 0$ в случае минимума.

Абсолютным максимумом (минимумом) или **абсолютным экстремумом** функции, определенной и непрерывной в замкнутой ограниченной области называется ее наибольшее или наименьшее значение в этой области, которые могут достигаться либо во внутренней точке области — локальный (**внутренний**) экстремум, либо в граничных точках области — **граничный** экстремум.

2. Необходимое условие экстремума. Если определенная в некоторой окрестности точки M_0 функция $f(M)$ имеет локальный экстремум в этой точке, то либо все ее частные производные первого порядка (если они существуют) обращаются в нуль в точке M_0:

$$\frac{\partial f(M_0)}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial f(M_0)}{\partial x_n} = 0,$$

либо эти частные производные в точке M_0 не существуют, либо бесконечны. Такие точки M_0, в которых все частные производные $f'_{x_i} = 0$ не существуют или бесконечны, называются **точками возможного экстремума (критическими точками)**.

Если функция $z = f(M)$ дифференцируема в точке M_0 и имеет в M_0 локальный экстремум, то ее дифференциал в этой точке равен тождественно нулю: $df(M_0) = f'_{x_1}(M_0)\,dx_1 + \ldots + f'_{x_n}(M_0)\,dx_n = 0$ при любых $dx_1, \ldots, dx_n$ или $\operatorname{grad} f(M_0) = 0$. Из условия $df(M_0) = 0$ следует система равенств $f'_{x_1}(M_0) = \ldots = f'_{x_n}(M_0) = 0$. Точка $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$, в которой выполняется эта система равенств, называется **стационарной точкой**, а значение функции $f(M_0)$ в этой точке называется ее **стационарным значением**.

Пример 18.

1) Функция $z = x^2 - y^2$ (график — гиперболический параболоид) не имеет в точке $(0; 0)$ экстремума, но при этом $z'_x(0; 0) = z'_y(0; 0) = 0$. На графике имеются точки, расположенные как выше, так и ниже горизонтальной касательной плоскости, проходящей через точку $(0; 0; 0)$.
2) Функция $z = -x^2 - y^2$ (график — эллиптический параболоид) имеет максимум в точке $(0; 0)$ и при этом $z'_x(0; 0) = z'_y(0; 0) = 0$. Все точки графика расположены ниже горизонтальной плоскости, проходящей через точку $(0; 0; 0)$.
3) Функция $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ $(z \geqslant 0)$ (график — конус) имеет минимум в точке $(0; 0)$, в которой производные z'_x, z'_y не существуют. График не имеет касательной плоскости, проходящей через точку $(0; 0; 0)$.

3. Нахождение экстремумов функции. Если $z = f(x_1, \ldots, x_n)$ — дифференцируемая в некоторой области функция, то для нахождения ее экстремумов в этой области следует:

1) Найти критические точки из системы уравнений

$$f'_{x_1}(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \quad f'_{x_n}(x_1, \ldots, x_n) = 0.$$

2) Для каждой критической точки $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ проверить неизменность знака приращения $\Delta z = f(M) - f(M_0)$ функции $f(M)$ **для всех** точек M в достаточно малой окрестности точки M_0. Если при этом $\Delta z \geqslant 0$ ($\Delta z \leqslant 0$), то функция имеет в точке M_0 минимум (максимум).

4. Достаточное условие строгого экстремума функции. Пусть функция $z = f(M) \equiv f(x_1, \ldots, x_n)$ имеет все непрерывные производные до второго порядка включительно в некоторой окрестности точки $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ и $df(M_0) = 0$. Тогда функция $f(M)$ имеет в точке M_0:

1) максимум, если $d^2 f(M_0) < 0$ при $\sum\limits_{i=1}^{n} |dx_i| \neq 0$;

2) минимум, если $d^2 f(M_0) > 0$ при $\sum\limits_{i=1}^{n} |dx_i| \neq 0$.

Если аргументы $x_1, \ldots, x_n$ функции $f(x_1, \ldots, x_n)$ являются независимыми переменными, то второй дифференциал этой функции в точке M_0 является квадратичной формой относительно $dx_1, \ldots, dx_n$

$$d^2 f(M_0) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, dx_i\, dx_j \qquad \left(a_{ij} = a_{ji} \equiv \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x_i \partial x_j}\right).$$

Следовательно, если $d^2 f(M_0)$ является положительно (отрицательно) определенной квадратичной формой, то функция $z = f(M)$ имеет в точке M_0 локальный минимум (максимум). Если квадратичная форма неопределенна в точке M_0, то $f(M)$ не имеет экстремума в M_0. Для исследования знака второго дифференциала можно привести соответствующую ему квадратичную форму к диагональному виду. Можно также использовать критерий Сильвестра.

Если первый дифференциал достаточное число раз дифференцируемой функции обращается в точке M_0 в нуль, а второй дифференциал является знакопостоянной (квазизнакоопределенной) квадратичной формой, то вопрос о наличии или отсутствии экстремума решается с применением дифференциалов более высоких порядков.

5. Функция двух переменных. Пусть функция $z = f(x, y)$ двух переменных имеет все непрерывные производные до второго порядка включительно по x, y в окрестности точки $M_0(x_0, y_0)$, а в самой точке M_0 выполняется необходимое условие экстремума $df(x_0, y_0) = 0$ или

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = 0.$$

Тогда для функции $z = f(x, y)$ имеем в точке $M_0(x_0, y_0)$:

1) **Локальный минимум**, если

$$a_{11} = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x^2} > 0 \quad \left(\text{или} \quad a_{22} = \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial y^2} > 0\right) \quad \text{и}$$

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0, \quad \text{где} \quad a_{12} = a_{21} \equiv \frac{\partial^2 f(M_0)}{\partial x \partial y}.$$

2) **Локальный максимум**, если $a_{11} < 0$ (или $a_{22} < 0$) и $D > 0$.
3) **Отсутствие экстремума**, если $D < 0$.
4) **Неопределенный случай** (функция может иметь экстремум в точке M_0, а может и не иметь), если $D = 0$. В этом случае необходимо дополнительное исследование.

Примечание. Числа a_{11} и a_{22} имеют одинаковый знак при условии $D > 0$.

Пример 19. Для функции $z = x^3 + y^3 - 3xy - 2$ имеем $z'_x = 3x^2 - 3y$, $z'_y = 3y^2 - 3x$, $z''_{xx} = 6x$, $z''_{xy} = -3$, $z''_{yy} = 6y$. Решая систему уравнений $z'_x = 3x^2 - 3y = 0$, $z'_y = 3y^2 - 3x = 0$, находим две критические точки: $M_1(0;0)$ и $M_2(1;1)$. В точке M_1 имеем: $a_{11} = z''_{xx}(0;0) = 0$, $a_{12} = z''_{xy}(0;0) = -3$, $a_{22} = z''_{yy}(0;0) = 0$, $D = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = -9 < 0$. В точке M_1 экстремума нет. Для точки M_2 находим $D = 27 > 0$, $a_{11} = 6 > 0$, т. е. функция имеет минимум. При этом $f(M_1) = f(1;1) = -3$.

Пример 20. Функция $z = x^4 + y^6$ имеет критическую точку $M_0(0;0)$, в которой $z'_x = 0$, $z'_y = 0$. В этой точке функция имеет локальный минимум, так как очевидно, что $\Delta z \geqslant 0$ в окрестности точки M_0. При этом $D = 0$ в точке M_0.

Пример 21. Функция $z = x^3 + y^5$ имеет критическую точку $M_0(0;0)$. В этой точке экстремума нет, так как приращение Δz в окрестности точки $M_0(0;0)$ может быть как положительным, так и отрицательным, в зависимости от знаков Δx и Δy. При этом $D = 0$ в точке M_0.

6. Нахождение абсолютного экстремума. Для нахождения наибольшего и наименьшего значений (**абсолютного экстремума**) функции, определенной и дифференцируемой (имеющей непрерывные производные) в некоторой замкнутой ограниченной области в E^n, следует найти все стационарные точки этой функции (в которых все первые производные обращаются в нуль), вычислить значения функции в этих точках и сравнить их со значениями функции в граничных точках области. Наибольшее (наименьшее) из этих значений и будет наибольшим (наименьшим) значением функции в замкнутой области. В частности, если область двумерная, то на ее границе данная функция зависит только от одной переменной.

7. Условный экстремум. Если требуется найти экстремум функции, аргументы которой удовлетворяют дополнительным соотношениям (**уравнениям связи**, или **ограничениям**), то такие экстремумы называют **условными**. В этой связи обычные экстремумы называют **безусловными**.

Пример 22. Найти минимум функции $z = f(x, y) \equiv x^2 + 2y^2$ при условии $g(x, y) \equiv x - y + 1 = 0$. Это означает, что экстремум функции ищется не на всей плоскости Oxy, а на прямой $x - y + 1 = 0$.

Решение. Выражая y из уравнения связи $g(x, y) = 0$ и подставляя в $z = f(x, y)$, сведем задачу отыскания условного экстремума к задаче нахождения обычного (безусловного) экстремума функции $z = h(x) \equiv 3x^2 + 4x + 2$. Из условия $h'(x) = 6x + 4 = 0$ находим критическую точку $x_0 = -2/3$, в которой функция $h(x)$ имеет минимум (так как $h''(x_0) = 6 > 0$). Из уравнения $g(x, y) = 0$ находим $y_0 = 1/3$. Функция $z = x^2 + 2y^2$ имеет в точке $(-2/3; 1/3)$ условный минимум $z = 2/3$ при условии $x - y + 1 = 0$. ▷

В общем виде задача формулируется следующим образом. Пусть требуется найти экстремум функции $z = f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$ от $n+m$ переменных при условии, что эти переменные удовлетворяют уравнениям связи

$$\begin{gathered} g_1(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_m(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0. \end{gathered} \tag{8.13}$$

Говорят, что функция f, при наличии ограничений (8.13), имеет максимум (или минимум) в точке $M_0(x_1^0, \ldots, x_n^0, y_1^0, \ldots, y_n^0)$ пространства E^{n+m}, координаты которой удовлетворяют уравнениям связи (8.13), если в E^{n+m} существует такая окрестность точки M_0, что для всех точек M из этой окрестности, координаты которых удовлетворяют уравнениям (8.13), выполняется неравенство $f(M) \leqslant f(M_0)$ (или $f(M) \geqslant f(M_0)$). Точка M_0 называется при этом **точкой локального условного экстремума**.

Если функции $g_1, \ldots, g_m$ дифференцируемы в окрестности точки M_0 и якобиан

$$\frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)} \neq 0$$

в окрестности этой точки, то система (8.13) разрешима относительно переменных $y_1, \ldots, y_m$ в некоторой окрестности точки M_0, т. е. $y_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, где φ_i — функции, дифференцируемые в точке $M_0'(x_1^0, \ldots, x_n^0)$. Подставляя функции $y_i = \varphi_i$ в функцию f, получим сложную функцию

$$z = f\big(x_1, \ldots, x_n, \varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_m(x_1, \ldots, x_n)\big) \equiv h(x_1, \ldots, x_n)$$

от независимых друг от друга переменных $x_1, \ldots, x_n$, безусловный экстремум которой можно искать согласно п. **4**.

Метод множителей Лагранжа для отыскания точек возможного условного экстремума функции f при ограничениях (8.13) не требует исключения m переменных из $m+n$, от которых зависит эта функция, и состоит в следующем. Задача нахождения условного экстремума функции $f(M) \equiv f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m)$, определенной и дифференцируемой в некоторой области G пространства E^{n+m} при наличии уравнений связи $g_i(M) \equiv g_i(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = 0$

$(i = 1, \ldots, m)$, где все g_i — дифференцируемы в G и якобиан

$$\frac{\partial(g_1, \ldots, g_m)}{\partial(y_1, \ldots, y_m)} \neq 0 \quad (\text{в области } G),$$

сводится к задаче нахождения обычного (безусловного) экстремума **функции Лагранжа**

$$L(M) \equiv L(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m) = f(M) + \lambda_1 g_1(M) + \ldots + \lambda_m g_m(M),$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ — **постоянные множители Лагранжа** (произвольные числа). В результате получаем систему $n + 2m$ уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial L}{\partial x_n} = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial L}{\partial y_m} = 0, \qquad (8.14)$$
$$g_1 = 0, \quad \ldots, \quad g_m = 0$$

для нахождения $n+m$ координат $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ точек M_0 возможного условного экстремума (стационарных точек) и m чисел $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$. Точки локального условного экстремума функции $f(M)$ могут находиться среди найденных стационарных точек функции $L(M)$. Решение вопроса о том, какие из этих точек являются точками условного экстремума, может быть проведено путем выяснения знака второго дифференциала $d^2L(M_0)$ в стационарной точке M_0 функции $L(M)$. Функция $f(M)$ имеет условный максимум (минимум) в стационарной точке M_0 функции $L(M)$, если $d^2L(M_0) < 0$ $(d^2L(M_0) > 0)$, где

$$d^2L(M_0) = \left(dx_1\frac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + dx_n\frac{\partial}{\partial x_n} + dy_1\frac{\partial}{\partial y_1} + \ldots + dy_m\frac{\partial}{\partial y_m}\right)^2 L(M_0),$$

причем сюда следует подставить вместо дифференциалов $dy_1, \ldots, dy_m$ их значения, выраженные через дифференциалы $dx_1, \ldots, dx_n$ из системы уравнений

$$\frac{\partial g_1}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial g_1}{\partial y_1}dy_1 + \ldots + \frac{\partial g_1}{\partial y_m}dy_m = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\frac{\partial g_m}{\partial x_1}dx_1 + \ldots + \frac{\partial g_m}{\partial x_n}dx_n + \frac{\partial g_m}{\partial y_1}dy_1 + \ldots + \frac{\partial g_1}{\partial y_m}dy_m = 0.$$

Отметим, что приращения функций f и L равны $\Delta f = \Delta L$ при выполнении условий $g_1 = 0, \ldots, g_m = 0$.

Пример 23. Найти точки условного экстремума функции $u = f(x, y, z) \equiv x - 2y + 2z$ при условии $g(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$.

Решение. Составим функцию Лагранжа:

$$L = f + \lambda g = x - 2y + 2z + \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1).$$

Стационарные точки находятся из системы уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial y} = -2 + 2\lambda y = 0, \quad \frac{\partial L}{\partial z} = 2 + 2\lambda z = 0,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0,$$

решая которую, найдем две стационарные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и два соответствующих им значения множителя Лагранжа λ:

1) $x_1 = -1/3$, $y_1 = 2/3$, $z_1 = -2/3$, $\lambda_1 = 3/2$;
2) $x_2 = 1/3$, $y_2 = -2/3$, $z_2 = 2/3$, $\lambda_2 = -3/2$.

Второй дифференциал функции Лагранжа равен

$$d^2L = L''_{x^2}\,dx^2 + L''_{y^2}\,dy^2 + L''_{z^2}dz^2 + 2L''_{xy}\,dx\,dy + 2L''_{yz}\,dy\,dz + 2L''_{xz}\,dx\,dz,$$

где $dz = -\frac{x}{z}\,dx - \frac{y}{z}\,dy$. Отсюда следует

$$d^2L = 2\lambda\left(1 + \frac{x^2}{z^2}\right)dx^2 + 4\lambda\frac{xy}{z^2}\,dx\,dy + 2\lambda\left(1 + \frac{y^2}{z^2}\right)dy^2.$$

В точке M_1 функция $u = f(x, y, z)$ имеет локальный условный минимум, так как $d^2L(M_1) > 0$, причем $f(M_1) = -3$. В точке M_2 — локальный условный максимум, так как $d^2L(M_2) < 0$, причем $f(M_2) = 3$. ▷

8.3. Двойные интегралы и их свойства

8.3.1. Определение двойного интеграла

Пусть D — замкнутая ограниченная область на плоскости Oxy, границей которой является кусочно гладкая замкнутая линия, а $z = f(x, y)$ — некоторая функция, заданная и ограниченная в области D. Разобьем область D **произвольно** на n частичных замкнутых областей $D_1, D_2, \ldots, D_n$, не имеющих общих внутренних точек и ограниченных кусочно гладкими линиями (рис. 8.3). В каждой частичной области D_i с площадью ΔS_i возьмем (внутри или на границе D_i) **произвольную** точку $M_i(x_i, y_i)$ и составим сумму

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta S_i,$$

называемую **интегральной суммой**. Обозначим через d_i диаметр области D_i (т. е. наибольшее расстояние между точками ее границы), а наибольший из этих диаметров — d.

Если существует конечный предел J (число), к которому стремятся интегральные суммы J_n, когда наибольший из диаметров d частичных областей стремится к нулю (при этом $n \to \infty$), то этот предел называется **двойным** (или **двухкратным**) **интегралом от функции** $f(x, y)$ **по области** D, а функция $f(x, y)$

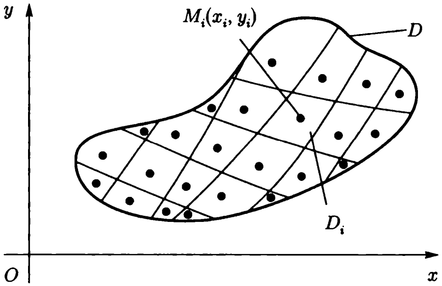


Рис. 8.3

при этом называется **интегрируемой (по Риману)** в области D. Обозначения двойного интеграла:

$$J = \iint\limits_D f(x, y)\, dS \quad \text{или} \quad J = \iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy.$$

Здесь $f(x, y)$ называется **подынтегральной функцией**, x, y — **переменными интегрирования**, D — **областью интегрирования**, выражение dS или $dx\,dy$ — **элементом площади**.

Согласно этому определению интеграла, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что $|J - J_n| < \varepsilon$, если только $d < \delta$.

Классы интегрируемых функций. Каждая из следующих функций является интегрируемой (по Риману) в ограниченной замкнутой области D:

1) Функция, непрерывная в области D.
2) Функция, определенная и ограниченная в области D и имеющая в D разрывы лишь на конечном числе кусочно гладких кривых. Произвольные, но конечные изменения значений функции на таких кривых не изменяют величины интеграла.

8.3.2. Геометрические приложения двойного интеграла

Если функция $z = f(x, y) \geqslant 0$ и непрерывна в области D, то двойной интеграл

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dS$$

численно равен объему V цилиндрического тела G, ограниченного снизу областью D, сверху — графиком этой функции, а с боков — цилиндрической

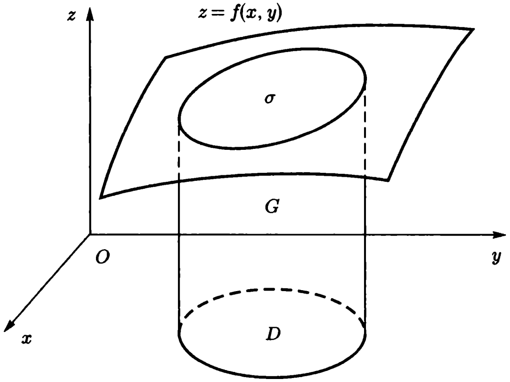


Рис. 8.4

поверхностью, образованной перпендикулярами к плоскости Oxy, проходящими через точки границы области D (рис. 8.4). Если $f(x, y) = 1$ в D, то интеграл численно равен площади области D.

Площадь S некоторого куска σ гладкой поверхности $z = f(x,y)$ (рис. 8.4), где $f(x, y)$ — однозначная функция, имеющая непрерывные первые производные в области D плоскости Oxy, на которую проецируется кусок σ, находится по формуле

$$S = \iint\limits_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

8.3.3. Свойства двойных интегралов

Если функции интегрируемы в соответствующих областях, то справедливы следующие соотношения:

1) **Аддитивность.**

$$\iint\limits_D f(x, y)\, dx\, dy = \iint\limits_{D_1} f(x, y)\, dx\, dy + \iint\limits_{D_2} f(x, y)\, dx\, dy,$$

где D_1, D_2 — две частичные области без общих внутренних точек, на которые разбита область D некоторой кусочно гладкой кривой.

2) **Линейность.** Если функции f и g интегрируемы в D, то $c_1 f + c_2 g$ также интегрируема в D и

$$\iint\limits_D [c_1 f(x,y) + c_2\, g(x,y)]\, dx\, dy = c_1 \iint\limits_D f(x,y)\, dx\, dy + c_2 \iint\limits_D g(x,y)\, dx\, dy,$$

где c_1, c_2 — любые действительные числа.

3) Если функции $f(x,y)$ и $g(x,y)$ интегрируемы в D, то их произведение интегрируемо в D.

4) Если всюду в D выполняется $f(x,y) \leqslant g(x,y)$, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dx\, dy \leqslant \iint\limits_D g(x,y)\, dx\, dy.$$

5) Из интегрируемости $f(x,y)$ в D следует интегрируемость $|f(x,y)|$ в D и

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\, dx\, dy\right| \leqslant \iint\limits_D |f(x,y)|\, dx\, dy.$$

6) Если m —наименьшее, M — наибольшее значения функции $f(x,y)$, непрерывной в области D, имеющей площадь S, то

$$mS \leqslant \iint\limits_D f(x,y)\, dx\, dy \leqslant MS.$$

7) **Теорема о среднем значении.** Если функция $f(x,y)$ непрерывна, $g(x,y)$ интегрируема в (связной) области D и $g(x,y) \geqslant 0$ (или $g(x,y) \leqslant 0$) в D, то в D существует по крайней мере одна точка $M(x_0, y_0)$ такая, что

$$\iint\limits_D f(x,y) g(x,y)\, dx\, dy = f(x_0, y_0) \iint\limits_D g(x,y)\, dx\, dy.$$

В частности, если $g(x,y) = 1$ в D, то

$$\iint\limits_D f(x,y)\, dx\, dy = f(x_0, y_0) \cdot S,$$

где S — площадь области D.

8.3.4. Вычисление двойных интегралов

1. **Прямоугольная область интегрирования.** D, заданная неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ (рис. 8.5). Двойной интеграл вычисляется по одной из формул:

1) $$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \equiv \int\limits_c^d \int\limits_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx.$$

2) $$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy \equiv \int\limits_a^b \int\limits_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy.$$

Здесь выражения, стоящие в правых частях формул, называются **повторными интегралами**. При этом в формуле 1) в повторном интеграле вычисляется сначала интеграл по переменной x от a до b (**внутренний интеграл**), в предположении, что y — постоянная, а затем вычисляется интеграл по переменной y от c до d (**внешний интеграл**). В формуле 2) вычисления проводятся в обратной последовательности.

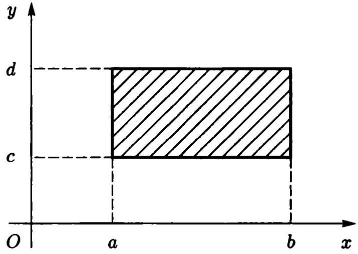


Рис. 8.5

Пример 24. Интеграл от функции $f(x,y) = x^2y$ по области $D: 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant y \leqslant 2$ равен

$$\iint\limits_D x^2y\,dx\,dy \equiv \int\limits_0^2 \int\limits_0^1 x^2y\,dx\,dy = \int\limits_0^2 dy \int\limits_0^1 x^2y\,dx =$$

$$= \int\limits_0^2 \left(y\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_0^1 dy = \int\limits_0^2 \frac{1}{3}y\,dy = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}y^2\Bigg|_0^2 = \frac{2}{3}.$$

Второй способ вычисления интеграла:

$$\iint\limits_D x^2y\,dx\,dy \equiv \int\limits_0^1 \int\limits_0^2 x^2y\,dy\,dx = \int\limits_0^1 dx \int\limits_0^2 x^2y\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left(x^2\frac{y^2}{2}\right)\Bigg|_0^2 dx = \int\limits_0^1 2x^2\,dx = 2\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1 = \frac{2}{3}.$$

2. Криволинейные области интегрирования. а) Если область интегрирования определяется неравенствами: $a \leqslant x \leqslant b$, $f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)$ (рис. 8.6), то

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)\,dy,$$

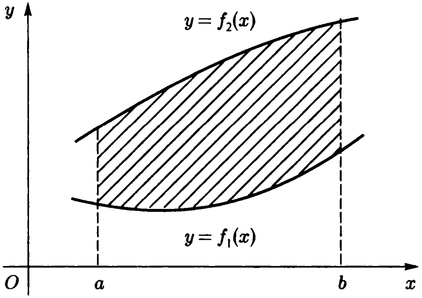


Рис. 8.6

где интегрирование в повторном интеграле справа проводится сначала по y (в предположении, что x постоянна), а затем — по переменной x.

б) В случае области D, определенной неравенствами $g_1(y) \leqslant x \leqslant g_2(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$ (рис. 8.7), имеем:

$$\iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_c^d dy \int\limits_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dx,$$

где интегрирование справа проводится сначала по x, а затем — по y.

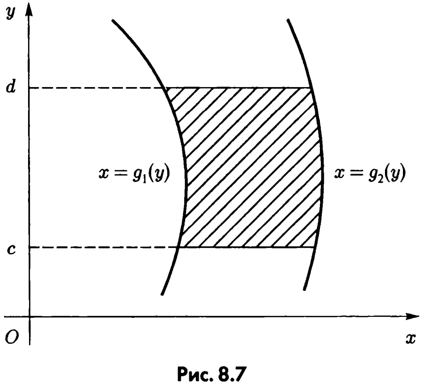


Рис. 8.7

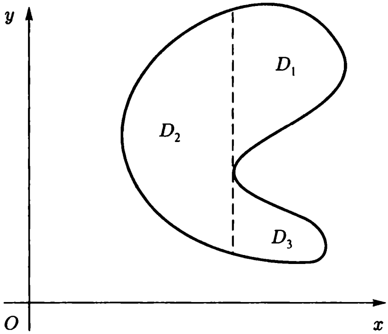


Рис. 8.8

в) Если, в случае произвольной области D (рис. 8.8), ее удается разбить на несколько частичных областей вида а) или б), не имеющих общих внутренних точек, то интеграл по области D равен сумме интегралов по этим частичным областям.

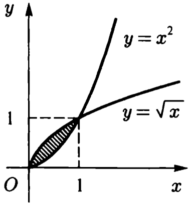


Рис. 8.9

Пример 25. Вычислить интеграл от функции $z = x^2y$ по области D, заключенной между кривыми $y=x^2$, $y=\sqrt{x}$ (рис. 8.9).

Решение. **Первый способ.** Кривые пересекаются в двух точках: $O(0;0)$ и $A(1;1)$. Следовательно, $a = 0$, $b = 1$, $f_1(x) = x^2$; $f_2(x) = \sqrt{x}$. Находим:

$$\iint\limits_D x^2y\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dx \int\limits_{x^2}^{\sqrt{x}} x^2y\,dy =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)\Big|_{y=x^2}^{y=\sqrt{x}}\right] dx = \int\limits_0^1 \frac{1}{2}x^2(x - x^4)\,dx = \frac{3}{56}.$$

Второй способ. Учитывая, что $c = 0$, $d = 1$, $g_1(y) = y^2$, $g_2(y) = \sqrt{y}$, получим:

$$\iint\limits_D x^2y\,dx\,dy = \int\limits_0^1 dy \int\limits_{y^2}^{\sqrt{y}} x^2y\,dx =$$

$$= \int\limits_0^1 \left[\left(\frac{1}{3}yx^3\right)\Big|_{x=y^2}^{x=\sqrt{y}}\right] dy = \int\limits_0^1 \frac{1}{3}y(y^{3/2} - y^6)\,dy = \frac{3}{56}. \qquad \triangleright$$

8.3.5. Замена переменных в двойных интегралах

Пусть функции $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, имеющие непрерывные производные по u, v, устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками $M(x, y)$ в ограниченной замкнутой области D на плоскости Oxy, границей которой является кусочно гладкая замкнутая кривая, и точками $M'(u, v)$ области D' на плоскости с прямоугольной декартовой системой координат $O'uv$, а якобиан

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\ \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{в области } D').$$

Тогда, если некоторая функция $f(x, y)$ интегрируема в области D, то справедлива следующая **формула замены переменных**:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} f\big(x(u, v), y(u, v)\big)|J|\,du\,dv.$$

Величина $|J|\,du\,dv$ называется **элементом площади** в криволинейных координатах u, v. В частности, при переходе к полярным координатам по формулам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, имеем

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\rho, \varphi)} = \rho,$$

следовательно:

$$\iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} f(\rho\cos\varphi, \rho\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Здесь $u \equiv \rho$, $v \equiv \varphi$. Элемент площади в полярных координатах $dS = \rho\,d\rho\,d\varphi$.

Пример 26. Найти интеграл от функции $f(x, y) = x^2 + y^2$ по области D, являющейся четвертью круга: $x^2 + y^2 \leqslant R^2$; $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

Решение. Область D' определяется неравенствами: $0 \leqslant \rho \leqslant R$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. Следовательно,

$$\iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy = \iint\limits_{D'} (\rho^2\cos^2\varphi + \rho^2\sin^2\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^R d\rho \int\limits_0^{\pi/2} \rho^3\,d\varphi = \int\limits_0^R \left[(\rho^3\varphi)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\pi/2}\right] d\rho = \frac{\pi}{2}\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^R = \frac{\pi R^4}{8}. \quad \rhd$$

Пример 27. Объем цилиндрического тела, ограниченного снизу полукругом

$$D : (x-1)^2 + y^2 \leqslant 1,\ y \geqslant 0;$$

а сверху — поверхностью $z = xy$, равен

$$V = \iint\limits_D z\,dx\,dy = \iint\limits_D xy\,dx\,dy.$$

Для точек полуокружности $(x-1)^2+y^2=1$ $(y \geqslant 0)$ с центром $C(1;0)$ и диаметром, равным 2, в полярных координатах $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ имеем $\rho = 2\cos\varphi$ $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$. Следовательно, область D' определяется неравенствами $0 \leqslant \rho \leqslant 2\cos\varphi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. Таким образом,

$$V = \iint\limits_{D'} (\rho^2\cos\varphi\cdot\sin\varphi)\rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_0^{\pi/2} d\varphi \int\limits_0^{2\cos\varphi} \frac{1}{2}\rho^3\cos\varphi\cdot\sin\varphi\,d\rho = 2\int\limits_0^{\pi/2}\cos^5\varphi\cdot\sin\varphi\,d\varphi =$$

$$= \left\{ t = \cos\varphi,\ dt = -\sin\varphi\,d\varphi,\ t_1 = \cos 0 = 1,\ t_2 = \cos\frac{\pi}{2} = 0 \right\} =$$

$$= -2\int\limits_1^0 t^5\,dt = -2\frac{t^6}{6}\bigg|_1^0 = \frac{1}{3}.$$

Пример 28. Найти площадь S куска σ поверхности $z = xy$, проекцией D которого на плоскость Oxy является круг $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

Решение. $S = \iint\limits_D \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\,dx\,dy = \iint\limits_D \sqrt{1 + x^2 + y^2}\,dx\,dy$. Переходя к полярным координатам, находим, что область D' определяется неравенствами $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, следовательно

$$S = \iint\limits_{D'} \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho =$$

$$= \{t = 1 + \rho^2,\ dt = 2\rho\,d\rho,\ t_1 = 1,\ t_2 = 2\} = \frac{2\pi}{3}(2\sqrt{2} - 1). \qquad \triangleright$$

8.4. Тройные интегралы и их свойства

8.4.1. Определение тройного интеграла

Пусть G — замкнутая ограниченная область трехмерного пространства с системой декартовых координат $Oxyz$, границей которой является замкнутая кусочно гладкая поверхность, а $u = f(x, y, z)$ — некоторая функция, заданная и ограниченная в области G. Разобьем область G **произвольно** на n

частичных замкнутых областей $G_1, \ldots, G_n$, не имеющих общих внутренних точек и ограниченных кусочно гладкими замкнутыми поверхностями. В каждой частичной области G_i с объемом ΔV_i возьмем (внутри или на ее границе) **произвольную** точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и составим сумму

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta V_i,$$

называемую **интегральной суммой**. Наибольший из диаметров d_i областей G_i обозначим d.

Если существует конечный предел J (см. определение двойного интеграла), к которому стремятся интегральные суммы J_n, когда наибольший из диаметров d частичных областей стремится к нулю (при этом $n \to \infty$), то этот предел называется **тройным (трехкратным) интегралом от функции $f(x, y, z)$ по области** G, а функция $f(x, y, z)$ называется при этом **интегрируемой (по Риману)** в области G. Обозначения тройного интеграла:

$$J = \iiint\limits_G f(x, y, z)\, dV \equiv \iiint\limits_G f(M)\, dV \equiv \iiint\limits_G f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz.$$

Здесь выражение $dV = dx\, dy\, dz$ называется **элементом объема в прямоугольных (декартовых) координатах**.

Согласно этому определению интеграла, для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что $|J - J_n| < \varepsilon$, если только $d < \delta$.

Классы интегрируемых функций. Каждая из следующих функций является интегрируемой (по Риману) в ограниченной замкнутой области G:

1) Функция, непрерывная в области G.
2) Функция, определенная и ограниченная в области G и имеющая в G разрывы лишь на конечном множестве кусочно гладких кривых и поверхностей. Произвольные, но конечные изменения значений функций на таких кривых и поверхностях не изменяют величины интеграла.

8.4.2. Многократный интеграл

Многократный (или n-**кратный**) **интеграл** от функции $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ по замкнутой ограниченной области G в n-мерном пространстве E^n:

$$J = \iint\limits_G \cdots \int f(x_1, x_2, \ldots, x_n)\, dx_1\, dx_2\, \ldots\, dx_n$$

определяется аналогично трехкратному интегралу. При этом объем n-мерного прямоугольного параллелепипеда равен по определению произведению длин его ребер, выходящих из одной вершины. Элементарный объем в E^n равен $dV = dx_1\, dx_2\, \ldots\, dx_n$.

Свойства тройного (а также многократного) интеграла те же, что и свойства 1)–7) двойного интеграла, приведенные в 8.3.3. Если $f(x_1, \ldots, x_n) = 1$ в G, то n-кратный интеграл (в том числе тройной) равен объему V области G:

$$\int\!\!\int\limits_G \cdots \int dx_1\, dx_2\, \ldots\, dx_n = V.$$

8.4.3. Вычисление тройных интегралов

1. Пусть пространственная область G, имеющая форму параллелепипеда, ребра которого параллельны осям координат, определяется неравенствами: $a_1 \leqslant x \leqslant b_1$, $a_2 \leqslant y \leqslant b_2$, $a_3 \leqslant z \leqslant b_3$. Тогда нахождение тройного интеграла сводится к вычислению **повторного интеграла** по формуле:

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \equiv$$

$$\equiv \int\limits_{a_3}^{b_3} \int\limits_{a_2}^{b_2} \int\limits_{a_1}^{b_1} f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_{a_3}^{b_3} dz \int\limits_{a_2}^{b_2} dy \int\limits_{a_1}^{b_1} f(x, y, z)\, dx.$$

Здесь интегрирование в повторном интеграле справа сначала проводится по x (при этом y, z считаются постоянными), а затем последовательно по переменным y и z. Последовательность интегрирования может быть и другой (ср. с 8.3.4).

2. Если пространственная область G является цилиндрическим телом, ограниченным снизу и сверху поверхностями $z = h_1(x, y)$, $z = h_2(x, y)$ соответственно, а с боков — цилиндрической поверхностью, сечением которой плоскостью Oxy является область D (рис. 8.10), то справедлива формула

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint\limits_D dx\, dy \int\limits_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

Здесь интегрирование справа производится сначала по z, в предположении, что x, y постоянны, а затем — по области D, т. е. тройной интеграл сводится к двойному. В частности, если D определяется неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x)$, то

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \int\limits_a^b dx \int\limits_{f_1(x)}^{f_2(x)} dy \int\limits_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz.$$

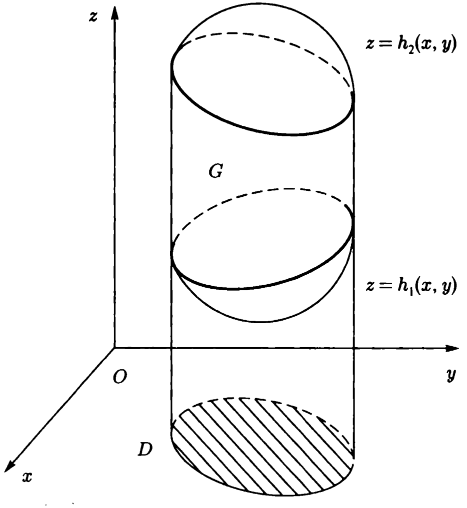


Рис. 8.10

Примечание. Поверхность Σ, ограничивающая цилиндрическое тело G, пересекается каждой прямой, параллельной оси Oz, не более чем в двух точках (рис. 8.10). Если прямые, параллельные осям координат, пересекают Σ более чем в двух точках, то G следует разбить на такие частичные области, чтобы поверхность каждой из них пересекалась с соответствующей прямой не более чем в двух точках. При этом интеграл по G равен сумме интегралов по частичным областям.

Пример 29. Вычислим интеграл J от функции $u = xyz$ по области $G : x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$, $z \geqslant 0$.

Решение. Область $D : x^2 + y^2 \leqslant 1$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ или $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant \sqrt{1 - x^2}$. Следовательно:

$$J = \iiint\limits_G xyz\,dx\,dy\,dz = \iint\limits_D dx\,dy \int\limits_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} xyz\,dz =$$

$$= \iint\limits_D \frac{1}{2}xy\,(1 - x^2 - y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left\{ \left[(1 - x^2)\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{4}\right]\Bigg|_{y=0}^{y=\sqrt{1-x^2}} \right\} x\,dx =$$

$$= \frac{1}{8}\int_0^1 x(1-x^2)^2\,dx = \{t = 1-x^2\} = -\frac{1}{48}t^3\Big|_1^0 = \frac{1}{48}. \qquad \triangleright$$

8.4.4. Замена переменных в тройных интегралах

Пусть функции $x = x(u,v,w)$, $y = y(u,v,w)$, $z = z(u,v,w)$, имеющие непрерывные частные производные первого порядка по u, v, w, устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками $M(x,y,z)$ ограниченной замкнутой области G пространства $Oxyz$, границей которой является замкнутая кусочно гладкая поверхность и точками $M'(u,v,w)$ области G' пространства $O'uvw$, а якобиан

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{в области } G').$$

Тогда для каждой интегрируемой в области G функции $f(x,y,z)$ справедлива следующая **формула замены переменных**:

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{G'} f\big(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w)\big)\,|J|\,du\,dv\,dw.$$

Здесь выражение $|J|\,du\,dv\,dw$ называется элементом объема в криволинейных координатах u, v, w.

Частные случаи криволинейных координат.

1) В цилиндрических координатах ρ, φ, z имеем: $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, $z = z$ $(u \equiv \rho,\ v \equiv \varphi,\ w \equiv z)$, $J = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\varphi,z)} = \rho$, элемент объема равен $\rho\,d\rho\,d\varphi\,dz$.
2) В сферических координатах ρ, θ, φ имеем: $x = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$ $(u \equiv \rho,\ v \equiv \theta,\ w \equiv \varphi)$, $J = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta\,\varphi)} = \rho^2\sin\theta$, элемент объема равен $\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi$.

Пример 30. Вычислить интеграл от функции $f(x,y,z) \equiv z$ по области G, ограниченной верхней полусферой $x^2+y^2+z^2 \leqslant R$ $(z \geqslant 0)$ и плоскостью Oxy.

Решение. В сферических координатах область G переходит в G': $0 \leqslant \rho \leqslant R$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, следовательно,

$$\iiint\limits_G z\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{G'} (\rho\cos\theta)\rho^2\sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} d\theta \int_0^R \rho^3 \cos\theta \sin\theta \, d\rho = \frac{R^4}{4} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi/2} \sin\theta \cos\theta \, d\theta =$$

$$= \left\{ t = \sin\theta,\ dt = \cos\theta \, d\theta,\ t_1 = t(0) = 0,\ t_2 = t\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \right\} = \frac{R^4}{8} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\pi R^4}{4}. \quad \triangleright$$

Пример 31. Найти объем V тела G, ограниченного поверхностями:

$$1)\ z = x^2 + y^2, \quad 2)\ z = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Решение. Уравнения поверхностей в цилиндрических координатах: 1) $z = \rho^2$, 2) $z = \rho$. Координаты точек пересечения этих поверхностей находим из уравнения $\rho^2 = \rho$, имеющего корни $\rho_1 = 0$, $\rho_2 = 1$. Следовательно, поверхности пересекаются в точке $O(0; 0)$ и по окружности $\rho^2 = x^2 + y^2 = 1$, $z = 1$. Область G' (соответствующая области G) описывается неравенствами: $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $\rho^2 \leqslant z \leqslant \rho$. Отсюда

$$V = \iiint\limits_G dx\,dy\,dz = \iiint\limits_{G'} \rho\,d\rho\,d\varphi\,dz =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_{\rho^2}^{\rho} \rho\,dz = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (\rho^2 - \rho^3)\,d\rho = \frac{1}{6}\pi. \quad \triangleright$$

8.5. Криволинейные интегралы

Криволинейные интегралы являются обобщением обычного одномерного определенного интеграла, взятого по отрезку прямой, на случай, когда интегрирование проводится по отрезку кривой (плоской или пространственной).

8.5.1. Криволинейные интегралы первого рода

1. Пусть $u = f(x, y, z)$ — функция, определенная и ограниченная на отрезке AB кусочно гладкой пространственной (в частности, плоской) кривой C, определяемой параметрическими уравнениями $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$. При этом **начальной точке** A и **конечной точке** B кривой C соответствуют значения параметров t_1 и t_2 соответственно. Разобьем отрезок AB **произвольно** на n частичных отрезков точками $A \equiv M_0, M_1, \ldots, M_n \equiv B$ (рис. 8.11). Длину частичного отрезка кривой $M_{i-1}M_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ обозначим Δl_i. На каждом частичном отрезке $M_{i-1}M_i$ возьмем **произвольную**

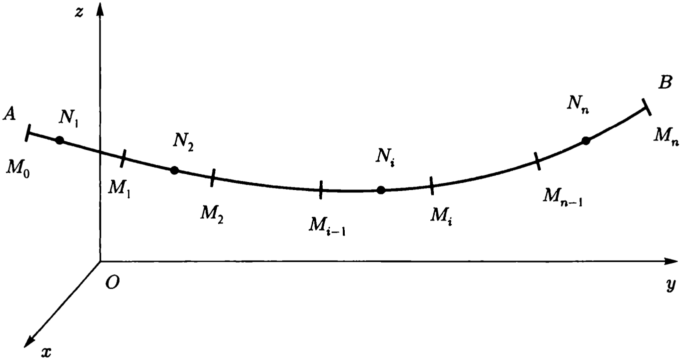


Рис. 8.11

точку $N_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$ и составим сумму

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} f(N_i)\Delta l_i = \sum_{i=1}^{n} f(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta l_i,$$

называемую интегральной суммой. Пусть Δl — наибольшая из длин Δl_i.

Если существует конечный предел J (см. 7.2.1) интегральных сумм J_n при $\Delta l \to 0$ $(n \to \infty)$, то этот предел называется **криволинейным интегралом первого рода** от функции $f(x, y, z)$ по кривой AB (или C). Обозначения:

$$J = \int_{AB} f(M)\, dl \equiv \int_{AB} f(x, y, z)\, dl \equiv \int_{C} f(x, y, z)\, dl. \tag{8.15}$$

При этом кривая C может быть и замкнутой, если точки A и B совпадают.

Поскольку все длины Δl_i в интегральной сумме положительны, независимо от направления прохождения кривой C при интегрировании от A к B или от B к A, криволинейный интеграл первого рода (8.15) не зависит от направления прохождения кривой C, т. е.

$$\int_{AB} f(x, y, z)\, dl = \int_{BA} f(x, y, z)\, dl.$$

В частном случае кривая AB может быть замкнутой.

2. Свойства криволинейных интегралов первого рода. Если существуют соответствующие интегралы, то справедливы следующие соотношения:

1) $$\int\limits_{AB} [\alpha f_1(M) + \beta f_2(M)]\, dl = \alpha \int\limits_{AB} f_1(M)\, dl + \beta \int\limits_{AB} f_2(M)\, dl,$$
где α, β — любые числа.

2) $$\int\limits_{AB} f(M)\, dl = \int\limits_{AC} f(M)\, dl + \int\limits_{CB} f(M)\, dl,$$
где C — любая точка кривой AB, лежащая между A и B.

3) $$\left| \int\limits_{AB} f(M)\, dl \right| \leqslant \int\limits_{AB} |f(M)|\, dl.$$

4) Если $f(M)$ непрерывна на AB, то на этой кривой найдется точка P такая, что
$$\int\limits_{AB} f(M)\, dl = l \cdot f(P) \quad (l \text{ — длина } AB).$$

3. Существование криволинейных интегралов первого рода и их вычисление. Если функция $f(x, y, z)$ ограничена и кусочно непрерывна на кусочно гладкой кривой C, то эта кривая может быть разбита на конечное число отрезков без общих внутренних точек, на каждом из которых функция непрерывна. При этом интеграл по кривой C определяется как сумма интегралов по всем гладким отрезкам, составляющим эту кривую. В связи с этим ограничимся здесь случаем непрерывной функции, заданной на гладкой кривой. Если гладкая кривая AB в пространстве $Oxyz$ задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, а функция $f(M) \equiv f(x, y, z)$ непрерывна на AB, то криволинейный интеграл первого рода (8.15) от $f(M)$ по кривой AB существует и справедлива формула, сводящая криволинейный интеграл к обычному определенному интегралу

$$\int\limits_{AB} f(M)\, dl = \int\limits_{t_1}^{t_2} \Big(f\big(x(t), y(t), z(t)\big)\Big) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\, dt. \quad (8.16)$$

Аналогичная формула справедлива и для кривой на плоскости Oxy. Если в качестве параметра выбрать длину l дуги кривой AB, отсчитываемую от некоторой фиксированной точки этой кривой в определенном (положительном) направлении (по аналогии с координатой x на оси Ox), т. е. $x = x(l)$, $y = y(l)$, $z = z(l)$ $(l_1 \leqslant l \leqslant l_2)$, то

$$\int\limits_{AB} f(M)\, dl = \int\limits_{l_1}^{l_2} f\big(x(l), y(l), z(l)\big)\, dl. \quad (8.17)$$

Если при этом $l = l(t)$, то

$$dl = \frac{dl}{dt}\,dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\,dt = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2},$$

где знак перед корнем обычно выбирают так, чтобы было $dl/dt \geqslant 0$.

Если гладкая кривая AB на плоскости Oxy задана в виде $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, т. е. в качестве параметра берется x, то

$$\int\limits_{AB} f(M)\,dl = \int\limits_a^b f(x, y)\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\,dx. \tag{8.18}$$

Отметим, что интегралы по параметрически заданным кривым в правых частях формул (8.16)–(8.18) изменяют знак на противоположный при перестановке пределов интегрирования (по свойству определенных интегралов), т. е. при изменении направления интегрирования, когда B становится началом, а A — концом кривой.

Пример 32. Если AB — верхняя полуокружность радиуса R с центром в начале координат, имеющая параметрические уравнения $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi)$ и при этом $A \equiv (R, 0)$, $B \equiv (-R, 0)$, то

$$\int\limits_{AB} x^2\,dl = \left\{x^2 = R^2\cos^2 t;\ dl = \sqrt{R^2\cos^2 t + R^2\sin^2 t}\,dt = R\,dt\right\} =$$

$$= \int\limits_0^\pi R^3\cos^2 t\,dt = \frac{R^3}{2}\int\limits_0^\pi (1 + \cos 2t)\,dt = \frac{R^3}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]\Bigg|_0^\pi = \frac{\pi R^3}{2}.$$

8.5.2. Криволинейные интегралы второго рода

1. Пусть AB — отрезок кусочно гладкой кривой C (A — начало, B — конец этого отрезка), $P(x, y, z) \equiv P(M)$ — функция, определенная и ограниченная в точках $M(x, y, z)$ на AB. Аналогично 8.5.1 разобьем отрезок AB **произвольно** на n частичных отрезков (рис. 8.11) точками $M_0 \equiv A, M_1, \ldots, M_n \equiv B$ и на каждом из этих частичных отрезков возьмем произвольную точку $N_i(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)$, обозначим через $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ проекцию вектора $\overline{M_{i-1}M_i}$ на ось Ox, составим **интегральную сумму**

$$J_n = \sum_{i=1}^n P(N_i)\Delta x_i \equiv \sum_{i=1}^n P(\bar{x}_i, \bar{y}_i, \bar{z}_i)\Delta x_i.$$

Пусть Δl — наибольшая из длин Δl_i.

Если существует предел J (см. 7.2.1) интегральных сумм J_n при $\Delta l \to 0$ $(n \to \infty)$, то он называется **криволинейным интегралом второго рода**. Обозначения:

$$J = \int_{AB} P(x, y, z)\, dx \equiv \int_{C} P(M)\, dx.$$

В частности, кривая C может быть замкнутой.

Аналогично, для функций $Q(x, y, z) \equiv Q(M)$ и $R(x, y, z) \equiv R(M)$, определенных и ограниченных на кривой AB, можно определить интегралы

$$\int_{AB} Q(x, y, z)\, dy \quad \text{и} \quad \int_{AB} R(x, y, z)\, dz.$$

Складывая эти три криволинейных интеграла от функций P, Q, R **по одной и той же кривой** AB, получим **общий криволинейный интеграл второго рода** по кривой AB:

$$\int_{AB} P(x, y, z)\, dx + Q(x, y, z)\, dy + R(x, y, z)\, dz, \tag{8.19}$$

являющийся, по определению, пределом интегральных сумм вида

$$\sum_{i=1}^{n} \left[P(N_i)\Delta x_i + Q(N_i)\Delta y_i + R(N_i)\Delta z_i\right],$$

где $\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i$ — проекции вектора $\overline{M_{i-1}M_i}$ на оси Ox, Oy, Oz.

При изменении направления интегрирования, когда точка B становится началом, а A — концом кривой, знак криволинейного интеграла второго рода изменяется на противоположный при неизменном абсолютном значении:

$$\int_{AB} P\, dx + Q\, dy + R\, dz = -\int_{BA} P\, dx + Q\, dy + R\, dz.$$

В частном случае, когда кривая AB является отрезком $[a; b]$ оси Ox, криволинейный интеграл

$$\int_{AB} P(x, y)\, dx$$

переходит в обычный интеграл

$$\int_{a}^{b} P(x, 0)\, dx.$$

Если кривая AB лежит в плоскости Oxy, то криволинейный интеграл принимает вид

$$\int\limits_{AB} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

Если при этом точки A и B совпадают, то кривая интегрирования (не имеющая точек самопересечения) является замкнутой. Из двух возможных направлений обхода такой кривой **положительным** называется то, при котором область, ограниченная этой кривой, остается по левую сторону от направления перемещения точки по кривой. Говорят также, что точка при этом совершает обход кривой против часовой стрелки. Криволинейный интеграл по замкнутой кривой C с положительным обходом обозначается:

$$\oint\limits_{C} P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy.$$

В частности, площадь области на плоскости Oxy, ограниченной одной кусочно гладкой замкнутой кривой C, находится по формуле

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_{C} x\,dy - y\,dx.$$

Пример 33. Вычислить интеграл

$$J = \oint\limits_{C} y\,dx + x^2\,dy$$

по периметру треугольника OAB с вершинами $O(0;0)$, $A(1;0)$, $B(1;1)$.

Решение.

$$J = \int\limits_{OA} y\,dx + x^2\,dy + \int\limits_{AB} y\,dx + x^2\,dy + \int\limits_{BO} y\,dx + x^2\,dy =$$

$$= \{\text{на } OA\colon\ y=0,\ dy=0;\ \text{на } AB\colon\ x=1,\ dx=0;\ \text{на } BO\colon\ y=x,\ dy=dx\} =$$

$$= 0 + \int\limits_0^1 dy + \int\limits_1^0 (x+x^2)\,dx = \frac{1}{6}. \qquad \rhd$$

2. Свойства криволинейных интегралов второго рода. Если существуют соответствующие интегралы, то справедливы следующие равенства:

1) $\displaystyle\int\limits_{AB} [\alpha f_1(M) + \beta f_2(M)]\,dx = \alpha\int\limits_{AB} f_1(M)\,dx + \beta\int\limits_{AB} f_2(M)\,dx,$

где α, β — любые числа.

2) $\int\limits_{AB} f(M)\,dx = \int\limits_{AC} f(M)\,dx + \int\limits_{CB} f(M)\,dx,$

где C — точка кривой AB, лежащая между A и B.

Криволинейный интеграл второго рода зависит от начальной и конечной точек кривой и, в общем случае, от ее формы. Случай, когда интеграл не зависит от формы кривой, рассматривается в 8.9.

3. Существование криволинейных интегралов второго рода и их вычисление. Если гладкая кривая AB в пространстве $Oxyz$ задана параметрически $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ $(t_1 \leqslant t \leqslant t_2)$, а функции $P(M), Q(M), R(M)$, где $M(x, y, z)$ — точка на AB, непрерывны на AB, то существуют криволинейные интегралы

$$\int\limits_{AB} P(M)\,dx, \quad \int\limits_{AB} Q(M)\,dx, \quad \int\limits_{AB} R(M)\,dz$$

и справедливы следующие формулы, сводящие криволинейные интегралы к обычным определенным интегралам

$$\int\limits_{AB} P(M)\,dx = \int\limits_{t_1}^{t_2} P\big(x(t), y(t), z(t)\big)x'(t)\,dt,$$

$$\int\limits_{AB} Q(M)\,dy = \int\limits_{t_1}^{t_2} Q\big(x(t), y(t), z(t)\big)y'(t)\,dt,$$

$$\int\limits_{AB} R(M)\,dz = \int\limits_{t_1}^{t_2} R\big(x(t), y(t), z(t)\big)z'(t)\,dt.$$

Складывая левые и правые части этих равенств, получим формулу, сводящую общий криволинейный интеграл второго рода (8.19) к обычному определенному интегралу по переменной t от t_1 до t_2.

Аналогичные формулы справедливы и для кривых на плоскости Oxy. В частности, если кривая AB задана непрерывно дифференцируемой (гладкой) функцией $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, а функции $P(x, y), Q(x, y)$ непрерывны на AB, то

$$\int\limits_{AB} P(x, y)\,dx = \int\limits_{a}^{b} P\big(x, y(x)\big)\,dx,$$

$$\int\limits_{AB} Q(x, y)\,dy = \int\limits_{a}^{b} Q\big(x, y(x)\big)y'(x)\,dx.$$

Если функции $P(M), Q(M), R(M)$ ограничены и кусочно непрерывны на некоторой кривой, то эта кривая распадается на некоторое число отрезков, на каждом из которых данные функции непрерывны. Интеграл по кусочно гладкой кривой определяется как сумма интегралов по всем гладким отрезкам, составляющим эту кривую.

Пример 34. Вычислить интеграл

$$J = \int\limits_{AB} xy\,dx - y^2\,dy$$

по кривой AB, являющейся четвертью окружности с уравнениями $x = R\cos t$, $y = R\sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant \pi/2)$, где $A \equiv (R; 0)$ при $t = 0$, $B \equiv (0; R)$ при $t = \pi/2$.

Решение. $J = \int\limits_0^{\pi/2} R^3(-\sin^2 t\cos t - \sin^2 t\cos t)\,dt = -2R^3 \int\limits_0^{\pi/2} \sin^2 t\cos t\,dt = -\frac{2}{3}R^3.$ ▷

Пример 35. Вычислить интеграл

$$J = \int\limits_{AB} (y - x^4)\,dx + xy\,dy$$

по отрезку параболы $y = y(x) \equiv x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ от точки $A(0; 0)$ до $B(1; 1)$.

Решение.

$$J = \int\limits_0^1 [y(x) - x^4 + xy(x)y'(x)]\,dx = \int\limits_0^1 (x^2 + x^4)\,dx = \left(\frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{8}{15}. \quad ▷$$

8.5.3. Связь криволинейных интегралов первого и второго рода

Если $x = x(l)$, $y = y(l)$, $z = z(l)$ — параметрическое задание гладкой кривой AB, где в качестве параметра берется длина l дуги кривой (см. **8.5.1**), то направляющие косинусы $\cos\alpha(M)$, $\cos\beta(M)$, $\cos\gamma(M)$ вектора касательной к кривой AB в переменной точке $M(x, y, z)$, направленного в положительном направлении кривой, равны

$$\cos\alpha(M) = \frac{dx}{dl}, \quad \cos\beta(M) = \frac{dy}{dl}, \quad \cos\gamma(M) = \frac{dz}{dl}.$$

В силу этого получим формулу, устанавливающую связь между интегралом первого рода (в правой части равенства) и второго рода (слева):

$$\int\limits_{AB} P(M)\,dx + Q(M)\,dy + R(M)\,dz =$$

$$= \int\limits_{AB} \big[P(M)\cos\alpha(M) + Q(M)\cos\beta(M) + R(M)\cos\gamma(M)\big]\,dl.$$

8.6. Поверхностные интегралы

8.6.1. Двухсторонние и односторонние поверхности

Непрерывная без самопересечений поверхность в пространстве называется **гладкой**, если в каждой ее точке $M(x, y, z)$ существует единственная касательная плоскость, положение которой в пространстве изменяется непрерывно при непрерывном перемещении точки M по этой поверхности. Поверхность, состоящая из конечного числа гладких кусков, соединенных друг с другом без разрывов кусочно гладкими кривыми, называется **кусочно гладкой**. **Вектором нормали** (единичным) к поверхности Σ в точке M_0 называется вектор $\bar{n}(M_0)$, приложенный к M_0 и перпендикулярный к касательной плоскости в M_0. Возьмем на гладкой поверхности Σ любую точку M_0 и будем перемещать эту точку по произвольной замкнутой линии, лежащей на Σ, проходящей через M_0 и не имеющей общих точек с границей Σ. Если при возвращении M_0 в первоначальное положение изменяющийся вектор $\bar{n}(M_0)$ также возвращается в первоначальное положение, то такая поверхность называется **двухсторонней**, если же направление нормали меняется на противоположное, то поверхность называется **односторонней**. Примеры двухсторонних поверхностей: плоскость, цилиндрическая поверхность, сфера и т. д. Примером односторонней поверхности является **лист Мёбиуса**, для получения которого прямоугольную полосу $ABB'A'$ (рис. 8.12 *а*) перекручивают на 180° и склеивают сторону AB с $A'B'$ так, чтобы точка A совпала с B', а B — с A' (рис. 8.12 *б*). Если же совмещают A с A', а B с B' без перекручивания полосы, то получается цилиндр (рис. 8.12 *в*). Различия двухсторонней (цилиндр) и односторонней (лист Мёбиуса) поверхностей состоят в том, что граница цилиндра состоит из двух кривых, а листа Мёбиуса — из одной; цилиндр можно непрерывным движением кисти по замкнутой кривой (не пересекая его границ) окрасить только с одной из двух его сторон, тогда как лист Мёбиуса окрашивается при этом целиком, т. е. имеет только одну сторону.

Далее везде рассматриваются только двухсторонние поверхности. Двусторонняя поверхность Σ имеет две стороны, которые в каждой точке M_0 на Σ различаются противоположными направлениями нормалей к Σ. Выбор определенной стороны поверхности Σ называется ее **ориентацией**. Ориентация Σ определяет для каждой замкнутой кривой C на Σ положительное направление обхода C такое, что при обходе C в этом направлении внутренняя часть поверхности, ограниченная кривой C, остается слева от направления этого обхода, если смотреть из конца выбранного вектора нормали. Иначе говоря, обход совершается против часовой стрелки.

8.6.2. Площадь поверхности

Если некоторая двухсторонняя поверхность Σ, заданная параметрически однозначными непрерывными функциями $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$,

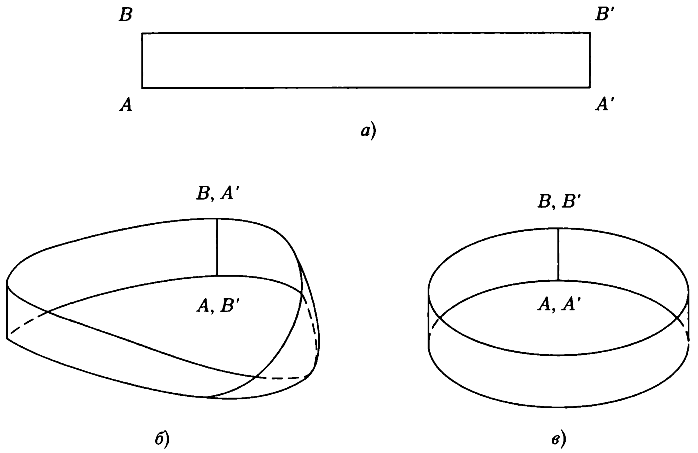


Рис. 8.12

где (u, v) — любая точка некоторой ограниченной замкнутой области Ω в плоскости Ouv, является гладкой, т. е. первые частные производные от $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ непрерывны и $A^2 + B^2 + C^2 > 0$, где

$$A = \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}, \quad B = \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}, \quad C = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix},$$

то площадь S этой поверхности определяется по одной из следующих двух формул:

$$1)\ S = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\, du\, dv, \quad 2)\ S = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

где

$$E = (x'_u)^2 + (y'_u)^2 + (z'_u)^2, \quad G = (x'_v)^2 + (y'_v)^2 + (z'_v)^2, \quad F = x'_u x'_v + y'_u y'_v + z'_u z'_v.$$

Подынтегральное выражение $dS = \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$ называется **элементом площади** поверхности Σ в криволинейных координатах u, v.

Если гладкая поверхность задана однозначной функцией $z = f(x, y)$ (т. е. $u \equiv x$, $v \equiv y$) с непрерывными первыми частными производными, то площадь куска Σ этой поверхности, ограниченного кусочно гладкой кривой, находится по формуле

$$S = \iint\limits_{\Sigma'} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy,$$

где Σ' — область, являющаяся проекцией Σ на Oxy.

Площадь кусочно гладкой поверхности равна сумме площадей составляющих ее гладких кусков.

Пример 36. Найти площадь куска конической поверхности $z = \sqrt{x^2 + y^2} \geqslant 0$, проекцией D которого на плоскость Oxy является круг $(x - R)^2 + y^2 \leqslant R^2$ радиуса R с центром в точке $(R, 0)$.

Решение. В полярных координатах $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ круг D определяется неравенствами: $0 \leqslant \rho \leqslant 2R\cos\varphi$, $-\pi/2 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2$. Так как $(z'_x)^2 + (z'_y)^2 = 1$, находим:

$$S = \iint\limits_{D} \sqrt{2}\, dx\, dy = \sqrt{2}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} d\varphi \int\limits_{0}^{2R\cos\varphi} \rho\, d\rho = 2\sqrt{2}R^2 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos^2\varphi\, d\varphi =$$

$$= \sqrt{2}R^2 \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (1 + \cos 2\varphi)\, d\varphi = \sqrt{2}R^2\left(\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right)\Bigg|_{-\pi/2}^{\pi/2} = \pi\sqrt{2}R^2. \qquad \triangleright$$

8.6.3. Поверхностные интегралы первого рода

Пусть на двухсторонней кусочно гладкой поверхности Σ (либо незамкнутой, либо замкнутой) определена ограниченная функция $f(M) \equiv f(x, y, z)$, где M — точка на Σ. Разобьем поверхность Σ кусочно гладкими кривыми (рис. 8.13) на n частичных **произвольных** поверхностей Σ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ без общих внутренних точек с площадями ΔS_i, d — наибольший из диаметров этих частичных поверхностей. В каждой из поверхностей Σ_i возьмем **произвольную** точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ и составим **интегральную сумму**

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S_i.$$

Если существует предел J (см. определение двойного интеграла), к которому стремятся интегральные суммы J_n при $d \to 0$ $(n \to \infty)$, то он называется **поверхностным интегралом первого рода** от функции $f(x, y, z)$ по поверхности Σ. Обозначения:

$$J = \iint\limits_{\Sigma} f(M)\, dS \equiv \iint\limits_{\Sigma} f(x, y, z)\, dS.$$

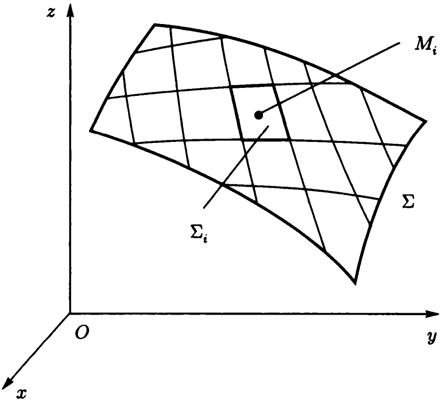


Рис. 8.13

Поверхность Σ может быть как замкнутой, так и незамкнутой. Если $f(M) \equiv 1$ на Σ, то интеграл J равен площади S поверхности Σ. Из определения поверхностного интеграла первого рода следует его независимость от выбора стороны поверхности Σ (т. е. от ее ориентации).

8.6.4. Существование и вычисление поверхностных интегралов первого рода

Если на гладкой двухсторонней поверхности Σ (замкнутой, либо незамкнутой), заданной параметрическими уравнениями $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, удовлетворяющими условиям 8.6.2, определена функция $f(x, y, z)$, непрерывная в точках M поверхности Σ, то поверхностный интеграл первого рода от $f(M)$ по Σ существует и справедлива следующая формула, сводящая его к двойному интегралу:

$$\iint\limits_{\Sigma} f(M)\, dS = \iint\limits_{\Omega} f\big(x(u, v), y(u, v), z(u, v)\big) \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

где Ω — ограниченная замкнутая область на плоскости Ouv.

Для поверхности Σ, заданной однозначной непрерывно дифференцируемой функцией $z = z(x, y)$ в области Σ' на плоскости Oxy, имеем

$$\iint\limits_{\Sigma} f(M)\, dS = \iint\limits_{\Sigma'} f\big(x, y, z(x, y)\big) \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}\, dx\, dy.$$

Интеграл по кусочно гладкой поверхности находится как сумма интегралов по составляющим ее гладким поверхностям.

Пример 37. Вычислить интеграл

$$J = \iint_{\Sigma} (x^2 + y^2)\, dS$$

по части Σ поверхности конуса $z = \sqrt{x^2 + y^2}$, заключенной между плоскостями $z = 1$, $z = 2$.

Решение. Область Σ', являющаяся проекцией Σ на плоскость Oxy, ограничена окружностями $x^2 + y^2 = 1$ и $x^2 + y^2 = 4$. В полярных координатах $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ область Ω определяется неравенствами $1 \leqslant \rho \leqslant 2$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Учитывая, что $(z'_x)^2 + (z'_y)^2 = 1$, получим

$$J = \iint_{\Omega} \sqrt{2}\rho^3\, d\rho\, d\varphi = \sqrt{2}\int_1^2 \rho^3\, d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi = 2\sqrt{2}\pi \int_1^2 \rho^3\, d\rho = \frac{15\sqrt{2}}{2}\pi. \qquad \triangleright$$

8.6.5. Поверхностные интегралы второго рода

Пусть на двухсторонней кусочно гладкой поверхности Σ, заданной однозначной функцией $z = z(x, y)$, определена ограниченная функция $f(M) \equiv f(x, y, z)$, где M — точка на Σ. Разобьем поверхность Σ на **произвольные** части Σ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$, в каждой из которых возьмем **произвольную** точку $M_i(x_i, y_i, z_i)$ (аналогично 8.6.3). Пусть d — наибольший из диаметров частей Σ_i. С каждой точкой M_i свяжем единичную нормаль $\bar{n}(M_i)$ к поверхности Σ с направляющими косинусами $\cos\alpha(M_i)$, $\cos\beta(M_i)$, $\cos\gamma(M_i)$. Пусть Σ'_i — проекция Σ_i на плоскость Oxy, C_i — граница Σ_i, C'_i — граница Σ'_i (рис. 8.14). Если поверхность Σ ориентирована, т. е. выбрана одна из ее сторон (одно из направлений нормали $\bar{n}(M)$ в каждой точке M), то тем самым выбрано и положительное направление обхода границы C_i поверхности Σ_i (см. также 8.6.1). Площадь $\Delta S'_i = \Delta S_i \cos\gamma(M_i)$ проекции Σ'_i берется со знаком плюс (или минус), если векторы $\bar{n}(M_i)$ образуют острые (или тупые) углы γ_i с положительным направлением оси Oz или, что то же самое, граница C'_i обходится в положительном (или отрицательном) направлении, когда граница C_i обходится в положительном направлении. При этом говорят также, что выбрана **верхняя (внешняя)** Σ^+ или **нижняя (внутренняя)** Σ^- сторона поверхности Σ. На рис. 8.14 нормаль $\bar{n}(M)$ соответствует верхней стороне поверхности Σ.

Выбрав определенную сторону Σ^+ или Σ^- поверхности Σ, составим **интегральную сумму**:

$$J_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i, z_i)\Delta S'_i.$$

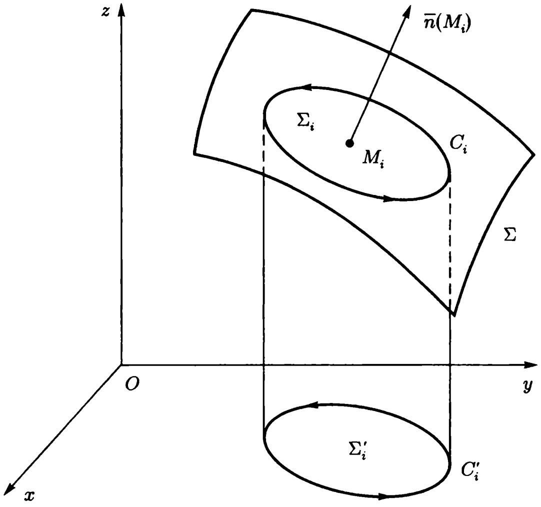


Рис. 8.14

Если существует конечный предел J (см. определение двойного интеграла), к которому стремятся интегральные суммы J_n при $d \to 0$ $(n \to \infty)$, то он называется **поверхностным интегралом второго рода** от $f(M)$ по выбранной стороне Σ^+ (Σ^-) поверхности Σ. Обозначения:

$$J = \iint\limits_{\Sigma} f(M) \cos\gamma(M)\, dS \equiv \iint\limits_{\Sigma^+(\Sigma^-)} f(x, y, z)\, dx\, dy.$$

Если поверхность Σ может быть задана однозначными функциями $x = x(y, z)$ и $y = y(z, x)$, то аналогично определяются также поверхностные интегралы по стороне Σ^+ (Σ^-) поверхности Σ:

$$\iint\limits_{\Sigma} f(M) \cos\alpha(M)\, dS \equiv \iint\limits_{\Sigma^+(\Sigma^-)} f(x, y, z)\, dy\, dz,$$

$$\iint\limits_{\Sigma} f(M) \cos\beta(M)\, dS \equiv \iint\limits_{\Sigma^+(\Sigma^-)} f(x, y, z)\, dz\, dx.$$

После выбора определенной стороны поверхности Σ поверхностный интеграл второго рода можно рассматривать как поверхностный интеграл первого рода по Σ от одной из функций: $f(M)\cos\alpha$, $f(M)\cos\beta$, $f(M)\cos\gamma$. Изменение ориентации поверхности, т. е. замена одной ее стороны на другую, приводит к изменению знака поверхностного интеграла второго рода на противоположный при его неизменной абсолютной величине.

Если $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ — функции, определенные на одной поверхности Σ, то рассматривают также **общий поверхностный интеграл второго рода**, определяемый как сумма трех поверхностных интегралов от функций P, Q, R по одной и той же стороне поверхности Σ, либо незамкнутой, либо замкнутой:

$$\iint\limits_{\Sigma} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_{\Sigma} P\,dy\,dz + \iint\limits_{\Sigma} Q\,dz\,dx + \iint\limits_{\Sigma} R\,dx\,dy.$$

8.6.6. Существование и вычисление поверхностных интегралов второго рода

Если на гладкой двухсторонней поверхности Σ (незамкнутой, либо замкнутой), заданной параметрически функциями $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$, удовлетворяющими условиям 8.6.2, определена непрерывная на Σ функция $f(M) \equiv f(x,y,z)$, то поверхностные интегралы второго рода от $f(M)$ по внешней стороне Σ^+ поверхности Σ существуют и справедливы формулы:

$$\iint\limits_{\Sigma^+} f(x,y,z)\,dx\,dy = \pm\iint\limits_{\Omega} f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)C\,du\,dv,$$

$$\iint\limits_{\Sigma^+} f(x,y,z)\,dz\,dx = \pm\iint\limits_{\Omega} f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)B\,du\,dv,$$

$$\iint\limits_{\Sigma^+} f(x,y,z)\,dy\,dz = \pm\iint\limits_{\Omega} f\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)A\,du\,dv.$$

В предыдущих формулах справа берется знак плюс, если направление обхода границы области Ω на плоскости Ouv совершается против часовой стрелки, и минус — в противном случае. Выражения для A, B, C приведены в 8.6.2. Складывая три предыдущих интеграла, найдем:

$$\iint\limits_{\Sigma^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \pm\iint\limits_{\Omega} (AP + BQ + CR)\,du\,dv.$$

Если поверхность Σ задана однозначной функцией $z = z(x,y)$, то направляющие косинусы единичной нормали $\bar{n}(M)$ к этой поверхности находятся по формулам

$$\cos\alpha(M) = \frac{p}{\mp\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad \cos\beta(M) = \frac{q}{\mp\sqrt{1+p^2+q^2}},$$

$$\cos\gamma(M) = \frac{1}{\pm\sqrt{1+p^2+q^2}}, \quad p = \frac{\partial z}{\partial x}, \ q = \frac{\partial z}{\partial y},$$

где верхние (нижние) знаки перед радикалами соответствуют внешней Σ^+ (внутренней Σ^-) стороне Σ. В этом частном случае параметрические уравнения поверхности Σ имеют вид: $x = u$, $y = v$, $z = z(u, v)$ и

$$dS = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = \sqrt{1+p^2+q^2}\,dx\,dy,$$

следовательно, поверхностный интеграл $f(M)$ по стороне Σ^+ (Σ^-) поверхности Σ равен:

$$\iint\limits_{\Sigma^+(\Sigma^-)} f(x, y, z)\,dx\,dy = \pm \iint\limits_{\Sigma'} f(x, y, z(x, y))\,dx\,dy,$$

где знак плюс (минус) перед двойным интегралом справа берется при выборе стороны Σ^+ (Σ^-), Σ' — проекция Σ на плоскость Oxy.

Пример 38. Вычислить интеграл

$$\iint\limits_{\Sigma} (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy$$

по: 1) верхней стороне Σ^+ поверхности $z = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant R^2$; 2) нижней стороне Σ^- этой поверхности.

Решение. Проекцией Σ' поверхности Σ на плоскость Oxy является круг $x^2 + y^2 \leqslant R^2$. Переходя в двойном интеграле к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, находим:

$$1)\ \iint\limits_{\Sigma^+} (x^2 + y^2 + z)\,dx\,dy = \iint\limits_{\Sigma'} (2x^2 + 2y^2)\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{R} 2\rho^3\,d\rho\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{R} 2\rho^3\,d\rho = \pi R^4;$$

$$2)\ \iint\limits_{\Sigma^-} (x^2 + y^2 + z)\,dx\ \ dy = -\iint\limits_{\Sigma'} (2x^2 + 2y^2)\,dx\,dy = -\pi R^4.$$ ▷

Пример 39. Вычислить интеграл

$$J = \iint\limits_{\Sigma^+} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy,$$

где Σ^+ — верхняя сторона (нормали к ней образуют острые углы с осями Ox, Oy, Oz) части плоскости $x + y + z = 1$, отсеченная от нее плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$ и являющаяся треугольником с вершинами $A(1; 0; 0)$, $B(0; 1; 0)$, $C(0; 0; 1)$.

Решение. Введем обозначения:

$$J = J_1 + J_2 + J_3 = \iint\limits_{\Sigma^+} x\,dy\,dz + \iint\limits_{\Sigma^+} y\,dz\,dx + \iint\limits_{\Sigma^+} z\,dx\,dy;$$

D_1, D_2, D_3 — области на координатных плоскостях, являющиеся треугольниками OBC, OCA, OAB соответственно. Находим:

$$J_1 = \iint\limits_{\Sigma^+} x\,dy\,dz = \iint\limits_{D_1} (1 - y - z)\,dy\,dz = \iint\limits_{D_1} dy\,dz - \iint\limits_{D_1} y\,dy\,dz - \iint\limits_{D_1} z\,dy\,dz =$$

$$= \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} dz - \int\limits_0^1 y\,dy \int\limits_0^{1-y} dz - \int\limits_0^1 dy \int\limits_0^{1-y} z\,dz = \int\limits_0^1 \left[(1-y) - y(1-y) - \frac{(1-y)^2}{2}\right] dy = \frac{1}{6};$$

$$J_2 = \iint\limits_{\Sigma^+} y\,dz\,dx = \iint\limits_{D_2} (1 - z - x)\,dz\,dx;$$

$$J_3 = \iint\limits_{\Sigma^+} z\,dx\,dy = \iint\limits_{D_3} (1 - x - y)\,dx\,dy.$$

Из симметричного вида подынтегральных выражений в J_1, J_2, J_3 и областей интегрирования D_1, D_2, D_3 следует, что $J_1 = J_2 = J_3$. Таким образом,

$$J = J_1 + J_2 + J_3 = 3J_1 = \frac{1}{2}. \qquad \triangleright$$

8.6.7. Связь поверхностных интегралов первого и второго рода

Если поверхность Σ (замкнутая или нет) задана параметрически $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, то направляющие косинусы нормали $\bar{n}(M)$ к выбранной стороне поверхности Σ определяются по формулам

$$\cos\alpha = \frac{A}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{C}{\pm\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Здесь знак перед радикалом берется в зависимости от выбора стороны поверхности Σ; выражения для A, B, C приведены в 8.6.2.

Справедлива следующая формула, связывающая поверхностный интеграл второго рода (левая часть равенства) и первого рода (правая часть):

$$\iint\limits_{\Sigma^+} P\,dy\,dz + Q\,dz\,dx + R\,dx\,dy = \iint\limits_{\Sigma} (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS,$$

где $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ — направляющие косинусы нормали к стороне Σ^+ поверхности Σ (замкнутой или нет). При переходе к стороне Σ^- обе части этого равенства изменяют знак. Интеграл по кусочно гладкой поверхности находится как сумма интегралов по составляющим ее гладким кускам.

Пример 40. Вычислить интеграл

$$J = \iint\limits_{\Sigma^+} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy,$$

где Σ^+ — верхняя сторона сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

<u>*Решение*</u>. В сферических координатах параметрические уравнения сферы имеют вид $x = R\sin\theta\cos\varphi$, $y = R\sin\theta\sin\varphi$, $z = R\cos\theta$ ($u \equiv \theta$, $v \equiv \varphi$), а область Ω в плоскости $O\theta\varphi$ определяется неравенствами $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Находим:

$$A = -R^2\cos\theta\sin^2\varphi, \quad B = R^2\cos\theta\sin\varphi\cos\varphi, \quad C = R^2\sin\theta\cos\theta,$$
$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = R^2\sin\theta.$$

Отсюда следует: $\cos\alpha = \sin\theta\cos\varphi = x/R$, $\cos\beta = \sin\theta\sin\varphi = y/R$, $\cos\gamma = \cos\theta = z/R$, при этом знак плюс перед радикалом связан с выбором стороны Σ^+. Отметим, что эти выражения можно найти также с учетом коллинеарности вектора внешней нормали к сфере и радиус-вектора точки сферы $\bar{r} \equiv (x, y, z)$. Преобразуя интеграл J в поверхностный интеграл первого рода, найдем ($dS = R^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi$):

$$J = \iint\limits_{\Sigma} \frac{1}{R}(x^2 + y^2 + z^2)\,dS = \iint\limits_{\Omega} R^3\sin\theta\,d\theta\,d\varphi =$$
$$= R^3\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta = R^3\int\limits_0^{2\pi} 2\,d\varphi = 4\pi R^3. \qquad \triangleright$$

Пример 41. Вычислить интеграл

$$J = \iint\limits_{\Sigma} z^2\cos\gamma\,dS$$

по внешней стороне Σ^+ поверхности $z = x^2 + y^2$, $0 \leqslant z \leqslant 1$ (γ — острый угол между осью Oz и внешней нормалью к данной поверхности).

<u>*Решение*</u>. Переходя к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, найдем

$$J = \iint\limits_{\Sigma^+} z^2\,dx\,dy = \iint\limits_{x^2+y^2\leqslant 1} (x^2 + y^2)^2\,dx\,dy = \int\limits_0^{2\pi}\!\!\int\limits_0^{1} \rho^5\,d\rho\,d\varphi = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^{1} \rho^5\,d\rho = \frac{\pi}{3}. \qquad \triangleright$$

8.6.8. Геометрические приложения поверхностных интегралов

Объем V тела, ограниченного кусочно гладкой поверхностью Σ, может быть найден по одной из следующих формул:

$$1)\ V = \iint\limits_{\Sigma^+} x\,dy\,dz, \qquad 2)\ V = \iint\limits_{\Sigma^+} z\,dx\,dy,$$

$$3)\ V = \iint\limits_{\Sigma^+} y\,dz\,dx, \qquad 4)\ V = \frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma^+} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy,$$

где Σ^+ — внешняя сторона Σ. В частности, объем V шара радиуса R, согласно примеру 40, равен

$$V = \frac{1}{3}J = \frac{4\pi}{3}R^3.$$

8.7. Формула Остроградского

8.7.1. Односвязные и неодносвязные области

Множество $\{M\}$ точек пространства E^n $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ называется **связным**, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, все точки которой принадлежат этому множеству $\{M\}$. Связное множество состоит как бы из одного куска.

Пример 42.

1) Множество точек на оси Ox, состоящее из двух промежутков $(-1; 0)$ и $(1; 3)$, не является связным;
2) множество точек на плоскости (или в пространстве), состоящее из точек двух непересекающихся кругов (или шаров), не является связным;
3) множество точек на плоскости, находящихся между двумя концентрическими окружностями, связно.

Область D на геометрической плоскости называется **односвязной**, если любую замкнутую простую кривую (контур), все точки которой принадлежат D, можно непрерывной деформацией стянуть в точку, принадлежащую D, оставаясь при этом в D и не касаясь ее границ (такая область не имеет отверстий), в противном случае область называется **многосвязной**. На рис. 8.15 область D — многосвязная, так как контуры C_1', C_2', охватывающие отверстия, нельзя стянуть в точки в приделах D. Граница плоской конечной односвязной области состоит из одной замкнутой простой кривой. Всю плоскость причисляют к односвязным областям.

Область G в трехмерном геометрическом пространстве называется: 1) **пространственно односвязной**, если любую замкнутую простую поверхность,

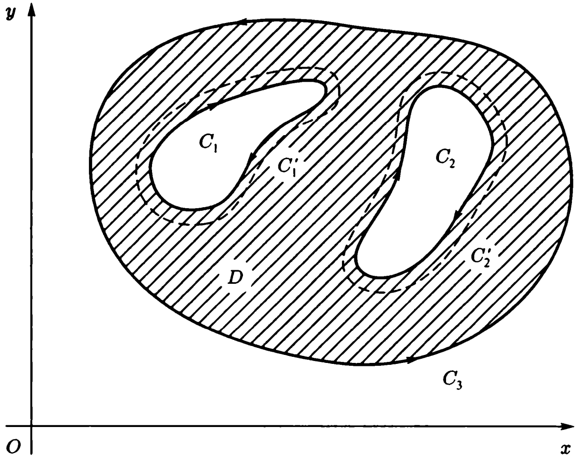


Рис. 8.15

все точки которой принадлежат G, можно непрерывной деформацией стянуть в точку, принадлежащую G, оставаясь при этом в G и не касаясь ее границ; 2) **поверхностно односвязной**, если любой контур, все точки которого принадлежат G, можно непрерывной деформацией стянуть в точку, принадлежащую G, оставаясь в G и не касаясь ее границ. Например, шар, а также все пространство, односвязны согласно обоим определениям. Область G, получаемая исключением из внутренности сферы точек одной или нескольких трубок, упирающихся концами в сферу (рис. 8.16), является только пространственно односвязной; неограниченная область вне G неодносвязна в обоих смыслах. Внутренность **тора** — тела, образуемого вращением круга вокруг прямой, лежащей в плоскости этого круга и не пересекающей его, является только пространственно односвязной, тогда как внешность тора неодносвязна в обоих смыслах. Представление о форме тора дает баранка или спасательный круг. Область вне бесконечного цилиндра односвязна только в первом смысле. Область, получаемая исключением из внутренних

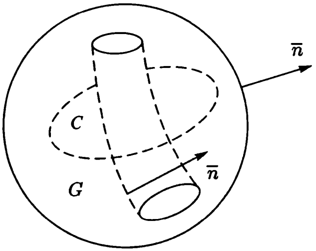


Рис. 8.16

точек сферы внутренних точек одной или нескольких содержащихся в ней сфер меньшего размера, является только поверхностно односвязной. В пространственно односвязной области отсутствуют полости, ограниченные замкнутыми кусочно гладкими поверхностями. На всякий кусочно гладкий контур, находящийся в поверхностно односвязной области, может быть «натянута» двухсторонняя кусочно гладкая поверхность, все точки которой расположены в этой области.

8.7.2. Формула Остроградского

Пусть G — конечная, в общем случае многосвязная область в пространстве $Oxyz$ с кусочно гладкой границей Σ, состоящей из конечного числа кусочно гладких замкнутых поверхностей Σ_i (называемых **связными компонентами** поверхности Σ). Область G с присоединенной к ней границей обозначим $\overline{G}$. Если функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ непрерывны в $\overline{G}$, а все их частные производные первого порядка непрерывны в G, то справедливо равенство, называемое **формулой Остроградского** (или **Остроградского—Гаусса**):

$$\iiint\limits_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = \iint\limits_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS,$$

где поверхностный интеграл справа равен сумме интегралов по всем поверхностям Σ_i; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы **внешней** (по отношению к G) нормали $\bar{n}$ к Σ, т. е. на внутренних поверхностях Σ_i нормаль направлена внутрь этих поверхностей, а на внешних — вовне (рис. 8.16).

Пусть пространственная область G — односвязна (т. е. не имеет замкнутых полостей). Для того чтобы поверхностный интеграл

$$\iint\limits_\Sigma (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS \tag{8.20}$$

на любой кусочно гладкой замкнутой (без самопересечений) поверхности Σ, содержащейся в G, был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы во всех точках G выполнялось равенство

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0. \tag{8.21}$$

Поверхностный интеграл (8.20) по двум незамкнутым разным поверхностям Σ_1 и Σ_2, опирающимся на один и тот же контур C, в общем случае различен для Σ_1 и Σ_2, направления нормалей к которым согласованы с направлением обхода контура C. При выполнении условия (8.21) в пространственно односвязной области G интеграл (8.20) не зависит от вида поверхностей, опирающихся на один и тот же контур C в G.

Пример 43. Вычислим интеграл

$$J = \iint\limits_{\Sigma^+} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy$$

по внешней поверхности Σ^+ сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Решение. Имеем по формуле Остроградского

$$J = \iint\limits_{\Sigma^+} (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS =$$

$$= \iiint\limits_G \left(\frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z}\right) dx\,dy\,dz = 3\iiint\limits_G dx\,dy\,dz = 3V,$$

где $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$ — объем шара. ▷

Объем V конечной многосвязной (в частности, односвязной) области G может быть найден по формуле

$$V = \frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma} x\,dy\,dz + y\,dz\,dx + z\,dx\,dy,$$

где поверхностный интеграл равен сумме интегралов по внешним сторонам всех поверхностей Σ_i.

8.8. Формулы Стокса и Грина

8.8.1. Формула Стокса

Пусть C — кусочно гладкая кривая, ограничивающая конечную двухстороннюю кусочно гладкую незамкнутую поверхность Σ в пространстве (рис. 8.17); $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ — функции, непрерывные вместе с первыми производными по x, y, z в некоторой пространственной окрестности Σ, тогда справедлива **формула Стокса**:

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = \iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\,dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz\,dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

где интеграл по кривой C равен сумме интегралов по всем замкнутым контурам C_i, из которых состоит C; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы

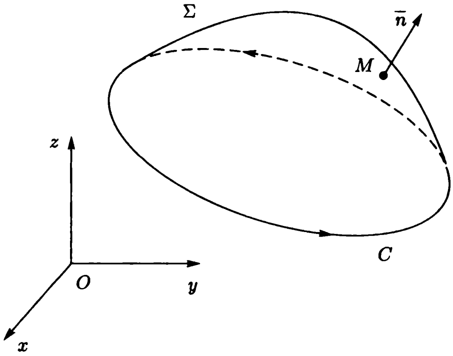


Рис. 8.17

нормали $\bar{n}$ поверхности Σ; направление обхода C_i при интегрировании таково, что при этом поверхность Σ остается слева, если смотреть из конца вектора $\bar{n}$ (система $Oxyz$ — правая). Если поверхность Σ односвязна и ограничена одним контуром C (рис. 8.17), то говорят, что поверхность Σ «натянута» на контур C.

Пример 44. Вычислим криволинейный интеграл

$$J = \int\limits_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$$

по окружности C, являющейся линией пересечения плоскости $x + y + z = 0$ и сферы $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, обход которой виден против хода часовой стрелки, если смотреть с положительной стороны оси Ox.

Решение. Так как вектор нормали к внешней стороне данной плоскости равен $\bar{N} = (1; 1; 1)$, то $|\bar{N}| = \sqrt{3}$ и $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma = 1/\sqrt{3}$. Имеем: $R'_y - Q'_z = P'_z - R'_x = Q'_x - P'_y = -1$. Отсюда следует

$$J = \iint\limits_\Sigma (-\cos\alpha - \cos\beta - \cos\gamma)\,dS = -\frac{3}{\sqrt{3}} \iint\limits_\Sigma dS = -\sqrt{3}S = -\sqrt{3}\pi R^2,$$

где Σ — круг с границей C в плоскости $x + y + z = 0$. ▷

8.8.2. Формула Грина

1. Пусть D — конечная, в общем случае многосвязная область на плоскости Oxy (рис. 8.15) с кусочно гладкой границей C, состоящей из конечного числа кусочно гладких замкнутых кривых C_i (называемых **связными компонентами** C). Область D с присоединенной к ней границей обозначим $\overline{D}$. Если функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $P'_y(x,y)$, $Q'_x(x,y)$ в области $\overline{D}$, то выполняется **формула Грина**

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = \iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

где криволинейный интеграл в левой части равен сумме интегралов по всем замкнутым кривым (контурам) C_i, направление обхода которых при интегрировании берется положительным (т. е. область D остается слева), при этом внешний контур обходится против часовой стрелки, а внутренние — по часовой.

Пример 45. Вычислим интеграл

$$J = \oint\limits_C x^2 y\,dx - xy^2\,dy$$

по окружности $x^2 + y^2 = R^2$.

Решение. Переходя в двойном интеграле к полярным координатам $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$, находим

$$J = -\iint\limits_D (x^2 + y^2)\,dx\,dy = -\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^R \rho^3\,d\rho = -\frac{1}{2}\pi R^4. \qquad \triangleright$$

Площадь конечной плоской многосвязной области D, граница C которой состоит из кусочно гладких контуров C_i, находится по формуле

$$S = \frac{1}{2}\oint\limits_C x\,dy - y\,dx,$$

где интеграл равен сумме интегралов по всем контурам C_i с обходом в положительном направлении.

2. Другой вид формулы Грина. Пусть $\bar{\tau} \equiv (\tau_x, \tau_y)$ — единичный вектор касательной к контуру C; направление $\bar{\tau}$ совпадает с положительным направлением обхода C, а также с положительным направлением отсчета длины его дуги l, которую берем в качестве параметра на C, т. е. $x = x(l)$, $y = y(l)$ — параметрические уравнения C. И пусть $\bar{n} = (n_x, n_y)$ — единичная нормаль к C, направленная вне области D (рис. 8.18). Вектор $\bar{n}$ совмещается с $\bar{\tau}$ при повороте на угол $\pi/2$ против часовой стрелки; при этом $n_x = \tau_y$, $n_y = -\tau_x$, $dx = \tau_x\,dl = -n_y\,dl$, $dy = \tau_y\,dl = n_x\,dl$. Заменяя в формуле Грина P на $(-Q)$,

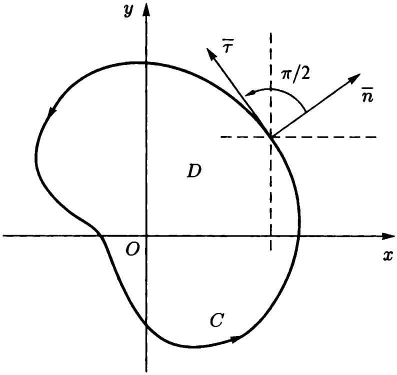


Рис. 8.18

а Q на P, получим **двумерный аналог формулы Остроградского**

$$\int\limits_C (Pn_x + Qn_y)\,dl = \iint\limits_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

где n_x, n_y — направляющие косинусы нормали $\bar{n}$.

Примечание. Если запись $\bar{\tau}$ и $\bar{n}$ в **комплексной форме**: $\tau = \tau_x + i\tau_y = \dfrac{dx}{dl} + i\dfrac{dy}{dl}$, $n = n_x + in_y$, то $\tau = in = -n_y + in_x$, т. е. $\tau_x = -n_y$, $\tau_y = n_x$.

8.9. Независимость криволинейных интегралов от пути интегрирования

8.9.1. Плоский путь интегрирования

Если функции $P(x, y)$, $Q(x, y)$ непрерывны вместе с частными производными P'_y, Q'_x в односвязной области D на плоскости Oxy, то следующие четыре утверждения равносильны (т. е. из одного любого следуют остальные три):

1) Выражение $P\,dx + Q\,dy$ является полным дифференциалом некоторой однозначной функции $U(x, y) \equiv U(M)$, определенной в D, т. е. $P\,dx + Q\,dy = dU$, где $P = U'_x$, $Q = U'_y$. Функция $U(x, y)$ определена с точностью до произвольной постоянной C, т. е. если $U(x, y)$ — какое-либо частное выражение этой функции, то ее общее выражение $U_1(x, y) = U(x, y) + C$, где C — произвольная постоянная.

2) Для всякой кусочно гладкой замкнутой кривой (контура) C (возможно, самопересекающейся), расположенной в D, справедливо равенство

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy = 0.$$

В качестве C можно взять, например, контур $A1B2A$ (рис. 8.19), расположенный в D.

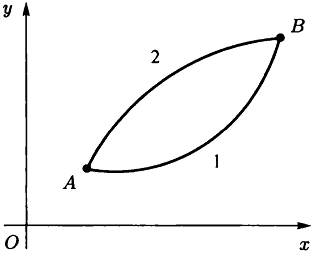


Рис. 8.19

3) Для любых точек A и B в D (рис. 8.19) интеграл

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy = U(B) - U(A)$$

не зависит от формы кусочно гладкой незамкнутой кривой, соединяющей точки A и B и находящейся полностью в D (например, кривые $A1B$ и $A2B$), т. е. является функцией только координат точек A и B. При этом можно записать

$$U_1(x,y) = \int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + C,$$

где $A \equiv (x_0, y_0)$ — фиксированная точка, $B \equiv (x, y)$ — переменная точка, т. е. $C = U_1(x_0, y_0)$. Если принять $U_1(A) = 0$, то $C = 0$.

4) Всюду в D тождественно выполняется равенство

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

Для нахождения $U_1(x, y)$ можно воспользоваться одной из двух следующих формул:

$$1)\ U_1(x,y) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x,y)\,dy + C, \tag{8.22}$$

$$2)\ U_1(x,y) = \int\limits_{y_0}^{y} Q(x_0, y)\,dy + \int\limits_{x_0}^{x} P(x,y)\,dx + C. \tag{8.23}$$

В формулах (8.22) и (8.23) интегрирование проводится от точки $A(x_0, y_0)$ до точки $B(x, y)$ по кривым AKB и AMB соответственно (рис. 8.20), состоящим из отрезков прямых, параллельных осям координат.

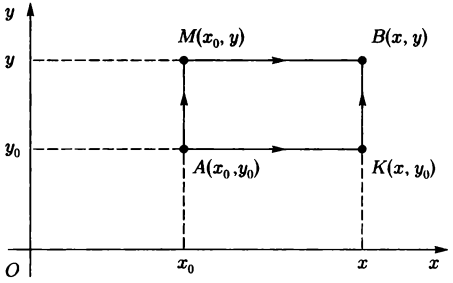


Рис. 8.20

Пример 46. Выражение $y\,dx + x\,dy$ является полным дифференциалом некоторой функции $U(x, y)$, так как $Q'_x = P'_y = 1$ всюду в плоскости Oxy. Если, например, $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, то по формуле (8.22) находим

$$U_1(x, y) = \int_1^x 2\,dx + \int_2^y x\,dy + C = xy + C_1 \ (C_1 = C - 2).$$

Аналогично, по формуле (8.23):

$$U_1(x, y) = \int_2^y dy + \int_1^x y\,dx + C = xy + C_1 \ (C_1 = C - 2).$$

Если область D многосвязна, то вышеприведенные утверждения 1)–4) эквивалентны лишь для частичных областей, содержащихся в D и не имеющих внутри себя отверстий. Если же контур C охватывает какое-либо одно отверстие (например, C'_1 или C'_2 на рис. 8.15) в многосвязной области, то интеграл по такому конуру, в общем случае, не равен нулю, но имеет одно и то же значение для различных контуров, охватывающих какое-либо одно отверстие. При этом функция $U(x, y)$, вообще говоря, многозначна.

Пример 47. Функция $\varphi(x, y) = \operatorname{Arctg}(y/x)$ определена всюду на плоскости Oxy, за исключением точки $(0; 0)$. Рассмотрим функции

$$P = \varphi'_x = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad Q = \varphi'_y = -\frac{x}{x^2 + y^2},$$

непрерывные и удовлетворяющие условию

$$Q'_x = P'_y = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

всюду, кроме точки $(0; 0)$. Если односвязная область D не содержит точку $(0; 0)$, то все утверждения 1)–4), приведенные выше, эквивалентны друг другу в D. Если многосвязная область D является кругом с центром в начале координат с исключенной точкой $(0;0)$ (так как функция φ не определена в этой точке), то интеграл

$$J = \oint P\,dx + Q\,dy,$$

взятый по любой замкнутой кривой C, охватывающей точку $(0;0)$, в частности, по окружности радиуса R с центром в точке $(0;0)$, равен (уравнения окружности: $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$):

$$J = \oint\limits_C \frac{-y\,dx + x\,dy}{x^2+y^2} = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi.$$

При этом

$$U_1(x,y) = \int\limits_{AB} \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy = \int\limits_{AB} d\varphi = \varphi,$$

где φ — полярный угол точки $B \equiv (R,\varphi)$; AB — дуга окружности; точка $A \equiv (R,0)$; постоянная $C = 0$. Функция U_1 — многозначна, так как при каждом полном обходе точки $(0;0)$ значение U_1 увеличивается на 2π.

8.9.2. Пространственный путь интегрирования

Пусть функции $P(x,y,z)$, $Q(x,y,z)$, $R(x,y,z)$ и все их первые частные производные по x, y, z непрерывны в некоторой поверхностно односвязной области G в пространстве $Oxyz$. Тогда следующие четыре утверждения равносильны (т. е. из одного любого следуют остальные три):

1) Выражение $P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ является полным дифференциалом dU некоторой однозначной функции $U(x,y,z) \equiv U(M)$, определенной в G, т. е. $P = U'_x$, $Q = U'_y$, $R = U'_z$ и $P\,dx + Q\,dy + R\,dz = dU$.

2) Для всякой кусочно гладкой замкнутой кривой C (возможно, с самопересечениями), расположенной в G, справедливо равенство

$$\oint\limits_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz = 0.$$

3) Для любых точек A и B в G интеграл

$$\int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz = U(B) - U(A)$$

зависит только от координат точек A и B, но не от формы кривой AB, их соединяющей и расположенной полностью в G. При этом общее выражение $U_1(x,y,z)$ функции U имеет вид

$$U_1 = \int\limits_{AB} P\,dx + Q\,dy + R\,dz + C,$$

где $A \equiv (x_0, y_0, z_0)$ — фиксированная точка, $B \equiv (x, y, z)$ — переменная точка, C — произвольная постоянная.

4) Всюду в G тождественно выполняются равенства

$$\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} = 0, \qquad \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0. \tag{8.24}$$

Если область G поверхностно многосвязна (рис. 8.16), то криволинейный интеграл по замкнутому контуру C, охватывающему какую-либо одну полость, в общем случае не равен нулю и не зависит от формы этого контура. Функция U_1 при этом многозначна.

Для нахождения $U_1(x, y, z)$ можно воспользоваться, например, формулой

$$U_1(x, y, z) = \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)\, dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)\, dy + \int\limits_{z_0}^{z} R(x, y, z)\, dz + C,$$

где три интеграла справа вычисляются последовательно по трем отрезкам прямых, параллельных осям координат Ox, Oy, Oz соответственно: 1) от точки $A \equiv (x_0, y_0, z_0)$ до (x, y_0, z_0), 2) от точки (x, y_0, z_0) до (x, y, z_0), 3) от точки (x, y, z_0) до точки $B \equiv (x, y, z)$. Точки A и B могут быть соединены и другими аналогичными ломаными.

Пример 48. Пусть $P = yz(2x + y + z)$, $Q = xz(x + 2y + z)$, $R = xy(x + y + 2z)$. Равенства (8.24) выполняются тождественно для любой точки (x, y, z). Взяв точку $A \equiv (0; 0; 0)$, получим

$$U_1(x, y, z) = \int\limits_0^x 0\, dx + \int\limits_0^y 0\, dy + \int\limits_0^z xy(x + y + 2z)\, dz + C = xyz(x + y + z) + C.$$

8.10. Интегралы, зависящие от параметра

8.10.1. Собственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть функция $f(x, y)$ определена и непрерывна в ограниченном прямоугольнике: $a \leqslant x \leqslant A$, $b \leqslant y \leqslant B$, тогда интеграл

$$F(y) = \int\limits_a^A f(x, y)\, dx$$

является функцией от y, определенной и непрерывной на отрезке $b \leqslant y \leqslant B$ и называемой **(собственным) интегралом, зависящим от параметра** y. Область определения функции $f(x, y)$ может иметь и более сложный вид, например $u(y) \leqslant x \leqslant v(y)$, $b \leqslant y \leqslant B$ (рис. 8.21).

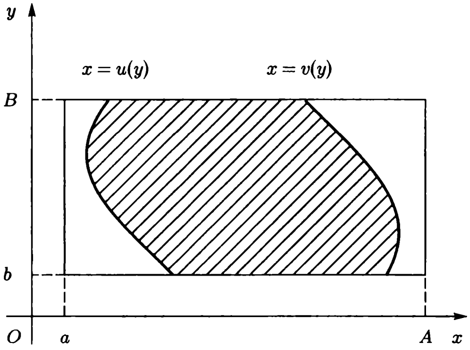


Рис. 8.21

Дифференцирование под знаком интеграла. Если $f(x, y)$ и ее частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны при $a \leqslant x \leqslant A$, $b \leqslant y \leqslant B$, то при $b < y < B$ справедлива **формула Лейбница**:

$$\frac{d}{dy}\int\limits_a^A f(x, y)\,dx = \int\limits_a^A f'_y(x, y)\,dx.$$

Если пределы интегрирования являются дифференцируемыми функциями $u(y)$ и $v(y)$ от параметра y и $a < u(y) < A$, $a < v(y) < A$ при $b < y < B$, так что $u(y) \leqslant x \leqslant v(y)$ (рис. 8.21), то

$$\frac{d}{dy}\int\limits_{u(y)}^{v(y)} f(x, y)\,dx = f(v(y), y)v'(y) - f(u(y), y)u'(y) + \int\limits_{u(y)}^{v(y)} f'_y(x, y)\,dx$$

$$(b < y < B).$$

Интегрирование под знаком интеграла. Если функция $f(x, y)$ непрерывна при $a \leqslant x \leqslant A$, $b \leqslant y \leqslant B$, то

$$\int\limits_b^B F(y)\,dy = \int\limits_b^B \left[\int\limits_a^A f(x, y)\,dx\right] dy = \int\limits_a^A \left[\int\limits_b^B f(x, y)\,dy\right] dx.$$

Пример 49. Пусть

$$F(y) = \int\limits_{\sin y}^{\cos y} e^{y\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Функции $f(x, y) = e^{y\sqrt{1-x^2}}$ и $f_y'(x, y) = \sqrt{1-x^2}e^{y\sqrt{1-x^2}}$ непрерывны при всех $-1 \leqslant x \leqslant 1$ и $-\infty < y < +\infty$. Находим

$$F'(y) = -\left(e^{y|\sin y|}\sin y + e^{y|\cos y|}\cos y\right) + \int\limits_{\sin y}^{\cos y} \sqrt{1-x^2}\cdot e^{y\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Полученную производную $F'(y)$ можно дифференцировать снова.

Пример 50. Функция $f(x, y) = \cos(x + y)$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$, $0 \leqslant y \leqslant \pi$ непрерывна. Отсюда

$$F(y) = \int\limits_0^{\pi/2} \cos(x+y)\,dx = \sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - \sin y,$$

$$\int\limits_0^{\pi} F(y)\,dy = \int\limits_0^{\pi}\left[\sin\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - \sin y\right]dy = -2.$$

Изменяя порядок интегрирования, получим такой же результат:

$$\int\limits_0^{\pi/2}\left[\int\limits_0^{\pi} \cos(x+y)\,dy\right]dx = -2.$$

8.10.2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Равномерная сходимость. Пусть несобственный интеграл первого рода

$$F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \lim_{A\to+\infty}\int\limits_a^{A} f(x, y)\,dx \tag{8.25}$$

сходится при любом значении параметра y из промежутка $b \leqslant y \leqslant B$. Сходящийся несобственный интеграл (8.25) называется **равномерно сходящимся** по параметру y на отрезке $[b; B]$, если для любого $\varepsilon > 0$ существует число $A(\varepsilon) \geqslant a$, не зависящее от y и такое, что для любого $R > A(\varepsilon)$ и для всех y из $[b; B]$ выполняется неравенство

$$\left|\int\limits_R^{+\infty} f(x, y)\,dx\right| < \varepsilon.$$

Равномерная сходимость интеграла (8.25) равносильна равномерной сходимости любого ряда вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_{a_n}^{a_{n+1}} f(x, y)\, dx,$$

где $a \equiv a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_n < a_{n+1} < \ldots$ и $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = +\infty$.

Если $f(x, y)$ непрерывна при $a \leqslant x < +\infty$ и при изменении параметра в конечном промежутке $b \leqslant y \leqslant B$, а интеграл (8.25) сходится равномерно на $[b; B]$, то этот интеграл является непрерывной функцией от y на $[b; B]$, т. е. для y_0 из $[b; B]$ имеем

$$\lim_{y\to y_0} \int_a^{+\infty} f(x, y)\, dx = \int_a^{+\infty} f(x, y_0)\, dx.$$

Признаки равномерной сходимости.

1) **Признак Вейерштрасса.** Для равномерной и абсолютной сходимости интеграла (8.25) достаточно, чтобы существовала не зависящая от y функция $g(x)$ такая, что: а) $|f(x, y)| \leqslant g(x)$ при $a \leqslant x < +\infty$ и б) $\int\limits_a^{+\infty} g(x)\, dx < +\infty$ (т. е. интеграл сходится).

2) Если: а) интеграл $\int\limits_a^{+\infty} h(x)\, dx$ сходится и б) функция $g(x, y)$ ограничена равномерно по y на $[b; B]$ и монотонна по x, то интеграл $\int\limits_a^{+\infty} h(x) g(x, y)\, dx$ сходится равномерно по y на отрезке $[b; B]$.

3) **Признак Дини.** Пусть $f(x, y)$ непрерывна и неотрицательна при $a \leqslant x < +\infty$ и для каждого y из $[b; B]$ сходится интеграл (8.25). Тогда, если функция $F(y)$ непрерывна на $[b; B]$, то интеграл (8.25) сходится равномерно по y на $[b; B]$.

Аналогично рассматриваются несобственные интегралы второго рода, зависящие от параметра y $(b \leqslant y \leqslant B)$, от неограниченных по переменной x функций $f(x, y)$. При помощи преобразования переменной x несобственные интегралы второго рода, зависящие от параметра y, преобразуются к несобственным интегралам первого рода, зависящим от параметра.

Пример 51.

1) Интеграл $F(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+x^2}\,dx$ при $-\infty < y < +\infty$ сходится равномерно, так как $\frac{|\cos xy|}{1+x^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2} = g(x)$ и интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$ сходится (см. пример 30 в 7.3.1).

2) Интеграл $F(y) = \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-xy}\frac{\cos x}{x^p}\,dx$, где фиксированное $p > 0$, при $0 \leqslant y < +\infty$ сходится равномерно, так как интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} h(x)\,dx$, где $h(x) = \frac{\cos x}{x^p}$, сходится (по признаку 5 в 7.3.1), а функция $g(x, y) = e^{-xy}$ монотонна по x и равномерно по y ограничена, так как $g(x, y) \leqslant e^0 = 1$ при $0 \leqslant y < +\infty$.

3) Интеграл $F(y) = \int\limits_{1}^{+\infty} x^y e^{-x}\,dx$ при $a \leqslant y \leqslant b$ сходится равномерно, так как $x^y e^{-x} \leqslant x^b e^{-x} \equiv g(x)$ при $1 \leqslant x < +\infty$. Интеграл $\int\limits_{1}^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится (по признаку 4 в 7.3.1), поскольку $\lim\limits_{x\to+\infty} x^r e^{-x} = 0$ для любого r.

Дифференцирование по параметру. Если:

1) функция $f(x, y)$ и ее частная производная $f'_y(x, y)$ непрерывны при $a \leqslant x < +\infty$ и при изменении y в конечном промежутке $b < y < B$,
2) интеграл $F(y) = \int\limits_{a}^{+\infty} f(x, y)\,dx$ сходится при некотором y из $[b; B]$,
3) интеграл $\int\limits_{a}^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx$ сходится равномерно при $b < y < B$, то справедливо **правило Лейбница**:

$$F'(y) = \frac{d}{dy}\int\limits_{a}^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int\limits_{a}^{+\infty} f'_y(x, y)\,dx \ (b < y < B).$$

Пример 52.

1) В условиях примера 51, 2 имеем

$$f'_y(x, y) = -e^{-xy}\cdot\frac{\cos x}{x^{p-1}}.$$

Следовательно, при $p > 1$ справедливо равенство

$$F'(y) = -\int_1^{+\infty} e^{-xy}\frac{\cos x}{x^{p-1}}\,dx \quad (y \geqslant 0).$$

2) В условиях примера 51, 3 имеем

$$f'_y(x, y) = yx^{y-1}e^{-x} \leqslant bx^{b-1} \equiv g(x)$$

и интеграл $\int\limits_1^{+\infty} g(x)\,dx$ сходится. Следовательно,

$$F'(y) = \int_1^{+\infty} yx^{y-1}e^{-x}\,dx \quad (a \leqslant y \leqslant b).$$

Интегрирование по параметру. Если:

1) функция $f(x, y)$ непрерывна при $a \leqslant x < +\infty$ и при изменении y в конечном отрезке $[b; B]$,

2) интеграл $F(y) = \int\limits_a^{+\infty} f(x, y)\,dx$ сходится равномерно по y из $[b; B]$, то справедлива формула

$$\int_b^B F(y)\,dy = \int_b^B dy \int_a^{+\infty} f(x, y)\,dx = \int_a^{+\infty} dx \int_b^B f(x, y)\,dy.$$

Эта формула верна также и для бесконечного промежутка (b, B) при условии, что $f(x, y) \geqslant 0$, внутренние интегралы непрерывны и одна из частей равенства имеет смысл.

Пример 53. Интеграл $F(y)$ в условиях примера 51, 2 сходится равномерно при $p > 0$ и $0 \leqslant y < +\infty$, следовательно,

$$\int_b^B F(y)\,dy = \int_1^{\infty}\left[\int_b^B e^{-xy}\frac{\cos x}{x^p}\,dy\right]dx = \int_1^{\infty}(e^{-bx} - e^{-Bx})\frac{\cos x}{x^{p+1}}\,dx \quad (B > b \geqslant 0).$$

8.10.3. Применения несобственных интегралов, зависящих от параметра, к вычислению несобственных интегралов

Вычисление интеграла $\int\limits_0^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x}\,dx$. Интеграл $F(y) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-xy}\cdot\dfrac{\sin x}{x}\,dx$ сходится равномерно при $0 \leqslant y < +\infty$. Действительно, так как функция

$h(x) = (\sin x)/x \to 1$ при $x \to 0$, то можно полагать ее непрерывной и при $x = 0$. Следовательно, интеграл

$$\int_0^{+\infty} h(x)\,dx = \int_0^1 h(x)\,dx + \int_1^{+\infty} h(x)\,dx$$

— сходящийся, причем второй интеграл справа сходится по признаку 5 в 7.3.1. Функция $g(x,y) = e^{-xy}$ монотонна по x и равномерно по y ограничена, так как $g(x,y) \leqslant e^0 = 1$, поэтому интеграл $F(y)$ сходится равномерно. Интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x\,dx$ сходится равномерно при $0 < y_0 \leqslant y < +\infty$, так как $|e^{-xy} \sin x| \leqslant e^{-xy_0}$, а интеграл $\int\limits_0^{+\infty} e^{-xy_0}\,dx$ сходится при $y_0 > 0$.

Интегрируя по частям, получим

$$F'(y) = -\int_0^{+\infty} e^{-xy} \sin x\,dx = -\frac{1}{1+y^2}.$$

Интегрируя здесь обе части равенства по y, получим при $y > 0$:

$$F(y) = -\int \frac{dy}{1+y^2} = -\operatorname{arctg} y + C.$$

Так как $\lim\limits_{y\to+\infty} F(y) = 0$, $\lim\limits_{y\to+\infty} \operatorname{arctg} y = \pi/2$, находим $C = \pi/2$. Следовательно, $F(y) = -\operatorname{arctg} y + \pi/2$. Поскольку

$$F(0) = \lim_{y\to+0} F(y) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx,$$

то отсюда находим искомое значение несобственного интеграла

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}.$$

Подобным же образом могут быть вычислены и некоторые другие несобственные интегралы.

Эйлеровы интегралы.

1) Несобственный интеграл

$$\Gamma(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$$

(параметр $x > 0$), называемый **гамма-функцией**, сходится при $x > 0$ и расходится при $x < 0$.

Свойства:

а) $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$;

б) $\Gamma(n) = (n-1)!$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

в) $\Gamma\left(n + \dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}$ $(n = 1, 2, \ldots)$;

г) $\Gamma(x)\Gamma(1-x) = \dfrac{\pi}{\sin \pi x}$ $(0 < x < 1)$;

д) при $x > 0$ функция $\Gamma(x)$ непрерывна и имеет непрерывные производные всех порядков

$$\Gamma^{(n)}(x) = \int\limits_0^{+\infty} t^{x-1} (\ln t)^n e^{-t}\, dt,$$

в частности:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x} \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$$

(**интеграл Пуассона**);

$$\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\, dt = 1; \quad \Gamma(2) = \Gamma(1); \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

2) Несобственный интеграл

$$\mathrm{B}(x, y) = \int\limits_0^1 t^{x-1} (1-t)^{y-1}\, dt,$$

зависящий от двух параметров x и y и называемый **бета-функцией**, сходится, если одновременно $x > 0$ и $y > 0$.

Свойства:

а) $\mathrm{B}(x, y) = \mathrm{B}(y, x)$;

б) $\mathrm{B}(x, y) = \dfrac{\Gamma(x)\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)}$;

в) $\mathrm{B}(x, y) = \int\limits_0^{+\infty} \frac{t^{y-1}}{(1+t)^{x+y}}\,dt;$

г) $\mathrm{B}(x, y+1) = \frac{y}{x+y}\mathrm{B}(x, y);$

д) $\mathrm{B}(x+1, y+1) = \frac{\Gamma(x+1)\Gamma(y+1)}{\Gamma(x+y+2)}.$

Формула Стирлинга

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n+\alpha_n}; \quad \alpha_n = \frac{\theta_n}{12n}; \quad e^{\alpha_n} \approx 1 \quad (0 < \theta_n < 1)$$

дает асимптотическое выражение для $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$, когда n — большое натуральное число. Произведение всех натуральных чисел от 1 до n называется **факториалом** (или **n-факториалом**). По определению принимается $0! = 1$.

8.11. Кратные несобственные интегралы

Несобственные интегралы могут быть двух видов: 1) подынтегральная функция неограничена, 2) область интегрирования неограничена.

8.11.1. Двойные несобственные интегралы от неограниченных функций

Пусть функция $f(M) \equiv f(x, y)$ непрерывна всюду в конечной области D на плоскости Oxy, за исключением точки $M_0(x_0, y_0)$ (которая находится внутри или на границе D), в окрестности которой $f(M)$ не ограничена. Пусть Δ — произвольная малая окрестность точки M_0, а $D \setminus \Delta$ — область, получаемая исключением точек Δ из D. Если при неограниченном стягивании Δ к точке M_0 интеграл $\iint\limits_{D\setminus\Delta} f(M)\,dS$ стремится к определенному пределу, не зависящему от способа стягивания Δ к M_0, то этот предел называется **(сходящимся) несобственным интегралом** от $f(M)$ по области D. Обозначения:

$$\iint\limits_D f(M)\,dS \quad \text{или} \quad \iint\limits_D f(x, y)\,dx\,dy. \tag{8.26}$$

Если этот предел не существует, то интеграл называется **расходящимся**.

Если $f(M)$ может принимать значения разных знаков и существует (сходится) несобственный интеграл

$$\iint\limits_D |f(M)|\,dS, \tag{8.27}$$

то интеграл (8.26) называется **абсолютно сходящимся**. Если интеграл (8.27) сходится, то сходится и интеграл (8.26). В отличие от обычных одномерных интегралов, для кратных интегралов понятия обычной сходимости и абсолютной сходимости эквивалентны, т. е. из сходимости интеграла (8.26) следует сходимость (8.27).

Для сходимости несобственного интеграла (8.26) от неотрицательной в D функции $f(x, y) \geqslant 0$ необходимо и достаточно, чтобы хотя бы для одной последовательности областей Δ_n $(n = 1, 2, \ldots)$, стягивающейся к M_0 и таких, что Δ_{n+1} полностью принадлежит Δ_n при любом n (в частности, для последовательности круговых областей Δ_n, стягивающихся к M_0 при $n \to \infty$), была ограниченной числовая последовательность

$$a_n = \iint\limits_{D \setminus \Delta_n} f(M)\, dS.$$

При этом последовательность a_n не убывает при возрастании n.

Общий признак сравнения. Если $f(M) \geqslant 0$ и $g(M) \geqslant 0$ в D и всюду в D выполняется $f(M) \leqslant g(M)$, то из сходимости интеграла $\iint\limits_D g(M)\, dS$ следует сходимость интеграла $\iint\limits_D f(M)\, dS$.

Частный признак сравнения. Интеграл (8.27) сходится, если в окрестности точки M_0 функция удовлетворяет условию $|f(M)| \leqslant A/r^p$, где $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ — расстояние от точки $M(x, y)$ до $M_0(x_0, y_0)$; A и p — постоянные ($p < 2$). Несобственный интеграл от r^{-p} при $p < 2$ сходится в D и расходится при $p \geqslant 2$.

Пример 54. Вычислим интеграл $J = \iint\limits_{x^2+y^2 \leqslant 1} \ln \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}\, dx\, dy$.

Решение. В окрестности начала координат $O(0; 0)$ подынтегральная функция не ограничена. Переходя к полярным координатам $x = \rho \cos\varphi$, $y = \rho \sin\varphi$ в области $0 < \rho_n \leqslant \rho \leqslant 1$, где ρ_n — радиус круговой области Δ_n, получим

$$J = \lim_{\rho_n \to 0} \int\limits_{\rho_n}^{1} \int\limits_{0}^{2\pi} \left(\ln \frac{1}{\rho}\right) \rho\, d\rho\, d\varphi = - \lim_{\rho_n \to 0} \int\limits_{\rho_n}^{1} \int\limits_{0}^{2\pi} \rho \ln \rho\, d\rho\, d\varphi =$$

$$= -2\pi \lim_{\rho_n \to 0} \left(\frac{\rho^2}{2} \ln \rho - \frac{\rho^2}{4}\right)\Bigg|_{\rho_n}^{1} = \frac{\pi}{2}.$$

Здесь предел $\lim\limits_{\rho_n \to 0} \rho_n^2 \ln \rho_n = 0$ по правилу Лопиталя. ▷

8.11.2. Тройные несобственные интегралы от неограниченных функций

Если функция $f(M) \equiv f(x, y, z)$ непрерывна всюду в конечной области G пространства $Oxyz$, за исключением точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, в окрестности которой $f(M)$ не ограничена, то совершенно аналогично предыдущему определяется **несобственный интеграл** от $f(M)$ по G, обозначаемый

$$\iiint\limits_G f(M)\,dV \quad \text{или} \quad \iiint\limits_G f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz. \tag{8.28}$$

Все вышеприведенные свойства двойных несобственных интегралов переносятся на тройные несобственные интегралы со следующими уточнениями: 1) круговые области Δ_n заменяются на шаровые, 2) в частном признаке сравнения абсолютная сходимость интеграла (8.28) (см. 8.11.1) обеспечивается при $p < 3$. Несобственный интеграл от r^{-p} сходится в области G при $p < 3$ и расходится при $p \geqslant 3$.

Пример 55. Вычислим интеграл $J = \int\limits_0^1\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \dfrac{dx\,dy\,dz}{x^p y^q z^r}$.

<u>*Решение*</u>. В окрестности точки $O(0; 0; 0)$ функция не ограничена. Получим

$$J = \lim_{\substack{\varepsilon_i \to 0\\(i=1,2,3)}} \int\limits_{\varepsilon_3}^1 dz \int\limits_{\varepsilon_2}^1 dy \int\limits_{\varepsilon_1}^1 \frac{dx}{x^p y^q z^r} =$$

$$= \lim_{\substack{\varepsilon_i \to 0\\(i=1,2,3)}} (1-p)^{-1}(1-q)^{-1}(1-r)^{-1}\left[(x^{1-p})\Big|_{\varepsilon_1}^1 (y^{1-q})\Big|_{\varepsilon_2}^1 (z^{1-r})\Big|_{\varepsilon_3}^1\right] =$$

$$= (1-p)^{-1}(1-q)^{-1}(1-r)^{-1} \quad (p < 1,\ q < 1,\ r < 1).$$ ▷

8.11.3. Двойные несобственные интегралы по неограниченной области

Пусть Δ — произвольная конечная область, содержащаяся в бесконечной во всех направлениях области D на плоскости Oxy. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в D, то существует интеграл

$$\iint\limits_\Delta f(M)\,dS.$$

Если при произвольном неограниченном расширении Δ во всех направлениях области D предыдущий интеграл стремится к определенному пределу, то этот предел называется (**сходящимся**) **несобственным интегралом** от $f(M)$ по бесконечной области D. Обозначения:

$$\iint\limits_D f(M)\,dS \quad \text{или} \quad \iint\limits_D f(x,y)\,dx\,dy. \tag{8.29}$$

В противном случае интеграл называется **расходящимся**.

Если сходится интеграл $\iint\limits_D |f(M)|\,dS$, то интеграл (8.29) называется **абсолютно сходящимся**. Для несобственных кратных интегралов понятия сходимости и абсолютной сходимости эквивалентны.

Если $f(x,y) \geqslant 0$ в D, то в качестве Δ можно взять множество точек D, содержащихся в неограниченно расширяющемся круге с фиксированным центром. Пусть $D \setminus \Delta$ — множество точек D, лежащих вне круга Δ радиуса r. Тогда, если интеграл (8.29) от $f(M) \geqslant 0$ сходится, то интеграл от $f(M)$ по области $D \setminus \Delta$ стремится к нулю при $r \to \infty$.

Достаточный признак сходимости. Интеграл (8.29) сходится, если для всех точек M из D, достаточно удаленных от фиксированной точки M_0, выполняется условие $|f(M)| \leqslant A/r^p$, где r — расстояние от M_0 до M, A и p — постоянные ($p > 2$).

Аналогично можно определить **несобственный тройной интеграл** от функции $f(M)$ по неограниченной области G в пространстве $Oxyz$ со следующими уточнениями: 1) круговую область следует заменить шаровой, 2) в достаточном признаке сходимости следует взять $p > 3$.

Пример 56. Вычислим интеграл

$$J = \iiint\limits_D e^{-(x^2+y^2+z^2)}\,dx\,dy\,dz,$$

где D — все бесконечное пространство.

Решение. Переходя к сферическим координатам $x = \rho\sin\theta\cos\varphi$, $y = \rho\sin\theta\sin\varphi$, $z = \rho\cos\theta$ и взяв в качестве Δ шар радиуса R с центром в начале координат, получим

$$J = \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R \int\limits_0^\pi \int\limits_0^{2\pi} e^{-\rho^2}\rho^2 \sin\theta\,d\rho\,d\theta\,d\varphi = 4\pi \lim_{R\to\infty} \int\limits_0^R e^{-\rho^2}\rho^2\,d\rho =$$

$$= \{t = \rho^2,\ dt = 2\rho\,d\rho\} = 2\pi \int\limits_0^{+\infty} e^{-t}\sqrt{t}\,dt = 2\pi\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = 2\pi\frac{\sqrt{\pi}}{2} = \pi^{3/2}. \qquad \triangleright$$

Примечание 1. Несобственные криволинейные интегралы сводятся к обычным определенным интегралам.

Примечание 2. Несобственные поверхностные интегралы сводятся к двойным интегралам.

8.12. Кратные интегралы, зависящие от параметров

8.12.1. Собственные кратные интегралы, зависящие от параметров

Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — точка ограниченной области G пространства E^n, а $y = (y_1, \ldots, y_m)$ — точка ограниченной области D в E^m. Соответствующие замкнутые области обозначим $\overline{G}$, $\overline{D}$. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m) \equiv f(x; y)$, функция, определенная по всем своим аргументам x_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ и y_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$ в областях G и D соответственно. Если для любой точки $y_0 = (y_1^0, \ldots, y_m^0)$ в D функция $f(x; y)$ интегрируема в области G, то функция

$$F(y) \equiv F(y_1, \ldots, y_m) =$$

$$= \iint\limits_G \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_m)\, dx_1 \ldots dx_n \equiv \int\limits_G f(x; y)\, dx,$$

определенная в D, называется **собственным интегралом, зависящим от параметров** $y_1, \ldots, y_m$. В частности, области G и D могут совпадать: $G = D$.

Если $f(x; y)$ непрерывна по совокупности всех своих аргументов x_i, y_j в соответствующей замкнутой области $(n+m)$-мерного пространства, то $F(y)$ является непрерывной функцией в $\overline{D}$. При этом $F(y)$ можно интегрировать по параметрам под знаком интеграла, т. е.

$$\int\limits_D F(y_1, \ldots, y_m)\, dy_1 \ldots dy_m = \int\limits_G \left[\int\limits_D f(x; y)\, dy_1 \ldots dy_m\right] dx_1 \ldots dx_n.$$

Если, кроме того, частная производная f'_{y_i} непрерывна по совокупности всех аргументов x_i и y_j, то $F(y)$ имеет в D непрерывную частную производную F'_{y_j} и

$$\frac{\partial F(y)}{\partial y_j} = \int\limits_G \frac{\partial f(x; y)}{\partial y_j}\, dx_1 \ldots dx_n.$$

8.12.2. Несобственные кратные интегралы, зависящие от параметров

Пусть $M'(x', y', z')$ и $M(x, y, z)$ — точки некоторой ограниченной области G пространства $Oxyz$. И пусть $f(x', y', z'; x, y, z) \equiv f(M', M)$ — функция, определенная и непрерывная в $\overline{G}$ при $M' \neq M$ и неограниченная в окрестности $M' = M$.

Несобственный интеграл

$$F(M) \equiv F(x, y, z) = \iiint\limits_G f(M', M)\, dV',$$

где $dV' = dx'\, dy'\, dz'$, зависящий от параметров x, y, z, называется **сходящимся равномерно по параметрам x, y, z в точке** $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащей G, если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех точек M, расстояние $r = MM_0$ которых от точки M_0 не превышает δ и для любой шаровой окрестности Δ точки M_0, радиус которой не превышает δ, выполняется неравенство

$$\left| \iiint\limits_\Delta f(M', M)\, dV' \right| < \varepsilon.$$

Если интеграл $F(M)$ сходится равномерно по параметрам x, y, z в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ в G, то он является функцией, непрерывной в точке M_0.

Достаточный признак равномерной сходимости. Пусть подынтегральная функция $f(M', M) = g(M', M)h(M')$, где $g(M', M)$ непрерывна в $\overline{G}$ при $M' \neq M$, а $h(M')$ равномерно ограничена всюду в G. Тогда, если существуют постоянные p $(0 < p < 3)$ и $A > 0$ такие, что для всех M' и M, принадлежащих G, выполняется неравенство $|g(M', M)| \leqslant A/r^p$ $(r = MM')$, то интеграл $F(M)$ сходится равномерно по параметрам в каждой точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, принадлежащей G.

8.12.3. Ньютонов потенциал

Ньютонов потенциал $U(x, y, z)$ тела G в точке $M(x, y, z)$определяется интегралом

$$U(x, y, z) = \iiint\limits_G \frac{\rho(x', y', z')}{r}\, dV', \tag{8.30}$$

где $\rho(x', y', z') \geqslant 0$ — плотность тела G в точке M',

$$r = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2 + (z' - z)^2}$$

— расстояние между точками $M'(x', y', z')$ и $M(x, y, z)$. Если точка M находится **вне** тела G, то (8.30) является собственным интегралом, зависящим от параметра, так как $r \neq 0$. Если при этом $\rho(x', y', z')$ непрерывна в G, то, в силу непрерывности вне G производной

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x' - x}{r^3},$$

функция $U(x, y, z)$ дифференцируема вне G и ее производная равна

$$\frac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} = \iiint\limits_G \rho(x',y',z')\frac{x'-x}{r^3}\,dV'. \tag{8.31}$$

Здесь подынтегральная функция также имеет непрерывную производную по x, следовательно,

$$\frac{\partial^2 U(x,y,z)}{\partial x^2} = \iiint\limits_G \rho(x',y',z')\left[\frac{3(x'-x)^2}{r^5} - \frac{1}{r^3}\right] dV'.$$

Аналогично можно найти производные $U(x, y, z)$ по y и z. Складывая вторые производные, получим

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Если точка M находится **внутри** тела G, то (8.31) является несобственным интегралом, так как $r = 0$ при $M' = M$ (подынтегральная функция в (8.31) обращается в бесконечность). Если $A = \max\limits_G \rho(x, y, z)$, то $\dfrac{\rho}{r} \leqslant \dfrac{A}{r^p}$ $(p = 1)$ и $\dfrac{\rho|x'-x|}{r^3} \leqslant \dfrac{A}{r^p}$ $(p = 2)$, следовательно, интегралы (8.30) и (8.31) сходятся равномерно в каждой точке M_0 области G, а поэтому являются непрерывными функциями от x, y, z в G. При этом интеграл (8.31) получается дифференцированием (8.30) по x под знаком интеграла. Аналогично находятся производные (8.30) по y и z.

Глава 9

РЯДЫ

9.1. Числовые ряды и их свойства

9.1.1. Общие понятия

Пусть дана бесконечная числовая последовательность $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, где $a_n = f(n)$ — некоторая функция натурального аргумента n. Формальное выражение

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{9.1}$$

называется **числовым рядом** или просто **рядом**. Отдельные числа a_n, входящие в (9.1), называются **элементами** или **членами ряда**, выражение $a_n = f(n)$ называется **общим членом (элементом) ряда.** Сумма первых n членов ряда (9.1) называется n-й **частичной суммой** (или **отрезком**) данного ряда

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i.$$

Частичные суммы образуют бесконечную последовательность $\{S_n\}$:

$$S_1 = a_1, \quad S_2 = a_1 + a_2, \quad \ldots, \quad S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \quad \ldots .$$

Если существует **конечный** предел последовательности частичных сумм $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$, то ряд (9.1) называется **сходящимся**, а число S называется **суммой рядаряд**, сумма (9.1). При этом говорят также, что данный ряд **сходится** к сумме S. В этом случае пишут

$$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Если последовательность $\{S_n\}$ расходится, т. е. предел $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ не существует или бесконечен, то ряд (9.1) называется **расходящимся**. Сходимость ряда эквивалентна сходимости последовательности его частичных сумм.

Пример 1.

1) Ряд $1+1+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty} 1$ расходится, так как последовательность $S_1=1$, $S_2=2$, $\ldots$, $S_n=n$, $\ldots$ не имеет конечного предела.
2) Ряд $1-1+1-1+\ldots=\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}$ расходится, так как последовательность $S_1=1$, $S_2=0$, $\ldots$, $S_{2n-1}=1$, $S_{2n}=0$ $\ldots$ не имеет предела.
3) Рассмотрим ряд, составленный из членов бесконечной геометрической прогрессии: $1, q, q^2, \ldots, q^{n-1}, \ldots$. Частичная сумма S_n этого ряда при $q\neq 1$ равна
$$S_n=1+q+\ldots+q^{n-1}=\frac{1-q^n}{1-q}=\frac{1}{1-q}-\frac{q^n}{1-q}.$$
Если $|q|<1$, то $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=\dfrac{1}{1-q}$, т. е. ряд сходится и его сумма равна $S=\dfrac{1}{1-q}$. При $q=1$ или $q=-1$ ряд расходится. Если $|q|>1$, то ряд также расходится.

Критерий Коши сходимости ряда. Для сходимости ряда (9.1) необходимо и достаточно, чтобы для любого числа $\varepsilon>0$ существовало натуральное число $N(\varepsilon)$ такое, что для всех номеров $n\geqslant N(\varepsilon)$ и для любого натурального $m(m=1,2,3,\ldots)$ выполнялось неравенство
$$|S_{n+m}-S_n|=\left|\sum_{i=n+1}^{n+m} a_i\right|\equiv|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+m}|<\varepsilon.$$
Отсюда, в частности, следует, что если ряд (9.1) сходится, то
$$\lim_{n\to\infty} a_n=\lim_{n\to\infty}(S_n-S_{n-1})=0$$
[**необходимый** (но не достаточный) **признак сходимости ряда**]. Таким образом, если общий член a_n ряда (9.1) не стремится к нулю при $n\to\infty$, то этот ряд заведомо расходится.

Пример 2.

1) Ряд $1-1+1-1+\ldots$ заведомо расходится, так как его общий член $a_n=(-1)^{n-1}$ вообще не имеет предела.
2) Для ряда $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}+\ldots$, называемого **гармоническим,** необходимое условие сходимости $\lim\limits_{n\to\infty} 1/n=0$ выполняется, однако, этот ряд расходится. Действительно, предполагая, что этот ряд сходится и имеет сумму S, можно записать
$$\lim_{n\to\infty}(S_{2n}-S_n)=\lim_{n\to\infty} S_{2n}-\lim_{n\to\infty} S_n=S-S=0,$$
что противоречит неравенству
$$S_{2n}-S_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}>n\cdot\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}.$$

Остатком ряда (9.1) называется ряд

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots = \sum_{i=n+1}^{\infty} a_i,$$

получаемый из данного отбрасыванием его первых n членов. Если ряд (9.1) сходится, то можно записать

$$S = S_n + R_n,$$

где S_n — частичная сумма ряда (9.1), R_n — сумма остатка этого ряда. При этом последовательность R_n $(n = 1, 2, \ldots)$ является бесконечно малой, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} R_n = 0$.

9.1.2. Свойства сходящихся рядов

1) Если некоторый ряд сходится (расходится), то любой его остаток сходится (расходится). Из сходимости (расходимости) любого остатка ряда следует сходимость (расходимость) данного ряда.
2) Отбрасывание конечного числа членов ряда (или добавление к ряду конечного числа членов) не влияет на сходимость или расходимость этого ряда.
3) Если $a_i' = ca_i$, где $c \neq 0$ — некоторое число (в частности, $c = -1$), то ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i'$. При этом $S' = cS$, где S и S' — суммы данных рядов.
4) Если ряды а) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ и б) $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i'$ сходятся и имеют суммы S и S', то ряд в) $\sum\limits_{i=1}^{\infty}(a_i \pm a_i')$, полученный почленным сложением (вычитанием) этих рядов сходится и имеет сумму $S \pm S'$. Из сходимости ряда в) в общем случае не следует сходимость рядов а) и б).
5) Если ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится к сумме S, то его члены можно произвольно группировать в порядке их следования (не переставляя местами), например, $(a_1 + a_2) + (a_3 + a_4 + a_5) + \ldots$. В результате получится сходящийся ряд с такой же суммой S.

Примечание 1. Перестановка членов сходящегося ряда, члены которого имеют неодинаковые знаки, может привести к изменению его суммы и даже к расходимости. Если ряд, все члены которого имеют одинаковые знаки, сходится, то произвольная перестановка его членов не влияет на сходимость ряда и не изменяет его сумму.

Примечание 2. Раскрытие скобок в сходящемся ряде может привести к расходимости ряда. Например, ряд $(1-1)+(1-1)+\ldots=0+0+\ldots$ сходится, однако, при раскрытии скобок получается расходящийся ряд $1-1+1-1+\ldots$ (см. пример 1, 2).

9.2. Признаки сходимости знакопостоянных рядов

Ряд, все члены которого неотрицательны, т. е. $a_n \geqslant 0$ (или неположительны, т. е. $a_n \leqslant 0$), называется **знакопостоянным**. Далее (в силу свойства 3 в 9.1.2) ограничимся **неотрицательными** рядами (у которых все $a_n \geqslant 0$). Последовательность частичных сумм такого ряда является неубывающей. Для того чтобы неотрицательный ряд сходился, необходимо и достаточно, чтобы последовательность его частичных сумм была ограниченной сверху.

9.2.1. Признаки сравнения неотрицательных рядов

1. Пусть а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ — два неотрицательных ряда. Если для всех номеров n, начиная с некоторого номера N $(n \geqslant N)$, выполняются неравенства $a_n \leqslant b_n$, то из сходимости ряда б) следует сходимость ряда а); а из расходимости а) следует расходимость б).

Примечание. Справедливость признака 1 не нарушится, если неравенство $a_n \leqslant b_n$ заменить неравенством $a_n \leqslant c\,b_n$, где c — любое положительное число.

Пример 3.

1) При $\alpha \leqslant 1$ ряд $1+\frac{1}{2^\alpha}+\frac{1}{3^\alpha}+\ldots$ расходится, так как $\frac{1}{n^\alpha} \geqslant \frac{1}{n}$ $(n^\alpha \leqslant n)$ при $\alpha \leqslant 1$ (см. пример 2, 2). При $\alpha > 1$ данный ряд сходится (см. пример 6, 1).

2) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{3^n+2}$ сходится, так как $\frac{2^n}{3^n+2} < \frac{2^n}{3^n} = \left(\frac{2}{3}\right)^n$, а ряд, составленный из членов геометрической прогрессии с $q = 2/3 < 1$, сходится (см. пример 1, 3).

2. Пусть а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n \geqslant 0)$, б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ $(b_n \geqslant 0)$ — два неотрицательных ряда. Тогда, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = A > 0,$$

то ряды а) и б) сходятся и расходятся одновременно. В частности, если $b_n = 1/n^\alpha$, то при $\alpha > 1$ ряд а) сходится; при $\alpha \leqslant 1$ — расходится (см. пример 3, 1).

Пример 4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n\sqrt{n+1}}$ сходится, так как при $\alpha = \dfrac{3}{2}$ имеем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^{3/2}}{n\sqrt{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}} = 1 > 0.$$

9.2.2. Признаки Даламбера и Коши

1. Признак Даламбера I. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ с положительными членами $a_n > 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ сходится, если $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant p < 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, и расходится при $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$ $(n = 1, 2, \ldots)$.

Признак Даламбера II. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ $(a_n > 0$ при $n = 1, 2, \ldots)$ сходится, если

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1,$$

и расходится при $q > 1$.

Если $q = 1$, то признак II «не действует», ряд может быть либо сходящимся $\left(\text{например, } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^2}\right)$, либо расходящимся $\left(\text{например, } \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}\right)$.

Пример 5.

1) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n!}$ сходится, так как

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!}\right] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$$

2) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n}$ сходится, так как

$$q = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \left[\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} : \frac{n!}{n^n}\right] =$$

$$= \lim \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right]^{-1} = e^{-1} < 1.$$

2. Признак Коши I. Пусть дан ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (все $a_n \geqslant 0$). Если $\sqrt[n]{a_n} \leqslant p < 1$ ($n = 1, 2, \ldots$), то ряд сходится. Если же $\sqrt[n]{a_n} \geqslant 1$ ($n = 1, 2, \ldots$) то ряд расходится.

Признак Коши II. Если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (все $a_n \geqslant 0$) сходится при $q < 1$ и расходится при $q > 1$. При $q = 1$ признак II «не работает» (см. два примера к признаку Даламбера).

Признак Коши III. Если $\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ (понятие верхнего предела см. в 4.2.7), то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ (в котором все $a_n \geqslant 0$) при $l < 1$ сходится, а при $l > 1$ расходится. При $l = 1$ признак III «не действует».

Пример 6.

1) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^2}{2^n}$ сходится, так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\sqrt[n]{n})^2}{2} = \dfrac{1}{2} < 1$ $(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1)$.

2) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^{n+\sqrt{n}}$ $(q > 0)$ имеем $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} q^{1+\frac{\sqrt{n}}{n}} = q$. Если $0 \leqslant q < 1$, то ряд сходится. При $q \geqslant 1$ — расходится.

3. Интегральный признак Коши. Пусть функция $f(x)$ непрерывна, неотрицательна и не возрастает всюду при $x \geqslant 1$. Тогда ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} f(n) = f(1) + f(2) + \ldots + f(n) + \ldots$$

сходится или расходится одновременно с несобственным интегралом

$$\int\limits_{1}^{+\infty} f(x)\, dx. \tag{9.2}$$

В этом интеграле в качестве нижнего предела может быть взято любое фиксированное число $m \geqslant 1$. Если ряд сходится, то его остаток $R_n = a_{n+1} + a_{n+2} + \ldots$ удовлетворяет неравенствам

$$\int\limits_{n+1}^{+\infty} f(x)\, dx < R_n < \int\limits_{n}^{+\infty} f(x)\, dx.$$

Геометрический смысл интегрального признака Коши. Если интеграл (9.2) расходится, т. е. площадь бесконечной криволинейной трапеции, ограниченной линиями $x = 1$, $y = 0$, $y = f(x)$ при $x \geqslant 1$, бесконечна, то бесконечная ступенчатая фигура, образованная из прямоугольников с высотами $f(n)$ ($n = 1, 2, \ldots$) и единичной ширины, имеет площадь, которая бесконечна, так как интеграл (9.2) расходится. В случае сходимости интеграла (9.2) площадь криволинейной трапеции конечна, следовательно, конечной будет и площадь $f(2) + f(3) + \ldots$ вписанной ступенчатой фигуры, что означает сходимость ряда $a_2 + a_3 + \ldots$, следовательно и ряда $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$.

Пример 7.

1) Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^{\alpha}}$, где α — любое фиксированное число.

<u>*Решение*</u>. Интеграл $\int\limits_1^b \dfrac{dx}{x^{\alpha}}$ равен: а) $\left.\dfrac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^b = \dfrac{b^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}$ при $\alpha \neq 1$, б) $\ln x\big|_1^b = \ln b$ при $\alpha = 1$. При $\alpha > 1$ несобственный интеграл сходится, т. е. существует конечный предел

$$\int\limits_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{\alpha}} = \lim_{b\to+\infty} \int\limits_1^b \frac{dx}{x^{\alpha}} = \frac{1}{\alpha - 1}.$$

При $\alpha \leqslant 1$ соответствующие пределы бесконечны, т. е. интеграл расходится. Следовательно, при $\alpha > 1$ ряд сходится, при $\alpha \leqslant 1$ расходится. ▷

2) Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-\ln a}$ $(a > 0)$.

<u>*Решение*</u>. Интеграл $\int\limits_1^{+\infty} \dfrac{dx}{x^{\ln a}}$ равен: а) $\left.\dfrac{x^{-\ln a+1}}{-\ln a+1}\right|_1^{+\infty}$ при $\ln a \neq 1$, б) $\ln x\big|_1^{\infty}$ при $\ln a = 1$. Интеграл и ряд сходятся при $\ln a > 1$, т. е. при $a > e$, и расходится при $a \leqslant e$. ▷

3) Исследовать сходимость ряда $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^{\alpha} n}$, где α — произвольное число.

<u>*Решение*</u>. Интеграл $\int\limits_2^{+\infty} \dfrac{dx}{x \ln^{\alpha} x}$ равен а) $\left.\dfrac{1}{(1-\alpha)\ln^{\alpha-1} x}\right|_2^{+\infty}$ при $\alpha \neq 1$; б) $\ln \ln x\big|_2^{+\infty}$ при $\alpha = 1$. Интеграл и ряд сходятся при $\alpha > 1$ и расходятся при $\alpha \leqslant 1$. ▷

9.3. Знакопеременные ряды. Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Ряд, члены которого имеют разные знаки, называют **знакопеременным**. Знакопеременный ряд называется **знакочередующимся**, если его члены поочередно положительны и отрицательны:

$$b_1 - b_2 + b_3 - \ldots + (-1)^{n-1} b_n + (-1)^n b_{n+1} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} b_n, \qquad (9.3)$$

где все $b_n \geqslant 0$. Если первый член ряда отрицательный, то умножением на (-1) ряд приводят к виду (9.3).

9.3.1. Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов

Знакочередующийся ряд (9.3) сходится, если:

$$1)\ b_n \geqslant b_{n+1} \quad (n = 1, 2, \ldots), \qquad 2)\ \lim_{n\to\infty} b_n = 0.$$

Частичную сумму сходящегося ряда (9.3) четного порядка S_{2n} можно записать двумя способами:

$$S_{2n} = (b_1 - b_2) + (b_3 - b_4) + \ldots + (b_{2n-1} - b_{2n}),$$
$$S_{2n} = b_1 - (b_2 - b_3) - (b_4 - b_5) - \ldots - (b_{2n-2} - b_{2n-1}) - b_{2n}.$$

Отсюда следует:

$$S \leqslant b_1,\ S - S_n = R_n = (-1)^n b_{n+1} + (-1)^{n+1} b_{n+2} + \ldots \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где S — сумма ряда (9.3), R_n — сумма остатка этого ряда, имеющая оценку $R_n = (-1)^n \theta_n b_{n+1}$ $(0 \leqslant \theta_n \leqslant 1)$. Т. е. R_n имеет знак первого отбрасываемого члена $(-1)^n b_{n+1}$ и не превышает его по абсолютной величине. При n — четном $R_n = b_{n+1} - b_{n+2} + \ldots$ $(0 < R_n < b_{n+1})$. При n — нечетном $R_n = -b_{n+1} + b_{n+2} - \ldots$ или $-R_n = b_{n+1} - b_{n+2} + \ldots$ $(0 < -R_n < b_{n+1})$.

Пример 8. Знакочередующийся ряд $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{2n} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{2n}$ сходится, так как 1) $\frac{1}{2} > \frac{1}{4} > \frac{1}{6} \ldots$, 2) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n} = 0$. Найдем количество членов n данного ряда, необходимое для того, чтобы его n-я частичная сумма имела точность до 0,1. Имеем $|R_n| \leqslant b_{n+1} = \frac{1}{2(n+1)} = 0{,}1$. Отсюда находим: $2(n+1) = 10$, $n = 4$. Следовательно, $S_4 = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} = 0{,}3$ с точностью до 0,1, т. е. $S \approx 0{,}3$.

9.3.2. Абсолютно и условно сходящиеся ряды

Ряд 1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **абсолютно сходящимся**, если сходится ряд 2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, составленный из абсолютных величин $|a_n|$ членов исходного ряда. Из сходимости ряда 2) следует сходимость ряда 1), т. е., если какой-либо ряд сходится абсолютно, то он сходится в обычном смысле. Если ряд 2) не сходится, то ряд 1) может либо сходиться, либо расходиться в обычном смысле.

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется **условно (не абсолютно) сходящимся**, если этот ряд сходится в обычном смысле, а ряд 2) из абсолютных величин его членов расходится. Сходящиеся ряды с неотрицательными членами, очевидно, сходятся абсолютно.

Ряды, которые сходятся при любой перестановке их членов и притом к одной и той же сумме, называют иногда **безусловно сходящимися**. Для того чтобы ряд был абсолютно сходящимся, необходимо и достаточно, чтобы он был безусловно сходящимся.

Пример 9.

1) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1}}{n^\alpha} = 1 - \dfrac{1}{2^\alpha} + \dfrac{1}{3^\alpha} - \dfrac{1}{4^\alpha} + \ldots$ при $\alpha > 1$ сходится абсолютно, так как ряд, составленный из абсолютных величин его членов, сходится (см. пример 7, **1**). При $0 < \alpha \leqslant 1$ данный ряд сходится условно по признаку Лейбница, а ряд, составленный из абсолютных величин его членов, расходится. При $\alpha = 1$, согласно формуле Маклорена, для функции

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_n(x),$$

где $|R_n(x)| < \dfrac{1}{n+1}$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$, при $x = 1$ находим

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n} + R_n(1).$$

Следовательно, $|S_n - \ln 2| < \dfrac{1}{n+1}$, где S_n — частичная сумма ряда $1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} - \ldots$. Таким образом, $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \ln 2$.

2) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{a+n}$, где a — любое число, не являющееся целым отрицательным, сходится условно по признаку Лейбница, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{|a+n|}$ расходится по интегральному признаку Коши.

Свойства абсолютно и условно сходящихся рядов.

1. Абсолютно сходящийся ряд после любой перестановки его членов остается абсолютно сходящимся и имеющим прежнюю сумму (**теорема Коши**).
2. Если ряд сходится условно, то можно так переставить его члены, что получится другой ряд, сходящийся к любому наперед заданному числу S' $(-\infty < S' < +\infty)$, либо расходящийся (**теорема Римана**).
3. Во всяком сходящемся ряде можно без изменения порядка членов объединять их в любые группы, так что ряд, составленный из этих групп, сходится и имеет ту же сумму, что и исходный ряд. Раскрытие скобок в ряде допускается только в том случае, если в результате этого получается сходящийся ряд.

Пример 10. Ряд $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}+\ldots$ сходится, так как его можно записать в виде ряда $\left(1-\dfrac{1}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}\right)+\ldots$, при раскрытии скобок в котором получается сходящийся ряд $1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}-1-\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}+\ldots$, поскольку последовательность его частичных сумм $S_1=1$, $S_2=\dfrac{1}{2}$, $S_3=1$, $S_4=\dfrac{2}{3}$, $S_5=1$, $S_6=\dfrac{3}{4}$, … стремится к 1. Сумма исходного ряда также равна 1.

Арифметические действия над сходящимися рядами.

1. Если ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся к суммам S_a и S_b соответственно, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n)$ сходится к сумме $S_a \pm S_b$.
2. Если ряды а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ сходятся абсолютно к суммам S_a и S_b соответственно, то ряд, членами которого являются все произведения вида $a_i b_j$ $(i = 1, 2, \ldots;\ j = 1, 2, \ldots)$, расположенные в любом порядке, также сходится абсолютно и имеет сумму $S_a \cdot S_b$. Если только один из двух рядов а) и б) сходится абсолютно (другой при этом может сходиться только условно), то их произведение, записанное в специальном виде

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n = c_1 + c_2 + \ldots + c_n + \ldots \equiv$$
$$\equiv a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + \ldots + (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \ldots + a_n b_1) + \ldots, \quad (9.4)$$

является сходящимся (в общем случае не абсолютно) рядом, а его сумма равна $S_a \cdot S_b$.

Если оба ряда а) и б) сходятся условно, то ряд, составленный по правилу (9.4), может оказаться расходящимся. В случае сходимости он имеет сумму $S_a \cdot S_b$.

Пример 11. Ряд $S(x) = 1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^n}{n!} + \ldots$ сходится абсолютно при любом значении x по признаку Даламбера, так как $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} : \dfrac{|x|^n}{n!}\right] = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{|x|}{n+1} = 0 < 1$. Для любых двух чисел x и y имеем по формуле (9.4):

$$S(x)S(y) = \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \ldots\right)\left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \ldots\right) =$$

$$= 1 + (x+y) + \frac{1}{2!}(x+y)^2 + \frac{1}{3!}(x+y)^3 + \ldots = S(x+y).$$

Признаки сходимости произвольных знакопеременных рядов.

1. Признак Абеля. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится, если выполнены два условия: а) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, б) последовательность $\{b_n\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ монотонна и ограничена.

2. Признак Дирихле. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ сходится, если: а) последовательность частичных сумм $A_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ ограничена, т. е. $|A_n| < M$ для всех n, б) последовательность $\{b_n\}$ является невозрастающей и бесконечно малой, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$.

Примечание. Признак Лейбница является частным случаем признака Дирихле при $a_n = (-1)^{n-1}$ и $b_n \geqslant b_{n+1}$, $b_n \to 0$. При этом $|A_n| \leqslant 1$.

Пример 12. Исследуем сходимость ряда $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \ldots$. Пусть $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_3 = 1$, $a_4 = -1$, $a_5 = -1$, $a_6 = -1$, $a_7 = 1$, $a_8 = 1$, $a_9 = 1$, $\ldots$; $b_n = \dfrac{1}{n}$. Тогда исходный ряд запишется в виде $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ имеет ограниченную последовательность частичных сумм: $A_1 = a_1 = 1$, $A_2 = a_1 + a_2 = 2$, $A_3 = 3$, $A_4 = 2$, $A_5 = 1$, $A_6 = 0$, $A_7 = 1$, $A_8 = 2$, $A_9 = 3$, $\ldots$, где все $A_n \leqslant M = 3$. Последовательность $\{b_n\}$ не возрастает и стремится к нулю. Следовательно, исходный ряд сходится (не абсолютно).

Суммы некоторых рядов

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{6} = 1{,}644934.$$

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \ldots = 1{,}202057.$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \ldots = \frac{\pi^4}{90} = 1{,}082323.$$

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{8} = 1{,}233701.$$

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \ln 2 = 0{,}693147.$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \ldots = \frac{\pi^2}{12} = 0{,}822467.$$

9.4. Бесконечные произведения

1. Пусть дана бесконечная числовая последовательность $b_1, b_2, \ldots, b_i, \ldots$. Формальное выражение

$$b_1 \cdot b_2 \cdots b_i \cdots = \prod_{i=1}^{\infty} b_i \tag{9.5}$$

называется **бесконечным произведением**. Числа b_i называются его **членами** (или **элементами**). Произведение первых n членов бесконечного произведения (9.5) называется его n-м **частичным произведением**

$$P_n = b_1 b_2 \cdots b_n = \prod_{i=1}^{n} b_i.$$

Частичные произведения образуют бесконечную последовательность $\{P_n\}$:

$$P_1 = b_1, \quad P_2 = b_1 b_2, \quad \ldots, \quad P_n = b_1 b_2 \cdots b_n, \quad \ldots .$$

Если существует **конечный** и **отличный от нуля** предел

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{i=1}^{n} b_i = \lim_{n\to\infty} P_n = P, \tag{9.6}$$

то бесконечное произведение (9.5) называют **сходящимся**, а число P называют **значением бесконечного произведения** и пишут

$$P = \prod_{i=1}^{\infty} b_i.$$

Если предел (9.6) не существует, то произведение (9.5) называют **неопределенно расходящимся**. Если $b_i \neq 0$ для всех номеров i и предел (9.6) равен 0, или $+\infty$, или $-\infty$, то бесконечное произведение (9.5) называется **расходящимся** соответственно к 0, или к $+\infty$, или к $-\infty$. Если имеются $b_i = 0$, то говорят, что произведение (9.5) **сходится к нулю**. Далее везде будем предполагать, что все $b_i \neq 0$.

Каждой числовой последовательности $\{P_i\}$, все элементы которой отличны от нуля, соответствует бесконечное произведение с элементами $b_i = \dfrac{P_i}{P_{i-1}}$ при $i > 1$ и $b_1 = P_1$, для которого числа P_i $(i = 1, 2, \ldots)$ являются частичными произведениями.

Необходимое условие сходимости бесконечного произведения (9.5):

$$\lim_{i\to\infty} b_i = \lim_{i\to\infty} \frac{P_i}{P_{i-1}} = 1,$$

так как $\lim\limits_{i\to\infty} P_i = \lim\limits_{i\to\infty} P_{i-1} = P \neq 0$.

Следовательно, если бесконечное произведение (9.5) сходится, то его члены, по крайней мере, начиная с некоторого номера m, положительны. Поскольку добавление или удаление конечного числа членов, не равных нулю, не влияет на сходимость бесконечного произведения, то не ограничивая общности, можно считать, что все b_i $(i = 1, 2, \ldots)$ положительны.

Пример 13.

1) Исследуем сходимость бесконечного произведения

$$\prod_{k=2}^{\infty}\left[1 - \frac{2}{k(k+1)}\right] = \prod_{k=2}^{\infty} \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)} = \prod_{k=2}^{\infty}\left(\frac{k-1}{k}\right)\left(\frac{k+2}{k+1}\right).$$

Имеем:

$$P_n = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\cdot\frac{6}{5}\right)\cdots\left(\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{n+2}{n+1}\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n-1}{n}\right)\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}\cdots\frac{n+2}{n+1}\right) = \frac{1}{n}\cdot\frac{n+2}{3}.$$

Бесконечное произведение сходится к значению

$$P = \lim_{n\to\infty} P_n = \lim_{n\to\infty} \frac{n+2}{3n} = \frac{1}{3}.$$

2) Бесконечное произведение $\prod\limits_{k=1}^{\infty} \operatorname{ch}\left(\dfrac{x}{2^k}\right)$ при любом x сходится к значению $\dfrac{\operatorname{sh} x}{x}$.

Действительно, умножая обе части равенства

$$P_n = \operatorname{ch}\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^2}\right)\cdots\operatorname{ch}\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

на $\operatorname{sh}(x/2^n)$ и применяя n раз формулу $2\operatorname{sh} t\cdot\operatorname{ch} t=\operatorname{sh} 2t$, получим

$$P_n \operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)=\frac{1}{2^n}\operatorname{sh} x=\frac{\operatorname{sh} x}{x}\cdot\frac{x}{2^n}.$$

Отсюда следует

$$\lim_{n\to\infty} P_n=\frac{\operatorname{sh} x}{x}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x}{2^n}:\operatorname{sh}\left(\frac{x}{2^n}\right)\right]=\frac{\operatorname{sh} x}{x},$$

так как предел выражения в квадратных скобках равен 1.

2. Для того чтобы бесконечное произведение (9.5) с положительными членами сходилось, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\ln b_i.$$

Если этот ряд сходится к сумме S, то бесконечное произведение (9.5) сходится к значению $P=e^S$.

Если $b_i=1+a_i$ $(i=1,2,\ldots)$ и все a_i имеют один и тот же знак (возможно, начиная с некоторого номера), то для сходимости бесконечного произведения (9.5) необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$. Условие $\lim\limits_{i\to\infty} a_i=0$ является необходимым для сходимости ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ и для сходимости произведения

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+a_i)=(1+a_1)(1+a_2)\cdots(1+a_i)\cdots. \tag{9.7}$$

В общем случае, если a_i принимают как положительные, так и отрицательные значения и ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, то бесконечное произведение (9.7) сходится или расходится одновременно с рядом $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^2$.

Пример 14.

1) Бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=(1+1)\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdots=\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\cdots,$$

в силу расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, расходится, причем к $+\infty$, так как $\lim\limits_{n\to\infty} P_n=\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)=+\infty$.

2) Произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\cdots=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{n}{n+1}\cdots,$$

в силу расходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n+1}\right)$, расходится, причем к 0, так как $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n+1} = 0$ и $b_n \neq 0$ для любого n.

3) Бесконечное произведение $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$ сходится при $\alpha > 1$, так как ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ при этом сходится.

3. Бесконечное произведение (9.5) или (9.7) называется **абсолютно** (соответственно, **условно, не абсолютно**) сходящимся в том и только в том случае, когда абсолютно (соответственно, условно), сходится ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\ln b_i = \sum_{i=1}^{\infty}\ln(1+a_i).$$

Бесконечное произведение $\prod\limits_{i=1}^{\infty}(1+a_i)$ сходится абсолютно тогда и только тогда, когда абсолютно сходится $\sum\limits_{i=1}^{\infty}a_i$.

Из абсолютной сходимости бесконечного произведения следует его сходимость в обычном смысле.

В абсолютно (но не в условно) сходящемся бесконечном произведении произвольная перестановка сомножителей местами не влияет на сходимость и на значение произведения.

Пример 15. Исследуем на абсолютную и условную сходимость бесконечное произведение

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left[1+\frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}\right].$$

Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ с членами $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^\alpha}$, а также данное бесконечное произведение сходятся абсолютно при $\alpha > 1$ (см. пример 7, **1**). Знакочередующийся ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ при $0 < \alpha \leqslant 1$ сходится условно. Ряд с членами $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2 = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2\alpha}}$ (см. п. 2) сходится при $2\alpha > 1$, т. е. $\alpha > 1/2$. Следовательно, данное бесконечное произведение сходится условно при $1/2 < \alpha \leqslant 1$.

4. Некоторые формулы. При $-\infty < x < +\infty$ справедливы разложения

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{n^2\pi^2}\right); \quad \cos x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x}{(2n-1)^2\pi^2}\right).$$

Из первого разложения при $x = \pi/2$ следует **формула Валлиса**

$$\frac{\pi}{2} = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)^2}{(2n-1)(2n+1)}.$$

9.5. Функциональные последовательности и ряды

9.5.1. Функциональные последовательности

Если каждому числу n из последовательности натуральных чисел $(1, 2, 3, \ldots)$ по определенному правилу ставится в соответствие некоторая функция $f_n(x)$ одного аргумента, определенная в интервале $a' < x < b'$, то множество занумерованных функций одного и того же аргумента $\{f_n(x)\}$ или $f_1(x)$, $f_2(x), \ldots, f_n(x), \ldots$, определенных в $(a'; b')$, называют **функциональной последовательностью.** Функции $f_n(x)$ называют **членами (элементами)** данной последовательности, а интервал $(a'; b')$, на котором определены эти функции, называют **областью определения** последовательности.

Примечание. В общем случае рассматривают функции $f_n(x)$, определенные на некотором множестве $\{x\}$ точек $x \equiv \{x_1, \ldots, x_m\}$ векторного пространства E^m.

Придавая переменной x какое-либо числовое значение x_0 из области определения $(a'; b')$ функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, получим числовую последовательность $\{f_n(x_0)\}$. Если эта числовая последовательность сходится (расходится), то говорят, что данная функциональная последовательность сходится (расходится) в точке x_0. Множество всех точек x_0, в которых данная функциональная последовательность сходится, называется ее **областью сходимости**, которая может либо совпадать с областью определения, либо являться ее частью, либо быть пустым множеством. Далее предполагается, что область сходимости является некоторым интервалом $(a; b)$. Функция $f(x)$, определяемая равенством $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ для каждого x из области сходимости $(a; b)$, называется **предельной функцией** последовательности $\{f_n(x)\}$.

Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в интервале $(a; b)$ к предельной функции $f(x)$. Говорят, что эта последовательность **сходится равномерно** к функции $f(x)$ в $(a; b)$, если для любого $\varepsilon > 0$ можно указать число $N = N(\varepsilon)$, не зависящее от x и такое, что при $n \geqslant N(\varepsilon)$ для всех x из $(a; b)$ выполняется неравенство

$$\left|f(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon. \tag{9.8}$$

При этом иногда используется обозначение $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$. Если при заданном ε неравенство (9.8) не может быть удовлетворено одновременно для всех x из $(a; b)$ ни при каком значении N, то говорят, что последовательность сходится неравномерно к $f(x)$ в $(a; b)$.

Критерий Коши. Для равномерной сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ в интервале $(a; b)$ к некоторой предельной функции необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало не зависящее от x число $N = N(\varepsilon)$ такое, что при $n \geqslant N$ и при любом натуральном $m \geqslant 1$ выполнялось неравенство

$$\left|f_{m+n}(x) - f_n(x)\right| < \varepsilon$$

одновременно для всех x из $(a; b)$.

Пример 16. Исследовать последовательности на равномерную сходимость:

1) Последовательность $f_n(x) = \dfrac{\sin nx}{n}$ при $-\infty < x < +\infty$ сходится к предельной функции $f(x) \equiv 0$, причем равномерно, так как, например, для $\varepsilon = 0{,}01$ имеем неравенства
$$\frac{|\sin nx|}{n} \leqslant \frac{1}{n} < \varepsilon,$$
которые выполняются при $n > N = 1/\varepsilon = 100$ для всех значений x одновременно.
2) Последовательность функций $f_n(x) = \sin(x/n)$ при $-\infty < x < +\infty$ сходится к функции $f(x) \equiv 0$ **неравномерно**. Действительно, при любом фиксированном x имеем $f_n(x) \to 0$ при $n \to \infty$. Однако для $\varepsilon < 1$ неравенство $|\sin(x/n)| < \varepsilon$ не может быть выполнено одновременно для всех x ни при каком значении N, так как найдутся такие x, при которых синус принимает значения ± 1.

9.5.2. Функциональные ряды

Формальное выражение

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots, \tag{9.9}$$

составленное из членов функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$, называется **функциональным рядом**. Сумма первых n членов ряда (9.9) называется n-й **частичной суммой** этого ряда

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Интервал $(a; b)$, в котором последовательность $\{S_n(x)\}$ сходится, называется **областью сходимости ряда** (9.9). Предельная функция

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f_i(x) = f_1(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots,$$

определенная в $(a; b)$, если она существует, называется **суммой ряда** (9.9), который при этом называется **сходящимся**.

Функция

$$R_n(x) = S(x) - S_n(x) = f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \ldots \equiv \sum_{i=n+1}^{\infty} f_n(x),$$

определенная для сходящегося ряда (9.9), имеющего сумму $S(x)$, называется **остатком ряда**. Функциональный ряд (9.9) называется **равномерно сходящимся** в интервале $(a; b)$ к своей сумме $S(x)$, если последовательность его частичных сумм $\{S_n(x)\}$ сходится к предельной функции $S(x)$ равномерно в $(a; b)$.

Критерий Коши. Для равномерной сходимости ряда (9.9) в интервале $(a; b)$ необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ существовало число $N = N(\varepsilon)$ такое, что при $n > N$ и любом натуральном m выполнялось неравенство

$$\left|S_{n+m}(x) - S_n(x)\right| < \varepsilon$$

одновременно для всех x из $(a; b)$.

Признаки равномерной сходимости

1. Признак Вейерштрасса. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ сходится абсолютно и равномерно в интервале $(a; b)$, если существует сходящийся числовой ряд $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ такой, что для всех x из $(a; b)$ выполняются неравенства $|f_n(x)| \leqslant a_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$. При этом говорят, что функциональный ряд **мажорируется** числовым рядом.

2. Признак Абеля. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно в интервале $(a; b)$, если: а) ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ сходится равномерно в $(a; b)$; б) последовательность $\{b_n(x)\}$ является монотонной и ограниченной для каждого x из $(a; b)$.

3. Признак Дирихле. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ сходится равномерно в $(a; b)$, если: а) частичные суммы $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i(x)$ для всех n ограничены в $(a; b)$ одним и тем же числом; б) последовательность $\{b_n(x)\}$ монотонна для каждого x и равномерно в $(a; b)$ сходится к нулю.

4. Признак Дини. Если все члены функционального ряда непрерывны и неотрицательны на отрезке $[a; b]$ и сумма ряда также непрерывна на $[a; b]$, то данный ряд сходится к своей сумме равномерно на $[a; b]$.

Пример 17.

1) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{x^2+n^2}$ сходится равномерно в промежутке $-\infty < x < +\infty$, так как мажорируется сходящимся числовым рядом с положительными элементами $a_n = \dfrac{1}{n^2}$ $\left(\dfrac{1}{x^2+n^2} \leqslant \dfrac{1}{n^2} \text{ для всех } x\right)$.

2) Ряд $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+\sin x}$ сходится равномерно на отрезке $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$, так как частичные суммы $\sum\limits_{n=2}^{n}(-1)^n$ для всех n ограничены (не превышают 1), а последовательность с элементами $b_n = \dfrac{1}{n+\sin x}$ для каждого x монотонна и, в силу неравенства $\dfrac{1}{n+\sin x} \leqslant \dfrac{1}{n-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$, равномерно сходится к нулю на указанном отрезке.

3) Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin nx}{n^\alpha}$ при $\alpha > 1$ сходится равномерно в промежутке $-\infty < x < +\infty$, так как мажорируется сходящимся при $\alpha > 1$ числовым рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^\alpha}$.

Свойства функциональных рядов

1. Сумма равномерно сходящегося ряда непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций является непрерывной на $[a; b]$ функцией. Если x_0 — точка на $[a; b]$, то

$$\lim_{x\to x_0} S(x) = \lim_{x\to x_0}\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\lim_{x\to x_0} f_n(x)\right],$$

т. е. к пределу можно переходить почленно.

2. Если члены $f_n(x)$ сходящегося к своей сумме $S(x)$ в интервале $(a; b)$ ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ имеют непрерывные производные $f_n'(x)$ и ряд из производных

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ сходится равномерно в $(a; b)$, то исходный ряд сходится в $(a; b)$ равномерно к сумме $S(x)$, которая имеет в $(a; b)$ непрерывную производную, и

$$\frac{dS(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right] = \sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x),$$

т. е. ряд можно дифференцировать почленно.

3. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ с непрерывными на отрезке $[a; b]$ членами $f_n(x)$ сходится к своей сумме $S(x)$ равномерно на $[a; b]$, то ряд из интегралов от функций $f_n(x)$ от a до $x \leqslant b$

$$\int_a^x f_1(x)\,dx + \int_a^x f_2(x)\,dx + \ldots + \int_a^x f_n(x)\,dx + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_a^x f_n(x)\,dx\right]$$

сходится равномерно на $[a; b]$ к сумме $\int\limits_a^x S(x)\,dx$, т. е. ряд можно интегрировать почленно. Если верхний предел интегрирования $x = b$, то ряд из интегралов становится числовым рядом.

Пример 18. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n = x\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ на отрезке $0 \leqslant x \leqslant q < 1$ сходится равномерно к сумме $S(x) = \dfrac{x}{1-x}$, так как мажорируется сходящимся при $0 \leqslant q < 1$ числовым рядом $\sum\limits_{n=1}^{\infty} q^n$ (см. пример 1, 3). Ряд из производных $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} + \ldots$ также сходится равномерно на $[0; q]$, так как мажорируется сходящимся по признаку Даламбера числовым рядом $1 + 2q + 3q^2 + \ldots + nq^{n-1} + \ldots$, поскольку $\lim\limits_{n\to\infty}\left[(n+1)q^n : nq^{n-1}\right] = q < 1$.

Следовательно, исходный функциональный ряд можно:

1) почленно дифференцировать:

$$S'(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1},$$

2) почленно интегрировать от 0 до $x \leqslant q$:

$$\int_0^x S(x)\,dx = \int_0^x \frac{x\,dx}{1-x} = -x - \ln(1-x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}.$$

9.6. Степенные ряды

9.6.1. Общие понятия

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\ldots+a_n(x-x_0)^n+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n, \quad (9.10)$$

где $a_0, a_1, a_2, \ldots$ — действительные числа, называемые **коэффициентами** ряда (9.10); x_0 — число, называемое **центром** этого ряда. Если $x_0 = 0$, то ряд (9.10) принимает вид

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \equiv a_0 + \sum_{i=1}^{\infty} a_ix^i. \quad (9.11)$$

Заменой переменной $y = x - x_0$ ряд (9.10) преобразуется в ряд вида (9.11) с центром $x_0 = 0$. Всякий степенной ряд (9.11) всегда сходится в точке $x = 0$. Относительно сходимости ряда (9.11) в какой-либо точке $x \neq 0$ могут быть три следующих случая:

1) Степенной ряд расходится во всех точках, кроме $x = 0$. Например, ряд

$$x + 2^2x^2 + 3^3x^3 + \ldots + n^nx^n + \ldots$$

расходится при любом $x \neq 0$, так как общий член ряда не стремится к нулю при $n \to \infty$.

2) Степенной ряд сходится во всех точках $-\infty < x < +\infty$. Например, ряд

$$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \ldots$$

сходится при любом x по признаку Даламбера, так как

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} : \frac{x^n}{n!}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{|x|}{n+1} = 0 < 1.$$

3) Степенной ряд сходится в одних точках $x \neq 0$ и расходится в других. Например, ряд

$$1 + \frac{x}{1^\alpha} + \frac{x^2}{2^\alpha} + \frac{x^3}{3^\alpha} + \ldots + \frac{x^n}{n^\alpha} + \ldots,$$

где $\alpha > 1$, сходится при $|x| \leqslant 1$ и расходится при $|x| > 1$, так как по признаку Даламбера имеем:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{(n+1)^\alpha} : \frac{x^n}{n^\alpha}\right| = \lim_{n\to\infty}|x|\left(\frac{n}{1+n}\right)^\alpha = |x|$$

(см. также пример 7, **1**).

Интервал сходимости. Областью сходимости степенного ряда (9.11) является некоторый интервал $(-R; R)$ (или $|x| < R$), симметричный относительно точки $x = 0$. Число $R > 0$ называется **радиусом сходимости** ряда. **В интервале сходимости** $(-R; R)$ ряд сходится абсолютно. Вне интервала, т. е. при $|x| > R$, ряд расходится. Если ряд сходится при всех x, то пишут $R = \infty$. В случае сходимости ряда только в точке $x = 0$ имеем $R = 0$. В точках $x = -R$ и $x = R$ (т. е. в концах интервала сходимости) ряд может либо сходиться, либо расходиться.

Радиус сходимости R ряда (9.11) находится по **формуле Коши—Адамара**

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \equiv L,$$

в которой стоит (конечный или бесконечный) верхний предел $\overline{\lim}$, всегда существующий по определению (см. 4.2.7). При этом $R = \infty$, если $L = 0$, и $R = 0$, если $L = \infty$. Если существует обычный предел $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, то он равен верхнему пределу L.

Радиус сходимости ряда (9.11) можно найти также при помощи признака Даламбера по формуле $R = 1/q$, где $q = \lim\limits_{n\to\infty} |a_{n+1} : a_n|$, если этот предел (конечный или бесконечный) существует. Здесь $R = \infty$ при $q = 0$ и $R = 0$ при $q = \infty$. Если существует конечный или бесконечный предел q, то он равен верхнему пределу L.

Интервал сходимости степенного ряда (9.10) симметричен относительно точки x_0 и имеет вид $x_0 - R < x < x_0 + R$ (или $|x - x_0| < R$). В концах $x_0 - R$ и $x_0 + R$ этого интервал ряд либо сходится, либо расходится. Ряд может сходиться в одном их этих концов и расходиться в другом. Радиус сходимости R находится так же, как и для ряда (9.11).

Если ряд (9.11) содержит бесконечное множество нулевых членов, как например $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$, то отношение $|a_{n+1} : a_n|$ не имеет предела и радиус сходимости не может быть найден по признаку Даламбера, даже если исключить нулевые члены и заново перенумеровать оставшиеся. В таких случаях обычно применяют формулу Коши—Адамара.

Пример 19.

1) Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$ имеет радиус сходимости $R = 1$, так как $q = \lim\limits_{n\to\infty} |1 : 1| = 1$. В обеих граничных точках $x = -1$ и $x = +1$ интервала сходимости $(-1; 1)$ ряд расходится. Ряд сходится в интервале $(-1; 1)$.
2) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2} x^n$ $\left(a_n = \frac{2^n}{n^2}\right)$ имеем $q = \lim\limits_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1}}{(n+1)^2} : \frac{2^n}{n^2} \right| = \lim\limits_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = 2$, $R = \frac{1}{q} = \frac{1}{2}$. В граничной точке $x = \frac{1}{2}$ интервала сходимости имеем сходящийся

числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (см. пример 7, 1). В точке $x = -\frac{1}{2}$ получим сходящийся абсолютно числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$. Степенной ряд сходится на отрезке $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

3) Для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ находим $q = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\frac{1}{(n+1)!} : \frac{1}{n!}\right| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} = 0$, т. е. $R = \infty$. Ряд сходится при любом x.

4) Для ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n} x^n$ $(a > 0)$ имеем

$$L = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\sqrt[n]{n}} = a$$

(так как $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$), $R = \frac{1}{L} = \frac{1}{a}$. В граничной точке $x = \frac{1}{a}$ интервала сходимости $\left(-\frac{1}{a}; \frac{1}{a}\right)$ имеем расходящийся числовой ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. В точке $x = -\frac{1}{a}$ получим сходящийся условно по признаку Лейбница ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$. Степенной ряд сходится в промежутке $\left[-\frac{1}{a}; \frac{1}{a}\right)$.

5) Последовательность коэффициентов ряда $1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$ имеет вид $1; 0; -1; 0; 1; \ldots$. Взяв подпоследовательность $1; -1; 1; \ldots$, не содержащую нулевых коэффициентов, получим $L = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Следовательно, $R = 1/L = 1$. Если обозначить $x^2 = y$, то получим ряд $1 - y + y^2 - y^3 + \ldots$, уже не содержащий нулевых коэффициентов, для которого имеем $q = 1$, $R = 1/q = 1$.

9.6.2. Свойства степенных рядов

1. Теорема Абеля. Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ с интервалом сходимости $(-R; R)$, где R — радиус сходимости, сходится в граничной точке $x = R$, то его сумма $S(x)$ непрерывна в точке $x = R$ слева, т. е. $S(R) = \lim\limits_{x\to R-0} S(x)$.

2. Если степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится абсолютно или условно в какой-либо точке $x = r \neq 0$, то он сходится абсолютно и равномерно на всяком отрезке $[a; b]$, лежащем строго внутри отрезка $\left[-|r|; |r|\right]$, т. е. точки a и b не совпадают с точками $|r|$ и $-|r|$. Если степенной ряд расходится при $x = r$, то он расходится и при всех $|x| > |r|$.

3. Для любого числа r, удовлетворяющего неравенствам $0 < r < R$, где R — радиус сходимости, степенной ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ сходится равномерно на отрезке $[-r; r]$, т.е. при $|x| \leqslant r$. Сумма этого ряда является функцией, непрерывной на $[-r; r]$.

4. Сумма $S(x)$ степенного ряда в интервале его сходимости $(-R; R)$, т.е. $|x| < R$, является непрерывной функцией.

5. Если два ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ сходятся в одном том же интервале $(-R; R)$ и в каждой точке этого интервала их суммы равны, то $a_n = b_n$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ (**теорема единственности**).

6. Степенной ряд внутри его интервала сходимости можно дифференцировать почленно любое число раз, например, для первой производной имеем

$$\frac{dS(x)}{dx} = \frac{d}{dx}\left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1}.$$

Ряд из производных имеет тот же радиус сходимости R, что и исходный ряд. Если исходный ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ расходится (соответственно, сходится) в каком-либо конце интервала $(-R; R)$, то в этом же конце ряд из производных расходится (соответственно, может быль либо сходящимся, либо расходящимся).

Пример 20.

1) Производная ряда $1 + x + x^2 + x^3 + \ldots + x^n + \ldots = \dfrac{1}{1-x}$, сходящегося в интервале $(-1; 1)$, равна $1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1} = \dfrac{1}{(1-x)^2}$ (см. пример 21). Аналогично находятся последующие производные. Исходный ряд и все его производные сходятся в интервале $(-1; 1)$ и расходятся в его концах $x = -1$, $x = +1$.
2) Дифференцируя ряд
$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \quad (R = \infty),$$
получим
$$(\sin x)' = \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \quad (R = \infty).$$
3) Для ряда $\ln(1 - x) = -x - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^4}{4} - \ldots$ $(R = 1)$ производная при $|x| < 1$ равна
$$-\frac{1}{1-x} = -1 - x - x^2 - x^3 - \ldots .$$

В точке $x = 1$ исходный ряд и его производная расходятся. При $x = -1$ исходный ряд сходится по признаку Лейбница, однако ряд из производных расходится.

7. В интервале сходимости $|x - x_0| < R$ степенной ряд (9.10) (а также (9.11)) можно интегрировать почленно:

$$\int S(x)\,dx = \int \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n\right] dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}.$$

Полученный в результате интегрирования ряд сходится в том же интервале, что и исходный ряд. В частности, интегрируя почленно от 0 до x, где $|x| < R$, сходящийся в промежутке $(-R; R)$ ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, получим ряд из интегралов

$$\int_0^x S(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1},$$

сходящийся в интервале $(-R; R)$. Если исходный ряд сходится (расходится) в каком-либо конце интервала сходимости, то в этом же конце ряд из интегралов сходится (соответственно, может быть либо сходящимся, либо расходящимся).

Пример 21. Найдем сумму ряда $x + 2x^2 + 3x^3 + \ldots + nx^n + \ldots$.

Решение. Радиус его сходимости $R = 1$, так как $q = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{n} = 1$. Запишем ряд в виде $x(1 + 2x + 3x^2 + \ldots) \equiv x \cdot S(x)$. Интегрируя ряд $S(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \ldots$, получим (см. пример 1, 3)

$$\int_0^x S(x)\,dx = x + x^2 + x^3 + \ldots = x(1 + x + x^2 + \ldots) = \frac{x}{1-x}.$$

Отсюда

$$S(x) = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

Следовательно, сумма исходного ряда равна $\dfrac{x}{(1-x)^2}$ при $|x| < 1$. ▷

8. Действия со степенными рядами. Пусть ряды

$$S_a(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{и} \quad S_b(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

имеют радиусы сходимости R_a и R_b соответственно. Пусть R — наименьшее из R_a и R_b, если же они равны, то R — их общее значение. В любой точке x общего интервала сходимости $(-R; R)$ справедливы равенства:

1) $S_a(x) \pm S_b(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(a_n \pm b_n)x^n$;

2) $S_a(x) \cdot S_b(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, где $c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \ldots + a_nb_0$.

Деление рядов проводится по правилу (если $b_0 = S_b(0) \neq 0$):

$$\frac{S_a(x)}{S_b(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots} = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots = S_c(x),$$

где коэффициенты $c_0, c_1, c_2, \ldots$ находятся из соотношения

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots = (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \ldots)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots)$$

путем приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях x в обеих частях равенства. Затем ищется радиус сходимости ряда $c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots$, так как он может быть меньше, чем R.

Подстановка ряда в ряд. Если функция $y = g(x)$ является суммой степенного ряда $g(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ и $f(y) = b_0 + b_1y + b_2y^2 + \ldots$, то сложная функция $F(x) = f(g(x))$ также является суммой некоторого степенного ряда

$$F(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots,$$

коэффициенты которого находятся подстановкой ряда $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots$ в ряд

$$f(y) = b_0 + b_1y + b_2y^2 + \ldots$$

и приведением подобных членов. Затем ищется радиус сходимости полученного ряда.

Пример 22. Даны два ряда, сходящихся в интервале $(-1; 1)$ (см. пример 1,3):

1) $\dfrac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots$,

2) $\dfrac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots$.

В результате действий с этими рядами, получим:

а) (Сумма рядов) $\dfrac{1}{1+x^2} + \dfrac{1}{1-x^2} = 2 + 2x^4 + 2x^8 + \ldots = \dfrac{2}{1-x^4}$.

б) (Разность рядов) $\dfrac{1}{1-x^2} - \dfrac{1}{1+x^2} = 2x^2 + 2x^6 + 2x^8 + \ldots = \dfrac{2x^2}{1-x^4}$.

в) Умножение рядов удобно проводить путем умножения членов первого ряда последовательно на члены второго ряда и сложением «столбиком» слагаемых с одинаковыми степенями x:

$$
\begin{array}{rl}
 & 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots \\
\times & \underline{1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots} \\
 & 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots \\
 & \quad x^2 - x^4 + x^6 - x^8 + \ldots \\
 & \qquad x^4 - x^6 + x^8 - \ldots \\
+ & \qquad\quad x^6 - x^8 + \ldots \\
 & \qquad\qquad x^8 - \ldots \\
 & \qquad\qquad\quad \ldots \\
\hline
 & 1 + 0 \ + x^4 + 0 \ + x^8 + \ldots \equiv 1 + x^4 + x^8 + \ldots .
\end{array}
$$

Следовательно,

$$\frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^4 + x^8 + \ldots = \frac{1}{1-x^4}.$$

г) Деление рядов удобно проводить по правилу деления полиномов:

$$
\begin{array}{r|l}
1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots & 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots \\
\cline{2-2}
- \ \underline{1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \ldots} & 1 + 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 + \ldots \\
2x^2 + \ 0 \ + 2x^6 + \ 0 \ + \ldots & \\
- \ \underline{2x^2 - 2x^4 + 2x^6 - 2x^8 + \ldots} & \\
2x^4 + \ 0 \ + 2x^8 + \ldots & \\
- \ \underline{2x^4 - 2x^6 + 2x^8 - \ldots} & \\
2x^6 + \ 0 \ + \ldots & \\
- \ \underline{2x^6 - 2x^8 + \ldots} & \\
2x^8 + \ldots & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots &
\end{array}
$$

Следовательно,

$$\frac{1}{1-x^2} : \frac{1}{1+x^2} = 1 + 2x^2 + 2x^4 + 2x^6 + \ldots = \frac{1+x^2}{1-x^2}.$$

д) Интегрируя ряд 1), получим

$$\int\limits_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \qquad (|x| < 1).$$

Для всех рядов, полученных в этом примере, $R = 1$ по формуле Коши—Адамара (см. пример 19, 5). Ряд в п. д) сходится при $x = -1$ и $x = 1$ по признаку Лейбница, при этом

$$\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots .$$

Пример 23. Для нахождения разложений в ряд относительно x функций e^{-x^2}, e^{x^2}, $\sin x^2$, $\cos(x+x^2)$ и т. п. следует в известных разложениях функций e^x, $\cos x$, $\sin x$ заменить аргумент x соответственно на $(-x^2)$, x^2, $x+x^2$ и т. д. В частности,

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} \quad (R = \infty).$$

9.7. Ряд Тейлора. Разложение функций в степенные ряды

9.7.1. Ряд Тейлора

Говорят, что некоторая функция $f(x)$ может быть **разложена** в интервале $(x_0 - R;\ x_0 + R)$, где $R \neq 0$, **в степенной ряд** по степеням $x - x_0$, если существует степенной ряд, сходящийся к $f(x)$ всюду внутри указанного интервала, т. е.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots . \quad (9.12)$$

При этом функция $f(x)$ называется **аналитической** в точке x_0 и имеет в этой точке конечные производные всех порядков. Функция, аналитическая в точке x_0, аналитична и в достаточно малой окрестности этой точки. Если функция $f(x)$ может быть разложена в интервале $(x_0 - R;\ x_0 + R)$ в степенной ряд (9.12), то это разложение единственно и может быть записано в виде **ряда Тейлора** по степеням $x - x_0$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0) + \\ + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + \ldots . \quad (9.13)$$

Здесь $0! = 1$, $f^{(0)}(x_0) \equiv f(x_0)$.

Если $x_0 = 0$, то ряд Тейлора принимает вид

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots, \quad (9.14)$$

называемый **рядом Маклорена**.

Один и тот же степенной ряд может являться рядом Тейлора для разных функций. Например, степенной ряд, у которого все коэффициенты равны нулю, является рядом Тейлора как для функции $f(x) \equiv 0$ при $-\infty < x < +\infty$, так и для функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \end{cases}$$

у которой все производные равны нулю при $x = 0$ (по правилу Лопиталя), однако $f(x) \neq 0$ при $x \neq 0$. Такие функции, не являющиеся суммами своих рядов Тейлора, неаналитичны. Неаналитичными являются также функции: 1) у которых радиус сходимости ряда Тейлора равен нулю; 2) которые не имеют конечной производной какого-либо порядка в точке x_0, например, функция $\sqrt{x}$ неаналитична в точке $x_0 = 0$.

Если функции $f(x)$ и $g(x)$ аналитичны в точке x_0, то в этой точке функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $f(x)/g(x)$ (если $g(x_0) \neq 0$) также аналитичны. Сложная функция $F(x) = f(g(x))$ аналитична в точке x_0, если $g(x)$ аналитична в x_0, а $f(y)$ аналитична в точке $y_0 = g(x_0)$.

Достаточные условия аналитичности функции

1. Пусть функция $f(x)$ имеет в некотором интервале $(x_0 - R;\ x_0 + R)$, где $R \neq 0$, все производные и при этом в указанном интервале $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(x) = 0$, где $R_n(x)$ — остаточный член в форме Лагранжа (см. 5.7, **1**), тогда для функции $f(x)$ справедливо разложение (9.13) в ряд Тейлора, т. е. $f(x)$ аналитична в точке x_0.

2. Если в интервале $(x_0 - R, x_0 + R)$, где $R \neq 0$, функция $f(x)$ имеет все производные, которые в этом интервале ограничены по абсолютной величине одним и тем же числом, т. е. $|f^{(n)}(x)| \leqslant M$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то функция $f(x)$ аналитична в каждой точке этого интервала.

Примечание 1. Аналогично (9.13) записывается ряд Тейлора для функций $f(x_1, \ldots, x_n)$ от нескольких переменных

Примечание 2. Если функция аналитична в каждой точке некоторой области (открытое связное множество), то она называется **аналитической в этой области.** При этом функция и представляющий ее степенной ряд должны в этой области удовлетворять трем условиям: функция определена, следовательно, имеет конечное значение в каждой точке; ряд — сходящийся; сумма ряда равна этой функции.

9.7.2. Разложение некоторых элементарных функций в степенные ряды

Пример 24. Разложим функцию $f(x) = \dfrac{1}{3 - x}$ в степенной ряд по степеням $x - 1$ $(x_0 = 1)$. Функция $f(x)$ в интервале $(-3; 3)$ аналитична как отношение аналитических функций.

Первый способ разложения. Находим последовательно:

$$f(1)=\frac{1}{2},\quad f'(1)=\frac{1}{2^2},\quad f''(1)=\frac{1\cdot 2}{2^3},\quad \ldots,\quad f^{(n)}(1)=\frac{n!}{2^{n+1}},\quad \ldots\ .$$

Ряд Тейлора имеет вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}(x-1)+\frac{1}{2^3}(x-1)^2+\ldots+\frac{1}{2^{n+1}}(x-1)^n+\ldots\ .$$

Для этого ряда

$$q=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{2^{n+2}}:\frac{1}{2^{n+1}}\right|=\frac{1}{2},$$

т. е. $R=1/q=2$. В интервале $(x_0-R;\ x_0+R)=(-1;3)$ находим остаточный член по формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии, так как $x-1<2$:

$$R_n(x)=f(x)-S_n(x)=\frac{1}{2^{n+2}}(x-1)^{n+1}+\frac{1}{2^{n+3}}(x-1)^{n+2}+\ldots=$$

$$=\frac{1}{2^{n+2}}(x-1)^{n+1}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{2}(x-1)}\right].$$

Видно, что при любом x из интервала сходимости $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$. Следовательно, полученный ряд Тейлора сходится к функции $f(x)$ в промежутке $(-1;3)$.

Второй способ разложения. Используя равенства

$$3-x=(3-1)\left(1-\frac{x-1}{3-1}\right)=2\left(1-\frac{x-1}{2}\right),$$

найдем разложение в ряд по формуле суммы бесконечной геометрической прогрессии

$$\frac{1}{3-x}=\frac{1}{2\left(1-\frac{x-1}{2}\right)}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^{n+1}}.$$

Пример 25. Разложим функцию

$$f(x)=\frac{x}{1+x-2x^2}$$

в ряд Маклорена. Разлагая данную дробь на простейшие дроби (см. 7.1.3), получим ряд

$$f(x)=\frac{x}{(1-x)(1+2x)}=\frac{1}{3}\left[\frac{1}{1-x}-\frac{1}{1+2x}\right]=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\left[1-(-2)^n\right]x^n,$$

имеющий интервал сходимости $|x|<1/2$.

Пример 26. Разложить в ряд Маклорена функцию

$$f(x)=\frac{x^2}{1-x^3}.$$

Выполняя деление числителя на знаменатель по правилу деления полинома на полином, получим ряд

$$f(x) = x^2 + x^5 + x^8 + x^{11} + \dots,$$

радиус сходимости которого $R = 1$ (по формуле Коши—Адамара).

Пример 27. Разложить функцию $f(x) = e^x$ в ряд Маклорена. Находим:

$$f'(x) = f''(x) = \dots = f^{(n)}(x) = e^x;$$

при $x = 0$ все производные равны 1. Следовательно, $a_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!} = \dfrac{1}{n!}$. Радиус сходимости ряда $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n\to\infty}(n+1) = \infty$. Ряд абсолютно сходится при всех x. Для любого интервала $(-R; R)$ имеем $|f^{(n)}(x)| = e^x < e^R$, т. е. все производные ограничены в совокупности числом e^R. Следовательно, при любом x справедливо разложение

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (|x| < \infty).$$

Пример 28. Пусть $f(x) = \sin x$. Находим:

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), \quad f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\frac{\pi}{2}\right),$$

$$\dots, \quad f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\frac{\pi}{2}\right).$$

При $x = 0$ получим $f(0) = 0$, $f'(0) = 1$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = -1$, $f^{(4)}(0) = 0, \dots$. Все производные при любом x ограничены в совокупности: $|f^{(n)}(x)| \leqslant 1$. Разложение имеет вид

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \quad (|x| < \infty).$$

Пример 29. Разложение функции $f(x) = \cos x$ в ряд Маклорена можно получить аналогично примеру 28, либо дифференцируя ряд для $\sin x$:

$$\cos x = (\sin x)' = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (|x| < \infty).$$

Пример 30. Разложение $f(x) = \ln(1 + x)$ в ряд Маклорена можно найти, интегрируя от 0 до x $(-1 < x < 1)$ разложение функции $\dfrac{1}{1+x}$ в ряд (см. пример 1, 3):

$$\ln(1+x) = \int\limits_0^x \frac{dx}{1+x} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} + \dots \quad (R = 1).$$

При $x = 1$ этот ряд сходится по признаку Лейбница, при $x = -1$ расходится. Следовательно, полученное разложение $\ln(1 + x)$ в ряд справедливо в промежутке $(-1; 1]$.

Аналогично,

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots \quad (-1 \leqslant x < 1).$$

А также

$$\ln\frac{1-x}{1+x} = \ln(1-x) - \ln(1+x) = -2\left[x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \ldots\right] \quad (-1 < x < 1).$$

Пример 31. Разложим в ряд Маклорена функцию $f(x) = (1+x)^\alpha$, где α — действительное число. Имеем $f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$. Следовательно, можно записать ряд

$$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \ldots,$$

сумма $S(x)$ которого удовлетворяет равенству $\alpha \cdot S(x) = (1+x)\cdot S'(x)$. Для функции $f(x)$ также имеем $\alpha \cdot f(x) = (1+x)\cdot f'(x)$. Отсюда $[\ln f]' = [\ln S]'$, т. е. $\ln f$ и $\ln S$ имеют равные значения и равные производные при $x = 0$. Следовательно, $f(x) = S(x)$. Таким образом,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots \quad (|x| < 1).$$

В частности,

$$\frac{1}{1\pm x} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + x^4 \mp \ldots \quad (|x| < 1),$$

$$\sqrt{1\pm x} = 1 \pm \frac{1}{2}x - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}x^2 \pm \frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 - \ldots \quad (|x| \leqslant 1),$$

$$\frac{1}{\sqrt{1\pm x}} = 1 \mp \frac{1}{2}x + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^2 \mp \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^3 + \ldots \quad (|x| < 1),$$

$$\sqrt[3]{1\pm x} = 1 \pm \frac{1}{3}x - \frac{1\cdot 2}{3\cdot 6}x^2 \pm \frac{1\cdot 2\cdot 5}{3\cdot 6\cdot 9}x^3 - \ldots \quad (|x| \leqslant 1).$$

Пример 32.

1) Интегрируя от 0 до x ряд

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}x^4 + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}x^6 + \ldots \quad (|x| < 1),$$

получим

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = x + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{x^5}{5} + \ldots \quad (|x| \leqslant 1).$$

2) $$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x (1 - x^2 + x^4 - \ldots)\,dx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots \quad (|x| \leqslant 1).$$

Пример 33. Разложим в ряд Маклорена интеграл

$$J(x) = \int\limits_0^x e^{-x^2}\,dx.$$

Интегрируя от 0 до x ряд для функции e^{-x^2} (см. пример 23), получим

$$J(x) = x - \frac{1}{1!}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1}{2!}\cdot\frac{x^5}{5} - \ldots \quad (|x| < \infty).$$

9.8. Ряды и интегралы Фурье

9.8.1. Ряды Фурье

1. Тригонометрическим рядом называется функциональный ряд вида:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi x}{l} + b_n \sin\frac{n\pi x}{l}\right) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos\frac{\pi x}{l} + b_1\sin\frac{\pi x}{l} +$$

$$+ a_2\cos\frac{2\pi x}{l} + b_2\sin\frac{2\pi x}{l} + \ldots + a_n\cos\frac{n\pi x}{l} + b_n\sin\frac{n\pi x}{l} + \ldots, \qquad (9.15)$$

или, в частном случае $l = \pi$:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx) = \frac{a_0}{2} + a_1\cos x + b_1\sin x + a_2\cos 2x +$$

$$+ b_2\sin 2x + \ldots + a_n\cos nx + b_n\sin nx + \ldots, \qquad (9.16)$$

где число $l > 0$ называется **полупериодом**, а числа $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots, a_n$, $b_n, \ldots$ — **коэффициентами** этого ряда.

Тригонометрический ряд можно записать также в виде

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx + \varphi_n),$$

где $A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$, $\operatorname{tg}\varphi_n = a_n/b_n$.

Используя равенства

$$e^{inx} = \cos nx + i\sin nx, \quad e^{-inx} = \cos nx - i\sin nx,$$

где $i^2 = -1$, ряд (9.16) можно записать в **комплексной форме**

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{-inx}, \qquad (9.17)$$

где $c_0 = \frac{a_0}{2}$, $c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n - ib_n)$, $c_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Заменив здесь x на $\pi x/l$, получим комплексную форму ряда (9.15):

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{-i\pi n x/l}. \tag{9.17$'$}$$

Задача заключается в разложении некоторой периодической функции $f(x)$ с периодом $2l$ или 2π в тригонометрический ряд вида (9.15), соответственно (9.16), сходящийся к этой функции.

Члены тригонометрических рядов (9.15) и (9.16) являются периодическими функциями с периодами $2l$ и 2π соответственно.

2. Скалярное произведение (см. 2.7) любых двух кусочно непрерывных на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$ функций $f(x)$ и $g(x)$ определяется равенством

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x)\, dx.$$

Везде в 9.8 под кусочно непрерывной на отрезке $[a; b]$ функцией понимается функция, непрерывная всюду на $[a; b]$, за исключением, возможно, конечного числа точек разрыва первого рода таких, что в любой из этих точек $x = c$ существует левый $f(c-0)$ и правый $f(c+0)$ конечные пределы и

$$f(c) = \frac{f(c-0) + f(c+0)}{2}.$$

Если $(f, g) = 0$, то функции $f(x)$ и $g(x)$ называются **ортогональными** на $[a; b]$. Множество функций, попарно ортогональных на отрезке $[a; b]$, называется **ортогональной системой функций** на этом отрезке.

Система функций:

а) $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$, входящих в тригонометрический ряд (9.16), является ортогональной на отрезке $[-\pi; \pi]$ в силу равенств

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \sin nx\, dx = \begin{cases} \pi\delta_{mn}, & m \neq 0, \\ 0, & m = 0; \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cdot \cos nx\, dx = \begin{cases} \pi\delta_{mn}, & m \neq 0, \\ 2\pi, & m = n = 0; \end{cases}$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \cdot \cos nx\, dx = 0,$$

где $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$ — целые числа; $\delta_{mn} = 1$ при $m = n$, $\delta_{mn} = 0$ при $m \neq n$.

Система функций:

б) $1,\ \cos\frac{\pi x}{l},\ \sin\frac{\pi x}{l},\ \cos\frac{2\pi x}{l},\ \sin\frac{2\pi x}{l},\ \ldots,\ \cos\frac{n\pi x}{l},\ \sin\frac{n\pi x}{l},\ \ldots$

является ортогональной на отрезке $[-l; l]$. При этом соответствующие интегралы вычисляются в пределах от $(-l)$ до l. Системы функций а) и б) являются ортогональными также и для любого промежутка интегрирования длиной 2π (соответственно $2l$).

Пусть некоторая функция $f(x)$, определенная в интервале $(-\pi; \pi)$, а затем периодически с периодом 2π продолженная вне этого интервала на всю числовую ось, является суммой сходящегося тригонометрического ряда (9.16):

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Умножая обе части этого равенства последовательно на $\cos nx$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ и на $\sin nx$ $(n = 1, 2, \ldots)$ и интегрируя затем обе части полученных равенств от $-\pi$ до π с учетом ортогональности системы функций а), получим формулы для нахождения **коэффициентов Фурье** a_n и b_n функции $f(x)$:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Ряд (9.16), в котором коэффициентами a_n и b_n являются коэффициенты Фурье функции $f(x)$, называется **рядом Фурье** функции $f(x)$, а процедура разложения функции в ряд Фурье называется ее **гармоническим анализом.**

Коэффициенты Фурье разложения функции $f(x)$ в ряд вида (9.15) находятся по формулам

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

В формулах для нахождения коэффициентов a_n, b_n интегрирование может быть проведено в любом промежутке длиной 2π (или $2l$).

Комплексные коэффициенты Фурье c_n для ряда (9.17) или (9.17′) находятся по формулам

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{inx}\, dx \quad \text{или} \quad c_n = \frac{1}{2l} \int\limits_{-l}^{l} f(x) e^{i\pi n x/l}\, dx,$$

здесь $n = 0, 1, 2, \ldots$. При этом используется равенство

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} e^{-imx} e^{inx}\, dx = 2\pi\delta_{mn},$$

где $\delta_{mn} = 1$ при $m = n$, $\delta_{mn} = 0$ при $m \neq n$.

Задача гармонического анализа функции $f(x)$ состоит, таким образом, в выяснении условий, при которых ряд Фурье этой функции является сходящимся и его сумма равна $f(x)$.

3. Теорема Дирихле. Пусть функция $f(x)$, определенная (т. е. имеющая конечные значения) в интервале $(-\pi; \pi)$, удовлетворяет в этом интервале условиям Дирихле: 1) $f(x)$ в указанном интервале либо непрерывна, либо кусочно непрерывна и имеет конечное число точек разрыва первого рода, в каждой из которых существует как левый, так и правый конечные пределы этой функции; 2) интервал $(-\pi; \pi)$ можно разбить на конечное число интервалов, в каждом из которых $f(x)$ непрерывна и монотонна. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится всюду в интервале $(-\pi; \pi)$, а его сумма

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right) \right]$$

равна:

а) функции $f(x)$ в любой точке x, в которой $f(x)$ непрерывна;

б) $\frac{1}{2}\left[f(c-0) + f(c+0)\right]$ в каждой точке разрыва c;

в) $\frac{1}{2}\left[f(-\pi+0) + f(\pi-0)\right]$ на концах $x = -\pi$ и $x = \pi$ интервала.

Примечание. В общем случае функция $f(x)$ определена в интервале $(-l; l)$.

Если функция $f(x)$ периодически с периодом 2π (или $2l$) продолжена за пределы интервала $(-\pi; \pi)$ (или $(-l; l)$), то утверждения теоремы Дирихле применимы при любом x, а не только внутри интервала $(-\pi; \pi)$ или $(-l; l)$. При таком продолжении функции концы $x = \pm\pi$ (или $x = \pm l$) интервала являются точками ее разрыва, если $f(-\pi+0) \neq f(\pi-0)$ (или $f(-l+0) \neq f(l-0)$).

4. Разложение четных и нечетных функций. Если $f(x)$ — четная в $(-\pi;\pi)$ функция, т. е. $f(-x)=f(x)$, то

$$\text{а)}\ a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,dx\quad (n=0,1,2,\ldots),\quad b_n=0\quad (n=1,2,\ldots).$$

Ряд Фурье при этом не содержит синусов.

Если $f(x)$ — нечетная в $(-\pi;\pi)$ функция, т. е. $f(-x)=-f(x)$, то

$$\text{б)}\ a_0=0,\ \ a_n=0,\ \ b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\,dx\quad (n=1,2,\ldots).$$

Ряд Фурье при этом не содержит косинусов.

В случае интервала $(-l;l)$ формулы а) и б) принимают вид:

$$\text{а}')\ a_n=\frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\,dx,\ \ b_n=0;$$

$$\text{б}')\ a_n=0,\ \ b_n=\frac{2}{l}\int_0^{l} f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx,$$

а соответствующие ряды Фурье приведены в п. 5.

5. Разложение в интервале $(0;l)$. Если некоторая функция $f(x)$ определена в интервале $(0;l)$, в котором она удовлетворяет условиям Дирихле (см. п. 3), то эту функцию можно разложить в указанном промежутке в ряд либо по косинусам:

$$\text{а)}\ f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

либо по синусам:

$$\text{б)}\ f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где коэффициенты в разложениях а) и б) находятся соответственно по формулам а$'$) и б$'$) (см. п. 4). В частном случае функция $f(x)$ может быть определена в интервале $(0;\pi)$. Оба ряда а) и б) представляют в интервале $(0;l)$ одну и ту же функцию $f(x)$, но в интервале $(-l;0)$ они представляют разные функции. При этом ряд а) соответствует функции, полученной из $f(x)$ **четным продолжением** в соседний интервал $(-l;0)$, а затем с периодом $2l$ продолженной вне интервала $(-l;l)$ на всю числовую ось (см. пример 34, **3**); тогда как ряд б) соответствует функции, полученной из $f(x)$ **нечетным продолжением** $f(x)$ в интервал $(-l;0)$, а затем продолженной с периодом $2l$ вне интервала $(-l;l)$ на всю числовую ось (см. пример 34, **4**). При этом в случае разложения а) имеем: $f(-0) = f(+0)$, $f(-l+0) = f(l-0)$; в случае б): $f(-0) = -f(+0)$, $f(-l+0) = -f(l-0)$.

Пример 34. 1) Пусть функция $f(x) = x$ определена в интервале $(-\pi;\pi)$. Продолжим ее периодически с периодом 2π за пределы этого интервала на всю числовую ось и примем, что в точках $x = (2n+1)\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ она принимает значение

$$\frac{1}{2}\left[f(-\pi+0) + f(\pi-0)\right] = \frac{1}{2}(-\pi+\pi) = 0.$$

График полученный таким способом периодической функции, определенной на всей числовой оси и совпадающей в интервале $(-\pi;\pi)$ с функцией $f(x) = x$, изображен на рис. 9.1. Концы стрелок указывают на точки, исключенные из графика функции. В силу **нечетности** функции $f(x)$ в $(-\pi;\pi)$ все $a_n = 0$,

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\sin nx\,dx = -\frac{2}{n\pi}(x\cos nx)\Big|_0^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int\limits_0^{\pi}\cos nx\,dx = \frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

Согласно теореме Дирихле в интервале $(-\pi;\pi)$ сумма ряда Фурье равна

$$2\left(\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \ldots\right) = x,$$

а в точках $x = \pm\pi$ сумма ряда равна нулю. График суммы ряда Фурье, имеющей разрывы в точках $x = (2n+1)\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, изображен на рис. 9.1.

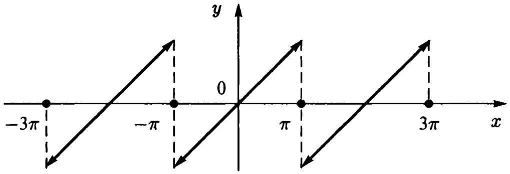


Рис. 9.1

2) Разложим в ряд Фурье **четную** функцию $f(x) = |x|$, определенную при $-\pi < x < \pi$. Находим, что все $b_n = 0$,

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\,dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi} x\cos nx\,dx = \frac{2}{\pi n}(x\sin nx)\Big|_0^{\pi} - \frac{2}{\pi n}\int\limits_0^{\pi}\sin nx\,dx = 2\frac{\cos n\pi - 1}{\pi n^2} = \frac{2}{\pi n^2}[(-1)^n - 1].$$

В силу четности функции имеем $f(-\pi+0) = f(\pi-0) = \pi$, следовательно, в точках $x = n\pi$ сумма ряда не имеет разрывов и равна $f(\pi) = \pi$. Таким образом, на отрезке

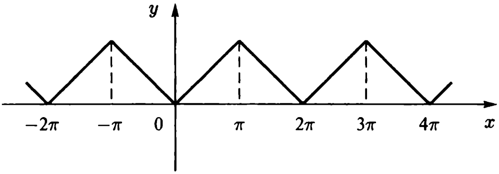


Рис. 9.2

$[-\pi;\pi]$ сумма ряда Фурье по теореме Дирихле равна

$$\frac{\pi}{2}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right)=|x|.$$

График суммы ряда изображен на рис. 9.2

3) Пусть $f(x)=x(\pi-x)$ определена в промежутке $0\leqslant x<\pi$. Продолжим ее четно в соседний интервал $(-\pi;0)$. В результате получим четную функцию, определенную в интервале $(-\pi;\pi)$, для которой все $b_n=0$,

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x(\pi-x)\,dx=\frac{\pi^2}{3},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi}x(\pi-x)\cos nx\,dx=-2\frac{\cos n\pi+1}{n^2}=-\frac{2}{n^2}[(-1)^n+1].$$

Сумма ряда Фурье, не имеющая разрывов на всей числовой оси, равна по теореме Дирихле при $0\leqslant x\leqslant\pi$

$$\frac{\pi^2}{6}-\left(\frac{\cos 2x}{1^2}+\frac{\cos 4x}{2^2}+\frac{\cos 6x}{3^2}+\ldots\right)=x(\pi-x).$$

На отрезке $[-\pi;0]$ сумма найденного ряда равна $-x(\pi+x)$. График суммы ряда приведен рис. 9.3.

4) Разложим функцию $f(x)=x(\pi-x)$, определенную при $0\leqslant x<\pi$ и рассмотренную в 3), в ряд по синусам. Продолжим ее нечетно в интервал $(-\pi;0)$. Для

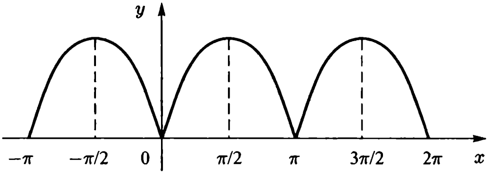


Рис. 9.3

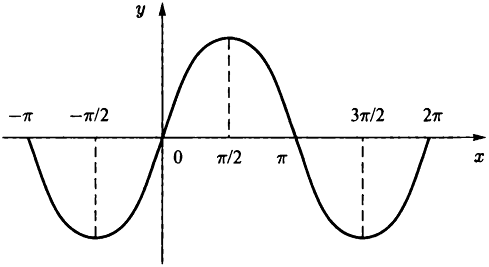


Рис. 9.4

полученной нечетной функции, определенной в интервале $(-\pi; \pi)$, имеем: все $a_n = 0$,

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x(\pi - x) \sin nx \, dx = -\frac{4}{\pi n^3}[(-1)^n - 1].$$

Сумма ряда Фурье, не имеющая разрывов на всей числовой оси, по теореме Дирихле равна при $0 \leqslant x \leqslant \pi$

$$\frac{8}{\pi}\left(\frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \frac{\sin 5x}{5^3} + \ldots\right) = x(\pi - x).$$

На отрезке $[-\pi; 0]$ сумма найденного ряда равна $x(\pi + x)$. График ряда приведен на рис. 9.4.

5) Рассмотрим функцию

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{при} \quad -\pi < x < 0, \\ \dfrac{c_1 + c_2}{2} & \text{при} \quad x = 0, \\ c_2 & \text{при} \quad 0 < x < \pi, \end{cases}$$

имеющую разрыв в точке $x = 0$. Находим коэффициенты Фурье:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} c_1 \, dx + \int_0^{\pi} c_2 \, dx\right] = c_1 + c_2,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} c_1 \cos nx \, dx + \int_0^{\pi} c_2 \cos nx \, dx\right] = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} c_1 \sin nx \, dx + \int_0^{\pi} c_2 \sin nx \, dx\right] = (c_1 - c_2)\frac{(-1)^n - 1}{n\pi}.$$

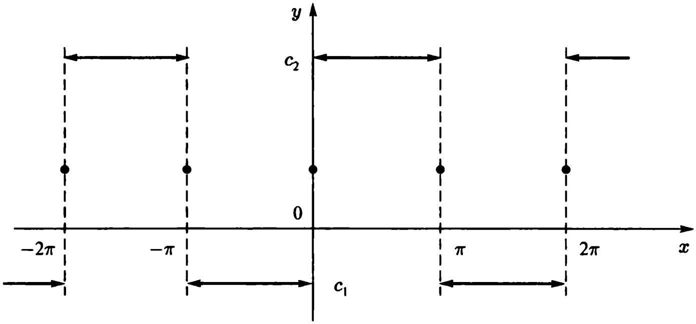


Рис. 9.5

По теореме Дирихле сумма ряда Фурье равна

$$\frac{c_1+c_2}{2}-\frac{2(c_1-c_2)}{\pi}\left[\frac{\sin x}{1}+\frac{\sin 3x}{3}+\ldots\right]=\begin{cases} c_1 & , -\pi<x<0, \\ \dfrac{c_1+c_2}{2}, & x=0 \text{ и } x=\pm\pi, \\ c_2 \quad , & 0<x<\pi. \end{cases}$$

График суммы ряда изображен на рис. 9.5.

9.8.2. Интегралы Фурье

Если функция периодична в бесконечном интервале $(-\infty; +\infty)$ или получена периодическим продолжением функции, заданной в интервале $(-l; l)$, то она может быть разложена в ряд Фурье. Непериодическую функцию нельзя разложить в ряд Фурье. Однако, если функция $f(x)$: 1) определена на всей оси $-\infty < x < +\infty$; 2) удовлетворяет условиям Дирихле в любом конечном интервале (см. 9.8.1, 3); 3) абсолютно интегрируема в интервале $(-\infty; +\infty)$, т. е. существует несобственный интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|\, dx < +\infty,$$

то эта функция во всех своих точках непрерывности может быть представлена в виде **интеграла Фурье** (или **разложена в интеграл Фурье**):

$$f(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} \big[a(\omega)\cos\omega x + b(\omega)\sin\omega x\big]\, d\omega, \tag{9.18}$$

где

$$a(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\cos\omega y\,dy, \quad b(\omega) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y)\sin\omega y\,dy.$$

В точках разрыва функции $f(x)$ левую часть равенства (9.18) следует заменить на $\frac{1}{2}\left[f(x+0)+f(x-0)\right]$.

Выражение (9.18) может быть получено из разложения функции, определенной в интервале $(-l;l)$, в ряд Фурье (см. формулу (9.15) в 9.8.1) в результате предельного перехода $l \to +\infty$.

Если $f(t)$ — **периодическая** функция от времени t, то ряд Фурье представляет ее в виде наложения (суммы) бесконечного (**счетного**) множества гармонических колебаний $\cos\omega_n t$ и $\sin\omega_n t$ с частотами $\omega_n = n\pi/l$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Совокупность всех частот ω_n называется **спектром**, в данном случае **дискретным** (т. е. прерывистым), функции $f(t)$. Интеграл Фурье представляет **непериодическую** функцию $f(t)$ в виде наложения бесконечного множества гармонических колебаний с **непрерывно** изменяющейся частотой ω (**непрерывный спектр**), которая может принимать значения либо на всей бесконечной оси $O\omega$, либо на некотором ее отрезке. В общем случае спектр функции может иметь как дискретные, так и непрерывные части.

Формула (9.18) для четной функции $f(x)$, при тех же замечаниях о точках ее разрыва, принимает вид

$$\text{а)}\ f(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} a(\omega)\cos\omega x\,dx, \quad a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(y)\cos\omega y\,dy,$$

а для нечетной

$$\text{б)}\ f(x) = \int\limits_{0}^{+\infty} b(\omega)\sin\omega x\,dx, \quad b(\omega) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty} f(y)\sin\omega y\,dy.$$

Если функция $f(x)$ определена в промежутке $(0;+\infty)$, удовлетворяет условиям Дирихле в любом конечном интервале, содержащемся в промежутке $(0;+\infty)$, и абсолютно интегрируема в $(0;+\infty)$, то она может быть представлена в указанном промежутке по нашему желанию либо в виде а) при четном продолжении, либо в виде б) при нечетном продолжении.

В случае четной функции $f(x)$, определенной в $(-\infty;+\infty)$, а также в случае четного продолжения $f(x)$, определенной в $(0;+\infty)$, имеем

$$\text{а)}\ f(x) = \frac{2}{\pi}\int\limits_{0}^{+\infty}\left[\int\limits_{0}^{+\infty} f(y)\cos\omega y\,dy\right]\cos\omega x\,d\omega \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{+\infty} C(\omega)\cos\omega x\,d\omega;$$

$$C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(y) \cos \omega y \, dy.$$

Для нечетной функции $f(x)$, определенной в $(-\infty; +\infty)$, а также при нечетном продолжении $f(x)$ $(0 < x < +\infty)$

$$\text{б)}\ f(x) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \left[\int\limits_0^{+\infty} f(y) \sin \omega y \, dy \right] \sin \omega x \, d\omega \equiv \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} S(\omega) \sin \omega x \, d\omega;$$

$$S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(y) \sin \omega y \, dy.$$

Здесь функции $C(\omega)$ и $S(\omega)$ для случаев а) и б) называются соответственно **косинус-образом** и **синус-образом** Фурье функции $f(x)$. В случае четной $f(x)$, согласно (9.20), имеем $F(\omega) = C(\omega)$, где $C(\omega)$ продолжается четно при $\omega < 0$, так как $S(\omega) = 0$. Для нечетной $f(x)$, согласно (9.20), находим $F(\omega) = iS(\omega)$, где $S(\omega)$ продолжается нечетно при $\omega < 0$, так как $C(\omega) = 0$. Для произвольной $f(x)$ имеем

$$f(x) = \frac{1}{2}[f(x) + f(-x)] + \frac{1}{2}[f(x) - f(-x)] = f_1(x) + f_2(x),$$

где $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — четная и нечетная функции соответственно. Следовательно, образ Фурье для $f(x)$ равен $F(\omega) = C(\omega) + iS(\omega)$, где $C(\omega)$ и $S(\omega)$ — косинус-образ и синус-образ функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно, продолженные надлежащим способом для $\omega < 0$.

Интеграл Фурье (9.18) может быть записан в виде

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y) \cos \omega(y - x) \, dy, \tag{9.19}$$

а также в комплексной форме

$$\begin{gathered} f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{+\infty} d\omega \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{i\omega(y-x)} \, dy \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) e^{-i\omega x} \, d\omega; \\ F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{i\omega y} \, dy, \end{gathered} \tag{9.20}$$

где интеграл с бесконечными пределами по переменной ω понимается в смысле главного значения, т. е. нижний и верхний пределы интегрирования стремятся соответственно к $(-\infty)$ и $(+\infty)$, оставаясь равными по абсолютной величине. Форма (9.20) интеграла Фурье эквивалентна форме (9.19) в силу равенства $e^{i\omega(y-x)} = \cos\omega(y-x) + i\sin\omega(y-x)$, а также четности косинуса и нечетности синуса по переменной ω. Комплексная функция $F(\omega)$ действительного аргумента ω, получаемая из $f(x)$ по второй формуле (9.20), называется **образом Фурье** (или **спектральной плотностью**) функции $f(x)$. При этом $F(\omega)$ непрерывна в каждой точке $O\omega$ и $\lim\limits_{|\omega|\to\infty}|F(\omega)| = 0$.

Если функция $(1+|x|)^n f(x)$, где n — натуральное число, абсолютно интегрируема в $(-\infty; +\infty)$, то образ Фурье $F(\omega)$ функции $f(x)$ дифференцируем n раз по ω и производную порядка m $(m = 1, 2, \dots, n)$ можно найти по формуле

$$\frac{d^m F(\omega)}{d\omega^m} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(y) e^{i\omega y} (iy)^m \, dy,$$

т. е. дифференцированием под интегралом.

Если $F(\omega)$ и $G(\omega)$ — образы Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно, то образ Фурье **свертки** двух функций $f(x)$ и $g(x)$

$$f * g \equiv \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(\omega) g(x-\omega)\, d\omega$$

равен

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (f*g) e^{i\omega x}\, dx = \sqrt{2\pi} F(\omega) G(\omega).$$

Если $F(\omega)$ — образ Фурье функции $f(x)$, а $F_n(\omega)$ — образ Фурье производной $f^{(n)}(x)$ (если она существует), то $F_n(\omega) = (-i\omega)^n F(\omega)$ при условии, что все производные от $f(x)$ порядка, меньше n, стремятся к нулю при $|x| \to +\infty$.

Пример 35. Представим в виде интеграла Фурье функцию $f(x) = e^{-ax}$ $(a > 0)$, определенную в интервале $0 < x < +\infty$.

1) Если эту функцию продолжить четным образом в промежуток $-\infty < x < 0$ и построить четную функцию

$$g(x) = \begin{cases} e^{ax} & \text{при } x < 0, \\ 1 & \text{при } x = 0, \\ e^{-ax} & \text{при } x > 0, \end{cases}$$

то, дважды интегрируя по частям, получим четную функцию

$$C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-ay} \cos\omega y\, dy = \frac{2a}{\sqrt{2\pi}(a^2+\omega^2)}.$$

Интеграл Фурье для функции $g(x)$:

$$g(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{2a}{\sqrt{2\pi}(a^2+\omega^2)} \cos\omega x \, dx = \frac{2a}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos\omega x}{a^2+\omega^2} \, d\omega.$$

Интеграл Фурье в комплексной форме $[F(\omega) = C(\omega)]$:

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2a}{\sqrt{2\pi}(a^2+\omega^2)} e^{-i\omega x} \, d\omega = \frac{a}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{e^{-i\omega x}}{a^2+\omega^2} \, d\omega.$$

Исходная функция $f(x)$ представляется этими интегралами Фурье в интервале $0 < x < +\infty$.

2) Если функцию $f(x)$ продолжить нечетным образом в промежуток $-\infty < x < 0$ и построить нечетную функцию

$$h(x) = \begin{cases} -e^{-ax} & \text{при} \quad x < 0, \\ 1 & \text{при} \quad x = 0, \\ e^{-ax} & \text{при} \quad x > 0, \end{cases}$$

то, дважды интегрируя по частям, получим нечетную функцию

$$S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-ay} \sin\omega y \, dy = \frac{2\omega}{\sqrt{2\pi}(a^2+\omega^2)}.$$

Интеграл Фурье для функции $h(x)$:

$$h(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{2\omega}{\sqrt{2\pi}(a^2+\omega^2)} \sin\omega x \, dx = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} \frac{\omega\sin\omega x}{a^2+\omega^2} \, d\omega.$$

Интеграл Фурье в комплексной форме $[F(\omega) = iS(\omega)]$:

$$h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{2i\omega}{\sqrt{2\pi}(a^2+\omega^2)} e^{-i\omega x} \, d\omega = \frac{i}{\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\omega e^{-i\omega x}}{a^2+\omega^2} \, d\omega.$$

Примечание. Интегралы с бесконечными пределами по переменной ω понимаются в смысле главного значения.

Пример 36. Для четной функции $f(x) = e^{-ax^2}$ косинус-образ Фурье равен:

$$C(\omega) = \frac{1}{2a} e^{-\omega^2/4a}.$$

Пример 37. Найти функцию $\varphi(x)$, если

$$\int\limits_0^{+\infty} \varphi(\omega) \cos\omega x \, d\omega = \frac{1}{1+x^2}.$$

Решение. Поскольку функция

$$C(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\varphi(\omega)$$

является косинус-образом для $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, находим

$$C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} \frac{1}{1+y^2} \cos \omega y \, dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-\omega}.$$

Следовательно, $\varphi(\omega) = e^{-\omega}$ $(\omega \geqslant 0)$. ▷

Глава 10

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

10.1. Комплексные числа

10.1.1. Определение комплексных чисел и действия с ними

Комплексные числа вводятся как обобщение понятия действительного числа, так что множество всех действительных чисел становится частью множества комплексных чисел.

Комплексным числом z называется пара $z = (a, b)$ действительных чисел a и b, взятых в определенном порядке, т. е. указывается, какое из этих чисел a и b является первым, а какое вторым. Первое число a и второе b называются соответственно **действительной** (или **вещественной**) и **мнимой** частями комплексного числа z и обозначаются: $a = \operatorname{Re} z$, $b = \operatorname{Im} z$. При $b = 0$ комплексное число $z = (a, 0)$ считается совпадающим с действительным числом числом a, т. е. $z \equiv a$. Таким образом, множество всех действительных чисел содержится во множестве комплексных чисел. Если $a = 0$, то комплексное число $z = (0, b)$ называется **чисто мнимым** (или просто **мнимым**). Комплексные числа $(0, 0) = 0$; $(1, 0) = 1$; $(0, 1) = i$ называются соответственно **нулем**, **единицей**, **мнимой единицей**.

Комплексные числа $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$ по определению **равны**, т. е. $z_1 = z_2$, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$. В противном случае комплексные числа не равны.

По определению **суммой** двух комплексных чисел $z_1 = (a_1, b_1)$, $z_2 = (a_2, b_2)$ называется комплексное число $z_1 + z_2 = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$, а их **произведением** — комплексное число $z_1 z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2, a_1 b_2 + a_2 b_1)$.

Сумма и произведение комплексных чисел обладают свойствами:

1) $z_1 + z_2 = z_2 + z_1$,
2) $z_1 z_2 = z_2 z_1$,
3) $(z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$,
4) $(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$,
5) $(z_1 + z_2) z_3 = z_1 z_3 + z_2 z_3$.

Из определения действий сложения и умножения следует:

$$z+0=z, \quad z\cdot 0=0, \quad z\cdot 1=z, \quad ii=i^2=(0,1)\cdot(0,1)=(-1,0)=-1.$$

Ввиду отсутствия действительных чисел, обладающих свойством $i^2=-1$, число i называют мнимой единицей. В силу этого свойства мнимой единицы любое комплексное число $z=(a,b)$ можно представить в **алгебраическом виде**: $z=a+ib$. Действительно, $z=(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(0,1)(b,0)=a+ib$. Мнимое число $(0,b)$ можно представить в виде $0+ib$ или ib. Отметим, что мнимой частью комплексного числа $a+ib$ называется действительное число b, но не чисто мнимое число ib.

Вычитание комплексных чисел определяется как действие, обратное сложению, т. е., если

$$z_1=(a_1,b_1)=a_1+ib_1, \quad z_2=(a_2,b_2)=a_2+ib_2,$$

то

$$z_1-z_2=(a_1-a_2,b_1-b_2)=a_1-a_2+i(b_1-b_2).$$

Действия сложения, вычитания и умножения с комплексными числами, записанными в алгебраическом виде, проводятся по тем же правилам, что и с обычными полиномами, с учетом равенства $i^2=-1$, т. е.

$$z_1\pm z_2=(a_1+ib_1)\pm(a_2+ib_2)=(a_1\pm a_2)+i(b_1\pm b_2),$$
$$z_1z_2=(a_1+ib_1)(a_2+ib_2)=(a_1a_2-b_1b_2)+i(a_1b_2+a_2b_1).$$

Комплексное число $(a,-b)=a-ib$ называется **сопряженным** с числом $z=(a,b)=a+ib$ и обозначается $\bar z\equiv a-ib$. Переход от числа z к сопряженному $\bar z$ называется **действием сопряжения**. При этом:

$$\overline{(\bar z)}=z, \quad \overline{z_1\pm z_2}=\bar z_1\pm\bar z_2,$$
$$\overline{z_1z_2}=\bar z_1\bar z_2, \quad z+\bar z=2a, \quad z-\bar z=2ib, \quad z\bar z=a^2+b^2\geqslant 0,$$
$$\operatorname{Re} z=\frac{1}{2}(z+\bar z), \quad i(\operatorname{Im} z)=ib=\frac{1}{2}(z-\bar z).$$

Если z является корнем алгебраического уравнения с действительными коэффициентами, то $\bar z$ — также корень этого уравнения.

Деление на комплексное число, не равное нулю, определяется как действие, обратное умножению, т. е., если $z_1=a_1+ib_1$, $z_2=a_2+ib_2$ $(z_2\neq 0)$, то

$$z=\frac{z_1}{z_2}=\frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2}=\frac{z_1\bar z_2}{z_2\bar z_2}=\frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)}=\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}+i\frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}.$$

При этом $zz_2=z_1$ и $\bar z\bar z_2=\bar z_1$.

Произведение n (n — натуральное число) равных комплексных чисел z называется **n-й степенью** числа z и обозначается z^n. Например, $i^3=-i$. Если n — натуральное, то $z^{-n}\equiv 1/z^n$. Число w называется **корнем n-й степени** (n —

натуральное) из числа z, если $w^n = z$. Обозначение: $w = \sqrt[n]{z}$. Для всякого $z \neq 0$ корень $\sqrt[n]{z}$ имеет n различных значений (см. 10.1.3). В частности, $\sqrt{-1}$ имеет значения $+i$ и $-i$; $\sqrt{1} = \pm 1$.

Действие, ставящее в соответствие каждому комплексному числу $z \neq 0$ комплексное число $w = R^2/\bar{z}$, где действительное число $R > 0$ задано, называется **инверсией**.

Пример 1. Пусть $z_1 = 7 - 4i$, $z_2 = 3 + 2i$. Тогда $z_1 + z_2 = 10 - 2i$, $z_1 - z_2 = 4 - 6i$; $z_1 z_2 = (7-4i)(3+2i) = 21 + 14i - 12i + 8 = 29 + 2i$; $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{7-4i}{3+2i} = \dfrac{(7-4i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \dfrac{13-26i}{9+4} = 1 - 2i$; $\dfrac{1}{3+2i} = \dfrac{3-2i}{(3+2i)(3-2i)} = \dfrac{3}{13} - \dfrac{2}{13}i$.

10.1.2. Геометрическое изображение комплексных чисел. Модуль и аргумент комплексного числа

Действительные числа изображаются точками на прямой (числовой оси). Поскольку комплексное число $z = x + iy$ является упорядоченной парой действительных чисел x и y, его можно изобразить точкой $M(x, y)$ с абсциссой x и ординатой y на плоскости с декартовой прямоугольной системой координат Oxy (рис. 10.1). Рассматриваемая в таком смысле плоскость называется **комплексной плоскостью**, а оси Ox и Oy — **действительной** и **мнимой** осями соответственно. Точка $A(1,0)$ изображает действительное число $1 + 0i = 1$, а точка $B(0,1)$ — мнимую единицу $0 + 1i = i$. Комплексное число $z = x + iy$ можно изобразить также вектором $\overline{OM}$, началом которого является начало координат O, а концом — точка $M(x, y)$ (рис. 10.1). Между точками комплексной плоскости $M(x, y)$ и комплексными числами $z = x + iy$ существует взаимно однозначное соответствие, поэтому обычно не делают различий между точками плоскости и комплексными числами и говорят, например, «точка $z = x + iy$». В частности, точка i совпадает с точкой $B(0,1)$ мнимой оси

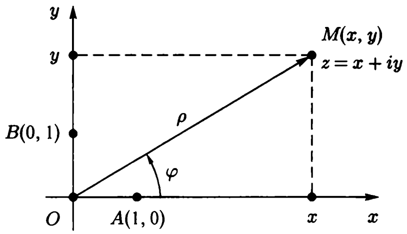


Рис. 10.1

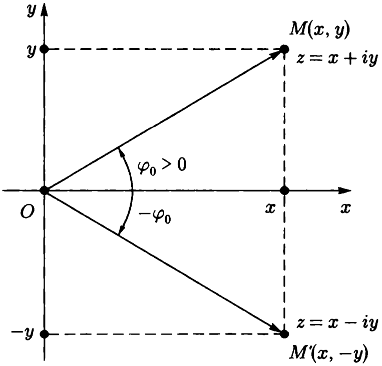


Рис. 10.2

(рис. 10.1). Число $\bar{z} = x - iy$, сопряженное числу $z = x + iy$, изображается точкой $M'(x, -y)$, симметричной точке $M(x, y)$ относительно оси Ox (рис. 10.2). Сумма $z_1 + z_2$ двух комплексных чисел z_1 и z_2 геометрически изображается вектором, полученным сложением векторов, соответствующих числам z_1 и z_2, по правилу параллелограмма. Разность чисел $z_1 - z_2$ изображается суммой векторов, соответствующих числам z_1 и $(-z_2)$ (рис. 10.3). Для умножения и деления комплексных чисел простые геометрические аналоги отсутствуют.

Неотрицательное число $|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$, равное длине вектора $\overline{OM}$, изображающего число $z = x + iy$, называется **модулем** этого комплексного числа. Модуль действительного числа равен его абсолютной величине. Модуль $|z| = 0$ тогда и только тогда, когда $z = 0$. Из равенства

$$|z_1 z_2 \cdots z_n|^2 = (z_1 z_2 \cdots z_n)(\bar{z}_1 \bar{z}_2 \cdots \bar{z}_n) = |z_1|^2 |z_2|^2 \cdots |z_n|^2$$

следует

$$|z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1| |z_2| \cdots |z_n|.$$

Справедливы следующие равенства (см. рис. 10.3):

$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|, \quad |z_1 - z_2| \geqslant \big||z_1| - |z_2|\big|,$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} z_k z'_k\right|^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{n} |z_k|^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} |z'_k|^2\right),$$

где z_k, z'_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ — любые комплексные числа.

Из равенства $|z|^2 = z\bar{z} = x^2 + y^2$ следует

$$-|z| \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant |z|, \quad -|z| \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant |z|.$$

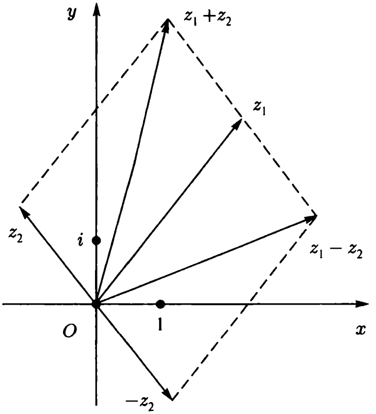


Рис. 10.3

Угол φ (обычно в радианах) между положительным направлением оси Ox и вектором $\overline{OM} \equiv (x, y)$, изображающим комплексное число $z = x + iy$ (рис. 10.1), называется **аргументом** этого числа. Обозначение: $\varphi = \operatorname{Arg} z$.

Положение точки $z = x + iy$ на комплексной плоскости однозначно определяется как ее декартовыми координатами x и y, так и полярными координатами $\rho = |z|$, $\varphi = \operatorname{Arg} z$, при этом (рис. 10.1):

$$x = \rho \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \varphi, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

Модуль комплексного числа $z = x + iy$ определяется однозначно:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2},$$

а аргумент — неоднозначно, с точность до слагаемого $2\pi n$ ($n = 0, \pm 1, \ldots$). Значение аргумента считается положительным (или отрицательным), если его отсчет от положительной полуоси Ox ведется против хода (или по ходу) часовой стрелки. Для того чтобы сделать аргумент однозначным, берут его значение $\arg z \equiv \varphi_0$, которое удовлетворяет условию $-\pi < \varphi_0 \leqslant \pi$ и называется **главным значением** (рис. 10.4). Если точка $z = x + iy$ на комплексной плоскости с переменными x и y приближается сверху (соответственно, снизу) к отрицательной (т. е. $x < 0$) полуоси Ox, то $\varphi_0 \to +\pi$ (соответственно, $\varphi_0 \to -\pi$). Главное значение аргумента φ_0 числа $z = x + iy$ можно найти по формуле $\varphi_0 = \operatorname{arctg}(y/x)$ при $x > 0$; а при $x < 0$ и $y \geqslant 0$ (либо $y < 0$) имеем $\varphi_0 = \operatorname{arctg}(y/x) + \pi$ (либо $\varphi_0 = \operatorname{arctg}(y/x) - \pi$). Величина φ_0

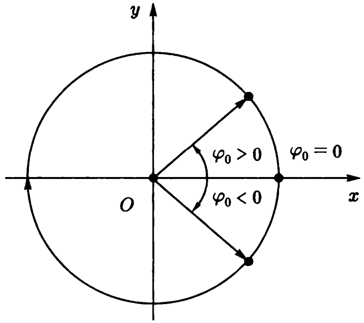


Рис. 10.4

может быть найдена также из двух равенств: $\sin\varphi_0 = y/\rho$, $\cos\varphi_0 = x/\rho$, где $\rho = \sqrt{x^2+y^2}$ и $-\pi < \varphi_0 \leqslant \pi$.

Справедливо равенство $\varphi = \varphi_0 + 2\pi n$ ($n = 0, \pm 1, \ldots$), или $\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n$. Для сопряженных чисел $\arg \bar{z} = -\arg z$. Для точки $z = 0$ аргумент не определен.

Комплексные числа нельзя сравнивать между собой (т. е. нельзя сказать, какое из них больше), однако можно сравнивать их действительные и мнимые части, а также модули.

Пример 2.

1) $z_1 = -1 - i$, $|z_1| = \sqrt{2}$, $\arg z_1 = -\dfrac{3}{4}\pi$;

2) $z_2 = 1 + i$, $|z_2| = \sqrt{2}$, $\arg z_2 = \dfrac{\pi}{4}$;

3) $z_3 = -1 + i\sqrt{3}$, $|z_3| = 2$, $\arg z_3 = \dfrac{2}{3}\pi$;

4) $|i| = 1$, $\arg i = \dfrac{\pi}{2}$; 5) $\arg 2 = 0$; 6) $\arg(-i) = -\dfrac{\pi}{2}$; 7) $\arg(-3) = \pi$.

В этом примере все значения аргументов — главные.

Тригонометрическая форма комплексного числа $z = x + iy$:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Используя **формулу Эйлера** $\cos\varphi \pm i\sin\varphi = e^{\pm i\varphi}$, комплексное число z можно записать в **показательной форме**:

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}, \quad \bar{z} = x - iy = |z|e^{-i\varphi}.$$

Если

$$z_1 = |z_1|(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1) = |z_1|e^{i\varphi_1},$$

$$z_2 = |z_2|(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = |z_2|e^{i\varphi_2},$$

то

$$z_1 z_2 = |z_1||z_2|\left[\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\right] = |z_1||z_2|e^{i(\varphi_1+\varphi_2)},$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right] = \frac{|z_1|}{|z_2|}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}.$$

Умножая число $z = x + iy$ на мнимую единицу $i = e^{i\pi/2}$, получим

$$iz = -y + ix = |z|e^{i(\varphi+\frac{\pi}{2})},$$

т. е. вектор числа z поворачивается (при неизменной длине) вокруг начала координат на угол $\pi/2$ против часовой стрелки.

10.1.3. Возведение комплексных чисел в степень и извлечение корня

Если $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi) = |z|e^{i\varphi}$, то для любого натурального n справедлива **формула Муавра**

$$z^n = |z|^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) = |z|^n e^{in\varphi}.$$

Эта формула верна также для любого целого числа $n = 0, \pm1, \pm2, \ldots$.

Пример 3.

1) $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2e^{i\pi/3}$, $z^3 = 2^3(\cos\pi + i\sin\pi) = -2^3 = -8$;

2) $z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = e^{-i\pi/3}$, $z^6 = e^{-2\pi i} = \cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi) = 1$;

3) $i^2 = (e^{i\pi/2})^2 = e^{i\pi} = \cos\pi + i\sin\pi = -1$, $i^3 = e^{3i\pi/2} = \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i$;

4) $i^{-2} = e^{-i\pi} = \cos(-\pi) + i\sin(-\pi) = \cos\pi = -1$.

Корень n-й степени из числа $z = |z|(\cos\varphi_0 + i\sin\varphi_0) = |z|e^{i\varphi_0}$, где $\varphi_0 = \arg z$ — главное значение аргумента числа z, определяется как комплексное число $w = \sqrt[n]{z}$, n-я степень которого равна числу z, т. е. $w^n = z$. Если записать $w = |w|e^{i\theta}$, где θ — аргумент числа w, то

$$w^n = |w|^n e^{i\theta n} = |z|e^{i\varphi_0}.$$

Следовательно, $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ (арифметический корень из модуля), $\theta n = \varphi_0 + 2k\pi$ ($k = 0, \pm1, \ldots$), т. е. $\theta = \frac{1}{n}(\varphi_0 + 2k\pi)$. Таким образом,

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi_0 + 2k\pi}{n}\right); \quad k = 0, \pm1, \pm2, \ldots .$$

Все эти значения корня имеют одинаковый модуль $\sqrt[n]{|z|}$, а их аргументы получаются из аргумента φ_0/n последовательным прибавлением или вычитанием угла $2\pi/n$. При n-кратном прибавлении угла $2\pi/n$ значения корня будут повторяться. Всего будет n различных значений $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ корня из числа $z \neq 0$, которые получаются при $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Значение корня

$$w_0 = \sqrt[n]{|z|}\left(\cos\frac{\varphi_0}{n} + i\sin\frac{\varphi_0}{n}\right)$$

называется **главным значением**. Поскольку все значения $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$ имеют равные модули, соответствующие им точки лежат в вершинах правильного n-угольника, вписанного в окружность радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в начале координат, и имеют полярные углы $\frac{1}{n}(\varphi_0 + 2k\pi)$; $k = 0, 1, \ldots, n-1$.

В частности,

$$\sqrt[n]{1} = \cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}, \qquad \sqrt[n]{-1} = \cos\frac{(2k+1)\pi}{n} + i\sin\frac{(2k+1)\pi}{n}$$
$$(n = 1, 2, \ldots;\ k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Пример 4. Найдем значение корня $w = \sqrt[4]{z}$ из числа

$$z = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = e^{2\pi i/3}.$$

Здесь $|z| = 1$, $\varphi_0 = 2\pi/3$.

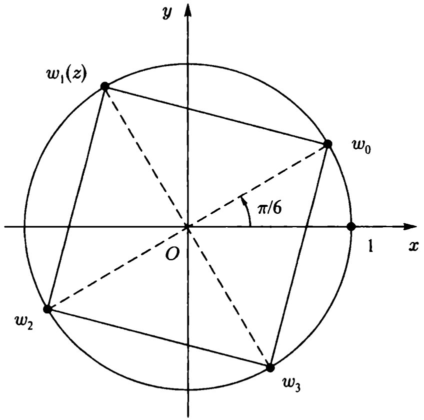


Рис. 10.5

Решение. Имеем

$$w_k = \cos\frac{(2\pi/3)+2k\pi}{4} + i\sin\frac{(2\pi/3)+2k\pi}{4} \quad (k = 0, 1, 2, 3).$$

Следовательно,

$$w_0 = \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; \qquad w_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$w_2 = \cos\frac{7\pi}{3} + i\sin\frac{7\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i; \quad w_3 = \cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Эти четыре значения корня лежат в вершинах квадрата, вписанного в окружность единичного радиуса (рис. 10.5). Отметим, что точка z здесь совпадает с точкой w_1. ▷

10.1.4. Множества точек на комплексной плоскости

Бесконечно удаленной точкой (комплексным числом $z = \infty$) на комплексной плоскости считается единственная точка, в которую переходит точка $z = 0$ (начало координат) в результате преобразования $w = 1/z$. Число $z = \infty$ не имеет определенного аргумента. Комплексная плоскость с присоединенной к ней точкой $z = \infty$ называется **полной** (или **расширенной**, или **замкнутой**) **комплексной плоскостью**. Плоскость без точки $z = \infty$ называют **открытой**.

Окрестностью (открытой) $C(\delta, z_0)$ точки $z_0 \neq \infty$ комплексной плоскости называется множество всех точек z, для которых $|z - z_0| < \delta$, где $\delta > 0$ — заданное число. Это множество является внутренностью круга радиуса δ с центром в точке z_0 с присоединением точки z_0.

Окрестностью $C(R, \infty)$ точки $z = \infty$ называется внешность любого круга радиуса R, в частности, множество точек $|z| > R$, с присоединением точки $z = \infty$. Случай, когда точка $z = \infty$ исключается, оговаривается особо.

Областью (открытой) полной комплексной плоскости называется множество D точек, обладающих следующими свойствами: 1) вместе с любой своей точкой множество D содержит также достаточно малую окрестность этой точки (свойство открытости); 2) любые две точки, принадлежащие D, можно соединить ломаной линией, полностью состоящей из точек множества D (свойство связности). **Границей** области D называется множество точек, не принадлежащих D, но в любой окрестности которых находятся точки из D. Точки, из которых состоит граница, называются **граничными**. Область D с присоединенной к ней границей называют **замкнутой областью** и обозначают $\overline{D}$.

Непрерывной кривой в комплексной плоскости называется множество точек $z = x + iy$ таких, что $x = x(t)$, $y = y(t)$ $(-\infty \leqslant t_1 \leqslant t \leqslant t_2 \leqslant +\infty)$, где $x(t)$, $y(t)$ — непрерывные функции действительного параметра t.

Простой кривой (кривой Жордана) называется непрерывная кривая без точек самопересечения и самоналегания (т. е. разным значениям параметра t соответствуют разные точки этой кривой). Кривая Жордана, у которой начальная и конечная точки совпадают, называется **замкнутой**. Замкнутая кусочно гладкая кривая Жордана называется также (замкнутым) **контуром**.

Область открытой плоскости называют **ограниченной**, если все ее точки лежат внутри некоторого круга с центром $z = 0$. В противном случае область называется **неограниченной**.

Число связных замкнутых частей (контуров), из которых состоит граница области (ограниченной или неограниченной) в полной плоскости, называется **порядком связности** этой области. В зависимости от числа ограничивающих контуров области подразделяют на **односвязные** и **многосвязные** (**двух-**, **трехсвязные** и т. д.).

Пример 5.

1) Граница окрестности $C(\delta, z_0)$ точки z_0 состоит из одного контура (окружности). Следовательно, $C(\delta, z_0)$ является односвязной областью.
2) Область между двумя концентрическими окружностями является двухсвязной, так как ограничена двумя контурами (окружностями).
3) Окрестность точки $z = \infty$ с включением этой точки — односвязна, а с исключением $z = \infty$ — двухсвязна.

10.1.5. Предел последовательности точек комплексной плоскости

Точка $z_0 = x_0 + iy_0$ называется **пределом** последовательности $\{z_n\} = z_1, z_2, \ldots, z_n, \ldots$ точек $z_n = x_n + iy_n$ комплексной плоскости z, если для любого числа $\delta > 0$ существует номер $N(\delta)$ такой, что z_n принадлежат окрестности $C(\delta, z_0)$ для каждого $n \geqslant N(\delta)$. Говорят при этом, что данная последовательность **сходится** к z_0, и пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. Справедливы равенства $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. Сходящаяся последовательность имеет необходимо единственный предел. Последовательность, не имеющая конечного предела, называется **расходящейся**. Если $z = \infty$ является единственным пределом расходящейся последовательности, то пишут $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \infty$. При этом для любого числа $R > 0$ найдется номер $N(R)$ такой, что для всех $n \geqslant N(R)$ выполняется неравенство $|z_n| \geqslant R$, т. е. все точки последовательности с номерами $n \geqslant N(R)$ оказываются вне круга $|z| < R$.

Предел суммы, разности, произведения, частного двух последовательностей равен сумме, разности, произведению, частному (если предел делителя не равен нулю) этих последовательностей.

Числовой **ряд**

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k = c_1 + c_2 + \ldots + c_k + \ldots =$$

$$= (a_1 + ib_1) + (a_2 + ib_2) + \ldots + (a_k + ib_k) + \ldots =$$

$$= a_1 + a_2 + \ldots + a_k + \ldots + i(b_1 + b_2 + \ldots + b_k + \ldots),$$

где c_k — комплексные числа ($\neq \infty$), называется **сходящимся**, если сходятся оба действительных ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$. При этом существует предел $S = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k$, называемый **суммой ряда**. Необходимое условие сходимости ряда: $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = 0$.

10.2. Функции комплексной переменной

10.2.1. Понятие функции

Комплексная переменная z представляет собой пару действительных переменных x и y, расположенных в определенном порядке:

$$z = (x, y) = x + iy.$$

Каждому значению $z = x+iy$ комплексной переменной z соответствует точка (x, y) на комплексной плоскости Oxy. Пусть D и G — множества на полных (расширенных) плоскостях комплексных переменных z и w соответственно. Тогда, если указан закон, по которому каждой точке $z = x+iy$ из D ставится в соответствие определенная точка (или несколько точек) $w=u(x,y)+iv(x,y)$ из G, то говорят, что w является **однозначной** (или **многозначной**) **комплексной функцией** комплексной переменной z, и пишут $w = u + iv = f(z)$. Модуль $|z|$ и аргумент $\operatorname{Arg} z$ переменной $z = x + iy$ являются соответственно однозначной и бесконечнозначной действительной функцией от z.

Множества D и G называются соответственно **множеством определения** функции $f(z)$ и **множеством ее изменения**. Далее функции предполагаются однозначными, если не оговорено противное. Задание функции комплексной переменной $w = u + iv = f(z)$ равносильно заданию двух функций двух действительных переменных

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y),$$

ставящих в соответствие каждой точке $z = (x, y)$ из D на плоскости Oxy (z-плоскости) точку $w = (u, v)$ из G на плоскости Ouv (w-плоскости). При этом $u(x,y)=\operatorname{Re} f(z)$; $v(x,y)=\operatorname{Im} f(z)$ или $w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)=|w|e^{i\theta}$. Главное значение аргумента θ_0 функции $w = u+iv$, удовлетворяющее условию $-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$, равно: $\theta_0 = \operatorname{arctg}(v/u)$ при $u > 0$; если $u < 0$ и $v \geqslant 0$ (либо $v < 0$), то $\varphi_0 = \operatorname{arctg}(v/u)+\pi$ (либо $\varphi_0 = \operatorname{arctg}(v/u)-\pi$). Величину θ_0 можно найти также из равенств: $\sin\theta_0 = v/r$, $\cos\theta_0 = u/r$, где $r = \sqrt{u^2+v^2}$.

Пример 6.

1) Для $f(z) = z = x + iy$ имеем $u(x, y) = \operatorname{Re} f(z) = x$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(z) = y$, $|f(z)| = \sqrt{x^2 + y^2}$. При $x > 0$ имеем $\theta_0 = \operatorname{arctg}(y/x)$ (для $x < 0$ см. выше).
2) Если $f(z) = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + i(2xy)$, то $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$, $|f(z)| = x^2 + y^2$; $\theta_0 = \operatorname{arctg}(v/u)$ при $u > 0$ (для $u < 0$ см. выше).
3) Для $f(z) = \sqrt{z}$ находим: $u + iv = \sqrt{z}$, $z = x + iy = u^2 - v^2 + i(2uv)$, $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$, $u = \pm\left[\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + y^2})\right]^{1/2}$, $v = \pm\left[\frac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2 + y^2})\right]^{1/2}$, $|f(z)| = \sqrt[4]{x^2 + y^2}$, $\theta_0 = \operatorname{arctg}(v/u) = \operatorname{arctg}\left[\sqrt{k^2 + 1} - k\right]$, $k = x/|y|$.

Функция $w = f(z)$ задает некоторое **отображение** множества D во множество G. Точка w из G (или совокупность точек) называется **образом** точки z из D, а точка z — **прообразом** точки w. Если $w = f(z)$ однозначна на D и при этом каждым двум различным точкам z_1 и z_2 из D всегда соответствуют разные точки $w_1 = f(z_1)$ и $w_2 = f(z_2)$ из G, то такое отображение называется **взаимно однозначным** или **однолистным**. Область D, в которой однозначная функция однолистна, называется **областью однолистности** этой функции. При однолистном отображении прообраз $z = g(w)$ можно рассматривать как однозначную функцию от w, которая называется **обратной** к функции $w = f(z)$. Отображение $w = f(z)$ взаимно однозначно тогда и только тогда, когда обе функции $f(z)$ и $g(w)$ однозначны.

Если функция $\widetilde{w} = f(z)$ отображает множество D во множество $\widetilde{G}$, а $w = g(\widetilde{w})$ — множество $\widetilde{G}$ в G, то функция $w = h(z) = g[f(x)]$, отображающая D в G, называется **сложной функцией**, составленной из функций f и g. В частности, если функция $w = f(z)$ — однолистная, а функция $z = g(w)$ — обратная к $f(z)$, то $g[f(z)] = z$.

10.2.2. Предел функции. Непрерывность

Пусть функция $w = u(x, y) + iv(x, y) = f(z) = f(x + iy)$ определена и однозначна в некоторой окрестности точки z_0, кроме, быть может, самой этой точки. Говорят, что существует **предел** функции $f(z)$ при $z \to z_0$ (запись: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$), если для любой последовательности $\{z_n\}$ точек из области определения функции, сходящейся к z_0, последовательность $\{w_n\} = \{f(z_n)\}$ сходится к числу $w_0 \neq \infty$. Запись $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = w_0$ равносильна следующей:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x, y) = u_0, \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x, y) = v_0,$$

где $z_0 = x_0 + iy_0$, $w_0 = u_0 + iv_0$, $u_0 \neq \infty$, $v_0 \neq \infty$.

Основные свойства пределов (предел суммы, разности, произведения, частного) сохраняются для функций комплексной переменной.

Однозначная функция $f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если она определена в некоторой окрестности z_0, включающей эту точку и

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = f(z_0) \neq \infty.$$

Для непрерывности $f(z)$ в z_0 необходима и достаточна непрерывность функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ в точке (x_0, y_0).

Функция, непрерывная в каждой точке области D, называется непрерывной в этой области. Понятие **равномерной непрерывности** функции комплексной переменной вводится по аналогии с действительными функциями многих переменных.

Функция $f(z)$ называется **ограниченной** в замкнутой области $\overline{D}$, если существует такое число $M > 0$, что $|f(z)| \leqslant M$ для каждой точки z из $\overline{D}$.

Поверхность в пространстве точек (x, y, h) с уравнением $h = h(x, y) \geqslant 0$, где $h(x, y) = |f(z)| = \sqrt{u^2 + v^2}$, называется **рельефом** функции

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y).$$

Некоторые простые примеры функций. Функция

$$w = P_n(z) \equiv a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_0$$

называется **целой рациональной функцией** или **полиномом** степени n (n — натуральное). При $n = 1$ полином $a_1 z + a_0$ называется **линейной функцией**. Если $a_1 = 0$, то линейная функция является **постоянной**.

Функция

$$w = \frac{P_n(z)}{Q_m(z)},$$

представляющая собой отношение двух полиномов, называется **дробно-рациональной функцией**. Ее частным случаем при $n = m = 1$ является **дробно-линейная функция**

$$w = \frac{a_1 z + a_0}{b_1 z + b_0}.$$

10.3. Аналитические функции

10.3.1. Производная функции. Условия Коши—Римана

Пусть функция $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ определена и однозначна в области D на плоскости переменной $z = x + iy$. Пусть точки z и $z + \Delta z$ принадлежат D. Разность $f(z + \Delta z) - f(z) = \Delta w = \Delta u + i\Delta v$ называется **приращением функции**, соответствующим приращению $\Delta z \neq 0$ аргумента z. Если существует конечный предел

$$\lim_{\Delta z\to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z),$$

не зависящий от способа стремления Δz к нулю, то этот предел называется **производной функции** $w = f(z)$ в точке z и обозначается одним из следующих способов:

$$f'(z) \equiv w'(z) \equiv \frac{dw}{dz} \equiv \frac{df(z)}{dz}.$$

Функция $f(z)$ называется при этом **дифференцируемой в точке** z. Функция, дифференцируемая в каждой точке области D, называется **дифференцируемой в этой области.**

Если Δz принимает чисто действительные либо чисто мнимые значения $\Delta z = \Delta x$, $\Delta z = i\Delta y$ соответственно, то

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -i\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Сравнивая оба эти выражения для производной, получим равенства

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{10.1}$$

называемые **условиями Коши—Римана** и являющиеся необходимыми условиями дифференцируемости функции $f(z)$ в точке z. Если кроме выполнения (10.1) в некоторой точке $z = x + iy$, у функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ существуют полные дифференциалы в той же точке (для этого достаточно, чтобы их частные производные u'_x, u'_y, v'_x, v'_y были непрерывны в указанной точке), то условия (10.1) являются достаточными для дифференцируемости $f(z) = u+iv$ в точке z. В этом случае производную от $w = f(z)$ можно найти по одной из формул:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}. \tag{10.2}$$

Свойства производной и правила дифференцирования остаются теми же, что и для действительных функций. В частности, если $w = f(z)$ и $z = g(w)$ — взаимно обратные функции, однолистные в окрестностях точек z и w, то

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta w \to 0} \frac{1}{(\Delta z/\Delta w)} = \frac{1}{g'(w)}.$$

Приращение Δw функции $w = f(z)$ можно записать в виде $\Delta w = dw + \alpha(\Delta z)$, где $dw = f'(z)\,dz$ — **дифференциал** функции $f(z)$, $dz = \Delta z$, а $\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{\alpha(\Delta z)}{\Delta z} = 0$, т. е. $\alpha(\Delta z)$ — малая высшего порядка относительно Δz при $\Delta z \to 0$.

Пример 7.

1) Для функции $f(z) = z^2$ имеем $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$ (см. пример 6, 2). Условия Коши—Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -2y,$$

а также непрерывности первых частных производных от $u(x, y)$ и $v(x, y)$ выполняются на всей комплексной плоскости. Имеем

$$f'(z) = 2x + i(2y) = 2z.$$

2) Если $f(z) = \bar{z} = x - iy$, то $u = x$, $v = -y$. Одно из условий Коши—Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1 \neq \frac{\partial v}{\partial y} = -1$$

нигде не выполняется. Следовательно, данная функция нигде не имеет производной.

3) Пусть $f(z) = (2z + 3)^2 = [g(z)]^2$, где $g(z) = 2z + 3$. По правилу дифференцирования сложной функции находим $f'(z) = 2g(z)g'(z) = 2(2z + 3) \cdot 2 = 8z + 12$.

10.3.2. Аналитические функции

Однозначная функция $f(z)$ называется **аналитической** (или **регулярной, моногенной, голоморфной**) в точке z, если она дифференцируема в некоторой окрестности этой точки (см. 10.3.1). Функция называется **аналитической в открытой области**, если она аналитична в каждой точке этой области.

Функция $f(z)$ называется **аналитической в бесконечности** (в точке $z = \infty$), если функция $g(z) = f(1/z)$ аналитична в точке $z = 0$. По определению $f'(\infty) = -(z^2\, dg/dz)$ при $z = 0$.

Однозначная функция $f(z)$ аналитична в точке $z = z_0$ (или $z = \infty$) тогда и только тогда, когда она представима в виде степенного ряда

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad \left[\text{или} \quad f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}\right],$$

сходящегося в некоторой окрестности точки z_0 (или $z = \infty$) (**альтернативное определение аналитической функции**).

Достаточное условие аналитичности функции. Для аналитичности однозначной в области D функции $f(z) = u + iv$ достаточно выполнение условий Коши—Римана (10.1) и непрерывности частных производных u'_x, u'_y, v'_x, v'_y всюду в этой области.

Обратная функция. Если функция $w = f(z)$ аналитична в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то $f(z)$ имеет обратную аналитическую функцию в точке $w_0 = f(z_0)$ — функцию $z = g(w)$.

Пример 8.

1) Функции $f(z) = z^2$, $f(z) = f(x + iy) = e^x e^{iy}$, $f(z) = (2z + 3)^2$ аналитичны на всей комплексной плоскости.

2) Функция $f(z) = \bar{z}$ нигде не является аналитичной (см. пример 7, **2**).

Точки, в которых функция аналитична, называются **правильными** (или **регулярными**) **точками**. Точки, в которых функция не аналитична, называются ее **особыми точками**.

Свойства аналитических функций

1. Если функция $f(z) = u + iv$ аналитична в открытой области D, то в каждой точке этой области существуют и являются аналитическими функциям производные любого порядка от $f(z)$.
2. Если функция аналитична во всей открытой плоскости и ограничена, то она постоянна. Или иначе: если функция аналитична в полной (замкнутой) плоскости, то она постоянна.
3. Функция, аналитическая (следовательно, непрерывная) в замкнутой области $\overline{D}$, имеет максимум модуля $|f(z)|$ на границе этой области.
4. Значения аналитической функции $f(z)$ в некоторой подобласти (например, линии) области D определяют эту функцию единственным образом всюду в D. Иначе говоря, если значения двух аналитических в области D функций $f_1(z)$ и $f_2(z)$ совпадают в некоторой подобласти D, то $f_1(z) \equiv f_2(z)$ всюду в области D (**теорема единственности аналитической функции**).
5. Для любой аналитической функции $f(z) = u + iv$ однозначные функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются сопряженными гармоническими функциями, т. е. удовлетворяющими уравнениям Лапласа $\Delta u = 0$, $\Delta v = 0$ и условиям Коши—Римана (10.1).
6. Если $w = f(\widetilde{w})$ и $\widetilde{w} = g(z)$ — обе аналитические, то сложная функция $w = f[g(z)]$ также является аналитической.
7. Сумма, разность, произведение, частное двух аналитических функций (если знаменатель не обращается в нуль) являются аналитическими функциями.

Нахождение аналитической функции по ее действительной части. Пусть в односвязной области D задана (однозначная) гармоническая функция $u(x, y)$, т. е. удовлетворяющая уравнению Лапласа

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

Если $u(x, y)$ является действительной частью некоторой аналитической функции $f(z) = u + iv$, то ее мнимая часть $v(x, y)$ находится по формуле

$$v(x, y) = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} -\frac{\partial u}{\partial y}\,dx + \frac{\partial u}{\partial x}\,dy + C,$$

где (x_0, y_0) — фиксированная точка в D, C — произвольное действительное число, а интеграл не зависит от вида пути интегрирования, соединяющего точки (x_0, y_0) и (x, y).

Пример 9. Полином $P_n(z)$ во всей плоскости и дробно-линейная функция $w = (a_1 z + a_0)/(b_1 z + b_0)$ при $z \neq -b_0/b_1$ (см. 10.2.2) являются аналитическими.

10.4. Интегрирование функций комплексной переменной

10.4.1. Определение интеграла и его свойства

Пусть C — кривая (путь интегрирования) на плоскости комплексной переменной $z = x + iy$ с концами в точках a и b, на которой задана функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Возьмем на C произвольные фиксированные точки $a \equiv z_0, z_1, z_2, \ldots, z_n \equiv b$, расположенные одна за другой, и составим сумму

$$J_n = \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k)\Delta z_k,$$

где ζ_k — произвольная промежуточная точка частичного отрезка $[z_{k-1}; z_k]$ кривой C; $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$. По определению, **интегралом** от функции $f(z)$ по кривой C (с начальной точкой a и конечной точкой b) называется комплексное число J, равное

$$J \equiv \int_C f(z)\,dz = \lim_{n\to\infty} J_n, \tag{10.3}$$

если соответствующий предел существует (при условии $\max|\Delta z_k| \to 0$) и не зависит от способа разбиения кривой C на частичные отрезки и от выбора промежуточных точек. Интеграл (10.3) всегда существует, если C — кусочно гладкая кривая, а $f(z)$ — кусочно непрерывная и ограниченная на C функция. Если кривая C содержит точку $z = \infty$ и (или) если $f(z)$ не ограничена на C, то интеграл (10.3) можно определить как **несобственный.** В общем случае интеграл (10.3) от функции $f(z)$ зависит от вида кривой C, соединяющей фиксированные точки a и b.

Отделяя в (10.3) действительную и мнимую части, получим

$$\int_C f(z)\,dz = \int_C \big[u(x,y) + iv(x,y)\big]\,d(x+iy) =$$

$$= \int_C u(x,y)\,dx - v(x,y)\,dy + i\int_C v(x,y)\,dx + u(x,y)\,dy,$$

где действительные интегралы берутся по той же кривой C.

Все свойства действительных интегралов переносятся на комплексные интегралы:

$$\int_C [k_1 f(z) + k_2 g(z)]\,dz = k_1 \int_C f(z)\,dz + k_2 \int_C g(z)\,dz,$$

$$\int_C f(z) = -\int_{C^-} f(z)\,dz, \qquad \int_{C_1+C_2} f(z)\,dz = \int_{C_1} f(z)\,dz + \int_{C_2} f(z)\,dz.$$

Здесь k_1, k_2 — любые комплексные числа; C^- — кривая, совпадающая с C, но проходимая в противоположном направлении; $C_1 + C_2$ — кривая, состоящая из частей C_1 и C_2.

Если $M = \max|f(z)|$ на кривой C и L — длина C, то

$$\left|\int_C f(z)\,dz\right| \leqslant ML.$$

Интеграл по замкнутой кривой C, называемой также (замкнутым) **контуром**, обозначается

$$\oint_C f(z)\,dz.$$

При этом предполагается, что обход контура C при интегрировании происходит в **положительном направлении**, при котором область, ограниченная этим контуром, остается слева.

Если кривая C имеет параметрическое представление

$$z = z(t) = x(t) + iy(t) \quad [\alpha \leqslant t \leqslant \beta,\ a = z(\alpha),\ b = z(\beta)],$$

то интеграл (10.3) по кривой C вычисляется по формуле

$$\int_C f(z)\,dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \varphi(t)\,dt + i\int_\alpha^\beta \psi(t)\,dt,$$

где $f[z(t)]z'(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$.

Пример 10. Вычислим интеграл от $f(z) = 1/z$ по окружности C радиуса R с центром в начале координат, обходимой в положительном направлении, т. е. против часовой стрелки.

Решение. Параметрическое уравнение этой окружности: $z = Re^{i\varphi} = R(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$. Имеем $dz = iRe^{i\varphi}\,d\varphi$, следовательно,

$$\oint_C \frac{dz}{z} = \oint_C \frac{iRe^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}}\,d\varphi = i\int_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi i. \qquad \triangleright$$

Аналогично вычисляется интеграл $J = \oint\limits_C z^n\,dz$, где n-целое число ($n \neq -1$):

$$J = iR^{n+1}\int\limits_0^{2\pi} e^{i(n+1)\varphi}\,d\varphi = iR^{n+1}\int\limits_0^{2\pi}\cos(n+1)\,\varphi\,d\varphi - R^{n+1}\int\limits_0^{2\pi}\sin(n+1)\,\varphi\,d\varphi = 0.$$

10.4.2. Интегральные теоремы и формулы

1. Интегральная теорема Коши. *Если функция $f(z)$ аналитична в некоторой односвязной области, то для всех кусочно гладких кривых C, полностью лежащих в этой области и соединяющих две фиксированные точки a и b из этой области, интеграл*

$$\int\limits_C f(z) = \int\limits_a^b f(z)\,dz$$

имеет одно и то же значение, зависящее только от положения точек a и b.

2. *Интеграл от аналитической функции $f(z)$ по любому замкнутому контуру, лежащему в односвязной области, равен нулю:*

$$\oint\limits_C f(z)\,dz = 0.$$

3. *Если $f(z)$ аналитична в односвязной области D, то интеграл от $f(z)$ по кривой C, у которой начальная точка a зафиксирована, является аналитической в D функцией от переменной конечной точки интегрирования (верхнего предела) z:*

$$\int\limits_a^z f(z)\,dz = \Phi(z).$$

При этом $\Phi'(z) = f(z)$. Функция $\Phi(z)$ называется ***первообразной*** *для $f(z)$. Любые две первообразные $\Phi(z)$ и $F(z)$ одной и той же функции $f(z)$ отличаются друг от друга на некоторое комплексное число A, т. е. $\Phi(z) = F(z)+A$, или*

$$\int\limits_a^z f(z)\,dz = F(z) + A.$$

Отсюда, при $z = a$, следует $F(a) = -A$. Полагая затем $z = b$, получим формулу

$$\int_a^b f(z)\,dz = F(b) - F(a),$$

где $F(z)$ — произвольная первообразная для $f(z)$. Совокупность всех первообразных $F(z)+A$ для $f(z)$ называется ***неопределенным интегралом*** *от $f(z)$. В простейших случаях неопределенные интегралы вычисляются по тем же формулам, что и для соответствующих действительных функций.*

Пример 11. Функция z^n, где n — целое число, при $n \geqslant 0$ аналитична во всей комплексной плоскости, а при $n \leqslant -1$ — в плоскости с исключенной точкой $z = 0$. В соответствии с примером 10 интеграл от функции z^n при $n \neq -1$ по любой кусочно гладкой кривой, не проходящей через точку $z = 0$ и соединяющей точки a и b, равен

$$\int_a^b z^n\,dz = \left.\frac{z^{n+1}}{n+1}\right|_a^b = \frac{1}{n+1}\left(b^{n+1} - a^{n+1}\right).$$

4. Интегральные формулы Коши. Пусть функция $f(z)$ аналитична в некоторой **односвязной** области D, C — замкнутый контур в D, окружающий точку $z_0 = x_0 + iy_0$, тогда значение функции $f(z_0)$ и любой ее производной $f^{(n)}(z_0)$ в точке z_0 находятся по **интегральным формулам Коши**:

$$\begin{gathered} f(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0}\,dz, \\ f'(z_0) = \frac{1!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2}\,dz, \\ f''(z_0) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^3}\,dz, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\,dz, \end{gathered} \tag{10.4}$$

где z — переменная интегрирования, обход контура C совершается в положительном направлении (при этом точка z_0 всегда находится слева от направления обхода). Формулы Коши выражают значение аналитической функции и ее производных в точках некоторой области через значения этой функции на контуре, ограничивающем область. При этом производные могут быть найдены в результате дифференцирования по z_0 под знаком интеграла в первой формуле (10.4).

Для любых двух замкнутых контуров C_1 и C_2 в D, окружающих точку z_0 и обходимых в одном и то же направлении, справедливо равенство:

$$\oint\limits_{C_1} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz = \oint\limits_{C_2} \frac{f(z)}{z-z_0}\,dz.$$

Если z_0 — какая-либо точка расширенной комплексной плоскости, лежащая **вне** замкнутой области, ограниченной контуром C, то интегралы в правых частях формул (10.4) обращаются в нуль.

5. Обобщение на многосвязные области. Пусть D — конечная $(m+1)$-связная область ($m=2$ на рис. 10.6), граница C которой состоит из $m+1$ попарно не пересекающихся кусочно гладких замкнутых контуров $C_0, C_1, \ldots, C_m$, где $C_1, C_2, \ldots, C_m$ лежат внутри C_0. Тогда, если $f(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\overline{D}$, то

$$\int\limits_{C} f(z)\,dz = \oint\limits_{C_0} f(z)\,dz + \sum_{k=1}^{m} \oint\limits_{C_k} f(z)\,dz = 0,$$

где все контуры $C_0, C_1, \ldots, C_m$ обходятся в положительном направлении (т. е. область D при обходе остается слева). При изменении направлений обхода контуров $C_1, \ldots, C_m$ на противоположные знаки соответствующих интегралов заменяются на противоположные.

Пусть D — конечная m-связная область, граница C которой состоит из замкнутых контуров $C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}$. Если $f(z)$ аналитична в D и непрерывна в $\overline{D}$, то для любой внутренней точки z_0 области D (рис. 10.6)

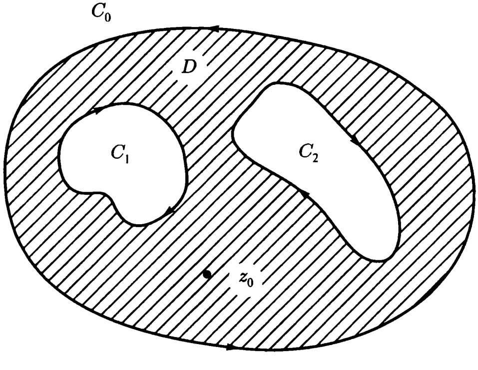


Рис. 10.6

справедливы формулы (10.4), в которых интегрирование проводится по всем контурам $C_0, C_1, \ldots, C_{m-1}$, ограничивающим D и проходимым в положительном направлении (вычисленные по отдельным контурам интегралы затем складываются). Для точек z_0 вне области $\overline{D}$ интегралы в правых частях формул (10.4) равны нулю.

Пример 12. При помощи формул Коши (10.4) вычислим интеграл

$$J = \oint\limits_C (z - z_0)^n \, dz,$$

где C — окружность радиуса R с центром в точке z_0, обходимая против часовой стрелки; n — целое число.

Решение. При $n = -1$ находим по первой формуле (10.4):

$$J = \oint\limits_C \frac{dz}{z - z_0} = 2\pi i f(z_0) = 2\pi i \quad (\text{здесь } f(z) = 1).$$

Дифференцируя обе части этого равенства $(n-1)$ раз по z_0, получим:

$$\oint\limits_C \frac{dz}{(z - z_0)^n} = 0,$$

т. е. исходный интеграл J равен нулю при $n \neq -1$. Таким образом, $J = 2\pi i$ при $n = -1$, $J = 0$ при $n \neq -1$. Непосредственное вычисление данного интеграла дает тот же результат (см. пример 10, в котором следует положить $z = z_0 + Re^{i\varphi}$). ▷

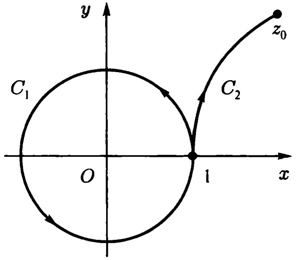


Рис. 10.7

Пример 13. Функция $f(z) = 1/z$ аналитична в двухсвязной области $0 < |z| < R$, где $R > 0$ — любое число. Вычислим интеграл от $f(z)$ по кривой C, которая выходит из точки $z = 1$, и, обойдя вокруг точки $z = 0$ один раз по окружности $|z| = 1$ (C_1) против часовой стрелки, идет затем из точки $z = 1$ в точку z_0 (C_2) (рис. 10.7):

$$J = \int\limits_C \frac{dz}{z} = \oint\limits_{C_1} \frac{dz}{z} + \int\limits_1^{z_0} \frac{dz}{z} = 2\pi i + \ln z\Big|_1^{z_0} = $$
$$= 2\pi i + \ln z_0.$$

Здесь интеграл по C_1 вычислен в примере 10, а $\ln z$ — первообразная для $1/z$ такая, что ее значение равно нулю при $z = 1$, а затем изменяется непрерывно вдоль C_2. При этом кривая C_2 может быть помещена в некоторую односвязную область, не содержащую точку $z = 0$. Если точку $z = 0$ обойти n раз, прежде чем попасть в точку z_0, то $J = 2n\pi i + \ln z_0$. Здесь интеграл $J \equiv \operatorname{Ln} z_0$ является многозначной функцией от z_0.

10.5. Представление аналитических функций рядами

10.5.1. Функциональные ряды. Степенные ряды

1. **Функциональным** называется ряд

$$f_1(z) + f_2(z) + \ldots + f_n(z) + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(z), \tag{10.5}$$

членами которого являются комплексные функции $f_n(z)$, определенные в некоторой области D на z-плоскости. Множество всех точек, в которых ряд (10.5) сходится, называется **областью сходимости** ряда. Предел $S(z)$ частичных сумм ряда называется **суммой ряда**

$$S(z) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(z) = \lim_{n\to\infty} S_n(z).$$

Понятие **равномерной сходимости** ряда (10.5) вводится по аналогии с равномерной сходимостью ряда действительных функций.

2. **Степенным рядом** называется функциональный ряд вида

$$a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots + a_n(z - z_0)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n, \tag{10.6}$$

где z_0, a_n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ — комплексные числа, z — комплексная переменная. Если $z_0 = 0$, то ряд (10.6) принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n. \tag{10.7}$$

К такому же виду приводится ряд (10.6) преобразованием $\zeta = z - z_0$. Ряд (10.6) определен на всей z-плоскости. Существуют степенные ряды, область сходимости которых состоит из единственной точки $z = z_0$ (или $z = 0$); а также ряды, сходящиеся во всей z-плоскости.

Теорема Абеля. *Если степенной ряд (10.6) сходится в точке $z \neq z_0$, то этот ряд: 1) либо сходится абсолютно во всей z-плоскости, 2) либо существует действительное число $R > 0$ такое, что ряд сходится абсолютно для всех z в области $|z - z_0| < R$ (включая z_0) и расходится при $|z - z_0| > R$. Круг $|z - z_0| < R$ называется **круг сходимости** этого ряда, R — **радиусом сходимости**. Ряд (10.6) может сходиться в одних точках окружности*

$|z - z_0| = R$ и расходиться в других. Радиус сходимости ряда (10.6) равен радиусу сходимости действительного степенного ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n| r^n$. При $R = 0$ ряд (10.6) сходится только в точке $z = z_0$, а если $R = \infty$, то ряд сходится во всей z-плоскости.

Радиус сходимости степенного ряда (10.6) может быть найден по одной из следующих двух формул:

$$1)\ R = \frac{1}{q},\ q = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|};\quad 2)\ R = \frac{1}{q},\ q = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|,$$

если соответствующий предел существует.

Может оказаться, что действительная последовательность $|a_1|$, $\sqrt{|a_2|}$, $\sqrt[3]{|a_3|}, \ldots$ не имеет предела (конечного или бесконечного), но из ее членов можно извлечь подпоследовательности (с возрастающими номерами членов) такие, что они имеют пределы (называемые частичными пределами), тогда R находится по формуле **Коши—Адамара**:

$$R = \frac{1}{q},\quad q = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|},$$

где $\overline{\lim}$ — наибольший из частичных пределов последовательности $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$. Например, последовательность $1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 2, \ldots, \frac{1}{n}, 2, \ldots$ имеет два частичных предела 0 и 2. Наибольший частичный предел здесь равен 2.

Пример 14.

1) Ряд $1 + 2z + 3z^2 + \ldots + nz^{n-1} + (n+1)z^n + \ldots$ имеет радиус сходимости $R = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{n+1} = 1$.

2) Для ряда $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n! z^n$ находим $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left[1 : \dfrac{(n+1)!}{n!}\right] = 0$.

3) Ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$ имеет $R = 1$.

4) Для ряда $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n z^n$ находим $q = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n^n} = \infty$, $R = \dfrac{1}{q} = 0$.

5) Ряд $1 + \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ имеет $R = \lim\limits_{n\to\infty} \left[1 : \dfrac{n!}{(n+1)!}\right] = \infty$.

6) Для ряда $1 - z^2 + z^4 - \ldots + (-1)^n z^{2n} - \ldots$ последовательность его коэффициентов имеет вид: $1; 0; -1; 0; 1; \ldots$. Верхний предел последовательности $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ равен $q = 1$ (нижний предел равен 0). Следовательно, $R = 1$.

7) Для ряда $z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1} + \ldots$ имеем последовательность коэффициентов $1; 0; -\frac{1}{3}; \frac{1}{5}; \ldots; (-1)^n \frac{1}{2n+1}; \ldots$. Верхний предел последовательности $\{\sqrt[n]{|a_n|}\}$ равен $q = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2n+1}\right)^{\frac{1}{2n+1}} = 1$. Следовательно, $R = 1$. Нижний предел равен 0.

В круге сходимости сумма $S(z)$ любого степенного ряда является аналитической функцией, дифференцирование и интегрирование которой проводится почленным дифференцированием и интегрированием этого ряда по z. В результате этих действий радиус сходимости исходного ряда не изменяется. Если степенные ряды имеют общий круг сходимости, то внутри этого круга сумму, разность и произведение степенных рядов можно представить в виде степенного ряда с таким же кругом сходимости. Деление комплексных степенных рядов производится по аналогии с делением действительных степенных рядов.

10.5.2. Ряды Тейлора

Сумма $S(z)$ степенного ряда в круге его сходимости является аналитической функцией. Справедливо и обратное утверждение, называемое **теоремой Тейлора**: аналитическая в области D функция $f(z)$ в некоторой окрестности каждой точки z_0 $(z_0 \neq \infty)$, принадлежащей D, может быть представлена единственным степенным рядом

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

радиус сходимости R которого не меньше расстояния d от z_0 до границы C области D. Комплексные числа a_n находятся по формуле

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C'} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}}\, dz = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0),$$

где C' — окружность $|z - z_0| = R' < d$.

Ряд

$$f(z) = f(z_0) + \frac{f'(z_0)}{1!}(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n + \ldots \qquad (10.8)$$

называется **рядом Тейлора** (или **разложением Тейлора**) функции $f(z)$ в круговой окрестности точки z_0 и имеет радиус сходимости не меньше, чем d. Любой степенной ряд в своем круге сходимости является рядом Тейлора для его суммы.

Примечание. Если аналитическая функция определена на всей комплексной плоскости, за исключением, быть может, изолированных особых точек, то граница круга сходимости ее степенного ряда проходит через ближайшую к его центру особую точку этой функции.

Нулем функции $f(z)$ называется всякая точка $z = z_0$ такая, в которой $f(z_0) = 0$. Номер $m \geqslant 1$ младшего не равного нулю коэффициента ряда Тейлора для $f(z)$ в окрестности z_0 называется **порядком** нуля z_0, т.е.

$$f(z) = a_m(z - z_0)^m + a_{m+1}(z - z_0)^{m+1} + \ldots \quad (a_m \neq 0),$$

или

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z),$$

где $g(z)$ аналитична в окрестности точки z_0, $g(z_0) \neq 0$. Если $m = 1$, то нуль z_0 называется **простым**.

Пример 15. Показательная функция e^z комплексной переменной z **определяется** как сумма сходящегося всюду ряда

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots \quad (R = \infty).$$

Очевидно, что $(e^z)' = e^z$, $e^0 = 1$.

Аналогично **определяются** функции $\sin z$ и $\cos z$:

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots \quad (R = \infty),$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots \quad (R = \infty).$$

При действительных значениях $z = x$ ряды, представляющие e^z, $\sin z$, $\cos z$ (см. пример 15), совпадают с рядами для функций e^x, $\sin x$, $\cos x$. Поскольку соответствующие действительные ряды абсолютно сходятся для любого числа x, то по теореме Абеля эти ряды абсолютно сходятся и для любого комплексного числа z. Заменив z на iz в разложении e^z, получим:

$$e^{iz} = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \ldots =$$

$$= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots\right) = \cos z + i \sin z.$$

Аналогично, $e^{-iz} = \cos z - i \sin z$. Отсюда, в частности, следует

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}).$$

Перемножая два абсолютно сходящихся ряда для e^{z_1} и e^{z_2}, найдем

$$e^{z_1}e^{z_2} = \left(1 + z_1 + \frac{z_1^2}{2!} + \ldots\right)\left(1 + z_2 + \frac{z_2^2}{2!} + \ldots\right) =$$
$$= 1 + (z_1 + z_2) + \frac{(z_1 + z_2)^2}{2!} + \ldots = e^{(z_1+z_2)}.$$

Следовательно, $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$. Полагая здесь $x = 0$, $y = \varphi$, получим **формулу Эйлера**

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i \sin\varphi.$$

Пример 16. Разложим $w = f(z) = \ln(1 + z)$ в ряд в окрестности $z = 0$. Эта функция аналитична и однозначна в любой односвязной области, не содержащей точку $z = -1$ (см. пример 13). **Логарифмическая функция определяется** как обратная к показательной, т. е., если $w = \ln z$, то $z = e^w = e^{\ln z}$. Дифференцируя $z = e^{\ln z}$ по z как сложную функцию, получим $1 = e^{\ln z}(\ln z)'$. Отсюда $(\ln z)' = 1 : e^{\ln z} = 1/z$. Следовательно, $f(0) = 0$, $f'(0) = \left[\ln(1 + z)\right]'_{z=0} = \left.\frac{1}{1 + z}\right|_{z=0} = 1$, $f''(0) = -\frac{1}{2}$, $f'''(0) = \frac{1}{3}$, ... Таким образом,

$$\ln(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots .$$

Радиус сходимости ряда $R = \lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1$. Ряд сходится при всех $|z| < 1$.

Примечание. Здесь $\ln(1+z)$ означает **главную ветвь** многозначной функции $\mathrm{Ln}(1+z)$, для которой $f(0) = 0$ (см. 10.9.2, 6).

10.5.3. Ряд Лорана

В любой точке z кольца $r < |z - z_0| < R$, где $r \geqslant 0$, $R \leqslant \infty$, между концентрическими окружностями с общим центром в точке $z = z_0$ $(z_0 \neq \infty)$, в котором аналитична функция $f(z)$, эта функция может быть представлена (разложена) единственным образом в виде ряда по положительным и отрицательным степеням $(z - z_0)$, равномерно сходящимся в любой замкнутой области, принадлежащей этому кольцу:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n(z - z_0)^{-n}, \tag{10.9}$$

коэффициенты которого находятся по формулам:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \\ b_n &= \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C (z - z_0)^{n-1} f(z)\,dz \quad (n = 1, 2, \ldots). \end{aligned} \tag{10.10}$$

Здесь C — произвольный замкнутый контур внутри указанной кольцевой области, охватывающий точку z_0 (например, любая окружность $|z - z_0| = \rho$, где $r < \rho < R$), обход которого совершается в положительном направлении (против часовой стрелки). Ряд в (10.9), коэффициенты которого находятся по формулам (10.10), называется **рядом Лорана** или **лорановским разложением** функции $f(z)$. Первое слагаемое в правой части (10.9) называется **правильной (регулярной)** частью, а второе — **главной частью** ряда Лорана. Объединяя оба ряда (10.9) в один, можно записать

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{f(z)\,dz}{(z - z_0)^{n+1}}, \tag{10.11}$$

где $n = 0, \pm 1; \pm 2, \ldots$.

Если ряд $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n(z-z_0)^n$ сходится в кольце $r < |z-z_0| < R$, то его сумма $f(z)$ аналитична в этом кольце, а указанный ряд является рядом Лорана для $f(z)$.

Ряд Тейлора является частным случаем ряда Лорана, в котором все $a_n = 0$ при $n = -1, -2, \ldots$.

Пример 17. Разложим $f(z) = \dfrac{1}{z(z-1)}$ в ряд Лорана при $z_0 = 0$. Ближайшей к $z_0 = 0$ особой точкой функции является $z_1 = 1$. Следовательно, $r = 0$, $R = 1$. Согласно (10.11), учитывая разложение

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots = \sum_{m=0}^{\infty} z^m \quad (|z| < 1),$$

получим

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \frac{dz}{z^{n+2}(z-1)} = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C \left(\sum_{m=0}^{\infty} z^m\right) \frac{dz}{z^{n+2}} = -\frac{1}{2\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \oint\limits_C \frac{dz}{z^{n-m+2}},$$

где C — окружность $|z| = R < 1$. Используя показательную форму комплексного числа, найдем (см. пример 10):

$$a_n = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\pi i} \cdot 2\pi i = -1 & \text{при} \quad n - m + 2 = 1, \\ 0 & \text{при} \quad n - m + 2 \neq 1. \end{cases}$$

Следовательно, $a_n = -1$ при $n = m - 1$, т. е. при $n \geqslant -1$, так как $m = 0, 1, 2, \ldots$; $a_n = 0$ при $n \neq m - 1$, т. е. при $n < -1$.

Таким образом, получим искомое разложение

$$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \ldots,$$

которое можно получить также и непосредственно, используя разложение для $(1-z)^{-1}$.

10.5.4. Особые точки

Точка z_0 называется изолированной особой точкой (однозначной) функции $f(z)$, если в некоторой окрестности $0 < |z - z_0| < R$ точки z_0 эта функция аналитична всюду, кроме самой точки z_0. Особые точки многозначного характера рассматриваются в 10.8. В любом кольце $0 < r < |z - z_0| < R$ аналитическая функция $f(z)$ имеет лорановское разложение вида (10.11).

Различают следующие три типа изолированных особых точек $z = z_0 \neq \infty$, в зависимости от вида разложения функции $f(z)$ в ряд Лорана (10.11) в окрестности точки z_0:

1. Устранимая особая точка, если главная часть ряда Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 отсутствует, т. е. $a_n = 0$ при $n = -1, -2, \ldots$ и ряд Лорана обращается в ряд Тейлора. При этом: а) либо $f(z_0) = a_0$, т. е. $f(z)$ аналитична в точке z_0, являющейся **правильной точкой**; б) либо $f(z_0) \neq a_0 = \lim\limits_{\substack{z\to z_0 \\ z\neq z_0}} f(z) = S(z_0) \neq \infty$, где $S(z)$ — сумма ряда $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$, совпадающая с $f(z)$ при $z \neq z_0$, тогда z_0 является **устранимой особой точкой**, так как, приняв, что $f(z_0) = a_0 = \lim\limits_{\substack{z\to z_0 \\ z\neq z_0}} f(z)$, получим функцию, аналитическую и в точке z_0. Говорят также, что в случае б) функция $f(z)$ **доопределена в точке z_0 по непрерывности**.

Если функция $f(z)$ ограничена в достаточно малой окрестности точки z_0, то z_0 — устранимая особая точка. Справедливо и обратное утверждение.

2. Полюс порядка m $(m = 1, 2, \ldots)$, если главная часть ряда Лорана для $f(z)$ в окрестности точки z_0 содержит лишь конечное число членов с отрицательными степенями

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots,$$

где $a_{-m} \neq 0$; $a_n = 0$ при $n = -m - 1, -m - 2, \ldots$. При $m = 1$ полюс называется **простым**. В случае полюса z_0 существует предел $\lim\limits_{\substack{z\to z_0 \\ z\neq z_0}} f(z) = \infty$.

Если $\lim\limits_{z\to z_0} (z - z_0)^m f(z) = A$, то $A \neq 0$, $A \neq \infty$.

Если точка z_0 является нулем кратности m функции $g(z)$, аналитической в некоторой области, содержащей z_0, т. е. $g(z) = (z - z_0)^m \varphi(z)$, где $\varphi(z)$ аналитична в окрестности точки z_0 (включая эту точку) и $\varphi(z_0) \neq 0$, то функция $f(z) = \dfrac{1}{g(z)}$ аналитична в некоторой окрестности $0 < |z - z_0| < \delta$ точки z_0 (кроме этой точки), которая является полюсом порядка m для $f(z)$. Учитывая разложение в ряд Тейлора аналитической в окрестности точки z_0

(включающей эту точку) функции $\dfrac{1}{\varphi(z)}$

$$\frac{1}{\varphi(z)} = b_0 + b_1(z - z_0) + b_2(z - z_0)^2 + \ldots; \quad b_0 = \frac{1}{\varphi(z_0)} \neq 0,$$

можно записать лорановское разложение функции $f(z)$ в окрестности $0 < |z - z_0| < \delta$ точки z_0:

$$f(z) = \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{(z - z_0)^m \varphi(z)} = \frac{b_0}{(z - z_0)^m} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \ldots + \frac{b_{m-1}}{z - z_0} + \\ + b_m + b_{m+1}(z - z_0) + b_{m+2}(z - z_0)^2 + \ldots .$$

Если точка $z = z_0$ — полюс порядка m для $f(z)$, то $g(z) = \dfrac{1}{f(z)}$ имеет в точке z_0 нуль кратности m.

3. **Существенно особая точка**, если в разложении Лорана функции $f(z)$ в окрестности точки z_0 имеется бесконечное множество слагаемых с отрицательными степенями (см. ряд (10.9)). В этом случае не существует ни конечного, ни бесконечного предела $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$.

Свойства аналитической функции вблизи существенно особой точки:

1) Если в некоторой окрестности существенно особой точки z_0 аналитическая функция $f(z) \neq 0$, то z_0 является существенно особой и для функции $1/f(z)$.
2) **Теорема Сохоцкого.** Если z_0 — существенно особая точка однозначной аналитической функции, то для любого комплексного числа A (а также ∞) найдется последовательность точек $z_n \to z_0$ такая, что $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$.
3) **Теорема Пикара.** В любой окрестности существенно особой точки z_0 содержится бесконечное множество точек z таких, что $f(z) = A$, где A — любое комплексное число ($A \neq \infty$), за исключением, быть может, одного.

Пример 18.

1) Аналитическая в окрестности $z = 0$ функция $(\sin z)/z$ имеет устранимую особую точку $z = 0$. Действительно, используя разложение $\sin z$ в ряд (см. пример 15), получим (при любом $z \neq 0$)

$$\frac{\sin z}{z} = 1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots,$$

т. е. ряд Лорана в окрестности $z = 0$ не имеет главной части. Приняв, что $(\sin z)/z = 1$ при $z = 0$, получим аналитическую и в точке $z = 0$ функцию.

2) Функция $\dfrac{1 - e^z}{z}$ имеет устранимую особую точку $z = 0$, так как

$$\frac{1 - e^z}{z} = -1 - \frac{z}{2!} - \frac{z^2}{3!} - \ldots .$$

3) $f(z) = \dfrac{1}{(z-z_0)^2}$ имеет полюс порядка $m = 2$ в точке $z = z_0$, так как функция $g(z) = 1/f(z) = (z-z_0)^2$ имеет нуль второго порядка в точке $z = z_0$.
4) $f(z) = e^z/z$ имеет полюс порядка 1 в точке $z = 0$, так как при $z \neq 0$
$$\frac{e^z}{z} = \frac{1}{z} + 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \dots .$$
5) Функция $e^{1/z}$ имеет существенно особую точку $z = 0$, так как, подставив $1/z$ (при $z \neq 0$) вместо z в ряд Тейлора для e^z (см. пример 15), получим
$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!z^2} + \frac{1}{3!z^3} + \dots .$$
6) $f(z) = \sin(1/z)$ имеет существенно особую точку $z = 0$, так как, подставив $1/z$ (при $z \neq 0$) вместо z в ряд Тейлора для $\sin z$ (см. пример 15), получим
$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!z^3} + \frac{1}{5!z^5} - \frac{1}{7!z^7} + \dots .$$
7) Функция $1/(\sin z)$ имеет бесконечное множество простых полюсов в точках $z = n\pi$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) действительной оси, в которых $\sin z$ имеет нули первого порядка.

10.5.5. Нули и особые точки в бесконечности

Если функция $f(z)$ аналитична (т. е. не имеет особых точек) вне окружности с центром в точке $z = 0$ и достаточно большого радиуса R (исключая точку $z = \infty$), то говорят, что бесконечно удаленная точка $z = \infty$ является изолированной особой точкой этой функции.

Для изучения поведения функции $f(z)$, аналитической в окрестности точки $z = \infty$ (кроме точки $z = \infty$), т. е. при $|z| > R$ и $z \neq \infty$, полагают $z = 1/\zeta$ и рассматривают затем поведение функции $g(\zeta) = f(1/\zeta) = f(z)$ в комплексной ζ — плоскости в окрестности $|\zeta| < 1/R$ точки $\zeta = 0$ (кроме точки $\zeta = 0$), при этом $\lim\limits_{\zeta\to 0} g(\zeta) = \lim\limits_{z\to\infty} f(z)$. Функция $f(z)$ аналитична в точке $z = \infty$ и ее окрестности, если функция $g(\zeta) = f(1/\zeta)$ аналитична в точке $\zeta = 0$ и ее окрестности. Точка $z = \infty$ является нулем кратности m функции $f(z)$, если точка $\zeta = 0$ — нуль кратности m для $g(\zeta)$. Для разложения $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ сначала находят разложение в ряд Лорана функции $g(\zeta) = f(1/\zeta)$ в окрестности $0 < |\zeta| < 1/R$ точки $\zeta = 0$:
$$g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n\zeta^n + \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}\zeta^{-n},$$
в котором заменяют затем ζ на $1/z$:
$$f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{-n}z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}. \tag{10.12}$$

Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_{-n}z^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$ в (10.12) называются соответственно **главной** и **правильной** частями ряда Лорана (10.12) функции $f(z)$ в окрестности $|z| > R$ особой точки $z = \infty$.

Если точка $\zeta = 0$ для функции $g(\zeta) = f(1/\zeta)$ является: 1) устранимой особой точкой, 2) полюсом порядка m, 3) существенно особой точкой, то точка $z = \infty$ для $f(z)$ будет соответственно: 1) устранимой особой точкой, 2) полюсом порядка m, 3) существенно особой точкой. При этом множество отличных от нуля коэффициентов b_{-n} при положительных степенях z в разложении (10.12): 1) пусто, 2) конечно, 3) бесконечно.

Все изложенное в 10.5.4 о поведении аналитической функции в окрестности конечной изолированной особой точки справедливо и для изолированной особой точки $z = \infty$.

Пример 19.

1) Разложим функцию $e^{1/z}$ в ряд Лорана в окрестности точки $z = \infty$ и определим тип этой точки. Полагая $\zeta = 1/z$ и раскладывая e^{ζ} в ряд окрестности $\zeta = 0$, получим
$$e^{\zeta} = 1 + \frac{\zeta}{1!} + \frac{\zeta^2}{2!} + \ldots .$$
Заменяя здесь ζ на $1/z$, получим искомое разложение в окрестности $z = \infty$
$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{1!z} + \frac{1}{2!z^2} + \ldots .$$
Разложение $e^{1/z}$ в окрестности $z = \infty$ формально совпадает с разложением $e^{1/z}$ в окрестности точки $z = 0$ (см. пример 18). Однако разложение в окрестности точки $z = \infty$ содержит лишь правильную часть, тогда как разложение в окрестности $z = 0$ имеет только главную часть соответствующего ряда Лорана. Точка $z = \infty$ является устранимой особой точкой для $e^{1/z}$ (если принять, что $e^{1/z} = 1$ при $z = \infty$), поскольку $\zeta = 0$ для e^{ζ} является правильной точкой. То есть $e^{1/z}$ аналитична в точке $z = \infty$.
2) Для функции $f(z) = (z^2 + 4)e^{-z}$ точка $z = \infty$ является существенно особой, так как, сделав замену $z = 1/\zeta$ $(\zeta \neq 0)$, получим
$$g(\zeta) = f\left(\frac{1}{\zeta}\right) = \left(\frac{1}{\zeta^2} + 4\right)e^{-1/\zeta} =$$
$$= \left(\frac{1}{\zeta^2} + 4\right)\left(1 - \frac{1}{1!\zeta} + \frac{1}{2!\zeta^2} - \ldots\right) = 4 - \frac{4}{\zeta} + \frac{3}{\zeta^2} - \ldots .$$
Следовательно, $\zeta = 0$ является существенно особой точкой функции $g(\zeta)$, а $z = \infty$ — существенно особой точкой функции $f(z)$.
3) Для функции $f(z) = z^3$ точка $z = \infty$ является полюсом порядка $m = 3$. Сделав замену $z = 1/\zeta$ $(\zeta \neq 0)$, получим $g(\zeta) = f(1/\zeta) = 1/\zeta^3$. Следовательно, $g(\zeta)$ имеет в точке $\zeta = 0$ полюс порядка 3, а функция $f(z)$ — полюс порядка 3 в точке $z = \infty$.

4) Функция $f(z) = \dfrac{1}{1-z}$ при помощи замены $z = 1/\zeta$ ($\zeta \neq 0$) переходит в функцию $g(\zeta) = f(1/\zeta) = \dfrac{\zeta}{\zeta - 1}$. Ближайшей к точке $\zeta = 0$ особой точкой является $\zeta = 1$, следовательно, радиус сходимости ряда Тейлора для $g(\zeta)$ в окрестности $\zeta = 0$ равен $R = 1$. Функция $g(\zeta)$ имеет следующее разложение в окрестности $\zeta = 0$:

$$g(\zeta) = -\zeta - \zeta^2 - \zeta^3 - \ldots = -\zeta(1 + \zeta + \zeta^2 + \ldots), \quad |\zeta| < 1.$$

Полагая $g(0) = 0$, находим, что устранимая особая точка $\zeta = 0$ является нулем первого порядка для $g(\zeta)$. Ряд для $f(z)$ в окрестности $z = \infty$ имеет вид

$$f(z) = g\left(\frac{1}{z}\right) = -\frac{1}{z} - \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} - \ldots = -\frac{1}{z}\left(1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \ldots\right).$$

Полагая $f(\infty) = 0$, достигаем того, что $z = \infty$ становится устранимой особой точкой, а также нулем первого порядка для $f(z)$.

5) Функции e^z, $\cos z$, $\sin z$ имеют существенно особую точку $z = \infty$, что видно из разложений $e^{1/\zeta}$, $\cos(1/\zeta)$, $\sin(1/\zeta)$ (при $\zeta \neq 0$) в окрестности $\zeta = 0$ (см. пример 18).

10.6. Вычеты и контурные интегралы

10.6.1. Основные понятия

Если $z = z_0 \neq \infty$ — конечная изолированная особая точка (однозначной) аналитической функции $f(z)$, то коэффициент a_{-1} при $(z - z_0)^{-1}$ в разложении Лорана функции $f(z)$ в окрестности z_0

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + a_2(z - z_0)^2 + \ldots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + \frac{a_{-2}}{(z - z_0)^2} + \ldots$$

называется **вычетом** функции $f(z)$ относительно точки z_0. Обозначения вычета: $\operatorname{Res} f(z_0)$, $\operatorname{res} f(z_0)$, Выч $f(z_0)$, $\operatorname*{Res}_{z=z_0} f(z)$, $\operatorname{Res}[f(z), z_0]$.

Из формулы (10.11) для коэффициентов ряда Лорана при $n = -1$ следует

$$\operatorname{Res} f(z_0) = a_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_C f(z)\, dz,$$

где C — произвольный замкнутый контур, охватывающий (только одну) особую точку z_0, обход которого происходит против часовой стрелки, так что z_0 остается при этом слева. Обычно в качестве C берут окружность $|z - z_0| = r$ достаточно малого радиуса r. При этом величина вычета не зависит от r. Для конечной устранимой особой точки z_0 вычет равен нулю: $\operatorname{Res} f(z_0) = 0$.

Если изолированная особая точка z_0 аналитической функции $f(z)$ является бесконечно удаленной ($z_0 = \infty$) и лорановское разложение $f(z)$

в окрестности $z_0 = \infty$ имеет вид $\sum\limits_{n=-\infty}^{+\infty} a_n z^n$, то вычет функции $f(z)$ относительно $z_0 = \infty$ равен (см. пример 10):

$$\operatorname{Res} f(\infty) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C^-} f(z)\,dz = -\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C} f(z)\,dz = -\frac{a_{-1}}{2\pi i} \oint\limits_{C} \frac{dz}{z} = -a_{-1}, \tag{10.13}$$

где C^- — окружность $|z| = R$ достаточно большого радиуса R (чтобы область $|z| > R$ содержала единственную особую точку $z_0 = \infty$), проходимая по часовой стрелке, так что окрестность точки $z_0 = \infty$ остается слева, C — та же окружность, но проходимая против часовой стрелки. Из формулы (10.13), в частности, следует, что вычет относительно бесконечно удаленной устранимой особой точки может и не равняться нулю (в отличие от конечной устранимой особой точки). Например, для функции $f(z) = 1/z$ точка $z = \infty$ является нулем, однако $\operatorname{Res} f(\infty) = -1$.

Теорема о вычетах. *Пусть (однозначная) функция $f(z)$ аналитична в ограниченной области D, за исключением конечного числа изолированных особых точек $z_1, z_2, \ldots, z_n$. И пусть контур C охватывает все эти точки, не проходит ни через одну из них и полностью принадлежит области D (рис. 10.8) вместе со своей внутренностью. Тогда выполняется равенство:*

$$\oint\limits_{C} f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Res} f(z_k); \qquad \operatorname{Res} f(z_k) = \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{C_k} f(z)\,dz,$$

где C_k — окружность $|z - z_k| = r_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Примечание. Если D является n-связной ограниченной областью, то ее граница C состоит из n попарно не пересекающихся замкнутых контуров, проходимых в положительном направлении.

Таким образом, вычисление интеграла по некоторому замкнутому контуру C сводится к нахождению вычетов относительно конечного числа точек, находящихся внутри этого контура.

Из теоремы о вычетах, в частности, следует, что если $f(z)$ аналитична на расширенной (полной) комплексной плоскости, кроме конечного числа изолированных особых точек $z_0 = \infty, z_1, z_2, \ldots, z_n$, то сумма вычетов относительно всех особых точек (включая $z_0 = \infty$) равна нулю:

$$\sum_{k=0}^{n} \operatorname{Res} f(z_k) = 0.$$

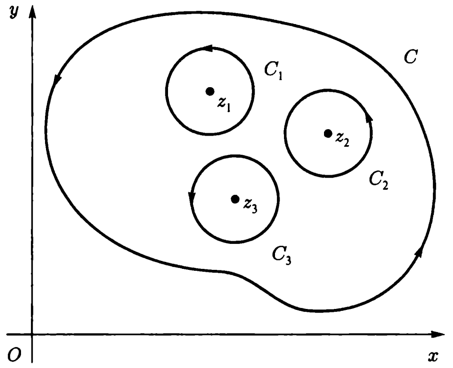


Рис. 10.8

Вычисление вычета функции относительно полюса. Если точка $z = z_0 \neq \infty$ — полюс порядка m функции $f(z)$, имеющей лорановское разложение

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z - z_0)^m} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \ldots,$$

то вычет относительно полюса z_0 может быть найден по формуле

$$a_{-1} = \operatorname{Res} f(z_0) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z - z_0)^m f(z) \right].$$

При $m = 1$ отсюда следует

$$a_{-1} = \operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0} (z - z_0) f(z) \quad (0! = 1).$$

Если $f(z)$ аналитична в точке $z_0 \neq \infty$ или z_0 — устранимая особая точка, то $\operatorname{Res} f(z_0) = 0$.

Вычет функции $f(z)$ относительно точки $z = \infty$ находится по формуле

$$\operatorname{Res} f(z) = \lim_{z \to \infty} [-z f(z)],$$

при условии существования предела.

Если $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)}$, где функции $p(z)$, $q(z)$ аналитичны в точке $z = z_0 \neq \infty$ и $p(z_0) \neq 0$, а $q(z)$ имеет нуль первого порядка в z_0, т. е. $q(z_0) = 0$ и $q'(z_0) \neq 0$, то

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \frac{p(z_0)}{q'(z_0)}.$$

Пример 20.

1) Функция $f(z) = \dfrac{\cos z}{z^2 + a^2}$ имеет в точках $z_1 = ia$, $z_2 = -ia$ полюсы первого порядка. Соответствующие вычеты равны:

$$\operatorname{Res} f(ia) = \lim_{z\to ia}\left[(z - ia)\frac{\cos z}{(z - ia)(z + ia)}\right] = \frac{\cos(ia)}{2ia},$$

$$\operatorname{Res} f(-ia) = \lim_{z\to -ia}\left[(z + ia)\frac{\cos z}{(z - ia)(z + ia)}\right] = -\frac{\cos(ia)}{2ia}.$$

2) Функция $f(z) = \dfrac{p(z)}{q(z)} = \dfrac{z^2 + 1}{(z-1)\sin z}$ имеет простые полюсы в точках $z = 1$ и $z = n\pi$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, в которых $q(z)$ имеет нули первого порядка. Учитывая равенство $q'(z) = \sin z + (z - 1)\cos z$, для полюсов $z_1 = 0$ и $z_2 = 1$ найдем соответственно

$$\operatorname{Res} f(0) = \frac{p(0)}{q'(0)} = -1, \quad \operatorname{Res} f(1) = \frac{p(1)}{q'(1)} = \frac{2}{\sin 1}.$$

3) Вычет функции $f(z) = \dfrac{1}{z^2} - \dfrac{1}{z}$ относительно точки $z = \infty$, являющейся простым нулем этой функции, равен

$$\operatorname{Res} f(\infty) = \lim_{z\to\infty}\left[-z\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}\right)\right] = 1.$$

Логарифмический вычет. Принцип аргумента. Пусть (однозначная) функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D и на ограничивающем ее замкнутом контуре C всюду, кроме конечного числа полюсов. И пусть a_i — нули для $f(z)$ кратности n_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ внутри D, а b_j — ее полюсы кратности p_j $(j = 1, 2, \ldots, s)$ внутри D. Тогда, если C не проходит ни через полюсы, ни через нули этой функции, то для любой функции $g(z)$, аналитической всюду в D и на C, справедливо равенство

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{i=1}^{m} n_i g(a_i) - \sum_{j=1}^{s} p_j g(b_j).$$

Отсюда при $g(z) \equiv 1$ следует

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \sum_{i=1}^{m} n_i - \sum_{j=1}^{s} p_j = N - P, \tag{10.14}$$

где N — число нулей, P — число полюсов (с учетом их кратности) внутри D. **Логарифмическим вычетом** аналитической функции $f(z)$ относительно точки z_0 называется вычет функции $[\ln f(z)]' = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ относительно z_0. Левая часть

(10.14) равна сумме логарифмических вычетов $f(z)$ относительно всех нулей и полюсов $f(z)$, содержащихся в D.

Обозначая $w = u + iv = f(z) = re^{i\theta}$, где $r = |f(z)|$, θ — какое-либо значение аргумента функции $f(z)$, непрерывно изменяющееся при движении точки z по контуру C в положительном направлении, будем иметь $\ln f(z) = \ln r + i\theta$ и

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{d\ln f(z)}{dz} = \frac{1}{r}\frac{dr}{dz} + i\frac{d\theta}{dz}.$$

С учетом этого равенства и в силу замкнутости контура C формула (10.14) примет вид (**принцип аргумента**):

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz = \frac{1}{2\pi}\oint\limits_C d\theta \equiv \frac{\Delta_C\theta}{2\pi} = N - P,$$

где $\Delta_C\theta$ — изменение аргумента $f(z)$ при полном однократном обходе точкой z контура C. Величина $\Delta_C\theta/2\pi$ равна числу оборотов вектора $w = f(z)$ в w-плоскости Ouv вокруг точки $w = 0$ при однократном обходе точкой z контура C. Если $P = 0$, то движущаяся точка w совершает при этом N полных обходов вокруг точки $w = 0$.

10.6.2. Применение вычетов к вычислению определенных интегралов

Если требуется вычислить определенный интеграл от действительной функции $f(x)$ по конечному или бесконечному промежутку $(a; b)$ оси Ox, то подбирают некоторый незамкнутый контур K, который вместе с промежутком $(a; b)$ ограничивает некоторую область D, а затем к аналитическому продолжению (см. 10.7) $f(z)$ функции $f(x)$ применяют теорему о вычетах

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_K f(z)\,dz = 2\pi i\sum_{i=1}^{n}\operatorname{Res} f(z_i), \tag{10.15}$$

где z_i — особые точки $f(z)$ в D. Задача сводится к вычислению интеграла по контуру K.

Иногда функцию $f(z)$ подбирают так, что $f(x)$ является ее действительной или мнимой частью, тогда интеграл от $f(x)$ находится отделением действительной или мнимой части от (10.15).

Пример 21. Для вычисления несобственного интеграла

$$\int^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + a^2}\,dx$$

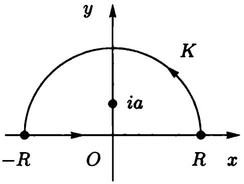


Рис. 10.9

рассмотрим интеграл

$$J = \oint_C f(z)\,dz$$

от вспомогательной функции комплексной переменной

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}$$

по замкнутому контуру C, состоящему из полуокружности K радиуса R и ее диаметра, лежащего на оси Ox (рис. 10.9). Функция $f(z)$ аналитична на всей комплексной плоскости, кроме простых полюсов $z_1 = ia$, $z_2 = -ia$. Точка $z = \infty$ является нулем второго порядка для $f(z)$. Предполагается, что $R > a$, т. е. внутри контура C находится только один полюс $z_1 = ia$. Вычет $f(z)$ относительно $z_1 = ia$ равен:

$$\operatorname{Res} f(ia) = \lim_{z \to ia} \left[(z - ia) \frac{e^{iz}}{(z - ia)(z + ia)} \right] = \frac{e^{-a}}{2ai}.$$

Следовательно,

$$J = \oint_C f(z)\,dz = 2\pi i \operatorname{Res} f(ia) = \frac{\pi}{a} e^{-a}.$$

Интеграл J запишем в виде суммы $J = J_R + J_K$, где

$$J_R = \int_{-R}^{R} \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2}\,dx,$$

а J_K — интеграл от $f(z)$ по полуокружности K, для которого справедлива оценка

$$|J_K| = \left| \int_K \frac{e^{iz}}{z^2 + a^2}\,dz \right| \leqslant \max_K \frac{|e^{iz}|}{|z^2 + a^2|} \cdot \pi R,$$

где $|e^{iz}| = |e^{i(x+iy)}| = |e^{ix}|e^{-y} = |\cos x + i \sin x| e^{-y} \leqslant 1$ $(y \geqslant 0)$. Для точек полуокружности K, с учетом неравенства $|z_1 - z_2| \geqslant \big| |z_1| - |z_2| \big|$, имеем:

$$\frac{1}{|z^2 + a^2|} = \frac{1}{|z^2 - (ia)^2|} \leqslant \frac{1}{\big| |z^2| - |(ia)^2| \big|} = \frac{1}{R^2 - a^2}.$$

Следовательно, $J_K \to 0$ при $R \to \infty$ (для любого $\arg z$). В пределе $R \to \infty$ получим значение исходного интеграла:

$$\lim_{R \to \infty} J_R = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2 + a^2}\,dx = \frac{\pi}{a} e^{-a}.$$

10.7. Аналитическое продолжение

10.7.1. Понятие аналитического продолжения

Если в областях D_1 и D_2 на z-плоскости заданы (однозначные) аналитические функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ соответственно, удовлетворяющие равенству $f_1(z) = f_2(z)$ в общей части (пересечении) d областей D_1 и D_2 (рис. 10.10), которая, в частности, может быть отрезком кривой, то говорят, что функция $f_1(z)$ **аналитически продолжается** в область D_2. Аналогично, $f_1(z)$ является аналитическим продолжением $f_2(z)$ из области D_2 в D_1 через их общую часть d. Согласно теореме единственности (см. 10.3.2), если существует аналитическое продолжение, то оно единственно.

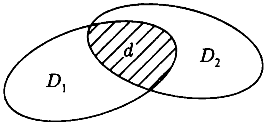


Рис. 10.10

Следовательно, функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ можно рассматривать как **элементы** одной и той же функции $f(z)$, аналитической в объединении областей D_1 и D_2. При этом $f(z) = f_1(z)$ в D_1 и $f(z) = f_2(z)$ в D_2.

Пример 22. Пусть D_1 — круг $|z| < 1$, а область D_2 — круг $|z - i| < \sqrt{2}$. В D_1 задана аналитическая функция $f_1(z)$, определенная своим степенным рядом

$$f_1(z) = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n.$$

Используя разложение функции $\dfrac{1}{1+z}$ в ряд Тейлора в окрестности точки $z = 0$, найдем, что $f_1(z) = \dfrac{1}{1+z}$ в области D_1. Раскладывая функцию $\dfrac{1}{1+z}$ в степенной ряд в окрестности точки $z = i$, получим

$$f_2(z) = \frac{1}{1+z} = \frac{1}{1+i+(z-i)} = \frac{1}{1+i}\left(1 + \frac{z-i}{1+i}\right)^{-1} =$$
$$= \frac{1}{1+i}\left[1 - \frac{z-i}{1+i} + \left(\frac{z-i}{1+i}\right)^2 - \ldots\right].$$

Этот ряд сходится к $f_2(z)$ в области D_2 (так как он сходится при $\left|\dfrac{z-i}{1+i}\right| < 1$, т. е. при $|z - i| < \sqrt{2}$), и его сумма равна $\dfrac{1}{1+z}$. Таким образом, $f_1(z) = f_2(z)$ в области d пересечения областей D_1 и D_2. Обе функции $f_1(z)$ и $f_2(z)$ являются элементами одной же функции $f(z) = \dfrac{1}{1+z}$, аналитической в области объединения D_1 и D_2. Следовательно, $f_1(z)$ и $f_2(z)$ являются аналитическими продолжениями друг друга в соответствующие области. Более того, $\dfrac{1}{1+z}$ является аналитическим продолжением функции $f_1(z)$, определенной в круге D_1, на всю комплексную плоскость с исключенной точкой $z = -1$.

10.7.2. Аналитическое продолжение при помощи степенных рядов

Если аналитическое продолжение возможно, то обычно его осуществляют при помощи степенных рядов. Пусть дана аналитическая функция $f_1(z)$, представленная степенным рядом

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(1)}(z - z_1)^n$$

в круге сходимости $|z - z_1| < R_1$ (область D_1). Выберем внутри D_1 точку $z_2 \neq z_1$ и построим степенной ряд Тейлора в окрестности z_2

$$f_2(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(2)}(z - z_2)^n,$$

коэффициенты которого находятся при помощи $f_1(z)$ по формуле

$$a_n^{(2)} = \frac{1}{n!} f_1^{(n)}(z_2).$$

Круг сходимости этого ряда $|z - z_2| < R_2$ (область D_2) может выходить за пределы круга D_1, тогда получается аналитическое продолжение $f_1(z)$ за пределы D_1. В результате повторения процедуры аналитического продолжения будем иметь цепь пересекающихся кругов сходимости. Если этот процесс может быть продолжен по всем возможным направлениям, то получим функцию, аналитическую во все более увеличивающейся области, а функции $f_1(z), f_2(z), \ldots$, являющиеся суммами степенных рядов, будут элементами некоторой **общей аналитической функции** $f(z)$. Если продолжение степенного ряда, представляющего функцию $f_1(z)$, далее невозможно ни в каком направлении, то говорят, что эта функция **непродолжаема** и окружность круга D_1 является ее **естественной границей**.

Если центры $z_1, z_2, \ldots, z_m$ пересекающихся кругов сходимости $D_1, D_2, \ldots, D_m$ лежат на некоторой кривой C, то говорят, что функция $f(z)$ аналитически продолжается вдоль C.

Теорема монодромии. *Если некоторая функция аналитически продолжается вдоль любой непрерывной кривой, содержащейся в односвязной области, то данная функция однозначна в этой области.*

10.7.3. Многозначные аналитические функции

Может оказаться, что при аналитическом продолжении функции $f_1(z)$ при помощи цепи пересекающихся кругов мы получим круг D_m, пересекающийся с первым кругом D_1. Значения аналитических функций $f_1(z)$ и $f_m(z)$ в точках пересечения D_1 и D_m могут: 1) совпадать, 2) не совпадать. В первом случае общая функция $f(z)$ будет однозначной и аналитической в области ее продолжения. Во втором случае $f(z)$ является многозначной, а однозначные аналитические функции, из которых она состоит, называются ее (однозначными) **ветвями**.

10.7.4. Аналитическое продолжение действительной аналитической функции

Действительная однозначная функция $f(x)$ действительной переменной, определенная в промежутке $(a;b)$ оси Ox, называется аналитической в $(a;b)$, если в некоторой окрестности каждой точки x_0 из $(a;b)$ она может быть представлена в виде суммы ряда

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n,$$

имеющего действительные коэффициенты. Если $f(x)$ аналитична в $(a;b)$, а $f(z)$ — комплексная аналитическая функция в области D, содержащей промежуток $(a;b)$, и $f(x) = f(z)$ при $z = x$ в $(a;b)$, то говорят, что $f(z)$ является аналитическим продолжением $f(x)$ из $(a;b)$ в D. Для построения аналитического продолжения $f(z)$ функции $f(x)$, определенной в $(a;b)$, в некоторую область D, симметричную относительно действительной оси Ox $(\operatorname{Im} z = 0)$, следует в разложении $f(x)$ заменить x на $z = x + iy$:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - x_0)^n.$$

Пример 23.

1) Однозначная функция действительной переменной e^x определяется рядом

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad (|x| < +\infty).$$

Заменяя в этом ряде x на $z = x + iy$, получим ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = f(z),$$

сходящийся на всей комплексной плоскости $(R = \infty)$, сумма $f(z)$ которого совпадает с e^x при $z = x$. Функция $f(z)$ является единственным (по теореме единственности) аналитическим продолжением e^x в комплексную плоскость. В силу этого $f(z)$ можно назвать комплексной показательной функцией и обозначить e^z.

2) Комплексные функции $\sin z$, $\cos z$ могут быть определены как аналитические продолжения соответствующих однозначных действительных функций $\sin x$ и $\cos x$.
3) Заменяя в разложении $\ln(1+x)$ (см. 9.7.2, пример 30) x на z, получим ряд

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots \quad (|z| < 1),$$

сумма которого $\ln(1+z)$ равна главной ветви бесконечнозначной функции $\operatorname{Ln}(1+z)$ (см. пример 16).

10.8. Римановы поверхности. Точки ветвления

10.8.1. Общие понятия

Однозначные аналитические функции могут иметь в некоторой точке $z = z_0 \neq \infty$ (или $z = \infty$) изолированные особенности вида: устранимая особая точка, полюс, существенно особая точка. Многозначные функции имеют в некоторой точке $z = z_0 \neq \infty$ (или $z = \infty$) изолированные особенности, называемые точками ветвления, понятие и свойства которых рассматриваются ниже.

10.8.2. Условие однолистности функции

Если однозначная аналитическая в области D функция

$$w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

удовлетворяет в какой-либо точке z_0 области D условию $f'(z_0) \neq 0$, из которого следует

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 = |f'(z_0)| \neq 0,$$

то система уравнений $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$ в некоторой окрестности точки z_0 может быть однозначно разрешена относительно x и y. Следовательно, такая окрестность точки z_0 является областью однолистности (см. 10.2.1) функции $f(z)$, а обратная функция $z = g(w)$ однозначна и аналитична в некоторой окрестности точки $w_0 = f(z_0)$ и

$$g'(w) = \frac{1}{f'(z)}.$$

Функция $w = f(z)$ осуществляет при этом взаимно однозначное отображение окрестности точки z_0 на некоторую область w-плоскости, содержащую точку w_0.

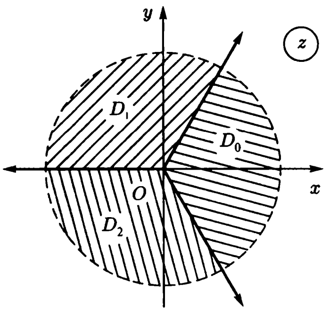
Примечание. Если $f'(z) \neq 0$ в каждой точке области D, то $f(z)$ не обязательно является однолистной во всей этой области. В общем случае об однолистности можно говорить лишь для достаточно малой окрестности каждой точки z из D.

10.8.3. Римановы поверхности. Точки ветвления

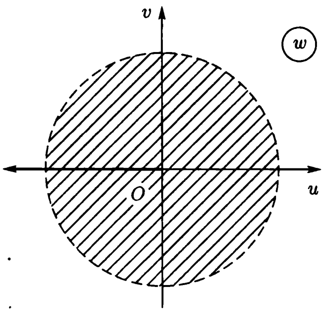
Для функции $w = z^3$ производная $w' = 3z^2 = 0$ при $z = 0$ и $w' \neq 0$ при $z \neq 0$. Следовательно, любая окрестность точки $z = 0$ не является для функции $w = z^3$ областью однолистности, при этом $w = z^3$ не имеет однозначной обратной функции. Областями однолистности для $w = z^3$ являются, например, три бесконечные области D_0, D_1, D_2 в z-плоскости, аргументы φ точек $z = |z|e^{i\varphi}$ которых удовлетворяют соответственно неравенствам (рис. 10.11 *а*):

$$-\frac{\pi}{3} < \varphi < \frac{\pi}{3}; \quad \frac{\pi}{3} < \varphi < \pi; \quad \pi < \varphi < \frac{5\pi}{3}.$$

Если точку z перемещать по z-плоскости в пределах любой из областей D_0, D_1, D_2, то соответствующая ей точка $w = |w|e^{i\theta} = z^3 = |z|^3 e^{3i\varphi}$ будет перемещаться по всей w-плоскости, из которой исключены точки отрицательной действительной полуоси $u \leqslant 0$, $v = 0$, т. е. $\theta = \pi$ (рис. 10.11 *б*). Раствор угла каждой из областей D_0, D_1, D_2, равный $2\pi/3$, увеличивается в 3 раза, становясь равным 2π, что соответствует всей w-плоскости с исключенной полуосью $\theta = \pi$ (говорят также, что w-плоскость **разрезана вдоль отрицательной полуоси** $\theta = \pi$ от точки $z = 0$ до $z = \infty$). Лучи $\varphi = -\pi/3$ и $\varphi = \pi/3$, ограничивающие область D_0, перейдут соответственно в нижний ($\theta = -\pi$) и верхний ($\theta = \pi$) берега разреза w-плоскости. Каждая из областей D_0, D_1, D_2, являясь областью однолистности для $w = z^3$, отображается взаимно однозначно



а)



б)

Рис. 10.11

на всю w-плоскость с разрезом. Точки $z = 0$ и $z = \infty$ находятся во взаимно однозначном соответствии с точками $w = 0$ и $w = \infty$. Любой другой точке w ($w \neq 0$ и $w \neq \infty$) в w-плоскости соответствуют три числа (точки) z_0, z_1, z_2 в z-плоскости, являющиеся значениями корня $z = \sqrt[3]{w}$ (см. 10.1.3):

$$z_k = (\sqrt[3]{w})_k = \sqrt[3]{|w|}\left(\cos\frac{\theta_0 + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\theta_0 + 2k\pi}{3}\right), \tag{10.16}$$

где $k = 0, 1, 2$; θ_0 — главное значение аргумента w ($-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$).

Рассмотрим три экземпляра (**листа**) w-плоскости с разрезом, обозначенных G_0, G_1, G_2 **и расположенных друг над другом в указанном порядке**. При этом лист G_k соответствует области D_k ($k = 0, 1, 2$). Для объединения этих трех листов в единое целое соединим (или, как говорят, склеим) верхний берег разреза листа G_0 с нижним берегом разреза лежащего над ним листа G_1; верхний берег разреза G_1 с нижним берегом разреза G_2; а верхний берег разреза G_2 соединим с оставшимся свободным нижним берегом разреза G_0 (возникающие при этом пересечения листов во внимание не принимаются). Построенная таким способом многолистная (в данном случае трехлистная) область называется **римановой поверхностью функции** $z = \sqrt[3]{w}$. Функция (отображение) $w = z^3$ является трехлистной и устанавливает взаимно однозначное соответствие между всей расширенной z-плоскостью и римановой поверхностью функции $z = \sqrt[3]{w}$. Для каждой области D_k ($k = 0, 1, 2$) обратную к $w = z^3$ функцию обозначим $z = g_k(w) = (\sqrt[3]{w})_k$, значения которой находятся по формуле (10.16). Функции $z = g_k(w)$ ($k = 0, 1, 2$) называются (однозначными) **ветвями** многозначной функции $z = \sqrt[3]{w}$. Каждая из ветвей равна нулю при $w = 0$. Ветвь $z = g_0(w)$ ($k = 0$) называется **главной**. Каждая из ветвей определена в соответствующей области G_0, G_1 или G_2 и имеет область изменения D_0, D_1 или D_2.

Если, исходя из некоторой фиксированной точки w_0 с аргументом $\theta_0 = -\pi$ на листе G_0, совершать обход точки $w = 0$ (не пересекая ее) по непрерывной кривой против часовой стрелки, переходя на действительной полуоси $\theta = \pi$ с листа G_0 на G_1, затем с G_1 на G_2, а далее обратно на лист G_0, то мы возвратимся в точку w_0. При этом происходит непрерывный последовательный переход точки z на z-плоскости с одной ветви трехзначной функции $z = \sqrt[3]{w}$ на другую; в результате точка z вернется в первоначальное положение $z = (\sqrt[3]{w})_0$, т. е. при трехкратном обходе точки $w = 0$ (а также точки $w = \infty$) происходит возврат к исходной ветви. В связи с этим точки $w = 0$ и $w = \infty$ называются **алгебраическими точками ветвления порядка 2** функции $z = \sqrt[3]{w}$. Для того чтобы можно было рассматривать ветви функции независимо друг от друга, используется соответствующий разрез w-плоскости. Если запретить пересечение этого разреза, то точка w не сможет обойти точки ветвления и рассматриваемая ветвь не сможет непрерывно перейти в другую. Разрез является линией разрыва ветви, значения которой отличаются друг от друга на разных берегах разреза.

Совершенно аналогично рассматриваются алгебраические точки ветвления ($w = 0$ и $w = \infty$) порядка $n-1$ функции $z = \sqrt[n]{w}$ (n — любое натуральное число), обратной к $w = z^n$. Области однолистности $D_0, D_1, \ldots, D_{n-1}$ функции $w = z^n$ на z-плоскости определяются неравенствами

$$\frac{2k\pi - \pi}{n} < \varphi < \frac{2k\pi + \pi}{n} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Риманова поверхность функции $z = \sqrt[n]{w}$ является n-листной, состоящей из листов $G_0, G_1, \ldots, G_{n-1}$ с разрезами по отрицательной действительной полуоси, склеенных между собой. В любой окрестности точек ветвления $w = 0$ и $w = \infty$ разные ветви функции $\sqrt[n]{w}$ не могут быть отделены друг от друга. Если конечная область G в w-плоскости односвязна и не содержит точку ветвления $w = 0$, то в ней можно рассматривать отдельные ветви данной функции. Каждая из этих ветвей устанавливает однолистное отображение области G, а, следовательно, для каждой точки этой области по формуле производной обратной функции можно записать

$$\frac{dg_k(w)}{dw} = \frac{1}{(z^n)'_z} = \frac{1}{nz^{n-1}} = \frac{z}{nz^n} = \frac{\sqrt[n]{w}}{nw} = \frac{1}{n} w^{\frac{1}{n}-1},$$

т. е. в каждой точке области G, не содержащей точку $w = 0$, существует определенное значение производной рассматриваемой ветви. Таким образом, каждая из ветвей в области G является аналитической функцией.

10.8.4. Логарифмические точки ветвления

Областями однолистности экспоненциальной функции $w = e^z$ являются полосы D_k на z-плоскости шириной 2π и параллельные действительной оси Ox:

$$D_k\colon\ 2k\pi - \pi < \operatorname{Im} z < 2k\pi + \pi \quad (k = \ldots, -1, 0, 1, \ldots).$$

Каждая из этих полос однолистности отображается взаимно однозначно на всю w-плоскость с исключенной точкой $w = 0$ и имеющую разрез вдоль отрицательной действительной полуоси ($u < 0$, $v = 0$, т. е. $\theta = \pi$) от точки $w = 0$ до $w = \infty$. Прямые $y = \operatorname{Im} z = -\pi$ и $y = \operatorname{Im} z = \pi$ на z-плоскости, ограничивающие полосу D_0, переходят соответственно в нижний и верхний берега разреза w-плоскости.

Отображение $w = e^z$ переводит прямые $y = \operatorname{Im} z = b$ на z-плоскости в лучи $\theta = b$ на w-плоскости, где θ-аргумент w.

Логарифмическая функция $z = \operatorname{Ln} w$ ($w \neq 0$) определяется как обратная функция $z = g(w)$ к $w = e^z$. Полагая $z = x + iy$, $w = re^{i\theta}$, где $r = |w|$; $\theta = \theta_0 + 2k\pi$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$); θ_0 — главное значение ($-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$) аргумента w, получим $re^{i\theta} = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$, т. е. $r = e^x$, $x = \ln r$ ($r \neq 0$); $y = \theta_0 + 2k\pi$.

Следовательно, для каждой из областей D_k отдельные однозначные ветви $z = g_k(w) \equiv (\operatorname{Ln} w)_k$ многозначной функции $z = \operatorname{Ln} w$ можно записать в виде

$$z = x + iy = (\operatorname{Ln} w)_k = \ln r + i(\theta_0 + 2k\pi) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Ветвь $z = g_0(w)$ $(k = 0)$ называется **главной**.

Функция $w = e^z$ — **бесконечнолистна**, а $z = \operatorname{Ln} w$ — **бесконечнозначна,** так как все ее ветви $z = (\operatorname{Ln} w)_k$ отличаются друг от друга. Какую-либо из ветвей обозначают также $z = \ln w$.

Рассмотрим бесконечное множество **листов** $\ldots, G_{-1}, G_0, G_1, \ldots$ расширенной w-плоскости с исключенной точкой $w = 0$ и имеющей разрез вдоль полуоси $\theta = \pi$, расположенных друг над другом в указанном порядке. Соединяя края разрезов соседних листов, как и при построении римановой поверхности функции $z = \sqrt[n]{w}$, получим **бесконечнолистную риманову поверхность** функции $z = \operatorname{Ln} w$. Точки $w = 0$ и $w = \infty$ являются точками ветвления бесконечного порядка и называются **трансцендентными точками ветвления** (или **логарифмическими точками ветвления**) функции $z = \operatorname{Ln} w$, так как при каждом обходе в одном и том же направлении вокруг этих точек происходит переход к очередной новой ветви, а возврат к исходной ветви невозможен ни при каком числе обходов.

Функция $w = e^z$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между расширенной z-плоскостью и бесконечнолистной римановой поверхностью с исключенной точкой $w = 0$.

В любой конечной односвязной области G в w-плоскости, не содержащей точку $w = 0$, можно рассматривать отдельные ветви функции $z = \operatorname{Ln} w$, значения которых в каждой заданной точке w_0 отличаются друг от друга на $2k\pi i$. Каждая из этих ветвей устанавливает однолистное отображение области G.

По формуле производной обратной функции имеем

$$\frac{dg_k(w)}{dw} = (\ln w)'_w = \frac{1}{(e^z)'_z} = \frac{1}{e^z} = \frac{1}{w} \quad (w \neq 0),$$

т. е. производные для всех ветвей существуют и равны между собой в любой точке $w \neq 0$. Следовательно, каждая ветвь $z = \ln w$ является однозначной аналитической в области G функцией.

10.8.5. Заключительные замечания

Если в функции $z = g(w)$, обратной к $w = f(z)$, поменять местами, как это часто делается, обозначения зависимой и независимой переменной, т. е. рассматривать функцию $w = g(z)$, то в 10.8.3 и 10.8.4 обратные функции запишутся в виде $w = \sqrt[n]{z}$ и $w = \operatorname{Ln} z$. Остальные обозначения также следует изменить соответствующим образом. Каждая из однозначных ветвей многозначной функции является аналитической функцией, и к ней применимы интегральные теоремы Коши при условии, что контур интегрирования не пересекает соответствующие разрезы плоскости.

Точка $z = \infty$ является точкой ветвления для функции $f(z)$, если функция $h(\zeta) = f(1/\zeta)$, полученная в результате преобразования $z = 1/\zeta$, имеет при $\zeta = 0$ точку ветвления. Например, многозначная функция $f(z) \equiv 1/\sqrt[n]{z}$ имеет точку ветвления $z = \infty$ (а также $z = 0$), так как функция $h(\zeta) = \sqrt[n]{\zeta}$ имеет точку ветвления $\zeta = 0$ (а также $\zeta = \infty$).

10.9. Конформное отображение

10.9.1. Понятие и свойства конформного отображения

Пусть $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ — однозначная аналитическая в области D функция, удовлетворяющая в точке z_0 этой области условию $f'(z_0) \neq 0$ (см. 10.8.2), в силу которого она однолистна в некоторой окрестности точки z_0. Тогда взаимно однозначное отображение $w = f(z)$ достаточно малой окрестности точки z_0 в z-плоскости на некоторую область в w-плоскости, содержащую точку $w_0 = f(z_0)$, называется **конформным отображением (первого рода)**. При этом отображении угол α между дугами $C_z^{(1)}$ и $C_z^{(2)}$ любых двух кривых, проходящих через точку z_0, равен по величине и направлению отсчета углу α между образами $C_w^{(1)}$ и $C_w^{(2)}$ этих дуг, проходящих через точку $w_0 = f(z_0)$ (рис. 10.12 *а, б*). Элементы длин $|dz_0| = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}$ и

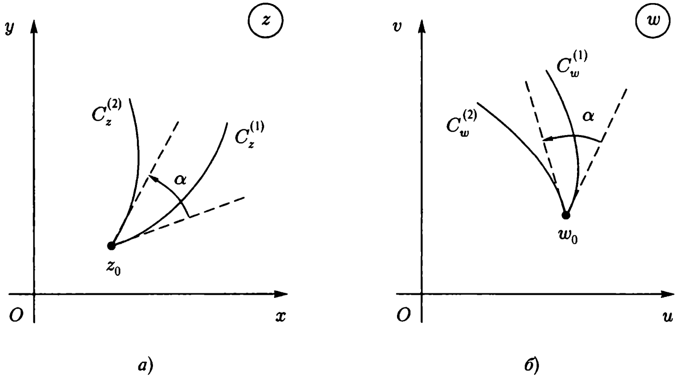


Рис. 10.12

$|dw_0| = \sqrt{(du)^2 + (dv)^2}$ дуг C_z и C_w в точках z_0 и w_0 связаны соотношением

$$\frac{|dw_0|}{|dz_0|} = |f'(z_0)|.$$

Произвольный бесконечно малый треугольник (т. е. имеющий бесконечно малые стороны) вблизи точки z_0 отображается в подобный ему бесконечно малый треугольник на w-плоскости, причем все его стороны растягиваются в $|f'(z_0)|$ раз и поворачиваются на угол $\arg f'(z_0)$, а площадь умножается на $|f'(z_0)|^2 = \dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$. Здесь $f'(z_0)$ — функция от z_0.

Точки, в которых $f'(z) = 0$ или $1/f'(z) = 0$ и, следовательно, конформность нарушается, называются **критическими точками** отображения $w = f(z)$. Отображение, при котором неизменными являются только величины углов между двумя кривыми, но не направления их отсчета, называется **антиконформным** (или **конформным отображением второго рода**). Например, $w = \bar{z}$. Далее рассматриваются только конформные отображения первого рода. Отображение $w = f(z)$ конформно в точке $z = \infty$, если отображение $g(\zeta) = f(1/\zeta)$ конформно в точке $\zeta = 0$.

Задача построения конформного отображения некоторой односвязной области D в z-плоскости на односвязную область G в w-плоскости сводится к нахождению однозначной аналитической и однолистной в области D функции, область значений которой совпадает с G. При этом предполагается, что D не является всей расширенной z-плоскостью или всей z-плоскостью с одной исключенной точкой.

Теорема Римана о конформном отображении. *Для каждой односвязной области D в z-плоскости, кроме всей расширенной z-плоскости и z-плоскости с одной исключенной точкой, существует однозначная аналитическая функция $w = f(z)$, осуществляющая конформное отображение области D на внутренность единичного круга $|w| < 1$. Функция $f(z)$ определена единственным образом, если заданы условия: $f(z_0) = w_0$ и $\arg f'(z_0) = \alpha$, где z_0, w_0, α — заданные числа, причем z_0 принадлежит D. Задача комформного отображения двух областей друг на друга сводится к конформному отображению каждой из них на единичный круг.*

Пример 24. Функция $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ осуществляет конформное отображение правой z-полуплоскости $x = \operatorname{Re} z > 0$ на единичный круг $|w| < 1$ (рис. 10.13 *а*, *б*). При этом точка $z = 0$ (A_1) переходит в точку $w = -1$ (A_1'); $w'(0) = 2$, $\arg w'(0) = 0$. Точка $z = \infty$ переходит в точку $w = 1$. Прямая $x = 0$ ($z = iy$) переходит в окружность $|w| = 1$.

При конформном отображении взаимно перпендикулярные прямые $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$ на z-плоскости переходят во взаимно ортогональные кривые на w-плоскости; и обратно, координатным прямым $u = \text{const}$, $v = \text{const}$ на w-плоскости соответствуют взаимно ортогональные кривые на z-плоскости.

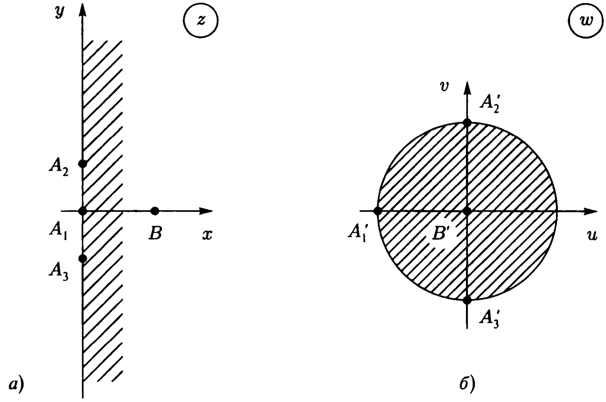


Рис. 10.13

Пример 25. Функция $w = z^2$ является двухлистной во всей z-плоскости. Обратная к ней функция $z = \sqrt{w}$ — двузначна и имеет точки ветвления $w = 0$ и $w = \infty$. Функция $w = z^2$ отображает всю расширенную z-плоскость на двухлистную риманову поверхность функции $z = \sqrt{w}$. В точках $z = 0$ и $z = \infty$, являющихся критическими, преобразование не является конформным. Первая четверть z-плоскости $(0 \leqslant \varphi \leqslant \pi/2)$

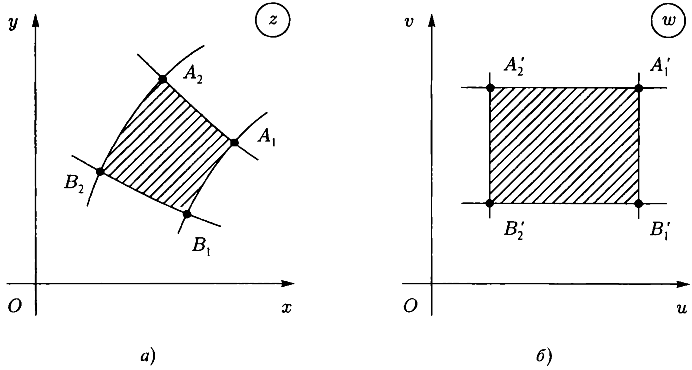


Рис. 10.14

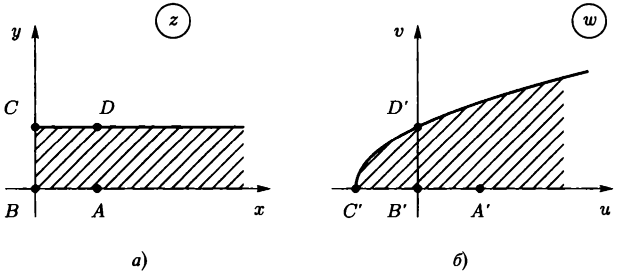


Рис. 10.15

отображается на верхнюю w-полуплоскость $(0 \leqslant \theta \leqslant \pi)$. Правая z-полуплоскость $(-\pi/2 < \varphi \leqslant \pi/2)$ отображается на всю w-плоскость с разрезом $(-\pi < \theta \leqslant \pi)$. Левая z-полуплоскость также отображается на всю w-плоскость (неоднолистность). Областями однолистности функции $w = z^2$ являются, например, D_0: правая z-полуплоскость $(-\pi/2 < \varphi < \pi/2)$ и D_1: левая z-полуплоскость $(\pi/2 < \varphi < 3\pi/2)$. Отображение конформно в областях однолистности, за исключением критических точек. Пусть $z = x + iy$, $w = u + iv$, тогда для $w = z^2$ имеем $u = x^2 - y^2$, $v = 2xy$. Прямым $u = C_1$ и $v = C_2$ на w-плоскости соответствуют два семейства ортогональных гипербол $x^2 - y^2 = C_1$ и $2xy = C_2$ на z-плоскости (рис. 10.14 *а*, *б*). Каждой точке гиперболы $x^2 - y^2 = C_1$ в правой (левой) полуплоскости $x > 0$ $(x < 0)$ соответствует только одна точка прямой $u = C_1$. Однако каждой точке прямой $u = C_1$ будут соответствовать точки как на гиперболе $x^2 - y^2 = C_1$ $(x > 0)$, так и на гиперболе $x^2 - y^2 = C_1$ $(x < 0)$ (двухзначность). Прямые $x = C_1$, $y = C_2$ на z-плоскости переходят в два семейства ортогональных парабол $u = a \pm bv^2$ на w-плоскости (рис. 10.15 *а*, *б*). Лучи, выходящие из точки $z = 0$, переходят в лучи, выходящие из точки $w = 0$ и повернутые на некоторый угол. Если угол между двумя лучами, выходящими из $z = 0$, равен α, то угол между их образами на w-плоскости равен 2α $(2\alpha \leqslant 2\pi)$. Точки $z = 0$ и $z = 1$ переходят в точки $w = 0$ и $w = 1$. Любая область D, содержащаяся в области однолистности, конформно отображается на некоторую область G в w-плоскости.

Интеграл Шварца—Кристоффеля

$$w = A \int_0^z (z - x_1)^{\alpha_1 - 1}(z - x_2)^{\alpha_2 - 1} \cdots (z - x_n)^{\alpha_n - 1}\, dz + B,$$

где $\sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j = n - 2$; $A \neq 0$, B — некоторые комплексные числа, определяет конформное отображение верхней полуплоскости $y = \operatorname{Im} z > 0$ на внутренность ограниченного n-угольника $(n \geqslant 3)$ в w-плоскости; точки контура

n-угольника взаимно однозначно соответствуют точкам оси Ox; различные точки x_j $(-\infty < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < +\infty)$ оси Ox соответствуют вершинам $w_1, w_2, \ldots, w_n$ n-угольника, внутренние углы которого в вершинах w_j равны $\alpha_j\pi$ $(j = 1, 2, \ldots, n)$; $w = B$ при $z = 0$. Для каждого заданного n-угольника на w-плоскости из всех точек x_j три могут выбираться произвольно, а остальные значения x_j и величины A и B находятся единственным образом из условия задачи.

Если одной из вершин многоугольника, например w_n, соответствует точка $x_n = \infty$, то множитель $(z - x_n)^{\alpha_n - 1}$, содержащий x_n, выпадает из формулы Шварца—Кристоффеля.

10.9.2. Примеры конформных отображений

1. Линейная функция $w = az + b$ $(a = |a|e^{i\alpha} \neq 0)$ осуществляет конформное (линейное) отображение всей расширенной z-плоскости на расширенную w-плоскость. Данное отображение является наложением трех отображений: 1) поворот z-плоскости на угол α, 2) подобное преобразование с коэффициентом растяжения $|a|$, 3) сдвиг на постоянный вектор $\bar{b}$. Прямые переходят в прямые, окружности — в окружности. Линейное отображение при $a \neq 1$ можно записать в виде

$$w - w_0 = a(z - z_0), \quad z_0 = \frac{1}{1-a}.$$

Точка $z = z_0$ переходит в точку $w = z_0$.

2. Функция $w = 1/z$ осуществляет отображение расширенной z-плоскости на расширенную w-плоскость. Пусть $z = \rho e^{i\varphi}$, $w = re^{i\theta}$, тогда $r = 1/\rho$, $\theta = -\varphi$. Окружность $|z| = 1$ переходит в окружность $|w| = 1$. Внутренность круга $|z| < 1$ переходит в область $|w| > 1$, и наоборот, область $|z| > 1$ переходит во внутренность круга $|w| < 1$. В точке $z = 0$ отображение не конформно. Точки $z_1 = 1$ и $z_2 = -1$, $z_3 = i$, $z_4 = -i$ переходят в точки $w_1 = 1$, $w_2 = -1$, $w_3 = -i$, $w_4 = i$. Из равенства $u + iv = 1/(x + iy)$ следует

$$u = \frac{x}{\rho^2}, \quad v = -\frac{y}{\rho^2}, \quad \rho = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Любая прямая или окружность на z-плоскости переходит в окружность на w-плоскости.

3. Дробно-линейное отображение, осуществляемое дробно-линейной функцией

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \quad (ad - bc \neq 0, \ c \neq 0),$$

взаимно-однозначно отображает расширенную z-плоскость на расширенную w-плоскость. Отображение конформно на всей плоскости, исключая точку $z_0 = -d/c$, в которой $w(z_0) = \infty$, $w'(z_0) = \infty$. функция, обратная к дробно-линейной, является также дробно-линейной. Прямые и окружности в z-плоскости переходят в прямые или окружности в w-плоскости и обратно. **Неподвижные точки**, т. е. отображающиеся сами в себя ($w = z$), находятся из уравнения

$$z = \frac{az+b}{cz+d},$$

т. е. $cz^2 + (d-a)z - b = 0$.

4. Функция $w = \sqrt{z}$ ($w = re^{i\theta}$, $z = \rho e^{i\varphi}$) двузначна и имеет две ветви, одна из которых — главная ($w = \sqrt{\rho}e^{i\varphi_0/2}$, $-\pi < \varphi_0 \leqslant \pi$) — отображает взаимно однозначно всю z-плоскость с разрезом вдоль отрицательной полуоси Ox ($\varphi_0 = \pi$), выходящим из точки $z = 0$, на правую w-полуплоскость ($-\pi/2 < \theta \leqslant \pi/2$); а другая ветвь ($w = \sqrt{\rho}e^{i(\varphi_0+2\pi)/2} = -\sqrt{\rho}e^{(i\varphi_0)/2}$, $-\pi < \varphi_0 \leqslant \pi$) — на левую полуплоскость ($\pi/2 \leqslant \theta < 3\pi/2$). Конформность нарушается в точке $z = 0$, в которой $w'(0) = \infty$. Неподвижными являются точки $z = 0$ и $z = 1$. Полагая $w = u + iv$, $z = x + iy$, получим $x = u^2 - v^2$, $y = 2uv$;

$$u = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(x + \sqrt{x^2+y^2}\right)^{1/2}, \quad v = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-x + \sqrt{x^2+y^2}\right)^{1/2}.$$

Прямым $u = C_1$ и $v = C_2$ на w-плоскости соответствуют параболы

$$x = C_1^2 - \frac{y^2}{4C_1} \quad \text{и} \quad x = \frac{y^2}{4C_2^2} - C_2^2$$

на z-плоскости.

5. Экспоненциальная функция $w = e^z$ ($u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$) может быть записана в виде $re^{i\theta} = e^{x+iy}$; т. е. $r = e^x$, $y = \theta = \theta_0 + 2k\pi$ ($-\pi < \theta_0 \leqslant \pi$), $k = 0 \pm 1, \pm 2, \ldots$. В силу $(e^z)' = e^z \neq 0$, функция $w = e^z$осуществляет конформное отображение горизонтальных полос шириной 2π на z-плоскости, например, $-\pi < y \leqslant \pi$, на всю w-плоскость с разрезом по отрицательной действительной Ou ($u \leqslant 0$, $v = 0$) (см. также 10.8.4). Отрезки прямых $x = C_1$ ($-\pi \leqslant y \leqslant \pi$) на z-плоскости переходят в окружности $u^2 + v^2 = e^{2C_1}$ на w-плоскости; прямые $y = C_2$ переходят в лучи $\theta_0 = C_2$, выходящие из начала координат.

6. Логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z$ — бесконечнозначна, с точками ветвления $z = 0$, $z = \infty$. Полагая $w = u + iv$, $z = \rho e^{i\varphi}$, $\varphi = \varphi_0 + 2k\pi$, $-\pi < \varphi_0 \leqslant \pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, получим $z = e^w = e^{u+iv}$, $\rho = e^u$, $\varphi = v$; т. е. $u = \ln\rho$, $v = \varphi_0 + 2k\pi$, или $w = \ln\rho + i(\varphi_0 + 2k\pi)$. Производные для всех ветвей логарифмической функции равны между собой в любой точке z и находятся по правилу дифференцирования обратной функции:

$$(\ln z)' = \frac{1}{(e^w)'} = \frac{1}{e^w} = \frac{1}{z}.$$

Каждая ветвь $\ln z$ является аналитической функцией. Главная ветвь $w = \ln z = \ln\rho + i\varphi_0$ функции $w = \mathrm{Ln}\, z$ (при $k = 0$) конформно отображает всю z-плоскость с разрезом по отрицательной действительной полуоси ($x < 0$, $y = 0$) на полосу $-\pi < \operatorname{Im} w \leqslant \pi$. Конформность нарушается в точках ветвления $z = 0$ и $z = \infty$. Отрезкам прямых $u = C_1$ ($-\pi \leqslant v \leqslant \pi$) и прямым $v = C_2$ ($-\pi < C_2 \leqslant \pi$) на w-плоскости соответствуют окружности $\rho = |z| = e^{C_1}$ и лучи $\varphi_0 = C_2$.

10.10. Некоторые элементарные функции

10.10.1. Общая степенная функция

Общая степенная функция $w = z^a$ ($a = \alpha + i\beta$ — произвольное комплексное число) определяется равенством $z^a \equiv e^{a\,\mathrm{Ln}\, z}$ и является при $\beta \neq 0$ бесконечнозначной. Пусть $z = \rho e^{i\varphi}$, тогда $\mathrm{Ln}\, z = \ln\rho + i(\varphi_0 + 2k\pi)$ (см. 10.9.2, **6**). Следовательно, $w = z^a = \exp\{\alpha\ln r - \beta(\varphi_0 + 2k\pi)\}\cdot\exp\{i[\alpha(\varphi_0 + 2k\pi) + \beta\ln r]\}$, где $\exp\{\Phi\} \equiv e^{\Phi}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$. Главная ветвь получается при $k = 0$. При $\beta = 0$ значения z^α лежат на окружности $|w| = e^{\alpha\ln\rho} = \rho^\alpha$ и имеют аргументы $\theta_k = \alpha(\varphi_0 + 2k\pi)$. Если $\alpha = p/q$ — рациональное число (несократимая дробь), то функция $z^\alpha = \sqrt[q]{z^p}$ является q-значной. При α иррациональном функция z^α бесконечнозначна и имеет точки ветвления $z = 0$, $z = \infty$.

Справедливы следующие тейлоровские разложения в окрестности точки $z = 0$ (в случае многозначных функций рассматриваются их главные ветви):

1) $$(1 \pm z)^a = 1 \pm az + \frac{a(a-1)}{2!}z^2 \pm \frac{a(a-1)(a-2)}{3!}z^3 + \ldots,$$

где a — любое комплексное число; если $a = n$ — натуральное, то ряд переходит в конечную сумму. Здесь рассматривается однозначная ветвь, равная 1 при $z = 0$. Круг сходимости: $|z| < 1$. Разложение функции $(c \pm z)^a$, где c — комплексное число, находится при помощи равенства

$$(c \pm z)^a = c^a\left(1 \pm \frac{z}{c}\right)^a.$$

2) $$\frac{1}{c \pm z} = \frac{1}{c}\left(1 \pm \frac{z}{c}\right)^{-1} = \frac{1}{c}\left[1 \mp \frac{z}{c} + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \mp \left(\frac{z}{c}\right)^3 + \ldots\right], \quad |z| < |c|, \quad c \neq 0.$$

3) $\dfrac{1}{(c\pm z)^2}=\dfrac{1}{c^2}\left(1\pm\dfrac{z}{c}\right)^{-2}=\dfrac{1}{c^2}\left[1\mp 2\dfrac{z}{c}+3\left(\dfrac{z}{c}\right)^2\mp 4\left(\dfrac{z}{c}\right)^3+\ldots\right]$, $|z|<|c|$, $c\neq 0$.

4) $\sqrt{1\pm z}=1\pm\dfrac{1}{2}z-\dfrac{1\cdot 1}{2\cdot 4}z^2\pm\dfrac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}z^3-\dfrac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}z^4\pm\ldots;\ |z|<1.$

Здесь рассматривается ветвь, равная 1 при $z=0$. Обозначая $1+z=\zeta$, можно записать разложение главной ветви $\sqrt{\zeta}$ в окрестности $\zeta=1$:

$$\sqrt{\zeta}=1+\frac{1}{2}(\zeta-1)-\frac{1\cdot 1}{2\cdot 4}(\zeta-1)^2+\frac{1\cdot 1\cdot 3}{2\cdot 4\cdot 6}(\zeta-1)^3-\frac{1\cdot 1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}(\zeta-1)^4+\ldots;$$
$$|\zeta-1|<1.$$

10.10.2. Тригонометрические и гиперболические функции

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots\quad(|z|<\infty),$$
$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots\quad(|z|<\infty),$$
$$\operatorname{sh} z=z+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots\quad(|z|<\infty),$$
$$\operatorname{ch} z=1+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots\quad(|z|<\infty).$$

Периоды функций $\sin z$, $\cos z$ и $\operatorname{sh} z$, $\operatorname{ch} z$ равны соответственно 2π и $2\pi i$. Определение остальных функций:

$$\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z},\quad \operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z},\quad \operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z},\quad \operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}.$$

Справедливы равенства:

$$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz}),\qquad \cos z=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz}),$$
$$\operatorname{sh} z=\frac{1}{2}(e^{z}-e^{-z}),\qquad \operatorname{ch} z=\frac{1}{2}(e^{z}+e^{-z}),$$
$$\sin z=-i\operatorname{sh} iz,\qquad \cos z=\operatorname{ch} iz,$$
$$\operatorname{tg} z=-i\operatorname{th} iz,\qquad \operatorname{cth} z=i\operatorname{cth} iz.$$

Обратные функции и соотношения между ними:

$$\arcsin z=z+\frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{z^5}{5}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{z^7}{7}+\ldots\quad(|z|<1),$$

$$\operatorname{arsh} z = z - \frac{1}{2}\cdot\frac{z^3}{3} + \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{z^5}{5} - \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{z^7}{7} + \ldots \quad (|z| < 1),$$

$$\operatorname{arctg} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \ldots \quad (|z| < 1),$$

$$\operatorname{arth} z = z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \ldots \quad (|z| < 1),$$

$$\arcsin z = -\operatorname{arsh} iz, \quad \operatorname{arctg} z = -i \operatorname{arth} iz.$$

10.10.3. Показательная и логарифмическая функции

Общая показательная функция $w = a^z$, где a — произвольное комплексное число, определяется равенством

$$w = a^z \equiv e^{z \operatorname{Ln} a} = e^{z \ln |a|} \cdot e^{iz \operatorname{Arg} a}$$

и является бесконечнозначной функцией, главная ветвь которой получается, если $\operatorname{Ln} a$ взять при $k = 0$ (см. 10.10.1). При $a = e$ имеем

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots \quad (|z| < \infty).$$

Функция e^z — периодическая, с периодом $2\pi i$. Справедливы равенства:

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z \quad (\textbf{формула Эйлера}),$$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y),$$

$$e^z = \operatorname{ch} z + \operatorname{sh} z.$$

Пример 26.

1) Главное значение i^x равно:

$$i^x = e^{x \ln i} = e^{x \ln |i|} \cdot e^{ix \arg i} = e^0 \cdot e^{ix\pi/2} = \cos\frac{\pi x}{2} + i \sin\frac{\pi x}{2}.$$

2) Главное значение i^i равно:

$$i^i = e^{i \ln i} = e^{i(\ln |i| + i \arg i)} = e^{i\cdot 0} \cdot e^{-\arg i} = e^{-\pi/2}.$$

Логарифмическая функция $w = \operatorname{Ln} z$ $(z \neq 0)$ определяется как обратная к $z = e^w$. Пусть $z = \rho e^{i\varphi}$, $\rho = |z|$, $\varphi = \varphi_0 + 2\pi k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, $-\pi < \varphi_0 \leqslant \pi$, тогда $\operatorname{Ln} z = \ln \rho + i\varphi$, где $\ln \rho$ — обычный натуральный логарифм. Однозначная функция $\ln z = \ln \rho + i\varphi_0$ $(k = 0)$ называется главной ветвью бесконечнозначной логарифмической функции $\operatorname{Ln} z$ (см. также 10.8.4).

Пример 27. Найти значения логарифмов комплексных чисел:

1) $\ln i = \ln |i| + i \arg i = 0 + i\dfrac{\pi}{2} = i\dfrac{\pi}{2}$.

2) $\ln(-i) = \ln|-i| + i\arg(-i) = i\left(-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\dfrac{i\pi}{2}$.

3) $\operatorname{Ln}(2i) = \operatorname{Ln}\left[2e^{i(\pi/2+2k\pi)}\right] = \ln 2 + i\left(\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi\right)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2$.

4) $\ln(-e) = \ln|-e| + i\arg(-e) = 1 + i\pi$.

Решение. Для главной ветви логарифмической функции, значение которой равно 0 при $z = 0$, справедливо разложение

$$\ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots \quad (|z| < 1). \qquad \triangleright$$

Глава 11

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Дифференциальным уравнением называется уравнение, содержащее неизвестную функцию (или несколько функций), ее производные или дифференциалы различных порядков, а также независимые переменные. Если неизвестные функции зависят от одного аргумента, то дифференциальное уравнение называется **обыкновенным**; если от нескольких аргументов, то — **уравнением с частными производными.** Любая функция, удовлетворяющая данному дифференциальному уравнению, т. е. обращающая его в тождество, называется **решением** этого уравнения.

Пример 1. Обыкновенное дифференциальное уравнение $y'' + xy = 0$ содержит неизвестную функцию $y(x)$. В уравнении с частными производными

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = xy\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

неизвестная функция $u(x, y)$ зависит от двух аргументов.

11.1. Обыкновенные дифференциальные уравнения

11.1.1. Основные понятия. Достаточные условия существования и единственности решения

11.1.1.1. Основные понятия и определения

Обыкновенным дифференциальным уравнением порядка n называется уравнение вида

$$F(x, y(x), y'(x), y''(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0, \tag{11.1}$$

где F — функция указанных аргументов, связывающая независимую переменную x, неизвестную функцию $y(x)$ и ее производные. **Порядком** n дифференциального уравнения называется порядок наивысшей (старшей) из входящих в него производных неизвестной функции. В некоторых частных случаях уравнение может не содержать явно $x, y(x)$, а также отдельных производных.

Пример 2. Уравнения $(y')^2 + \frac{1}{x}y^3 = 0$ и $y'' + 4y = 0$ соответственно первого и второго порядка.

Уравнение (11.1) записано в **неявном виде**. Уравнение, разрешенное относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}), \tag{11.2}$$

называется уравнением в **явном (нормальном) виде.** Если левая часть уравнения (11.1) линейна по совокупности $y, y', \ldots, y^{(n)}$, то оно называется **линейным уравнением** n-го порядка.

Некоторая функция $y = \varphi(x)$, непрерывная в конечном или бесконечном промежутке $(a; b)$ вместе со своими производными до порядка, равного порядку дифференциального уравнения (11.1) и обращающая это уравнение (или уравнение (11.2)) в тождество для всех x из $(a; b)$, т.е.

$$F\big(x, \varphi(x), \varphi'(x), \varphi''(x), \ldots, \varphi^{(n)}(x)\big) \equiv 0 \quad (a < x < b),$$

называется **решением (интегралом)** этого уравнения в промежутке $(a; b)$. В общем случае **интегралом** какого-либо дифференциального уравнения называется любое уравнение, не содержащее производных неизвестной функции, из которого это дифференциальное уравнение может быть получено как следствие. Процесс нахождения решений (интегралов) дифференциального уравнения называется его **интегрированием**. Если все решения какого-либо дифференциального уравнения выражаются через элементарные функции или через неопределенные интегралы от элементарных функций (т.е. в **квадратурах**), то говорят, что это уравнение **интегрируется в конечном виде.** Большинство дифференциальных уравнений не интегрируются в конечном виде. Решения таких уравнений ищутся с помощью степенных рядов, а также с использованием различных приближенных методов (см. 16.8).

Пример 3.

1) Функция $y = e^{2x}$ при любом x является решением уравнения $y'' - 4y = 0$, что проверяется непосредственной ее подстановкой в уравнение.
2) Функции $y = \sin x$, $y = \cos x$ обращают уравнение $y'' + y = 0$ в тождество при всех x.
3) Уравнение $x^2y = 1$ является интегралом для дифференциального уравнения $xy' + 2y = 0$, так как $(x^2y)' = 2xy + x^2y' = 0$.

Решение уравнения может быть найдено также в **неявном виде** $\Phi(x, y) = 0$, либо в **параметрической форме** $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, где t — параметр. **Общее**

решение уравнения (11.1) или (11.2) порядка n записывается в виде

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n), \tag{11.3}$$

где $C_1, C_2, \dots, C_n$ — **произвольные постоянные (постоянные интегрирования)**. Общее решение уравнения порядка n, записанное в неявном виде

$$\Phi(x, y, C_1, \dots, C_n) = 0,$$

называется **общим интегралом** этого уравнения. Для каждой совокупности конкретных значений постоянных $C_1, \dots, C_n$ из общего решения получается **частное решение**. График какого-либо частного решения уравнения на плоскости Oxy называется **интегральной кривой** этого уравнения. Множество всех этих кривых называется n-параметрическим **семейством интегральных кривых**, зависящим от параметров $C_1, \dots, C_n$. Обратно, каждому семейству кривых, например, однопараметрическому $\Phi(x, y, C) = 0$, соответствует некоторое дифференциальное уравнение $F(x, y, y') = 0$, которое получается исключением параметра C из системы уравнений

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \Phi'_x(x, y, C) + \Phi'_y(x, y, C)y' = 0.$$

Если семейство кривых задано уравнением $y = \varphi(x, C)$, то предыдущая система примет вид:

$$y = \varphi(x, C), \quad y' = \varphi'_x(x, C).$$

Некоторые дифференциальные уравнения имеют дополнительные, **особые решения (особые интегралы)**, не входящие в общее решение, т. е. их нельзя получить из общего решения ни при каких значениях $C_1, C_2, \dots, C_n$ (включая $\pm\infty$).

Задача Коши (начальная задача) состоит в отыскании частного решения, удовлетворяющего n **начальным условиям**

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \dots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

где $x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ — заданные числа (**начальные значения**). Задание начальных условий означает, что при $x = x_0$ задаются значения функции и всех ее производных до порядка $(n-1)$ включительно. Решение задачи Коши иногда записывают в виде $y = y(x, x_0, y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)})$, в котором указываются начальные значения.

В частности, для уравнения $y' = f(x, y)$ начальное условие имеет вид: $y = y_0$ при $x = x_0$ (или $y(x_0) = y_0$). **Геометрически** решение задачи Коши состоит при этом в отыскании интегральной кривой уравнения, проходящей через заданную точку (x_0, y_0) на плоскости Oxy.

Если общее решение (11.3) уравнения (11.1) или (11.2) известно, то постоянные $C_1, C_2, \dots, C_n$, определяющие соответствующее частное решение, находятся из системы уравнений

$$\varphi(x_0, C_1 \ldots, C_n) = y_0,$$
$$\varphi'(x_0, C_1 \ldots, C_n) = y_0',$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varphi^{(n-1)}(x_0, C_1 \ldots, C_n) = y_0^{(n-1)},$$

где производные по x от $\varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ берутся при $x = x_0$. Если выразить произвольные постоянные $C_1, \ldots, C_n$ через начальные значения $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ и подставить их в общее решение (11.3), то общее решение, записанное в виде

$$y = y\big(x, x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}\big),$$

где x_0 зафиксировано, а $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ играют роль произвольных постоянных, называется **общим решением в форме Коши**. При фиксированных начальных значениях из общего решения получается частное решение.

Пример 4. Уравнение первого порядка $y' = 2x$ имеет общее решение $y = x^2 + C$ (C — произвольное число), равное неопределенному интегралу от $2x$. Семейство интегральных кривых уравнения состоит из бесконечного множества парабол, соответствующих разным значениям C (рис. 11.1). Задача Коши с начальными условиями $y = y_0$ при $x = x_0$ здесь состоит в нахождении параболы, проходящей через заданную точку (x_0, y_0). Для нахождения C подставим $x = x_0$, $y = y_0$ в общее решение, получим $C = y_0 - x_0^2$, т. е. $y = x^2 + y_0 - x_0^2$. Например, если $x_0 = 1$, $y_0 = 2$, то $C = 1$ и $y = x^2 + 1$. Таким образом, из множества парабол общего решения выделена одна, проходящая через точку $(1; 2)$.

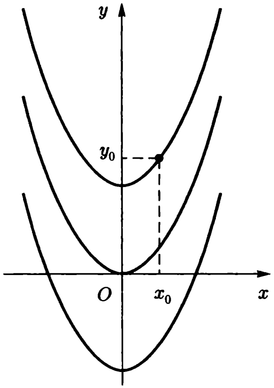


Рис. 11.1

Краевая задача заключается в нахождении частного решения $y = \varphi(x)$ дифференциального уравнения порядка n при наличии n **краевых (граничных) условий**, наложенных на функцию $\varphi(x)$ и ее производные в концах $x = a$ и $x = b$ некоторого заданного отрезка $[a; b]$, в котором это решение ищется. Функция $\varphi(x)$ обращает уравнение в тождество внутри $[a; b]$ и удовлетворяет краевым условиям на его концах. Если для уравнения второго порядка краевые условия имеют вид $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, то геометрический смысл краевой задачи состоит в нахождении интегральной кривой, проходящей через заданные точки (a, y_a), (b, y_b).

Пример 5. Решением уравнения $y'' + y = 0$, удовлетворяющим краевым условиям $y(0) = 0$, $y(\pi) = 0$ на концах отрезка $[0; \pi]$, является функция $y = C \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi)$, где C — произвольное число. Данная краевая задача имеет бесконечное множество решений. Для краевых условий $y(0) = 0$, $y(\pi/2) = 1$ задача имеет единственное решение $y = \sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant \pi/2)$.

Система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$F_i(x; y_1, \dots, y_m; y', \dots, y'_m; \dots) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m) \tag{11.4}$$

содержит m неизвестных функций $y_1(x), \dots, y_m(x)$ и их производные различного порядка. **Порядком n_i** каждого из уравнений системы (11.4) называется наивысший порядок содержащейся в нем производной. **Порядком n системы** (11.4) называется сумма порядков $n = n_1 + \ldots + n_m$ всех входящих в нее уравнений. Любая совокупность функций $y_1 = \varphi_1(x)$, $\dots$, $y_m = \varphi_m(x)$, обращающих все уравнения системы (11.4) в тождества относительно x, называется **решением (интегралом)** этой системы. Процесс нахождения решений системы называется ее **интегрированием**. График решения системы, являющийся некоторой кривой в $(m+1)$-мерном пространстве точек $(x, y_1, \dots, y_m)$, называется **интегральной кривой системы** (11.4). Общее решение $y_i = \varphi_i(x, C_1, \dots, C_n)$ $(i = 1, 2, \dots, m)$ системы (11.4) содержит n **произвольных постоянных** (**постоянных интегрирования**) $C_1, \dots, C_n$, которые могут быть найдены при помощи n начальных условий.

Уравнение вида (11.2) с одной неизвестной функцией $y(x)$ сводится к системе n уравнений первого порядка

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_3, \quad \dots, \quad \frac{dy_{n-1}}{dx} = y_n, \quad \frac{dy_n}{dx} = f(x, y_1, \dots, y_n),$$

где $y_1 \equiv y(x)$, $y_2 \equiv y'(x)$, $\dots$, $y_n \equiv y^{(n-1)}(x)$ — новые неизвестные функции. Если найдено решение этой системы, то тем самым найдено также и решение уравнения (11.2), так как $y(x) \equiv y_1(x)$.

Обратный переход от системы n уравнений первого порядка к одному уравнению n-го порядка удается провести не всегда. Однако всегда можно перейти от системы к совокупности нескольких уравнений (каждое — с одной неизвестной функцией), сумма порядков которых равна n.

Любую систему вида (11.4) можно свести к равносильной ей системе n уравнений первого порядка, заменяя высшие производные новыми неизвестными функциями.

Пример 6. Система трех уравнений второго порядка $x'' = P(x, y, z)$, $y'' = Q(x, y, z)$, $z'' = R(x, y, z)$ с тремя неизвестными функциями $x(t), y(t), z(t)$ при помощи введения еще трех неизвестных функций $u(t) \equiv x'$, $v(t) \equiv y'$, $w(t) \equiv z'$ сводится к системе шести уравнений первого порядка

$$\frac{dx}{dt} = u, \quad \frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dz}{dt} = w,$$
$$\frac{du}{dt} = P(x, y, z), \quad \frac{dv}{dt} = Q(x, y, z), \quad \frac{dw}{dt} = R(x, y, z),$$

содержащей шесть неизвестных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, $u(t)$, $v(t)$, $w(t)$. Шесть произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_6$, входящих в каждую из шести функций общего решения, например, $x = \varphi_1(t, C_1, \ldots, C_6)$, находятся при помощи начальных условий

$$x(t_0) = x_0, \quad y(t_0) = y_0, \quad z(t_0) = z_0,$$
$$u(t_0) = u_0, \quad v(t_0) = v_0, \quad w(t_0) = w_0.$$

Подставляя найденные отсюда значения $C_1, \ldots, C_6$ в общее решение, получим частное решение.

Нормальной системой называется система n дифференциальных уравнений первого порядка, разрешенных относительно производных n неизвестных функций $y_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, \ldots, y_n), \\ y_2' &= f_2(x, y_1, \ldots, y_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, \ldots, y_n). \end{aligned} \tag{11.5}$$

Общее решение $y_i = \varphi_i(x, C_1, \ldots, C_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ системы (11.5) содержит n произвольных постоянных, которые могут быть найдены при помощи начальных условий

$$y_1(x) = y_{10}, \quad y_2(x) = y_{20}, \quad \ldots, \quad y_n(x) = y_{n0} \quad \text{при } x = x_0, \tag{11.6}$$

где $x_0, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n0}$ — заданные числа. В результате получается **частное решение** $y_i = \varphi_i(x)$. Общее решение системы (11.5) может быть записано также **в форме Коши**

$$y_i = y_i(x, x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}) \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

где x_0 фиксировано, а значения $y_{10}, \ldots, y_{n0}$ играют роль произвольных постоянных. **Первым интегралом** системы (11.5) называется функция $\psi(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$, не являющаяся тождественной постоянной и обращающаяся в постоянную при подстановке в нее любого решения $y_i = \varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ системы (11.5). Первый интеграл удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} f_1 + \ldots + \frac{\partial \psi}{\partial y_n} f_n = 0.$$

В частном случае независимая переменная x может не входить явно в первый интеграл. Примеры нахождения первых интегралов см. в 11.2.2.1 и 11.2.2.2.

Разрешая равенства $y_i = \varphi_i(x, C_1, \dots, C_n)$ относительно C_i, можно получить n первых интегралов $\psi_i(x, y_1, \dots, y_n) = C_i$ $(i = 1, 2, \dots, n)$. Если известны n первых независимых интегралов системы (11.5), то задача ее интегрирования решена, так как из уравнений $\psi_i(x, y_1, \dots, y_n) = C_i$ $(i = 1, \dots, n)$ можно выразить искомые функции через x и C_i. Каждый известный первый интеграл позволяет понизить порядок системы на единицу.

Примечание. Первые интегралы называются **независимыми**, если ни одна из функций ψ_i не может быть представлена как функция от остальных.

Если правые части системы (11.5) зависят линейно от неизвестных функций $y_1, \dots, y_n$, то система уравнений

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}(x)y_j + f_i(x) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

называется **линейной**.

11.1.1.2. Достаточные условия существования и единственности решения

Пусть требуется решить задачу Коши

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0. \tag{11.7}$$

Теорема Пикара. *Если однозначная функция $f(x, y)$ в правой части уравнения* (11.7):

1) *определена и непрерывна по совокупности переменных x, y в замкнутом прямоугольнике R на плоскости Oxy, определяемом неравенствами*

$$x_0 - a \leqslant x \leqslant x_0 + a, \quad y_0 - b \leqslant y \leqslant y_0 + b,$$

2) *удовлетворяет **условию Липшица***

$$\bigl|f(x, \bar{y}) - f(x, y)\bigr| \leqslant L|\bar{y} - y|,$$

где число $L > 0$, а $(x, \bar{y})$ и (x, y) — любые две точки из прямоугольника R, то задача Коши (11.7) *имеет единственное решение $y = \varphi(x)$ (т. е. $\varphi'(x) = f(x, \varphi(x))$ и $\varphi(x_0) = y_0$). Решение $\varphi(x)$ непрерывно дифференцируемо на отрезке $|x - x_0| \leqslant h$, где $h = \min\{a, b/M\}$, $|f(x, y)| \leqslant M$ в области R.*

Примечание 1. Если $f(x, y)$ удовлетворяет условию теоремы Пикара в некоторой открытой области D на плоскости Oxy, то задача Коши (11.7) имеет единственное решение при любых x_0, y_0 таких, что точка (x_0, y_0) принадлежит D. Каждое из полученных решений может быть продолжено до границы области D. **Геометрический смысл теоремы Пикара:** через всякую точку (x_0, y_0) в D проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (11.7).

Примечание 2. Условие Липшица заведомо выполняется, если частная производная f'_y непрерывна (или ограничена) в области D. Если в этой теореме отказаться от условия Липшица, то получим достаточное условие лишь существования решения для заданного начального условия.

Примечание 3. Теорема Пикара обобщается также на нормальную систему (11.5) с начальными условиями (11.6), если условие Липшица записать в виде

$$\left|f_i(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n) - f_i(x, y_1, \ldots, y_n)\right| \leqslant L \sum_{j=1}^{n} |\bar{y}_j - y_j| \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

для любых двух точек $(x, \bar{y}_1, \ldots, \bar{y}_n)$ и $(x, y_1, \ldots, y_n)$ из открытой области D в $(n+1)$-мерном пространстве. В частности, условие Липшица выполняется, если все производные $(f_i)'_{y_j}$ непрерывны (или ограничены) в D.

Примечание 4. Задача Коши для уравнения (11.2) с начальными условиями

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

имеет одно и только одно, n раз непрерывно дифференцируемое решение, при условии, что однозначная функция f непрерывна по совокупности всех аргументов в некоторой окрестности точки $\left(x_0, y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}\right)$ и имеет в этой окрестности непрерывные частные производные по $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$.

Непрерывная зависимость решения задачи Коши от параметров и начальных значений. 1. Если в задаче Коши $dy/dx = f(x, y, t)$, $y(x_0) = y_0$, функция $f(x, y, t)$, где t — параметр, задана в области D, определяемой неравенствами $|x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$, $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, и удовлетворяет в ней условиям: 1) f непрерывна по совокупности всех своих аргументов, и, значит, $|f(x, y, t)| \leqslant M$ в D; 2) удовлетворяет условию Липшица по y, — то данная задача Коши имеет единственное решение $y = y(x, x_0, y_0, t)$, являющееся непрерывно дифференцируемой функцией от x в промежутке $|x - x_0| \leqslant h$, где $h = \min\{a, b/M\}$, а также непрерывной функцией от t в промежутке $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$, равномерно по x из $|x - x_0| \leqslant h$; т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее только от ε и такое, что при $|\Delta t| < \delta$ выполняется неравенство $\left|y(x, x_0, y_0, t + \Delta t) - y(x, x_0, y_0, t)\right| < \varepsilon$ для любого x из промежутка $|x - x_0| \leqslant h$.

2. Если в уравнении $dy/dx = f(x, y)$ правая часть $f(x, y)$ удовлетворяет обоим условиям теоремы Пикара в области $|x - x_0| \leqslant a$, $|y - y_0| \leqslant b$, то решение $y = y(x, x^*, y^*)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $y(x^*) = y^*$, является непрерывной функцией по совокупности начальных данных x^*, y^* в области $|x^* - x_0| \leqslant \lambda$, $|y^* - y_0| \leqslant b/2$ $(0 \leqslant \lambda < h/4$, где h определено в п. 1) равномерно по x из промежутка G: $|x - x_0| \leqslant h/2 - \lambda$; т. е. для каждого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$, зависящее только от ε и такое, что при $|\Delta x^*| < \delta$, $|\Delta y^*| < \delta$ выполняется неравенство $\left|y(x, x^* + \Delta x^*, y^* + \Delta y^*) - y(x, x^*, y^*)\right| < \varepsilon$ для любого x из G.

11.1.2. Дифференциальные уравнения первого порядка

11.1.2.1. Основные сведения

Если дифференциальное уравнение первого порядка **общего вида**

$$F(x, y, y') = 0 \tag{11.8}$$

может быть разрешено относительно производной, то оно примет **нормальный вид**

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y). \tag{11.9}$$

Уравнение (11.9) можно записать также в виде, связывающем дифференциалы: $dy = f(x, y)\,dx$.

Общее решение уравнения (11.9) имеет вид $y = \varphi(x, C)$. Наличие общего решения позволяет решать задачу Коши

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

при любых начальных условиях x_0, y_0 из области D, в которой выполняются оба условия теоремы Пикара. Общее решение, записанное в неявном виде $\Phi(x, y, C) = 0$, называется **общим интегралом** уравнения. При известных начальных условиях из общего интеграла может быть найден **частный интеграл**. Значение C определяется при этом из уравнения $\Phi(x_0, y_0, C) = 0$. Если общий интеграл записан в виде $\psi(x, y) = C$, то левая часть этого равенства называется **интегралом** уравнения. Дифференциальное уравнение может быть получено из его общего интеграла путем исключения параметра C из системы уравнений:

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\Phi}{\partial y}y' = 0.$$

Одно и то же дифференциальное уравнение может иметь несколько общих интегралов.

Геометрический смысл дифференциального уравнения. Если $y = y(x)$ — частное решение уравнения (11.9), то касательная MT к интегральной кривой $y = y(x)$ на плоскости Oxy в каждой точке $M(x, y)$, лежащей на этой кривой (рис. 11.2), имеет угловой коэффициент $k = f(x, y)$ (так как $k = \operatorname{tg}\alpha(M) = y'(x) = f(x, y(x))$). Даже не решая уравнения (11.9), можно получить представление о расположении его интегральных кривых. Через каждую точку $M(x, y)$ области D на плоскости Oxy, в которой определена функция $f(x, y)$, проведем вектор достаточно малой длины, составляющий угол α $[\operatorname{tg}\alpha = f(x, y) = f(M)]$ с положительным направлением оси Ox. Точка M вместе с таким вектором называется **линейным элементом**. Множество всех линейных элементов образует **поле направлений** уравнения (11.9). Геометрически задача интегрирования уравнения (11.9) заключается в нахождении

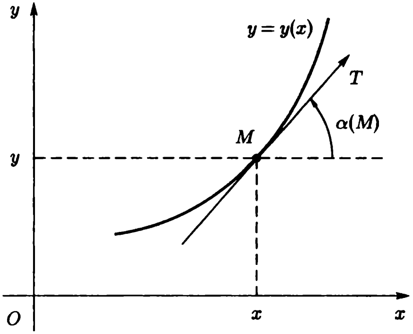


Рис. 11.2

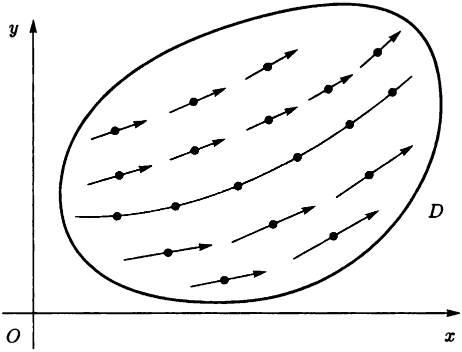


Рис. 11.3

таких кривых, у которых направление касательной в каждой точке совпадает с направлением поля. Если поле направлений представлено достаточно густо расположенными линейными элементами, то интегральные кривые могут быть изображены приближенно без решения уравнения (рис. 11.3), что дает возможность качественного исследования уравнения. При этом полезно вначале изобразить **изоклины** (**линии равного наклона**) с уравнением $f(x, y) = k = \text{const}$, вдоль которых направление поля, определяемое уравнением (11.9), неизменно. При условии, что $f(x, y)$ непрерывно дифференцируема, **линии точек перегиба** и **линии экстремумов** (если они существуют) интегральных кривых могут быть найдены из уравнений $y'' = f'_x + f'_y \cdot f(x, y) = 0$ и $y' = f(x, y) = 0$ соответственно. Например, изоклинами уравнения $y' = 2x$ (см. пример 4) являются прямые $x = k/2$, параллельные оси Oy; линия точек перегиба здесь отсутствует; линия экстремумов: $x = 0$.

Пример 7. Правая часть уравнения $y' = x^2 + y^2$ непрерывна и имеет непрерывную производную по y на всей плоскости. Изоклинами являются окружности $x^2 + y^2 = k$. При $k = 0$ окружность вырождается в точку $(0; 0)$. В точках изоклины $x^2 + y^2 = 1$ угол $\alpha = \pi/4$. Линий экстремума нет. Линия точек перегиба: $y^3 + x^2 y + x = 0$. Некоторые интегральные кривые изображены на рис. 11.4 сплошными линиями. Штриховыми изображены изоклины.

Если в некоторой точке $M(x, y)$ правая часть уравнения (11.9) обращается в бесконечность, что означает направление поля, параллельное оси Oy (вертикальное), то наряду с уравнением (11.9) рассматривают также **«перевернутое» уравнение**

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x, y)}, \tag{11.10}$$

в котором $x = x(y)$. **Уравнения (11.9) и (11.10), а также их интегральные кривые всегда рассматриваются совместно.**

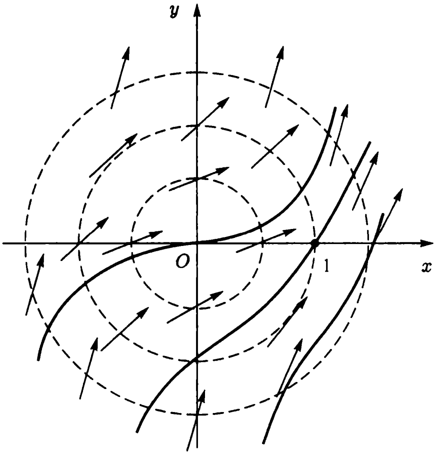


Рис. 11.4

Обыкновенные и особые точки уравнения. Точка (x_0, y_0) на плоскости Oxy, в окрестности которой, содержащей и эту точку, выполняются оба условия теоремы Пикара для уравнений (11.9) или (11.10), называется **обыкновенной точкой** уравнения (11.9). Через каждую обыкновенную точку в указанной ее окрестности проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения (11.9) или (11.10). Вся эта окрестность сплошь заполнена интегральными кривыми, не имеющими друг с другом общих точек.

Точка (x_0, y_0), в которой не выполняются все условия теоремы Пикара для уравнений (11.9) и (11.10), но выполняются в ее достаточно малой окрестности, называется **(изолированной) особой точкой** уравнения (11.9). Множество особых точек может представлять собой некоторую линию, называемую **особой линией** уравнения.

Если (x_0, y_0) — особая точка и существует интегральная кривая $y = y(x)$ или $x = x(y)$ такая, что $y(x) \to y_0$ при $x \to x_0$ или $x(y) \to x_0$ при $y \to y_0$, то говорят, что эта интегральная кривая **примыкает** к особой точке. Поле направлений в особой точке не определено. К особой точке могут примыкать либо несколько интегральных кривых, либо ни одной.

Примечание. Особыми случаями задачи Коши называются:

1) задача нахождения интегральных кривых, примыкающих к особой точке (x_0, y_0);
2) случай, когда хотя бы одно из начальных значений x_0, y_0 не является конечным;
3) случай, когда правая часть уравнения (11.9) обращается в бесконечность в конечной или бесконечно удаленно начальной точке (x_0, y_0).

Пример 8. Рассмотрим уравнение $dy/dx = y/x$ как единую совокупность самого этого уравнения, а также «перевернутого» уравнения $dx/dy = x/y$. Поле направлений данного уравнения определено всюду на плоскости Oxy, исключая точку $O(0;0)$, в которой правые части обоих уравнений обращаются в неопределенность $0/0$. Условия теоремы Пикара выполняются всюду, кроме точки $(0;0)$. Точка $(0;0)$ — особая, и в ней поле направлений не определено. Непосредственной подстановкой проверяется, что функции $y = Cx$ $(x \neq 0)$ и $x = C_1 y$ $(y \neq 0)$, где C, C_1 — постоянные, являются решениями самого уравнения и «перевернутого» соответственно. Объединяя эти решения, получим, что интегральными кривыми данного уравнения являются все полупрямые (лучи), включая полуоси координат:

$$y = Cx \ (x \neq 0); \quad x = 0 \ (y \neq 0),$$

примыкающие к особой точке $O(0;0)$ (рис. 11.5). Изоклины здесь совпадают с интегральными кривыми.

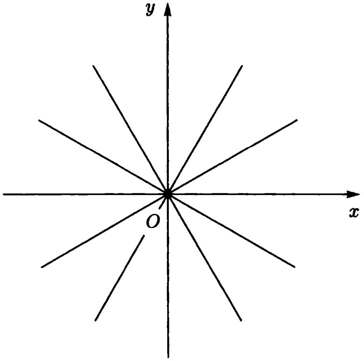


Рис. 11.5

Пример 9. Для уравнения $dy/dx = -x/y$ (рассматриваемого совместно с «перевернутым») особой является точка $O(0;0)$. Все остальные точки плоскости Oxy — обыкновенные, так как в некоторой их окрестности выполняются оба условия теоремы Пикара либо для исходного уравнения, либо для «перевернутого». Записывая уравнение в виде $x\,dx + y\,dy = 0$, или $d(x^2+y^2) = 0$, найдем, что (общий) интеграл уравнения имеет вид $x^2+y^2=C^2$ (C — постоянная). Изоклины: лучи, выходящие из начала координат; интегральные кривые: окружности (рис. 11.6), ни одна из которых не примыкает к особой точке $O(0;0)$.

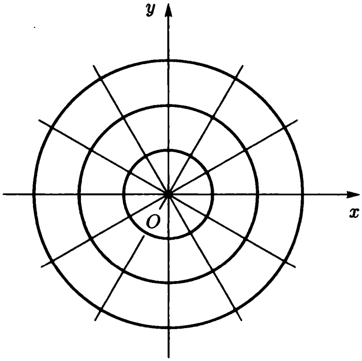


Рис. 11.6

Некоторые дифференциальные уравнения кроме общего решения могут иметь также дополнительные (**особые**) решения. В связи с этим каждое уравнение необходимо исследовать на наличие особых решений. **Особым решением** дифференциального уравнения называется такое его решение, во всех точках которого нарушается единственность решения задачи Коши, т. е. к любой точке особого решения примыкают по крайней мере две интегральные кривые. Всякое особое решение является особой линией, но не наоборот. Особое решение не может быть получено из общего решения $y = \varphi(x, C)$ ни при каком конкретном значении произвольной постоянной C (в том числе $\pm\infty$).

Если правая часть уравнения $y' = f(x, y)$ удовлетворяет в некоторой области обоим условиям теоремы Пикара, то уравнение не имеет в этой области особых решений, т. е. задача Коши (11.7) для любой точки указанной области имеет единственное решение. Если $f(x, y)$ непрерывна в некоторой области и имеет частную производную по y, то особыми решениями могут быть только такие кривые $y = \psi(x)$, в каждой точке которых производная f'_y не существует (либо обращается в бесконечность). При этом следует проверить, удовлетворяет ли $y = \psi(x)$ уравнению и не нарушается ли единственность решения задачи Коши.

Пример 10. Правая часть уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y) \equiv 3\sqrt[3]{y^2}$$

непрерывна во всей плоскости Oxy. Производная $f'_y = \dfrac{2}{\sqrt[3]{y}}$ обращается в бесконечность при $y = 0$ (ось Ox). Правая часть перевернутого уравнения $\dfrac{dx}{dy} = \dfrac{1}{3}y^{-2/3}$

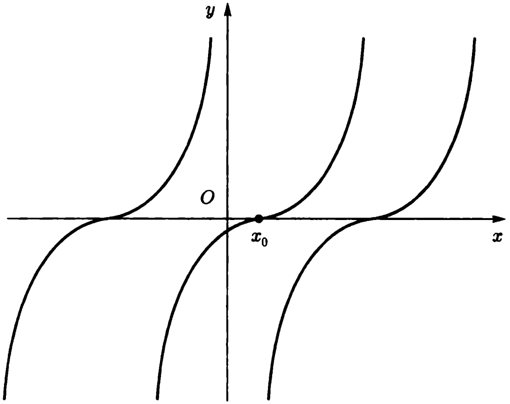


Рис. 11.7

не определена при $y = 0$. Ось Ox ($y = 0$) является особой линией. Условия теоремы Пикара выполняются по отдельности в верхней ($y > 0$) и нижней ($y < 0$) полуплоскостях. Через каждую точку этих полуплоскостей проходит единственная интегральная кривая. Функция $y = (x + C)^3$ является общим решением (см. 11.1.2.3) как самого уравнения, так и перевернутого в каждой из указанных полуплоскостей (что проверяется подстановкой в уравнение). Особым решением может быть только функция $y \equiv 0$, так как f'_y обращается в бесконечность при $y = 0$. Очевидно, что функция $y = 0$ удовлетворяет уравнению. Задача Коши для точек $(x_0,0)$ оси Ox

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0 = 0$$

имеет решение $y = 0$. Для заданного начального условия из общего решения находим также $0 = (x_0 + C)^3$, т. е. $C = -x_0$. Следовательно, к точке $(x_0,0)$ примыкают слева ($x < x_0$) и справа ($x > x_0$) две кубические полупараболы $y = (x - x_0)^3$ (рис. 11.7). Таким образом, в точках решения $y = 0$ единственность решения задачи Коши нарушена, и это решение особое. Особое решение $y = 0$ не может быть получено из общего ни при каком значении C.

Пример 11. Уравнение $y' = 2\sqrt{y}$ имеет особое решение $y = 0$ (ось Ox). В полуплоскости $y > 0$ выполняются оба условия теоремы Пикара как для самого уравнения, так и для перевернутого. Интегральные кривые общего решения заполняют верхнюю полуплоскость. К каждой точке $(x_0,0)$ особого решения $y = 0$ примыкает справа интегральная кривая (полупарабола) $y = (x - x_0)^2$ ($x > x_0$).

Пример 12. Функция $y = 0$ является подозрительной на особое решение уравнения $y' = 3y^{2/3} + 1$ (см. пример 10). Однако она не удовлетворяет уравнению, и поэтому особых решений нет вообще.

Обычно, кривые, подозрительные на особые решения, ищутся среди огибающих семейства интегральных кривых общего решения (или общего интеграла). **Огибающей** однопараметрического семейства кривых $y = \varphi(x, C)$ или $\Phi(x, y, C) = 0$ называется такая кривая, которая в каждой своей точке имеет касательную, общую только с одной кривой данного семейства, проходящей через эту же точку, т. е. огибающая вся состоит из точек касания (см. также 14.1.7). Огибающая $R(x, y) = 0$ семейства кривых (если она существует) находится исключением параметра C из системы двух уравнений

$$y = \varphi(x, C), \quad \frac{\partial\varphi(x, C)}{\partial C} = 0 \tag{11.11}$$

или

$$\Phi(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial\Phi(x, y, C)}{\partial C} = 0, \tag{11.11$'$}$$

при условии, что функции $y - \varphi(x, C)$ или $\Phi(x, y, C)$ имеют непрерывные частные производные по x, y, C. Чтобы выяснить, является ли кривая $R(x, y) = 0$ огибающей, следует проверить равенство угловых коэффициентов касательных к огибающей и интегральной кривой в их общих точках.

Огибающая семейства кривых общего решения $y = \varphi(x, C)$ или общего интеграла $\Phi(x, y, C) = 0$ уравнения (11.8) или (11.9) **всегда** является также интегральной кривой (решением) уравнения. **В некоторых случаях** это решение оказывается особым (т. е. в каждой его точке нарушается единственность решения задачи Коши). Однако, иногда случается так, что огибающая входит в состав семейства кривых и поэтому не является особым решением. Система (11.11) или (11.11$'$) может не определять вообще никакой кривой. В общем случае кривая (называемая **дискриминантной кривой**), получаемая из (11.11) или (11.11$'$), может оказаться не огибающей, а множеством **особых точек** (в которых одновременно $\Phi'_x = 0$ и $\Phi'_y = 0$) кривых семейства, т. е. не быть особым интегралом. При отсутствии огибающих особые решения отсутствуют.

Особые решения могут быть найдены также непосредственно при нахождении общего решения уравнения, так как при этом иногда производятся действия, приводящие к нарушению равносильности промежуточных уравнений (например, деление на какое-либо выражение $g(x, y)$). В результате могут потеряться решения $y = \varphi(x)$, при которых $g(x, y) = 0$. Эти решения могут оказаться особыми, если они не входят в общее решение. Отметим, что в отличие от особого решения, частное — единственно при заданных начальных значениях.

Пример 13. Уравнение в примере 10 имеет общее решение $y = (x + C)^3$. Система (11.11) здесь принимает вид

$$y = (x + C)^3, \quad 3(x + C) = 0,$$

исключая из которой C, получим дискриминантную кривую $y \equiv 0$, которая является огибающей семейства общего решения, так как в точках оси Ox угловые коэффициенты касательных к интегральной кривой и огибающей совпадают ($y' = 0$).

Пример 14. Для семейства полукубических парабол $(y+C)^2 = x^3$ $(x \geqslant 0)$ дискриминантной кривой, получаемой из системы (11.11′), имеющей вид

$$(y+C)^2 = x^3, \quad 2(y+C) = 0,$$

является прямая $x \equiv 0$ (ось Oy), представляющая собой множество особых точек кривых семейства, но не огибающую.

Пример 15. Семейство окружностей $x^2 + y^2 = C^2$ с центром в начале координат не имеет огибающей. Дискриминантная кривая состоит из единственной точки $(0; 0)$.

Пример 16. Семейство окружностей $x^2 + (y+C)^2 = 1$ имеет две огибающие: прямые $x = -1$, $x = 1$.

11.1.2.2. Неполные уравнения

Уравнения вида $y' = f(x)$ или $y' = f(y)$ называются **неполными**.

1. Для уравнения

$$\frac{dy}{dx} = f(x), \tag{11.12}$$

где функция $f(x)$ непрерывна в интервале $-\infty \leqslant a < x < b \leqslant +\infty$, общее решение имеет вид

$$y = \int f(x)\,dx + C \quad (a < x < b).$$

Здесь первое слагаемое в правой части представляет собой какую-либо одну первообразную для $f(x)$. Частное решение уравнения (11.2) с начальным условием $y(x_0) = y_0$ может быть записано в виде

$$y = \int\limits_{x_0}^{x} f(x)\,dx + y_0.$$

Пример 17. Для решения задачи Коши

$$y' = 3x^2 + 2x - 1, \quad y(0) = 1$$

находим общее решение $y = x^3 + x^2 - x + C$. Полагая здесь $x = 0$, $y = 1$, находим $C = 1$. Частное решение имеет вид $y = x^3 + x^2 - x + 1$.

Если функция $f(x)$ непрерывна в интервале $(a; b)$, кроме точки разрыва $x = \xi$, находящейся внутри или на концах этого интервала, причем $f(x)$ обращается в бесконечность при $x = \xi$, то уравнение (11.12) рассматривается совместно с «перевернутым» уравнением

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{f(x)}, \tag{11.12′}$$

имеющим решение $x = \xi$, которое присоединяется к решениям уравнения (11.12).

Пример 18. Правая часть уравнения $dy/dx = 1/x^2$ непрерывна при всех x, кроме $x=0$, при котором она обращается в бесконечность. Для $x \neq 0$ имеем решение $y = -1/x+C$. Перевернутое уравнение $dx/dy = x^2$ имеет решение $x \equiv 0$, которое присоединяется к решению исходного уравнения. Решение $x \equiv 0$ — частное (не особое), так как семейство интегральных кривых не имеет огибающей.

2. Если в уравнении

$$\frac{dy}{dx} = f(y) \tag{11.13}$$

функция $f(y)$ непрерывна и $f(y) \neq 0$ в интервале $-\infty \leqslant A < y < B \leqslant +\infty$, то его общий и частный интеграл (для начального условия $y(x_0) = y_0$) имеют соответственно вид

$$x = \int \frac{dy}{f(y)} + C, \quad x = \int\limits_{y_0}^{y} \frac{dy}{f(y)} + x_0, \tag{11.14}$$

где y_0 принадлежит промежутку $(A; B)$, C — произвольная постоянная. Если $f(\eta) = 0$ при $A < \eta < B$, то уравнение (11.13) имеет решение $y \equiv \eta$. Все интегральные кривые уравнения (11.13) состоят из кривых общего интеграла (11.14) и прямой $y = \eta$.

Пример 19.

1) Правая часть уравнения $dy/dx = y-1$ непрерывна при всех y и обращается в нуль при $y = \eta = 1$. Интегральными кривыми данного уравнения являются кривые $x = \ln|y-1|+C$ $(y \neq 1)$ и прямая $y \equiv 1$. В полуплоскостях $y > 1$ и $y < 1$ имеем соответственно интегральные кривые $x = \ln(y-1)+C$ и $x = \ln(1-y)+C$, для которых прямая $y = 1$ является асимптотой. При $C = 0$ имеем $y = 1+e^x$ $(y > 1)$ и $y = 1-e^x$ $(y < 1)$. Для начальных условий $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ частное решение имеет вид $y = 1+e^{x-1}$. Изоклинами уравнения являются прямые $y = \mathrm{const}$.
2) Решением задачи Коши

$$\frac{dy}{dx} = y^2, \quad y = \frac{1}{3} \quad \text{при} \quad x = 0$$

является функция $y = (3-x)^{-1}$ $(-\infty < x < 3)$. При $x \geqslant 3$ это решение не существует. Если $x \to 3-0$, то $y \to +\infty$; $y \to 0$ при $x \to -\infty$. Интегральными кривыми данного уравнения являются

$$y = -\frac{1}{x+C} \quad (y \neq 0) \quad \text{и} \quad y \equiv 0.$$

11.1.2.3. Уравнения с разделенными переменными

1. Уравнение вида

$$P(x)\,dx + Q(y)\,dy = 0, \tag{11.15}$$

где множители при dx и dy зависят только от x и только от y соответственно, называется **уравнением с разделенными переменными**. Если функции $P(x)$ и

$Q(y)$ непрерывны и функция $y = \varphi(x)$ является решением уравнения (11.15), то, подставляя ее в уравнение, получим тождество

$$P(x)\,dx + Q(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx \equiv 0,$$

интегрируя которое, найдем

$$\int P(x)\,dx + \int Q(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = C.$$

Осуществляя во втором интеграле замену переменной $y = \varphi(x)$, находим, что общий интеграл уравнения (11.15) имеет вид:

$$\int P(x)\,dx + \int Q(y)\,dy = C, \tag{11.16}$$

где знак неопределенного интеграла означает какую-либо одну первообразную. Частный интеграл при начальных значениях x_0, y_0 может быть найден либо из (11.16), либо по формуле

$$\int_{x_0}^{x} P(x)\,dx + \int_{y_0}^{y} Q(y)\,dy = 0. \tag{11.17}$$

Пример 20. Для уравнения

$$\frac{x\,dx}{1+x^2} - \frac{y\,dy}{1+y^2} = 0$$

общий интеграл имеет вид

$$\ln(1+x^2) - \ln(1+y^2) = C, \quad \text{или} \quad \frac{1+x^2}{1+y^2} = e^C.$$

Для начальных данных $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ из общего интеграла находим $C = -\ln 2$. Частный интеграл: $2(1+x^2) - y^2 - 1 = 0$. Этот интеграл получается также из формулы (11.17).

2. Уравнение с разделяющимися переменными

$$f(x)g(y)\,dx + f_1(x)g_1(y)\,dy = 0, \tag{11.18}$$

в котором все четыре функции непрерывны, приводится к виду (11.15) делением на $g(y)f_1(x)$:

$$\frac{f(x)}{f_1(x)}\,dx + \frac{g_1(y)}{g(y)}\,dy = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения

$$\int \frac{f(x)}{f_1(x)}\,dx + \int \frac{g_1(y)}{g(y)}\,dy = C. \tag{11.19}$$

При этом предполагается, что $f_1(x) \neq 0$, $g(y) \neq 0$. В результате деления может произойти потеря решений вида $x \equiv \xi$, $y \equiv \eta$, где числа ξ, η — решения уравнений $f_1(x) = 0$, $g(y) = 0$. Такие решения могут быть либо частными, либо особыми. В точках пересечения прямых $x = \xi$, $y = \eta$ уравнение (11.18) не определено, и поэтому такие точки исключаются из решений.

Пример 21. Разделив уравнение $x(1 - y^2)\,dx + y(1 - x^2)\,dy = 0$ на $(1 - x^2)(1 - y^2)$, получим

$$\frac{x\,dx}{1 - x^2} + \frac{y\,dy}{1 - y^2} = 0.$$

Общий интеграл этого уравнения:

$$-\frac{1}{2}\ln|1 - x^2| - \frac{1}{2}\ln|1 - y^2| = -\ln C, \tag{1}$$

или

$$\left|(1 - x^2)(1 - y^2)\right| = C^2. \tag{2}$$

При делении могли утеряться дополнительные решения $x \equiv 1$, $x \equiv -1$, $y \equiv 1$, $y \equiv -1$. Непосредственная проверка показывает, что все эти четыре функции являются решениями уравнения. При этом из решений следует исключить четыре точки пересечения соответствующих четырех прямых. Дополнительные решения здесь являются частными (не особыми), так как содержатся в общем интеграле (2) при $C = 0$. Отметим, что после освобождения в интеграле (1) от логарифмов, получается интеграл (2), в котором значения $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ уже являются допустимыми.

Пример 22. Разделяя в уравнении $dy/dx = 2y/x$ $(x \neq 0)$ переменные, получим $dy/y = 2dx/x$. По формуле (11.19) находим $\ln|y| = 2\ln|x| + \ln|C|$. Отсюда $y = Cx^2$ $(x \neq 0)$. При $C = 0$ получаем решение $y \equiv 0$ $(x \neq 0)$. «Перевернутое» уравнение $dx/dy = x/(2y)$ $(y \neq 0)$ имеет, кроме того, решение $x \equiv 0$ $(y \neq 0)$. Интегральные кривые исходного уравнения: полупараболы $y = Cx^2$ $(x \neq 0)$; две полуоси оси Ox $(y = 0,\ x \neq 0)$; две полуоси оси Oy $(x = 0,\ y \neq 0)$, примыкающие к особой точке $O(0; 0)$, в которой поле направлений не определено. Нахождение всех решений упрощается, если исходное уравнение записать в виде $2y\,dx - x\,dy = 0$. При делении на $x \cdot y$ происходит потеря решений $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ с исключенной точкой $(0; 0)$.

11.1.2.4. Однородные уравнения

1. Функция $f(x, y)$ называется **однородной функцией степени** n, если

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y), \tag{11.20}$$

где t — произвольный параметр. Если $n = 0$, т. е. $f(tx, ty) = f(x, y)$, то $f(x, y)$ называется **однородной функцией нулевой степени** (или просто **однородной**). Любая однородная функция может быть записана в виде $f(x, y) = \varphi(y/x)$, так как, полагая $t = 1/x$, получим $f(x, y) = f(tx, ty) = f(1, y/x) \equiv \varphi(y/x)$.

Пример 23. Для функции $f(x, y) = \dfrac{a_2x + b_2y}{a_1x + b_1y}$ имеем

$$f(tx, ty) = \frac{a_2tx + b_2ty}{a_1tx + b_1ty} = \frac{a_2x + b_2y}{a_1x + b_1y} = f(x, y),$$

т. е. $f(x,y)$ — однородная функция. Ее можно записать в виде

$$f(x,y) = \frac{a_2 + b_2\dfrac{y}{x}}{a_1 + b_1\dfrac{y}{x}} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right), \quad \text{где} \quad \varphi(u) = \frac{a_2 + b_2 u}{a_1 + b_1 u}.$$

2. Уравнение $y' = f(x,y)$ называется **однородным** относительно x и y, если $f(x,y)$ — однородная функция (нулевой степени). Однородное уравнение можно записать в виде

$$y' = \varphi\left(\frac{y}{x}\right). \tag{11.21}$$

Изоклинами уравнения (11.21) являются лучи $y = kx$ $(x \neq 0)$, так как вдоль каждого луча ($k = \text{const}$) направление поля, задаваемого этим уравнением, неизменно: $\operatorname{tg}\alpha = \varphi(k) = \text{const}$, где $\operatorname{tg}\alpha$ — угловой коэффициент касательной к интегральной кривой. Интегральные кривые пересекают луч $y = kx$ под одинаковыми углами. Все интегральные кривые уравнения (11.21) могут быть получены из какой-либо одной интегральной кривой (не являющейся прямой) посредством преобразования подобия $x_1 = ax$, $y_1 = ay$ $(a > 0)$ с центром подобия в начале координат.

Уравнение

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0, \tag{11.22}$$

в котором $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — однородные функции одинаковой степени, также является однородным, так как отношение P/Q — однородная функция нулевой степени. Предполагается, что P и Q — непрерывные в некоторой области функции, не обращающиеся там одновременно в нуль. Точка (x_0, y_0), в которой P и Q одновременно равны нулю, называется **особой точкой** уравнения (11.22). В этой точке поле направлений уравнения $y' = -P/Q \equiv \varphi(y/x)$ не определено.

Уравнение (11.21) приводится к уравнению с разделяющимися переменными при помощи подстановки $y = x \cdot u(x)$, где $u(x)$ — новая неизвестная функция. Подставляя

$$\frac{dy}{dx} = x\frac{du}{dx} + u$$

в уравнение (11.21), получим

$$x\,du + [u - \varphi(u)]\,dx = 0.$$

Разделяя переменные, найдем

$$\frac{du}{u - \varphi(u)} + \frac{dx}{x} = 0 \quad (x \neq 0,\ u - \varphi(u) \neq 0).$$

Интегрируя, получим общий интеграл уравнения (11.21):

$$F\left(\frac{y}{x}\right) + \ln|x| = C, \quad \text{где} \quad F(u) \equiv \int \frac{du}{u - \varphi(u)}. \tag{11.23}$$

Кроме того, следует рассмотреть уравнения

$$1)\ x = 0, \quad 2)\ u - \varphi(u) = 0. \tag{11.24}$$

Если функция $x \equiv 0$ удовлетворяет перевернутому уравнению

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{\varphi(y/x)},$$

то решение $x \equiv 0$ $(y \neq 0)$ (которое может оказаться особым) следует присоединить к общему интегралу (11.23). Если второе уравнение (11.24) имеет решение $u = m$ (m — постоянная), то $y = m \cdot x$ $(x \neq 0)$ будет решением (возможно, особым) уравнения (11.21). Если $\varphi(u) \equiv u$, то уравнение (11.21) примет вид $dy/dx = y/x$. Решения этого уравнения: $y = Cx$ $(x \neq 0)$; $x = 0$ $(y \neq 0)$; особых решений нет. Точка $(0; 0)$ — особая.

Пример 24. Применяя в однородном уравнении $(y + x)y\,dx - x^2dy = 0$ подстановку $y = x \cdot u$ $(dy = u\,dx + x\,du)$, приведем его к виду $u^2x^2\,dx - x^3du = 0$. Разделяя переменные (при условии $x \neq 0$, $u \neq 0$), получим уравнение $\dfrac{dx}{x} - \dfrac{du}{u^2} = 0$, общий интеграл которого $\ln|x| + x/y = C$. Кроме того, решениями исходного уравнения являются также $x \equiv 0$ $(y \neq 0)$, $y \equiv 0$ $(x \neq 0)$. Точка $(0; 0)$ — особая.

Пример 25. Уравнение $y' = \dfrac{2xy}{x^2 - y^2}$ — однородное. Используя подстановку $y = xu$, $y' = u + xu'$, приведем его к уравнению $xu' = \dfrac{u + u^3}{1 - u^2}$, или $\dfrac{dx}{x} - \dfrac{1 - u^2}{u + u^3}\,du = 0$ $(x \neq 0$, $u + u^3 \neq 0)$, общий интеграл которого $\dfrac{x}{u}(u^2 + 1) = C$, или $x^2 + y^2 - Cy = 0$. Это — уравнение семейства окружностей с центрами на оси Oy и примыкающих к особой точке $(0; 0)$ вдоль оси Ox. Исходное уравнение имеет также решение $y \equiv 0$ $(x \neq 0)$; функция $x \equiv 0$ не является решением.

3. Уравнение

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_2x + b_2y + c_2}{a_1x + b_1y + c_1}\right) \tag{11.25}$$

приводится к однородному или к уравнению с разделяющимися переменными. Переходя от переменных x, y к новым переменным u, v:

$$x = u + \alpha, \quad y = v + \beta,$$

где α, β — числа, которые находятся из системы

$$a_1\alpha + b_1\beta + c_1 = 0; \quad a_2\alpha + b_2\beta + c_2 = 0; \quad (a_1b_2 \neq a_2b_1),$$

можно привести уравнение (11.25) к однородному

$$\frac{dv}{du} = f\left(\frac{a_2u + b_2v}{a_1u + b_1v}\right).$$

Если $a_1b_2 = a_2b_1$, то, вводя вместо y переменную $w(x) = a_2x + b_2y$, получим уравнение с разделяющимися переменными.

Пример 26. Найдем общий интеграл уравнения $y' = \dfrac{x+y-4}{x-y-2}$.

Решение. Полагая здесь $x = u + \alpha$, $y = v + \beta$, $dx = du$, $dy = dv$ и находя из системы $\alpha - \beta - 2 = 0$, $\alpha + \beta - 4 = 0$ значения $\alpha = 3$, $\beta = 1$, получим уравнение

$$\frac{dv}{du} = \frac{u+v}{u-v}.$$

Это однородное уравнение удобнее интегрировать не стандартной подстановкой $v = u \cdot z(u)$, а переходя на плоскости Ouv к полярным координатам $u = \rho\cos\varphi$, $v = \rho\sin\varphi$, $du = \cos\varphi\, d\rho - \rho\sin\varphi\, d\varphi$, $dv = \sin\varphi\, d\rho + \rho\cos\varphi\, d\varphi$. Уравнение принимает вид $d\rho = \rho\, d\varphi$, или $d\rho/\rho = d\varphi$, откуда $\rho = C\cdot e^{\varphi}$. Это — семейство логарифмических спиралей, примыкающих к особой точке (0; 0) и обходящих ее бесконечно много раз в одном направлении при $\varphi \to \pm\infty$ (см. пример 43). Возвращаясь к переменным x, y, получим общий интеграл

$$\sqrt{(x-3)^2 + (y-1)^2} = C \cdot \exp\left\{\operatorname{Arctg}\frac{y-1}{x-3}\right\},$$

где $\exp\{t\} \equiv e^t$. ▷

4. Уравнение вида (11.22) называется **обобщенным однородным**, если при помощи подстановки $y = u^{\alpha}$, $du = \alpha u^{\alpha-1}\, du$ со специально подобранным показателем α оно приводится к однородному относительно x и $u(x)$.

11.1.2.5. Линейные уравнения первого порядка и приводящиеся к ним

1. Линейным уравнением первого порядка называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} + p(x)y = q(x), \tag{11.26}$$

где $p(x)$ и $q(x)$ — известные функции, непрерывные в интервале $(a; b)$, конечном или бесконечном. Если $q(x) \equiv 0$ ($q(x) \not\equiv 0$), то уравнение (11.26) называется однородным (неоднородным) относительно y и y' (не следует смешивать с уравнением, однородным относительно x и y). Согласно теореме Пикара уравнение (11.26) имеет единственное частное решение, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$, где x_0 принадлежит $(a; b)$. Однородное уравнение всегда имеет нулевое решение $y \equiv 0$.

2. Разделяя переменные в однородном уравнении $y'+p(x)y=0$, получим

$$\frac{dy}{y}+p(x)\,dx=0.$$

Интегрируя, найдем общее решение

$$\ln|y|+\int p(x)\,dx=C_1, \quad \text{или} \quad y=C\cdot\exp\left\{-\int p(x)\,dx\right\} \quad (C=\pm e^{C_1}).$$

Неопределенный интеграл означает здесь одну из первообразных. Решение $y\equiv 0$ содержится в общем. Если задано начальное условие $y(x_0)=y_0$, то частное решение

$$y=y_0\cdot\exp\left\{-\int_{x_0}^{x} p(x)\,dx\right\}.$$

Пример 27. Разделяя переменные в уравнении $y'-xy=0$, получим

$$\frac{dy}{y}-x\,dx=0.$$

Отсюда $\ln|y|-\dfrac{x^2}{2}=C_1$; т. е. $|y|=e^{C_1}e^{x^2/2}$. Общее решение: $y=C\cdot e^{x^2/2}$, где $C=\pm e^{C_1}$. При начальном условии $y(0)=1$ имеем $C=1$, т. е. $y=e^{x^2/2}$.

3. Методы интегрирования неоднородных уравнений. Если известно какое-либо одно частное решение $y=y_1(x)$ неоднородного уравнения (11.26), то его общее решение равно сумме

$$y=y_1(x)+z(x), \quad z(x)=C\cdot\exp\left\{-\int p(x)\,dx\right\}, \tag{11.27}$$

где $z(x)$ — общее решение соответствующего однородного уравнения

$$z'+p(x)z=0.$$

Постоянная C может быть найдена из начального условия $y(x_0)=y_0$. Если известны два частных решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ неоднородного уравнения, не пропорциональные между собой, то его общее решение имеет вид

$$y=y_1+C(y_2-y_1).$$

Пример 28. Найти общее решение уравнения $y'-xy=x$.

Решение. Неоднородное уравнение имеет частное решение $y_1\equiv -1$. Общее решение однородного уравнения: $z=Ce^{x^2/2}$ (см. пример 27). Общее решение неоднородного уравнения: $y=-1+Ce^{x^2/2}$. Для начального условия $y(0)=1$ имеем $1=-1+C$, т. е. $C=2$ и $y=-1+2e^{x^2/2}$. ▷

Метод подстановки. Запишем неизвестную функцию в виде $y = u(x)\cdot v(x)$, отсюда $y' = u'v + uv'$. Уравнение (11.26) примет вид $vu' + u(v' + pv) = q$. Рассматривая v как вспомогательную функцию, выберем ее так, чтобы она удовлетворяла уравнению $v' + pv = 0$, откуда

$$v = C \cdot \exp\left\{-\int p\,dx\right\}.$$

Подставляя v в уравнение $vu' = q$, получим уравнение с разделяющимися переменными, из которого находим $u(x)$. Окончательно общее решение уравнения (11.26) запишется в виде

$$y = \exp\left\{-\int p(x)\,dx\right\} \cdot \left[\int q(x) \cdot \exp\left\{\int p(x)\,dx\right\} dx + C_1\right]. \tag{11.28}$$

Здесь символы интегрирования означают какую-либо одну соответствующую первообразную; $\exp\{t\} \equiv e^t$. Постоянная C_1 может быть найдена из начального условия $y(x_0) = y_0$.

Метод вариации произвольной постоянной (метод Лагранжа). Решение неоднородного уравнения (11.26) ищем в виде

$$y = C(x) \cdot \exp\left\{-\int p(x)\,dx\right\},$$

где $C(x)$ — неизвестная, непрерывно дифференцируемая функция. Подставляя выражение y и

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dC(x)}{dx} \exp\left\{-\int p(x)\,dx\right\} - C(x)p(x)\exp\left\{-\int p(x)\,dx\right\}$$

в (11.26), получим уравнение для $C'(x)$:

$$C'(x) = q(x) \cdot \exp\left\{\int p(x)\,dx\right\},$$

имеющее решение

$$C(x) = \int q(x) \cdot \exp\left\{\int p(x)\,dx\right\} dx + C_1.$$

С учетом выражения $C(x)$ получим общее решение в виде (11.28).

Пример 29. Найти общее решение уравнения $y' - 2y = e^x$.

Решение. Общее решение однородного уравнения: $y = Ce^{2x}$. Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = C(x)e^{2x}$. Подставляя y и $y' = C'(x)e^{2x} + 2C(x)e^{2x}$ в исходное уравнение, получим $C'(x)e^{2x} = e^x$, или $C'(x) = e^{-x}$. Отсюда $C(x) = C_1 - e^{-x}$. Общее решение исходного уравнения: $y = (C_1 - e^{-x})e^{2x} = C_1e^{2x} - e^x$. Для начального условия $y(0) = 1$ имеем $C_1 = 2$ и $y = 2e^{2x} - e^x$. ▷

4. Уравнением Бернулли называется уравнение вида

$$y' + p(x)y = q(x)y^m \quad (m \neq 0,\ m \neq 1). \tag{11.29}$$

Разделив обе части (11.29) на y^m и вводя новую неизвестную функцию $u(x)$:

$$u = y^{1-m}, \quad u' = (1-m)y^{-m}y',$$

приведем уравнение к линейному виду

$$u' + (1-m)p(x)u = (1-m)q(x).$$

Из общего решения $u(x)$ этого уравнения находится общее решение уравнения (11.29):

$$y = u^{\frac{1}{1-m}}.$$

Если $m > 0$, то уравнение (11.29) имеет также решение $y \equiv 0$, являющееся особым при $0 < m < 1$.

Пример 30. Для уравнения Бернулли $y' - 2xy = -(1+2x^2)y^2$ $(m = 2)$ решение $y \equiv 0$ — частное, особых решений нет. Обозначая $u = 1/y$ или $y = 1/u$, $y' = -u^{-2}u'$, получим линейное уравнение $u' + 2xu = 1 + 2x^2$, которое имеет частное решение $u_1 = x$. Общее решение соответствующего однородного уравнения: $z = Ce^{-x^2/2}$. Общее решение неоднородного линейного уравнения: $u = x + Ce^{-x^2/2}$. Общее решение исходного уравнения:

$$y = \frac{1}{u} = 1 : [x + Ce^{-x^2/2}].$$

5. Уравнение Риккати

$$y' = a(x)y^2 + b(x)y + c(x) \tag{11.30}$$

в общем случае не интегрируется в квадратурах. Если известно одно его частное решение $y_1(x)$, то подстановкой $y = y_1(x) + 1/u(x)$ оно приводится к линейному относительно $u(x)$ уравнению. При $c(x) \equiv 0$ уравнение Риккати сводится к уравнению Бернулли.

11.1.2.6. Уравнение в полных дифференциалах

1. Если левая часть уравнения

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \tag{11.31}$$

является полным дифференциалом некоторой однозначной функции $F(x,y)$, т. е., если $P\,dx + Q\,dy = dF$, $F'_x = P$, $F'_y = Q$, то уравнение (11.31) называется **уравнением в полных дифференциалах**. При этом (11.31) можно записать в виде $dF(x,y) = 0$, откуда находим его общий интеграл $F(x,y) = C$, а решениями являются дифференцируемые функции $y = \varphi(x)$, для которых $F(x,\varphi(x)) = C$.

Пример 31. Уравнение $x\,dx + y\,dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах, так как $x\,dx + y\,dy = d\left[\frac{1}{2}(x^2 + y^2)\right]$. Его общий интеграл: $\frac{1}{2}(x^2 + y^2) = C$. Для начального условия $y(1) = 1$ имеем $C = 1$, частный интеграл: $x^2 + y^2 = 2$.

Если в уравнении (11.31) функции P, Q и их частные производные P'_y, Q'_x определены и непрерывны в некоторой односвязной области D на плоскости Oxy, то это уравнение является уравнением в полных дифференциалах тогда и только тогда, когда всюду в D выполняется тождество (см. также 8.9.1)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{11.32}$$

Общий интеграл уравнения (11.31) может быть найден по формуле (см. 8.9.1):

$$F(x, y) \equiv \int\limits_{x_0}^{x} P(x, y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{y} Q(x, y)\,dy = C, \tag{11.33}$$

где (x_0, y_0) — какая-либо точка в области D.

При решении конкретных задач можно не пользоваться формулой (11.33), а проводить промежуточные вычисления, применяя неопределенные интегралы вместо определенных.

Пример 32. Уравнение $(3x + 2y)\,dx + (2x - y)\,dy = 0$ является уравнением в полных дифференциалах, так как $P'_y = 2$, $Q'_x = 2$ и $P'_y = Q'_x$. Полагая $x_0 = 0$, $y_0 = 0$ в формуле (11.33), получим общий интеграл

$$\int\limits_0^x 3x\,dx + \int\limits_0^y (2x - y)\,dy = C,$$

или

$$\frac{3}{2}x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 = C.$$

Решим задачу, не применяя формулы (11.33). Найдем функцию $F(x, y)$ такую, что $F'_x = 3x + 2y$, $F'_y = 2x - y$. Из первого уравнения получим

$$F = \int (3x + 2y)\,dx + \varphi(y) = \frac{3x^2}{2} + 2xy + \varphi(x).$$

Отсюда $F'_y = 2x + \varphi'(y) = 2x - y$, т. е. $\varphi'(y) = -y$ и $\varphi(y) = -\frac{y^2}{2} + C_1$. Следовательно,

$$F = \frac{3}{2}x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 + C_1.$$

Полагая здесь $C_1 = 0$, запишем общий интеграл $F(x, y) = C$. Для начального условия $y = 0$ при $x = 0$ находим $C = 0$, т. е. через начало координат проходит интегральная кривая $3x^2 + 4xy - y^2 = 0$.

2. Если условие (11.32) не выполнено, то уравнение (11.31) не является уравнением в полных дифференциалах. Если удается подобрать функцию $\mu = \mu(x, y)$ такую, что выражение $\mu P\,dx + \mu Q\,dy$ становится полным дифференциалом некоторой функции $F_1(x, y)$, то функция $\mu(x, y)$ называется **интегрирующим множителем** уравнения (11.31), а его общим интегралом является $F_1(x, y) = C$. Для любого уравнения вида (11.31) существует интегрирующий множитель, однако его не всегда легко найти. Интегрирующие множители удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial(\mu P)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu Q)}{\partial x} \quad \text{или} \quad Q\frac{\partial \mu}{\partial x} - P\frac{\partial \mu}{\partial y} = \mu\left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}\right).$$

Однако, фактически, нахождение $\mu(x, y)$ из этого уравнения может оказаться более сложной задачей, чем интегрирование уравнения (11.31).

Пример 33. Уравнение $(y - e^x)\,dx + dy = 0$ не является уравнением в полных дифференциалах, так как условие (11.32) не выполнено. Умножая его на $\mu = e^x$, получим уравнение в полных дифференциалах $(e^x y - e^{2x})\,dx + e^x\,dy = 0$, или $d\left(e^x y - \frac{1}{2}e^{2x}\right) = 0$. Общий интеграл этого уравнения: $e^x y - \frac{1}{2}e^{2x} = C$. Общее решение исходного уравнения:

$$y = \frac{1}{2}e^x + Ce^{-x}.$$

11.1.2.7. Уравнения, не разрешенные относительно производной

1. Если уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \tag{11.34}$$

может быть разрешено относительно производной y', то в общем случае получится n различных нормальных дифференциальных уравнений первого порядка

$$y' = f_1(x, y); \quad y' = f_2(x, y); \quad \ldots; \quad y' = f_n(x, y). \tag{11.35}$$

Уравнение (11.34) определяет в каждой точке (x_0, y_0), вообще говоря, несколько направлений y_0' поля, получаемых из уравнения $F(x_0, y_0, y_0') = 0$.

Пример 34.

1) Уравнение $(y')^2 - 1 = 0$ в каждой точке (x_0, y_0) определяет два направления поля: $y_0' = 1$, $y_0' = -1$. Интегральными кривыми являются прямые $y = x + C$ и $y = -x + C$.
2) Уравнение $(y')^2 + 1 = 0$ вообще не имеет решения (действительного).

Если число решений $y = y(x)$ уравнения (11.34), каждое из которых является дифференцируемой функцией и удовлетворяет начальному условию $y(x_0) = y_0$, не превышает числа направлений y_0' поля в точке (x_0, y_0), то говорят, что соответствующая задача Коши имеет единственное решение.

Частным (особым) решением уравнения (11.34) называется такое его решение, в любой точке которого единственность решения задачи Коши выполняется (нарушается).

Если функция $F(x, y, y')$ непрерывно дифференцируема по всем трем переменным в некоторой окрестности точки (x_0, y_0, y_0'), где y_0' — одно из направлений поля уравнения (11.34) и частная производная $\partial F/\partial y' \neq 0$ в этой точке, то уравнение (11.34) имеет единственное решение $y(x)$ такое, что $y(x_0) = y_0$ и $y'(x_0) = y_0'$.

Особые решения уравнения (11.34) ищутся среди **дискриминантных кривых** этого уравнения, получающихся при исключении y' из системы

$$F(x, y, y') = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial y'} = 0.$$

При этом следует проверить, удовлетворяет ли полученная кривая уравнению и является ли решение особым.

Пример 35. Для уравнения $F(x, y, y') \equiv (y')^2 - 4x^2 = 0$ дискриминантная кривая есть ось Oy ($x \equiv 0$), которая находится исключением y' из системы $F(x, y, y') = 0$, $\partial F/\partial y' = 2y' = 0$. Дискриминантная кривая здесь не является интегральной кривой, так как во всех ее точках направление поля ($y' = 0$) не совпадает с направлением касательной ($y' = \infty$) к ней.

2. Интегрирование уравнения (11.34) сводится к интегрированию n уравнений (11.35). Если $\Phi_i(x, y, C) = 0$ ($i = 1, \ldots, n$) — общие интегралы этих уравнений, то общим интегралом уравнения (11.34) называется выражение, полученное перемножением этих интегралов:

$$\Phi(x, y, C) \equiv \Phi_1(x, y, C)\Phi_2(x, y, C) \cdots \Phi_n(x, y, C) = 0. \tag{11.36}$$

Если разрешить (11.36) относительно y, то получится решение уравнения (11.34). Если известны общие решения $y = \varphi_i(x, C)$, то $\Phi_i(x, y, C) \equiv y - \varphi_i(x, C)$. При этом необходимо проверить, нельзя ли из отдельных отрезков интегральных кривых $y = \varphi_i(x, C)$ построить еще и другие решения, которые должны быть дифференцируемыми функциями. Если существует огибающая семейства интегральных кривых уравнения (11.34), то она всегда является его особым решением.

Пример 36. Разрешая относительно y' уравнение в примере 34, получим два уравнения: $y' = 2x$, $y' = -2x$, решениями которых являются параболы $y = x^2 + C$, $y = -x^2 + C$. Общий интеграл исходного уравнения: $(y - C)^2 - x^4 = 0$. Интегральными кривыми исходного уравнения являются эти параболы, а также дифференцируемые кривые, составленные из отрезков парабол.

3. Рассмотрим уравнение

$$(y')^2 + 2P(x, y)y' + Q(x, y) = 0. \tag{11.37}$$

Если $R(x, y) \equiv P^2 - Q > 0$ в некоторой области на плоскости Oxy, то, разрешая (11.37), получим два уравнения

$$y' = -P(x, y) \pm \sqrt{R(x, y)},$$

интегрируя которые, найдем общий интеграл уравнения (11.37). Особые решения уравнения (11.37) могут находится только среди дискриминантных кривых $R(x, y) = 0$.

4. Некоторые частные случаи

а) Неполное уравнения $F(y') = 0$ имеет общий интеграл $F\left(\dfrac{y - C}{x}\right) = 0$, если только уравнение $F(p) = 0$ имеет действительные корни. Если $F(p_0) = 0$, то, интегрируя уравнение $y' = p_0$, получим $y = p_0 x + C$. Отсюда $p_0 = \dfrac{y - C}{x}$. В силу $F(p_0) = 0$ получаем вышеприведенный общий интеграл.

Пример 37. Общим интегралом уравнения $(y')^3 - 1 = 0$ является $\left(\dfrac{y - C}{x}\right)^3 - 1 = 0$, т. е. $\dfrac{y-C}{x} = 1$, так как уравнение $F(p) \equiv p^3 - 1 = 0$ имеет действительный корень $p = 1$.

б) Решение уравнения $y = \varphi(y')$ ищется в параметрической форме. Полагая $y' = p$, запишем уравнение в виде $y = \varphi(p)$. Выразим также x через p. Из $\dfrac{dy}{dx} = p$ следует $dx = \dfrac{dy}{p} = \dfrac{\varphi'(p)}{p}\, dp$. Интегрируя, получим

$$x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}\, dp + C \equiv \psi(x, C).$$

Уравнения $x = \psi(x, C)$, $y = \varphi(p)$ дают общее решение исходного уравнения в **параметрической форме**. Исключая, если возможно, из этих уравнений параметр p, получим общий интеграл $\Phi(x, y, C) = 0$.

в) Аналогично интегрируется уравнение $x = \varphi(y')$, если положить $y' = p$, $dy = y'\, dx = p\, dx = p\varphi'(p)\, dp$:

$$x = \varphi(p), \quad y = \int p\varphi'(p)\, dp + C.$$

Пример 38. Для уравнения $y = (y')^3 - (y')^2$, предполагая, что $y' = p \neq 0$, имеем

$$y = \varphi(p) \equiv p^3 - p^2, \qquad x = \int \frac{\varphi'(p)}{p}\, dp + C = \int (3p - 2)\, dp + C = \frac{3}{2}p^2 - 2p + C.$$

Общее решение в параметрической форме: $x = \dfrac{3}{2}p^2 - 2p + C$, $y = p^3 - p^2$. Если $p = 0$ $(y' = 0)$, то получим решение $y = C$, удовлетворяющее уравнению только при $C = 0$.

г) Пусть дано неполное уравнение $F(x, y') = 0$ (или $F(y, y') = 0$). Если из этого уравнения удается выразить x (или соответственно y), а также $p = y'$ через некоторый параметр t, то общее решение уравнения может быть получено в параметрической форме.

Пример 39. Дано уравнение $y = \sqrt{1 + (y')^2}$. Полагая $p = y' = \operatorname{sh} t$, найдем

$$y = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 t} = \operatorname{ch} t.$$

Далее

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad dx = \frac{dy}{p} = \frac{(\operatorname{ch} t)' \, dt}{\operatorname{sh} t} = dt,$$

отсюда $x = t + C$. Общее решение имеет вид $x = t + C$, $y = \operatorname{ch} t$. Исключая t, получим $y = \operatorname{ch}(x - C)$.

д) Уравнение Лагранжа

$$y = \varphi(y')x + \psi(y') \tag{11.38}$$

интегрируется в параметрическом виде. Предполагая, что $\varphi(y') \equiv y'$ и обозначая $y' = p$ (т. е., принимая y' за параметр), запишем (11.38) в виде $y = \varphi(p)x + \psi(p)$. Отсюда, взяв дифференциал от обеих частей, получим уравнение

$$\varphi(p)\, dx + x\frac{d\varphi}{dp}\, dp + \frac{d\psi}{dp}\, dp = y'\, dx = p\, dx$$

с неизвестной функцией x от аргумента p. Предполагая, что $\varphi(p) - p \neq 0$, запишем уравнение в виде

$$\frac{dx}{dp} - \frac{\varphi'(p)}{p - \varphi(p)} x = \frac{\psi'(p)}{p - \varphi(p)}.$$

Общий интеграл этого линейного уравнения имеет вид $x = f_1(p) \cdot C + g_1(p)$. Подставляя полученное выражение для x в равенство $y = \varphi(p)x + \psi(p)$, найдем некоторое соотношение $y = f_2(p) \cdot C + g_2(p)$, которое совместно с найденным общим интегралом даст общее решение уравнения (11.38) в параметрической форме. Исключая p из выражений для x и y, найдем общий интеграл уравнения Лагранжа. Если уравнение $p - \varphi(p) = 0$ имеет действительные корни $p = p_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то они дадут решения $y = p_i x + \psi(p_i)$ (прямые линии), которые могут быть особыми.

е) Уравнение Клеро

$$y = xy' + \psi(y')$$

является частным случаем уравнения Лагранжа, когда $\varphi(y') \equiv y'$. Для интегрирования уравнения Клеро обозначим $y' = p$, тогда

$$y = xp + \psi(p). \tag{11.39}$$

Дифференцируя (11.39) по x, найдем

$$p + x\frac{dp}{dx} + \frac{d\psi(p)}{dp}\frac{dp}{dx} = \frac{dy}{dx} = p,$$

т. е.

$$\frac{dp}{dx}\left[x + \frac{d\psi(p)}{dp}\right] = 0.$$

Получим два уравнения: $p'(x) = 0$, $x + \psi'(p) = 0$. Решение первого из них $p = C$; с учетом этого из (11.39) получается общее решение уравнения Клеро

$$y = xC + \psi(C), \tag{11.40}$$

представляющее собой семейство прямых линий. Второе из этих уравнений совместно с (11.39) также дает решение уравнения Клеро в параметрической форме

$$x = -\psi'(p), \quad y = -p\psi'(p) + \psi(p), \tag{11.41}$$

которое обычно является особым и во многих случаях представляет собой огибающую семейства (11.40). Исключая p из (11.41), получим особый интеграл.

Пример 40. Дано уравнение Клеро $y = xy' - 1/y'$. Здесь $\psi(p) = -1/p$, $\psi'(p) = 1/p^2$. Общее решение: $y = xC - 1/C$. Исключая p из уравнений $x = -1/p^2$, $y = -2/p$, получим интеграл (параболу) $y^2 = -4x$, являющийся особым, так как представляет собой огибающую семейства прямых общего решения (рис. 11.8). Огибающая может

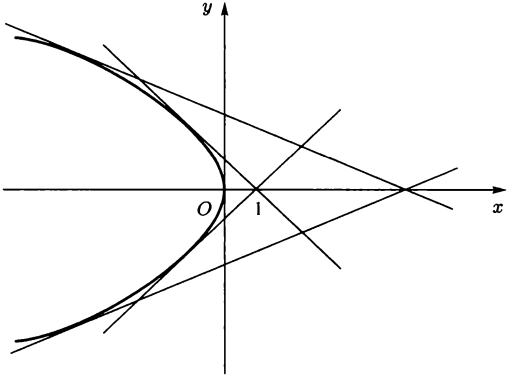


Рис. 11.8

быть найдена также исключением C из системы:

$$y = xC - \frac{1}{C}; \quad 0 = x + \frac{1}{C^2}.$$

5. Изогональные траектории. Углом φ между двумя кривыми называется угол между касательными к ним в точке их пересечения. **Изогональными** (в частности, **ортогональными**, т. е. $\varphi = \pi/2$) **траекториями** однопараметрического семейства кривых $\Phi(x, y, C) = 0$ называется другое семейство кривых, каждая из которых пересекает любую кривую данного семейства под одним и тем же заданным углом φ (см. также 14.1.9).

Дифференциальное уравнение

$$F(x, y, y') = 0 \tag{11.42}$$

семейства кривых $\Phi(x, y, C) = 0$ находится исключением параметра C из системы (см. 11.1.1.1): $\Phi = 0$, $\Phi'_x + \Phi'_y y' = 0$. Дифференциальное уравнение семейства изогональных траекторий для данного семейства кривых $\Phi(x, y, C) = 0$ находится исключением y' из уравнения

$$\frac{y'_1 - y'}{1 + y'_1 y'} = \operatorname{tg} \varphi,$$

где угол φ отсчитывается от кривой $\Phi(x, y, C) = 0$ до искомой кривой $y = y_1(x)$, и уравнения (11.42). В результате получается дифференциальное уравнение с неизвестной функцией $y_1(x)$. Для нахождения уравнения ортогональных траекторий надо в уравнении (11.42) заменить y и y' соответственно на y_1 и $-1/y'_1$, т. е. $F(x, y_1, -1/y'_1) = 0$.

Пример 41. Найти ортогональные траектории семейства $y = x^2 + C$ (см. пример 4).

Решение. Дифференциальное уравнение этого семейства: $y' = 2x$. Заменив y' на $-1/y'_1$, получим $y'_1 = -\frac{1}{2x}$ $(x \neq 0)$. Общее решение этого уравнения $y_1 = -\frac{1}{2} \ln |x| + C_1$ дает искомое семейство ортогональных траекторий, к которым следует присоединить функцию $x \equiv 0$ (ось Oy), являющуюся решением «перевернутого» уравнения. ▷

11.1.2.8. Особые точки дифференциальных уравнений первого порядка

Если правая часть уравнения $y' = f(x, y)$ непрерывна вместе с частной производной $f'_y(x, y)$ в точке (x_0, y_0) и некоторой ее окрестности, то согласно теореме Пикара через эту точку проходит одна и только одна интегральная кривая уравнения. Если в некоторой точке (x_0, y_0) функция $f(x, y)$ разрывна и (или) не существует производная $f'_y(x, y)$, то такая точка может оказаться (изолированной) особой точкой. (см. 11.1.2.1), в которой не выполняется утверждение теоремы Пикара. Однако такие точки не обязательно должны быть особыми, так как условия теоремы Пикара являются только достаточными, но не необходимыми.

Особыми точками уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \tag{11.43}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ — однозначные, непрерывно дифференцируемые всюду в плоскости Oxy функции, называются такие точки, в которых одновременно выполняются равенства $P(x,y) = 0$, $Q(x,y) = 0$. В таких точках поле направлений не определено и уравнение (11.43) не имеет смысла. Если в некоторой точке (x_0, y_0) выполняются условия $P(x_0, y_0) \neq 0$, $Q(x_0, y_0) = 0$, то, рассматривая уравнение (11.43) совместно с «перевернутым» уравнением (см. 11.1.2.1), можно утверждать, что эта точка является обыкновенной.

Классификация особых точек однородного уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_2x + b_2y}{a_1x + b_1y}, \tag{11.44}$$

где a_1, b_1, a_2, b_2 — постоянные и $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$. Уравнение (11.44) всегда рассматривается совместно с «перевернутым» уравнением (см. 11.1.2.1). Точка $(0; 0)$ является единственной (изолированной) особой точкой уравнения (11.44).

Уравнению (11.44) соответствует однородная линейная система двух уравнений с неизвестными функциями $x(t)$ и $y(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = a_1x + b_1y, \quad \frac{dy}{dt} = a_2x + b_2y, \tag{11.45}$$

имеющая в отличие от уравнения (11.44) **нулевое решение (точку покоя)** $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ (наряду с прочими решениями).

Переходя к новым переменным

$$x^* = m_1x + n_1y, \quad y^* = m_2x + n_2y \quad (m_1n_2 - m_2n_1 \neq 0), \tag{11.46}$$

уравнение (11.44) можно привести к простейшим формам, удобным для исследования, которым соответствуют канонические формы системы (11.45). Вид простейших форм уравнения (11.44) и специфика поведения его интегральных кривых в окрестности особых точек полностью определяются **характеристическими числами**, т. е. корнями r_1, r_2 **характеристического уравнения**

$$\begin{vmatrix} a_1 - r & b_1 \\ a_2 & b_2 - r \end{vmatrix} = r^2 - (a_1 + b_2)r + (a_1b_2 - a_2b_1) = 0, \tag{11.47}$$

которое не может иметь корня $r = 0$.

Для уравнения (11.44) возможны только приведенные ниже типы особых точек.

1. Если корни r_1, r_2 — действительные или комплексные и не равны друг другу ($r_1 \neq r_2$), то преобразованием вида (11.46), в котором коэффициенты m_1, n_1, m_2, n_2 находятся из систем

$$\begin{cases} (a_1 - r_1)m_1 + a_2 n_1 = 0, \\ b_1 m_1 + (b_2 - r_1)n_1 = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} (a_1 - r_2)m_2 + a_2 n_2 = 0, \\ b_1 m_2 + (b_2 - r_2)n_2 = 0, \end{cases}$$

уравнение (11.44) приводится к форме

$$\frac{dy^*}{dx^*} = \frac{r_2}{r_1}\frac{y^*}{x^*}. \tag{11.48}$$

Здесь возможны следующие четыре случая:

1а) Корни r_1, r_2 — действительные, различные и одного знака. Если $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, то, не теряя общности, можно принять $r_2 > r_1 > 0$; а если $r_1 < 0$, $r_2 < 0$, то $r_2 < r_1$. Интегральными кривыми уравнения (11.48), рассматриваемого совместно с перевернутым

$$\frac{dx^*}{dy^*} = \frac{r_1 x^*}{r_2 y^*}$$

на плоскости Ox^*y^*, являются

$$y^* = C|x^*|^{r_2/r_1} \; (x^* \neq 0); \quad x^* \equiv 0 \; (y^* \neq 0). \tag{11.49}$$

Такая особая точка называется **обыкновенным узлом**. Интегральные кривые примыкают к особой точке $(0;0)$ и все, кроме двух лучей $x^* \equiv 0$ $(y^* \neq 0)$, касаются в этой точке оси Ox^*. На плоскости Oxy качественная картина расположения интегральных кривых в окрестности особой точки $(0;0)$ будет аналогичной.

Пример 42. Для уравнения $y' = 2y/x$ имеем характеристическое уравнение

$$(1-r)(2-r) = 0, \quad r_1 = 1, \quad r_2 = 2.$$

Разделяя переменные, находим интегральные кривые: $y = Cx^2$ $(x \neq 0)$ и $x \equiv 0$ $(y \neq 0)$ (рис. 11.9).

1б) Корни r_1, r_2 — действительные, различные и разных знаков. Из (11.49) следует, что на плоскости Ox^*y^* к особой точке $(0;0)$, называемой в этом случае **седлом**, примыкают только четыре интегральные кривые (это полуоси Ox^* и Oy^*):

$$y^* \equiv 0 \; (x^* \neq 0) \; (C = 0); \quad x^* \equiv 0 \; (y^* \neq 0),$$

называемые **сепаратрисами** седла. Между сепаратрисами располагаются остальные интегральные кривые ($C \neq 0$), похожие на гиперболы и не примыкающие к особой точке. На плоскости Oxy сепаратрисами являются лучи $m_1x + n_1y = 0$, $m_2x + n_2y = 0$, выходящие из особой точки $(0;0)$, между которыми находятся интегральные кривые, имеющие вид гипербол.

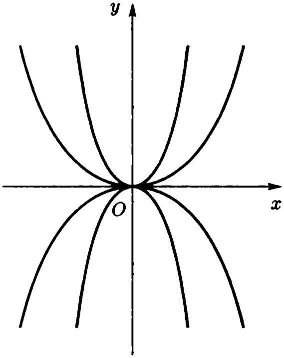


Рис. 11.9

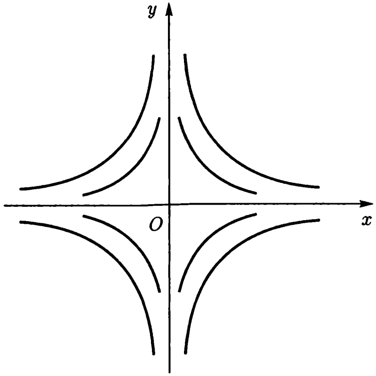


Рис. 11.10

Пример 43. Для уравнения $y' = -y/x$ имеем $r_1 = -1$, $r_1 = 1$. Интегральные кривые: $y = c/x$ $(x \neq 0)$, $x = 0$ $(y \neq 0)$. Сепаратрисами являются четыре полуоси осей Ox и Oy (рис. 11.10).

1в) Корни r_1, r_2 — комплексно сопряженные: $r_1 = \alpha + \beta i$, $r_2 = \alpha - \beta i$ $(\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0)$. В уравнении (11.48) переменные x^*, y^* будут комплексными. В формулах (11.46) коэффициенты можно выбрать так, что $m_2 = \overline{m}_1$, $n_2 = \overline{n}_1$, где черта означает комплексное сопряжение, т. е. $y^* = \overline{x}^*$. Вводя новые (действительные) переменные u, v по формулам $x^* = u + iv$, $y^* = u - iv$, приведем уравнение (11.48) к виду (см. 8.2.11):

$$\frac{dv}{du} = \frac{\alpha v + \beta u}{\alpha u - \beta v}, \tag{11.50}$$

интегральными кривыми которого на плоскости Ouv являются логарифмические спирали, примыкающие к особой точке $(0; 0)$, называемой в этом случае **фокусом.** На плоскости Oxy расположение интегральных кривых вблизи особой точки $(0; 0)$ будет качественно аналогичным.

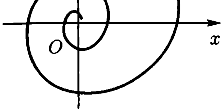


Рис. 11.11

Пример 44. $y' = \dfrac{x+y}{x-y}$ (см. также пример 26). Характеристические числа: $r_1 = 1 + i$, $r_2 = 1 - i$. Интегральные кривые: семейство логарифмических спиралей $\rho = Ce^{\varphi}$ (рис. 11.11), асимптотически приближающихся к точке $(0; 0)$, так как $\rho \to 0$ при

$\varphi \to -\infty$, не имея при этом определенного направления. Здесь ρ и φ — полярные координаты на плоскости Oxy.

1г) Корни r_1, r_2 — чисто мнимые: $r_1 = \beta i$, $r_2 = -\beta i$ $(\beta \neq 0)$. Уравнение (11.50) при $\alpha = 0$ принимает вид

$$\frac{dv}{du} = -\frac{u}{v}.$$

Интегральными кривыми являются окружности $u^2 + v^2 = |C|^2$ на плоскости Ouv с центром в особой точке $(0;0)$, называемой в этом случае **центром** (см. пример 6 и рис. 11.6). На плоскости Oxy интегральными кривыми будут подобные эллипсы или окружности с центром в особой точке $(0;0)$.

2. Уравнение (11.47) имеет кратный корень $r_1 = r_2 \neq 0$. Здесь возможны следующие два случая:

2а) Коэффициенты $b_1 = a_2 = 0$, $a_1 = b_2$ и $r_1 = r_2 = a_1$, т. е. уравнение (11.44) имеет вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}.$$

Интегральными кривыми являются лучи (см. пример 8)

$$y = Cx \ (x \neq 0); \quad x \equiv 0 \ (y \neq 0),$$

примыкающие к особой точке $(0;0)$, называемой **дикритическим узлом**, в котором каждая интегральная кривая имеет свое направление касательной, в отличие от обыкновенного узла.

2б) Корни $r_1 = r_2 = \dfrac{1}{2}(a_1 + b_2)$. При помощи замены $x^* = a_2 x + \dfrac{b_2 - a_1}{2} y$, $y^* = y$ $(a_2 \neq 0)$ уравнение (11.44) приводится к виду

$$\frac{dy^*}{dx^*} = \frac{x^* + r_1 y^*}{r_1 x^*}.$$

Интегральными кривыми на плоскости Ox^*y^* являются

$$y^* = x^*\left(C + \frac{1}{r_1}\ln|x^*|\right) \quad (x^* \neq 0),$$
$$x^* \equiv 0 \quad (y^* \neq 0).$$

Все эти кривые примыкают к особой точке $(0;0)$, называемой **вырожденным узлом,** касаясь в этой точке одной и той же прямой $x^* = 0$ (ось Oy^*). Аналогично расположены интегральные кривые на плоскости Oxy в окрестности особой точки $(0;0)$.

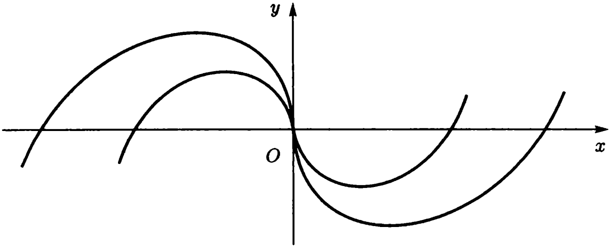


Рис. 11.12

Пример 45. $y' = \dfrac{x+y}{x}$. Здесь $r_1 = r_2 = 1$. Данное однородное уравнение интегрируется при помощи подстановки $y = x \cdot u(x)$ (см. 11.1.2.4). Получим уравнение $u' = 1/x$, имеющее общее решение $u = \ln|x| + C$ $(x \neq 0)$, к которому присоединяется решение $x \equiv 0$ $(y \neq 0)$. Интегральные кривые исходного уравнения: $y = x(\ln|x| + C)$ $(x \neq 0)$, $x \equiv 0$ $(y \neq 0)$ (рис. 11.12).

Примечание. В общем случае, если точка $(0; 0)$ является особой для уравнения (11.43), то, применяя формулу Тейлора, это уравнение можно записать в виде

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a_2 x + b_2 y + P_1(x,y)}{a_1 x + b_1 y + Q_1(x,y)}, \tag{11.51}$$

где P_1, Q_1 — бесконечно малые относительно $\sqrt{x^2+y^2}$. Тип особой точки уравнения (11.51) совпадает с ее типом для **уравнения линейного (первого) приближения**, имеющего вид (11.44) (т. е. когда P_1 и Q_1 в (11.51) отбрасываются) во всех случаях, кроме одного исключения: если для уравнения (11.44) особая точка — центр, то для уравнения (11.51) она может быть центром или фокусом, либо иметь более сложный характер (в зависимости от вида слагаемых P_1, Q_1). Если $a_1 b_2 - a_2 b_1 = 0$, то особая точка называется **особой точкой высшего порядка**. Такие точки могут иметь либо один из перечисленных выше типов, либо иметь более сложный характер.

11.1.2.9. Общие методы интегрирования

1. Численные методы интегрирования дифференциальных уравнений приведены в 16.8.

2. Метод последовательных приближений Пикара является приближенным аналитическим методом интегрирования уравнений. Пусть требуется найти решение $y = y(x)$ уравнения $y' = f(x,y)$, удовлетворяющее начальному условию $y(x_0) = y_0$. Тогда, если $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ определены и непрерывны в некоторой окрестности начальной точки (x_0, y_0), то в силу теоремы Пикара в окрестности точки x_0 существует единственное решение, удовлетворяющее начальному условию. Метод последовательных приближений основан на построении последовательности $\{y_n(x)\}$ функций, сходящихся к искомому решению $y(x)$ уравнения. При выполнении условий теоремы Пикара рассматриваемая задача Коши эквивалентна **интегральному уравнению**

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,dt,$$

решение которого (а также задачи Коши) строится в виде последовательности функций

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y_{n-1}(t))\,dt \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

каждая из которых может рассматриваться как приближенное решение данного дифференциального и интегрального уравнения. Для значений x, достаточно близких к x_0, последовательные приближения $y_n(x)$ сходятся равномерно к искомому решению $y(x)$.

Примечание. Иногда переменный верхний предел x интеграла и переменная интегрирования t обозначаются одной и той же буквой x.

Пример 46. Решим задачу Коши $y' = \frac{1}{2}xy$, $y(0) = 1$. Имеем $y_0 = 1$,

$$y_1(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x t\,dt = 1 + \frac{x^2}{4},$$

$$y_2(x) = 1 + \frac{1}{2}\int_0^x t\left(1 + \frac{t^2}{4}\right)dt = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{32},$$

....

Точное решение задачи Коши $y(x) = e^{x^2/4}$, а его разложение в степенной ряд

$$y(x) = 1 + \frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{32} + \ldots .$$

Ни одно из приближений $y_0, y_1, y_2, \ldots$ не является точным решением задачи, однако их последовательность сходится к точному решению.

3. Применение степенных рядов. Если функция $f(x, y)$ в правой части уравнения $y' = f(x, y)$ с начальным условием $y(x_0) = y_0$ аналитична по x и y (см. 10.7), т. е. может быть представлена двойным степенным рядом в окрестности точки (x_0, y_0) и, следовательно, дифференцируема любое число раз, то существует решение задачи Коши в виде сходящегося степенного ряда

$$y(x) = y(x_0) + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots, \tag{11.52}$$

коэффициенты которого $a_k = \frac{1}{k!}y^{(k)}(x_0)$ $(k = 1, 2, \ldots)$, находятся последовательным дифференцированием данного уравнения:

$$y'(x) = f(x, y),$$
$$y''(x) = f'_x + f'_y y' = f'_x + f'_y \cdot f(x, y),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

с последующей заменой x и y на x_0 и y_0.

Для нахождения коэффициентов a_k может применяться также **метод неопределенных коэффициентов**, согласно которому в обе части уравнения $y' = f(x, y)$ подставляется ряд (11.52) с неопределенными коэффициентами, которые находятся затем приравниванием выражений при одинаковых степенях $(x - x_0)$ в обеих частях равенства.

Примечание. Аналогично в виде степенного ряда (11.52), применяя один из двух описанных здесь методов, можно искать решение задачи Коши для уравнения n-го порядка

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}\right),$$
$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Решение задачи Коши для системы уравнений

$$y'_m = f_m(x, y_1, \ldots, y_n), \quad y_m(x_0) = y_{m0} \quad (m = 1, 2, \ldots, n)$$

ищется в виде рядов

$$y_m = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k(m)}(x - x_0)^k \quad (m = 1, 2, \ldots, n).$$

Пример 47. $y' = xy$, $y(0) = 1$. Решение задачи Коши ищем в виде ряда с неопределенными коэффициентами

$$y = 1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + \ldots,$$

дифференцируя который, получим ряд

$$y' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots .$$

Подставим оба этих ряда вместо y и y' в уравнение

$$a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + 4a_4 x^3 + \ldots = x + a_1 x^2 + a_2 x^3 + a_3 x^4 + \ldots .$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях равенства, получим $a_1 = 0$, $2a_2 = 1$, $3a_3 = a_1$, $4a_4 = a_2$, $\ldots$, т. е. $a_1 = 0$, $a_2 = 1/2$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1/4$, $a_2 = 1/8$, $a_5 = 0$, $\ldots$. Следовательно, решение

$$y(x) = 1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \ldots .$$

Нахождение коэффициентов ряда путем последовательного дифференцирования исходного уравнения дает тот же результат, так как

$$y'' = y + xy', \quad y''' = 2y' + xy'', \quad y^{(4)} = 3y'' + xy''', \quad \ldots;$$
$$y'(0) = 0, \quad y''(0) = 1, \quad y'''(0) = 0, \quad y^{(4)}(0) = 3, \quad \ldots;$$
$$a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{1}{2}, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = \frac{1}{8}, \quad \ldots.$$

11.1.3. Дифференциальные уравнения высших порядков

11.1.3.1. Общие сведения

Уравнение n-го порядка имеет общий вид

$$F\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}\right) = 0 \tag{11.53}$$

или вид, разрешенный, если это возможно, относительно старшей производной

$$y^{(n)} = f\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right). \tag{11.54}$$

Решение **задачи Коши** для уравнения (11.53) или (11.54) заключается в нахождении его решения, удовлетворяющего **начальным условиям**

$$y = y_0, \quad y' = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)} = y_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad x = x_0,$$

где $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ — некоторые заданные числа.

Если выполнены условия теоремы Пикара для уравнения (11.54) (см. **примечание 4** к теореме Пикара в 11.1.1.2), то оно имеет одно и только одно решение, удовлетворяющее заданным начальным условиям.

Общее решение $y = \varphi(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$ уравнения (11.54), для которого выполнены условия теоремы Пикара, содержит n **произвольных постоянных** $C_1, C_2, \ldots, C_n$, которые могут быть найдены при помощи начальных условий. Общее решение уравнения (11.54) может быть записано также в виде **общего интеграла** $\Phi(x, y, C_1, C_2, \ldots, C_n) = 0$. При определенных числовых значениях величин $C_1, C_2, \ldots, C_n$ получим **частное решение** (**частный интеграл**) данного уравнения. **Особое решение** уравнения (11.54) определяется так же, как и для уравнения первого порядка. Оно не может быть получено из общего ни при каких значениях $C_1, C_2, \ldots, C_n$, включая $\pm\infty$.

В частности, для уравнения второго порядка с начальными условиями $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ **геометрический смысл** решения задачи Коши заключается в нахождении интегральной кривой $y = y(x)$ (частного решения), проходящей через точку (x_0, y_0) на плоскости Oxy и имеющей в этой точке касательную с заданным угловым коэффициентом $k_0 = \operatorname{tg}\alpha_0 = y_0'$.

Пример 48. Решим задачу Коши

$$y'' = x; \quad y = 2, \quad y' = 1 \quad \text{при} \quad x = 0.$$

Интегрируя дифференциальное уравнение два раза, получим

$$y' = \frac{x^2}{2} + C_1, \quad y = \frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

При помощи начальных условий найдем: $C_1 = 1$, $C_2 = 2$, т. е.

$$y = \frac{x^3}{6} + x + 2.$$

Если уравнение (11.53) разрешимо относительно старшей производной, то получается одно или несколько уравнений вида

$$y^{(n)} = f_r\left(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}\right) \quad (r = 1, 2, \ldots).$$

Совокупность общих решений (общих интегралов) этих уравнений называется **общим интегралом** уравнения (11.53). Иногда общий интеграл уравнения (11.53) удается найти и без его разрешения относительно старшей производной.

Основным общим методом интегрирования уравнений высших порядков является понижение порядка, т. е. сведение данного уравнения к другому, имеющему более низкий порядок. Понижение порядка возможно не для всех уравнений. Ниже рассмотрены типы уравнений, для которых возможно понижение порядка.

11.1.3.2. Понижение порядка уравнения

1. Уравнение $y^{(n)} = f(x)$. Порядок уравнения

$$y^{(n)} = f(x), \tag{11.55}$$

в котором $f(x)$ непрерывна в интервале $(a; b)$, понижается путем последовательного интегрирования n раз:

$$y^{(n-1)} = \int f(x)\,dx + C_1,$$

$$y^{(n-2)} = \int \left[\int f(x)\,dx\right] dx + C_1 x + C_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Пример 49. $y''' = \cos x - \sin x$. Интегрируя уравнения три раза, получим его общее решение

$$y'' = \sin x + \cos x + C_1,$$

$$y' = -\cos x + \sin x + C_1 x + C_2,$$

$$y = -\sin x - \cos x + \frac{1}{2} C_1 x^2 + C_2 x + C_3.$$

При последовательном интегрировании уравнения (11.55) вместо неопределенных интегралов можно брать определенные интегралы с переменным верхним пределом x и фиксированным нижним пределом x_0, являющимся любым числом из $(a; b)$:

$$y = \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} dx \ldots \int_{x_0}^{x} dx \int_{x_0}^{x} f(x)\, dx +$$

$$+ C_1 \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + C_2 \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} + \ldots + C_{n-1}x + C_n. \qquad (11.56)$$

Здесь первое слагаемое справа, содержащее n интегралов, может быть записано в виде одного интеграла

$$y_1(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^{x} f(t)(x-t)^{n-1}\, dt$$

и является частным решением уравнения (11.55) при нулевых начальных условиях:

$$y(x_0) = 0, \quad y'(x_0) = 0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = 0.$$

Общее решение (11.56) уравнения (11.55) можно записать в виде

$$y = y_1(x) + C_1^* x^{n-1} + C_2^* x^{n-2} + \ldots + C_{n-1}^* x + C_n^*,$$

где вместо постоянных $C_1, \ldots, C_n$ введены новые постоянные $C_1^*, \ldots, C_n^*$, которые находятся из начальных условий:

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

2. Уравнение, не содержащее явно неизвестной функции и ее нескольких последовательных младших производных,

$$F\big(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}\big) = 0 \qquad (11.57)$$

допускает понижение порядка на k единиц путем введения новой неизвестной функции $u = y^{(k)}$. Уравнение принимает вид

$$F\big(x, u, u', \ldots, u^{(n-k)}\big) = 0.$$

Если $u = \varphi_1(x, C_1, \ldots, C_{n-k})$ — общее решение этого последнего уравнения, то общее решение $y = \varphi(x, C_1, \ldots, C_n)$ уравнения (11.57) находится последовательным интегрированием уравнения

$$y^{(k)} = \varphi_1(x, C_1, \ldots, C_{n-k}),$$

имеющего вид (11.55).

Пример 50. $(1+x)y''' + y'' = 0$ $(1+x>0)$. Обозначая $u = y''$, получим уравнение $(1+x)u' + u = 0$ или $d[(1+x)u] = 0$, общий интеграл которого $(1+x)u = C_1$. Интегрируя уравнение $y'' = \dfrac{C_1}{1+x}$ последовательно два раза, получим общее решение исходного уравнения:

$$y = C_1\left[(1+x)\ln(1+x) - x\right] + C_2x + C_3.$$

Примечание. Если уравнение типа (11.57) содержит y' и не содержит функцию y, то применяется подстановка $u = y'$.

3. Уравнение, не содержащее явно независимой переменной x

$$F\big(y, y', \ldots, y^{(n)}\big) = 0 \tag{11.58}$$

интегрируется посредством введения новой искомой функции $p = y'$. За новую независимую переменную берем y, т. е. полагаем $p = p(y)$. По правилу дифференцирования сложной функции

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}p,$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy}p\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy}p\right)p = \frac{d^2p}{dp^2}p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p,$$

....

Отсюда следует, что уравнение (11.58) принимает вид

$$F_1\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \ldots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0,$$

имеющий порядок $(n-1)$. Если $p = \varphi_1(y, C_1, \ldots, C_{n-1})$ — общее решение этого последнего уравнения, то общий интеграл (11.58) равен:

$$\int \frac{dy}{\varphi_1(y, C_1, \ldots, C_{n-1})} = x + C_n.$$

В частности, уравнение $y'' = f(y, y')$ может быть записано в виде

$$\frac{d}{dy}\left(\frac{p^2}{2}\right) = f(y, p).$$

Для уравнения $y'' = f(y)$ имеем

$$(y')^2 = \int 2f(y)\,dy + C_1 = g(y) + C_1.$$

Отсюда следует

$$x + C_2 = \int \frac{dy}{\sqrt{g(y) + C_1}}.$$

Пример 51. $yy'' - (y')^3 = 0$. Полагая $p = y'$, $p = p(y)$, приведем исходное уравнение к виду

$$yp\frac{dp}{dy} - p^3 = 0, \quad \text{или} \quad \frac{dp}{p^2} = \frac{dy}{y} \ (p \neq 0).$$

Интегрируя, получим

$$\ln|y| + C_1 = -\frac{1}{p} = -\frac{dx}{dy}.$$

Интегральными кривыми исходного уравнения являются

$$x + y\ln|y| + C_1 y + C_2 = 0, \quad y = C_3.$$

4. Если левая часть уравнения $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$ является полной производной, то порядок уравнения понижается путем однократного интегрирования.

Пример 52. $y'' + xy' + y = 0$. Уравнение можно записать в виде $(y' + xy)' = 0$. Отсюда $y' + xy = C_1$. Решая это линейное уравнение, получим

$$y = e^{-x^2/2}\left(C_1\int e^{x^2/2}\,dx + C_2\right).$$

5. Уравнение $F(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0$, левая часть которого является однородной функцией (см. 11.1.2.4) аргументов $y, y', \dots, y^{(n)}$, допускает понижение порядка на единицу путем введения новой функции $u(x) = y'/y$, т. е. $y = \exp\left\{\int u\,du\right\}$.

Пример 53. $x^2yy'' = (y - xy')^2$. Подставляя в это однородное относительно y, y', y'' уравнение выражения

$$y = \exp\left\{\int u\,du\right\}, \quad y' = u\cdot\exp\left\{\int u\,du\right\}, \quad y'' = (u' + u^2)\exp\left\{\int u\,du\right\},$$

получим уравнение

$$x^2(u' + u^2) = (1 - xu)^2,$$

или

$$u' + \frac{2}{x}u - \frac{1}{x^2} = 0,$$

общее решение которого $u = C_1x^{-2} + x^{-1}$. Отсюда, в силу равенства $u = (\ln y)'$, находим

$$y = C_2\exp\left\{\int u\,dx\right\} = C_2x\cdot\exp\left\{-\frac{c_1}{x}\right\}.$$

11.1.4. Линейные дифференциальные уравнения высших порядков

11.1.4.1. Общая теория линейных уравнений

1. Линейное дифференциальное уравнение порядка n имеет общий вид

$$a_0(x)y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + a_n(x)y = g(x)$$

или, если $a_0(x) \neq 0$ в некотором интервале,

$$y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y = f(x), \tag{11.59}$$

где функции $p_1(x), \ldots, p_n(x)$, $f(x)$ предполагаются непрерывными в интервале $(a; b)$, что обеспечивает существование и единственность решения задачи Коши для любых значений $y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ при любом x_0 из $(a; b)$. Уравнение (11.59) называется **неоднородным** (**однородным**), если $f(x) \not\equiv 0$ ($f(x) \equiv 0$). Вводя **линейный дифференциальный оператор n-го порядка**

$$L \equiv \frac{d^n}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \ldots + p_{n-1}(x)\frac{d}{dx} + p_n(x), \tag{11.60}$$

уравнение (11.59) можно записать в виде $L(y) = f(x)$. Здесь $L(y)$ является некоторой функцией, получающейся в результате выполнения над функцией $y(x)$ операций, перечисленных в правой части (11.60).

Пример 54. Пусть $L \equiv \dfrac{d^2}{dx^2} + 2x\dfrac{d}{dx} - 1$. Тогда для функции $y = x^3$ получим

$$L(y) = y'' + 2xy' - y = (x^3)'' + 2x(x^3)' - x^3 = 6x + 5x^3.$$

2. Свойства линейного дифференциального оператора L

1) $L(Cy) = CL(y)$ (C — любое число).
2) $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$.

Отсюда следует

$$L(C_1y_1 + \ldots + C_ny_n) = C_1L(y_1) + \ldots + C_nL(y_n).$$

3. Свойства частных решений линейного однородного уравнения. Если $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ — частные решения однородного линейного уравнения $L(y) = 0$ в интервале $(a; b)$, т. е. $L(y_i(x)) \equiv 0$, $i = 1, \ldots, m$ $(a < x < b)$, то их **линейная комбинация** $y(x) = C_1y_1(x) + \ldots + C_my_m(x)$, где C_i — любые числа, также является решением этого уравнения. Каждое однородное уравнение имеет **нулевое** (**тривиальное**) решение $\equiv 0$.

4. Функции $y_1(x), \ldots, y_m(x)$ $(a < x < b)$ называются **линейно независимыми** в интервале $(a; b)$, если их линейная комбинация $C_1 y_1 + \ldots + C_m y_m$ тождественно равна нулю в $(a; b)$ только при условии, что все C_i $(i = 1, \ldots, m)$ равны нулю. В противном случае эти функции называются **линейно зависимыми** в $(a; b)$. Если функции $y_1, \ldots, y_m$ линейно зависимы в $(a; b)$, т. е. $C_1 y_1 + \ldots + C_m y_m = 0$ $(a < x < b)$ при условии, что не все C_i равны нулю, то одна из них является линейной комбинацией остальных.

Совокупность n линейно независимых решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ $(a < x < b)$ однородного линейного уравнения n-го порядка $L(y) = 0$ называются **фундаментальной системой решений** этого уравнения. Если решения $y_1, \ldots, y_n$ образуют фундаментальную систему решений уравнения $L(y) = 0$, то **общее решение** этого уравнения имеет вид $y(x) = C_1 y_1(x) + \ldots + C_n y_n(x)$. Любое линейное однородное уравнение имеет бесконечное множество фундаментальных систем.

Для того чтобы решения $y_1, \ldots, y_n$ однородного линейного уравнения n-го порядка $L(y) = 0$ были линейно независимы в интервале $(a; b)$, в котором непрерывны коэффициенты этого уравнения, необходимо и достаточно, чтобы **определитель Вронского (вронскиан)**

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots & y_n' \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

не обращался в нуль в какой-либо одной точке x_0 из $(a; b)$.

Из **формулы Лиувилля**

$$W(x) = W(x_0) \cdot \exp\left\{ -\int_{x_0}^{x} p_1(x)\, dx \right\},$$

где каждое x_0 принадлежит $(a; b)$, следует, что:

а) если $W(x_0) = 0$, то $W(x) = 0$ во всех точках $(a; b)$,

б) если $W(x_0) \neq 0$ хотя бы в одной точке x_0 из $(a; b)$, то $W(x) \neq 0$ всюду в $(a; b)$.

Пример 55. Уравнение $y'' + y = 0$ имеет частные решения $y_1 = \cos x$, $y_2 = \sin x$, которые образуют фундаментальную систему в промежутке $(-\infty; +\infty)$, так как

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos x & \sin x \\ -\sin x & \cos x \end{vmatrix} \equiv 1 \neq 0.$$

Общее решение уравнения: $y = C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

5. Пусть $y_1(x)$ — какое-либо частное решение линейного неоднородного уравнения n-го порядка $L(y) = f(x)$, т. е. $L(y_1(x)) \equiv f(x)$ в $(a; b)$, а $z_1(x), z_2(x), \ldots, z_n(x)$ — линейно независимые решения однородного уравнения $L(z) = 0$, левая часть которого такая же, как и у неоднородного уравнения. Тогда общее решение y неоднородного уравнения равно сумме любого частного решения $y_1(x)$ этого неоднородного уравнения и общего решения $z(x)$ соответствующего однородного уравнения:

$$y = y_1(x) + z(x) \equiv y_1(x) + C_1 z_1(x) + \ldots + C_n z_n(x).$$

Пример 56. Неоднородное уравнение $y'' + y = x$ имеет частное решение $y_1 = x$. Общее решение однородного уравнения $z'' + z = 0$ имеет вид (см. пример 55) $z = C_1 \cos x + C_2 \sin x$. Общее решение неоднородного уравнения: $y = x + C_1 \cos x + C_2 \sin x$.

6. Для нахождения частного решения неоднородного уравнения $L(y) = f(x)$ можно использовать **принцип наложения (суперпозиции)**, который заключается в следующем. Если правая часть уравнения имеет вид $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ и уравнения $L(y) = f_1(x)$, $L(y) = f_2(x)$ имеют частные решения y_1 и y_2 соответственно, то сумма $y_1 + y_2$ будет частным решением уравнения $L(y) = f(x)$.

7. Метод вариации произвольных постоянных. Общее решение неоднородного уравнения $L(y) = f(x)$ ищется в виде $y = C_1(x)z_1(x) + \ldots + C_n(x)z_n(x)$, где $C_i(x)$ — некоторые функции от x, подлежащие определению; $z_1(x), \ldots, z_n(x)$ — фундаментальная система решений уравнения $L(z) = 0$. Производные $C_i'(x)$ находятся из системы алгебраических уравнений первой степени

$$\begin{aligned}
C_1' z_1 + C_2' z_2 + \ldots + C_n' z_n &= 0,\\
C_1' z_1' + C_2' z_2' + \ldots + C_n' z_n' &= 0,\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\
C_1' z_1^{(n-2)} + C_2' z_2^{(n-2)} + \ldots + C_n' z_n^{(n-2)} &= 0,\\
C_1' z_1^{(n-1)} + C_2' z_2^{(n-1)} + \ldots + C_n' z_n^{(n-1)} &= f(x).
\end{aligned}$$

В силу условия $W(x) \neq 0$ эта система имеет решение, которое можно найти, например, по формулам Крамера

$$C_1'(x) = \varphi_1(x), \quad \ldots, \quad C_n'(x) = \varphi_n(x).$$

Отсюда

$$C_1(x) = \int \varphi_1(x)\,dx + A_1, \quad \ldots, \quad C_n(x) = \int \varphi_n(x)\,dx + A_n,$$

где $A_1, \ldots, A_n$ — произвольные постоянные, знак неопределенного интеграла здесь означает какую-либо одну первообразную. Общее решение неоднородного уравнения имеет вид

$$y = y_1 + z = z_1 \int \varphi_1\,dx + \ldots + z_n \int \varphi_n\,dx + A_1 z_1 + \ldots + A_n z_n.$$

Если $A_1 = \ldots = A_n = 0$, то отсюда получается частное решение y_1 неоднородного уравнения.

Пример 57. Найти частное и общее решения неоднородного уравнения $y'' - y = -x$.

Решение. Для однородного уравнения $z'' - z = 0$ имеем решения $z_1 = e^x$, $z_2 = e^{-x}$. Определитель Вронского $W(x) = z_1 z_2' - z_2 z_1' = -2 \neq 0$. Общее решение однородного уравнения: $z = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$, где C_1, C_2 — постоянные. Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде $y = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-x}$, где $C_1(x), C_2(x)$ — неизвестные функции. Система для нахождения C_1' и C_2':

$$C_1'e^x + C_2'e^{-x} = 0, \quad C_1'e^x - C_2'e^{-x} = -x.$$

Отсюда $C_1' = -\frac{1}{2}xe^{-x}$, $C_2' = \frac{1}{2}xe^x$. Интегрируя, получим $C_1(x) = \frac{1}{2}(x+1)e^{-x} + A_1$, $C_2(x) = \frac{1}{2}(x-1)e^x + A_2$. Общее решение неоднородного уравнения: $y = y_1 + z = x + A_1e^x + A_2e^{-x}$; частное решение: $y_1 = x$. Если заданы начальные условия, например, $y = 1$, $y' = -1$ при $x = 0$, то $A_1 = -\frac{1}{2}$, $A_2 = \frac{3}{2}$ и $y = x - \frac{1}{2}e^x + \frac{3}{2}e^{-x}$. ▷

11.1.4.2. Линейные однородные уравнения с постоянными коэффициентами

1. Общий вид линейного уравнения n-го порядка с постоянными действительными коэффициентами $a_1, a_2, \ldots, a_n$:

$$L(y) \equiv y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = f(x), \tag{11.61}$$

где функция $f(x)$ непрерывна в конечном или бесконечном интервале $(a; b)$. Если $f(x) \equiv 0$, то уравнение называется **однородным**.

Если комплексная функция действительной переменной x

$$y(x) = u(x) + iv(x) \quad (i = \sqrt{-1}),$$

где $u(x), v(x)$ — действительные функции, является решением однородного уравнения $L(y) = 0$, то $u(x)$ и $v(x)$ также являются решениями этого уравнения. Частное решение однородного уравнения ищем в виде $y = e^{rx}$. Подставляя производные $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2e^{rx}$, ..., $y^{(n)} = r^n e^{rx}$ в дифференциальное уравнение, получим $e^{rx} \cdot P(r) = 0$, где $P(r) = r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1}r + a_n$ называется **характеристическим полиномом.** Алгебраическое уравнение $P(r) = 0$ называется **характеристическим уравнением** данного дифференциального уравнения, а его корни — **характеристическими числами** этого уравнения. Функция $y = e^{rx}$ тогда и только тогда является решением однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, когда r является характеристическим числом этого уравнения.

2. Интегрирование линейного однородного уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Для уравнения второго порядка

$$L(y) \equiv y'' + py' + q = 0, \qquad (11.62)$$

где p, q — действительные числа, характеристическое уравнение имеет вид $r^2 + pr + q = 0$, корни которого

$$r_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}.$$

Здесь возможны три следующих случая. Если характеристические числа r_1, r_2:

1) различные и действительные;
2) комплексные, т.е. $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$;
3) равные, т.е. $r_1 = r_2 = -p/2$,

то общее решение уравнения (11.62) имеет соответственно вид:

$$1)\ y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x},$$
$$2)\ y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \sin \beta x),$$
$$3)\ y = e^{-p/2}(C_1 + C_2 x).$$

Постоянные C_1, C_2 могут быть найдены при помощи начальных условий $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y'_0$, где x_0, y_0, y'_0 — заданные числа. Например, в случае 1) величины C_1, C_2 находятся из системы уравнений

$$y_0 = C_1 e^{r_1 x_0} + C_2 e^{r_2 x_0}, \quad y'_0 = C_1 r_1 e^{r_1 x_0} + C_2 r_2 e^{r_2 x_0}.$$

Здесь второе уравнение получается подстановкой начальных условий в производную общего решения.

Пример 58.

1) $y'' - 3y' + 2y = 0$. Характеристическое уравнение $r^2 - 3r + 2 = 0$ имеет корни $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Общее решение: $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.
2) $y'' - 4y' + 5y = 0$. Характеристическое уравнение $r^2 - 4r + 5 = 0$ имеет корни $r_1 = 2 + i$, $r_2 = 2 - i$ ($\alpha = 2$, $\beta = 1$). Общее решение: $y = e^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$.
3) $y'' + 2y' + y = 0$. Характеристическое уравнение $r^2 + 2r + 1 = 0$ имеет корни $r_1 = r_2 = -1$. Общее решение: $y = e^{-x}(C_1 + C_2 x)$.
4) $y'' + y' = 0$. Характеристическое уравнение $r^2 + r = 0$ имеет корни $r_1 = 0$, $r_2 = -1$. Общее решение: $y = C_1 + C_2 e^{-x}$.

3. Интегрирование линейного однородного уравнения n-го порядка с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y = 0, \qquad (11.63)$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — действительные числа. Характеристическое уравнение для (11.63) имеет вид

$$r^n + a_1 r^{n-1} + \ldots + a_{n-1} r + a_n = 0.$$

При нахождении общего решения уравнения (11.63) возможны следующие случаи.

1) Все корни характеристического уравнения различные и действительные, т. е. среди характеристических чисел $r_1, \ldots, r_n$ нет ни одинаковых, ни комплексных. Общим решением будет

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} + \ldots + C_n e^{r_n x}. \tag{11.64}$$

2) Все корни различные, но среди них имеются комплексные. При этом каждой паре комплексно сопряженных корней вида $\alpha \pm i\beta$ соответствуют два линейно независимых частных решения

$$e^{\alpha x} \cos \beta x, \quad e^{\alpha x} \sin \beta x.$$

Найдя n линейно независимых действительных частных решений дифференциального уравнения, образующих фундаментальную систему решений, общее решение уравнения строят затем как линейную комбинацию вида (11.64) этих частных решений, в которой каждому действительному корню r соответствует частное решение вида e^{rx}, а каждой паре комплексно сопряженных корней $\alpha \pm i\beta$ — два частных решения вида $e^{\alpha x} \cos \beta x$, $e^{\alpha x} \sin \beta x$.

3) Среди корней имеются кратные действительные. Если r — действительный корень кратности k, то ему соответствует k линейно независимых частных решений

$$e^{rx}, \quad xe^{rx}, \quad \ldots, \quad x^{k-1} e^{rx},$$

входящих в фундаментальную систему решений, при помощи которой строится общее решение в виде линейной комбинации этих частных решений.

4) Среди корней имеются кратные комплексные. Если $r = \alpha + i\beta$ — корень кратности k, то имеется также сопряженный корень $r = \alpha - i\beta$ кратности k. При этом соответствующие $2k$ слагаемых в общем решении (11.64) заменяются линейной комбинацией

$$e^{\alpha x} \left[(C_1 + C_2 x + \ldots + C_k x^{k-1}) \cos \beta x + (C_{k+1} + C_{k+2} x + \ldots + C_{2k} x^{k-1}) \sin \beta x \right].$$

Пример 59. $y^{(5)} + 4y^{(4)} + 7y''' + 6y'' + 2y' = 0$. Характеристическое уравнение

$$r^5 + 4r^4 + 7r^3 + 6r^2 + 2r = 0$$

имеет корни $r_1 = 0$, $r_2 = r_3 = -1$, $r_4 = 1 + i$, $r_5 = 1 - i$. Общее решение уравнения:

$$y = C_1 + C_2 e^{-x} + C_3 x e^{-x} + C_4 e^{x} \cos x + C_5 e^{x} \sin x.$$

11.1.4.3. Линейное неоднородное уравнение с постоянными коэффициентами

Общее решение линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными действительными коэффициентами вида (11.61) может быть найдено методом вариации произвольных постоянных (см. 11.1.4.1). При этом требуется выполнение интегрирования. В силу того что общее решение неоднородного уравнения равно сумме какого-либо его частного решения и общего решения соответствующего ему однородного уравнения (см. 11.1.4.1), интегрирование неоднородного уравнения с постоянными коэффициентами в случае, когда его правая часть имеет специальный вид, сводится к нахождению частного решения $y_1(x)$ **методом неопределенных коэффициентов**, не требующим интегрирования и состоящим в том, что частное решение ищется в виде, содержащим неопределенные коэффициенты.

Метод неопределенных коэффициентов.

Случай 1. Пусть правая часть уравнения (11.61) имеет вид $f(x) = P_m(x)e^{\alpha x}$, где α — действительное число, $P_m(x)$ — действительный полином степени m, в частности, некоторое число. Тогда частное решение y_1 имеет вид:

1а) $y_1 = Q_m(x)e^{\alpha x}$, где $Q_m(x)$ — полином степени m с неопределенными коэффициентами, при условии, что α не является корнем характеристического уравнения.

1б) $y_1 = x^k Q_m(x)e^{\alpha x}$, если α — корень кратности k характеристического уравнения.

Пример 60.

1) $y'' + 2y' = x - 1$. Здесь $m = 1$, $\alpha = 0$, так как правую часть уравнения можно записать в виде $e^{0x}(x - 1)$. Корни характеристического уравнения $r^2 + 2r = 0$ равны $r_1 = 0$, $r_2 = -2$. Так как α — корень кратности $k = 1$ характеристического уравнения, частное решение ищем в виде $y_1 = x(Ax + B)$. Подставляя производные $y_1' = 2Ax + B$ и $y_1'' = 2A$ в дифференциальное уравнение, получим: $2A + 4Ax + 2B = x - 1$. Сравнивая здесь коэффициенты при одинаковых степенях x слева и справа, найдем $A = 1/4$, $B = -3/4$. Следовательно,
$$y_1 = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x.$$
Общее решение однородного уравнения: $z = C_1 + C_2e^{-2x}$. Общее решение неоднородного уравнения:
$$y = y_1 + z = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4}x + C_1 + C_2e^{-2x}.$$

2) $y'' - 2y' + y = e^{2x}$. Здесь $m = 0$, $\alpha = 2$, $r_1 = r_2 = 1$, следовательно, частное решение ищем в виде $y_1 = Ae^{2x}$. Подставляя y_1, y_1', y_1'' в уравнение, получим $A = 1$, т.е. $y_1 = e^{2x}$. Общее решение однородного уравнения: $z = C_1e^x + C_2xe^x$. Общее решение неоднородного уравнения: $y = y_1 + z$.

Случай 2. Пусть правая часть уравнения (11.61) имеет вид

$$f(x) = e^{\alpha x}[P_1(x)\cos\beta x + P_2(x)\sin\beta x],$$

где α, β — действительные числа, $P_1(x), P_2(x)$ — полиномы, наивысшая степень которых равна m, т. е. один из них имеет степень m, а другой — меньшую степень и, в частности, может быть тождественно равным нулю. Тогда частное решение y_1 имеет вид:

2а) $y_1 = e^{\alpha x}[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x]$, где $Q_1(x)$, $Q_2(x)$ — полиномы степени m с неопределенными коэффициентами, при условии, что комплексные числа $\alpha \pm i\beta$ не являются корнями характеристического уравнения. Оба полинома Q_1 и Q_2 записываются одновременно даже в случае, когда $P_1 \equiv 0$ либо $P_2 \equiv 0$.

2б) $y_1 = x^k e^{\alpha x}[Q_1(x)\cos\beta x + Q_2(x)\sin\beta x]$, если $\alpha + i\beta$ (соответственно $\alpha - i\beta$) — корень кратности k характеристического уравнения.

Пример 61.

1) $y'' + 4y = \cos 2x$. Здесь $\alpha = 0$, $\beta = 2$, $m = 0$. Корни характеристического уравнения $r^2 + 4 = 0$ равны $r_1 = 2i$, $r_2 = -2i$, следовательно, $k = 1$. Частное решение ищем в виде $y_1 = x(A\cos 2x + B\sin 2x)$. Подставляя производные от y_1 в дифференциальное уравнение и приравнивая коэффициенты при $\cos 2x$ и $\sin 2x$ в обеих частях равенства, получим $A = 0$, $B = 1/4$. Частное решение: $y_1 = \dfrac{1}{4}x\sin 2x$. Общее решение однородного уравнения: $z = C_1\cos 2x + C_2\sin 2x$. Общее решение неоднородного уравнения: $y = y_1 + z$.
2) $y'' - 4y' + 5y = e^{2x}\cos x$. Здесь $\alpha = 2$, $\beta = 1$, $m = 0$. Корни характеристического уравнения $r^2 - 4r + 5 = 0$ равны $r_1 = 2+i$, $r_2 = 2-i$, т. е. $k = 1$. Частное решение ищем в виде $y_1 = xe^{2x}(A\cos x + B\sin x)$. Подставляя y_1, y_1', y_1'' в уравнение и приравнивая коэффициенты при $\cos x$ и $\sin x$ в обеих частях равенства, находим $A = 0$, $B = 1$, т. е. $y_1 = xe^{2x}\sin x$. Общее решение однородного уравнения: $z = e^{2x}(C_1\cos x + C_2\sin x)$. Общее решение неоднородного уравнения: $y = y_1 + z$.

Примечание. Если правую часть $f(x)$ уравнения (11.61) можно представить в виде суммы нескольких слагаемых, для каждого из которых применим метод неопределенных коэффициентов, то для нахождения частного решения неоднородного уравнения используется принцип суперпозиции (наложения) (см. 11.1.4.1, **6**).

Пример 62. $L(y) \equiv y''' + 2y'' + 5y' = xe^{-x} - 2x + 4\sin 2x$. Здесь $r^3 + 2r^2 + 5r = 0$, $r_1 = 0$, $r_2 = -1 + 2i$, $r_3 = -1 - 2i$. Представим правую часть уравнения в виде суммы слагаемых $f_1(x) = xe^{-x}$, $f_2(x) = -2x$, $f_3(x) = 4\sin 2x$. Частное решение исходного уравнения равно сумме частных решений y_1, y_2, y_3 уравнений $L(y) = xe^{-x}$, $L(y) = -2x$, $L(y) = 4\sin 2x$, из которых первое относится к случаю 1а); второе — к случаю 1б), так как $\alpha = 0$ является корнем характеристического уравнения; третье — к случаю 2а); т. е. $y_1 = e^{-x}(Ax + B)$, $y_2 = x(Cx + D)$, $y_3 = E\cos 2x + F\sin 2x$, где A, B, C, D, E, F — искомые коэффициенты. Общее решение однородного уравнения: $z = C_1 + C_2e^{-x}\cos 2x + C_3e^{-x}\sin 2x$. Общее решение неоднородного уравнения: $y = y_1 + y_2 + y_3 + z$.

11.1.4.4. Уравнение Эйлера

Уравнением Эйлера (однородным) называется дифференциальное уравнение

$$x^n y^{(n)} + a_1 x^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} x y' + a_n y = 0,$$

где $a_1, \ldots, a_n$ — постоянные. Заменой независимой переменной по формуле $x = e^t$ (или $t = \ln x$) уравнение Эйлера приводится к линейному уравнению с постоянными коэффициентами. Имеем:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{dy}{dx} : \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} \cdot e^{-t},$$

т. е.

$$x\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right) : \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dt}e^{-t}\right) \cdot e^{-t} = \frac{d^2y}{dt^2}e^{-2t} - \frac{dy}{dt}e^{-2t},$$

т. е.

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}.$$

Аналогично вычисляются последующие производные. Неоднородное уравнение Эйлера интегрируется методом вариации произвольных постоянных либо методом неопределенных коэффициентов.

Однородное уравнение Эйлера может быть проинтегрировано также непосредственно, без замены переменной, если искать его решение в виде $y = x^m$. Вычисляя производные и подставляя их в уравнение Эйлера, получим алгебраическое уравнение степени n для нахождения m. Если это уравнение имеет n различных корней $m_1, \ldots, m_n$, то общее решение уравнения Эйлера имеет вид

$$y = C_1 x^{m_1} + \ldots + C_n x^{m_n}.$$

Если корень m_1 имеет кратность α, то ему соответствуют частные решения вида:

$$x^{m_1}, \quad x_1^m \ln x, \quad x^{m_1}(\ln x)^2, \quad \ldots, \quad x^{m_1}(\ln x)^{\alpha-1}.$$

Паре сопряженных корней $a \pm ib$ соответствуют два решения:

$$x^a \cos(b \ln x), \quad x^a \sin(b \ln x).$$

Пример 63. $x^2y'' - 2xy' + 2y = 0$. Полагая $x = e^t$ и заменяя производные от y по x производными по t, получим

$$\left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right) - 2\frac{dy}{dt} + 2y = 0,$$

т. е. линейное уравнение

$$\frac{d^2y}{dt^2} - 3\frac{dy}{dt} + 2y = 0,$$

характеристическое уравнение которого $r^2 - 3r + 2 = 0$ имеет корни $r_1 = 1$, $r_2 = 2$. Общее решение: $y = C_1e^t + C_2e^{2t}$. Возвращаясь к прежней переменной, получим $y = C_1x + C_2x^2$. Если искать решение в виде $y = x^m$, то $y' = mx^{m-1}$, $y'' = m(m-1)x^{m-2}$. Подставляя эти выражения в исходное уравнение, после сокращения на x^m получим уравнение $m^2 - 3m + 2 = 0$, имеющее корни $m_1 = 1$, $m_2 = 2$. Полученное общее решение совпадает с предыдущим.

11.1.4.5. Краевые задачи. Функция Грина

Для выделения частного решения дифференциального уравнения из его общего решения может рассматриваться либо **задача Коши**, состоящая в отыскании частного решения, удовлетворяющего **начальным условиям**, либо **краевая задача,** заключающаяся в нахождении частного решения, удовлетворяющего **краевым (граничным) условиям** (см. 11.1.1.1) на обоих концах заданного промежутка, внутри которого это решение ищется. Число граничных условий должно совпадать с порядком уравнения.

1. Краевая задача для уравнения второго порядка. Обычно рассматривается следующая краевая задача на отрезке $[a; b]$, состоящая из дифференциального уравнения

$$L(y) \equiv p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{11.65}$$

и двух краевых (граничных) условий

$$\begin{aligned} Y_1(y) &\equiv \alpha_{11}y'(a) + \alpha_{12}y(a) + \alpha_{13}y'(b) + \alpha_{14}y(b) = \beta_1, \\ Y_2(y) &\equiv \alpha_{21}y'(a) + \alpha_{22}y(a) + \alpha_{23}y'(b) + \alpha_{24}y(b) = \beta_2, \end{aligned} \tag{11.66}$$

где $p_0(x), p_1(x), p_2(x), f(x)$ непрерывны в $[a; b]$ и $p_0(x) \neq 0$; предполагается, что ранг матрицы коэффициентов

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \end{bmatrix}$$

равен двум, т. е. хотя бы один из шести определителей

$$D_{ij} = \begin{vmatrix} \alpha_{1i} & \alpha_{1j} \\ \alpha_{2i} & \alpha_{2j} \end{vmatrix} \quad (i < j;\ i, j = 1, 2, 3, 4)$$

отличен от нуля. Если $\alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{21} = \alpha_{22} = 0$, то краевые условия примут вид

$$\alpha_{11}y'(a) + \alpha_{12}y(a) = \beta_1, \quad \alpha_{23}y'(b) + \alpha_{24}y(b) = \beta_2. \tag{11.67}$$

Краевые условия (11.66) и (11.67) называются **смешанными (неразделенными)** и **разделенными** соответственно. Краевая задача (11.65), (11.66) называется **однородной**, если $f(x) = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = 0$, в противном случае — **неоднородной**. Решение $y = \varphi(x)$ краевой задачи (11.65), (11.66) обращает уравнение (11.65) в тождество на $[a; b]$ и удовлетворяет краевым условиям (11.66), т. е.

$Y_i(\varphi(x)) = \beta_i$ $(i = 1, 2)$. Любая однородная краевая задача всегда имеет **тривиальное решение** $\varphi(x) \equiv 0$. Всякая линейная комбинация решений какой-либо однородной краевой задачи также является ее решением. Существуют неоднородные краевые задачи, совсем не имеющие решений.

Пример 64. Решить краевую задачу:

$$y'' + 4y = \cos 2x; \quad 2y(0) + y'(0) = 2, \quad 2y\left(\frac{\pi}{4}\right) + y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{8}.$$

<u>Решение</u>. Общее решение данного уравнения (см. пример 61):

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x.$$

Его производная

$$y' = -2C_1 \sin 2x + 2C_2 \cos 2x + \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{1}{2} x \cos 2x.$$

Подставляя значения y и y' в точках $x = 0$ и $x = \pi/4$ в краевые условия, получим систему $2C_1 + 2C_2 = 2$, $2C_1 - 2C_2 = 1/4$. Отсюда находим $C_1 = 9/16$, $C_2 = 7/16$. Решение краевой задачи:

$$y = \frac{9}{16} \cos 2x + \frac{7}{16} \sin 2x + \frac{1}{4} x \sin 2x. \qquad \triangleright$$

Если $p_0''(x)$, $p_1'(x)$, $p_2(x)$ непрерывны на $[a; b]$, то дифференциальный оператор L^*, определяемый равенством

$$L^*(y) \equiv (p_0 y)'' - (p_1 y)' + p_2 y = \left[p_0 \frac{d^2}{dx^2} + (2p_0' - p_1)\frac{d}{dx} + p_2 + p_0'' - p_1'\right] y,$$

называется **сопряженным** к оператору L. Уравнение $L^*(u) = 0$ называется **сопряженным** к уравнению $L(y) = 0$. Если $u(x)$, $v(x)$ — две любые дважды непрерывно дифференцируемые на $[a; b]$ функции, то выполняется соотношение

$$\int_a^b \left[uL(v) - vL^*(u)\right] dx = \left[p_0(uv' - vu') + (p_1 - p_0')uv\right]\Big|_a^b, \qquad (11.68)$$

называемое **формулой Грина**.

Если $L(y) = L^*(y)$, то оператор L и однородное уравнение $L(y) = 0$ называются **самосопряженными**. Оператор L является самосопряженным тогда и только тогда, когда $p_1 = p_0'$. При этом

$$L = L^* = p_0 \frac{d^2}{dx^2} + p_0' \frac{d}{dx} + p_2 \quad \text{и} \quad L(y) = (p_0 y')' + p_2 y.$$

Всякое уравнение второго порядка

$$y'' + a_1(x) y' + a_2(x) y = g(x),$$

где $a_1(x), a_2(x), g(x)$ непрерывны, можно привести к самосопряженному виду

$$p(x)y'' + p'(x)y' + q(x)y \equiv [p(x)y']' + q(x)y = f(x)$$

умножением на функцию

$$\mu(x) = \exp\left\{\int a_1(x)\,dx\right\},$$

здесь $\exp\{t\} \equiv e^t$, $p(x) = \mu(x)$, $q(x) = a_2(x)\mu(x)$, $f(x) = g(x)\mu(x)$.

Пусть дана краевая задача вида (11.65), (11.66): $L(y) = f(x)$, $Y_i(y) = \beta_i$ $(i = 1, 2)$. Тогда соответствующая однородная **краевая задача**

$$L(u) = 0, \quad Y_i(u) = 0, \quad (i = 1, 2) \tag{11.69}$$

называется **самосопряженной**, если: 1) $L(u) = L^*(u)$, 2) для любых двух систем чисел $\{u(a), u'(a), u(b), u'(b)\}$ и $\{v(a), v'(a), v(b), v'(b)\}$, удовлетворяющих одинаковым краевым условиям $Y_i(u) = 0$, $Y_i(v) = 0$ $(i = 1, 2)$, справедливо соотношение

$$[p_0(uv' - vu')]\Big|_a^b = 0.$$

Краевая задача (11.69) самосопряжена тогда и только тогда, когда

$$1)\ p_1 = p_0', \quad 2)\ p_0(a)D_{34} = p_0(b)D_{12}.$$

Неоднородная краевая задача

$$L(y) = f(x), \quad Y_i(y) = 0 \quad (i = 1, 2),$$

для которой соответствующая однородная задача (11.69) самосопряжена, разрешима тогда и только тогда, когда для всякого нетривиального решения $\psi(x)$ однородной краевой задачи (если оно существует) выполняется равенство

$$\int_a^b f(x)\psi(x)\,dx = 0.$$

Если однородная краевая задача (11.69) имеет только тривиальное решение $(\psi(x) \equiv 0)$, то неоднородная краевая задача (11.65), (11.66) имеет решение, и притом единственное.

2. Функция Грина. Функцией Грина (или **функцией влияния**) однородной краевой задачи (11.69) называется функция $G(x, \xi)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1) Она определена и непрерывная в квадрате D, определяемом неравенствами $a \leqslant x$, $\xi \leqslant b$ на плоскости $Ox\xi$.

2) Как функция от x она имеет в каждом из двух треугольников $a<\xi<x\leqslant b$ и $a \leqslant x < \xi < b$ непрерывные производные по x до второго порядка и при $x \neq \xi$ удовлетворяет однородному уравнению $L(y) \equiv p_0y''+p_1y'+p_2y = 0$, т. е. $L(G) = 0$.
3) Как функция от x она (при каждом фиксированном ξ, $a < \xi < b$) удовлетворяет однородным краевым условиям $Y_i(G) = 0$ $(i = 1, 2)$.
4) На диагонали квадрата D, т. е. при $x = \xi$ $(a < \xi < b)$, ее первая производная по x имеет разрыв первого рода, причем

$$\left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right|_{x=\xi+0} - \left.\frac{\partial G(x,\xi)}{\partial x}\right|_{x=\xi-0} = \frac{1}{p_0(\xi)}.$$

Для самосопряженной краевой задачи (11.69) функция Грина **симметрична**, т. е. $G(x,\xi) = G(\xi,x)$.

Построение функции Грина. Если однородная краевая задача (11.69) имеет только тривиальное решение $y \equiv 0$, то для этой задачи существует единственная функция Грина. Если известны какие-либо два линейно независимых решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ однородного уравнения $L(y) = 0$, то функция Грина строится по формуле

$$G(x,\xi) = \begin{cases} a_1(\xi)y_1(x) + a_2(\xi)y_2(x) & \text{при} \quad a \leqslant x \leqslant \xi \leqslant b, \\ b_1(\xi)y_1(x) + b_2(\xi)y_2(x) & \text{при} \quad a \leqslant \xi \leqslant x \leqslant b, \end{cases}$$

где $a_1(\xi)$, $a_2(\xi)$, $b_1(\xi)$, $b_2(\xi)$ определяются так, чтобы выполнялись условия 1)–4) в определении функции Грина.

Если $G(x,\xi)$ — функция Грина однородной краевой задачи (11.69), то решение неоднородной краевой задачи

$$L(y) = f(x), \quad Y_i(y) = 0 \quad (i = 1, 2), \tag{11.70}$$

где $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$, находится по формуле

$$y(x) = \int\limits_a^b G(x,\xi) f(\xi)\, d\xi. \tag{11.71}$$

Решение неоднородной краевой задачи

$$L(y) = 0, \quad Y_i(y) = \beta_i \quad (i = 1, 2) \tag{11.72}$$

ищется в виде $y = C_1y_1(x)+C_2y_2(x)$, где C_1, C_2 находятся из краевых условий (11.72).

Решение краевой задачи (11.65), (11.66) равно сумме решений краевых задач (11.70) и (11.72). Следовательно, без ограничение общности, решение краевой задачи (11.65), (11.66) сводится к решению задачи (11.70).

Примечание. Простейшие краевые условия $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$ посредством замены искомой функции $y(x)$ на $z(x)$ по формуле

$$z = y - y_a - \frac{y_b - y_a}{b - a}(x - a)$$

преобразуются в однородные краевые условия $z(a) = 0$, $z(b) = 0$. В этом случае неоднородная краевая задача легко преобразуется в краевую задачу с однородными краевыми условиями.

Для краевой задачи

$$\begin{gathered}[p(x)y']' + q(x)y = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b); \\ \alpha_{11}y'(a) + \alpha_{12}y(a) = 0, \quad \alpha_{23}y'(b) + \alpha_{24}(b) = 0,\end{gathered} \tag{11.73}$$

в предположении существования только тривиального решения однородной краевой задачи, функция Грина имеет вид

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{C}y_2(\xi)y_1(x), & a \leqslant x \leqslant \xi \leqslant b, \\ \dfrac{1}{C}y_1(\xi)y_2(x), & a \leqslant \xi \leqslant x \leqslant b, \end{cases} \tag{11.74}$$

где $y_1(x), y_2(x)$ — решения однородного уравнения (11.73) (т. е. при $f(x) \equiv 0$) такие, что $y_1(x)$ удовлетворяет только первому граничному условию (11.73) (в точке $x = a$), а $y_2(x)$ — только второму условию (в точке $x = b$); $C = p(\xi)W(\xi)$, $W(\xi) = y_1(\xi)y_2'(\xi) - y_2(\xi)y_1'(\xi)$. При этом функция $y_1(x)$ ищется как решение задачи Коши для однородного уравнения (11.73) (т. е. при $f(x) \equiv 0$) с начальными условиями $y_1(a) = -\alpha_{11}$, $y_1'(a) = \alpha_{12}$; для $y_2(x)$ — соответственно $y_2(b) = -\alpha_{23}$, $y_2' = \alpha_{24}$. Функции $y_1(x), y_2(x)$ линейно независимы.

Пример 65. Решить неоднородную краевую задачу:

$$y'' + \frac{1}{4}y = f(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant \pi); \quad y(0) = 1, \quad y(\pi) = -1. \tag{1}$$

<u>*Решение*</u>. Построим сначала функцию Грина для однородной краевой задачи

$$y'' + \frac{1}{4}y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y(\pi) = 0, \tag{2}$$

имеющей только тривиальное решение $y \equiv 0$. Сравнивая задачу (2) с (11.73), найдем, что $\alpha_{11} = 0$, $\alpha_{12} = 1$, $\alpha_{23} = 0$, $\alpha_{24} = 1$. Характеристические числа: $r_{1,2} = \pm\frac{1}{2}i$. Решение $y_1(x)$ уравнения (2) ищем в виде $y_1(x) = C_1\cos\frac{1}{2}x + C_2\sin\frac{1}{2}x$ и с учетом начальных условий $y_1(0) = -\alpha_{11} = 0$, $y_1'(0) = \alpha_{12} = 1$ получим $y_1(x) = \sin\frac{1}{2}x$. Аналогично, $y_2(x) = C_3\cos\frac{1}{2}x + C_4\sin\frac{1}{2}x$, $C_3 = 1$, $C_4 = 0$, т. е. $y_2(x) = \cos\frac{1}{2}x$. Учитывая, что

$W(\xi) = -1/2$, $p(\xi) = 1$, найдем согласно (11.74):

$$G(x, \xi) = \begin{cases} -2\cos\frac{1}{2}\xi \cdot \left(\sin\frac{1}{2}x\right); & 0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant \pi, \\ -2\sin\frac{1}{2}\xi \cdot \left(\cos\frac{1}{2}x\right); & 0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

Здесь $G(x, \xi) = G(\xi, x)$, т. е. функция Грина симметрична.

Краевая задача (1) разбивается на две краевые задачи. Решение $z_1(x)$ краевой задачи с однородными условиями

$$z'' + \frac{1}{4}z = f(x); \quad z(0) = 0, \quad z(\pi) = 0$$

находится по формуле (11.71):

$$z_1(x) = \int_0^\pi G(x, \xi) \cdot f(\xi)\, d\xi = -\int_0^x 2\sin\frac{1}{2}\xi \cdot \left(\cos\frac{1}{2}x\right) f(\xi)\, d\xi - \\ -\int_x^\pi 2\cos\frac{1}{2}\xi \cdot \left(\sin\frac{1}{2}x\right) f(\xi)\, d\xi.$$

Решение $z_2(x)$ задачи

$$z'' + \frac{1}{4}z = 0; \quad z(0) = 1, \quad z(\pi) = -1$$

ищем в виде

$$z_2(x) = A_1\cos\frac{1}{2}x + A_2\sin\frac{1}{2}x.$$

Находя A_1, A_2 с помощью условий $z_2(0) = 1$, $z_2(\pi) = -1$, получим $A_1 = 1$, $A_2 = -1$ и $z_2(x) = \cos\frac{1}{2}x - \sin\frac{1}{2}x$. Решение $y(x)$ исходной краевой задачи (1) равно сумме решений $y(x) = z_1(x) + z_2(x)$. ▷

Примечание к примеру 65. Однородная краевая задача $y'' + \frac{1}{4}y = 0$; $y(0) = 0$, $y(2\pi) = 0$ имеет нетривиальное решение $y = \sin\frac{1}{2}x$. Поэтому неоднородная краевая задача, в частности: $y'' + \frac{1}{4}y = \cos\frac{1}{2}x$, $y(0) = \beta_1$, $y(2\pi) = \beta_2$, не имеет решения, если только не выполнено определенное условие разрешимости, которое можно найти следующим образом. Учитывая, что общее решение данного неоднородного уравнения имеет вид $y = C_1\cos\frac{1}{2}x + C_2\sin\frac{1}{2}x + x\cdot\sin\frac{1}{2}x$, получим из граничных условий $C_1 = \beta_1$, $C_1 = -\beta_2$. Эти уравнения совместны только при условии $\beta_1 = -\beta_2$, которое и является условием разрешимости данной краевой задачи. Если $\beta_1 = -\beta_2$, то неоднородная краевая задача имеет бесконечное множество решений $y = \beta_1\cos\frac{1}{2}x + C_2\sin\frac{1}{2}x + x\cdot\sin\frac{1}{2}x$, так как постоянная C_2 не определена.

Пример 66. Для краевой задачи

$$y'' = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b); \quad y(a) = 0, \quad y(b) = 0$$

имеем: $\alpha_{11} = 0$, $\alpha_{12} = 1$, $\alpha_{23} = 0$, $\alpha_{24} = 1$, $y_1(x) = x - a$, $y_2(x) = x - b$, $W(\xi) = b - a$, $p(\xi) = 1$. Следовательно, функция Грина, согласно (11.74), имеет вид

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}(\xi - b)(x - a); & a \leqslant x \leqslant \xi \leqslant b, \\ \dfrac{1}{b-a}(\xi - a)(x - b); & a \leqslant \xi \leqslant x \leqslant b. \end{cases}$$

Решение краевой задачи для любой непрерывной функции $f(x)$ имеет вид

$$y(x) = \int_a^b G(x,\xi) f(\xi)\, d\xi = \int_a^x G(x,\xi) f(\xi)\, d\xi + \int_x^b G(x,\xi) f(\xi)\, d\xi =$$

$$= \frac{x-b}{b-a} \int_a^x (\xi - a) f(\xi)\, d\xi + \frac{x-a}{b-a} \int_x^b (\xi - b) f(\xi)\, d\xi.$$

3. Задачи на собственные значения. Неоднородной краевой задаче

$$L(y) + \lambda g(x) y = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b); \quad Y_i(y) = \beta_i \quad (i = 1, 2)$$

соответствует однородная задача, предполагаемая самосопряженной

$$L(y) + \lambda g(x) y = 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b); \quad Y_i(y) = 0 \quad (i = 1, 2), \tag{11.75}$$

где $L(y) \equiv [p(x)y']' + q(x)y$; $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$, $g(x)$ непрерывны в $[a; b]$.

Задача на собственные значения заключается в том, что в однородной краевой задаче (11.75) требуется найти те значения (в общем случае комплексные) параметра λ, для которых эта задача имеет нетривиальные (т. е. не равные тождественно нулю) решения. Такие значения λ называются **собственными значениями (числами)**, а их совокупность — **спектром** задачи на собственные значения. Каждое нетривиальное решение $y = \varphi(x)$ задачи называется **собственной функцией**, соответствующей данному собственному значению.

Рассмотрим следующую самосопряженную задачу для случая $g(x) \equiv 1$:

$$\begin{aligned} &L(y) + \lambda y = 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b); \\ &\alpha_{11} y'(a) + \alpha_{12} y(a) = 0, \quad \alpha_{23} y'(b) + \alpha_{24} y(b) = 0. \end{aligned} \tag{11.76}$$

Если $\lambda = 0$ не является собственным значением краевой задачи (11.76), т. е. при $\lambda = 0$ задача имеет только тривиальное решение $y \equiv 0$, то задача (11.76) равносильна, согласно (11.71), **интегральному уравнению** с симметричным ядром (в силу симметричности функции Грина):

$$y(x) = -\lambda \int_a^b G(x,\xi)\, y(\xi)\, d\xi.$$

Основные свойства собственных значений и собственных функций краевой задачи (11.76).

1) Существует по крайней мере одно собственное число и соответствующая ему собственная функция.

2) Если $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ — собственные функции, соответствующие отличным друг от друга собственным числам λ_1 и λ_2, то выполняется условие ортогональности

$$\int_a^b \varphi_1(x)\varphi_2(x)\,dx = 0.$$

3) Собственные числа действительны. Каждому из них соответствует только одна собственная функция (с точностью до числового множителя). Для краевых условий, отличающихся от (11.76), каждому λ может соответствовать не более двух линейно независимых собственных функций.

4) Все собственные числа образуют бесконечную последовательность

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots \leqslant \lambda_n \leqslant \ldots .$$

5) Пусть λ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ и $\varphi_n(x)$ — собственные числа и соответствующие им собственные функции, образующие ортонормированную систему. Тогда каждую функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую граничным условиям (11.76) и имеющую непрерывные производные до второго порядка на $[a; b]$, можно разложить в абсолютно и равномерно сходящийся **ряд Фурье**

$$\varphi(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n\varphi_n(x), \quad \text{где} \quad c_n = \int_a^b \varphi(x)\varphi_n(x)\,dx.$$

Для неоднородной **краевой задачи Штурма—Лиувилля**

$$\begin{aligned} &[p(x)y']' + q(x)y + \lambda g(x)y = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b); \\ &\alpha_{11}y'(a) + \alpha_{12}y(a) = 0, \quad \alpha_{23}y'(b) + \alpha_{24}y(b) = 0 \end{aligned} \tag{11.77}$$

справедливы следующие утверждения.

1) Если параметр λ не равен ни одному из собственных чисел соответствующей однородной задачи (т. е. однородная задача имеет только тривиальное решение), то неоднородная задача (11.77) для любой непрерывной $f(x)$ имеет единственное решение.

2) Если параметр λ равен одному из собственных чисел однородной задачи (т. е. однородная задача имеет нетривиальное решение), то неоднородная задача имеет решение только при условии, когда для собственных функций $\varphi(x)$, соответствующих собственному числу λ, выполняется

равенство (условие разрешимости):

$$\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx = 0.$$

При этом задача (11.77) имеет бесконечное множество решений, так как, если $y(x)$ — решение задачи (11.77), то ее решением будет также функция $y(x) + C\cdot\varphi(x)$, где C — произвольное число, $\varphi(x)$ — собственная функция, соответствующая собственному числу λ.

Таким образом, для заданного значения λ либо однородная задача имеет нетривиальное решение, либо неоднородная имеет единственное решение (**альтернатива Фредгольма**).

Пример 67. Найдем собственные значения и собственные функции однородной краевой задачи

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant l); \qquad y(0) = 0, \qquad y(l) = 0. \tag{1}$$

Требуется найти все значения λ, при которых задача (1) имеет ненулевые (нетривиальные) решения $y \not\equiv 0$.

Решение.

1) Если $\lambda < 0$, то характеристическое уравнение $r^2 + \lambda = 0$ (см. 11.1.4.2) имеет различные действительные корни $r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$, а общее решение уравнения (1) имеет вид $y = C_1e^{r_1x} + C_2e^{r_2x}$. Краевые условия (1) дают $C_1 = C_2 = 0$, т. е. $y \equiv 0$.
2) Если $\lambda = 0$, то $y = C_1x + C_2$. Здесь также $C_1 = C_2 = 0$ и $y \equiv 0$.
3) $\lambda > 0$. Характеристические числа: $r_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$. Общее решение уравнения (1): $y = C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x + C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x$. Краевые условия (1) дают $C_1 = 0$, $C_2\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$. Здесь $C_2 \neq 0$, так как иначе $y \equiv 0$, следовательно, $\sin\sqrt{\lambda}\,l = 0$. Отсюда $\sqrt{\lambda_n}l = \pm n\pi$ $(n = 1, 2, \ldots)$, т. е. $\lambda_n = (n\pi/l)^2$. Если $n = 0$, то $y \equiv 0$. Собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ соответствуют собственные функции

$$y_n(x) = A_n\sin\frac{n\pi}{l}x \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где A_n — произвольные постоянные. Полагая $A_n = \sqrt{2/l}$, получим ортонормированную систему собственных функций

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

Если $\lambda \neq \lambda_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$, то любая неоднородная краевая задача $y'' + \lambda y = f(x)$; $y(0) = 0$, $y(l) = 0$ имеет единственное решение. Если $\lambda = \lambda_n$, то неоднородная задача имеет бесконечное множество решений (см. пример 65) при выполнении условия разрешимости. ▷

11.1.4.6. Интегрирование уравнений с помощью степенных рядов

1. Линейное уравнение вида (11.59) порядка выше первого с переменными коэффициентами не может быть в общем случае проинтегрировано в конечном виде (т. е. в квадратурах). Один из наиболее распространенных методов интегрирования таких уравнений основан на представлении искомого решения в виде степенного ряда с неопределенными коэффициентами, если коэффициенты уравнения являются аналитическими функциями, т. е. могут быть представлены в виде степенных рядов с известными коэффициентами. Идея этого метода состоит в том, что ряды, представляющие коэффициенты уравнения и искомого решения, подставляются в уравнение, а затем приравниваются друг к другу коэффициенты при одинаковых степенях x, что позволяет найти неопределенные коэффициенты ряда (см. также 11.1.2.9).

Примечание. Функция $f(x)$ называется **аналитической в точке** x_0, если в некоторой окрестности $|x - x_0| < \delta$ этой точки она представима в виде степенного ряда по степеням $(x - x_0)$:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n. \tag{11.78}$$

Если $f(x)$ обладает этим свойством в каждой точке x_0 интервала $(a; b)$, то она называется **аналитической в интервале** $(a; b)$. Аналитическая функция имеет производные всех порядков. Разложение (11.78) функции $f(x)$ может быть записано в виде ряда Тейлора для этой функции в точке x_0:

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k. \tag{11.79}$$

2. Теорема Коши о существовании и единственности аналитического решения задачи Коши. Задача Коши для линейного уравнения n-го порядка

$$\begin{aligned} &y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x) y = f(x), \\ &y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}, \end{aligned} \tag{11.80}$$

где $y_0, y'_0, \ldots, y_0^{(n-1)}$ — любые заданные числа, при условии, что функции $p_1(x)$, $\ldots, p_n(x)$, $f(x)$ аналитичны в точке x_0, имеет единственное решение, аналитическое в точке x_0, причем ряд

$$\begin{aligned} y = y_0 + \frac{y'_0}{1!}(x - x_0) + \frac{y''_0}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{y_0^{(n-1)}}{(n-1)!}(x - x_0)^{(n-1)} + \\ + a_n (x - x_0)^n + a_{n+1}(x - x_0)^{n+1} + \ldots, \end{aligned} \tag{11.81}$$

представляющий это решение, сходится в том же промежутке, в котором сходятся ряды, представляющие $p_1(x), \ldots, p_n(x)$, $f(x)$. Коэффициенты a_n ряда (11.81) могут быть найдены методом неопределенных коэффициентов, либо методом последовательного дифференцирования уравнения. Для этого следует вычислить производные $y', \ldots, y^{(n)}$ почленным дифференцированием ряда (11.81) и подставить затем полученные ряды, а также ряды, представляющие функции $p_1, \ldots, p_n$, f в окрестности точки x_0, в дифференциальное уравнение (11.80). Приравнивая в полученном равенстве коэффициенты при одинаковых степенях $(x - x_0)$, получим уравнения для нахождения a_n. Сходимость полученного ряда (11.81) обеспечивается выполнением условий теоремы Коши.

Пример 68. Найдем аналитическое решение задачи Коши

$$y'' + \frac{x}{1-x}y = \ln(1+x); \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1. \tag{1}$$

Решение. В этом уравнении

$$\frac{x}{1-x} = x(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots) \quad (-1 < x < 1),$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots \quad (-1 < x \leqslant 1).$$

а) **Метод неопределенных коэффициентов.** Решение ищем в виде ряда ($x_0 = 0$)

$$y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 + a_5x^5 + \ldots, \tag{2}$$

сходящегося в интервале $-1 < x < 1$. Производные y' и y'' равны

$$y' = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3 + 5a_5x^4 + \ldots,$$

$$y'' = 2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + 5\cdot 4a_5x^3 + \ldots\,.$$

При помощи начальных условий найдем $a_0 = 1$, $a_1 = -1$. Подставляя все ряды в уравнение (1), получим

$$(2a_2 + 3\cdot 2a_3x + 4\cdot 3a_4x^2 + 5\cdot 4a_5x^3 + \ldots) +$$

$$+ x(1 + x + x^2 + x^3 + \ldots)(1 - x + a_2x^2 + a_3x^3 + \ldots) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots\,.$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в обеих частях предыдущего равенства, получим систему уравнений

$$\begin{array}{c|l} x^0 & 2a_2 = 0, \\ x^1 & 3\cdot 2a_3 + 1 = 1, \\ x^2 & 4\cdot 3a_4 = -\dfrac{1}{2}, \\ x^3 & 5\cdot 4a_5 + a_2 = \dfrac{1}{3}, \\ \vdots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\,, \end{array}$$

из которой получим:

$$a_2 = 0, \quad a_3 = 0, \quad a_4 = -\frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}, \quad a_5 = \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}, \quad a_6 = -\frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}, \quad \ldots\,.$$

Искомое решение:

$$y = 1 - x - \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4}x^4 + \frac{1}{3\cdot 4\cdot 5}x^5 - \frac{1}{4\cdot 5\cdot 6}x^6 + \ldots .$$

б) Метод последовательного дифференцирования уравнения. Коэффициенты ряда (2), начиная с a_2, находим по формуле (см. (11.79))

$$a_k = \frac{1}{k!}y^{(k)}(0) \quad (k = 2, 3, \ldots),$$

в которой производные находятся последовательным дифференцированием уравнения (1). Из (1) при $x = 0$ с учетом начальных условий следует $y''(0) = 0$, т. е. $a_2 = 0$. Дифференцируя (1) и подставляя $y = 1$, $y' = -1$ при $x = 0$, получим $y'''(0) = 0$ ($a_3 = 0$). Аналогично, $y^{(4)}(0) = -1$, $y^{(5)}(0) = 1\cdot 2$, $y^{(6)}(0) = -1\cdot 2\cdot 3$, … . Таким образом, для решения получается тот же результат. ▷

3. Интегрирование линейных однородных уравнений второго порядка. Рассмотрим уравнение второго порядка

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0, \tag{11.82}$$

где $p(x)$, $q(x)$ аналитичны в точке x_0. Пусть требуется найти фундаментальную систему решений $y_1(x)$ и $y_2(x)$ (см. 11.1.4.1) уравнения (11.82), аналитических в точке x_0. Обычно эти решения выбираются так, что они удовлетворяют начальным условиям

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= 1, \quad y_1'(x_0) = 0,\\ y_2(x_0) &= 0, \quad y_2'(x_0) = 1. \end{aligned} \tag{11.83}$$

Решения $y_1(x), y_2(x)$ ищутся в виде рядов

$$y_1 = 1 + \sum_{k=2}^{\infty} a_k(x - x_0)^k,$$

$$y_2 = x - x_0 + \sum_{k=2}^{\infty} b_k(x - x_0)^k,$$

сходящихся в той же окрестности точки x_0, что и ряды, представляющие $p(x)$ и $q(x)$. Общее решение уравнения (11.82) записывается в виде

$$y = C_1y_1(x) + C_2y_2(x).$$

Примечание. Если уравнение имеет вид $P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0$, где P_0, P_1, P_2 — полиномы от x, то ряды для $y_1(x)$ и $y_2(x)$ можно подставлять непосредственно в это уравнение.

Пример 69. Найдем фундаментальную систему решений уравнения $y'' + y = 0$, аналитических в точке $x = 0$. Решения, удовлетворяющие начальным условиям (11.83), ищем в виде рядов

$$y_1 = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k, \quad y_2 = x + \sum_{k=1}^{\infty} b_k x^k,$$

имеющих радиус сходимости $R = \infty$. Находя коэффициенты этих рядов, аналогично примеру 68, получим искомую фундаментальную систему решений

$$y_1 = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \cos x, \quad y_2 = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sin x.$$

4. Интегрирование уравнений с помощью обобщенных степенных рядов. Если дифференциальное уравнение имеет вид

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0) p(x) y' + q(x) y = 0, \tag{11.84}$$

где $p(x)$, $q(x)$ аналитичны в точке x_0, то точка x_0 называется **регулярной особой точкой** этого уравнения. При этом коэффициенты уравнения

$$y'' + \frac{p(x)}{x - x_0} y' + \frac{q(x)}{(x - x_0)^2} y = 0$$

неограничены при $x \to x_0$. Решение уравнения (11.84) ищется в виде **обобщенного степенного ряда**

$$y = (x - x_0)^\rho \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \tag{11.85}$$

где ρ — некоторое действительное число, предполагается, что $a_0 \neq 0$. Ряд (11.85) сходится в той же окрестности точки x_0, что и ряды

$$p(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (x - x_0)^k, \quad q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k (x - x_0)^k.$$

Подставляя в (11.84) ряды, представляющие функции p, q, y, y', y'', приводя подобные члены и приравнивая к нулю коэффициенты при различных степенях $(x - x_0)$, получим уравнения для вычисления коэффициентов a_k. Первое из этих уравнений дает **определяющее уравнение** для нахождения ρ:

$$\rho(\rho - 1) + p_0 \rho + q_0 = 0,$$

корни которого обозначим ρ_1, ρ_2.

Здесь возможны три случая.

1) Если $\rho_1 - \rho_2$ не равно целому числу, то по формуле (11.85) можно построить два линейно независимых решения, образующих фундаментальную систему:

$$y_1 = (x - x_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k, \quad y_2 = (x - x_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k.$$

2) Если $\rho_1 - \rho_2$ — натуральное число, то можно построить два линейно независимых решения:

$$y_1 = (x - x_0)^{\rho_1} \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

$$y_2 = by_1 \ln(x - x_0) + (x - x_0)^{\rho_2} \sum_{k=0}^{\infty} b_k (x - x_0)^k,$$

где b — некоторое число. Если $b = 0$, то получается случай 1).

3) Если $\rho_1 = \rho_2$, то решения y_1 и y_2 строятся, как в случае 2).

Уравнение Бесселя

$$x^2 y'' + xy + (x^2 - m^2)y = 0, \tag{11.86}$$

где m — заданное число, имеет регулярную особую точку $x = 0$. Согласно вышеизложенному, находим определяющее уравнение $\rho(\rho - 1) + \rho - m^2 = 0$ и его корни $\rho_1 = m$, $\rho_2 = -m$. Решение уравнения (11.86) ищем в виде $y = x^m(a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots)$. Подставив этот ряд в уравнение и приравнивая к нулю коэффициенты при различных степенях x, начиная с x^{m+1}, найдем значения $a_1, a_2, \ldots$. Полученный ряд, в котором принято, что

$$a_0 = \frac{1}{2^m \Gamma(m+1)},$$

где Γ — гамма-функция, определяет **функцию Бесселя первого рода m-го порядка:**

$$J_m(x) = a_0 x^m \left[1 - \frac{x^2}{2^2(m+1)} + \frac{x^4}{2^4 2!(m+1)(m+2)} - \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^{2n} n!(m+1)(m+2)\cdots(m+n)} + \ldots \right] =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n!\Gamma(n+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m}.$$

Этот ряд сходится по признаку Даламбера при любом x. Здесь $\rho_1 - \rho_2 = 2m$. Следовательно, если m не равно целому числу, то общее решение уравнения (11.86) имеет вид

$$y = C_1 J_m(x) + C_2 J_{-m}(x),$$

где ряд $J_{-m}(x)$ получается из ряда $J_m(x)$ заменой m на $(-m)$. Для целых m выполняется равенство $J_{-m}(x) = (-1)^m J_m(x)$. Если m — натуральное число или нуль, то общее решение уравнения (11.86) равно

$$y = C_1 J_m(x) + C_2 K_m(x),$$

где

$$K_m(x) = b \cdot J_m(x) \ln x + x^{-m} \sum_{k=0}^{\infty} b_k x^k.$$

Для $m = 1/2$ и $m = -1/2$ имеем

$$J_{1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x, \quad J_{-1/2}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

Применяются также **модифицированные функции Бесселя первого рода m-го порядка** чисто мнимого аргумента

$$I_m(x) = i^{-m} J_m(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!\Gamma(n+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n+m},$$

удовлетворяющие дифференциальному уравнению

$$x^2 y'' + xy' - (x^2 + m^2) y = 0.$$

Справедливы **рекуррентные соотношения**:

$$J_{m-1}(x) + J_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} J_m(x),$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^m J_m(x)\right] = x^m J_{m-1}(x),$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^{-m} J_m(x)\right] = -x^{-m} J_{m+1}(x),$$

$$I_{m-1}(x) - I_{m+1}(x) = \frac{2m}{x} I_m(x),$$

$$\frac{d}{dx}\left[x^m I_m(x)\right] = x^m I_{m-1}(x).$$

Уравнением Лежандра для целых неотрицательных n называется уравнение

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dy}{dx}\right] + n(n+1)y \equiv (1-x^2)y'' - 2xy' + n(n+1)y = 0. \quad (11.87)$$

Точки $x = -1$, $x = 1$ являются для него регулярными особыми. Решениями уравнения (11.87) служат **полиномы Лежандра** $P_n(x)$:

$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1),$$

$$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x), \quad P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad \ldots .$$

Полиномы Лежандра могут быть найдены по **формуле Родрига**

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

На отрезке $-1 \leqslant x \leqslant 1$ выполняются неравенства $|P_n(x)| \leqslant 1$. Полином $P_n(x)$ имеет n простых действительных корней, расположенных в интервале $-1 < x < 1$.

Для полиномов Лежандра выполняются равенства

$$(n+1)P_{n+1}(x) - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0;$$

$$\int\limits_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}\delta_{mn};$$

где $\delta_{mn} = 1$ при $m = n$; $\delta_{mn} = 0$ при $m \neq n$.

11.1.5. Линейные системы дифференциальных уравнений

11.1.5.1. Основные понятия

Линейная система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} y_1' &= p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 + \ldots + p_{1n}(x)y_n + f_1(x),\\ y_2' &= p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 + \ldots + p_{2n}(x)y_n + f_2(x),\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ y_n' &= p_{n1}(x)y_1 + p_{n2}(x)y_2 + \ldots + p_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{aligned} \qquad (11.88)$$

называется **однородной (неоднородной)**, если все $f_i(x) \equiv 0$ (хотя бы одно из $f_i(x) \not\equiv 0$).

Существование и единственность решения. Если все $p_{ij}(x)$, $f_i(x)$ непрерывны в некотором интервале $(a; b)$, то существует единственное решение

$$y_1 = y_1(x), \quad \ldots, \quad y_n = y_n(x)$$

системы (11.88), удовлетворяющее начальным условиям

$$y_1(x) = y_{10}, \quad \ldots, \quad y_n(x) = y_{n0} \quad \text{при } x = x_0 \text{ из } (a; b),$$

где $x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0}$ — заданные числа (**начальные данные**). Функции решения $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ непрерывно дифференцируемы в $(a; b)$.

Геометрически решение системы (11.88) изображается интегральной кривой, проходящей через точку $(x_0, y_{10}, \ldots, y_{n0})$ в $(n+1)$-мерном пространстве точек $(x, y_1, \ldots, y_n)$.

Если ввести в рассмотрение матрицы

$$Y(x) \equiv \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{bmatrix}, \quad Y'(x) \equiv \begin{bmatrix} y'_1(x) \\ y'_2(x) \\ \vdots \\ y'_n(x) \end{bmatrix}, \quad F(x) \equiv \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{bmatrix}, \tag{11.89}$$

$$P(x) \equiv [p_{ij}(x)] \equiv \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \hdotsfor{4} \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix},$$

то систему (11.88) можно записать в **матричном виде**

$$Y' = P(x)Y + F(x). \tag{11.90}$$

Примечание. Для записи вектора-столбца $Y(x)$ далее используется также обозначение $Y(x) \equiv \{y_1, \ldots, y_n\}$ (см. 1.3.1.1).

Общее решение $y_i = \varphi_i(x, C_1, \ldots, C_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ системы (11.88) или (11.90) содержит n произвольных постоянных $C_1, \ldots, C_n$, которые могут быть найдены при помощи начальных условий.

Свойства решений однородной системы. Рассмотрим однородную систему

$$Y' = P(x)Y. \tag{11.91}$$

Если $Y_i = \{y_{1i}(x), y_{2i}(x), \ldots, y_{ni}(x)\}$ $(i = 1, 2)$ — два решения-столбца системы (11.91), то $Y = C_1Y_1 + C_2Y_2$, где C_1, C_2 — любые числа, также является решением системы. Решением системы (11.91) будет **линейная комбинация**любого конечного числа решений $Y_i(x)$ этой системы

$$Y = \sum_{i=1}^{m} C_iY_i(x).$$

Решения $Y_1(x), \ldots, Y_m(x)$ системы (11.91) называются **линейно независимыми** в $(a; b)$, если их линейная комбинация удовлетворяет тождеству $Y(x) \equiv 0$ только в случае $C_1 = \ldots = C_m = 0$. Всякая совокупность n линейно независимых решений $Y_i(x)$ $(i = 1, \ldots, n)$ системы (11.91) называется ее **фундаментальной системой решений**. Из фундаментальной системы решений можно составить **фундаментальную матрицу**, столбцами которой являются эти решения Y_i $(i = 1, \ldots, n)$:

$$W(x) \equiv (Y_1, Y_2, \ldots, Y_n) \equiv \begin{bmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) & \ldots & y_{1n}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & \ldots & y_{2n}(x) \\ \hdotsfor{4} \\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & \ldots & y_{nn}(x) \end{bmatrix}.$$

Совокупность n решений системы (11.91) только тогда является фундаментальной системой решений, когда существует точка x_0 из $(a; b)$, в которой **определитель Вронского** $\Delta(x) = \det W(x)$ отличен от нуля, т. е. $\Delta(x_0) \neq 0$. При этом $\Delta(x) \neq 0$ для любого x из $(a; b)$. Однородная система (11.91) с непрерывными коэффициентами $p_{ij}(x)$ всегда имеет фундаментальную систему решений.

Общее решение (вектор-столбец) однородной системы (11.91) имеет вид линейной комбинации векторов-столбцов фундаментальной системы решений

$$Y = C_1Y_1(x) + C_2Y_2(x) + \ldots + C_nY_n(x),$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_n$ — произвольные постоянные, значения которых при заданных начальных условиях находятся из системы

$$\begin{aligned}
y_{10} &= C_1y_{11}(x_0) + C_2y_{12}(x_0) + \ldots + C_ny_{1n}(x_0),\\
y_{20} &= C_1y_{21}(x_0) + C_2y_{22}(x_0) + \ldots + C_ny_{2n}(x_0),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_{n0} &= C_1y_{n1}(x_0) + C_2y_{n2}(x_0) + \ldots + C_ny_{nn}(x_0),
\end{aligned}$$

определитель которой $\Delta(x_0) \neq 0$.

Общее решение системы (11.91) можно записать также в **матричном виде**

$$Y = W(x) \cdot C,$$

где $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ — постоянный вектор-столбец.

Общее решение неоднородной системы (11.90) имеет матричный вид

$$Y = Z(x) \cdot C + \overline{Y}(x),$$

где Y — общее решение-столбец системы (11.90), $Z(x)$ — фундаментальная матрица однородной системы $Z' = P(x)Z$, C — постоянный вектор-столбец, $\overline{Y}(x)$ — частное решение-столбец системы (11.90).

11.1.5.2. Системы с постоянными коэффициентами

Однородные системы. Рассмотрим однородную линейную систему уравнений

$$\begin{aligned}
y_1' &= a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n,\\
y_2' &= a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{2n}y_n,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_1' &= a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \ldots + a_{nn}y_n,
\end{aligned} \qquad (11.92)$$

где a_{ij} — действительные числа. Матричная запись системы (11.92)

$$Y' = A \cdot Y,$$

где $Y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}$ — вектор-столбец неизвестных функций, $A = [a_{ij}]$ — матрица размера $n \times n$ из коэффициентов.

Частное решение системы (11.92) ищется в виде $y_1 = A_1e^{rx}$, $y_2 = A_2e^{rx}$, $\ldots$, $y_n = A_ne^{rx}$, где A_i — некоторые числа, r — число, одинаковое для всех функций, образующих решение. Подставляя это решение в (11.92), получим систему для нахождения чисел A_i

$$\begin{aligned} &(a_{11}-r)A_1 + a_{12}A_2 + \ldots + a_{1n}A_n = 0,\\ &a_{21}A_1 + (a_{22}-r)A_2 + \ldots + a_{2n}A_n = 0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ &a_{n1}A_1 + a_{n2}A_2 + \ldots + (a_{nn}-r)A_n = 0. \end{aligned} \tag{11.93}$$

Эта однородная система имеет ненулевое решение только тогда, когда ее определитель равен нулю, т. е.

$$P(r) \equiv \begin{vmatrix} a_{11}-r & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-r & \ldots & a_{2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}-r \end{vmatrix} = 0.$$

Уравнение $P(r) = 0$ называется **характеристическим уравнением**, а его корни — **характеристическими числами**.

Рассмотрим частные случаи.

1. Если все n характеристических чисел действительные и различные, то, подставляя каждое из них, равное r_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, вместо r в (11.93) и решая полученную систему, найдем какое-либо ненулевое ее решение $A_{1k}, A_{2k}, \ldots, A_{nk}$ (эти числа определяются с точностью до постоянного множителя). Частное решение-столбец, соответствующее значению r_k, имеет вид:

$$Y_k \equiv \{y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{nk}\} = \left\{A_{1k}e^{r_kx}, A_{2k}e^{r_kx}, \ldots, A_{nk}e^{r_kx}\right\}.$$

Из этих n решений-столбцов может быть составлена фундаментальная матрица $W(x) \equiv [y_{ij}]$ системы (11.92):

$$W(x) = (Y_1, \ldots, Y_n) = \begin{bmatrix} A_{11}e^{r_1x} & A_{12}e^{r_2x} & \ldots & A_{1n}e^{r_nx}\\ A_{21}e^{r_1x} & A_{22}e^{r_2x} & \ldots & A_{2n}e^{r_nx}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ A_{n1}e^{r_1x} & A_{n2}e^{r_2x} & \ldots & A_{nn}e^{r_nx} \end{bmatrix}.$$

Общее решение — столбец системы (11.92) имеет вид

$$Y \equiv \{y_1, y_2, \ldots, y_n\} = W(x)\cdot C = C_1Y_1(x) + \ldots + C_nY_n(x),$$

где $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_n\}$ — постоянный столбец; или

$$y_j = C_1A_{j1}e^{r_1x} + C_2A_{j2}e^{r_2x} + \ldots + C_nA_{jn}e^{r_nx} \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

Пример 70. Решим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dy}{dx} = 4y - z, \quad \frac{dz}{dx} = -6y + 3z.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 4-r & -1 \\ -6 & 3-r \end{vmatrix} = r^2 - 7r + 6 = 0,$$

имеющее корни $r_1 = 6$, $r_2 = 1$. При $r_1 = 6$ система (11.93) для нахождения A_1, A_2 принимает вид

$$-2A_1 - A_2 = 0, \quad -6A_1 - 3A_2 = 0$$

и сводится к одному уравнению $2A_1 + A_2 = 0$. Примем, например, $A_1 = 1$, тогда $A_2 = -2$. То есть числу $r_1 = 6$ соответствует частное решение $y_1 = e^{6x}$, $z_1 = -2e^{6x}$. Аналогично для числа $r_2 = 1$ найдем частное решение $y_2 = e^x$, $z_2 = 3e^x$. Запишем фундаментальную матрицу системы

$$\begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{6x} & e^x \\ -2e^{6x} & 3e^x \end{bmatrix}.$$

Общее решение системы находится по одной из двух формул:

$$1)\ \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = C_1 \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + C_2 \begin{bmatrix} y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 y_1 + C_2 y_2 \\ C_1 z_1 + C_2 z_2 \end{bmatrix}, \quad \text{или}$$

$$2)\ \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 e^{6x} + C_2 e^x \\ -2C_1 e^{6x} + 3C_2 e^x \end{bmatrix},$$

т. е. $y = C_1 e^{6x} + C_2 e^x$, $z = -2C_1 e^{6x} + 3C_2 e^x$. ▷

2. Пусть все характеристические числа различные и среди них есть комплексные, которые всегда встречаются комплексно сопряженными парами, например, $r_1 = \alpha + i\beta$, $r_2 = \alpha - i\beta$. Подставив $r_1 = \alpha + i\beta$ вместо r в (11.93) и решая полученную систему аналогично предыдущему, найдем комплексные значения $A_k = a_k + ib_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Частное решение оказывается комплексным и имеющим вид

$$y_1 = (a_1 + ib_1) \exp\{(\alpha + i\beta)x\},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y_n = (a_n + ib_n) \exp\{(\alpha + i\beta)x\},$$

где $\exp\{t\} \equiv e^t$. Действительные и мнимые части в этом решении дают соответственно два линейно независимых действительных частных решения системы (11.92). Сопряженный корень r_2 уже не дает новых линейно независимых решений, т. е. каждой паре r_1, r_2 комплексно сопряженных корней соответствуют только два линейно независимых действительных частных решения. Найдя все линейно независимые частные решения системы, можно записать общее решение системы (аналогично случаю 1).

Пример 71. Рассмотрим систему уравнений

$$\frac{dy}{dx} = -7y + z, \quad \frac{dz}{dx} = -2y - 5z.$$

Характеристическое уравнение $(-7-r)(-5-r)-1\cdot(-2) = r^2+12r+37 = 0$ имеет корни $r_1 = -6+i$, $r_2 = -6-i$. При $r = r_1$ система (11.93) принимает вид $(-1-i)A_1+A_2 = 0$, $-2A_1 + (1-i)A_2 = 0$ и сводится к одному уравнению, полагая в котором $A_1 = 1$, получим $A_2 = 1+i$. Отделяя действительные и мнимые части в комплексном частном решении $y_{1,2}$, $z_{1,2}$:

$$\begin{aligned}
y_{1,2} &= y_1 + iy_2 = \exp\{(-6+i)x\} = e^{-6x}(\cos x + i\sin x),\\
z_{1,2} &= z_1 + iz_2 = (1+i)\exp\{(-6+i)x\} = e^{-6x}(1+i)(\cos x + i\sin x) =\\
&= e^{-6x}\left[(\cos x - \sin x) + i(\sin x + \cos x)\right],
\end{aligned}$$

получим два линейно независимых частных решения (y_1, z_1) и (y_2, z_2):

$$\begin{aligned}
y_1 &= e^{-6x}\cos x, \quad z_1 = e^{-6x}(\cos x - \sin x);\\
y_2 &= e^{-6x}\sin x, \quad z_2 = e^{-6x}(\cos x + \sin x).
\end{aligned}$$

Общее решение исходной системы имеет вид

$$\begin{aligned}
y &= C_1y_1 + C_2y_2 = e^{-6x}(C_1\cos x + C_2\sin x),\\
z &= C_1z_1 + C_2z_2 = e^{-6x}\left[C_1(\cos x - \sin x) + C_2(\cos x + \sin x)\right].
\end{aligned}$$

3. Если среди характеристических чисел имеется число r_1 кратности m, то соответствующее ему решение системы (11.92) ищется в виде

$$y_1 = P_1(x)e^{r_1x}, \quad y_2 = P_2(x)e^{r_1x}, \quad \ldots, \quad y_n = P_n(x)e^{r_1x},$$

где $P_1(x), P_2(x), \ldots, P_n(x)$ — полиномы степени $(m-1)$ с неопределенными коэффициентами, которые путем подстановки этого решения в систему (11.92) выражаются через m произвольных параметров. В частности, эти полиномы могут обратиться в n чисел, из которых только m произвольны, и через них выражаются все остальные. Полагая в полученном решении последовательно один из параметров равным единице, а остальные — нулю, получим совокупность m линейно независимых частных решений. Если число r_1 — действительное, то полученные частные решения действительны.

Если $r_1 = \alpha + i\beta$ — комплексное кратности m, то имеется также характеристическое число $\alpha - i\beta$ кратности m. Найдя m линейно независимых комплексных частных решений, соответствующих числу $r_1 = \alpha + i\beta$ (аналогично случаю кратного действительного корня) и отделяя в них действительные и мнимые части, получим $2m$ линейно независимых частных действительных решений.

В общем случае среди n характеристических чисел имеются простые действительные числа (каждому из них соответствует одно частное действительное решение); пары простых сопряженных комплексных чисел (каждой паре соответствуют два действительных частных решения); действительные

m_1-кратные числа (каждому соответствует m_1 действительных решений); m_2-кратные пары комплексных сопряженных чисел (каждой паре соответствуют $2m_2$ действительных частных решений).

Пример 72. Решим систему уравнений

$$y_1' = 2y_1 + y_2, \quad y_2' = 2y_2 + y_3, \quad y_3' = 2y_3. \tag{1}$$

Решение. Характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-r & 1 & 0 \\ 0 & 2-r & 1 \\ 0 & 0 & 2-r \end{vmatrix} = (2-r)^3 = 0$$

имеет трехкратный ($m = 3$) корень $r_1 = 2$, поэтому решение ищем в виде

$$\begin{aligned} y_1 &= (A_0x^2 + A_1x + A_2)e^{2x}, \\ y_2 &= (B_0x^2 + B_1x + B_2)e^{2x}, \\ y_3 &= (D_0x^2 + D_1x + D_2)e^{2x}. \end{aligned}$$

Подставляя y_1, y_2, y_3 в (1), получим

$$\begin{aligned} 2A_0x + A_1 &= B_0x^2 + B_1x + B_2, \\ 2B_0x + B_1 &= D_0x^2 + D_1x + D_2, \\ 2D_0x + D_1 &= 0. \end{aligned}$$

Отсюда находим $B_0 = 0$, $2A_0 = B_1$, $A_1 = B_2$, $D_0 = 0$, $2B_0 = D_1$, $B_1 = D_2$, $D_1 = 0$, т. е. $B_0 = 0$, $D_0 = 0$, $D_1 = 0$, $B_1 = 2A_0$, $B_2 = A_1$, $D_2 = 2A_0$, где A_0, A_1, A_2 — произвольные параметры. Следовательно,

$$y_1 = (A_0x^2 + A_1x + A_2)e^{2x}, \quad y_2 = (2A_0x + A_1)e^{2x}, \quad y_3 = 2A_0e^{2x}.$$

Три линейно независимых частных решения-столбца, соответствующих трехкратному характеристическому числу $r = 2$ и образующих фундаментальную систему решений, имеют вид

$$\begin{aligned} Y_1 &\equiv \{y_{11}, y_{21}, y_{31}\} = \{x^2e^{2x}, 2xe^{2x}, 2e^{2x}\}, \\ Y_2 &\equiv \{y_{12}, y_{22}, y_{32}\} = \{xe^{2x}, e^{2x}, 0\}, \\ Y_3 &\equiv \{y_{13}, y_{23}, y_{33}\} = \{e^{2x}, 0, 0\}. \end{aligned}$$

Общее решение системы (1):

$$\begin{aligned} Y &\equiv \{y_1, y_2, y_3\} = C_1Y_1 + C_2Y_2 + C_3Y_3, \quad \text{т. е.} \\ y_1 &= C_1y_{11} + C_2y_{12} + C_3y_{13} = C_1x^2e^{2x} + C_2xe^{2x} + C_3e^{2x}, \\ y_2 &= C_1y_{21} + C_2y_{22} + C_3y_{23} = 2C_1xe^{2x} + C_2e^{2x}, \\ y_3 &= C_1y_{31} + C_2y_{32} + C_3y_{33} = 2C_1e^{2x}. \end{aligned}$$

▷

Неоднородные системы. Общее решение-столбец Y неоднородной линейной системы с постоянными коэффициентами

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + f_i(x) \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{11.94}$$

равно сумме какого-либо частного решения-столбца $\overline{Y} = \{\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n\}$ неоднородной системы (11.94) и общего решения-столбца соответствующей однородной системы

$$z_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} z_j \quad (i = 1, \ldots, n):$$

$$Y = \overline{Y} + C_1 Z_1 + \ldots + C_n Z_n,$$

где $Z_1, \ldots, Z_n$ — вектор-столбцы фундаментальных решений однородной системы; $C_1, \ldots, C_n$ — произвольные числа. Для нахождения частного решения $\overline{Y}$ можно воспользоваться **методом вариации произвольных постоянных**, согласно которому постоянные C_i в общем решении-столбце $Z = C_1 Z_1 + \ldots + C_n Z_n$ однородного уравнения заменяются неизвестными функциями $C_i(x)$, т. е. частное решение $\overline{Y}$ системы (11.94) ищется в виде $\overline{Y} = C_1(x) Z_1(x) + \ldots + C_n(x) Z_n(x)$. Подставляя выражение $\overline{Y} = \{\overline{y}_1, \ldots, \overline{y}_n\}$ в (11.94), получим систему дифференциальных уравнений для нахождения функций $C_i(x)$.

Пример 73. Найдем общее решение неоднородной системы

$$\frac{dy_1}{dx} = y_2 + e^x, \quad \frac{dy_2}{dx} = y_1 + 2e^x. \tag{1}$$

Решение. Для соответствующей однородной системы

$$z_1' = z_2, \quad z_2' = z_1 \tag{2}$$

характеристическое уравнение имеет вид $(-r)(-r) - 1 = r^2 - 1 = 0$. Его корни $r_1 = 1$, $r_2 = -1$. Аналогично примеру 70 находим общее решение системы (2):

$$z_1 = C_1 e^x + C_2 e^{-x}, \quad z_2 = C_1 e^x - C_2 e^{-x}.$$

Частное решение $\overline{Y} = \{y_1, y_2\}$ системы (1) ищем в виде

$$\overline{y}_1 = C_1(x) e^x + C_2(x) e^{-x}, \quad \overline{y}_2 = C_1(x) e^x - C_2(x) e^{-x}. \tag{3}$$

Подставляя (3) в (1), получим $C_1'(x) = \dfrac{3}{2}$, $C_2'(x) = -\dfrac{1}{2} e^{2x}$. Интегрируя и полагая постоянные интегрирования равными нулю, получим $C_1(x) = \dfrac{3}{2} x$, $C_2(x) = -\dfrac{1}{4} e^{2x}$. Частное решение системы (1):

$$\overline{y}_1 = \frac{3}{2} x e^x - \frac{1}{4} e^x, \quad \overline{y}_2 = \frac{3}{2} x e^x + \frac{1}{4} e^x.$$

Общее решение системы (1):

$$\begin{aligned} y_1 &= \bar{y}_1 + z_1 = \frac{3}{2}xe^x - \frac{1}{4}e^x + C_1e^x + C_2e^{-x}, \\ y_2 &= \bar{y}_2 + z_2 = \frac{3}{2}xe^x + \frac{1}{4}e^x + C_1e^x - C_2e^{-x}, \end{aligned} \tag{4}$$

где C_1, C_2 — произвольные постоянные.

Если при нахождении $C_1(x), C_2(x)$ постоянные интегрирования не полагать равными нулю, то выражения (3) сразу дадут общее решение (4) системы (1). ▷

11.1.6. Теория устойчивости

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{11.95}$$

где правые части f_i непрерывны по совокупности всех переменных t, x_j и имеют непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным x_j (т. е. удовлетворяют условиям теоремы Пикара существования и единственности решения). Решение системы (11.95), удовлетворяющее начальным условиям $x_i(t_0) = x_{i0}$ $(i = 1, \ldots, n)$, запишем в виде

$$x_i = x_i(t; t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) \equiv x_i(t), \tag{11.96}$$

где x_i — непрерывные функции от t и начальных значений $t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}$ в некоторой области изменения этих величин. Если под аргументом t понимать время, то всякое частное решение (11.96) системы (11.95) можно рассматривать как движение некоторой **изображающей точки** $M(x_1, \ldots, x_n)$ в n-мерном пространстве, начавшей свое движение при $t = t_0$ из положения $M_0(x_{10}, \ldots, x_{n0})$. Далее предполагается, что решение (11.96) существует на бесконечном промежутке $t_0 \leqslant t < +\infty$.

Некоторое решение (движение точки) (11.96), подлежащее исследованию на устойчивость, называется **невозмущенным решением (движением)**. Решение (движение) $x_i = x_i(t; t_0, \bar{x}_{10}, \ldots, \bar{x}_{n0}) \equiv \bar{x}_i(t)$, соответствующее новым начальным условиям $\bar{x}_i(t_0) = \bar{x}_{i0}$ при $t = t_0$, называется **возмущенным решением (движением)**, а числа $(\bar{x}_{i0} - x_{i0})$ — **(начальными) возмущениями**. Изображающая точка $\overline{M}(\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n)$ возмущенного движения начинает свое движение из положения $\overline{M}_0(\bar{x}_{10}, \ldots, \bar{x}_{n0})$ при $t = t_0$.

Невозмущенное решение (движение) (11.96) называется **устойчивым по Ляпунову** (или просто **устойчивым**), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что для $\bar{x}_0$, для которого $|\bar{x}_{i0} - x_{i0}| < \delta(\varepsilon)$ $(i = 1, \ldots, n)$, в промежутке $t_0 \leqslant t < +\infty$ выполняются неравенства

$$\left| x_i(t; t_0, \bar{x}_{10}, \ldots, \bar{x}_{n0}) - x_i(t; t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) \right| < \varepsilon \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Если же для некоторого $\varepsilon > 0$ нельзя найти такого $\delta(\varepsilon)$, то движение (11.96) называется **неустойчивым**.

Геометрический смысл устойчивости состоит в том, что координаты $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$ переменной точки $\overline{M}$ возмущенного движения отклоняются от соответствующих координат $x_1, \ldots, x_n$ точки M невозмущенного движения на величины, не превышающие ε в любой один и тот же для обеих точек момент времени $t \geqslant t_0$, если только возмущения не превышают δ при $t = t_0$.

Невозмущенное движение (11.96) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и, кроме того, существует достаточно малое число $\delta_0 > 0$ такое, что

$$\lim_{t\to\infty} \left|\bar{x}_i(t) - x_i(t)\right| = 0 \quad (i = 1, \ldots, n) \tag{11.97}$$

при условии $|\bar{x}_{i0} - x_{i0}| < \delta_0$ $(i = 1, \ldots, n)$. В этом случае все разности $\bar{x}_i(t) - x_i(t)$ стремятся к нулю при неограниченном возрастании времени, если только возмущения $(\bar{x}_{i0} - x_{i0})$ достаточно малы. Если свойство (11.97) выполняется при любых $\bar{x}_{i0}$ $(i = 1, \ldots, n)$ и движение (11.96) устойчиво, то это движение называется **устойчивым в целом**.

Переходя в системе (11.95) от неизвестных функций x_i к новым неизвестным функциям, называемым **отклонениями**,

$$y_i = x_i - x_i(t; t_0, x_{10}, \ldots, x_{n0}) \equiv x_i - x_i(t),$$

получим систему

$$\frac{dy_i}{dt} = g_i(t, y_1, \ldots, y_n), \tag{11.98}$$

в которой $g_i = f_i\big(t, y_1 + x_1(t), \ldots, y_n + x_n(t)\big) - f_i\big(t, x_1(t), \ldots, x_n(t)\big)$. Начальные условия для системы (11.98) имеют вид: $y_i(t_0) = \bar{x}_{i0} - x_{i0} \equiv y_{i0}$. Если все отклонения равны нулю, т. е. $y_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, то возмущенное движение $\bar{x}_i(t)$ совпадает с невозмущенным $x_i(t)$ для $t \geqslant t_0$. При этом для правых частей (11.98) выполняются равенства $g_i(t; 0, \ldots, 0) = 0$.

В n-мерном пространстве точек $(y_1, \ldots, y_n)$ невозмущенному движению соответствует **неподвижная точка (нулевое решение)** — начало координат, соответствующее нулевым начальным условиям $y_i(t_0) = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$. Таким образом, задача исследования устойчивости движения $x_i(t)$ сводится к изучению устойчивости нулевого решения $y_i = 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ системы (11.98), т. е. необходимо исследовать, будут ли для возмущенного движения $y_i(t)$ выполняться неравенства $|y_i(t)| < \varepsilon$ для всех $t \geqslant t_0$, если при $t = t_0$ выполняются неравенства $|y_{i0}| < \delta(\varepsilon)$. Нулевое решение $y_i = 0$ называется **асимптотически устойчивым**, если оно устойчиво и, кроме того, $\lim\limits_{t\to\infty} y_i(t) = 0$ для достаточно малых y_{i0}.

Пример 74. Уравнение $dy/dt = ky$, где k — постоянная величина (параметр), имеет общее решение $y = C \cdot e^{kt}$. Начальному условию $y(t_0) = y_0 \neq 0$ соответствует частное (возмущенное) решение

$$y = y_0 \cdot e^{k(t-t_0)}.$$

Если $y_0 = 0$, то получим нулевое (невозмущенное) решение $y \equiv 0$ при $t \geqslant t_0$. Исследуем устойчивость нулевого решения для трех возможных случаев.

1) $k = 0$. Отклонение возмущенного решения $y(t) \equiv y_0$ $(y_0 \neq 0)$ от нулевого решения $|y(t) - 0| = |y_0 - 0| = |y_0| < \varepsilon$ при всех $t \geqslant t_0$, если $|y_0| < \delta$, где $\delta = \varepsilon$. В этом случае решение $y \equiv 0$ устойчиво.

2) $k < 0$. Здесь $|y(t)| = \left|y_0 e^{k(t-t_0)}\right| \leqslant |y_0|$ при $t \geqslant t_0$. Если положить $\delta = \varepsilon$, то $|y(t)| < \varepsilon$ при условии $|y_0| < \delta$, т. е. невозмущенное решение $y \equiv 0$ устойчиво и даже асимптотически устойчиво, так как $y(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Решение $y \equiv 0$ также устойчиво в целом.

3) $k > 0$. В этом случае, даже если возмущение y_0 как угодно мало, величина $|y(t)|$ неограниченно увеличивается при $t \to +\infty$, т. е. возмущенное решение будет неограниченно удаляться от невозмущенного, что и означает неустойчивость последнего.

Примечание к примеру 74 Для уравнения $dx/dt = k(x - a)$, где k, a — постоянные, исследование устойчивости решения $x \equiv a$, начальное значение которого $x_0 = a$, сводится к изучению устойчивости решения $y \equiv 0$ уравнения $dy/dt = ky$, которое получается из исходного уравнения, если положить $y = x - a$.

Пример 75. Задача об устойчивости нулевого решения уравнения $dy/dt = y^2$ не может быть поставлена, так как возмущенные решения существуют не при всех $t \geqslant t_0$ (см. пример 19, 2).

Устойчивость решений линейных систем. Пусть система (11.98) линейна и имеет постоянные коэффициенты a_{ij}:

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{11.99}$$

Характеристическое уравнение (см. 11.1.5.2) этой системы имеет вид

$$P(r) = \det(a_{ij} - r\delta_{ij}) = 0.$$

Для нулевого решения (невозмущенного движения) $y_i \equiv 0$ $(i = 1, \ldots, n)$ системы (11.99) справедливы следующие утверждения.

1. Если действительные части всех характеристических чисел (корней характеристического уравнения) отрицательны, то невозмущенное движение асимптотически устойчиво.

2. Если хотя бы одно из характеристических чисел имеет положительную действительную часть, то невозмущенное движение неустойчиво.

3. Если некоторые характеристические числа имеют ненулевые действительные части, а остальные — отрицательные действительные части, то характер устойчивости может быть установлен непосредственно из вида общего решения системы (11.99) (см. 11.1.5.2).

Пример 76. Исследуем устойчивость нулевых решений систем:

$$1)\frac{dx}{dt} = -x, \quad \frac{dy}{dt} = -2y; \qquad 2)\frac{dx}{dt} = x, \quad \frac{dy}{dt} = x - y;$$

$$3)\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -x; \qquad 4)\frac{dx}{dt} = 0; \quad \frac{dy}{dt} = 0.$$

Решение.

1) Характеристическое уравнение $(-1 - r)(-2 - r) = 0$ имеет корни $r_1 = -1$, $r_2 = -2$. Нулевое решение $x \equiv 0$, $y \equiv 0$ асимптотически устойчиво.
2) Характеристическое уравнение $(1 - r)(-1 - r) = 0$ имеет корни $r_1 = -1$, $r_2 = 1$. Нулевое решение неустойчиво.
3) Характеристическое уравнение $r^2 + 1 = 0$ имеет корни $r_1 = -i$, $r_2 = +i$. Дифференцируя первое уравнение системы и подставляя dy/dt из второго, получим уравнение $d^2x/dt^2 + x = 0$. Отсюда и из равенства $y = dx/dt$ находим общее решение системы:

$$x = C_1 \cos t + C_2 \sin t, \quad y = -C_1 \sin t + C_2 \cos t.$$

Видно, что для любых начальных условий $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ возмущенное решение ограничено, что свидетельствует об устойчивости нулевого решения.
4) Характеристическое уравнение $r^2 = 0$ имеет корни $r_1 = r_2 = 0$. Интегрируя по t каждое уравнение системы, получим ее общее решение $x = C_1$, $y = C_2$, которое ограничено для любых начальных условий. Нулевое решение системы устойчиво. ▷

Исследование устойчивости решений нелинейных систем с помощью линейного приближения. Применяя формулу Тейлора для функций нескольких переменных и учитывая, что $g_i(t, 0, \dots, 0) = 0$, нелинейную систему (11.98) можно записать в виде

$$\frac{dy_i}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j + \varphi_i(t, y_1, \dots, y_n) \quad (i = 1, \dots, n), \tag{11.100}$$

где коэффициенты $a_{ij} = \partial g_i / \partial y_j \ (t, 0, \dots, 0)$ в общем случае зависят только от t. В частности, если система (11.98) — **автономная (стационарная)**, т. е. $g_i(y_1, \dots, y_n)$ не зависят явно от t, то все a_{ij} — постоянные, а φ_i не зависят от t. Отбрасывая в (11.100) нелинейные слагаемые φ_i и **предполагая систему автономной**, получим линейную систему вида (11.99), называемую в этом случае **линейным** (или **первым**) **приближением** для нелинейной системы (11.98) или (11.100). Если все корни характеристического уравнения $P(r)$ линейного приближения имеют отрицательные действительные части, то нулевое (невозмущенное) движение нелинейной системы (11.100) (в которой все a_{ij} — постоянные) асимптотически устойчиво независимо от вида нелинейных слагаемых φ_i. Если среди характеристических чисел имеется хотя бы одно с положительной действительной частью, то нулевое решение нелинейной системы неустойчиво независимо от вида φ_i. Если отсутствуют характеристические числа с положительной действительной частью, но имеются чисто мнимые, то необходимо дополнительное исследование на устойчивость с привлечением нелинейных слагаемых φ_i.

Пример 77. Исследуем на устойчивость постоянные (стационарные) решения уравнения

$$\frac{dx}{dt} = x^3 - 4x \equiv f(x). \tag{1}$$

Приравнивая $f(x)$ к нулю, найдем три корня, которым соответствуют стационарные решения дифференциального уравнения: 1) $x \equiv 0$, 2) $x \equiv -2$, 3) $x \equiv 2$. Исследуем их на устойчивость.

1) Отбрасывая в $f(x)$ нелинейное слагаемое, получим линейное приближение $dx/dt = -4x$, для которого характеристическое число $r = -4 < 0$. Следовательно, решение $x \equiv 0$ нелинейного уравнения (1) устойчиво.
2) Раскладывая $f(x)$ в ряд Тейлора $f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \ldots$ в окрестности точки $x_0 = -2$ и удерживая только линейное слагаемое, получим линейное приближение уравнения (1) $dx/dt = 8(x + 2)$, или $dy/dt = 8y$ $(y = x + 2)$, для которого характеристическое число $r = 8 > 0$, т. е. решение $x \equiv -2$ уравнения (1) неустойчиво.
3) Аналогично случаю 2) получим уравнение $dx/dt = 8(x - 2)$, или $dy/dt = 8y$ $(y = x - 2)$, что свидетельствует о неустойчивости решения $x \equiv 2$ (так как $r = 8 > 0$).

11.1.7. Операционный метод решения дифференциальных уравнений

Операционный метод решения задачи Коши для дифференциального уравнения сводит эту задачу, при помощи некоторого интегрального преобразования, к нахождению решения вспомогательного алгебраического уравнения. Обратное преобразование решения этого алгебраического уравнения позволяет найти решение данной задачи Коши.

1. Основные сведения из операционного исчисления. Для интегрирования линейных дифференциальных уравнений обычно используется **интегральное преобразование Лапласа**:

$$\widetilde{f}(p) = \Lambda[f(t)] \equiv \int_0^\infty e^{-pt} f(t)\, dt. \tag{11.101}$$

Здесь $p = \sigma + i\omega$ — комплексное число; $f(t)$ — действительная или комплекснозначная функция действительной переменной t, определенная при $t \geqslant 0$, интегрируемая в $(0; +\infty)$ и удовлетворяющая при всех $t \geqslant 0$ условию $|f(t)| \leqslant Me^{\sigma_0 t}$ (действительные постоянные M, σ_0 удовлетворяют условиям

$M > 0$, $\sigma_0 \geqslant 0$). Наряду с (11.101) используются также записи

$$\widetilde{f}(p) = \Lambda[f(t), p], \qquad \widetilde{f}(p) \doteqdot f(t).$$

Функция $f(t)$ называется при этом **оригиналом**, а функция $\widetilde{f}(p)$ — **изображением** функции $f(t)$. При $\sigma > \sigma_0$ несобственный интеграл (11.101) сходится абсолютно и равномерно и определяет в комплексной полуплоскости $\operatorname{Re} p > \sigma_0$ функцию $\widetilde{f}(p)$, аналитическую в этой полуплоскости и единственную для каждой функции $f(t)$.

Основные свойства преобразования Лапласа. Пусть $\Lambda[f(t)] = \widetilde{f}(p)$, тогда справедливы равенства:

1) $\Lambda\big[C_1 f_1(t) + C_2 f_2(t)\big] = C_1\Lambda[f_1(t)] + C_2\Lambda[f_2(t)]$.
2) $\Lambda[f(at)] = \dfrac{1}{a}\widetilde{f}\left(\dfrac{p}{a}\right)$ $(a > 0)$.
3) $\Lambda[e^{at} f(t)] = \widetilde{f}(p - a)$ (a — любое).
4) $\Lambda[e^{-p_0 t} f(t)] = \widetilde{f}(p - p_0)$ (p_0 — любое).
5) $\Lambda[f(t - t_0)] = e^{-t_0 p}\widetilde{f}(p)$ $(t_0 > 0)$.
6) $\Lambda[t^n f(t)] = (-1)^n \widetilde{f}^{(n)}(p)$ (n — натуральное).
7) $\Lambda[f^{(n)}(t)] = p^n \widetilde{f}(p) - \big[p^{n-1} f(0) + p^{n-2} f'(0) + \ldots + f^{(n-1)}(0)\big]$, в частности,
$\Lambda[f'(t)] = p\widetilde{f}(p) - f(0)$,
$\Lambda[f''(t)] = p^2\widetilde{f}(p) - \big[pf(0) + f'(0)\big]$,
$\Lambda[f'''(t)] = p^3\widetilde{f}(p) - \big[p^2 f(0) + pf'(0) + f''(0)\big]$.
8) $\Lambda\left[\displaystyle\int_0^t f(\tau)\,d\tau\right] = \dfrac{1}{p}\widetilde{f}(p)$.
9) $\Lambda\left[\dfrac{f(t)}{t}\right] = \displaystyle\int_p^\infty \widetilde{f}(q)\,dq$.
10) $\Lambda\left[\displaystyle\int_0^t f_1(\tau)\cdot f_2(t - \tau)\,d\tau\right] = \widetilde{f}_1(p)\cdot\widetilde{f}_2(p)$.

Примечание 1. Предполагается, что все функции $f(t)$, рассматриваемые как оригиналы, равны нулю при $t < 0$. Например, если $f(t) = 1$ при $t \geqslant 0$, то предполагается, что $f(t) = 0$ при $t < 0$.

Примечание 2. Оригинал $f(t)$ определяется однозначно при $t \geqslant 0$ по своему известному изображению $\widetilde{f}(p)$.

Таблица изображений некоторых функций (числа a, b — действительные)

$f(t)$ $(t \geqslant 0)$	$\Lambda[f(t)]$
1	$\dfrac{1}{p}$ $(\operatorname{Re} p > 0)$
t^n (n — натуральное)	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$ $(\operatorname{Re} p > 0)$
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$ $(\operatorname{Re} p > a)$
$t^n e^{at}$ (n — натуральное)	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$ $(\operatorname{Re} p > a)$
$\sin at$	$\dfrac{a}{p^2+a^2}$ $(\operatorname{Re} p > 0)$
$\cos at$	$\dfrac{p}{p^2+a^2}$ $(\operatorname{Re} p > 0)$
$\operatorname{sh} at$	$\dfrac{a}{p^2-a^2}$ $(\operatorname{Re} p > a)$
$\operatorname{ch} at$	$\dfrac{p}{p^2-a^2}$ $(\operatorname{Re} p > a)$
$e^{at}\sin bt$	$\dfrac{b}{(p-a)^2+b^2}$ $(\operatorname{Re} p > a)$
$e^{at}\cos bt$	$\dfrac{p-a}{(p-a)^2+b^2}$ $(\operatorname{Re} p > a)$
$t\sin at$	$\dfrac{2ap}{(p^2+a^2)^2}$ $(\operatorname{Re} p > 0)$
$t\cos at$	$\dfrac{p^2-a^2}{(p^2+a^2)^2}$ $(\operatorname{Re} p > 0)$

Пример 78. Вычислим изображение $\Lambda\left[\dfrac{1}{a^2}(e^{-at}+at-1)\right] \equiv \tilde{f}(p)$.

Решение. Используя свойства преобразования Лапласа и таблицу изображений, получим

$$\tilde{f}(p) = \frac{1}{a^2}\left[\Lambda(e^{-at}) + a\Lambda(t) - \Lambda(1)\right] = \frac{1}{a^2}\left[\frac{1}{p+a} + \frac{a}{p^2} - \frac{1}{p}\right] = \frac{1}{p^2(p+a)}. \qquad \triangleright$$

2. Применение операционного метода к решению дифференциальных уравнений. Пусть требуется найти частное решение $x = x(t)$ линейного уравнения с постоянными коэффициентами

$$L(x) \equiv x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}x' + a_n x = f(t),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0, \quad \ldots, \quad x^{(n-1)}(0) = x_0^{(n-1)}.$$

Применяя к обеим частям этого уравнения преобразование Лапласа и обозначая изображения функций $x(t)$ и $f(t)$ через $\widetilde{x}(p) = \Lambda[x(t)]$ и $\widetilde{f}(p) = \Lambda[f(t)]$ (предполагается, что эти изображения существуют), приведем дифференциальное уравнение к **вспомогательному (операторному) уравнению**

$$\varphi(p)\,\widetilde{x}(p) - \psi(p) = \widetilde{f}(p),$$

где

$$\varphi(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + \ldots + a_{n-1}p + a_n;$$
$$\psi(p) = \left[p^{n-1}x_0 + p^{n-2}x'_0 + \ldots + x_0^{(n-1)}\right] +$$
$$+ a_1\left[p^{n-2}x_0 + p^{n-3}x'_0 + \ldots + x_0^{(n-2)}\right] + \ldots + a_{n-2}\left[px_0 + x'_0\right] + a_{n-1}x_0.$$

В частности, при нулевых начальных условиях получается $\psi(p) \equiv 0$. Из операторного уравнения находим изображение искомого решения $x(t)$:

$$\widetilde{x}(p) = \Lambda[x(t)] = \frac{\widetilde{f}(p) + \psi(p)}{\varphi(p)}.$$

Находя по этому изображению оригинал, получим искомое частное решение $x(t)$.

Пример 79. Решим задачу Коши

$$x''' - 2x'' + x' = e^{-t}; \quad x(0) = 0, \quad x'(0) = 1, \quad x''(0) = 1.$$

<u>*Решение*</u>. Здесь

$$\psi(p) = (p^2x_0 + px'_0 + x''_0) + a_1(px_0 + x'_0) + a_2x_0 = p - 1;$$
$$\varphi(p) = p^3 + a_1p^2 + a_2p + a_3 = p^3 - 2p^2 + p; \quad \Lambda(e^{-t}) = \frac{1}{p+1}.$$

Операторное уравнение имеет вид

$$(p^3 - 2p^2 + p)\,\widetilde{x}(p) - (p-1) = \frac{1}{p+1},$$

откуда

$$\widetilde{x}(p) = \frac{p}{(p+1)(p-1)^2}.$$

Раскладывая правую часть этого равенства на простейшие (элементарные) дроби, найдем

$$\widetilde{x}(p) = -\frac{1}{4(p+1)} + \frac{1}{4(p-1)} + \frac{1}{2(p-1)^2}.$$

Переходя здесь к оригиналам по таблице изображений, получим решение задачи Коши

$$x(t) = -\frac{1}{4}e^{-t} + \frac{1}{4}e^{t} + \frac{1}{2}te^{t}. \qquad \triangleright$$

3. Применение операционного метода к решению систем дифференциальных уравнений. Пусть требуется найти частное решение $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ системы линейных уравнений с постоянными коэффициентами

$$x_1' = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j + f_1(t),$$

$$x_2' = \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j + f_2(t),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$x_n' = \sum_{j=1}^{n} a_{nj}x_j + f_n(t),$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$x_1(0) = x_{10}, \quad \ldots, \quad x_n(0) = x_{n0}.$$

Применяя к уравнениям этой системы преобразование Лапласа и обозначая

$$\Lambda[x_i(t)] = \widetilde{x}_i(p), \quad \Lambda[f_i(t)] = \widetilde{f}_i(p),$$

получим систему операторных уравнений

$$p\,\widetilde{x}_i(p) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\widetilde{x}_j(p) + \widetilde{f}_i(p) + x_{i0} \quad (i = 1, \ldots, n).$$

Решая эту систему линейных алгебраических уравнений относительно изображений $\widetilde{x}_i(p)$ и переходя затем к оригиналам, получим искомое частное решение $x_i(t)$ $(i = 1, \ldots, n)$. Операционный метод позволяет также найти и общее решение системы дифференциальных уравнений.

Пример 80. Найдем:

а) общее решение системы $x' = x + y - 1$, $y' = -2x + 4y + 6t$;

б) частное решение при начальных условиях $x(0) = 1$, $y(0) = 1$.

Решение. а) Для нахождения общего решения начальные условия запишем в общем виде $x(0) = C_1$, $y(0) = C_2$. Запишем операторную систему

$$p\,\widetilde{x}(p) = \widetilde{x}(p) + \widetilde{y}(p) - \frac{1}{p} + C_1,$$

$$p\,\widetilde{y}(p) = -2\widetilde{x}(p) + 4\widetilde{y}(p) + \frac{6}{p^2} + C_2.$$

Отсюда, например, по формулам Крамера, находим

$$\widetilde{x}(p) = \frac{C_1p^3 - (4C_1 - C_2 + 1)p^2 + 4p + 6}{p^2(p^2 - 5p + 6)},$$

$$\widetilde{y}(p) = \frac{C_2p^3 - (2C_1 + C_2)p^2 + 8p - 6}{p^2(p^2 - 5p + 6)}.$$

Раскладывая дроби на элементарные, получим

$$\widetilde{x}(p) = \frac{3}{2p} + \frac{1}{p^2} + \frac{2C_1 - C_2 - \frac{5}{2}}{p - 2} + \frac{C_2 - C_1 + 1}{p - 3},$$

$$\widetilde{y}(p) = \frac{1}{2p} - \frac{1}{p^2} + \frac{2C_1 - 3C_2 - \frac{5}{2}}{p - 2} + \frac{4C_2 - 2C_1 + 2}{p - 3}.$$

Переходя к оригиналам, найдем общее решение

$$x(t) = \frac{3}{2} + t + \left(2C_1 - C_2 - \frac{5}{2}\right)e^{2t} + (C_2 - C_1 + 1)e^{3t},$$

$$y(t) = \frac{1}{2} - t + \left(2C_1 - 3C_2 - \frac{5}{2}\right)e^{2t} + (4C_2 - 2C_1 + 2)e^{3t}.$$

б) Частное решение:

$$x(t) = \frac{3}{2} + t - \frac{3}{2}e^{2t} + e^{3t}; \quad y(t) = \frac{1}{2} - t - \frac{7}{2}e^{2t} + 4e^{3t}.$$ ▷

11.2. Дифференциальные уравнения с частными производными

11.2.1. Основные понятия и определения

Обозначим через D некоторую область n-мерного действительного евклидова пространства E_n точек с декартовыми прямоугольными координатами $x_1, \ldots, x_n$. **Дифференциальным уравнением с частными производными** называется функциональное уравнение вида

$$F\left(x_1, \ldots, x_n; u; \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2}, \ldots\right) = 0, \qquad (11.102)$$

связывающее две или более независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$, являющихся координатами точек из области D, неизвестную функцию $u(x_1, \ldots, x_n)$ и хотя бы одну ее частную производную. Порядок старшей производной неизвестной функции, входящей в уравнение, называется **порядком** этого уравнения. **Решением** (**интегралом**) уравнения называется функция $u(x_1, \ldots, x_n)$, удовлетворяющая этому уравнению, т. е. обращающая его в тождество в области D.

Пример 81. Функция $u = x^2 - y^2$ является решением уравнения

$$y\frac{\partial u}{\partial x} + x\frac{\partial u}{\partial y} = 0$$

на всей плоскости Oxy. Решением будет также любая функция $f(x^2 - y^2)$, имеющая производные.

Общее решение (**общий интеграл**) уравнения с частными производными является семейством решений, содержащим, в общем случае, произвольные функции, число которых обычно равно порядку дифференциального уравнения, а не только произвольные постоянные. **Частные решения** (**интегралы**) выделяются из общего решения путем задания соответствующих дополнительных условий, налагаемых на искомую функцию $u(x_1, \ldots, x_n)$ или на эту функцию и ее частные производные на некотором множестве точек пространства E_n (**краевые условия**). **Особыми решениями** уравнения называются такие дополнительные его решения, которые не могут быть получены из общего ни при каком выборе произвольных функций. Дифференциальное уравнение совместно с краевыми условиями образует **краевую задачу**.

Краевая задача называется **корректно поставленной задачей** (или **корректной задачей**), если выполнены следующие условия:

1) решение задачи существует при любых допустимых, не противоречащих друг другу исходных данных задачи;
2) решение единственно для каждого набора исходных данных, достаточных для однозначного выделения этого решения;
3) решение непрерывно зависит от исходных данных, т. е. оно устойчиво (при этом достаточно малые изменения исходных данных приводят к малому же, в каком-либо определенном смысле, изменению решения).

Задачи, не удовлетворяющие хотя бы одному из этих условий, называются **некорректными**. Обычно, хотя и не всегда, рассматриваются только корректные задачи.

Дифференциальное уравнение называется **линейным**, если функция F в (11.102) линейно (т. е. в первой степени) зависит от неизвестной функции и всех ее частных производных. Линейные уравнения второго порядка называются также **уравнениями математической физики** и имеют общий вид

$$L(u) \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i\frac{\partial u}{\partial x_i} + c \cdot u = f, \tag{11.103}$$

где коэффициенты a_{ij}, b_i, c, а также f, — заданные функции только независимых переменных $x_1, \ldots, x_n$. В частности, коэффициенты могут быть постоянными. Линейное уравнение $L(u) = f(x_1, \ldots, x_n)$ называется линейным **неоднородным (однородным)**, если $f \not\equiv 0$ ($f \equiv 0$). Каждая линейная комбинация $C_1u_1 + \ldots + C_nu_n$ решений линейного однородного уравнения $L(u) = 0$ также является его решением. Всякое решение u линейного неоднородного уравнения $L(u) = f$ (если оно существует) представляется в виде суммы частного решения u_0 этого уравнения и общего решения $\widetilde{u}$ соответствующего однородного уравнения $L(u) = 0$, т. е. $u = u_0 + \widetilde{u}$.

Квазилинейным уравнением второго порядка называется уравнение, линейное относительно старших (вторых) производных неизвестной функции

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \Phi\left(x_1, \ldots, x_n; u; \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0, \qquad (11.104)$$

где коэффициенты a_{ij} являются заданными функциями от тех же аргументов, что и функция Φ.

Система уравнений с частными производными

$$F_i\left(x_1, \ldots, x_n; u, v, \ldots; \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots\right) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где $u(x_1, \ldots, x_n)$, $v(x_1, \ldots, x_n)$, ... — неизвестные функции, может иметь решение $u, v, \ldots$ только при выполнении определенных условий совместности, налагаемых на заданные функции F_i и их производные. Эти условия находятся исключением функций $u, v, \ldots$ и их производных из соотношений, полученных дифференцированием по $x_1, \ldots, x_n$ уравнений данной системы.

Пример 82. Для нахождения условия совместности системы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, y) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} + g(x, y) = 0,$$

продифференцируем первое уравнение по y, а второе — два раза по x. Приравнивая смешанные производные от u, найдем искомое условие

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}.$$

Любое уравнение или систему уравнений в частных производных можно привести к системе дифференциальных уравнений первого порядка, рассматривая некоторые частные производные как новые неизвестные функции.

Решение уравнений с частными производными **методом разделения переменных** состоит в том, что во многих случаях попытка искать решение в виде

$$u = u(x_1, \ldots, x_n) = u_1(x_1) \cdot u_0(x_2, \ldots, x_n)$$

дает возможность записать уравнение (11.102) в **разделенной форме**

$$F_1\left(x_1, u_1, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2}, \ldots\right) = F_0\left(x_2, \ldots, x_n; u_0; \frac{\partial u_0}{\partial x_2}, \frac{\partial u_0}{\partial x_3}, \ldots\right).$$

Неизвестные функции u_1, u_0 должны по отдельности удовлетворять уравнениям

$$F_1\left(x_1, u_1, \frac{du_1}{dx_1}, \frac{d^2 u_1}{dx_1^2}, \ldots\right) = C, \qquad F_0\left(x_2, \ldots, x_n; u_0; \frac{\partial u_0}{\partial x_2}, \frac{\partial u_0}{\partial x_3}, \ldots\right) = C,$$

где C — произвольная постоянная (**постоянная разделения**), которая находится при помощи заданных дополнительных (краевых и других) условий. В результате исходное уравнение (11.102) распадается на обыкновенное дифференциальное уравнение для функции $u_1(x_1)$ и уравнение с частными производными для функции $u_0(x_2, \ldots, x_n)$, которое имеет на одну независимую переменную меньше. К уравнению для u_0 можно попытаться повторно применить метод разделения переменных и т. д.

Существование и единственность решения дифференциального уравнения или системы уравнений с частными производными устанавливается отдельно в каждом случае, даже при выполнении условий совместности.

11.2.2. Уравнения с частными производными первого порядка

Дифференциальное уравнение с частными производными первого порядка имеет общий вид

$$F\left(x_1, \ldots, x_n; z; \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}\right) = 0,$$

где F — заданная функция от указанных аргументов, $x_1, \ldots, x_n$ — независимые переменные, $z(x_1, \ldots, x_n)$ — неизвестная функция. Частными случаями предыдущего уравнения являются **линейное однородное уравнение**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial z}{\partial x_i} = 0$$

и **квазилинейное уравнение**

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n; z) \frac{\partial z}{\partial x_i} = c\,(x_1, \ldots, x_n; z),$$

где a_i, c — заданные функции указанных аргументов.

11.2.2.1. Линейные однородные уравнения первого порядка

Рассмотрим линейное однородное уравнение с двумя независимыми переменными

$$a(x,y)\frac{\partial z}{\partial x}+b(x,y)\frac{\partial z}{\partial y}=0 \quad (a^2+b^2\neq 0), \tag{11.105}$$

где заданные функции $a(x,y)$, $b(x,y)$ имеют непрерывные частные производные в некоторой области D на плоскости Oxy. Предполагается, что решение $z(x,y)$ уравнения имеет непрерывные частные производные первого порядка. **Геометрически** решение $z=z(x,y)$ уравнения (11.105) представляет собой поверхность (**интегральную поверхность**) в пространстве $Oxyz$. Равенство (11.105) означает, что производная от $z(x,y)$ по направлению вектора $(a;b)$ на плоскости Oxy равна нулю. Кривая на плоскости Oxy, в каждой точке которой касательная к ней коллинеарна направлению вектора $(a;b)$ в этой же точке, называется **характеристикой** линейного уравнения (11.105). Характеристики являются интегральными кривыми обыкновенного дифференциального уравнения

$$\frac{dx}{a(x,y)}=\frac{dy}{b(x,y)}.$$

Параметрическое представление $x=x(s)$, $y=y(s)$ характеристики находится из системы уравнений

$$\frac{dx}{ds}=a(x,y), \quad \frac{dy}{ds}=b(x,y).$$

Через каждую точку в D проходит единственная характеристика. Если $z(x,y)$ — решение уравнения (11.105), то на каждой характеристике $x=x(s)$, $y=y(s)$ функция $z(x,y)$ сохраняет постоянное значение, так как

$$\frac{dz}{ds}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{ds}=a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=0, \quad \text{т. е.} \quad z(x,y)=C,$$

где постоянная C имеет разные значения на разных характеристиках. Характеристики являются линиями уровня интегральной поверхности.

Пусть γ — заданная кривая на плоскости Oxy, не совпадающая с характеристикой. Обозначим через τ длину дуги кривой γ, отсчитываемую с соответствующим знаком от некоторой точки на этой кривой. Характеристики образуют однопараметрическое семейство, для которого параметром является, например, значение τ, соответствующее точке A пересечения характеристики $\Gamma(\tau)$, проходящей через точку $M(x,y)$, с кривой γ (рис. 11.13). Точке $M(x,y)$ взаимно однозначно соответствует пара чисел (τ,s), где значение τ определяет положение точки A и характеристику, а s — положение точки M на характеристике, т. е. $x=x(\tau,s)$, $y=y(\tau,s)$, или $\tau=T(x,y)$, $s=S(x,y)$. Уравнение характеристики в переменных (τ,s) имеет вид $\tau=C_1=\text{const}$,

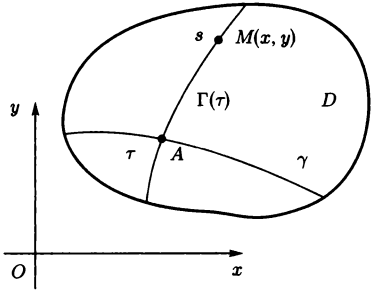


Рис. 11.13

т. е. на характеристике выполняется $T(x, y) = C_1$, являющееся уравнением характеристики в переменных (x, y).

Общее решение уравнения (11.105) имеет вид $z(x, y) = F(T(x, y))$, где F — произвольная дифференцируемая функция от какой-либо функции $T(x, y)$, постоянной вдоль характеристик этого уравнения, т. е.

$$\frac{dT(x,y)}{ds} = \frac{\partial T}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial T}{\partial y}\frac{dy}{ds} = 0$$

на каждой характеристике.

Пример 83. Для уравнения в примере 81 дифференциальное уравнение характеристик имеет вид $dx/y = dy/x$, интегральные кривые которого $T(x, y) \equiv x^2 - y^2 = C_1 = \text{const}$ являются характеристиками, заполняющими всю плоскость Oxy. Общее решение уравнения с частными производными (пример 81): $u(x, y) = f(x^2 - y^2)$, где f — произвольная дифференцируемая функция. Вдоль каждой характеристики $f(x^2 - y^2) = C$, где постоянная C зависит от постоянной C_1, различной на разных характеристиках.

Пример 84. Для уравнения $a\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$ ($u = u(x, y)$, $a = \text{const}$), где t — время, дифференциальное уравнение характеристик: $dx/dt = a$. Характеристиками являются прямые $\varphi(x, t) \equiv x - at = C_1 = \text{const}$ на плоскости Oxt. Общее решение: $u(x, t) = f(x - at)$, где f — любая дифференцируемая функция. Вдоль характеристик выполняются равенства $u(x, t) = f(C_1) = C = \text{const}$. Полученное решение $u(x, t)$ называется **бегущей волной,** движущейся вдоль оси Ox слева направо со скоростью a без изменения своей формы $f(x)$ на плоскости Oxu.

Начальная задача (задача Коши). Пусть требуется найти частное решение $z(x, y)$ уравнения (11.105), удовлетворяющее **начальному условию**

$$z(x, y)\big|_{\gamma} = z(\bar{x}(\lambda), \bar{y}(\lambda)) = v(\lambda),$$

где $v(\lambda)$ — заданная функция на кривой γ, имеющей параметрическое представление $x = \bar{x}(\lambda)$, $y = \bar{y}(\lambda)$ и не совпадающей с характеристиками на какой-либо своей дуге. Задача Коши решается следующим образом. Для функции $\varphi(x, y)$, постоянной на характеристике, вдоль кривой γ имеем

$$\eta = \varphi(x, y)\big|_{\gamma} = \varphi(\bar{x}(\lambda)), \quad \bar{y}(\lambda) = \Phi(\lambda).$$

Отсюда $\lambda = \Lambda(\eta)$. Вдоль характеристики справедливо

$$v(\lambda) = v[\Lambda(\eta)] = v\big[\Lambda(\varphi(x, y))\big].$$

Искомое частное решение уравнения (11.105) в области D имеет вид

$$z(x, y) = v\big[\Lambda(\varphi(x, y))\big].$$

Это решение содержится в общем решении и удовлетворяет начальному условию.

Геометрически частному решению $z(x, y)$ соответствует интегральная поверхность $z = z(x, y)$, проходящая через пространственную кривую $\bar{\gamma}$ с параметрическим уравнением $x = \bar{x}(\lambda)$, $y = \bar{y}(\lambda)$, $z = v(\lambda)$, проекцией которой на плоскость Oxy является кривая γ $[x = \bar{x}(\lambda), y = \bar{y}(\lambda)]$. Через каждую точку на γ, соответствующую значению λ, проходит единственная характеристика, являющаяся линией уровня для поверхности $z = z(x, y)$, т. е. $z = v(\lambda) = \mathrm{const}$ вдоль характеристики. Поверхность $z = z(x, y)$ образована пространственными кривыми $x = x(s)$, $y = y(s)$, $z = v(\lambda) = \mathrm{const}$, проекциями которых на плоскость Oxy являются характеристики $x = x(s)$, $y = y(s)$, соответствующие значениям λ.

Пример 85. Найдем решение $u(x, t)$ задачи Коши для уравнения в примере 84 с начальным условием $u(x, 0) = v(x)$. Линией γ здесь является прямая $t = 0$ на плоскости Oxt, а в качестве параметра λ возьмем x. На линии γ имеем $\varphi = \varphi(x, t) = x$ (см. решение примера 84). Вдоль характеристики справедливо $v(x) = v(\varphi) = v(x - at)$. Искомое решение $u(x, t) = v(x - at)$ является бегущей волной, форма $v(x)$ которой задана в начальный момент времени $t = 0$.

Примечание. Если γ совпадает с какой-либо характеристикой, то возможны следующие случаи.

1) $z(x, y) = \mathrm{const}$ на γ. Решений в этом случае может быть бесконечное множество.
2) $z(x, y) \neq \mathrm{const}$ на γ. Задача Коши при этом не имеет решения.

Линейное однородное уравнение общего вида

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n)\frac{\partial z}{\partial x_i} = 0 \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0\right), \tag{11.106}$$

где функции a_i имеют непрерывные первые частные производные в некоторой области D пространства E_n, рассматривается аналогично случаю двух независимых переменных.

Уравнению (11.106) можно поставить в соответствие два вида систем обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_1}{a_1(x_1, \ldots, x_n)} = \frac{dx_2}{a_2(x_1, \ldots, x_n)} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n(x_1, \ldots, x_n)} \tag{11.107}$$

или

$$\frac{dx_i}{ds} = a_i(x_1, \ldots, x_n) \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{11.108}$$

Интегральные кривые системы (11.107) или (11.108) в области D называются **характеристиками** уравнения (11.106). Решение системы (11.108) дает параметрическое представление $x_i = x_i(s)$ $(i = 1, \ldots, n)$ характеристик. Через каждую точку в D проходит одна и только одна характеристика. Решение $z(x_1, \ldots, x_n)$ уравнения (11.106) остается постоянным вдоль характеристики, так как

$$\frac{dz}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_i}\frac{dx_i}{ds} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial z}{\partial x_i} a_i = 0.$$

Область D заполнена семейством характеристик, зависящим от $(n-1)$ параметров $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$. Каждой точке $M(x_1, \ldots, x_n)$ из D взаимно однозначно соответствует упорядоченная совокупность чисел $(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}, s)$, т. е. $\tau_i = T_i(x_1, \ldots, x_n)$, $s = S(x_1, \ldots, x_n)$. Совокупность чисел $(\tau_1, \ldots, \tau_{n-1})$ выделяет характеристику из их семейства, а значение s определяет положение точки M на выделенной характеристике. **Общее решение** уравнения (11.106) имеет вид

$$z = F\bigl(T_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, T_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)\bigr),$$

где F — произвольная дифференцируемая функция, T_i — какие-либо функции, постоянные вдоль характеристик. **Первым интегралом** системы (11.107) называется функция $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$, обращающаяся в постоянную вдоль интегральных кривых этой системы, т. е.

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial \varphi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds} + \ldots + \frac{\partial \varphi}{\partial x_n}\frac{dx_n}{ds} = 0,$$

где $x_i = x_i(s)$ — решение системы в параметрической форме. Первым интегралом при этом будет также любая функция $F(\varphi)$.

Примечание. Иногда первым интегралом называется не функция φ, а равенство $\varphi = \mathrm{const}$, связывающее компоненты любого ее частного решения.

Всякий первый интеграл системы (11.107) является решением уравнения (11.106), и, обратно, всякое решение уравнения (11.106) является первым интегралом системы (11.107).

Общее решение $z(x_1, \ldots, x_n)$ уравнения (11.106) может быть получено по формуле

$$z(x_1, \ldots, x_n) = F\bigl(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)\bigr),$$

где F — произвольная дифференцируемая функция от аргументов $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$; $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$ — независимые первые интегралы системы (11.107), т. е. такие, что в области D якобиан

$$\frac{\partial(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1})}{\partial(x_1, \ldots, x_{n-1})} \neq 0.$$

Пример 86. Найти первые интегралы следующих систем уравнений.

$$1)\ \frac{dx_1}{dx_3} = x_1 + x_2, \quad \frac{dx_2}{dx_3} = -x_1 + x_2.$$

Решение. Умножая первое и второе уравнение системы соответственно на x_1 и x_2 и складывая их, получим

$$\frac{d(x_1^2 + x_2^2)}{x_1^2 + x_2^2} = 2\,dx_3.$$

Отсюда $x_1^2 + x_2^2 = Ce^{2x_3}$. Первый интеграл системы имеет вид

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2)e^{-2x_3},$$

так как вдоль любой интегральной кривой системы $\varphi(x_1, x_2, x_3) = C$.

Исходную систему можно записать также в виде

$$\frac{dx_1}{ds} = x_1 + x_2, \quad \frac{dx_2}{ds} = -x_1 + x_2, \quad \frac{dx_3}{ds} = 1,$$

где s — параметр. Тогда вдоль интегральной кривой

$$\frac{d\varphi}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}\frac{dx_1}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}\frac{dx_2}{ds} + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}\frac{dx_3}{ds} = 0. \qquad \triangleright$$

$$2)\ \frac{dx_1}{dx_3} = x_2, \quad \frac{dx_2}{dx_3} = -x_1.$$

Решение. Аналогично предыдущему получим

$$\frac{d}{dx_3}(x_1^2 + x_2^2) = 0.$$

Отсюда находим первый интеграл $\varphi(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2$. ▷

Задача Коши для уравнения (11.106) заключается в нахождении частного решения $z(x_1, \ldots, x_n)$ этого уравнения, удовлетворяющего **начальному условию**

$$z(x_1, \ldots, x_n)\big|_G = v(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$$

на $(n-1)$-мерном **многообразии** (множестве точек) G, содержащемся в области D и имеющем параметрическое представление $x_i = \overline{x}_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})$ $(i = 1, \ldots, n)$; v — функция, заданная на многообразии. Если $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n)$

$(i = 1, \ldots, n-1)$ — первые интегралы системы (11.107), то на многообразии G будем иметь

$$\eta_i = \varphi_i(x_1, \ldots, x_n)\big|_G = \varphi_i\big(\bar{x}_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}), \ldots, \bar{x}_n(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1})\big) = \\ = \Phi_i(\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}).$$

Разрешая эту систему относительно $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ (в предположении, что это возможно), получим $\lambda_i = \Lambda_i(\eta_1, \ldots, \eta_{n-1})$ $(i = 1, \ldots, n-1)$. Искомое частное решение в области D, удовлетворяющее начальному условию на G, имеет вид

$$z(x_1, \ldots, x_n) = v\Big[\Lambda_1\big(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)\big), \ldots, \\ \ldots, \Lambda_{n-1}\big(\varphi_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, \varphi_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)\big)\Big].$$

Примечание. Вопросы единственности решения задачи Коши для уравнений первого порядка рассматриваются в 11.2.2.2.

11.2.2.2. Квазилинейные уравнения первого порядка

Рассмотрим сначала квазилинейное уравнение с двумя независимыми переменными x, y:

$$a(x, y, z)p + b(x, y, z)q = c(x, y, z) \quad (a^2 + b^2 \neq 0), \tag{11.109}$$

где $a, b, c,$ — заданные дифференцируемые функции от аргументов x, y, z в некоторой области D пространства $Oxyz$; $z(x, y)$ — неизвестная функция; $p = \partial z/\partial x$, $q = \partial z/\partial y$. Предполагается, что решение $z(x, y)$ уравнения имеет непрерывные частные производные первого порядка (т. е. $z = z(x, y)$ — гладкая поверхность в $Oxyz$). **Геометрически** решение $z(x, y)$ уравнения (11.109) представляет собой поверхность (**интегральную поверхность**) $z = z(x, y)$ в пространстве. Величины $p, q, (-1)$ пропорциональны координатам вектора нормали к поверхности $z = z(x, y)$. Вектор с координатами (a, b, c) находится в касательной плоскости к этой поверхности. Уравнение (11.109) выражает условие ортогональности $ap + bq + c \cdot (-1) = 0$ векторов $(p, q, -1)$ и (a, b, c) в каждой точке интегральной поверхности.

Интегральные кривые системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{a(x, y, z)} = \frac{dy}{b(x, y, z)} = \frac{dz}{c(x, y, z)} \tag{11.110}$$

или

$$\frac{dx}{ds} = a(x, y, z), \quad \frac{dy}{ds} = b(x, y, z), \quad \frac{dz}{ds} = c(x, y, z) \tag{11.111}$$

называются характеристиками квазилинейного уравнения (11.109). Предполагается, что функции a, b, c удовлетворяют условиям теоремы Пикара в области D. Через каждую точку в D проходит одна и только одна характеристика.

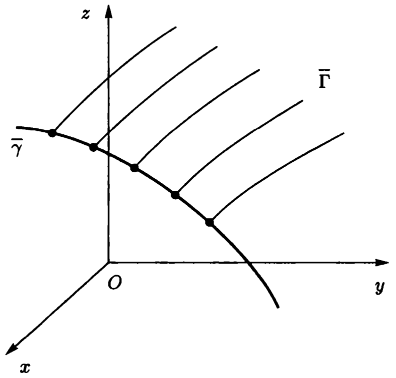


Рис. 11.14

Характеристики заполняют всю область D. Каждая интегральная поверхность $z = z(x, y)$ образована (покрыта) характеристиками, целиком лежащими на ней.

Если известны два независимых первых интеграла $\varphi_1(x, y, z)$, $\varphi_2(x, y, z)$ системы (11.110), то уравнение

$$F\big(\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)\big) = 0,$$

где F — произвольная функция своих аргументов φ_1, φ_2, дает общее решение уравнения (11.109) в неявном виде. Два семейства поверхностей с уравнениями $\varphi_1(x, y, z) = C_1$ и $\varphi_2(x, y, z) = C_2$ дают в пересечении различные характеристики для разных C_1 и C_2. Семейство характеристик является двухпараметрическим с параметрами C_1 и C_2.

Задача Коши (начальная задача) для уравнения (11.109) заключается в определении интегральной поверхности $z = z(x, y)$ этого уравнения, проходящей через пространственную кривую $\overline{\gamma}$ с параметрическим представлением

$$x = x_0(\lambda), \quad y = y_0(\lambda), \quad z = z_0(\lambda) \quad (\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2),$$

в котором правые части непрерывно дифференцируемы по λ. **Геометрически** решение задачи Коши состоит в том, что из каждой точки кривой $\overline{\gamma}$ выпускается характеристика $\overline{\Gamma}$ уравнения (11.109). Множество всех таких характеристик и образует искомую интегральную поверхность (рис. 11.14). Если $\overline{\gamma}$ сама является характеристикой, то через $\overline{\gamma}$ проходит, вообще говоря, бесконечное множество интегральных поверхностей (решений уравнения).

Аналитическое решение задачи Коши. Если $\varphi_1(x, y, z)$, $\varphi_2(x, y, z)$ — два независимых первых интеграла системы (11.110), то, подставляя в них параметрическое представление $\bar{\gamma}$, получим два уравнения

$$\varphi_i\big(x_0(\lambda), y_0(\lambda), z_0(\lambda)\big) = C_i \quad (i = 1, 2).$$

Исключая из них λ, найдем связь $F(C_1, C_2) = 0$, конкретизирующую вид произвольной функции F в общем решении. Искомое решение $z(x, y)$ задачи Коши определяется в неявной форме уравнением

$$F\big(\varphi_1(x, y, z), \varphi_2(x, y, z)\big) = 0.$$

Единственность решения задачи Коши. При достаточно малом s решение системы (11.111) имеет вид

$$x = x(s, x_0, y_0, z_0), \quad y = y(s, x_0, y_0, z_0), \quad z = z(s, x_0, y_0, z_0),$$

где в качестве начальных данных при $s = 0$ взяты координаты точек кривой $\bar{\gamma}$. Подставляя в эти равенства параметрическое представление $\bar{\gamma}$, получим

$$x = x(s, \lambda), \quad y = y(s, \lambda), \quad z = z(s, \lambda). \tag{11.112}$$

Если определитель, составленный из первых двух функций (11.112), $\Delta(s, \lambda) = x'_s y'_\lambda - x'_\lambda y'_s \neq 0$ вдоль кривой $\bar{\gamma}$ (при $s = 0$), то искомое решение $z(x, y)$ задачи Коши единственно в некоторой достаточно малой окрестности координат (x, y) некоторой точки на кривой $\bar{\gamma}$, так как при этом первые два уравнения (11.112) можно однозначно решить относительно s и λ. С учетом этого третье равенство (11.112) дает единственную гладкую функцию $z(x, y)$ такую, что интегральная поверхность $z = z(x, y)$ содержит отрезок кривой $\bar{\gamma}$. Если $\Delta(s, \lambda) = 0$ вдоль $\bar{\gamma}$, то для существования интегральной поверхности, проходящей через $\bar{\gamma}$, необходимо, чтобы $\bar{\gamma}$ была характеристикой. В этом случае через $\bar{\gamma}$ проходит бесконечное множество интегральных поверхностей.

Пример 87. Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$(y - z)\frac{\partial z}{\partial x} + (z - x)\frac{\partial z}{\partial y} = x - y. \tag{1}$$

Система (11.111) примет вид

$$\frac{dx}{ds} = y - z, \quad \frac{dy}{ds} = z - x, \quad \frac{dz}{ds} = x - y. \tag{2}$$

Складывая три этих уравнения, получим

$$\frac{d}{ds}(x + y + z) = 0.$$

Отсюда

$$\varphi_1(x, y, z) \equiv x + y + z = C_1 = \text{const}.$$

Умножая уравнения (2) последовательно на x, y, z и затем складывая их, найдем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{ds}(x^2 + y^2 + z^2) = 0, \quad \text{т. е.} \quad \varphi_2(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 = C_2 = \text{const}.$$

Тем самым найдены два независимых первых интеграла φ_1 и φ_2. Общее решение $z(x,y)$ уравнения (1) в неявной форме:

$$F(x+y+z;\ x^2+y^2+z^2)=0,$$

где F — произвольная функция двух своих аргументов φ_1 и φ_2. Найдем вид F такой, чтобы соответствующая интегральная поверхность проходила через прямую $\bar{\gamma}$, определяемую уравнениями $x=0$, $y=2z$ (задача Коши). Исключая x,y,z из двух последних уравнений и из равенств $\varphi_1=C_1$, $\varphi_2=C_2$, получим $x=0$, $y=\frac{2}{3}C_1$, $z=\frac{1}{3}C_1$, $\frac{5}{9}C_1^2-C_2=0$. Следовательно, $F(C_1,C_2)=\frac{5}{9}C_1^2-C_2$. Искомое решение $z(x,y)$ задачи Коши дается выражением

$$\frac{5}{9}(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)=0.$$

Пример 88. Для уравнения

$$2z\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial z}{\partial y}=1 \tag{1}$$

система (11.111) имеет вид

$$\frac{dx}{ds}=2z,\quad \frac{dy}{ds}=-1,\quad \frac{dz}{ds}=1.$$

Ее интегральная кривая, проходящая при $s=0$ через точку (x_0,y_0,z_0), определяется уравнениями

$$x=s^2+2z_0s+x_0,\quad y=-s+y_0,\quad z=s+z_0. \tag{2}$$

Будем искать интегральную поверхность, проходящую через линию $\bar{\gamma}$ с уравнениями

$$x=x_0\equiv\lambda^2,\quad y=y_0\equiv\lambda,\quad z=z_0\equiv\lambda. \tag{3}$$

Подставляя x_0,y_0,z_0 из (3) в (2), получим

$$x=s^2+2\lambda s+\lambda^2,\quad y=-s+\lambda,\quad z=s+\lambda. \tag{4}$$

Так как $\Delta(s=0,\lambda)=4\lambda\neq0$ на $\bar{\gamma}$, то из (4) находим единственную интегральную поверхность $z=\sqrt{x}$ (исключая s и λ из (4)).

Примечание. Линейное однородное уравнение (11.105) можно рассматривать как квазилинейное уравнение (11.109), в котором $c\equiv0$. При этом одним из первых интегралов системы (11.111) является решение $z(x,y)$, и $dz(x,y)/ds=0$ вдоль характеристик уравнения (11.105).

Пример 89. Линейное уравнение

$$y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$$

рассмотрим как квазилинейное. Из системы (11.111), принимающей вид

$$\frac{dx}{ds}=y,\quad \frac{dy}{ds}=-x,\quad \frac{dz}{ds}=0,$$

находим два первых интеграла: $\varphi_1 = x^2+y^2$, $\varphi_2 = z$ (так как $d\varphi_1/ds = 0, d\varphi_2/ds = 0$). Общее решение квазилинейного уравнения определяется равенством

$$F(\varphi_1, \varphi_2) \equiv F(x^2+y^2, z) = 0.$$

Отсюда $z = f(x^2+y^2)$.

Квазилинейное однородное уравнение с n независимыми переменными

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \ldots, x_n, z)p_i = c(x_1, \ldots, x_n, z) \quad \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \neq 0,\ p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i}\right) \tag{11.113}$$

рассматривается аналогично случаю двух независимых переменных. Пусть $u = \Phi(x_1, \ldots, x_n, z)$ — решение линейного уравнения

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + c\frac{\partial u}{\partial z} = 0,$$

соответствующего квазилинейному уравнению (11.113), и уравнение

$$\Phi(x_1, \ldots, x_n, z) = 0$$

определяет некоторую функцию $z = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда, если $\Phi'_z \neq 0$ при $z = \varphi$, то $z = \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ является решением уравнения (11.113).

Характеристики уравнения (11.113) определяются как интегральные кривые системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{a_1} = \ldots = \frac{dx_n}{a_n} = \frac{dz}{c}$$

или

$$\frac{dx_1}{ds} = a_1, \quad \ldots, \quad \frac{dx_n}{ds} = a_n, \quad \frac{dz}{ds} = c, \tag{11.114}$$

где s — параметр. Характеристики являются линиями в $(n+1)$-мерном пространстве точек $(x_1, \ldots, x_n, z)$.

Всякая интегральная поверхность $z = z(x_1, \ldots, x_n)$ уравнения (11.113) в $(n+1)$-мерном пространстве образована (покрыта) характеристиками, целиком лежащими на ней. Векторы $(p_1, \ldots, p_n, -1)$ и $(a_1, \ldots, a_n, c)$ направлены соответственно по нормали и касательной к интегральной поверхности. Уравнение (11.113) выражает условие ортогональности этих векторов. Вектор $(a_1, \ldots, a_n, c)$ направлен по касательной к характеристике.

Если $\varphi_i(x_1, \ldots, x_n, z)$ $(i = 1, \ldots, n)$ — независимые первые интегралы системы (11.114), то n-параметрическое семейство характеристик определяется системой уравнений

$$\varphi_i(x_1, \ldots, x_n, z) = \eta_i \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{11.115}$$

где η_i — параметры.

Всякая интегральная поверхность $z(x_1, \dots, x_n)$ образована семейством характеристик, зависящим от $(n-1)$ параметров. Для выделения $(n-1)$-параметрического семейства характеристик из n-параметрического свяжем параметры η_i соотношением $F(\eta_1, \dots, \eta_n) = 0$, где F — произвольная дифференцируемая функция. Подставляя (11.115) в F, получим общее решение уравнения (11.113) в неявном виде

$$F\big(\varphi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \varphi_n(x_1, \dots, x_n)\big) = 0. \tag{11.116}$$

Задача Коши для уравнения (11.113) состоит в нахождении интегральной поверхности, содержащей заданное $(n-1)$-мерное многообразие $\bar{\gamma}$ с параметрическим представлением

$$\begin{aligned} x_i &= x_i^0(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \quad (i = 1, \dots, n), \\ z &= z^0(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}), \end{aligned} \tag{11.117}$$

где $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$ — параметры. Подставляя (11.117) в (11.115), получим систему уравнений

$$\varphi_i\big(x_1^0(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}), \dots, z^0(\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1})\big) = \eta_i \quad (i = 1, \dots, n),$$

исключая из которой $\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$, найдем соотношение $F(\eta_1, \dots \eta_n) = 0$, где F — уже вполне определенная функция. Отсюда получается решение вида (11.116) задачи Коши. Полученная интегральная поверхность заполнена характеристиками

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(s, x_1^0, \dots, x_n^0, z^0) \quad (i = 1, \dots, n), \\ z &= z(s, x_1^0, \dots, x_n^0, z^0), \end{aligned}$$

выходящими из точек $(x_1^0, \dots, x_n^0, z^0)$ на $\bar{\gamma}$ при $s = 0$. Подставляя сюда (11.117), найдем решение задачи Коши в виде $(n-1)$-параметрического семейства характеристик

$$\begin{aligned} x_i &= x_i(s, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) \quad (i = 1, \dots, n), \\ z &= z(s, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}). \end{aligned}$$

Если определитель

$$\Delta(s, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}) = \begin{vmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \lambda_1} & \dots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \lambda_1} \\ \dots & \dots & \dots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial \lambda_{n-1}} & \dots & \dfrac{\partial x_n}{\partial \lambda_{n-1}} \end{vmatrix}$$

не равен нулю на многообразии $\bar{\gamma}$ (т.е. при $s = 0$), то, исключая параметры из $(n-1)$-параметрического семейства характеристик, получим интегральную поверхность $z = z(x_1, \dots, x_n)$, являющуюся единственным решением задачи Коши.

11.2.3. Уравнения с частными производными второго порядка

11.2.3.1. Приведение уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными к каноническому виду. Характеристики

1. Замена независимых переменных. Рассмотрим уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными x, y, линейное относительно производных второго порядка от неизвестной функции $u(x, y)$:

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, \qquad (11.118)$$

где A, B, C — заданные функции только от x, y, имеющие непрерывные производные до второго порядка включительно. В частном случае уравнение (11.118) может иметь вид (11.103), т. е. F линейно зависит от $u(x, y)$ и ее производных первого порядка. Введем вместо x, y новые независимые переменные ξ, η по формулам

$$\xi = \varphi_1(x, y), \quad \eta = \varphi_2(x, y), \qquad (11.119)$$

где φ_1, φ_2 — функции, имеющие непрерывные производные до второго порядка включительно, причем якобиан $\dfrac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)} \neq 0$ в рассматриваемой области. Подставляя выражения производных неизвестной функции $u(x, y)$ по старым переменным x, y через производные по новым переменным ξ, η (см. 8.2.11) в уравнение (11.118), получим

$$\widetilde{A}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\widetilde{B}\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \widetilde{C}\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \widetilde{F}\left(\xi, \eta, u\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0. \qquad (11.120)$$

Здесь

$$\widetilde{A}(\xi, \eta) = A\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_1}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\right)^2,$$

$$\widetilde{B}(\xi, \eta) = A\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x} + B\left(\frac{\partial \varphi_1}{\partial x}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + \frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right) + C\frac{\partial \varphi_1}{\partial y}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y},$$

$$\widetilde{C}(\xi, \eta) = A\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial \varphi_2}{\partial x}\frac{\partial \varphi_2}{\partial y} + C\left(\frac{\partial \varphi_2}{\partial y}\right)^2,$$

$$u(\xi, \eta) = u\left[\widetilde{\varphi}_1(\xi, \eta), \widetilde{\varphi}_2(\xi, \eta)\right],$$

где $x = \widetilde{\varphi}_1(\xi, \eta)$, $y = \widetilde{\varphi}_2(\xi, \eta)$ — преобразование, обратное к (11.119). Справедливо тождество

$$\widetilde{B}^2 - \widetilde{A}\widetilde{C} \equiv (B^2 - AC)\left[\frac{\partial(\varphi_1, \varphi_2)}{\partial(x, y)}\right]^2. \qquad (11.121)$$

2. Классификация уравнений

1) Если в рассматриваемой области D выражение $\Delta \equiv B^2 - AC > 0$, то уравнение (11.118) называется **гиперболическим (гиперболического типа)** в D.
2) Если $\Delta \equiv 0$ в D, то уравнение (11.118) называется **параболическим (параболического типа)** в D.
3) Если $\Delta < 0$ в D, то уравнение (11.118) называется **эллиптическим (эллиптического типа)** в D.

При замене независимых переменных тип уравнения (11.118) не изменяется согласно (11.121). Если Δ изменяет знак в D, то уравнение (11.118) называется уравнением **смешанного типа** в D. Кривая в D, на которой $\Delta = 0$, называется **параболической линией** уравнения. Две части области D, на которые она делится параболической линией, называются соответственно **областью эллиптичности уравнения** (если $\Delta < 0$) и **областью гиперболичности** (если $\Delta > 0$).

Пример 90. Уравнение Трикоми

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (A = y,\ B = 0,\ C = 1)$$

— смешанного типа. В области $y < 0$ ($\Delta = B^2 - AC = -y > 0$) — гиперболического типа; на линии $y = 0$ ($\Delta = 0$) — параболического типа; при $y > 0$ ($\Delta < 0$) — эллиптического типа.

3. Канонический вид уравнений

1) Гиперболический тип. Если уравнение (11.118) — гиперболическое ($\Delta = B^2 - AC > 0$) в области D, то в этой области существуют функции φ_1, φ_2 такие, что заменой переменных (11.119) уравнение (11.118) приводится к **первому каноническому** (простейшему) **виду**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + F_1\left(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial\xi}, \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0 \quad (u = u(\xi, \eta)).$$

Если $A = C = 0$ в области D, то, разделив (11.118) на $2B \neq 0$, сразу получим канонический вид уравнения.

Пусть $A \neq 0$ и (или) $C \neq 0$ в D. Не нарушая общности, примем $A \neq 0$. Функции φ_1, φ_2 в (11.119) выберем так, чтобы $\widetilde{A} = 0$, $\widetilde{C} = 0$, т. е. эти функции являются решениями дифференциального уравнения первого порядка

$$A\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\varphi}{\partial x}\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial y} + C\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 = 0, \qquad (11.122)$$

называемого **уравнением характеристик**. После разрешения относительно φ_x/φ_y это уравнение распадается на два дифференциальных уравнения

$$\varphi_x + k_1(x, y)\varphi_y = 0, \quad \varphi_x + k_2(x, y)\varphi_y = 0,$$

где

$$k_1 = \frac{B + \sqrt{B^2 - AC}}{A}, \quad k_2 = \frac{B - \sqrt{B^2 - AC}}{A}.$$

Этим двум уравнениям соответствуют обыкновенные дифференциальные уравнения (см. 11.2.2.1)

$$dx = \frac{dy}{k_1}, \quad dx = \frac{dy}{k_2},$$

или

$$\frac{dy}{dx} = k_1(x, y), \quad \frac{dy}{dx} = k_2(x, y). \tag{11.123}$$

Иногда уравнением характеристик называется выражение

$$A(dy)^2 - 2B\,dx\,dy + C(dx)^2 = 0,$$

распадающееся на два уравнения (11.123).

Возьмем в качестве φ_1, φ_2 в (11.119) левые части общих интегралов

$$\varphi_1(x, y) = C_1, \quad \varphi_2(x, y) = C_2$$

уравнений (11.123). При этом φ_1, φ_2 удовлетворяют также уравнению (11.122). Кривые $\varphi_1(x, y) = C_1$, $\varphi_2(x, y) = C_2$ называются **характеристиками** уравнения (11.118) и образуют два семейства кривых. Для нахождения характеристик удобно использовать уравнения (11.123). После замены x, y на ξ, η согласно (11.119) уравнение (11.120) принимает первый канонический вид. Еще одна замена переменных $\rho = \xi + \eta$, $\sigma = \xi - \eta$ приводит уравнение (11.118) к эквивалентному **второму каноническому виду**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \rho^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} + \Phi\left(\rho, \sigma, u, \frac{\partial u}{\partial \rho}, \frac{\partial u}{\partial \sigma}\right) = 0 \quad (u = u(\rho, \sigma)).$$

Если уравнение (11.118) — линейное, то его канонический вид также является линейным уравнением.

Пример 91. Приведем к каноническому виду уравнение Трикоми (см. пример 90) в области гиперболичности $y < 0$. Уравнения (11.123) принимают вид

$$y' = -\frac{1}{\sqrt{-y}}, \quad y' = \frac{1}{\sqrt{-y}}.$$

Общие интегралы этих уравнений соответственно равны:

$$\varphi_1 \equiv \frac{3}{2}x - \sqrt{-y^3} = C_1, \quad \varphi_2 \equiv \frac{3}{2}x + \sqrt{-y^3} = C_2.$$

Характеристиками являются левые и правые ветви кривых $y^3 = -\frac{9}{4}(x - C)^2$ $(y \neq 0)$ с вершинами (остриями) на оси Ox. Замена

$$\xi = \frac{3}{2}x - \sqrt{-y^3}, \quad \eta = \frac{3}{2}x\sqrt{-y^3}$$

приводит уравнение Трикоми в области $y < 0$ к первому каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{6(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0.$$

Замена $\rho = \xi + \eta$, $\sigma = \xi - \eta$ приводит уравнение Трикоми ко второму каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2} - \frac{1}{3\sigma}\frac{\partial u}{\partial\sigma} = 0.$$

Пример 92. Уравнение $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$, $A = 1$, $B = 0$, $C = -y$, $\Delta = B^2 - AC = y$ — гиперболического типа в области $y > 0$. Уравнения (11.123) принимают вид

$$y' = \sqrt{y}, \quad y' = -\sqrt{y}$$

и имеют общие интегралы соответственно: $\varphi_1 \equiv x - 2\sqrt{y} = C_1$, $\varphi_2 \equiv x + 2\sqrt{y} = C_2$. Характеристиками являются левые и правые полупараболы $y = \dfrac{1}{4}(x - C)^2$ $(y \neq 0)$, касающиеся вершинами оси Ox. Замена $\xi = x - 2\sqrt{y}$, $\eta = x + 2\sqrt{y}$ приводит данное уравнение к первому каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} + \frac{1}{2(\xi-\eta)}\left(\frac{\partial u}{\partial\xi} - \frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0 \quad (u = u(\xi,\eta)).$$

Второй канонический вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\rho^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial\sigma^2} + \frac{1}{\sigma}\frac{\partial u}{\partial\sigma} = 0.$$

2) Параболический тип. Пусть уравнение (11.118) — параболическое ($\Delta \equiv 0$) в области D. Один из коэффициентов A, C отличен от нуля. Не теряя общности, полагаем $A \neq 0$. В этом случае $k_1 \equiv k_2 = B/A$ и для нахождения характеристик имеется только одно уравнение с частными производными $\varphi_x + \dfrac{B}{A}\varphi_y = 0$, или обыкновенное $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{B}{A}$. Пусть $\varphi_1(x,y) = C$ — общий интеграл последнего уравнения, тогда функция $\varphi_1(x,y)$ будет решением уравнения с частными производными. Взяв в формулах (11.119) в качестве φ_1 найденную функцию $\varphi_1(x,y)$, а в качестве φ_2 любую функцию, такую что якобиан $\dfrac{\partial(\varphi_1,\varphi_2)}{\partial(x,y)} \neq 0$ (если $A \neq 0$, то можно принять $\varphi_2 \equiv x$), и, используя замену $\xi = \varphi_1(x,y)$, $\eta = x$, приведем (11.118) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\eta^2} + F_2\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial\xi},\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0 \quad (u = u(\xi,\eta)),$$

так как $\widetilde{A} \equiv 0$, $\widetilde{B} \equiv 0$, $\widetilde{C} = A \neq 0$.

Уравнение параболического типа имеет только одно семейство характеристик $\varphi_1(x,y) = C$.

Если уравнение (11.118) — линейное, то его канонический вид также является линейным уравнением.

Пример 93. Приведем к каноническому виду уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} + 2\frac{\partial u}{\partial y} + 3u = 0,$$

$A = 1$, $B = -1$, $C = 1$, $\Delta = B^2 - AC \equiv 0$. Уравнение для нахождения характеристик: $dy/dx = -1$. Его общий интеграл $\varphi_1 \equiv x + y = C$. Прямые $x + y = C$ образуют семейство характеристик. Замена $\xi = x + y$, $\eta = y$ $\left[\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = 1 \neq 0\right]$ приводит данное уравнение к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 3\frac{\partial u}{\partial \xi} + 2\frac{\partial u}{\partial \eta} + 3u = 0 \quad (u = u(\xi,\eta)).$$

Пример 94.

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x > 0).$$

Здесь $A=x^2$, $B=xy$, $C=y^2$, $\Delta=B^2-AC\equiv 0$. Уравнение характеристик $dy/dx = y/x$ имеет общий интеграл $y/x = C$. Характеристиками являются лучи, выходящие из начала координат. Замена $\xi = \dfrac{y}{x}$, $\eta = y$ $\left[\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} = -\dfrac{y}{x^2} \neq 0\right]$ приводит данное уравнение к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = 0 \quad (u = u(\xi,\eta)).$$

3) Эллиптический тип ($\Delta = B^2 - AC < 0$ в области D). Уравнения (11.123) принимают в этом случае вид

$$\frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} + i\frac{\sqrt{-\Delta}}{A}, \qquad \frac{dy}{dx} = \frac{B}{A} - i\frac{\sqrt{-\Delta}}{A},$$

где i — мнимая единица. При этом $k_1 = \bar{k}_2$. Общие интегралы

$$\varphi_1(x,y) = \varphi(x,y) + i\psi(x,y) = C_1,$$
$$\varphi_2(x,y) = \varphi(x,y) - i\psi(x,y) = C_2 \quad (C_1 = \overline{C}_2)$$

этих уравнений — комплексно сопряженные. Замена переменных

$$\xi = \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} = \varphi(x,y), \quad \eta = \frac{\varphi_1 - \bar{\varphi}_2}{2i} = \psi(x,y)$$

приводит уравнение (11.118) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + F_3\left(\xi,\eta,u,\frac{\partial u}{\partial \xi},\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0 \quad (u = u(\xi,\eta)),$$

так как $\widetilde{A} = \widetilde{C}$, $\widetilde{B} = 0$.

Уравнение эллиптического типа не имеет действительных характеристик (характеристики мнимые). Если уравнение (11.118) — линейное, то его канонический вид также является линейным уравнением.

Пример 95. Уравнение Трикоми

$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad A=y,\quad B=0,\quad C=1$$

(см. также примеры 90, 91) эллиптично в области $y>0$ ($\Delta=-y<0$). Первое уравнение (11.123) принимает вид $\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1}{i\sqrt{y}}$. Его общий интеграл $\varphi_1=\varphi+i\psi\equiv\dfrac{3}{2}x+i\sqrt{y^3}=C_1$. Замена $\xi=\varphi=\dfrac{3}{2}x$, $\eta=\psi=\sqrt{y^3}$ приводит уравнение Трикоми к каноническому виду (в области $y>0$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}+\frac{1}{3\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

Пример 96. Уравнение

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-y\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\quad A=1,\ B=0,\ C=-y,\ \Delta=y$$

— эллиптическое в области $y<0$ (см. также пример 92). Первое уравнение (11.123) принимает вид $\dfrac{dy}{dx}=i\sqrt{-y}$. Его общий интеграл $\varphi_1=\varphi+i\psi=x-2i\sqrt{-y}=C_1$. Замена $\xi=\varphi=x$, $\eta=\psi=-2\sqrt{-y}$ приводит данное уравнение к каноническому виду (в области $y<0$):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}-\frac{1}{2\eta}\frac{\partial u}{\partial \eta}=0.$$

4. Канонический вид линейных уравнений с постоянными коэффициентами. Если исходное уравнение

$$Au_{xx}+2Bu_{xy}+Cu_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+b_3u+f(x,y)=0$$

является линейным с постоянными коэффициентами, то соответствующее каноническое уравнение с неизвестной функцией $u(\xi,\eta)$ также будет линейным с постоянными коэффициентами. Дальнейшее упрощение уравнения возможно при помощи замены неизвестной функции

$$u(\xi,\eta)=v(\xi,\eta)\cdot e^{\alpha\xi+\beta\eta},$$

где α,β — числа, подлежащие определению. После подстановки выражений для производных в уравнение числа α,β выбираются так, чтобы обратить в нуль два коэффициента в каноническом уравнении.

11.2.3.2. Уравнения второго порядка с несколькими независимыми переменными. Классификация. Характеристики

1. Классификация уравнений. Рассмотрим уравнение второго порядка, линейное относительно вторых производных

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x_1,\dots,x_n)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F\left(x_1,\dots,x_n,u,\frac{\partial u}{\partial x_1},\dots,\frac{\partial u}{\partial x_n}\right) = 0 \qquad (11.124)$$

с непрерывными коэффициентами $A_{ij}(x_1,\dots,x_n)$. Произведем невырожденную замену независимых переменных

$$y_i = y_i(x_1,\dots,x_n) \quad (i = 1,2,\dots,n); \qquad \frac{\partial(y_1,\dots,y_n)}{\partial(x_1,\dots,x_n)} \neq 0.$$

Старые переменные x_j можно выразить через новые y_i: $x_j = x_j(y_1,\dots,y_n)$. При этом

$$\widetilde{u}(y_1,\dots,y_n) = u\bigl(x_1(y_1,\dots,y_n),\dots,x_n(y_1,\dots,y_n)\bigr);$$
$$u(x_1,\dots,x_n) = \widetilde{u}\bigl(y_1(x_1,\dots,x_n),\dots,y_n(x_1,\dots,x_n)\bigr).$$

Справедливы равенства:

$$\frac{\partial u}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y_j}\frac{\partial y_j}{\partial x_i},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} = \sum_{r,s=1}^{n} \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial y_r \partial y_s}\frac{\partial y_r}{\partial x_i}\frac{\partial y_s}{\partial x_j} + \sum_{r=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y_r}\frac{\partial^2 y_r}{\partial x_i \partial x_j}.$$

После замены переменных уравнение (11.124) примет вид

$$\sum_{r,s=1}^{n} \widetilde{A}_{rs}(y_1,\dots,y_n)\frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial y_r \partial y_s} + \widetilde{F}\left(y_1,\dots,y_n,\widetilde{u},\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y_1},\dots,\frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y_n}\right) = 0, \qquad (11.125)$$

где

$$\widetilde{A}_{rs} = \sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}\frac{\partial y_r}{\partial x_i}\frac{\partial y_s}{\partial x_j}, \qquad \widetilde{u} = \widetilde{u}(y_1,\dots,y_n).$$

В каждой фиксированной точке $M_0(x_1^0,\dots,x_n^0)$ дифференциальному уравнению (11.124) соответствует квадратичная форма

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x_1^0,\dots,x_n^0)p_i p_j.$$

Формула (11.125) в точке M_0 совпадает с формулой преобразования коэффициентов этой квадратичной формы при невырожденном линейном преобразовании

$$p_j = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ij} q_j, \quad \alpha_{ij} = \frac{\partial y_i(x_1^0, \ldots, x_n^0)}{\partial x_j}, \quad \det(\alpha_{ij}) \neq 0,$$

переводящем ее к виду $\sum\limits_{r,s=1}^{n} \widetilde{A}_{rs} q_r q_s$. Всегда существует линейное невырожденное преобразование, приводящее квадратичную форму с действительными коэффициентами к **каноническому виду**

$$\sum_{i=1}^{r} q_i^2 - \sum_{i=r+1}^{m} q_i^2 \quad (m \leqslant n),$$

причем числа r и m не зависят от вида линейного преобразования, а определяются исключительно коэффициентами квадратичной формы и точкой M_0. Это позволяет провести следующую классификацию типов дифференциального уравнения (11.124) в каждой точке M_0 и некоторой ее достаточно малой окрестности:

1) **эллиптический тип**, если $m = n$ и все n слагаемых в каноническом виде квадратичной формы одного знака (т.е. либо $r = m$, либо $r = 0$);
2) **гиперболический тип**, если $m = n$ и имеются слагаемые разных знаков (т.е. $1 \leqslant r \leqslant n - 1$);
3) **нормальный гиперболический тип**, если $m = n$ и либо $r = 1$, либо $r = n-1$;
4) **параболический тип**, если имеются равные нулю слагаемые, т.е. $m < n$;
5) **нормальный параболический тип**, если $m = n - 1$ и либо $r = 0$, либо $r = m$, т.е. только одно слагаемое равно нулю, а остальные $(n - 1)$ — одного знака.

Приведенная классификация зависит от выбора точки M_0, так как числа r и m зависят от M_0. В общем случае дифференциальное уравнение может иметь либо один и тот же тип во всех точках некоторой области D, либо иметь различный тип в разных ее точках, т.е. быть уравнением смешанного типа (см. пример 90).

В общем случае невозможно привести уравнение (11.124) к каноническому виду одновременно во всех точках области D с помощью одной и той же замены независимых переменных. Такая возможность имеется только при $n = 2$.

Если A_{ij} постоянны в D, то уравнение (11.124) при помощи некоторого линейного преобразования

$$y_i = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} x_j \quad [\det(\alpha_{ij}) \neq 0]$$

во всей области D может быть приведено к каноническому виду

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial y_i^2} - \sum_{i=r+1}^{m} \frac{\partial^2 \widetilde{u}}{\partial y_i^2} + \widetilde{\Phi}\left(y_1, \ldots, y_n, \widetilde{u}, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial \widetilde{u}}{\partial y_n}\right) = 0.$$

2. Характеристики. Пусть $w(x_1, \ldots, x_n)$ $(n \geqslant 2)$ — функция, такая что на поверхности $w(x_1, \ldots, x_n) = 0$ справедливо

$$\operatorname{grad} w = \left(\frac{\partial w}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial w}{\partial x_n}\right) \neq 0.$$

Тогда, если $w(x_1, \ldots, x_n)$ удовлетворяет дифференциальному **уравнению характеристик**

$$\sum_{i,j=1}^{n} A_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial w}{\partial x_j} = 0,$$

то поверхность $w(x_1, \ldots, x_n) = 0$ называется **характеристической поверхностью** (**характеристикой**) уравнения (11.124). При $n = 2$ имеем **характеристическую линию** (см. 11.2.3.1). Если каждая поверхность семейства $w(x_1, \ldots, x_n) - C = 0$ $(a < C < b)$ является характеристикой уравнения (11.124), то, в силу $\operatorname{grad} w \neq 0$, это семейство заполняет некоторую достаточно малую область D, через каждую точку которой проходит характеристика, причем только одна. Если в формулах замены независимых переменных взять $y_1 = w(x_1, \ldots, x_n)$, то $\widetilde{A}_{11} = 0$ в D согласно (11.125).

3. Основные уравнения математической физики. 1) Примером уравнения гиперболического типа является (**трехмерное**) **волновое уравнение**, описывающее распространение волн различной природы в трехмерном пространстве $Oxyz$:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + F(x, y, z, t), \tag{11.126}$$

где $u(x, y, z, t)$ — неизвестная функция, t — время, $a = \text{const}$ — скорость распространения волны в данной однородной изотропной среде. В частном случае $F \equiv 0$. Если функции u и F зависят только от одной (от двух) пространственных переменных и от времени, то волновое уравнение называется **одномерным** (**двумерным**). Одномерное (соответственно двумерное) волновое уравнение описывает, в частности, малые поперечные колебания однородной струны (соответственно мембраны).

Уравнение характеристик для трехмерного волнового уравнения имеет вид

$$\left(\frac{\partial w}{\partial t}\right)^2 - a^2 \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right].$$

Поверхность

$$a^2(t-t_0)^2-(x-x_0)^2-(y-y_0)^2-(z-z_0)^2=0$$

в четырехмерном пространстве (x, y, z, t) называется **характеристическим конусом** с вершиной в точке (x_0, y_0, z_0, t_0) и является характеристикой волнового уравнения. Характеристиками являются также плоскости

$$at+b_1x+b_2y+b_3z=C,$$

где C, b_1, b_2, b_3 — любые числа, причем $b_1^2+b_2^2+b_3^2=1$.

2) К параболическому типу относится (**трехмерное**) **уравнение теплопроводности**

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)+F(x,y,z,t), \tag{11.127}$$

где $a=\text{const}$, $u(x,y,z,t)$ — неизвестная функция, описывающая процессы распространения тепла и диффузии вещества в данной однородной изотропной среде. Аналогично волновому уравнению рассматриваются также одномерное и двумерное уравнения теплопроводности (в декартовых координатах соответственно $u=u(x,t)$ и $u=u(x,y,t)$). В частном случае $F\equiv 0$. Уравнение теплопроводности имеет уравнение характеристик

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2=0.$$

Характеристики образуют семейство плоскостей $w=t-C=0$.

3) Если в уравнении теплопроводности можно принять $u=u(x,y,z)$, $F=F(x,y,z)$, т. е. $\partial u/\partial t=0$, $\partial F/\partial t=0$ (**стационарный процесс**), то это уравнение принимает вид

$$\Delta u=\frac{1}{a^2}F(x,y,z)=0 \quad \left(\Delta u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right),$$

называемый **уравнением Пуассона,** которое при $F\equiv 0$ обращается в **уравнение Лапласа** $\Delta u=0$.

Пусть в волновом уравнении внешнее возмущение

$$F(x,y,z,t)=F_0(x,y,z)e^{i\omega t}$$

периодическое, тогда, если искать решение уравнения в виде

$$u(x,y,z,t)=u_0(x,y,z)e^{i\omega t},$$

го для функции $u_0(x, y, z)$ получится **уравнение Гельмгольца**

$$\Delta u_0 + k^2 u_0 = -\frac{1}{a^2} F_0(x_1, \ldots, x_n) \quad \left(k^2 = \frac{\omega^2}{a^2}\right).$$

Уравнения Лапласа, Пуассона и Гельмгольца относятся к эллиптическому типу. Уравнение характеристик для них имеет вид

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2 = 0.$$

Отсюда $w(x, y, z) = C = \mathrm{const}$ и $\operatorname{grad} w = 0$ на $w(x, y, z) = 0$, что невозможно. Следовательно, вышеперечисленные уравнения эллиптического типа не имеют действительных характеристик.

11.2.3.3. Основные краевые задачи для уравнений математической физики

Для того чтобы из множества решений дифференциального уравнения, заданного в области D, выделить единственное решение, описывающее некоторый реальный процесс, необходимо задавать дополнительные условия, называемые **краевыми условиями**. К ним относятся: **начальные** и **граничные условия**. Задача нахождения решения, удовлетворяющего краевым условиям, называется **краевой задачей**.

Различают следующие типы краевых задач для уравнений математической физики.

1. Задача Коши для уравнений гиперболического (соответственно параболического) типа: требуется найти функцию $u(x, y, z, t)$, удовлетворяющую при $t > 0$ уравнению (11.126) (соответственно (11.127)) в любой точке $M(x, y, z)$ всего пространства $Oxyz$, а также начальным условиям при $t = 0$:

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \qquad \frac{\partial u(x, y, z, 0)}{\partial t} = \psi(x, y, z)$$

(соответственно $u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$), где φ, ψ — заданные функции. Область D совпадает здесь со всем пространством $Oxyz$.

2. Краевая задача для уравнений эллиптического типа: в ограниченной области D пространства $Oxyz$ найти функцию $u(x, y, z)$, удовлетворяющую эллиптическому уравнению, а на границе Σ области D — заданному граничному условию

$$\left[\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right]_{\Sigma} = \gamma,$$

где α, β, γ — заданные на поверхности Σ функции от x, y, z; причем $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$, $\alpha + \beta > 0$; $\partial u / \partial n$ — производная по внешней нормали к Σ.

Рассматривают следующие частные виды общего граничного условия:

$$u\big|_\Sigma = \gamma_1 \text{ (первый тип)},$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma = \gamma_2 \text{ (второй тип)}, \qquad \left[\frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u\right]_\Sigma = \gamma_3 \text{ (третий тип)},$$

которым соответствуют **краевые задачи первого, второго и третьего типа.** Для уравнений Лапласа и Пуассона краевая задача первого типа (соответственно второго или третьего) называется **задачей Дирихле** (соответственно **задачей Неймана** или **смешанной задачей**). Начальные условия для эллиптических уравнений отсутствуют.

3. Смешанная задача для уравнения гиперболического (соответственно параболического) типа: в ограниченной области D требуется найти функцию $u(x, y, z, t)$, удовлетворяющую в D при $t > 0$ уравнению (11.126) (соответственно (11.127)), а также краевым условиям:

а) начальным, в замкнутой области $\overline{D}$ при $t = 0$,

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z), \qquad \frac{\partial u(x, y, z, 0)}{\partial t} = \psi(x, y, z)$$

(соответственно $u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$), где φ, ψ — заданные функции;

б) граничному, на границе Σ области D при $t > 0$,

$$u(x, y, z, t)\big|_\Sigma = \gamma(x, y, z, t),$$

где функция $\gamma(x, y, z, t)$ задана на поверхности Σ при $t > 0$. Здесь граничное условие может быть одного из трех перечисленных выше типов (см. п. **2**), в которых $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ — функции от x, y, z, t. Замкнутая поверхность Σ ограничивает две области, в которых может искаться решение: внутреннюю и внешнюю. В соответствии с этим различают **внутренние** и **внешние** краевые задачи.

Примечание. Некоторые типы краевых задач для одномерных и двумерных уравнений рассматриваются ниже.

11.2.4. Методы решения уравнений гиперболического типа

11.2.4.1. Метод характеристик нахождения общего решения гиперболических уравнений

1. Для одномерного волнового уравнения

$$a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{11.128}$$

уравнение характеристик имеет вид $a^2(dt)^2 - (dx)^2 = 0$. Его общие интегралы: $x - at = C_1$, $x + at = C_2$. Замена переменных $\xi = x - at$, $\eta = x + at$ или

$x = \frac{1}{2}(\xi + \eta)$, $t = \frac{1}{2a}(\eta - \xi)$ приводит уравнение (11.128) к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\partial u}{\partial \eta}\right) = 0.$$

Интегрируя его последовательно по ξ и η, получим **общее решение** уравнения (11.128):

$$u(x, y) = \Phi(x - at) + \Psi(x + at), \qquad (11.129)$$

где Φ, Ψ — произвольные, дважды непрерывно дифференцируемые функции, называемое **решением Даламбера.** Решение $u = \Phi(x - at)$ (соответственно $u = \Psi(x + at)$) называется **прямой** (соответственно **обратной**) **бегущей волной.** Прямая (обратная) волна распространяется направо (налево) по оси Ox со скоростью a.

Физический смысл решения. Уравнение (11.128) описывает малые поперечные колебания бесконечной струны, совпадающей в покое с осью Ox, а при колебании находящейся все время в одной и той же плоскости. Решение (11.129) дает поперечное смещение $u(x, y)$ точки x струны в момент времени t и является наложением прямой и обратной волн, распространяющихся по струне. Функция $\Phi(x - at)$ описывает возмущение, исходящее при $t = 0$ из точки x_0 и приходящее в момент t в точку $x = x_0 + at$ без изменения формы (рис. 11.15). Аналогично функция $\Psi(x + at)$ описывает возмущение, приходящее в момент t в точку $x_0 - at$ из точки x_0.

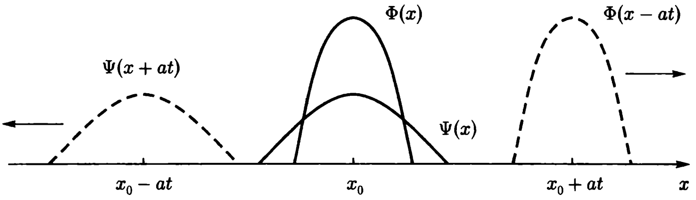


Рис. 11.15

2. Пример 97. Найти общее решение уравнения.

1) $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - 2\sin x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - \cos^2 x \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \cos x \frac{\partial u}{\partial y} = 0. \qquad (1)$$

Решение. Здесь $\Delta = B^2 - AC = 1 > 0$. Уравнение гиперболическое. Уравнение характеристик: $y' = -\sin x + 1$, $y' = -\sin x - 1$. Их общие интегралы: $x - y + \cos x = C_1$, $x + y - \cos x = C_2$. Замена $\xi = x - y + \cos x$, $\eta = x + y - \cos x$ приводит уравнение (1) к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} \equiv \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial u}{\partial\eta}\right) = 0.$$

Отсюда $\dfrac{\partial u}{\partial\eta} = f(\eta)$. Интегрируя по η, найдем

$$u(\xi,\eta) = \Phi(\xi) + \Psi(\eta) \qquad \left[\Psi(\eta) = \int f(\eta)\,d\eta\right],$$

где Φ, Ψ — произвольные функции своих аргументов. Возвращаясь к старым переменным, получим общее решение исходного уравнения (1):

$$u(x,t) = \Phi(x - y + \cos x) + \Psi(x + y - \cos x). \qquad \rhd$$

2) $$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x > 0,\ y > 0). \tag{2}$$

Решение. Здесь $\Delta = x^2y^2 > 0$. Уравнение характеристик: $x^2(dy)^2 - y^2(dx)^2 = 0$. Его общие интегралы: $xy = C_1$, $y/x = C_2$. Замена $\xi = xy$, $\eta = y/x$ приводит уравнение (2) к виду

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta} - \frac{1}{2\xi}\frac{\partial u}{\partial\eta} = 0.$$

Обозначая $v = \dfrac{\partial u}{\partial\eta}$, получим уравнение $\dfrac{\partial v}{\partial\xi} - \dfrac{v}{2\xi} = 0$, общее решение которого $v = f(\eta)\sqrt{\xi}$. Имеем уравнение $\dfrac{\partial u}{\partial\eta} = f(\eta)\sqrt{\xi}$, общее решение которого

$$u(\xi,\eta) = \Phi(\xi) + \Psi(\eta)\sqrt{\xi},$$

где Φ, Ψ — произвольные функции. Общее решение уравнения (2):

$$u(x,t) = \Phi(xy) + \Psi\left(\frac{y}{x}\right)\sqrt{xy}. \qquad \rhd$$

11.2.4.2. Решение краевых задач для гиперболических уравнений

1. Метод характеристик. Рассмотрим задачу Коши для однородного волнового уравнения (11.128), заключающуюся в нахождении его решения $u(x,t)$ при $t \geqslant 0$, удовлетворяющего в промежутке $-\infty < x < +\infty$ начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = \varphi(x), \qquad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = \psi(x),$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ — функции, заданные в промежутке $(-\infty; +\infty)$. Предполагается, что $\varphi(x)$ имеет первые две производные, а $\psi(x)$ — только первую. Данная задача Коши описывает свободные колебания бесконечной струны, для которой задана начальная форма и начальная скорость ее точек. Определяя функции Φ, Ψ в общем решении (11.129) так, чтобы выполнялись начальные условия, получим **формулу Даламбера**, дающую решение задачи Коши

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right] + \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz. \qquad (11.130)$$

Полученное решение единственно и непрерывно зависит от начальных данных. Задача Коши поставлена корректно.

Решение (11.130) можно записать в виде наложения (суммы) прямой и обратной волн:

$$u(x,t) = \varphi_1(x-at)+\psi_1(x+at),$$

где

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(z)\,dz, \qquad \psi_1(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2a}\int\limits_0^x \psi(z)\,dz.$$

Если $\psi(x)=0$, то имеем решение

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\right].$$

Если $\varphi(x)=0$, то решение имеет вид

$$u(x,t) = \frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz,$$

которое также можно представить как наложение прямой и обратной волн. В самом деле, в этом случае

$$u(x,t) = F(x+at) - F(x-at),$$

где $F(z)$ — какая-либо первообразная для функции $\dfrac{1}{2a}\psi(z)$. При этом наблюдается явление **остаточного действия**, которое заключается в том, что, если $\psi(x)\neq 0$ только в некотором промежутке (x_1,x_2), то с течением времени точки струны будут смещаться вдоль оси Oy на некоторый отрезок с длиной

$$\frac{1}{2a}\int\limits_{x_1}^{x_2}\psi(z)\,dz$$

и оставаться в покое в этом положении. Причем эта область постоянного смещения расширяется равномерно со временем, т. е. за прошедшей волной остается область постоянного ненулевого смещения.

Пример 98. Найдем методом характеристик решение уравнения в примере 97.1, удовлетворяющее начальным условиям

$$u\Big|_{y=\cos x} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{y=\cos x} = \psi(x).$$

Решение. Здесь кривая $y = \cos x$ не является характеристикой. Определим в общем решении данного уравнения функции Φ, Ψ так, чтобы выполнялись начальные условия

$$\Phi(x) + \Psi(x) = \varphi(x), \quad -\Phi'(x) + \Psi'(x) = \psi(x).$$

Интегрируя второе равенство, получим

$$-\Phi(x) + \Psi(x) = \int\limits_{x_0}^{x} \psi(z)\,dz + C.$$

Отсюда и из первого начального условия следует

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) - \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(z)\,dz - \frac{1}{2}C,$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{2}\varphi(x) + \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x} \psi(z)\,dz + \frac{1}{2}C.$$

Подставив выражения Φ и Ψ в формулу общего решения (см. пример 97.1), получим искомое решение:

$$u(x, y) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x - y + \cos x) + \varphi(x + y - \cos x)\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{x-y+\cos x}^{x+y-\cos x} \psi(z)\,dz. \qquad \triangleright$$

2. Свойства характеристик волнового уравнения. Для выяснения смысла решения (11.130) однородного уравнения будем рассматривать характеристики $x - at = C_1$, $x + at = C_2$ (два семейства прямых линий) на **фазовой плоскости** Oxt. Точка (x, t) на этой плоскости характеризует точку x струны в данный момент времени t. Функции $u = \varphi_1(x - at)$ и $u = \psi_1(x + at)$ постоянны вдоль характеристик первого и второго семейства соответственно. Пусть при $t = 0$ отклонение струны $u = \varphi_1(x) \neq 0$ в интервале (x_1, x_2) и $\varphi_1(x) = 0$ вне этого интервала. Через точки $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$ проведем характеристики $x - at = x_1$ и $x - at = x_2$ (рис. 11.16), разбивающие верхнюю полуплоскость $t > 0$ на области $1, 2, 3$. Функция $u = \varphi_1(x - at) \neq 0$ только в области 2, для которой $x_1 < x - at < x_2$. При этом характеристики $x - at = x_2$, $x - at = x_1$ соответствуют переднему и заднему фронтам прямой волны. Для того чтобы найти на струне точки, начальные возмущения которых дошли к моменту t_0 до точки x_0 (т. е. из которых подошли прямая и обратная волны), возьмем точку $M(x_0, t_0)$ на фазовой плоскости (рис. 11.17) и проведем через нее характеристики $x - at = x_0 - at_0 = x_1$ и $x + at = x_0 + at_0 = x_2$, которые пересекут ось

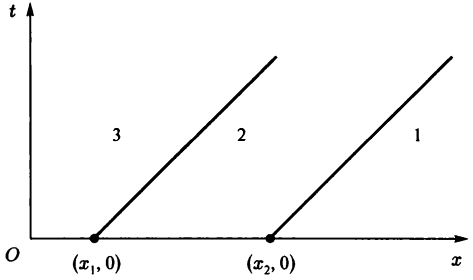


Рис. 11.16

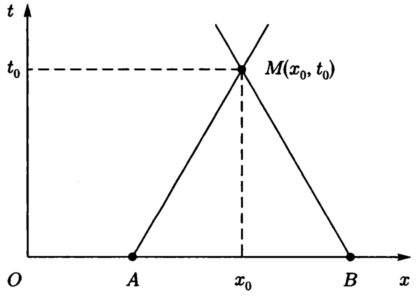


Рис. 11.17

Ox в точках $A(x_0 - at_0, 0)$ и $B(x_0 + at_0, 0)$. Функция $u = \varphi_1(x - at) + \psi_1(x + at)$ в точке $M(x_0, t_0)$ имеет значение $u(x_0, t_0) = \varphi_1(x_1) + \psi_1(x_2)$, которое определяется ее значениями в точках A и B. Треугольник AMB называется **характеристическим треугольником** точки $M(x_0, t_0)$. Согласно (11.130), поперечное отклонение $u(x_0, t_0)$ точки x_0 бесконечной струны в момент t_0 определяется только ее начальными отклонениями $\varphi(x)$ в точках $A(x_0 - at_0, 0)$ и $B(x_0 + at_0, 0)$ и начальными скоростями $\psi(x)$ на всей стороне AB характеристического треугольника:

$$u(M) = \frac{1}{2}\big[\varphi(A) + \varphi(B)\big] + \frac{1}{2a}\int\limits_{AB} \psi(z)\,dz.$$

Начальные условия вне отрезка AB не влияют на значение решения в точке $M(x_0, t_0)$.

3. Решение задачи Коши для неоднородного одномерного волнового уравнения. Пусть требуется решить задачу Коши

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)=\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\qquad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t}=\psi(x)\quad(-\infty<x<+\infty),$$

описывающую вынужденные колебания бесконечной струны. Данная задача разбивается на две:

1) задача Коши

$$a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\quad v(x,0)=\varphi(x),\quad \frac{\partial v(x,0)}{\partial t}=\psi(x);$$

2) задача Коши

$$a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}+f(x,t)=\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},\quad w(x,0)=0,\quad \frac{\partial w(x,0)}{\partial t}=0.$$

Решение исходной задачи имеет вид $u=v+w$, где

$$v(x,t)=\frac{1}{2}\big[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)\big]+\frac{1}{2a}\int\limits_{x-at}^{x+at}\psi(z)\,dz,$$

$$w(x,t)=\frac{1}{2a}\int\limits_{0}^{t}\int\limits_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(z,\tau)\,dz\,d\tau.$$

4. Колебания ограниченной струны. Пусть имеется конечная струна, совпадающая в состоянии покоя с отрезком $0\leqslant x\leqslant l$ оси Ox. Требуется методом характеристик найти решение однородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{t=0}=\varphi(x),\qquad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\psi(x),\quad(0\leqslant x\leqslant l)$$

и граничным условиям

$$u\big|_{x=0}=0,\quad u\big|_{x=l}=0,$$

означающим, что концы струны $x=0$ и $x=l$ закреплены. Здесь $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ заданы в промежутке $0\leqslant x\leqslant l$, при этом $\varphi(0)=\varphi(l)=0$, $\psi(0)=\psi(l)=0$.

Предполагается, что $\varphi(x)$ имеет первую и вторую, а $\psi(x)$ — первую непрерывные производные; а также выполняется условие $\varphi''(0) = \varphi''(l)$. Решение данной задачи может быть сведено к изучению колебаний бесконечной струны методом характеристик. Для этого надо продолжить функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из промежутка $[0; l]$ в промежуток $[-l; l]$ нечетным образом, а затем с периодом $2l$ на всю ось Ox по формулам

$$\varphi(-x) = -\varphi(x), \qquad \psi(-x) = -\psi(x),$$
$$\varphi(x + 2l) = \varphi(x), \qquad \psi(x + 2l) = \psi(x).$$

При этом движение бесконечной струны на отрезке $[0; l]$ такое же, как и у конечной струны с закрепленными концами $x = 0$, $x = l$. Решение исходной краевой задачи находится по формуле Даламбера (11.130) с учетом продолжения $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ на всю ось Ox.

5. Решение задачи Коши методом Римана. Любое линейное гиперболическое уравнение второго порядка с двумя независимыми переменными приводится к виду

$$L(u) \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + b(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + c(x, y)u = f(x, y). \tag{11.131}$$

Соответствующее уравнение характеристик имеет вид $dx \cdot dy = 0$. Характеристиками уравнения (11.131) являются прямые $x = C_1$, $y = C_2$, параллельные осям координат. Пусть C — разомкнутая дуга кривой, пересекающаяся не более чем в одной точке с прямыми, параллельными осям координат (рис. 11.18).

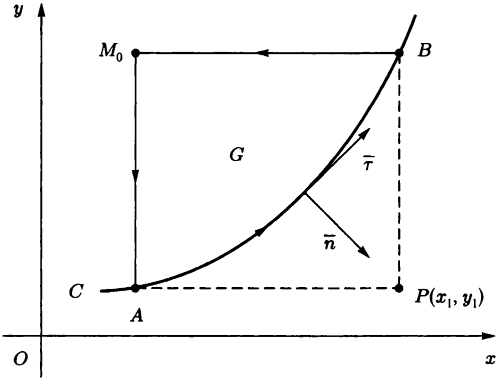


Рис. 11.18

Кривая C задана уравнением $y = h(x)$, где $h(x)$ — дифференцируемая функция и $h'(x) \neq 0$ на C.

Задача Коши: найти решение $u(x, y)$ уравнения (11.131), удовлетворяющее на кривой C начальным условиям

$$u(x,y)\big|_C = u(x,h(x)) = \varphi(x); \qquad \frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_C = \frac{\partial u}{\partial n}(x,h(x)) = \psi(x),$$

где $\varphi(x), \psi(x)$ — заданные на C функции такие, что $\varphi(x)$ — непрерывно дифференцируема, а $\psi(x)$ — непрерывна; $\dfrac{\partial u}{\partial n} = \dfrac{\partial u}{\partial x}n_x + \dfrac{\partial u}{\partial y}n_y$ — производная по направлению единичной нормали $\bar{n} = (n_x, n_y)$ к кривой C (рис. 11.18). Если известны u и $\dfrac{\partial u}{\partial n}$ на C, то, тем самым, известны также $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ и $\dfrac{\partial u}{\partial y}$ на C. При этом $du = u'_x\,dx + u'_y\,dy$. В качестве начальных условий на C можно задавать u, u'_x, u'_y как функции x или y.

Наряду с выражением $L(u)$ (см. левую часть (11.131)) рассмотрим **сопряженное** с $L(u)$ дифференциальное выражение

$$L^*(v) = v''_{xy} - (av)'_x - (bv)'_y + cv.$$

Предполагается, что $a(x, y)$, $b(x, y)$ имеют непрерывные производные первого порядка. Пусть $M_0(x_0, y_0)$ — произвольная точка, а A и B — точки пересечения кривой C с характеристиками $x = x_0$, $y = y_0$, проходящими через M_0. Обозначим через G область, ограниченную характеристиками $x = x_0$, $y = y_0$ и дугой AB. Нормаль $\bar{n}$ — внешняя для G. Тогда решение $u(M_0)$ задачи Коши в каждой точке $M_0(x_0, y_0)$ дается **формулой Римана**:

$$2u(M_0) \equiv 2u(x_0,y_0) = (u\cdot R)_A + (u\cdot R)_B - 2\iint\limits_G f\cdot R\,dx\,dy +$$

$$+\int\limits_{BA}\left[(u'_xR - uR'_x + 2buR)\,dx - (u'_yR - uR'_y + 2auR)\,dy\right], \qquad (11.132)$$

где, например, $(u\cdot R)_A = u_A\cdot R_A$ — соответствующее значение в точке A; $R(M, M_0) \equiv R(x, y; x_0, y_0)$ — **функция Римана**, которая зависит от двух пар аргументов и определяется следующими условиями:

1) R, как функция от x, y, является решением однородного сопряженного уравнения $L^*(R) = 0$;
2) $R'_x(x, y_0; x_0, y_0) = b(x, y_0)R(x, y_0; x_0, y_0)$ на характеристике M_0B;
3) $R'_y(x_0, y; x_0, y_0) = a(x_0, y)R(x_0, y; x_0, y_0)$ на характеристике M_0A;
4) $R(M_0, M_0) \equiv R(x_0, y_0; x_0, y_0) = 1$ в точке $M = M_0$.

Отсюда следуют равенства:

$$R(x, y_0; x_0, y_0) = \exp\left\{ \int\limits_{x_0}^{x} b(x, y_0)\, dx \right\} \quad (\text{на } M_0B),$$

$$R(x_0, y; x_0, y_0) = \exp\left\{ \int\limits_{y_0}^{y} a(x_0, y)\, dy \right\} \quad (\text{на } M_0A).$$

Таким образом, функция Римана R является решением уравнения $L^*(R) = 0$, удовлетворяющим двум предыдущим равенствам, и не зависит ни от начальных условий на C, ни от формы этой кривой. Точки $M(x, y)$ и $M_0(x_0, y_0)$ являются для R соответственно аргументом и параметром. Выражения, стоящие в (11.132) под знаком интеграла по BA, содержат только функции, известные на BA. Действительно, если $x = x(s)$, $y = y(s)$ — уравнения C, где s — длина дуги, то

$$u'_x\Big|_C = (u'_s\tau_x + u'_n n_x)\Big|_C = \frac{\varphi'(x) + \psi(x)h'(x)}{\sqrt{1 + [h'(x)]^2}},$$

$$u'_y\Big|_C = (u'_s\tau_y + u'_n n_y)\Big|_C = \frac{\varphi'(x)h'(x) - \psi(x)}{\sqrt{1 + [h'(x)]^2}},$$

где $\bar\tau = (\tau_x, \tau_y)$, $\bar n = (n_x, n_y) = (\tau_y, -\tau_x)$ — соответственно единичный вектор касательной и нормали к C. Причем

$$du\big|_C = \varphi'(x)\, dx,$$

$$u'_s\big|_C = \varphi'(x)\frac{dx}{ds} = \varphi'(x)\tau_x = \frac{\varphi'(x)}{\sqrt{1 + [h'(x)]^2}};$$

$$u'_n\big|_C = \psi(x); \quad \tau_y = \frac{dy}{ds} = \frac{h'(x)}{\sqrt{1 + [h'(x)]^2}}.$$

Решение (11.132) задачи Коши единственно и непрерывно зависит от начальных данных. Значение решения $u(M_0)$ зависит только от начальных данных на дуге AB кривой C, вырезаемой характеристиками, выходящими из точки M_0. Если изменить начальные условия вне дуги AB, то решение изменится лишь вне криволинейного треугольника M_0AB.

Пример 99. Решить методом Римана задачу Коши (см. также примеры 97 и 98):

$$u''_{xx} - 2\sin x \cdot u''_{xy} - \cos^2 x \cdot u''_{yy} - \cos x \cdot u'_y = 0,$$
$$u\big|_{y=\cos x} = \varphi(x), \quad \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=\cos x} = \psi(x). \tag{1}$$

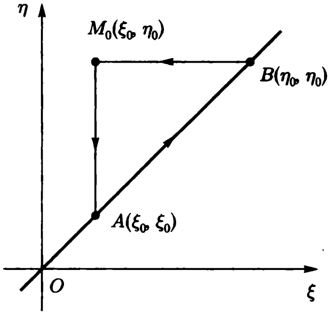


Рис. 11.19

Решение. Уравнение (1) заменой

$$\xi = x - y + \cos x, \quad \eta = x + y - \cos x$$

приводится к виду $L(u) \equiv u''_{\xi\eta} = 0$. Уравнение линии $y = \cos x$ в новых переменных: $\xi = \eta$ (рис. 11.19). На прямой $\xi = \eta$ имеем

$$\begin{aligned} u'_x &= u'_\xi \xi'_x + u'_\eta \eta'_x = \\ &= u'_\xi(1 - \sin x) + u'_\eta(1 + \sin x) = \\ &= u'_\xi(1 - \sin \xi) + u'_\eta(1 + \sin \xi); \\ u'_y &= u'_\xi \xi'_y + u'_\eta \eta'_y = -u'_\xi + u'_\eta, \end{aligned}$$

так как $x = \xi$ на AB. Разрешая предыдущую систему двух уравнений относительно u'_ξ, u'_η по формулам Крамера (с учетом того, что на AB $u'_x = \varphi'_\xi(\xi)$, $u'_y = \psi(\xi)$), находим

$$u'_\xi = \frac{1}{2}\left[\varphi'(\xi) - \psi(\xi) - \psi(\xi)\sin\xi\right],$$

$$u'_\eta = \frac{1}{2}\left[\varphi'(\xi) + \psi(\xi) - \psi(\xi)\sin\xi\right].$$

Принимая в формуле Римана (11.132) $a = b = c = f = 0$, получим

$$2u(\xi_0, \eta_0) = (u \cdot R)_A + (u \cdot R)_B + \int\limits_{BA} \left[(u'_\xi R - uR'_\xi)\, d\xi - (u'_\eta R - uR'_\eta)\, d\eta\right].$$

Неизвестная пока функция Римана $R(\xi, \eta, \xi_0, \eta_0)$ должна удовлетворять сопряженному уравнению $L^*(R) \equiv R''_{\xi\eta} = 0$ и условиям на характеристиках $\eta = \eta_0$ и $\xi = \xi_0$:

$$R(\xi, \eta_0; \xi_0, \eta_0) = \exp \int\limits_{\xi_0}^{\xi} 0 \cdot d\xi = e^0 = 1 \quad (\text{на } M_0B),$$

$$R(\xi_0, \eta; \xi_0, \eta_0) = \exp \int\limits_{\eta_0}^{\eta} 0 \cdot d\eta = e^0 = 1 \quad (\text{на } M_0A).$$

Ищем решение уравнения $R''_{\xi\eta} = 0$ в виде $R = F(t)$, $F(0) = 1$, где $t = (\xi - \xi_0)(\eta - \eta_0)$. Равенство $t = 0$ дает уравнения характеристик $\xi = \xi_0$, $\eta = \eta_0$, выходящих из M_0. Функция $F(t)$ является решением уравнения $tF''(t) + F'(t) = 0$ при условии $F(0) = 1$. Интегрируя это уравнение, получим $F(t) = C_1 \ln t + C_2$. Удовлетворяя условию $F(0) = 1$, найдем $C_1 = 0$, $C_2 = 1$, т. е. $R \equiv 1$. Окончательно, из (2), получим

$$u(\xi_0, \eta_0) = \frac{1}{2}\left[\varphi(\xi_0) + \varphi(\eta_0)\right] + \frac{1}{2}\int\limits_{\xi_0}^{\eta_0} \psi(\xi)\, d\xi.$$

Возвращаясь к старым переменным, найдем решение задачи (1)

$$u(x,y)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x-y+\cos x)+\varphi(x+y-\cos x)\right]+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y+\cos x}^{x+y-\cos x}\psi(z)\,dz,$$

совпадающее с полученным в примере 98. ⊳

6. Задача с характеристическими начальными условиями. Пусть требуется найти решение $u(M_0)$ уравнения

$$L(u)\equiv u''_{xy}+a(x,y)u'_x+b(x,y)u'_y+cu=0,$$

когда заданы только значения неизвестной функции $u(x,y)$ на характеристиках PA и PB, параллельных осям и проходящих через точку $P(x_1,y_1)$ до пересечения с прямыми M_0A и M_0B, параллельными осям координат (рис. 11.18):

$$u\big|_{y=y_1}=\varphi(x),\quad u\big|_{x=x_1}=\psi(y)\quad [\varphi(x_1)=\psi(y_1)].$$

Применяя формулу Римана (11.132), находим, что единственное искомое решение дается формулой

$$u(x_0,y_0)\equiv u(M_0)=u(P)\cdot R(P,M_0)+\int\limits_{PB}R\cdot(au+u'_y)\,dy+\int\limits_{PA}R\cdot(bu+u'_x)\,dx.$$

Здесь $u(x,y)=\varphi(x)$ на PA, следовательно, $u'_x=\varphi'_x$. В результате при $y=y_1$ уравнение $L(u)=0$ переходит в обыкновенное уравнение первого порядка, решение которого дает значение u'_y на PA, которое, тем самым, уже известно. Аналогично находятся u'_x на PB.

7. Метод Фурье для уравнения свободных колебаний ограниченной струны. Требуется найти решение $u(x,t)$ уравнения, описывающего свободные колебания струны, закрепленной на концах $x=0$ и $x=l$,

$$\frac{\partial^2u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2u}{\partial x^2}$$

при граничных условиях

$$u(x,0)=0\quad\text{и}\quad u(l,t)=0$$

и начальных условиях

$$u(x,0)=\varphi(x),\quad u'_t(x,0)=\psi(x).$$

Здесь функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ заданы на отрезке $[0;l]$, причем $\varphi(0)=\varphi(l)=0$.

Ищем ненулевое частное решение **методом Фурье (методом разделения переменных)** в виде произведения $u(x,t)=X(x)\cdot T(t)$. Из граничных условий следует $X(0)=X(l)=0$. Подставляя $u=X\cdot T$ в уравнение, получим

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=\frac{T''(t)}{a^2T(t)}.$$

Здесь левая часть зависит только от x, а правая — только от t, следовательно, обе эти части равны постоянной величине, которую обозначим $(-\lambda)$. Отсюда получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения для $X(x)$ и $T(t)$:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad T''(t) + a^2\lambda T(t) = 0.$$

Требуется найти значения λ, при которых существуют ненулевые решения первого из этих уравнений. Такая задача называется **задачей Штурма–Лиувилля**. Возможны следующие случаи.

1) $\lambda < 0$. Характеристическое уравнение $r^2 + \lambda = 0$ имеет корни $r_{1,2} = \pm\sqrt{-\lambda}$. Подчиняя общее решение $X = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$ граничным условиям $X(0) = X(l) = 0$, находим $C_1 = C_2 = 0$, т. е. $X(x) \equiv 0$.
2) $\lambda = 0$. Общее решение $X = C_1 x + C_2$. Из граничных условий следует $C_1 = C_2 = 0$, т. е. $X(x) \equiv 0$.
3) $\lambda > 0$. Характеристические числа $r_{1,2} = \pm i\sqrt{\lambda}$.

Из общего решения $X(x) = C_1 \cos\sqrt{\lambda}\, x + C_2 \sin\sqrt{\lambda}\, x$, с учетом граничных условий, находим $C_1 = 0$, $C_2 \neq 0$ (в противном случае $X(x) \equiv 0$). Следовательно, ненулевые решения возможны только при условии $\sin\sqrt{\lambda}\, l = 0$, т. е. при значениях

$$\lambda_n = \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Только при таких значениях $\lambda = \lambda_n$ (**собственных значениях**) дифференциальное уравнение имеет ненулевые решения (**собственные функции**)

$$X_n(x) = \sin\frac{n\pi x}{l} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где принято $C_2 = 1$. При $\lambda = \lambda_n$ общее решение уравнения для $T(t)$ имеет вид

$$T_n(t) = A_n \cos\frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin\frac{n\pi a t}{l}.$$

Функция $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ удовлетворяет волновому уравнению и граничным условиям.

Если на отрезке $[0; l]$ функция $\varphi(x)$ дважды непрерывно дифференцируема, имеет кусочно непрерывную третью производную и удовлетворяет условиям $\varphi(0) = \varphi(l) = \varphi''(0) = \varphi''(l) = 0$, а $\psi(x)$ — непрерывно дифференцируема, имеет кусочно непрерывную вторую производную и удовлетворяет условиям $\psi(0) = \psi(l) = 0$, то сумма ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \cos\frac{n\pi a t}{l} + B_n \sin\frac{n\pi a t}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$A_n = \frac{2}{l}\int\limits_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx, \quad B_n = \frac{2}{n\pi a}\int\limits_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

является дважды непрерывно дифференцируемым решением волнового уравнения, удовлетворяющим граничным и начальным условиям. Вводя обозначения $A_n = a_n \sin\delta_n$, $B_n = a_n\cos\delta_n$, $a_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$, полученное решение можно записать в виде ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin\frac{n\pi x}{l}\sin\left(\frac{n\pi a t}{l} + \delta_n\right),$$

каждое слагаемое которого соответствует **стоячей волне**, в которой точки струны совершают **гармонические колебания** с одинаковой **фазой** δ_n и **частотой** $\omega_n = n\pi a/l$. При этом **амплитуда** волны $a_n \sin(n\pi x/l)$ зависит от положения точки.

8. Вынужденные колебания струны, закрепленной на концах. Требуется найти решение уравнения, описывающего колебания струны под действием внешней силы

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$$

при граничных и начальных условиях

$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0; \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u'_t(x,0) = \psi(x).$$

Решение данной краевой задачи ищется в виде суммы $u = v + w$ решений v и w следующих двух краевых задач:

$$1)\ \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + f(x,t),\ v(0,t) = 0,\ v(l,t) = 0,\ v(x,0) = 0,\ v'_t(x,0) = 0,$$

$$2)\ \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2},\ w(0,t) = 0,\ w(l,t) = 0,\ w(x,0) = \varphi(x),\ w(l,0) = \psi(x).$$

Решение второй из этих двух задач приведено выше в п. 7. Решение v первой задачи ищется в виде

$$v(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

так что граничные условия выполняются сразу. Разложим $f(x,t)$ в промежутке $0 \leqslant x \leqslant l$ в ряд Фурье по синусам

$$f(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$f_n(t) = \frac{2}{l}\int\limits_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Для нахождения $T_n(t)$ имеем уравнения

$$T_n''(t) + \omega_n^2 T_n(t) = f_n(t) \quad \left(\omega_n = \frac{n\pi a}{l};\ n = 1, 2, \ldots\right)$$

при условиях $T_n(0) = 0$, $T_n'(0) = 0$. Соответствующие решения этих уравнений имеют вид

$$T_n(t) = \frac{2}{\omega_n l}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_0^l f(z,\tau)\sin\omega_n(t-\tau)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dz.$$

Подставляя $T_n(t)$ в выражение для $v(x,t)$, получим искомое решение первой задачи.

9. Вынужденные колебания струны с подвижными концами. Требуется найти решение краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),$$

$$u(0,t) = g_1(t), \quad u(l,t) = g_2(t), \quad u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t'(x,0) = \psi(x).$$

Данная задача сводится к задаче с нулевыми граничными условиями, к которой применим метод Фурье. Введем вспомогательную функцию

$$w(x,t) = \frac{l-x}{l}g_1(x) + \frac{x}{l}g_2(t),$$

для которой $w(0,t) = g_1(t)$, $w(l,t) = g_2(t)$. Решение исходной краевой задачи ищется в виде $u = v + w$, где v — новая неизвестная функция, удовлетворяющая граничным условиям $v(0,t) = 0$, $v(l,t) = 0$ и начальным условиям

$$v(x,0) = \varphi(x) - g_1(0) - [g_2(0) - g_1(0)]\frac{x}{l} \equiv \varphi_1(x),$$

$$v_t'(x,0) = \psi(x) - g_1'(0) - [g_2'(0) - g_1'(0)]\frac{x}{l} \equiv \psi_1(x).$$

Функция $v(x,t)$ ищется как решение краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f_1(x,t),$$

$$v(0,t) = 0, \quad v(l,t) = 0, \quad v(x,0) = \varphi_1(x), \quad v_t'(x,0) = \psi_1(x),$$

где

$$f_1(x,t) = f(x,t) - g_1''(t) - \left[g_2''(t) - g_1''(t)\right]\frac{x}{l}.$$

Метод решения этой задачи приведен выше в п. **8**.

10. Общая схема метода разделения переменных. Пусть требуется найти решение уравнения

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right] - q(x)u, \tag{11.133}$$

где $\rho(x)$, $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ — непрерывные функции при $0 \leqslant x \leqslant l$, причем $\rho(x) > 0$, $p(x) > 0$, $q(x) \geqslant 0$, удовлетворяющее граничным условиям

$$\alpha u(0,t) + \beta u_x'(0,t) = 0, \quad \gamma u(l,t) + \delta u_x'(l,t) = 0$$

и начальным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t'(x,0) = \psi(x), \quad (0 \leqslant x \leqslant l),$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ — постоянные и $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$. Сначала ищется ненулевое решение уравнения (11.133) в виде произведения $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$, удовлетворяющее только граничным условиям. Из (11.133) следует

$$\frac{\dfrac{d}{dx}\left[p(x)X'(x)\right] - q(x)X(x)}{\rho(x)X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda,$$

где λ — некоторое число. В результате имеем два обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)X'(x)\right] + \left[\lambda\rho(x) - q(x)\right]X(x) = 0, \tag{11.134}$$

$$T''(t) + \lambda T(t) = 0. \tag{11.135}$$

Чтобы получить ненулевое решение уравнения (11.133) вида $u = XT$, удовлетворяющее граничным условиям, необходимо и достаточно выполнение граничных условий

$$\alpha X(0) + \beta X'(0) = 0, \quad \gamma X(l) + \delta X'(l) = 0. \tag{11.136}$$

Таким образом, для нахождения $X(x)$ приходим к следующей задаче на собственные значения для обыкновенного дифференциального уравнения: найти такие значения параметра λ (называемые **собственными значениями**), при которых существуют ненулевые решения уравнения (11.134), удовлетворяющие условиям (11.136) (называемые **собственными функциями**). Доказано, что для данной задачи:

1) Существует счетное множество действительных собственных значений

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n < \ldots .$$

2) Каждому λ_n соответствует собственная функция $X_n(x)$ (одна или две), определяемая с точностью до числового множителя, который обычно выбирают так, что
$$\int_0^l \rho(x)X_n^2(x)\,dx = 1.$$
Функции, удовлетворяющие этому условию, называются **нормированными**.

3) Если $q(x) \geqslant 0$ и $\left[p(x)X_n(x)X_n'(x)\right]\Big|_{x=0}^{x=l} \leqslant 0$, то **все** $\lambda_n \geqslant 0$.

4) $\displaystyle\int_0^l \rho(x)X_n(x)X_m(x)\,dx = \begin{cases} 0 & (m \neq n), \\ 1 & (m = n), \end{cases}$ т. е. собственные функции образуют ортогональную и нормированную систему с **весом** $\rho(x)$.

5) **Теорема Стеклова.** Всякая функция $f(x)$, имеющая непрерывную первую производную и кусочно непрерывную вторую производную и удовлетворяющая условиям (11.136), может быть разложена в абсолютно и равномерно сходящийся ряд по собственным функциям $X_n(x)$:
$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n X_n(x), \quad \text{где} \quad c_n = \int_0^l \rho(x)X_n(x)f(x)\,dx.$$

Уравнение (11.135) при каждом $\lambda = \lambda_n$ имеет общее решение
$$T_n(t) = A_n \cos\sqrt{\lambda_n}\,t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}\,t,$$
где A_n, B_n — произвольные постоянные.

Каждая функция $u_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ является решением уравнения (11.133) с соответствующими граничными условиями. Чтобы удовлетворить также начальным условиям, составим ряд
$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \cos\sqrt{\lambda_n}\,t + B_n \sin\sqrt{\lambda_n}\,t\right)X_n(x). \tag{11.137}$$
Если ряд (11.137), а также ряды, получающиеся из него почленным двукратным дифференцированием по x и t, сходятся равномерно, то его сумма будет удовлетворять уравнению (11.133) и граничным условиям. Для удовлетворения начальных условий к уравнению (11.133) потребуем, чтобы
$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n X_n(x) = \varphi(x),$$
$$u_t'(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n} B_n X_n(x) = \psi(x).$$

Если ряды в этих двух равенствах сходятся равномерно, то, умножая их на $\rho(x)X_n(x)$ и интегрируя по x от 0 до l, найдем коэффициенты

$$A_n = \int_0^l \rho(x)\varphi(x)X_n(x)\,dx, \quad B_n = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n}}\int_0^l \rho(x)\psi(x)X_n(x)\,dx.$$

Подставляя эти коэффициенты в ряд (11.137), получим искомое решение уравнения (11.133), удовлетворяющее одновременно граничным и начальным условиям.

11. Трехмерное однородное волновое уравнение. Решение

$$u(M,t) \equiv u(x,y,z,t)$$

волнового уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) \equiv a^2\Delta u$$

в каждой точке $M(x,y,z)$ безграничного пространства в любой момент времени $t \geqslant 0$, удовлетворяющее при $t = 0$ начальным условиям

$$u(x,y,z,0) = \Phi(x,y,z), \quad u'_t(x,y,z,0) = \Psi(x,y,z),$$

где Φ и Ψ — соответственно трижды и дважды непрерывно дифференцируемы, дается **формулой Пуассона**

$$u(M,t) = \frac{1}{4\pi a}\left[\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{Mr}} \frac{\Phi(P)\,dS}{r} + \iint\limits_{S_{Mr}} \frac{\Psi(P)\,dS}{r}\right], \tag{11.138}$$

где S_{Mr} — сфера радиуса $r = at$ с центром в фиксированной точке $M(x,y,z)$; $P(\bar{x},\bar{y},\bar{z})$ — переменная точка интегрирования на сфере S_{Mr} с координатами $\bar{x} = x + \alpha at$, $\bar{y} = y + \beta at$, $\bar{z} = z + \gamma at$; (α,β,γ) — направляющие косинусы радиуса $\overline{MP}$ сферы S_{Mr}; $dS = r^2\sin\theta\,d\theta\,d\varphi \equiv r^2\,d\Omega$ — элемент площади сферы S_{Mr} в сферических координатах.

Формулу (11.138) можно записать еще в виде

$$u(x,y,z,t) = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Phi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\,d\Omega\right] + \frac{t}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \Psi(\bar{x},\bar{y},\bar{z})\,d\Omega,$$

где углы φ и θ при интегрировании изменяются в промежутках $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$; $\alpha = \sin\theta\cos\varphi$, $\beta = \sin\theta\sin\varphi$, $\gamma = \cos\theta$. Решение (11.138) единственно и непрерывно зависит от начальных данных при конечных значениях t.

Смысл решения (11.138). Пусть начальные возмущения Φ и Ψ отличаются от нуля только в некоторой конечной области G с поверхностью Σ, которая

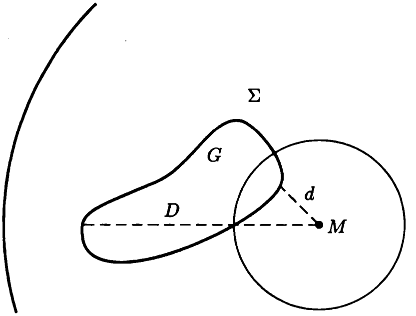


Рис. 11.20

отделяет при $t = 0$ возмущенную область G от покоящегося пространства. При $t > 0$ колебания из G передаются в окружающее пространство, так что в любой момент времени t можно построить поверхность, отделяющую точки, до которых возмущение уже дошло, от тех, до которых оно еще не дошло. Пусть точка M находится вне G. Если $t < d/a$, где d — кратчайшее расстояние от M до Σ (рис. 11.20), то сфера S_{Mr} расположена вне G и $\Phi = 0$, $\Psi = 0$ на S_{Mr}. Согласно (11.138) имеем при этом $u(M,t) = 0$, т. е. возмущение еще не дошло до M. При $t = d/a$ сфера S_{Mr} коснется Σ. Если $t > D/a$, где D — наибольшее расстояние от M до Σ, то S_{Mr} снова будет находится вне G (G — полностью внутри S_{Mr}) и, согласно (11.138), $u(M,t) = 0$.

Распространяющаяся из точек области G волна имеет два **фронта**: **передний фронт**, т. е. поверхность, отделяющая в момент t еще покоящиеся точки пространства от уже колеблющихся; и **задний фронт**, являющийся поверхностью, которая отделяет еще колеблющиеся точки пространства от уже покоящихся. Через каждую точку M вне G волна проходит последовательно обоими своими фронтами: при $t_1 = d/a$ она подойдет к M передним фронтом, а при $t_2 = D/a$ сойдет с M задним фронтом, т. е. в промежуток от t_1 до t_2 волна проходит через точку M. При $t > t_2$ в точке M смещение $u(M,t)$ обращается в нуль, но не в постоянную, как в случае струны (т. е. в случае **плоской волны**). Поверхность переднего фронта в момент t находится как огибающая семейства сфер радиуса $r = at$ с центрами на поверхности Σ (**принцип Гюйгенса**). Постоянная a в волновом уравнении равна **скорости распространения фронта волны**.

12. Трехмерное неоднородное волновое уравнение. Решение задачи Коши в безграничном пространстве для неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \Delta u + f(M,t), \quad u(M,0) = \Phi(M), \quad u'_t(M,0) = \Psi(M),$$

где $M(x, y, z)$ — точка в пространстве, ищется в виде $u = v + w$, где v и w — решения следующих двух задач:

1) $\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \Delta v,\ \ v(M, 0) = \Phi(M),\ \ v'_t(M, 0) = \Psi(M);$

2) $\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2} = a^2 \Delta w + f(M, t),\ \ w(M, 0) = 0,\ \ w'_t(M, 0) = 0.$

Решение первой задачи приведено выше в п. **11**. Решение второй задачи дается выражением, называемым **запаздывающим потенциалом**:

$$w(M, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \iiint\limits_{D_{MR}} \frac{1}{r} f\left(P, t - \frac{r}{a}\right) dV, \tag{11.139}$$

где интегрирование ведется по объему шара D_{MR} радиуса $R = at$ с центром в точке M; $dV = d\bar{x}\, d\bar{y}\, d\bar{z}$; $P(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ — переменная точка интегрирования; $r = PM$ — расстояние между точками P и M $(0 \leqslant r \leqslant R)$. В выражении (11.139) функция f берется в момент $t - r/a$, предшествующий моменту t на промежуток времени r/a, необходимый для распространения возмущения из точки P в точку M со скоростью a.

13. Цилиндрические волны. Требуется найти решение задачи Коши для двумерного однородного волнового уравнения в безграничном трехмерном пространстве

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right), \qquad u(x, y, 0) = \Phi(x, y), \quad u'_t(x, y, 0) = \Psi(x, y), \tag{11.140}$$

где функции Φ, Ψ, заданные в безграничном пространстве, зависят только от x, y и остаются постоянными на всякой прямой, параллельной оси Oz. При этом решение $u(x, y, t)$ также не зависит от z, т. е. его значение не изменяется при изменении z и любых фиксированных x, y, t. Такие волны в пространстве называются **цилиндрическими**.

Решение задачи (11.140) находится по формуле

$$u(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{C_{Mr}} \frac{\Phi(\bar{x}, \bar{y})\, dS}{\sqrt{a^2 t^2 - (x - \bar{x})^2 - (y - \bar{y})^2}} + \frac{1}{2\pi a} \iint\limits_{C_{Mr}} \frac{\Psi(\bar{x}, \bar{y})\, dS}{\sqrt{a^2 t^2 - (x - \bar{x})^2 - (y - \bar{y})^2}},$$

где C_{Mr} — круг радиуса $r = at$ с центром в точке $M(x, y)$ (в которой ищется решение) на плоскости Oxy; $\bar{x}, \bar{y}$ — переменные интегрирования; $dS = d\bar{x}\, d\bar{y}$ — элемент площади. Приведенная формула дает искомое решение в каждой точке прямой, проходящей через любую точку $M(x, y, 0)$ параллельно оси Oz.

Решением задачи Коши для неоднородного волнового двумерного уравнения с нулевыми начальными условиями ($\Phi = 0$, $\Psi = 0$) имеет вид

$$w(x, y, t) = \frac{1}{2\pi a} \int_0^t \left[\iint_{C_{MR}} \frac{f(\overline{x}, \overline{y}, \tau)\, d\overline{x}\, d\overline{y}}{\sqrt{a^2(t-\tau)^2 - \rho^2}} \right] d\tau,$$

где $\rho^2 = (x-\overline{x})^2 + (y-\overline{y})^2$; C_{MR} — круг радиуса $R = a(t-\tau)$ с центром в точке $M(x, y, 0)$.

Пусть начальные возмущения $\Phi(x, y)$, $\Psi(x, y)$ не равны нулю лишь в некоторой бесконечной цилиндрической области, сечением которой плоскостью Oxy является фигура B, ограниченная замкнутой кривой Г. Пусть M — точка в плоскости Oxy вне B и d — наименьшее расстояние от M до Г. Тогда передний фронт цилиндрической волны достигает точки M в момент $t_1 = d/a$. Однако, в двумерном случае, в отличии от трехмерного, возмущение в точке M, начиная с момента $t_2 = D/a$ (D — наибольшее расстояние от M до Г), не обращается ни в нуль (как в пространстве), ни в постоянную (как на струне). При этом $u(x, y, t) \to 0$, если $t \to \infty$. В двумерном случае у волны есть передний фронт, но нет заднего.

14. Постановка задачи о колебаниях мембраны. Под **мембраной** понимают тонкую упругую натянутую пленку, не оказывающую сопротивления на изгиб. Пусть в состоянии покоя мембрана находится в плоскости Oxy и занимает некоторую область D, ограниченную контуром C. Уравнение малых поперечных колебаний мембраны, находящейся под действием равномерного натяжения, приложенного к ее краям (к контуру C), имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + f(x, y, t) \quad (a = \text{const}), \tag{11.141}$$

где $u(x, y, t)$ — смещение точки (x, y) мембраны в момент t, перпендикулярное к плоскости Oxy, функция f характеризует внешнюю силу, действующую на мембрану. Если $f \equiv 0$ (или $f \not\equiv 0$), то колебания называются **свободными** (или **вынужденными**). Уравнение (11.141) — двумерное. Для нахождения функции $u(x, y, t)$ к уравнению (11.141) следует добавить **граничное условие** на контуре мембраны, например, для случая, когда на контуре C мембрана закреплена:

$$u(x, y, t) = 0 \quad \text{на} \quad C \quad (\text{или} \ u\big|_C = 0);$$

а также **начальные условия**, т. е. смещения и скорости каждой точки мембраны в начальный момент $t = 0$:

$$u(x, y, 0) = \Phi(x, y), \quad u_t'(x, y, 0) = \Psi(x, y).$$

15. Свободные колебания прямоугольной мембраны. Рассмотрим свободные колебания мембраны, контуром которой является прямоугольник со сторонами $x = 0$, $x = p$, $y = 0$, $y = q$. Математическая постановка задачи:

$$\begin{gathered} u''_{tt} = a^2(u''_{xx} + u''_{yy}); \\ \begin{aligned} &u(0, y, t) = 0, && u(p, y, t) = 0, \\ &u(x, 0, t) = 0, && u(x, q, t) = 0; \\ &u(x, y, 0) = \Phi(x, y), && u'_t(x, y, 0) = \Psi(x, y). \end{aligned} \end{gathered} \tag{11.142}$$

Частные решения уравнения (11.142) ищем методом разделения переменных в виде $u(x, y, t) = v(x, y) \cdot T(t)$, удовлетворяющем только граничным условиям из (11.142). Из уравнения (11.142) следует (см. также 11.2.4.2, п. 7):

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)} = \frac{v''_{xx} + y''_{yy}}{v} = -k^2,$$

где k^2 — постоянная. В результате получаем дифференциальное уравнение $T'' + (ak)^2T = 0$ и краевую задачу

$$\begin{gathered} v''_{xx} + v''_{yy} + k^2 v = 0; \\ v(0, y) = v(p, y) = 0, \quad v(x, 0) = v(x, q) = 0. \end{gathered}$$

Эта краевая задача также решается методом разделения переменных:

$$v(x, y) = X(x)Y(y).$$

В результате получим

$$\frac{Y''(y)}{Y(y)} + k^2 = -\frac{X''(x)}{X(x)} = k_1^2,$$

где k_1^2 — еще одна постоянная (см. 11.2.4.2, п. 7). Отсюда получаем два уравнения

$$X''(x) + k_1^2 X(x) = 0, \quad Y''(y) + k_2^2 Y(y) = 0$$

($k_2^2 = k^2 - k_1^2$, или $k^2 = k_1^2 + k_2^2$). Граничные условия к ним: $X(0) = 0$, $X(p) = 0$; $Y(0) = 0$, $Y(q) = 0$. Общие решения предыдущих уравнений:

$$X(x) = C_1 \cos k_1 x + C_2 \sin k_1 x, \quad Y(y) = C_3 \cos k_2 y + C_4 \sin k_2 y.$$

С учетом граничных условий находим $C_1 = C_3 = 0$. Полагая $C_2 = C_4 = 1$, получим $X(x) = \sin k_1 x$, $Y(y) = \sin k_2 y$. Из условий $\sin k_1 p = 0$, $\sin k_2 q = 0$ следует

$$k_{1m} = \frac{m\pi}{p}, \quad k_{2n} = \frac{n\pi}{q} \quad (m, n = 1, 2, \ldots).$$

Отсюда находим значения постоянной k^2:

$$k_{mn}^2 = k_{1m}^2 + k_{2n}^2 = \pi^2\left(\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}\right).$$

Этим **собственным значениям** k_{mn} соответствуют **собственные функции**

$$v_{mn}(x, y) = \sin\frac{m\pi x}{p}\cdot\sin\frac{n\pi y}{q}.$$

Чтобы удовлетворить начальным условиям из (11.142), запишем **двойной ряд**

$$u(x, y, t) = \sum_{m,\,n=1}^{\infty}\left(A_{mn}\cos ak_{mn}t + B_{mn}\sin ak_{mn}t\right)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}.$$

Если этот ряд, а также ряды, получающиеся из него двукратным почленным дифференцированием по x, y, t, сходятся равномерно, то его сумма будет решением уравнения (11.142), удовлетворяющим граничным условиям. Для удовлетворения начальных условий необходимо, чтобы

$$u(x, y, 0) = \sum_{m,\,n=1}^{\infty} A_{mn}\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q} = \Phi(x, y),$$

$$u_t'(x, y, 0) = \sum_{m,\,n=1}^{\infty} ak_{mn}B_{mn}\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q} = \Psi(x, y).$$

Предполагая, что эти ряды, являющиеся разложениями функций Φ и Ψ в двойные ряды Фурье, сходятся равномерно, умножая обе части обоих равенств на

$$\sin\frac{m\pi x}{p}\cdot\sin\frac{n\pi y}{q}$$

и интегрируя по x от 0 до p и по y от 0 до q, найдем коэффициенты

$$A_{mn} = \frac{4}{pq}\int_0^p\int_0^q \Phi(x, y)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\,dx\,dy,$$

$$B_{mn} = \frac{4}{apqk_{mn}}\int_0^p\int_0^q \Psi(x, y)\sin\frac{m\pi x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\,dx\,dy.$$

Значения частоты колебания ω мембраны находится по формуле

$$\omega_{mn}^2 = a^2k_{mn}^2 = a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}\right).$$

16. Свободные колебания круглой мембраны. Математическая постановка задачи о колебаниях круглой мембраны радиуса p с центром в начале координат в полярных координатах (r, θ) имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\right);$$
$$u(r,\theta,t)\big|_{r=p} = 0; \quad u(r,\theta,0) = \Phi(r,\theta), \quad u'_t(r,\theta,0) = \Psi(r,\theta). \tag{11.143}$$

Здесь полярные координаты обозначены (r, θ) вместо (ρ, φ). Решение $u(r, \theta, t)$ задачи (11.143) ищется методом разделения переменных в виде

$$u(r,\theta,t) = T(t)\cdot v(r,\theta)$$

в классе функций, периодических по θ с периодом 2π и ограниченных во всех точках мембраны. В результате получается уравнение $T''(t) + a^2\lambda^2 T(t) = 0$ и краевая задача

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \lambda^2 v = 0; \quad v\big|_{r=p} = 0,$$

где λ^2 — постоянная, $v(r, \theta)$ — однозначная, периодическая по θ с периодом 2π функция, конечная при $r = 0$. Решение этой краевой задачи ищется также методом разделения переменных в виде $v(r, \theta) = R(r)\cdot V(\theta)$ с введением еще одной постоянной. Окончательное решение задачи (11.143), удовлетворяющее граничным и начальным условиям, имеет вид ряда:

$$u(r,\theta,t) = \sum_{\substack{n=0\\m=1}}^{\infty}\Big[\big(A_{nm}\cos\omega_{nm}t + B_{nm}\sin\omega_{nm}t\big)\cos n\theta +$$
$$+ \big(C_{nm}\cos\omega_{nm}t + D_{nm}\sin\omega_{nm}t\big)\sin n\theta\Big)\Big] J_n(k_{nm}r),$$

где $\omega_{nm} = ak_{nm}$, $k_{nm} = \mu_{nm}/p$, μ_{nm} — положительные корни трансцендентного уравнения $J_n(\mu) = 0$ [J_n — функция Бесселя первого рода n-го порядка]; $n = 0, 1, 2, \ldots$; $m = 1, 2, \ldots$; коэффициенты $A_{nm}, B_{nm}, C_{nm}, D_{nm}$ находятся при помощи начальных условий (11.143) аналогично п. **15**:

$$A_{0m} = \frac{2}{\pi p^2 J_1^2(\mu_{0m})}\int_0^p\int_0^{2\pi}\Phi(r,\theta)J_0\left(\frac{\mu_{0m}r}{p}\right)r\,dr\,d\theta,$$

$$A_{nm} = \frac{2}{\pi p^2 J_{n+1}^2(\mu_{nm})}\int_0^p\int_0^{2\pi}\Phi(r,\theta)J_n\left(\frac{\mu_{nm}r}{p}\right)\cos(n\theta)r\,dr\,d\theta,$$

$$C_{nm} = \frac{2}{\pi p^2 J_{n+1}^2(\mu_{nm})}\int_0^p\int_0^{2\pi}\Phi(r,\theta)J_n\left(\frac{\mu_{nm}r}{p}\right)\sin(n\theta)r\,dr\,d\theta,$$

Коэффициенты B_{0m}, B_{nm}, D_{nm} находятся соответственно по формулам для A_{0m}, A_{nm}, C_{nm} путем замены в них $\Phi(r, \theta)$ на $\Psi(r, \theta)$ и делением соответствующих формул на $a\mu_{nm}/p$.

11.2.5. Уравнения эллиптического типа

11.2.5.1. Общие сведения

Трехмерное уравнение эллиптического типа, имеющее вид

$$\Delta u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad \left(\Delta \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

где $u(x, y, z)$ — неизвестная функция, Δ — **оператор Лапласа,** называется **уравнением Лапласа**. Неоднородное уравнение $\Delta u = f(x, y, z)$ эллиптического типа, где $f(x, y, z)$ — заданная функция, называется **уравнением Пуассона**. Если функция $u(x, y)$ не зависит от координаты z (т. е. сохраняет постоянное значение на каждой прямой, параллельной оси Oz), то получим двумерное уравнение Лапласа $\Delta u \equiv u''_{xx} + u''_{yy} = 0$, так как $u''_{zz} \equiv 0$. Аналогично рассматривается и двумерное уравнение Пуассона.

Для нахождения функции u к уравнению эллиптического типа следует присоединить некоторое **граничное условие** (см. 11.2.3.3). **Начальные условия** в этом случае не требуются. Пусть область D ограничена замкнутой поверхностью Σ. Если область D, в которой ищется решение эллиптического уравнения, конечна, то краевая задача называется **внутренней**, если бесконечна, то **внешней задачей**. Для внешней задачи ставится еще условие обращения решения в нуль на бесконечности. Обычно для внешних и внутренних задач рассматривают граничное условие:

1) $u\big|_\Sigma = \varphi(M)$, где $\varphi(M)$ — непрерывная функция, заданная на поверхности Σ;

или условие

2) $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_\Sigma = \psi(M)$, когда на Σ задается нормальная к Σ производная функции u.

При этом **краевая задача** с первым (вторым) граничным условием называется **задачей Дирихле (задачей Неймана)** для эллиптического уравнения. Может рассматриваться также и **смешанная задача**. Область D может быть как двумерной, ограниченной контуром C, так и трехмерной, ограниченной поверхностью Σ. Если границей области D является плоскость (прямая), то говорят, что краевая задача поставлена для полупространства (полуплоскости).

Внутренняя задача Дирихле для уравнений $\Delta u = 0$ и $\Delta u = f$ имеет единственное решение во множестве функций, непрерывных в области $\overline{D}$ вместе с частными производными первого порядка. Решение внутренней задачи

Неймана для уравнений $\Delta u = 0$ и $\Delta u = f$ определяется однозначно с точностью до произвольного постоянного слагаемого при выполнении условия

$$\iint\limits_{\Sigma} \psi(M)\, dS - \iiint\limits_{D} f(M)\, dV = 0,$$

вытекающего из формулы Грина (см. 11.2.5.2).

11.2.5.2. Гармонические функции

Функция u, непрерывная вместе со своими частными производными до второго порядка в некоторой области D (трехмерной или двумерной) и удовлетворяющая там уравнению Лапласа (трехмерному или двумерному) $\Delta u = 0$, называется **гармонической функцией** в D.

Формула Грина. Пусть D — некоторая ограниченная трехмерная область, Σ — ее кусочно гладкая поверхность; u, v — две функции, непрерывные со своими производными до второго порядка в замкнутой области $\overline{D}$, тогда справедлива **формула Грина**

$$\iiint\limits_{D} (u\Delta v - v\Delta u)\, dV = \iint\limits_{\Sigma} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dS,$$

где производные в правой части берутся по направлению внешней для D нормали к Σ, $dV = dx\,dy\,dz$, dS — элемент площади. Для двумерной области B, ограниченной кусочно гладким контуром C, формула Грина имеет вид

$$\iint\limits_{B} (u\Delta v - v\Delta u)\, dx\, dy = \oint\limits_{C} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n} \right) dl.$$

Если вместо внешней нормали брать внутреннюю, то надо изменить знак правой части формулы Грина на противоположный. Формула Грина применима и в случае области D (или B), ограниченной несколькими замкнутыми поверхностями Σ_i (или контурами C_i). Из формулы Грина следует, что для любой функции u, непрерывной вместе со своими производными до второго порядка в трехмерной замкнутой области $\overline{D}$, справедлива формула

$$u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_{\Sigma} \left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) \right] dS - \frac{1}{4\pi} \iiint\limits_{D} \frac{\Delta u}{r}\, dV, \qquad (11.144)$$

где M_0 — любая произвольно фиксированная точка в D; $r = |\overline{M_0M}|$ — расстояние от фиксированной точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до переменной точки интегрирования $M(x, y, z)$; $\Delta \cdot 1/r = 0$ при $M \neq M_0$.

Соответствующая формула для плоской области B имеет вид

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi} \oint\limits_C \left[u\frac{\partial(\ln r)}{\partial n} - \ln r \frac{\partial u}{\partial n} \right] dl + \frac{1}{2\pi} \iint\limits_B (\ln r)\Delta u\, dS. \tag{11.145}$$

Здесь учтено, что в двумерном случае $\Delta(\ln r) = 0$ при $M \neq M_0$.

Свойства гармонических функций. Пусть функция $u(M)$ гармонична (т. е. $\Delta u = 0$) в конечной области D, ограниченной поверхностью Σ, и непрерывна со своими производными первого порядка в $\overline{D}$, тогда:

1) $\displaystyle\iint\limits_\Sigma \frac{\partial u}{\partial n}\, dS = 0$;
2) $\displaystyle u(M_0) = \frac{1}{4\pi} \iint\limits_\Sigma \left[\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right) \right] dS$;
3) $\displaystyle u(M_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint\limits_{S_R} u(M)\, dS$, где S_R — сфера радиуса R с центром M_0, целиком находящаяся в D; M — точка на S (**теорема о среднем значении**);
4) функция $u(M)$, не равная тождественно постоянной, достигает своего наибольшего и наименьшего значений только на границе Σ области D.

Гармонические функции на плоскости имеют аналогичные свойства, которые устанавливаются при помощи формулы Грина и формулы (11.145), в частности, теорема о среднем значении примет вид

$$u(M_0) = \frac{1}{2\pi R} \oint\limits_{C_R} u(M)\, dl,$$

где C_R — окружность радиуса R с центром M_0.

11.2.5.3. Решение краевых задач методом функций Грина

Рассмотрим задачу Дирихле в **ограниченной** области D с поверхностью Σ:

$$\Delta u = f, \quad u\big|_\Sigma = F,$$

где f и F — непрерывные функции.

Функцией Грина оператора Лапласа для области D называется функция $G(M, M_0)$, удовлетворяющая следующим условиям.

1) $G(M, M_0)$ является функцией двух точек: M, принадлежащей $\overline{D}$, и M_0, принадлежащей D. Как функция от переменной точки $M(x, y, z)$, при произвольно фиксированной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$, она удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta G \equiv G''_{xx} + G''_{yy} + G''_{zz} = 0$ (является гармонической) во всех точках M из D кроме $M = M_0$. При $M = M_0$ функция $G(M, M_0)$ обращается в бесконечность.

2) Граничное значение $G(M, M_0)$ на поверхности Σ равно нулю:

$$G(M, M_0)\big|_{\Sigma} = 0.$$

3) Она может быть представлена в виде

$$G(M, M_0) \equiv G(x, y, z; x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{4\pi r} + g(M, M_0),$$

где $r = |\overline{MM}_0|$ — расстояние между точками M и M_0; $g(M, M_0)$ — функция, гармоническая всюду в D и непрерывная в $\overline{D}$ по M.

Аналогично определяется функция Грина для **бесконечной** области вне Σ, при этом требуется, чтобы G стремилась к нулю, если точка M стремится к бесконечности для любой фиксированной точки M_0.

Свойства функции Грина

1) $0 < G(M, M_0) < \dfrac{1}{4\pi r}$ для $M, M_0 \in D$, $M \neq M_0$;
2) $G(M, M_0) = G(M_0, M)$.

Физический смысл функции Грина. Пусть Σ — электропроводящая поверхность с нулевым потенциалом. Тогда $G(M, M_0) = G(M_0, M)$ можно рассматривать как суммарный потенциал, создаваемый в точке M_0 зарядом $+\dfrac{1}{4\pi}$, помещенным в точку M, и зарядами, индуцированными на Σ.

Для **построения функции Грина** необходимо найти гармоническую в области D функцию $g(M, M_0)$, удовлетворяющую на Σ граничному условию

$$g(M, M_0)\big|_{\Sigma} = -\frac{1}{4\pi r}.$$

Если найдена функция Грина $G(M, M_0)$, то, согласно (11.144) и формуле Грина, искомое решение задачи Дирихле в точке M_0 имеет вид

$$u(M_0) = \iint\limits_{\Sigma} \left[G\frac{\partial u}{\partial n} - u\frac{\partial G}{\partial n}\right] dS - \iiint\limits_{D} G\Delta u\, dV =$$
$$= -\iint\limits_{\Sigma} F(M)\frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n}\, dS_M - \iiint\limits_{D} G(M, M_0) f(M)\, dV_M,$$

где M — переменная точка интегрирования, $dV_M = dx\,dy\,dz$.

В случае плоской области B, ограниченной контуром C, функция Грина оператора Лапласа имеет вид

$$G(M, M_0) = -\frac{1}{2\pi}\ln r + g(M, M_0) \quad (M \in \overline{B},\ M_0 \in B),$$

где $r = |\overline{MM_0}|$, $g(M, M_0)$ — функция, гармоническая всюду в B и непрерывная в $\overline{B}$ по M. На контуре C выполняется $G(M, M_0)\big|_C = 0$. Например, решение краевой задачи

$$\Delta u = 0, \quad u\big|_C = F$$

в области B с границей C дается при этом формулой

$$u(M_0) = -\oint\limits_C F(M)\frac{\partial G(M, M_0)}{\partial n}\,dl_M, \tag{11.146}$$

где M — переменная точка интегрирования.

Пример 100. Найти решение внутренней задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге с центром в начале координат с окружностью C радиуса R:

$$\Delta u = 0, \quad u\big|_C = F(\varphi),$$

где $F(\varphi)$ — заданная функция, φ — полярный угол в полярных координатах (ρ, φ).

Решение. Построение функции Грина

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r} + g(M, M_0)$$

сводится к нахождению функции g, гармонической в круге и равной $\left(-\frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{r}\right)$ на C. Обозначим через M_1 точку на луче OM_0, для которой $\rho_0\rho_1 = R^2$, где $\rho_0 = OM_0$, $\rho_1 = OM_1$ (рис. 11.21). Для любой точки M на окружности C треугольники OMM_0

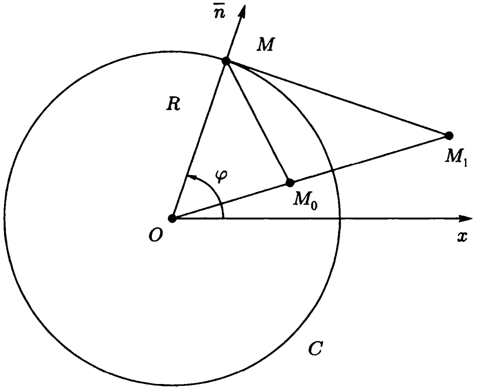


Рис. 11.21

и OMM_1 подобны, так как угол при O общий и $OM_0 : OM = OM : OM_1$. Из подобия следует

$$\frac{r_0}{r_1} = \frac{\rho_0}{R} = \frac{R}{\rho_1},$$

где $r_0 = |\bar{r}_0| \equiv |\overline{M_0M}|$, $r_1 = |\bar{r}_1| \equiv |\overline{M_1M}|$. Отсюда $r_0 = \rho_0 r_1/R$. Следовательно,

$$g = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{R}{\rho_0 r_1},$$

т. е.

$$G(M, M_0) = \frac{1}{2\pi}\left[\ln\frac{1}{r_0} - \ln\frac{R}{\rho_0 r_1}\right],$$

где точка M, вообще говоря, уже не лежит на окружности. Для решения краевой задачи по формуле (11.146) вычислим производную $\partial G/\partial n$ на C по направлению внешней нормали $\bar{n}$:

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r_0} - \frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{R}{\rho_0 r_1}\right];$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{r_0} = \left[\frac{\partial}{\partial r_0}\ln\frac{1}{r_0}\right]\frac{\partial r_0}{\partial n} = -\frac{1}{r_0}\cos(\bar{r}_0, \bar{n}),$$

$$\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{R}{\rho_0 r_1} = \left[\frac{\partial}{\partial r_1}\ln\frac{R}{\rho_0 r_1}\right]\frac{\partial r_1}{\partial n} = -\frac{1}{r_1}\cos(\bar{r}_1, \bar{n}),$$

так как

$$\frac{\partial r_0}{\partial n} = \operatorname{grad}_n r_0 = \cos(\bar{r}_0, \bar{n}); \qquad \frac{\partial r_1}{\partial n} = \cos(\bar{r}_1, \bar{n}).$$

Из треугольников OMM_0 и OMM_1 находим

$$\cos(\bar{r}_0, \bar{n}) = \frac{R^2 + r_0^2 - \rho_0^2}{2Rr_0}; \qquad \cos(\bar{r}_1, \bar{n}) = \frac{R^2 + r_1^2 - \rho_1^2}{2Rr_1}.$$

С учетом $\rho_1 = \dfrac{R^2}{\rho_0}$, а на окружности $r_1 = r_0\dfrac{R}{\rho_0}$, получим

$$\left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_C = -\frac{1}{2\pi R}\frac{R^2 - \rho_0^2}{r_0^2}.$$

Из треугольника OMM_0 находим $r_0^2 = R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0\cos(\varphi - \varphi_0)$, где (R, φ) и (ρ_0, φ_0) — координаты точки M на окружности и точки M_0 соответственно. Учитывая, что на окружности $dl_M = R\,d\varphi$, по формуле (11.146) находим искомое решение

$$u(M_0) \equiv u(\rho_0, \varphi_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{R^2 - \rho_0^2}{R^2 + \rho_0^2 - 2R\rho_0\cos(\varphi - \varphi_0)}F(\varphi)\,d\varphi,$$

называемое **интегралом Пуассона для круга.** ▷

Пример 101. Решить внутреннюю задачу Дирихле для шара радиуса R:

$$\Delta u = 0, \quad u\big|_\Sigma = F.$$

Решение в сферических координатах (ρ, θ, φ) проводится аналогично примеру 100. В тех же обозначениях (после замены окружности сферой) функция Грина имеет вид

$$G(M, M_0) = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{R}{\rho_0 r_1}\right).$$

Искомое решение в точке $M_0(\rho_0, \theta_0, \varphi_0)$ внутри сферы, называемое интегралом Пуассона для сферы, имеет вид

$$u(M_0) = \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} F(\theta, \varphi)\frac{R^2 - \rho_0^2}{(R^2 - 2R\rho_0\cos\gamma + \rho_0^2)^{3/2}}\sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

где $\cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_0 + \sin\theta\sin\theta_0\cos(\varphi - \varphi_0)$. ▷

11.2.5.4. Решение краевых задач методом разделения переменных

Для простых по форме областей (прямоугольник, круг, круговое кольцо, цилиндр, шар, прямоугольный параллелепипед и др.) решение краевых задач для уравнений Лапласа и Пуассона может быть найдено методом разделения переменных.

1. Найти в полярных координатах (ρ, φ) функцию $u(\rho, \varphi)$, гармоническую в круге B радиуса r, непрерывную в $\overline{B}$ и принимающую заданные значения $F(\varphi)$ на границе круга $\rho = r$; т. е. решить внутреннюю краевую задачу

$$\Delta u = 0, \quad u(r, \varphi) = F(\varphi).$$

Функция F в общем случае кусочно непрерывна. Решение $u(\rho, \varphi)$ должно быть однозначной, следовательно, периодической функцией:

$$u(\rho, \varphi + 2\pi) = u(\rho, \varphi).$$

Решение ищется в виде $u(\rho, \varphi) = R(\rho)\cdot\Phi(\varphi) \not\equiv 0$. Тогда из уравнения Лапласа в полярных координатах

$$\Delta u \equiv \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right) + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2} = 0$$

после разделения переменных следует

$$\frac{\rho^2 R''(\rho) + \rho R'(\rho)}{R(\rho)} = -\frac{\Phi''(\varphi)}{\Phi(\varphi)} = \lambda,$$

где λ — постоянная. Получаем два дифференциальных уравнения:

$$\begin{aligned} &\Phi'' + \lambda\Phi = 0 \quad [\Phi \not\equiv 0,\ \Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)], \\ &\rho^2 R'' + \rho R' - \lambda R = 0 \quad (R \not\equiv 0). \end{aligned} \tag{11.147}$$

Первое из них только при $\lambda \geqslant 0$ имеет решение

$$\Phi(\varphi) = A\cos\sqrt{\lambda}\varphi + B\sin\sqrt{\lambda}\varphi,$$

удовлетворяющее условию периодичности $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$, если $\sqrt{\lambda} = n$, где n — любое неотрицательное целое число. Числа $\lambda_n = n^2$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ называются собственными значениями данной задачи. Соответствующие им ненулевые решения

$$1,\ \cos\varphi,\ \sin\varphi,\ \ldots,\ \cos n\varphi,\ \sin n\varphi,\ \ldots$$

называются собственными функциями задачи. При $\lambda = 0$ общее решение уравнения имеет вид $\Phi_0(\varphi) = A_0 + B_0\varphi$. В силу периодичности, $B_0 = 0$. Полагая $A_0 = 1$, получим собственную функцию, соответствующую собственному значению $\lambda_0 = 0$. Общее решение первого уравнения (11.147):

$$\Phi_n(\varphi) = A_n\cos n\varphi + B_n\sin n\varphi \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Общее решение второго уравнения (11.147) при $\lambda = n^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$, являющегося уравнением Эйлера (см. 11.1.4.4), ищем в виде $R(\rho) = \rho^m$. Отсюда $m^2 - n^2 = 0$, т. е. $m = \pm n$. Общее решение имеет вид $R_n(\rho) = C_n\rho^n + D_n\rho^{-n}$ $(n > 0)$. Если $n = 0$, то общее решение: $R_0(\rho) = C_0 + D_0\ln\rho$. Решение должно быть конечным при $\rho = 0$, следовательно, надо положить $D_n = 0$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$. Решениями вида $R(\rho)\Phi(\varphi)$ являются функции

$$u_n = \rho^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $a_n = A_nC_n$, $b_n = B_nC_n$. Решение внутренней краевой задачи представим в виде суммы решений u_n, т. е. в виде ряда

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n(a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi) \quad (\rho \leqslant r).$$

Коэффициенты a_n, b_n находятся из граничного условия $u(r, \varphi) = F(\varphi)$:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F(t)\,dt, \qquad a_n = \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}F(t)\cos nt\,dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi r^n}\int_0^{2\pi}F(t)\sin nt\,dt \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Сумма ряда, представляющего решение $u(\rho, \varphi)$, равна интегралу Пуассона для круга (см. пример 100).

Примечание 1. Решение внешней краевой задачи для круга, ограниченное в бесконечности, ищется аналогично и имеет вид ряда

$$u(\rho, r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\rho^n}(a_n \cos n\varphi + b_n \sin n\varphi) \quad (\rho \geqslant r),$$

коэффициенты которого находятся из граничного условия.

Примечание 2. Решение краевой задачи для кольцевой области между двумя концентрическими окружностями $\rho = r_1$, $\rho = r_2$ $(r_1 < r_2)$

$$\Delta u = 0; \quad u(r_1, \varphi) = F_1(\varphi), \quad u(r_2, \varphi) = F_2(\varphi)$$

имеет вид ряда

$$u(\rho, \varphi) = R_0(\rho) + \sum_{n=1}^{n} R_n(\rho)\Phi_n(\varphi),$$

где общие выражения для R_0, R_n, Φ_n, содержащие все коэффициенты, приведены выше. Коэффициенты этого ряда находятся из граничных условий аналогично предыдущему.

2. Найти решение $u(x, y)$ краевой задачи

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0;$$
$$u(0, y) = f_1(y), \quad u(a, y) = f_2(y) \quad (0 \leqslant y \leqslant b),$$
$$u(x, 0) = F_1(x), \quad u(x, b) = F_2(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant a)$$

в прямоугольной области $(0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant y \leqslant b)$; причем $f_1(0) = F_1(0)$, $f_1(b) = F_2(0)$, $f_2(0) = F_1(a)$, $F_2(a) = f_2(b)$.

Данная краевая задача сводится к следующим двум задачам:

$$\begin{aligned} &1)\ \Delta v = 0; \\ &\quad 1а)\ v(0, y) = 0, \quad v(a, y) = 0, \\ &\quad 1б)\ v(x, 0) = F_1(x), \quad v(x, b) = F_2(x); \end{aligned} \tag{11.148}$$

$$\begin{aligned} &2)\ \Delta w = 0; \\ &\quad 2а)\ w(0, y) = f_1(y), \quad w(a, y) = f_2(y), \\ &\quad 2б)\ w(x, 0) = 0, \quad w(x, b) = 0; \end{aligned} \tag{11.149}$$

тогда решение исходной краевой задачи $u(x, y) = v(x, y) + w(x, y)$.

Ищем решение уравнения Лапласа (11.148) в виде $v(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$, удовлетворяющее сначала только однородным граничным условиям 1а). Подставляя $v = X \cdot Y$ в уравнение, получим соотношение

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y''}{Y} = -\lambda \quad (\lambda \text{ — постоянная}),$$

распадающееся на два уравнения

$$X'' + \lambda X = 0, \quad Y'' - \lambda Y = 0. \tag{11.150}$$

Подставляя $v = X \cdot Y$ в условие 1а), получим

$$X(0) = 0, \quad X(a) = 0. \tag{11.151}$$

Только при $\lambda > 0$ первое уравнение (11.150) с граничными условиями (11.151) имеет ненулевое решение

$$X = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x,$$

в котором $A = 0$; $\sqrt{\lambda}a = \pi n$, т.е. собственные значения равны $\lambda_n = \pi^2 n^2/a^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Соответствующие собственные (ненулевые) функции:

$$X_n(x) = \sin\frac{\pi n}{a}x$$

(полагаем $B = 1$). При $\lambda = \lambda_n$ второе уравнение (11.150) имеет общее решение

$$Y_n(y) = C_n \operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}y + D_n \operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}y.$$

Решение краевой задачи (11.148) запишем в виде ряда

$$v(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n \operatorname{ch}\frac{\pi n}{a}y + D_n \operatorname{sh}\frac{\pi n}{a}y\right)\sin\frac{\pi n}{a}x,$$

где C_n, D_n находятся при помощи граничных условий 1б) в (11.148):

$$C_n = \frac{2}{a}\int_0^a F_1(t)\sin\frac{\pi n t}{a}\,dt, \qquad C_n \operatorname{ch}\frac{\pi n b}{a} + D_n \operatorname{sh}\frac{\pi n b}{a} = \frac{2}{a}\int_0^a F_2(t)\sin\frac{\pi n t}{a}\,dt.$$

Краевая задача (11.149) решается аналогично.

3. Найти решение краевой задачи

$$u''_{xx} + u''_{yy} = 0;$$

$$\begin{aligned}
&1)\quad u(0, y) = k, \quad u(a, y) = ky \quad (0 \leqslant y \leqslant b),\\
&2)\quad u'_y(x, 0) = 0, \quad u'_y(x, b) = 0 \quad (0 \leqslant x \leqslant a)
\end{aligned}$$

в прямоугольнике $(0 \leqslant x \leqslant a,\ 0 \leqslant x \leqslant b)$.

Ищем решение в виде $u(x, y) = X(x) \cdot Y(y)$, удовлетворяющее сначала только однородному граничному условию 2). После разделения переменных имеем два уравнения: $X'' - \lambda X = 0$, $Y'' + \lambda Y = 0$. Из граничного условия 2) следует: $Y'(0) = 0$, $Y'(b) = 0$. При $\lambda = \lambda_0 = 0$ имеем $Y(y) = A_0 + B_0 y$, где $A_0 \neq 0$, $B_0 = 0$. При $\lambda > 0$ получим $Y(y) = A\cos\sqrt{\lambda}y + B\sin\sqrt{\lambda}y$, где $B = 0$, $\lambda_n = \pi^2 n^2/b^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Собственным числам $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots$ соответствуют собственные функции

$$1, \quad \cos\frac{\pi y}{b}, \quad \cos\frac{2\pi y}{b}, \quad \ldots.$$

Уравнение для $X(x)$ при $\lambda = 0$ имеет решение $X(x) = C_0 + D_0 x$; а при $\lambda = \lambda_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$

$$X_n(x) = C_n \operatorname{ch} \frac{\pi n x}{b} + D_n \operatorname{sh} \frac{\pi n x}{b}.$$

Решение исходной краевой задачи ищем в виде ряда

$$u(x, y) = C_0 + D_0 x + \sum_{n=1}^{\infty} \left(C_n \operatorname{ch} \frac{\pi n x}{b} + D_n \operatorname{sh} \frac{\pi n x}{b} \right) \cos \frac{\pi n y}{b}.$$

Найдя коэффициенты C_0, D_0, C_n, D_n при помощи граничных условий 1), получим искомое решение:

$$u(x,y) = k + \frac{k(b-2)}{2a} x - \frac{4kb}{\pi^2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(2m+1)^2} \frac{\operatorname{sh}\left[\dfrac{(2m+1)\pi x}{b}\right]}{\operatorname{sh}\left[\dfrac{(2m+1)\pi a}{b}\right]} \cos\left[\frac{(2m+1)\pi y}{b}\right].$$

11.2.6. Решение уравнений параболического типа

11.2.6.1. Общие замечания

Основные типы краевых задач для уравнений параболического типа приведены в 11.2.3.3.

Уравнение теплопроводности (трехмерное)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) + f(x, y, z, t), \tag{11.152}$$

где $u(x, y, z, t)$ — неизвестная функция, a — постоянная, относится к параболическому типу. Если заданная функция $f \equiv 0$ $(f \not\equiv 0)$, то уравнение называется **однородным** (**неоднородным**). Аналогично рассматриваются одномерное $[u = u(x, t)]$ и двумерное $[u = u(x, y, t)]$ уравнения теплопроводности (см. также 11.2.3.2, 3)

Если область D, в которой ищется решение, безгранична, т. е. совпадает со всем пространством, то ставится **задача Коши**: найти функцию $u(x, y, z, t) \equiv u(M, t)$, удовлетворяющую при $t > 0$ уравнению (11.152) в любой точке $M(x, y, z)$ пространства и начальному условию (при $t = 0$)

$$u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z),$$

где φ — заданная функция.

В случае ограниченной области D пространства с границей Σ ставится **смешанная задача** для уравнения теплопроводности: найти функцию $u(x, y, z, t)$, удовлетворяющую в области D при $t > 0$ уравнению (11.152), а также

1) начальному (при $t = 0$) условию $u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z)$ в области $\overline{D}$,

2) граничному (при $t > 0$) условию $u(M,t)\big|_\Sigma = \gamma(M,t)$ в каждой точке M поверхности Σ,

где φ, γ — непрерывные в области их определения функции; причем должно выполняться **условие согласованности** $\gamma(M,0) = \varphi(M)\big|_\Sigma$.

В общем случае граничное условие имеет вид (см. 11.2.3.2, 2):

$$\left[\alpha(M)u + \beta(M)\frac{\partial u}{\partial n}\right]_\Sigma = \gamma(M,t) \quad (t > 0).$$

Принцип максимума и минимума. Пусть D — конечная область с поверхностью Σ. Рассмотрим в пространстве (x, y, z, t) бесконечный цилиндр G, основанием которого является $\overline{D}$, а образующие параллельны оси Ot $(t \geqslant 0)$. Пусть замкнутая область $\overline{G}_T$ — часть этого цилиндра, ограниченная плоскостями $t = 0$ и $t = T > 0$. Тогда каждая функция $u(M,t)$, являющаяся решением однородного уравнения теплопроводности в G_T и непрерывная на $\overline{G}_T$, принимает наибольшее и наименьшее значения или на «нижнем» основании цилиндра (на плоскости $t = 0$), или на его боковой поверхности.

Единственность решения смешанной задачи. Решение $u(x, y, z, t)$ смешанной задачи для уравнения (11.152), непрерывное в замкнутой области $\overline{G}_T$ вместе с частными производными первого порядка по совокупности аргументов, единственно и непрерывно зависит от исходных данных (т. е. от правых частей начального и граничного условий).

Единственность решения задачи Коши. Непрерывное и ограниченное в бесконечном пространстве при $t \geqslant 0$ решение задачи Коши

$$u'_t = a^2 \Delta u, \quad u(M,0) = \varphi(M),$$

где $\varphi(M)$ — непрерывная и ограниченная всюду функция, единственно и непрерывно зависит от φ.

11.2.6.2. Решение краевых задач методом разделения переменных

1. Найдем непрерывное в замкнутой области $0 \leqslant x \leqslant l$, $0 \leqslant t \leqslant T$ решение $u(x,t)$ однородного одномерного уравнения теплопроводности

$$u'_t - a^2 u''_{xx} \quad (0 < x < l,\ 0 < t \leqslant T),$$

удовлетворяющее начальному и граничным условиям

$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l),$$
$$u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0 \quad (0 \leqslant t \leqslant T),$$

где $\varphi(x)$ непрерывна, имеет кусочно непрерывную производную и

$$\varphi(0) = \varphi(l) = 0.$$

Ищем решение в виде $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$. Подставляя его в исходное уравнение, находим

$$\frac{T'(t)}{a^2T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda \quad (\lambda \text{ — постоянная}).$$

Отсюда получаем два уравнения

$$X'' + \lambda X = 0, \quad T' + a^2\lambda T = 0. \tag{11.153}$$

Граничные условия к первому из них: $X(0)=0$, $X(l)=0$. Только для (собственных) значений $\lambda_n = (\pi n/l)^2$ $(n = 1, 2, \ldots)$ существуют ненулевые решения (собственные функции) первого уравнения (11.153), равные $X_n(x) = \sin(n\pi x/l)$. Значениям $\lambda = \lambda_n$ соответствуют решения второго уравнения (11.153):

$$T_n(t) = A_n \exp\{-a^2\lambda_n t\},$$

где A_n — произвольные постоянные, $\exp\{x\} \equiv e^x$. Решение исходной краевой задачи является суммой ряда, составленного из произведений X_nT_n:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \exp\left\{-\left(\frac{\pi n a}{l}\right)^2 t\right\} \sin\frac{n\pi x}{l},$$

коэффициенты которого находятся при помощи начального условия по формуле

$$A_n = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Этот ряд удовлетворяет всем условиям краевой задачи.

2. Найти решение $u(x,t)$ краевой задачи

$$u'_t = a^2u''_{xx} \quad (0 < x < l,\ t > 0);$$
$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l);$$
$$u(0,t) = \psi_1(t), \quad u(l,t) = \psi_2(t) \quad (t \geqslant 0),$$

где φ, ψ_1, ψ_2 — заданные функции.

Искомое решение имеет вид ряда

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$T_n(t) = e^{-kt}\left\{C_n + \frac{2n\pi a^2}{l^2}\int_0^t e^{k\tau}\left[\psi_1(\tau) - (-1)^n\psi_2(\tau)\right]d\tau\right\};$$

$$k = \left(\frac{n\pi a}{l}\right)^2, \quad C_n = T_n(0) = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

Если $\psi_1(t) = u_1 = \text{const}$, $\psi_2(t) = u_2 = \text{const}$, то решение принимает вид

$$u(x,t) = u_1 + (u_2 - u_1)\frac{x}{l} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n u_2 - u_1}{n}e^{-kt}\sin\frac{n\pi x}{l} + \\ + \frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-kt}\sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^l \varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

3. Решение $u(x,t)$ краевой задачи

$$u'_t = a^2 u''_{xx} \quad (0 < x < l,\ t > 0);$$
$$u(x,0) = \varphi(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant l);$$
$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} - hu\right)\bigg|_{x=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial x} + hx\right)\bigg|_{x=l} = x \quad (t \geqslant 0,\ h > 0)$$

имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\left(\cos\frac{\mu_n x}{l} + \frac{p}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n x}{l}\right)\exp\left\{-\left(\frac{\mu_n a}{l}\right)^2 t\right\},$$

где

$$A_n = \frac{2}{l}\frac{\mu_n^2}{p(p+2)+\mu_n^2}\int_0^l \varphi(x)\left(\cos\frac{\mu_n x}{l} + \frac{p}{\mu_n}\sin\frac{\mu_n x}{l}\right)dx,$$

μ_n $(n = 1, 2, \ldots)$ — положительные корни уравнения

$$2\operatorname{ctg}\mu = \frac{\mu}{p} - \frac{p}{\mu} \quad (p = hl > 0).$$

4. Решение $u(x,t)$ краевой задачи с неоднородным уравнением теплопроводности и однородными начальными и граничными условиями

$$u'_t = a^2 u''_{xx} + f(x,t); \quad u(x,0) = 0; \quad u(0,t) = 0, \quad u(l,t) = 0$$

имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int_0^t e^{-\omega_n^2(t-\tau)} f_n(\tau)\,d\tau\right]\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где

$$\omega_n = \frac{n\pi a}{l}, \quad f_n(\tau) = \frac{2}{l}\int_0^l f(x,\tau)\sin\frac{n\pi x}{l}\,dx.$$

5. Решение $u(x,t)$ краевой задачи с неоднородным уравнением теплопроводности и неоднородными начальными и граничными условиями

$$u'_t = a^2 u''_{xx} + f(x,t); \quad u(x,0) = \varphi(x); \quad u(0,t) = \psi_1(t), \quad u(l,t) = \psi_2(t)$$

имеет вид $u(x,t) = v(x,t) + w(x,t)$, где функции v, w удовлетворяют следующим двум краевым задачам:

1) $v'_t = a^2 v''_{xx}$; $v(x,0) = \varphi(x)$; $v(0,t) = \psi_1(t)$, $v(l,t) = \psi_2(t)$;

2) $w'_t = a^2 w''_{xx} + f(x,t)$; $w(x,0) = 0$; $w(0,t) = 0$, $w(l,t) = 0$.

Решения обеих этих задач приведены выше (в п. **2** и п. **4** соответственно).

6. Найдем решение $u(x,y,t)$ двумерной краевой задачи, описывающей распространение тепла в прямоугольной пластине $0 \leqslant x \leqslant p$, $0 \leqslant y \leqslant q$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial t} = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right);\\
&u(x,y,0) = \varphi(x,y);\\
&u(0,y,t) = u(p,y,t) = 0;\\
&u(x,0,t) = u(x,q,t) = 0.
\end{aligned}$$

Решение ищется в виде $u(x,y,t) = X(x)Y(y)T(t)$. Получим уравнения

$$X'' + \lambda^2 X = 0, \quad Y'' + \mu^2 Y = 0, \quad T' + a^2(\lambda^2 + \mu^2)T = 0,$$

где λ, μ — постоянные.

Общие решения этих уравнений

$$\begin{aligned}
X(x) &= C_1 \cos\lambda x + C_2 \sin\lambda x,\\
Y(y) &= C_3 \cos\mu x + C_4 \sin\mu x,\\
T(t) &= A \cdot \exp\left\{-a^2(\lambda^2 + \mu^2)t\right\}.
\end{aligned}$$

Для удовлетворения граничных условий следует положить

$$C_1 = 0, \quad C_3 = 0, \quad \lambda = \frac{m\pi}{p}, \quad \mu = \frac{n\pi}{q} \quad (m, n = 1, 2, \ldots).$$

Искомое решение имеет вид ряда

$$u(x,y,t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} a_{mn} e^{-k_{mn}t} \cdot \sin\frac{m\pi x}{p} \cdot \sin\frac{n\pi x}{q},$$

где

$$k_{mn} = a^2\pi^2\left(\frac{m^2}{p^2} + \frac{n^2}{q^2}\right), \quad a_{mn} = \frac{4}{pq}\int_0^p\int_0^q \varphi(x,y)\sin\frac{m\pi\, x}{p}\sin\frac{n\pi y}{q}\,dx\,dy.$$

Коэффициенты a_{mn} находятся при помощи начального условия.

7. Общая схема метода разделения переменных при решении пространственных задач. Пусть требуется найти решение $u(x, y, z, t) \equiv u(M, t)$ пространственной краевой задачи внутри области D с поверхностью Σ

$$u'_t = a^2 \Delta u \quad (M \in D,\ t > 0);$$

$$u(M, 0) \equiv u(x, y, z, 0) = \varphi(x, y, z); \quad u(M, t)\big|_\Sigma = 0.$$

Вначале ищется решение уравнения теплопроводности в виде произведения $u(M, t) = \Phi(M)T(t) \not\equiv 0$, удовлетворяющее только однородному граничному условию $u\big|_\Sigma = 0$. Разделяя переменные, получим уравнения: $\Delta\Phi + \lambda\Phi = 0$ в D; $T' + a^2\lambda T = 0$ $(t > 0)$. Граничное условие к первому из этих уравнений: $\Phi(M)\big|_\Sigma = 0$. Решение для $\Phi(M)$ в свою очередь также ищется при помощи метода разделения переменных. Для функции $\Phi(M)$ получается задача на собственные значения. Если $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — собственные значения задачи, а $\Phi_1(M), \Phi_2(M), \ldots$ — соответствующие им собственные функции, образующие ортогональную систему, то решение исходной краевой задачи можно представить в виде ряда

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-a^2\lambda_n t}\Phi_n(M),$$

коэффициенты которого находятся при помощи начального условия по формуле

$$A_n = \frac{(\varphi, \Phi_n)}{(\Phi_n, \Phi_n)} \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

где

$$(\varphi, \Phi_n) = \iiint\limits_D \varphi(M')\Phi_n(M')\, dV'.$$

Здесь $M'(x', y', z')$ — переменная точка интегрирования; $dV' = dx'dy'dz'$; скалярное произведение (Φ_n, Φ_n) определяется аналогично.

Каждому собственному значению λ_n в общем случае соответствуют несколько линейно независимых собственных функций. Для преобразования системы всех собственных функций в ортогональную систему используется **метод ортогонализации Шмидта**, аналогичный приведенному в 2.6.

Решение неоднородного уравнения

$$u'_t = a^2\Delta u + f(M, t)$$

при однородных краевых условиях

$$u(M, 0) = 0; \quad u\big|_\Sigma = 0$$

имеет вид

$$u(M, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)\Phi_n(M),$$

где

$$T_n(t) = \int\limits_0^l f_n(\tau) \exp\left\{-a^2\lambda_n(t-\tau)\right\} d\tau; \quad f_n(\tau) = \frac{(f, \Phi_n)}{(\Phi_n, \Phi_n)}.$$

Здесь $f_n(t)$ — коэффициенты разложения $f(M,t)$ по собственным функциям $\Phi_n(M)$:

$$f(M,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t)\Phi_n(M).$$

Решение краевой задачи для неоднородного уравнения теплопроводности с неоднородными граничными условиями $u\big|_\Sigma = \psi(M,t)$, где M — точка поверхности Σ, приводится к решению $v(M,t)$ неоднородного уравнения теплопроводности с однородными граничными условиями $v\big|_\Sigma = 0$, если $u(M,t) = v(M,t) + F(M,t)$, где F — достаточно гладкая произвольная функция, такая что $F\big|_\Sigma = \psi$. В частности, если $\psi = C = \text{const}$, то $u = v + C$.

11.2.6.3. Задача о распространении тепла на бесконечной прямой

Требуется найти ограниченную функцию $u(x,t)$ $(-\infty < x < +\infty,\ t \geqslant 0)$, являющуюся решением задачи Коши

$$\begin{aligned} &u'_t = a^2 u''_{xx} && (-\infty < x < +\infty,\ t > 0);\\ &u(x,0) = \varphi(x) && (-\infty < x < +\infty,\ t = 0), \end{aligned}$$

где $\varphi(x)$ — заданная непрерывная ограниченная функция. Ищем решение уравнения в виде $u(x,t) = X(x)\cdot T(t)$. Из уравнения следует

$$T' + a^2\lambda^2 T = 0, \qquad X'' + \lambda^2 X = 0.$$

Здесь параметр λ произволен в силу отсутствия граничных условий. Функция

$$u_\lambda(x,t) = e^{-a^2\lambda^2 t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]$$

является частным решением уравнения при любых $A(\lambda)$, $B(\lambda)$. Функция

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2\lambda^2 t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right] d\lambda$$

также будет решением, если этот интеграл сходится и может быть продифференцирован по t и x один и два раза соответственно. Выбирая $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ так, чтобы выполнялось начальное условие, и используя разложение $\varphi(x)$

в интеграл Фурье, получим

$$A(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \cos \lambda\xi \, d\xi, \quad B(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \sin \lambda\xi \, d\xi.$$

После некоторых преобразований решение исходной задачи Коши принимает вид

$$u(x,t) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right\} d\xi.$$

Функцию

$$G(x,\xi;t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \exp\left\{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right\},$$

являющуюся решением однородного уравнения теплопроводности при $x \neq \xi$ и $t > 0$, называют **фундаментальным решением** уравнения теплопроводности.

11.2.6.4. Задача о распространении тепла на полупрямой

Решение $u(x,t)$ краевой задачи

$$\begin{gathered} u'_t = a^2 u''_{xx} \quad (0 < x < +\infty,\ t > 0); \\ u(0,t) = \psi(t) \quad (t \geqslant 0); \\ u(x,0) \mp \varphi(x) \quad (x \geqslant 0) \end{gathered}$$

в промежутке $0 \leqslant x < +\infty$ имеет вид $u = v + w$, где

$$v(x,t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int\limits_{0}^{+\infty} \varphi(\xi) \left[\exp\left\{-\frac{(\xi - x)^2}{4a^2 t}\right\} - \exp\left\{-\frac{(\xi + x)^2}{4a^2 t}\right\}\right] d\xi,$$

$$w(x,t) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{x/(2a\sqrt{t})}^{+\infty} \psi\left(t + \frac{x^2}{4a^2\xi^2}\right) e^{-\xi^2} \, d\xi.$$

Если начальная температура постоянна, т. е. $u(x,0) = \varphi(x) = u_0$, то

$$v(x,t) = u_0 F\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

где

$$F(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{0}^{z} e^{-y^2} \cdot dy.$$

Глава 12

ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

12.1. Общие сведения

Вариационное исчисление — раздел математики, посвященный изучению методов отыскания минимальных или максимальных (т. е. экстремальных) или просто стационарных значений функционалов. Под **функционалом** здесь понимается числовая (действительная или комплексная) функция, определенная на некотором множестве функций. Каждой функции $y(x)$ из этого множества функционал $J = \Phi[y(x)]$ ставит в соответствие некоторое число J, тогда как обычная функция $y = f(x)$ каждому числу x из некоторого множества ставит в соответствие другое число y.

Пример 1.

1) Определенный интеграл
$$J = \Phi[y(x)] = \int_a^b y(x)\,dx$$
от непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $y(x)$ является функционалом, ставящим в соответствие каждой функции $y(x)$ число — значение J определенного интеграла.

2) Функционалом является наибольшее значение (т. е. некоторое число) непрерывной функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a;b]$, т. е. $\Phi[f(x)] = \max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)$.

Пусть дан (интегральный) функционал вида
$$J = \Phi[y(x)] = \int_a^b F[x, y(x), y'(x)]\,dx, \tag{12.1}$$
где F — заданная непрерывная функция трех аргументов, $y(x)$ — неизвестная функция, принадлежащая множеству функций, определенных и непрерывно дифференцируемых на отрезке $[a;b]$. Простейшая задача вариационного

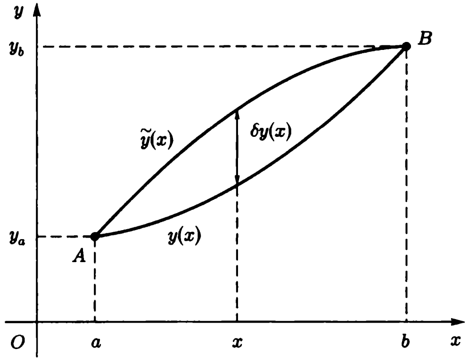


Рис. 12.1

исчисления (задача с закрепленными концами) состоит в следующем. На различные функции $y(x)$ наложены **граничные условия**: $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, т. е. графики всех рассматриваемых функций $y(x)$ проходят через две закрепленные (фиксированные) точки $A(a, y_a)$, $B(b, y_b)$ (рис. 12.1). Хотя интеграл (12.1) берется от a до b, функция $y(x)$ при этом неизвестна. Требуется найти функцию $y(x)$, удовлетворяющую граничным условиям, для которой функционал (12.1) примет экстремальное (или просто стационарное) значение. О такой функции говорят, что она **доставляет экстремальное (стационарное) значение функционалу**.

Пример 2. Найти кривую с наименьшей длиной, проходящую через две заданные точки $A(a, y_a)$, $B(b, y_b)$ на плоскости Oxy. Решение этой задачи состоит в нахождении функции (кривой) $y = y(x)$, для которой функционал

$$L = \Phi[y(x)] \equiv \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx$$

с соответствующими граничными условиями принимает наименьшее значение. Решением этой задачи, как известно, является отрезок прямой, соединяющий две точки.

Для постановки и решения задач вариационного исчисления введем следующие основные понятия. Будем рассматривать лишь два класса функций, на которых ищется экстремум:

1) класс C_0 непрерывных на отрезке $[a; b]$ функций,
2) класс C_1 непрерывно дифференцируемых на $[a; b]$ функций.

Функционал может иметь экстремум в одном классе функций и не иметь его в другом. В каждом из классов C_0 и C_1 для любых двух функций $y_1(x)$ и $y_2(x)$ можно ввести аналог расстояния между двумя функциями, называемый **метрикой**.

В классе C_0 метрика равна:

$$\rho_0(y_1, y_2) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |y_1(x) - y_2(x)|.$$

В классе C_1:

$$\rho_1(y_1, y_2) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |y_1(x) - y_2(x)| + \max_{a \leqslant x \leqslant b} |y_1'(x) - y_2'(x)|.$$

Аналогично могут быть введены функции класса C_k, определенные на отрезке $[a; b]$ и имеющие на нем непрерывные производные до k-го порядка включительно. Если две функции близки в метрике ρ_1, т. е. $\rho_1(y_1, y_2) < \varepsilon$, то они близки и в метрике ρ_0, т. е. $\rho_0(y_1, y_2) < \varepsilon$ и $\rho_0(y_1', y_2') < \varepsilon$, но не наоборот.

Функционал $\Phi[y]$ называется **непрерывным** в точке y_0 (под точкой здесь понимается функция $y_0(x)$ из класса C_0 или C_1), если для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$ такое, что $|\Phi[y] - \Phi[y_0]| < \varepsilon$, как только $\rho(y, y_0) < \delta$ (здесь под ρ подразумевается либо ρ_0, либо ρ_1). При этом y и y_0 принадлежат к одному классу.

Функционал $\Phi[y]$ называется **линейным**, если он:

1) непрерывен в некотором классе функций;
2) для любых $y_1(x), y_2(x)$ из этого же класса выполняется условие

$$\Phi[y_1 + y_2] = \Phi[y_1] + \phi[y_2].$$

Пример 3. Функционал $\Phi[y] = \int\limits_a^b y(x)\,dx$ — линейный, а $\Phi[y] = \int\limits_a^b [y(x)]^2\,dx$ — нелинейный.

Вариация функции. Пусть $y(x)$ и $\widetilde{y}(x)$ — две функции из одного класса. Тогда **вариацией** $\delta y(x)$ функции $y(x)$ называется такая функция от x, которая при каждом фиксированном значении x определяется как разность $\delta y(x) = \widetilde{y}(x) - y(x)$ (рис. 12.1). При этом $\widetilde{y}(x) = y(x) + \delta y(x)$. Вариация функции аналогична приращению $\Delta x = \widetilde{x} - x$ аргумента x обычной функции $y(x)$. Приращение функции $\Delta y(x) = y(\widetilde{x}) - y(x)$ связано с приращением аргумента Δx, а вариация функции связана с изменением вида функции, т. е. с переходом от функции $y(x)$ к $\widetilde{y}(x)$ при каждом фиксированном x.

Приращение функции $F[x, f(x), g(x)]$ от трех аргументов, связанное с вариациями $\delta f(x)$ и $\delta g(x)$, равно (при каждом фиксированном x):

$$\Delta F = F(x, f + \delta f, g + \delta g) - F(x, f, g).$$

Если $y(x), \widetilde{y}(x)$ — дифференцируемые, то

$$[\delta y(x)]' = [\widetilde{y} - y(x)]' = \widetilde{y}'(x) - y'(x) = \delta[y'(x)],$$

т. е. операции варьирования и дифференцирования перестановочны. При этом $\widetilde{y}'(x) = y'(x) + \delta y'(x)$.

В задаче с закрепленными концами в точках $x = a$, $x = b$ имеем $\delta y(a) = 0$, $\delta y(b) = 0$.

12.2. Вариация функционала от функции одной независимой переменной

Приращение ΔJ **функционала** (12.1), связанное с переходом от функции $y(x)$ к функции $\widetilde{y}(x)$, равно

$$\Delta J = \Phi[\widetilde{y}] - \Phi[y] = \int\limits_a^b F(x, \widetilde{y}, \widetilde{y}')\,dx - \int\limits_a^b F(x, y, y')\,dx =$$

$$= \int\limits_a^b \big[F(x, y + \delta y, y' + \delta y') - F(x, y, y')\big]\,dx \equiv \int\limits_a^b \Delta F(x, y, y')\,dx$$

и является, в общем случае, нелинейным по $\delta y(x)$ функционалом от функций $y(x)$ и $\delta y(x)$.

Говорят, что функция $y_0(x)$ доставляет **локальный экстремум** функционалу $\Phi[y]$ (или **функционал достигает локального экстремума** при $y = y_0(x)$), если для всех функций $\widetilde{y}(x)$ (называемых **функциями сравнения**), достаточно близких (в метрике ρ_0 или ρ_1) к функции $y_0(x)$, приращение $\Delta J = \Phi[\widetilde{y}] - \Phi[y_0]$ функционала имеет один и тот же знак. При $\Delta J \geqslant 0$ (или $\Delta J \leqslant 0$) функционал имеет **локальный минимум** (или **максимум**). При $\Delta J = 0$ функционал **стационарен** в достаточно малой окрестности $y_0(x)$. Условие достаточной близости $\widetilde{y}$ и y_0 здесь связано с тем, что функционал может иметь несколько локальных экстремумов (по аналогии с обычной функцией). В случае локального минимума (максимума) существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $\Delta J \geqslant 0$ ($\Delta J \leqslant 0$) для всех вариаций, удовлетворяющих условию $\rho(y_0, y_0 + \delta y) < \varepsilon$ (здесь ρ означает ρ_0 либо ρ_1).

Если экстремум функционала $J = \Phi[y(x)]$ достигается в классе функций C_0 (соответственно C_1), то этот экстремум (максимум или минимум) называется **сильным** (соответственно **слабым**). Всякий сильный экстремум будет одновременно и слабым, обратное в общем случае неверно. Это следует из определения метрик в классах C_0 и C_1. Нахождение слабого экстремума в общем случае является задачей более простой, чем нахождение сильного, что связано с непрерывностью многих функционалов в классе функций C_1.

12.3. Необходимое условие экстремума функционала. Уравнение Эйлера

1. Уравнение Эйлера. Пусть функция $F[x, y(x), y'(x)]$ дважды непрерывно дифференцируема по всем трем своим аргументам. Требуется найти функцию $y = y(x)$ в классе C_1 непрерывно дифференцируемых функций, удовлетворяющих граничным условиям $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$, такую, которая доставляет слабый локальный экстремум функционалу

$$J = \Phi[y(x)] = \int_a^b F\big[x, y(x), y'(x)\big]\, dx. \tag{12.2}$$

Однопараметрическое семейство функций сравнения $\widetilde{y}(x) \equiv y(x, \alpha)$ для функции $y(x) \equiv y(x, 0)$, доставляющей экстремум функционалу, где α — малый параметр $(-\alpha_0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0)$, запишем в виде $y(x, \alpha) = y(x) + \alpha \cdot g(x)$, $g(a) = g(b) = 0$, т. е. $\delta y(x) \equiv \alpha \cdot g(x)$. Обозначим $f(\alpha) = \Phi[y(x, \alpha)]$ функцию, в которую перейдет функционал, вычисленный для функции сравнения. Тогда приращение функции $f(\alpha)$, связанное с приращением аргумента от 0 до α, будет равно приращению функционала, связанному с вариациями δy и $\delta y'$:

$$\begin{aligned} \Delta J &= f(\alpha) - f(0) = \Delta f = f'(0)\alpha + \frac{1}{2} f''(0)\alpha^2 + \ldots = \\ &= \int_a^b \big[F(x, y + \alpha g, y' + \alpha g') - F(x, y, y')\big]\, dx = \\ &= \int_a^b \Delta F\, dx = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\alpha g + \frac{\partial F}{\partial y'}\alpha g'\right] dx + \\ &+ \frac{1}{2}\int_a^b \big[F_{yy}(\alpha g)^2 + 2F_{yy'}\alpha^2 g g' + F_{y'y'}\alpha^2 (g')^2\big]\, dx + \ldots \end{aligned} \tag{12.3}$$

Здесь использована формула Тейлора для приращения $\Delta F(x, y, y')$ при фиксированном x, многоточием обозначены дифференциалы более высоких порядков.

Выражение

$$\delta J \equiv df = f'(0)\alpha = \int_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right] dx,$$

являющееся линейным по δy функционалом, называется **первой вариацией функционала** (12.2).

Выражение $\delta^2 J \equiv f''(0)\alpha^2$ называется **второй вариацией функционала** (12.2). Вариации более высоких порядков определяются аналогично (по индукции). Формула (12.3) может быть записана в виде

$$\Delta J = \delta J + \frac{1}{2}\delta^2 J + \dots .$$

Если функция $y = y_0(x)$, соответствующая значению $\alpha = 0$, доставляет экстремум функционалу (12.2), то $f'(0) = 0$ (так как $f(\alpha)$ имеет экстремум при $\alpha = 0$). **Необходимое условие экстремума функционала** (12.2) имеет вид $\delta J = f'(0)\alpha = 0$ или

$$\delta J = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'\right] dx =$$

$$= \int\limits_a^b \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\right]\delta y\, dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y\right)\Bigg|_a^b = 0. \qquad (12.4)$$

Для достижения функционалом $\Phi[y]$ экстремума при $y = y_0(x)$ необходимо, чтобы его первая вариация, если она существует, обращалась в нуль при $y = y_0(x)$. Поскольку $\delta y = \alpha \cdot g(x)$ — произвольная функция и $\delta y(a) = \delta y(b) = 0$, то из (12.4) следует дифференциальное **уравнение Эйлера**:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \quad [y(a) = y_a,\ y(b) = y_b] \qquad (12.5)$$

или

$$F'_y - F''_{y'x} - F''_{y'y}y' - F''_{y'y'}y'' = 0.$$

Уравнение Эйлера можно записать также в виде

$$\frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(F - y'\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0.$$

При интегрировании этого дифференциального уравнения второго порядка появляются две произвольные постоянные, которые находятся из граничных условий $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$. Интегральные кривые $y = y(x, C_1, C_2)$ уравнения Эйлера (12.5) называются **экстремалями**. Уравнение Эйлера (12.5) является необходимым, но не достаточным условием слабого локального экстремума, хотя иногда из смысла задачи видно, доставляет ли найденная экстремаль минимум или максимум функционалу. Уравнение Эйлера является также необходимым условием сильного экстремума. Отметим, что экстремаль не всегда доставляет экстремум функционалу, так как уравнение Эйлера — лишь необходимое условие экстремума.

Условие гарантирующее существование непрерывной второй производной у экстремали $y = y(x)$. Если $F(x, y, y')$ дважды непрерывно дифференцируема по всем трем аргументам, то функция $y(x)$ дважды непрерывно дифференцируема для всех x, при которых

$$F''_{y'y'}\left[x, y(x), y'(x)\right] \neq 0.$$

Экстремаль $y = y(x)$ может иметь излом только при условии $F''_{y'y'} = 0$.

Пример 4. Найти экстремаль функционала

$$J = \int\limits_a^b \sqrt{1 + (y')^2}\, dx$$

с граничными условиями $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$. Этот функционал представляет собой длину дуги кривой, соединяющей точки $A(a, y_a)$ и $B(b, y_b)$.

Решение. $F(x, y, y') = \sqrt{1 + (y')^2}$, $F'_y = 0$, $F'_{y'} = \dfrac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}$. Уравнение Эйлера (12.5) принимает вид $\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}}\right] = 0$. Отсюда $\dfrac{y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \text{const}$. Это равенство выполняется, если $y' = C_1 = \text{const}$. Интегрируя, получим уравнение прямой $y = C_1x + C_2$. Из граничных условий следует $C_1 = \dfrac{y_b - y_a}{b - a}$, $C_2 = \dfrac{by_a - ay_b}{b - a}$. По смыслу задачи ясно, что функционал достигает минимума на этой экстремали. ▷

Пример 5. Найти экстремаль функционала

$$J = \int\limits_0^{\pi/2} \left[y^2 - (y')^2 - 2y\cos x\right] dx$$

с граничными условиями $y(0) = 1$, $y(\pi/2) = 0$.

Решение. $F'_y = 2y - 2\cos x$, $F'_{y'} = -2y'$. Уравнение Эйлера $y'' + y' = \cos x$ имеет общее решение $y = C_1\cos x + C_2\sin x + \dfrac{1}{2}x \cdot \sin x$. Из граничных условий находим $C_1 = 1$, $C_2 = -\dfrac{\pi}{4}$. Уравнение экстремали $y = \cos x - \dfrac{\pi}{4}\sin x + \dfrac{x}{2}\sin x$. ▷

Пример 6. Найти экстремаль функционала

$$J = \int\limits_0^1 \left[y^2 + (y')^2\right] dx$$

с граничными условиями $y(0) = 0$, $y(1) = 1$.

Решение. Здесь $F'_y = 2y$, $F'_{y'} = 2y'$. Уравнение Эйлера $y'' - y = 0$ имеет общее решение $y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$. Находя C_1 и C_2 из граничных условий, получим уравнение экстремали $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e - e^{-1}}$. ▷

2. Частные случаи уравнения Эйлера.

1) Если $F \equiv F(x, y')$, т. е. $F'_y = 0$, то уравнение Эйлера принимает вид $\dfrac{d}{dx} F'_{y'} = 0$. Отсюда $F'_{y'} = C_1 = \text{const}$ является первым интегралом этого уравнения.

2) Если $F \equiv F(y, y')$, т. е. $\dfrac{\partial F}{\partial x} = 0$, то $\dfrac{d}{dx}\left(F - y'\dfrac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0$. Следовательно, уравнение Эйлера имеет первый интеграл $F - y'\dfrac{\partial F}{\partial y'} = C_1 = \text{const}$.

3) Если $F \equiv F(x, y)$, то уравнение Эйлера принимает вид $F'_y = 0$, т. е. является алгебраическим уравнением.

Пример 7. Пусть кривая $y = y(x)$ соединяет две фиксированные точки (a, y_a) и (b, y_b). Найти такую кривую, чтобы поверхность, образованная ее вращением вокруг оси Ox, имела минимальную площадь.

Решение. Задача состоит в нахождении минимума функционала

$$J = \int_a^b 2\pi y \sqrt{1 + (y')^2}\, dx.$$

Так как $F'_x = 0$, то по второму частному случаю уравнения Эйлера находим

$$\frac{y}{\sqrt{1 + (y')^2}} = \frac{C_1}{2\pi} \equiv \frac{1}{k} \quad \left(k = \frac{2\pi}{C_1}\right).$$

Отсюда следует

$$\frac{dy}{\sqrt{k^2 y^2 - 1}} = \pm dx \quad (k^2 y^2 > 1).$$

Беря для определенности справа знак плюс и интегрируя, получим экстремаль

$$y = \frac{1}{2k}\left[e^{k(x + C_2)} + e^{-k(x + C_2)}\right] = \frac{C_1}{2\pi} \operatorname{ch}\left[\frac{2\pi(x + C_2)}{C_1}\right].$$

Постоянные C_1, C_2 определяются из граничных условий. Данная задача может иметь решение не при любых граничных значениях. При определенных условиях задача имеет два решения, из которых только одно соответствует минимуму площади. ▷

12.4. Достаточные условия слабого экстремума

Для того чтобы выяснить, доставляет ли полученная экстремаль максимум или минимум функционалу, можно вычислить значения этого функционала для различных функций сравнения. Иногда тип экстремума можно выяснить непосредственно из смысла задачи. Так, в примере 4 видно, что найденная экстремаль (отрезок прямой линии) доставляет функционалу минимум.

С использованием второй вариации функционала можно получить достаточные условия слабого экстремума функционала

$$J = \int\limits_a^b F(x, y, y')\,dx \quad [y(a) = y_a,\ y(b) = y_b].$$

Кривая $y = y_0(x)$ доставляет слабый экстремум (максимум или минимум) функционалу J при совместном выполнении следующих трех условий:

1) $y = y_0(x)$ — экстремаль, т. е. удовлетворяет уравнению Эйлера

$$F'_y - \frac{d}{dx}F'_{y'} = 0$$

и условиям $y(a) = y_a$, $y(b) = y_b$.

2) $P(x) \equiv \frac{1}{2}F''_{y'y'}\left[x, y_0(x), y_0'(x)\right] > 0$ — в случае минимума;

$P(x) < 0$ — в случае максимума.

3) Отрезок $[a; b]$ не содержит точек x_c, сопряженных с точкой $x = a$. Здесь точка x_c называется сопряженной с точкой $x = a$, если она является предельной точкой пересечения данной экстремали $y_0(x)$ с близкими экстремалями $y(x)$, выходящими из точки $x = a$ при стремлении $y(x) \to y_0(x)$. Сопряженная с точкой $x = a$, точка x_c находится следующим образом. Если $h(x)$ — решение дифференциального уравнения

$$\left(F''_{yy} - \frac{d}{dx}F''_{yy'}\right)h - \frac{d}{dx}\left(F''_{y'y'}h'\right) = 0 \quad [h(a) = 0],$$

то в качестве x_c принимают наименьший из корней уравнения $h(x) = 0$, расположенных справа от $x = a$. Согласно условию 3) должно выполняться неравенство $x_c > b$.

Пример 8. Исследуем тип экстремума функционала в примере 5. Имеем:

$$P(x) \equiv \frac{1}{2}F''_{y'y'} = -1 < 0, \quad F''_{yy} = 2, \quad F''_{yy'} = 0, \quad F''_{y'y'} = -2.$$

Уравнение для $h(x)$ примет вид $h'' + h = 0$. Его решением при $h(0) = 0$ является $h(x) = C \cdot \sin x$. Корни уравнения $h(x) = 0$, расположенные справа от $x = 0$, равны $\pi, 2\pi, \ldots$. Наименьший из них $x_c = \pi$ дает сопряженную с $x = 0$ точку, которая не лежит на отрезке $[0; \pi/2]$. Следовательно, найденная в примере 5 экстремаль доставляет функционалу слабый локальный максимум.

12.5. Задача со свободными концами

1. Пусть требуется найти кривую $y=y(x)$, доставляющую экстремум функционалу

$$J = \int_a^b F\big[x, y(x), y'(x)\big]\, dx,$$

среди кривых, заранее неизвестные концы которых A и B (см. рис. 12.1) находятся на прямых $x = a$, $x = b$, т. е. условия $y(a) = y_a$, $y_b = y_b$ не ставятся. В формуле (12.4) рассмотрим среди прочих сначала вариации $\delta y(x) = \alpha \cdot g(x)$, для которых $g(a) = g(b) = 0$, тогда из необходимого условия экстремума $\delta J = 0$ получим

$$F'_y - \frac{d}{dx} F'_{y'} = 0,$$

т. е. искомые кривые должны быть экстремалями (интегральными кривыми уравнения Эйлера). С учетом этого из формулы (12.4), в силу произвольности вариаций, следуют равенства, заменяющие граничные условия и называемые **естественными граничными условиями**

$$F'_{y'}\big[a, y(a), y'(a)\big] = 0, \quad F'_{y'}\big[b, y(b), y'(b)\big] = 0, \tag{12.6}$$

при помощи которых находятся произвольные постоянные, входящие в уравнение экстремали. Возможны также комбинированные случаи, когда, например, в точке $x = a$ задано граничное условие $y(a) = y_a = \text{const}$, а в точке $x = b$ — второе условие вида (12.6).

2. Пусть, например, в левом фиксированном конце экстремали $y(x)$, в точке $A(a, y_a)$, ставится либо граничное условие $y(a) = y_a = \text{const}$, либо естественное граничное условие (12.6), а для второго (заранее неизвестного) конца B экстремали требуется, чтобы точка $B(b, y(b))$ находилась на заданной кривой $y = f(x)$, т. е. $y(b) = f(b)$. Тогда неизвестное значение $x = b$, определяющее точку B, находится из **условия трансверсальности**

$$F\big[b, y(b), y'(b)\big] + \big[f'(b) - y'(b)\big] \cdot F'_{y'}\big[b, y(b), y'(b)\big] = 0.$$

Условия трансверсальности могут быть заданы и в обоих концах экстремали.

Пример 9. Найти экстремаль функционала с граничными условиями:

$$J = \int_0^1 \big[y^2 + (y')^2\big]\, dx; \quad y(0) = 1 + e^2, \quad \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=1} = 0.$$

Решение. В примере 6 найдено общее уравнение экстремали

$$y = C_1 e^x + C_2^{-x}.$$

Из первого граничного условия получим $C_1 + C_2 = 1 + e^2$, а из второго следует

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x=1} = 2y'(1) = 2(C_1 e - C_2 e^{-1}) = 0,$$

т. е. $C_1 e^2 - C_2 = 0$. Отсюда $C_1 = 1$, $C_2 = e^2$. Искомая экстремаль $y = e^x + e^{2-x}$. ▷

Пример 10. Найти кратчайшее расстояние от фиксированной точки (x_0, y_0) до прямой $y = f(x) \equiv kx + b$.

Решение. Найдем минимум функционала

$$J = \int\limits_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + (y')^2}\, dx; \quad y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = kx_1 + b.$$

Уравнение экстремали имеет вид $y = C_1 x + C_2$ (см. пример 4). Из условия в точке x_0 находим $y_0 = C_1 x_0 + C_2$. Условие трансверсальности в точке x_1 имеет вид

$$\sqrt{1 + [y'(x_1)]^2} + [f'(x_1) - y'(x_1)]\frac{y'(x_1)}{\sqrt{1 + [y'(x_1)]^2}} = 0$$

или $k \cdot C_1 = -1$, что означает ортогональность экстремали и заданной прямой. Отсюда

$$C_1 = -\frac{1}{k}, \quad C_2 = y_0 + \frac{x_0}{k}.$$

Определяя точку пересечения этих двух прямых, легко найти искомое расстояние. ▷

12.6. Функционалы от нескольких функций одной независимой переменной

Требуется найти экстремум функционала

$$J = \Phi\big[y_1(x), \ldots, y_n(x)\big] = \int\limits_a^b F\big[x, y_1(x), \ldots, y_n(x), y_1'(x), \ldots, y_n'(x)\big]\, dx$$

с граничными условиями $y_i(a) = y_{ia}$, $y_i(b) = y_{ib}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ (**задача с закрепленными концами**). Первая вариация данного функционала определяется выражением

$$\delta J = \int\limits_a^b \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial y_i}\delta y_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'}\delta y_i'\right) dx =$$

$$= \int\limits_a^b \sum_{i=1}^n \left[\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right)\right]\delta y_i\, dx + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\delta y_i\right)\Bigg|_a^b.$$

В задаче с закрепленными концами: $\delta y_i(a) = 0$, $\delta y_i(b) = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Каждая совокупность n функций (**экстремалей**) $y_1(x), \ldots, y_n(x)$, доставляющих экстремум функционалу, должна удовлетворять системе дифференциальных **уравнений Эйлера**

$$\frac{\partial F}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i'}\right) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n)$$

и соответствующим граничным условиям.

Данный функционал удобно рассматривать в $(n+1)$-мерном координатном пространстве $(x, y_1, \ldots, y_n)$, тогда функции $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ дадут уравнение кривой (**экстремали**) в этом пространстве.

12.7. Функционалы, зависящие от производных высших порядков

Экстремали функционала

$$J = \int_a^b F\big[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)\big]\, dx$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} &y(a) = y_a, \quad y'(a) = y_a', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(a) = y_a^{(n-1)}, \\ &y(b) = y_b, \quad y'(b) = y_b', \quad \ldots, \quad y^{(n-1)}(b) = y_b^{(n-1)}, \end{aligned}$$

являются интегральными кривыми **уравнения Эйлера**

$$F_y' - \frac{d}{dx}F_{y'}' + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''}' - \ldots + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}}' = 0.$$

12.8. Функционалы от функций нескольких независимых переменных

1. Требуется найти экстремум функционала

$$J = \Phi\big[u(x, y, z)\big] = \iiint_D F\big[x, y, z, u, u_x', u_y', u_z'\big]\, dx\, dy\, dz,$$

где F — заданная, дважды непрерывно дифференцируемая функция; граница Σ области интегрирования D и граничные значения функции $u(x, y, z)$ на Σ могут быть либо заданы, либо нет. Функция $u(x, y, z)$ выбирается из множества функций, имеющих в D непрерывные частные вторые производные. Ограничимся здесь случаем, когда $u(x, y, z)$ задана на границе $u\big|_{\Sigma} = u_0(x, y, z)$. Для нахождения приращения ΔJ функционала **функции сравнения** берутся в виде

$$u(x, y, z, \alpha) = u(x, y, z) + \alpha \cdot g(x, y, z),$$

где α — параметр, $u(x, y, z)$ — **экстремаль**; $g(x, y, z) = 0$ на поверхности Σ. Из необходимого условия экстремума $\delta J = 0$ следует, что экстремаль $u(x, y, z)$ удовлетворяет **уравнению Эйлера**

$$\frac{\partial F}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial u'_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial u'_y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial F}{\partial u'_z} = 0,$$

являющемуся необходимым условием слабого локального экстремума функционала.

Аналогичный вид имеют уравнения Эйлера для пространств других размерностей.

Пример 11. Уравнение Эйлера для функционала

$$J = \iiint\limits_D \left[(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2\right] dx\, dy\, dz$$

имеет вид уравнения Лапласа $u''_{xx} + u''_{yy} + u''_{zz} = 0$.

2. Если подынтегральная функция F в функционале

$$J = \Phi[u_1, \ldots, u_n] = \iint\limits_D \cdots \int F\, dx_1 \ldots dx_m$$

содержит функции $u_i(x_1, \ldots, x_m)$ $(i = 1, \ldots, n)$ от независимых переменных $x_1, \ldots, x_m$, т. е.

$$F \equiv F\left(x_1, \ldots, x_m; u_1, \ldots, u_n, \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \frac{\partial u_1}{\partial x_2}, \ldots\right),$$

то система **уравнений Эйлера** для нахождения **экстремалей** имеет вид

$$\frac{\partial F}{\partial u_i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial F}{\partial u_{i,j}}\right) = 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

где $u_{i,j} \equiv \partial u_i / \partial x_j$. Здесь следует задать также соответствующие граничные условия на границе области D.

12.9. Условные экстремумы. Метод множителей Лагранжа

1. Пусть требуется найти систему функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$, доставляющих экстремум функционалу

$$J = \int\limits_a^b F\big[x, y_1(x), \dots, y_n(x), y_1'(x), \dots, y_n'(x)\big]\, dx \tag{12.7}$$

с граничными условиями $y_i(a) = y_{ia}$, $y_i(b) = y_{ib}$ $(i = 1, 2, \dots, n)$ при дополнительных условиях (**уравнениях связи**), наложенных на эти функции:

$$\varphi_j(x, y_1, \dots, y_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m;\ m < n). \tag{12.8}$$

Умножая j-е уравнение связи на некоторую неизвестную **функцию** $\lambda_j(x)$ $(j = 1, 2, \dots, m)$, интегрируя эти произведения от a до b, получим m дополнительных функционалов, вариации которых, очевидно, равны нулю. Складывая необходимое условие экстремума $\delta J = 0$ функционала (12.7) с вариациями всех m дополнительных функционалов, найдем, что искомая совокупность функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$ является решением системы **уравнений Эйлера**

$$\frac{\partial f}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial y_i'}\right) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n), \tag{12.9}$$

удовлетворяющим условиям (12.8), где

$$f\big(x, y, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \lambda_1, \dots, \lambda_m\big) \equiv F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x)\varphi_j.$$

Неизвестные функции $\lambda_j(x)$ называются **множителями Лагранжа**. Если существует решение задачи, то $n + m$ функций $y_1, \dots, y_n$, $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ находятся из $n+m$ уравнений (12.8), (12.9) и из граничных условий. Система уравнений Эйлера является лишь необходимым, но не достаточным условием экстремума. Метод множителей Лагранжа аналогично применяется также в случае связей вида

$$\varphi_j\big(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n'\big) = 0 \quad (j = 1, 2, \dots, m).$$

2. Требуется найти экстремум функционала

$$J = \Phi\big[u_1, \dots, u_n\big] = \iint\limits_D \cdots \int F\left(x_j, u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\right) dx_1 \dots dx_m$$

при условиях (**уравнениях связи**)

$$\varphi_k(x_j, u_i) = 0 \quad (k = 1, \dots, s).$$

Здесь x_j $(j = 1, \dots, m)$, u_i $(i = 1, \dots, n)$ — соответственно наборы независимых и зависимых переменных.

Система **уравнений Эйлера** для данной задачи имеет вид

$$\frac{\partial f}{\partial u_i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial u_{i,j}}\right) = 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$

где

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \qquad f \equiv F + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k(x_1, \dots, x_m)\varphi_k.$$

Экстремали находятся из совместного решения уравнений Эйлера и уравнений связи с учетом заданных граничных условий.

12.10. Изопериметрические задачи

1. Требуется найти систему функций $y_1(x), \dots, y_n(x)$, доставляющих экстремум функционалу (12.7) с теми же граничными условиями, при дополнительных $s < n$ **интегральных условиях**, наложенных на эти функции:

$$\int_a^b \psi_k(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n')\,dx = C_k \quad (k = 1, \dots, s), \tag{12.10}$$

где C_k — заданные постоянные.

Вариации функционалов (12.10), очевидно, равны нулю. Система **уравнений Эйлера** для данной задачи имеет вид (12.9), при этом

$$f(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n', \mu_1, \dots, \mu_s) \equiv F + \sum_{k=1}^{s} \mu_k\psi_k.$$

Здесь **множители Лагранжа** μ_k $(k = 1, \dots, s)$ являются **постоянными**. Неизвестные функции $y_1(x), \dots, y_n(x)$ и числа $\mu_1, \dots, \mu_s$ находятся из совместного решения $n + s$ уравнений (12.9) и условий (12.10) с учетом заданных граничных условий.

2. Если требуется найти экстремум функционала (12.7) при m условиях (12.8) и s условиях (12.10), то система **уравнений Эйлера** для этой задачи имеет вид (12.9), при этом

$$f \equiv F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j(x)\varphi_j + \sum_{k=1}^{s} \mu_k\psi_k.$$

3. Экстремаль функционала

$$J = \Phi[u(x,y,z)] = \iiint\limits_D F\left(x, y, z, u, u'_x, u'_y, u'_z\right) dx\, dy\, dz$$

при условии (**уравнении связи**)

$$\iiint\limits_D \psi\left(x, y, z, u, u'_x, u'_y, u'_z\right) dx\, dy\, dz = C = \text{const},$$

а также с соответствующими граничными условиями, находится из совместного решения уравнения связи и **уравнения Лагранжа**

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial u'_x} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial u'_y} - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial f}{\partial u'_z} = 0,$$

в котором $f = F + \lambda\psi$, λ — **множитель Лагранжа (число)**.

Пример 12. Найти функцию $y(x)$, доставляющую минимум функционалу

$$J = \int\limits_a^b y\sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx \quad [y(a) = y_a,\ y(b) = y_b],$$

при дополнительном интегральном условии

$$\int\limits_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx = C = \text{const}.$$

Решение. Здесь

$$f(x, y, y', \mu) = y\sqrt{1 + [y'(x)]^2} + \mu\sqrt{1 + [y'(x)]^2},$$

где μ — неизвестная постоянная. Так как f не зависит явно от x, то уравнение Эйлера (12.9) имеет первый интеграл

$$f - y'\frac{\partial f}{\partial y'} = C_1 = \text{const}$$

или

$$(y + \mu)\sqrt{1 + (y')^2} - \frac{(y')^2(y + \mu)}{\sqrt{1 + (y')^2}} = C_1,$$

т. е.

$$y = -\mu + C_1\sqrt{1 + (y')^2}.$$

Интегрируя последнее дифференциальное уравнение в параметрической форме (см. 11.1.2.7), получим

$$x = C_2 + C_1 \ln\left|p + \sqrt{1 + p^2}\right|, \quad y = -\mu + C_1\sqrt{1 + p^2},$$

где p — параметр, исключая который из двух предыдущих равенств, найдем уравнение искомой экстремали:

$$y = -\mu + C_1 \operatorname{ch} \frac{x - C_2}{C_1},$$

в котором постоянные μ, C_1, C_2 находятся при помощи интегрального и граничных условий. ▷

Физический смысл задачи: однородная цепь с заданной длиной свободно подвешена между двумя фиксированными точками; полученная экстремаль дает форму цепи, при которой ее потенциальная энергия минимальна в поле тяжести.

Пример 13. Рассмотрим вывод уравнения Эйлера для экстремали функционала

$$J[\psi(x,y,z)] = \iiint \left[-\frac{1}{2}\psi\Delta\psi + U(x,y,z)\psi^2\right] dx\,dy\,dz$$

с интегральным условием

$$\iiint \psi^2\, dx\,dy\,dz = 1,$$

где интегрирование проводится по всему безграничному пространству, а вместо граничных условий предполагается, что на бесконечности $\lim\limits_{r\to\infty} r^{1/2}\psi(r) = 0$, т. е. $\psi(r)$ стремится к нулю при $r \to \infty$; $U(x,y,z)$ — заданная функция. Необходимое условие экстремальности (стационарности) J имеет вид

$$\delta \iiint \left[-\frac{1}{2}\psi\Delta\psi + U\psi^2 + \lambda\psi^2\right] dx\,dy\,dz = 0$$

или

$$\iiint \left[-\frac{1}{2}(\Delta\psi)\delta\psi - \frac{1}{2}\psi\Delta\delta\psi + 2U\psi\delta\psi + 2\lambda\psi\delta\psi\right] dx\,dy\,dz = 0,$$

где λ — постоянный множитель Лагранжа.

В формуле Грина

$$\iiint\limits_D (\psi\Delta\delta\psi - \delta\psi\Delta\psi)\, dx\,dy\,dz = \iint\limits_\Sigma \left(\psi\frac{\partial\delta\psi}{\partial n} - \delta\psi\frac{\partial\psi}{\partial n}\right) dS$$

правая часть обращается на бесконечности в нуль. Следовательно,

$$\iiint [-\Delta\psi + 2(U+\lambda)\psi]\,\delta\psi\, dx\,dy\,dz = 0.$$

Искомое уравнение Эйлера можно записать в виде

$$-\frac{1}{2}\Delta\psi + (U+\lambda)\psi = 0.$$

В этой задаче $f = -\frac{1}{2}\psi\Delta\psi + U\psi^2 + \lambda\psi^2$.

12.11. Прямые методы решения вариационных задач

В тех случаях, когда дифференциальное уравнение Эйлера не может быть решено аналитически, применяют **прямые методы** решения вариационных задач, позволяющие перейти от решения дифференциальных уравнений к задаче нахождения экстремума функции нескольких переменных. Общая идея прямых методов нахождения экстремума функционала

$$J = \int_a^b F(x, y, y')\, dx \quad [y(a) = y_a,\ y(b) = y_b] \tag{12.11}$$

заключается в приближении искомой функции $y(x)$, доставляющей экстремум функционалу, последовательностью некоторых функций $u_1, u_2, \ldots$, причем каждая функция u_n удовлетворяет граничным условиям для $y(x)$ и является дифференцируемой функцией от x и n неизвестных параметров, т. е.

$$u_n = u_n(x, C_{n1}, C_{n2}, \ldots, C_{nn}).$$

Число параметров, от которых зависит u_n, равно n $(n = 1, 2, \ldots)$. Эти параметры находятся из необходимого условия экстремума функции

$$J_n(C_{n1}, C_{n2}, \ldots, C_{nn}) \equiv \int_a^b F\left(x, u_n, \frac{\partial u_n}{\partial x}\right) dx \approx J,$$

т. е. из алгебраической системы уравнений

$$\frac{\partial J_n}{\partial C_{n1}} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial J_n}{\partial C_{nn}} = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots).$$

Точность приближенного решения увеличивается с увеличением числа n параметров, однако при этом возрастает объем вычислений. Поэтому в практических расчетах число n берется не очень большим.

1. Метод Эйлера. Требуется найти экстремум функционала (12.11). Разобьем отрезок $[a; b]$ на n равных отрезков длиной $h = (b - a)/n$ точками $x_0 = a$, $x_1 = a + h$, $\ldots$, $x_n = b$. При этом искомая экстремаль $y = y(x)$ заменяется ломаной с вершинами (a, y_a), (x_1, y_1), (x_2, y_2), $\ldots$, (b, y_b). Заменяя $y(x_i)$ приближенно неизвестными пока величинами y_i, а также полагая $y'(x_i) \approx (y_{i+1} - y_i)/h$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$ и используя метод прямоугольников для приближенного вычисления определенного интеграла, заменим функционал (12.11) суммой

$$J_n(y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \equiv h \sum_{i=0}^{n-1} F\left(x_i, y_i, \frac{y_{i+1} - y_i}{h}\right).$$

Вариационная задача свелась к нахождению экстремума функции J_n от аргументов $y_1, \ldots, y_{n-1}$. Найдя соответствующую ломаную для каждого n, получим последовательность ломаных, являющихся приближенными решениями вариационной задачи. Неизвестные величины $y_1, \ldots, y_{n-1}$ находятся из системы алгебраических уравнений

$$\frac{\partial J_n}{\partial y_1} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial J_n}{\partial y_{n-1}} = 0.$$

2. Метод Ритца. Искомая экстремаль функционала (12.11) приближенно заменяется линейной комбинацией u_n функций $\varphi_i(x)$, определенных на отрезке $[a; b]$:

$$u_n = C_{n1}\varphi_1(x) + \ldots + C_{nn}\varphi_n(x), \tag{12.12}$$

где $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, \ldots$ — замкнутая система функций из класса функций, на которых определен функционал.

Примечание. Система функций называется **замкнутой**, если каждая функция $y(x)$ из того же класса может быть с любой точностью представлена (приближена) в виде линейной комбинации функций из этой системы. Иногда замкнутые системы функций называют **полными системами**.

Каждая приближающая функция u_n должна удовлетворять граничным условиям для функции $y(x)$. Это достигается в каждом случае специальным подбором функций φ_i. Подставив u_n из (12.12) вместо y в (12.11), получим:

$$J_n(C_{n1}, \ldots, C_{nn}) \equiv \int_a^b F\left(x, u_n, \frac{\partial u_n}{\partial x}\right) dx.$$

Параметры $C_{n1}, \ldots, C_{nn}$ находятся из системы

$$\frac{\partial J_n}{\partial C_{n1}} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial J_n}{\partial C_{nn}} = 0.$$

Пример 14. Методом Ритца найти функцию, доставляющую экстремум функционалу

$$J = \int_0^1 \left[y^2 - (y')^2\right] dx \quad \left[y(0) = 1, \ y(1) = 0\right].$$

Решение. Приближенное решение вариационной задачи, удовлетворяющее граничным условиям, ищем в виде

$$u_1 = 1 - x + C \cdot x(1 - x), \quad \frac{\partial u_1}{\partial x} = -1 + C - 2Cx.$$

Первое слагаемое $(1-x)$ в u_1 удовлетворяет исходным граничным условиям, а второе — однородным (нулевым) граничным условиям. Подставляя u_1 вместо y в функционал, получим

$$J_1(C) = \int_0^1 \left[u_1^2 - \left(\frac{\partial u_1}{\partial x} \right)^2 \right] dx = -\frac{2}{3} + \frac{1}{6}C - \frac{19}{30}C^2.$$

Из уравнения $J_1'(c) = \dfrac{1}{6} - \dfrac{19}{15}C = 0$, получим $C = 0{,}132$; т. е. $u_1(x) = 1 - 0{,}868x - 0{,}132x^2$. Для сравнения найдем точное решение вариационной задачи. Уравнение Эйлера $y'' + y = 0$ имеет, с учетом граничных условий, точное решение

$$y(x) = \cos x - (\operatorname{ctg} 1) \cdot \sin x.$$

Сравнение точного решения $y(x)$ с приближенным $u_1(x)$ приведено в таблице:

x	0,00	0,25	0,50	0,75	1,00
$u_1(x)$	1,000	0,775	0,533	0,275	0,000
$y(x)$	1,000	0,810	0,570	0,294	0,000

Следующее, более точное приближение, ищется аналогично в виде

$$u_2 = 1 - x + C_1x(1 - x) + C_2x^2(1 - x) \quad \text{и т. д.}$$ ▷

Примечание. Метод Ритца применяется аналогично и для решения вариационных задач с функционалами от функций двух независимых переменных. При этом функции $\varphi_i(x, y)$ подбираются так, чтобы удовлетворить граничным условиям.

Глава 13

ВЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ

Раздел математики, изучающий операции над векторами, называется **векторным исчислением** и подразделяется на **векторную алгебру** (см. 2.2), рассматривающую линейные операции над векторами и различные произведения векторов, и на **векторный анализ (теорию поля)**, изучающий векторные функции от одной или нескольких независимых скалярных переменных.

13.1. Векторные функции одного скалярного аргумента

13.1.1. Векторная функция и ее предел

Векторная функция (вектор-функция) $\bar{a} = \bar{a}(t)$ от одной независимой скалярной переменной (аргумента) t ставит в соответствие каждому значению t (из области определения) один (для однозначной функции) вектор $\bar{a}(t)$, или несколько векторов (для многозначной функции). Если все векторы $\bar{a}(t)$ откладывать от некоторой фиксированной точки O (обычно от начала координат), то линия L в пространстве (или на плоскости), описываемая концом M вектора $\bar{a}(t)$, называется **годографом** данной векторной функции (рис. 13.1). Если точку O принять за начало прямоугольной декартовой системы координат, то

$$\bar{a} = \bar{a}(t) = a_x(t)\bar{i} + a_y(t)\bar{j} + a_z(t)\bar{k},$$

где a_x, a_y, a_z — заданные функции от t. Параметрическое уравнение годографа имеет вид

$$x = a_x(t), \quad y = a_y(t), \quad z = a_z(t).$$

Если t — время, $\bar{r}(t)$ — радиус-вектор движущейся материальной точки, то закон криволинейного движения этой точки имеет вид

$$\bar{r} = \bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j} + z(t)\bar{k},$$

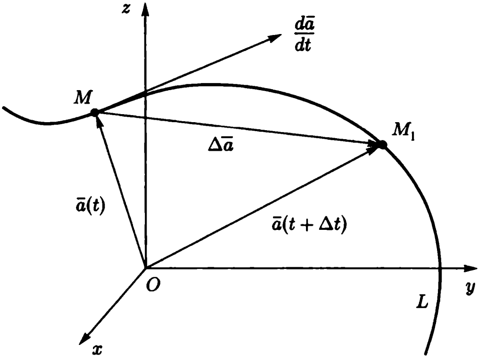


Рис. 13.1

где $x(t), y(t), z(t)$ — функция от t. При этом годограф называется **траекторией** точки.

Векторная функция $\bar{a}(t)$ называется **ограниченной (конечной)**, если ее модуль $|\bar{a}(t)|$ ограничен. Вектор $\bar{a}_0$ называется **пределом** векторной функции $\bar{a}(t)$ при $t \to t_0$ (запись: $\lim\limits_{t\to t_0} \bar{a}(t) = \bar{a}_0$), если для каждого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta(\varepsilon)$ такое, что $|\bar{a}(t) - \bar{a}_0| < \varepsilon$ при $0 < |t - t_0| < \delta$. При этом $\lim\limits_{t\to t_0} |\bar{a}(t) - \bar{a}_0| = 0$. Если предел $\bar{a}_0$ существует, то

$$\lim_{t\to t_0} \bar{a}(t) = \bar{i} \lim_{t\to t_0} a_x(t) + \bar{j} \lim_{t\to t_0} a_y(t) + \bar{k} \lim_{t\to t_0} a_z(t).$$

Функция $\bar{a}(t)$ называется **непрерывной** при $t = t_0$, если $\lim\limits_{t\to t_0} \bar{a}(t) = \bar{a}(t_0)$, т. е. когда непрерывны функции $a_x(t), a_y(t), a_z(t)$ при $t = t_0$.

13.1.2. Дифференцирование

Придадим аргументу t функции $\bar{a}(t)$ приращение $\Delta t \neq 0$. Тогда вектор

$$\overline{MM}_1 = \Delta\bar{a} = \bar{a}(t + \Delta t) - \bar{a}(t)$$

будет приращением вектора $\bar{a}(t)$ при переходе от значения t к значению $t + \Delta t$ (рис. 13.1). Векторная функция $\bar{a}(t)$ называется **дифференцируемой** при заданном значении t, если существует конечный предел (являющийся функцией от t)

$$\frac{d\bar{a}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\bar{a}(t+\Delta t) - \bar{a}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\bar{a}}{\Delta t},$$

называемый **производной** от $\bar{a}(t)$ в точке t. Обозначения производной:

$$\frac{d\bar{a}}{dt}, \quad \bar{a}'(t), \quad \dot{\bar{a}}(t).$$

Производная $\bar{a}'(t)$ представляет собой вектор, касательный к годографу в данной точке M, соответствующей заданному значению t. Если существует производная $\bar{a}''(t)$ от $\bar{a}'(t)$, то она называется **второй производной** от $\bar{a}(t)$ и т. д. В декартовой системе координат

$$\bar{a}'(t) = a_x'(t)\bar{i} + a_y'(t)\bar{j} + a_z'(t)\bar{k},$$
$$\bar{a}''(t) = a_x''(t)\bar{i} + a_y''(t)\bar{j} + a_z''(t)\bar{k} \quad \text{и т. д.}$$

Если $\bar{r}(t)$ — радиус-вектор движущейся точки M, а l — дуговая координата (длина дуги) на траектории L ($\Delta l \approx |\Delta\bar{r}|$), то **скорость** $\bar{v}(t)$ и **ускорение** $\bar{w}(t)$ точки M в момент t определяется следующим образом

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} = \frac{d\bar{r}}{dl}\frac{dl}{dt} = \bar{\tau}\frac{dl}{dt}, \qquad \bar{w} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2},$$

где $\bar{\tau} = d\bar{r}/dl$ ($|\bar{\tau}| = 1$) — единичный вектор касательной к линии L в точке M.

Правила дифференцирования:

$$\frac{d}{dt}\left[\bar{a}(t) \pm \bar{b}(t)\right] = \frac{d\bar{a}}{dt} \pm \frac{d\bar{b}}{dt},$$
$$\frac{d}{dt}\left[f(t)\bar{a}(t)\right] = \frac{df}{dt}\bar{a} + f\frac{d\bar{a}}{dt},$$
$$\frac{d}{dt}\left[\bar{a}(t) \cdot \bar{b}(t)\right] = \frac{d\bar{a}}{dt}\bar{b} + \bar{a}\frac{d\bar{b}}{dt},$$
$$\frac{d}{dt}\left[\bar{a}(t) \times \bar{b}(t)\right] = \frac{d\bar{a}}{dt} \times \bar{b} + \bar{a} \times \frac{d\bar{b}}{dt},$$
$$\frac{d}{dt}\bar{a}(f(t)) = \frac{d\bar{a}}{df}\frac{df}{dt}.$$

Если $|\bar{a}(t)| = \text{const}$, т. е. годограф лежит на сфере, то $\bar{a} \cdot \bar{a}' = 0$. Следовательно, в этом случае $\bar{a}$ и $\bar{a}'$ ортогональны при всех t.

Дифференциал $d\bar{a}$ функции $\bar{a}(t)$ определяется равенством $d\bar{a} = \bar{a}'\,dt$.

Неопределенный интеграл $\bar{A}(t) = \displaystyle\int \bar{a}(t)\,dt$, определяется как такая функция $\bar{A}(t)$, для которой $\bar{A}' = \bar{a}(t)$.

Определенный интеграл от векторной функции $\bar{a}(t) = a_x(t)\bar{i} + a_y(t)\bar{j} + a_z(t)\bar{k}$ на промежутке от a до b определяется как предел соответствующей интегральной суммы и может быть вычислен по формуле

$$\int_a^b \bar{a}(t)\,dt = \bar{i}\int_a^b a_x(t)\,dt + \bar{j}\int_a^b a_y(t)\,dt + \bar{k}\int_a^b a_z(t)\,dt.$$

Если функции $a_x(t)$, $a_y(t)$, $a_z(t)$, являющиеся компонентами векторной функции $\bar{a}(t)$, дифференцируемы необходимое число раз в окрестности точки t_0, то каждая из них может быть разложена по формуле Тейлора, причем соответствующие остаточные члены R_{nx}, R_{ny}, R_{nz} берутся, вообще говоря, в разных точках θ из интервала $(0; 1)$ (см. 5.7). Отсюда следует, что **разложение по формуле Тейлора** имеет вид

$$\bar{a}(t) = \bar{a}(t_0) + \frac{\bar{a}'(t_0)}{1!}\Delta t + \ldots + \frac{\bar{a}^{(n)}(t_0)}{n!}(\Delta t)^n + \bar{R}_n,$$

где $\Delta t = t - t_0$, $\bar{R}_n = R_{nx}\bar{i} + R_{ny}\bar{j} + R_{nz}\bar{k}$.

При выполнении соответствующих условий $\bar{a}(t)$ может быть разложена в **ряд Тейлора** (см. 9.7.1).

13.2. Скалярные и векторные поля

13.2.1. Скалярное поле

Если в некоторой области пространства $Oxyz$ каждой точке $M(x, y, z) \equiv M(\bar{r})$, где $\bar{r}$ — радиус-вектор этой точки, поставлена в соответствие скалярная величина $\Phi(M) \equiv \Phi(\bar{r}) \equiv \Phi(x, y, z)$, то говорят, что задано **скалярное поле** (или **скалярная функция**) $\Phi = \Phi(M)$. **Поверхностью уровня** пространственного скалярного поля $\Phi(x, y, z)$ называется поверхность в пространстве с уравнением $\Phi(x, y, z) = C$, где C — заданное число, изменяя которое, получим различные поверхности уровня. На каждой из них Φ имеет постоянное значение, свое для каждой поверхности. **Линией уровня плоского** скалярного поля $\Phi(x, y)$ называется линия на плоскости Oxy, на которой Φ имеет постоянное значение $\Phi(x, y) = C$. Обычно линии (поверхности) уровня изображают через равные промежутки изменения C. При этом, чем гуще расположены линии (поверхности) уровня, тем быстрее изменится функция Φ. Может оказаться, что пространственное поле $\Phi(M)$ в некоторой декартовой системе координат $Oxyz$ зависит только от x и y и не зависит от z. Такое поле называется **плоскопараллельным**. В плоскости Oxy оно может рассматриваться как **плоское,** если отвлечься от координаты z.

Пример 1.

1) Поверхностями уровня пространственной функции $\Phi = \Phi\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right) \equiv \Phi(r)$, где $r = |\bar{r}|$, являются сферы с общим центром в начале координат. На каждой из них Φ имеет постоянное значение, изменяющееся при переходе на другую сферу.

2) Линиями уровня плоского скалярного поля $\Phi = xy$ являются гиперболы $xy = C = \text{const}$, заполняющие при $C > 0$ первую и третью координатные четверти, а при $C < 0$ — вторую и четвертую.

13.2.2. Векторное поле

Если в некоторой области пространства каждой точке $M(x, y, z) \equiv M(\bar{r})$ ставится в соответствие вектор $\bar{F}(M) \equiv \bar{F}(\bar{r}) \equiv \bar{F}(x, y, z)$, то говорят, что задано **векторное поле**

$$\bar{F}(M) \equiv F_x(x, y, z)\bar{i} + F_y(x, y, z)\bar{j} + F_z(x, y, z)\bar{k}.$$

Векторной линией (линией тока) называется линия L, в каждой точке $M(\bar{r})$ которой вектор $d\bar{r} = \bar{i}\,dx + \bar{j}\,dy + \bar{k}\,dz$, направляемый по касательной к ней, параллелен вектору $\bar{F}(M)$ в этой же точке (рис. 13.2). Векторные линии определяются дифференциальными уравнениями:

$$d\bar{r} \times \bar{F}(\bar{r}) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{dx}{F_x(x, y, z)} = \frac{dy}{F_y(x, y, z)} = \frac{dz}{F_z(x, y, z)},$$

либо

$$\frac{dx}{dt} = F_x(x(t), y(t), z(t)); \quad \frac{dy}{dt} = F_y(\ldots); \quad \frac{dz}{dt} = F_z(\ldots);$$

где t — параметр векторной линии. При соблюдении условий теоремы существования и единственности решения системы дифференциальных уравнений через каждую точку M проходит одна и только одна векторная линия. Все пространство (или его область) заполнено векторными линиями. Векторными линиями **плоского векторного поля** $\bar{F} = F_x(x, y)\bar{i} + F_y(x, y)\bar{j}$ являются линии, лежащие в плоскости Oxy. Часть пространства, состоящая из всех векторных линий, проходящих через некоторый кусок поверхности, называется **векторной трубкой**.

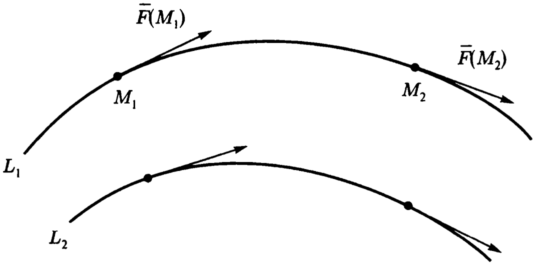


Рис. 13.2

Пример 2.

1) Векторными линиями поля $\bar{F} = \varphi(r)\bar{r}$, где $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$, $r = |\bar{r}|$, являются лучи, выходящие из начала координат.
2) Векторные линии плоского поля $\bar{F} = ky\bar{i} - kx\bar{j}$, где k — постоянная, определяются уравнением
$$\frac{dx}{y} = \frac{dy}{(-x)}$$
и являются окружностями $x^2 + y^2 = C^2$ с центром в начале координат.

Векторным элементом $d\bar{r}$ линии L с уравнением $\bar{r} = \bar{r}(t)$ (t — параметр) или $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ называется вектор
$$d\bar{r} = \bar{i}\,dx + \bar{j}\,dy + \bar{k}\,dz = (x'\bar{i} + y'\bar{j} + z'\bar{k})\,dt = \bar{r}'(t)\,dt,$$
являющийся функцией от t. В каждой точке гладкой кривой вектор $d\bar{r}$ направлен по касательной. Длина дуги линии L находится по формуле
$$l = \int_{t_0}^{t} dl \quad \left[dl = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = \sqrt{(x')^2 + (y')^2 + (z')^2}\,dt\right].$$

13.3. Производная скалярного поля по направлению. Градиент

Пусть $\Phi(M) \equiv \Phi(x, y, z)$ — скалярное поле в декартовой системе координат. Из каждой точки $M(\bar{r}) \equiv M(x, y, z)$ пространства можно провести бесконечное множество лучей. Каждый из этих лучей определяется своим единичным направляющим вектором $\bar{\tau}$, выходящим из точки M, и имеет уравнение $\bar{r}(l) = \overline{OM}_1 = \overline{OM} + \overline{MM}_1 = \bar{r}(0) + \bar{\tau} l$ (или $x(l) = x(0) + \tau_x l, \ldots$), где $l \geqslant 0$ — расстояние от переменной точки M_1 луча до фиксированной точки M (рис. 13.3). Скалярная величина Φ для точки M_1 каждого заданного луча будет функцией только от l. Тогда для луча, определяемого вектором $\bar{\tau}$, предел
$$\frac{d\Phi(M)}{dl} = \lim_{M_1 \to M} \frac{\Phi(M_1) - \Phi(M)}{MM_1} = \lim_{l \to 0} \frac{\Phi[\bar{r}(0) + \bar{\tau} l] - \Phi[\bar{r}(0)]}{l},$$

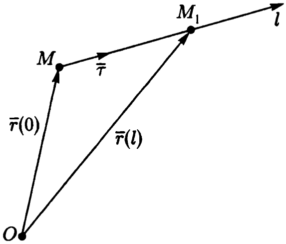


Рис. 13.3

если он существует, называется **производной функции** $\Phi(\bar{r})$ **в точке** $M(\bar{r})$ **по направлению** $\bar{\tau}$. При изменении направления луча на противоположное производная по направлению изменяет только знак. Производную от $\Phi(M)$ по направлению $\bar{\tau} = \tau_x \bar{i} + \tau_y \bar{j} + \tau_z \bar{k} = x'\bar{i} + y'\bar{j} + z'\bar{k}$ можно записать в виде

$$\frac{d\Phi}{dl} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dx}{dl} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dl} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{dz}{dl} = \Phi'_x \tau_x + \Phi'_y \tau_y + \Phi'_z \tau_z.$$

Если $\bar{r} = \bar{r}(l)$ или $x = x(l)$, $y = y(l)$, $z = z(l)$ — уравнение какой-либо ориентированной кривой, проходящей через точку M, и $\bar{\tau} = (\tau_x, \tau_y, \tau_z) = (x', y', z')$ — единичный касательный вектор к этой кривой, то можно рассматривать производную от $\Phi(x, y, z)$ по направлению $\bar{\tau}(M)$ в каждой точке M этой кривой

$$\frac{d\Phi}{dl} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\tau_x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\tau_y + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\tau_z.$$

Если $\bar{r} = \bar{r}(t)$; $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, где t — любой параметр, то

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\frac{dz}{dt}.$$

Градиентом функции (скалярного поля) $\Phi(M) \equiv \Phi(x, y, z)$ называется векторное поле (обозначаемое grad Φ), определенное в каждой точке $M(x, y, z)$ равенством

$$\operatorname{grad} \Phi = \frac{\partial \Phi}{\partial x}\bar{i} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\bar{j} + \frac{\partial \Phi}{\partial z}\bar{k}.$$

Справедливо равенство

$$\frac{d\Phi}{dl} = \bar{\tau} \cdot \operatorname{grad} \Phi,$$

т. е. производная по направлению $\bar{\tau}$ равна проекции градиента на направление $\bar{\tau}$.

Полный дифференциал функции $\Phi(\bar{r})$ (т. е. линейную часть ее приращения при переходе от точки (x, y, z) к точке $(x+dx, y+dy, z+dz)$) можно записать в виде

$$d\Phi = \Phi'_x\, dx + \Phi'_y\, dy + \Phi'_z\, dz = (\operatorname{grad} \Phi) \cdot d\bar{r}.$$

На поверхности уровня $\Phi(x, y, z) = C$ справедливо $d\Phi = (\operatorname{grad} \Phi) \cdot d\bar{r} = 0$, т. е. градиент нормален к поверхности уровня, точнее говоря, к касательной плоскости. Наименьшего (соответственно наибольшего) абсолютного значения производная $d\Phi/dl$ по направлению $\bar{\tau}$ достигает, когда $\bar{\tau}$ касателен к поверхности уровня, при этом $d\Phi/dl = 0$ (соответственно, когда $\bar{\tau}$ нормален к поверхности уровня, при этом $|d\Phi/dl| = |\operatorname{grad} \Phi| = \sqrt{(\Phi'_x)^2 + (\Phi'_y)^2 + (\Phi'_z)^2}$). В каждой точке поля вектор градиента перпендикулярен к поверхности уровня и направлен в сторону наиболее быстрого возрастания скаляра Φ. Для градиента используется также запись $\operatorname{grad} \Phi \equiv \nabla \Phi$, где $\nabla = \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}$ называется оператором набла. При этом $d\Phi = (\nabla \Phi) \cdot d\bar{r} = (d\bar{r}\nabla)\Phi$ (см. 13.6.2).

Свойства градиента:

$$\operatorname{grad}(\Phi+\Psi)=\operatorname{grad}\Phi+\operatorname{grad}\Psi,$$
$$\operatorname{grad}C=0 \quad (C=\text{const}),$$
$$\operatorname{grad}(C\Phi)=C\operatorname{grad}\Phi \quad (C=\text{const}),$$
$$\operatorname{grad}(\Phi\Psi)=\Phi\operatorname{grad}\Psi+\Psi\operatorname{grad}\Phi,$$
$$\operatorname{grad}\Phi(f(x,y,z))=\frac{\partial\Phi}{\partial f}\operatorname{grad}f,$$
$$\operatorname{grad}(\overline{C}\cdot\bar{r})=\overline{C} \quad (\overline{C}\text{ — постоянный вектор}),$$
$$\operatorname{grad}\frac{\Phi}{\Psi}=\frac{\Psi\operatorname{grad}\Phi-\Phi\operatorname{grad}\Psi}{\Psi^2} \quad (\Psi\neq 0).$$

Пример 3. Найти градиент поля $\Phi=\Phi(r)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Решение. Поверхности уровня — сферы с центрами в начале координат. Имеем

$$\operatorname{grad}\Phi=\frac{d\Phi}{dr}\operatorname{grad}r,$$

где

$$\operatorname{grad}\bar{r}=\left(\frac{\partial r}{\partial x},\frac{\partial r}{\partial y},\frac{\partial r}{\partial z}\right)=\left(\frac{x}{r},\frac{y}{r},\frac{z}{r}\right)=\frac{\bar{r}}{r}.$$

Следовательно,

$$\operatorname{grad}\Phi(r)=\frac{d\Phi}{dr}\frac{\bar{r}}{r}. \qquad \triangleright$$

Примечание. Символический дифференциальный оператор

$$\nabla=\bar{i}\frac{\partial}{\partial x}+\bar{j}\frac{\partial}{\partial y}+\bar{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

называется **оператором Гамильтона (гамильтонианом, набла-оператором, ∇-оператором)**. При этом $\operatorname{grad}\Phi(x,y,z)\equiv\nabla\Phi$.

13.4. Криволинейные интегралы. Потенциальное поле

13.4.1. Криволинейные интегралы

Пусть $\Phi(\bar{r})$ и $\overline{F}(\bar{r})$ — скалярное и векторное поля, AB — кусочно гладкая кривая (A и B — ее начальная и конечная точки соответственно), заданная уравнением $\bar{r}=\bar{r}(t)$ или $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$, где $t_1\leqslant t\leqslant t_2$, t_1 и t_2

соответствуют точкам A и B. Тогда **скалярные криволинейные интегралы**

$$1)\quad \int_{AB} \Phi(\bar{r})\,dl = \int_{AB} \Phi(x,y,z)\,dl = \int_{t_1}^{t_2} \Phi\big(x(t),y(t),z(t)\big)\frac{dl}{dt}\,dt,$$

$$2)\quad \int_{AB} \bar{F}(\bar{r})\,d\bar{r} = \int_{AB} F_x(x,y,z)\,dx + F_y(\ldots)\,dy + F_z(\ldots)\,dz = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}(\bar{r}(t))\frac{d\bar{r}}{dt}\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[F_x\big(x(t),y(t),z(t)\big)\frac{dx}{dt} + F_y\frac{dy}{dt} + F_z\frac{dz}{dt}\right] dt$$

определяются как пределы соответствующих интегральных сумм (см. также 8.5.2) и вычисляются сведением их к определенным интегралам по t от t_1 до t_2.

Аналогично определяются и вычисляются **векторные криволинейные интегралы**

$$3)\quad \int_{AB} \Phi(\bar{r})\,d\bar{r} = \bar{i}\int_{AB} \Phi\,dx + \bar{j}\int_{AB} \Phi\,dy + \bar{k}\int_{AB} \Phi\,dz = \int_{t_1}^{t_2} \Phi(\bar{r})\frac{d\bar{r}}{dt}\,dt =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[\Phi\big(x(t),y(t),z(t)\big)\frac{dx}{dt}\bar{i} + \Phi\frac{dy}{dt}\bar{j} + \Phi\frac{dz}{dt}\bar{k}\right] dt,$$

$$4)\quad \int_{AB} \bar{F}(\bar{r}) \times d\bar{r} = \int_{t_1}^{t_2} \bar{F}(\bar{r}) \times \frac{d\bar{r}}{dt}\,dt =$$

$$= \bar{i}\int_{AB} (F_y\,dz - F_z\,dy) + \bar{j}\int_{AB} (F_z\,dx - F_x\,dz) + \bar{k}\int_{AB} (F_x\,dy - F_y\,dz).$$

Для вычисления этих интегралов их удобно свести к определенным интегралам по t.

Значения скалярных и векторных интегралов в общем случае зависят от формы пути интегрирования AB (при фиксированных точках A и B).

Криволинейный интеграл 2) имеет следующие свойства:

$$\int_{AB} \bar{F}(\bar{r})\,d\bar{r} = \int_{AC} \bar{F}(\bar{r})\,d\bar{r} + \int_{CB} \bar{F}(\bar{r})\,d\bar{r},$$

$$\int_{AB} \bar{F}(\bar{r})\,d\bar{r} = -\int_{BA} \bar{F}(\bar{r})\,d\bar{r},$$

$$\int\limits_{AB} \left[k_1\overline{F}_1(\overline{r}) + k_2\overline{F}_2(\overline{r})\right] d\overline{r} = k_1 \int\limits_{AB} \overline{F}_1(\overline{r})\, d\overline{r} + k_2 \int\limits_{AB} \overline{F}_2(\overline{r})\, d\overline{r},$$

где C — точка кривой AB, лежащая между точками A и B; k_1, k_2 — любые числа.

Интеграл по замкнутой кусочно гладкой кривой (по контуру) C называется **циркуляцией** и обозначается

$$\oint\limits_C \overline{F}(\overline{r})\, d\overline{r} = \oint\limits_C F_\tau\, dl \quad (F_\tau = \overline{\tau} \cdot \overline{F}),$$

где $\overline{\tau} = d\overline{r}/dl$ — единичный вектор касательной к C; dl — дифференциал длины дуги, F_τ — проекция $\overline{F}$ на $\overline{\tau}$.

13.4.2. Потенциальное поле

Векторное поле $\overline{F}(\overline{r})$ называется **потенциальным** в области D, если циркуляция поля **по любому контуру** C, расположенному в D, равна нулю. Для потенциального поля интегралы по любым двум разным кривым AaB и AbB, соединяющим точки A и B и целиком расположенным в D, равны друг другу

$$\int\limits_{AaB} \overline{F}(\overline{r})\, d\overline{r} = \int\limits_{AbB} \overline{F}(\overline{r})\, d\overline{r}$$

и зависят только от точек A и B. В потенциальном векторном поле отсутствуют замкнутые векторные линии.

Если функции $F_x(\overline{r})$, $F_y(\overline{r})$, $F_z(\overline{r})$ имеют все непрерывные первые частные производные в **поверхностно-односвязной** области D (см. 8.7.1), то для векторного поля $\overline{F}(\overline{r}) \equiv (F_x, F_y, F_z)$ в D эквивалентны следующие четыре условия (т. е. из одного любого из них следуют все остальные):

1) Векторное поле $\overline{F}(\overline{r})$ является потенциальным.
2) В области D существует **однозначная потенциальная функция** (**потенциал**) $U(M) \equiv U(\overline{r}) \equiv U(x, y, z)$ такая, что $\overline{F}(M) = \operatorname{grad} U(M)$, или, что равносильно, $dU = d\overline{r} \cdot \operatorname{grad} U = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz$.
3) Для любых двух точек A и B из D и для любой кривой AB в D, их соединяющей, интеграл

$$\int\limits_{AB} \overline{F}\, d\overline{r} = \int\limits_{AB} dU = U(B) - U(A)$$

зависит только от точек A и B, но не от формы кривой, их соединяющей.

4) Всюду в D тождественно выполняется равенство $\operatorname{rot}\overline{F} = 0$ (см. 13.6.2), что равносильно соотношениям

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x}, \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}, \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z}.$$

Каждое из условий 2), 3), 4) является необходимым и достаточным условием потенциальности векторного поля $\overline{F}$. Если $U(B) \equiv U(\bar{r})$, $U(A) \equiv U(\bar{r}_0)$, где точка $B(\bar{r})$ — переменная, а $A(\bar{r}_0)$ — фиксированная, то из условия 3) находим

$$U(\bar{r}) = U(\bar{r}_0) + \int_A^B \overline{F}\, d\bar{r},$$

где интеграл может вычислятся по любой кривой AB, соединяющий A и B.

Способы вычисления потенциала $U(\bar{r})$ приведены в 8.9. Потенциал определяется с точностью до аддитивной постоянной.

13.5. Поверхностные и объемные интегралы

13.5.1. Поверхностные интегралы

Пусть Σ — двухсторонняя гладкая поверхность, заданная уравнением $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ или $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, где u, v — параметры (см. 8.6). Тогда вектор $d\overline{S}$, равный

$$d\overline{S} = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v}\right) du\, dv = \left[\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\bar{i} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\bar{j} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\bar{k}\right] du\, dv,$$

где

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\bar{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\bar{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\bar{k}, \quad \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} = \frac{\partial x}{\partial v}\bar{i} + \frac{\partial y}{\partial v}\bar{j} + \frac{\partial z}{\partial v}\bar{k},$$

называется **векторным элементом** поверхности и направлен по нормали к ней. При этом $d\overline{S} = \bar{n}\, dS$, где $\bar{n}$ — одно из двух направлений единичной нормали к элементу поверхности Σ, $dS = |d\overline{S}|$ — площадь этого элемента (см. также 8.6). В случае замкнутой поверхности Σ в качестве $\bar{n}$ берут внешнюю нормаль. Для гладкой поверхности, заданной однозначной функцией $z = z(x, y)$ (т. е. $u \equiv x$, $v \equiv y$), имеем

$$d\overline{S} = \left(-\frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j} + \bar{k}\right) dx\, dy,$$

$$dS = |d\overline{S}| = \sqrt{(z'_x)^2 + (z'_y)^2 + 1}\, dx\, dy.$$

Скалярные поверхностные интегралы

$$1)\ \iint\limits_{\Sigma} \Phi(M)\,dS, \quad 2)\ \iint\limits_{\Sigma} \bar{F}(M)\,d\bar{S},$$

и векторные поверхностные интегралы

$$3)\ \iint\limits_{\Sigma} \Phi(M)\,d\bar{S}, \quad 4)\ \iint\limits_{\Sigma} \bar{F}(M)\times d\bar{S},$$

где M — точка на кусочно гладкой поверхности Σ, определяются как пределы соответствующих интегральных сумм (см. также 8.6.3). Для вычисления этих интегралов удобно свести их к двойным интегралам по переменным u, v, используя соотношения $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$. В частности,

$$\iint\limits_{\Sigma} \bar{F}(M)\,d\bar{S} = \iint\limits_{\Omega} \left[F_x\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + F_y\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + F_z\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right] du\,dv,$$

где Ω — область интегрирования на плоскости Ouv,

$$F_x = F_x\big(x(u,v), y(u,v), z(u,v)\big)$$

и т. д.

Если $n_x = \bar{i}\cdot\bar{n}$, $n_y = \bar{j}\cdot\bar{n}$, $n_z = \bar{k}\cdot\bar{n}$ — направляющие косинусы нормали $\bar{n}$ к Σ, то $d\bar{S} = \bar{i}n_x\,dS + \bar{j}n_y\,dS + \bar{k}n_z\,dS \equiv \bar{i}\,dS_x + \bar{j}\,dS_y + \bar{k}\,dS_z$ и, в частности,

$$\iint\limits_{\Sigma} \Phi(M)\,d\bar{S} = \bar{i}\iint\limits_{\Sigma} \Phi n_x dS + \bar{j}\iint\limits_{\Sigma} \Phi n_y\,dS + \bar{k}\iint\limits_{\Sigma} \Phi n_z\,dS,$$

$$\iint\limits_{\Sigma} \bar{F}(M)\,d\bar{S} = \iint\limits_{\Sigma} F_n(M)\,dS \quad (F_n = \bar{n}\cdot\bar{F}),$$

$$\iint\limits_{\Sigma} \bar{F}(M)\times d\bar{S} = \iint\limits_{\Sigma} [\bar{F}(M)\times\bar{n}]\,dS.$$

Если поверхность Σ задана уравнением $z = z(x,y)$, то поверхностные интегралы 2), 3), 4) запишутся соответственно в виде

$$\iint\limits_{\Sigma} \bar{F}(M)\,d\bar{S} = \iint\limits_{\Sigma'} \left[-F_x\frac{\partial z}{\partial x} - F_y\frac{\partial z}{\partial y} + F_z\right] dx\,dy,$$

$$\iint\limits_{\Sigma} \Phi(M)\,d\bar{S} = \iint\limits_{\Sigma'} \left[-\Phi\frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} - \Phi\frac{\partial z}{\partial y}\bar{j} + \Phi\bar{k}\right] dx\,dy,$$

$$\iint\limits_{\Sigma} \bar{F}(M)\times d\bar{S} = \iint\limits_{\Sigma'} \bar{F}\times\left(-\frac{\partial z}{\partial x}\bar{i} - \frac{\partial z}{\partial y}\bar{j} + \bar{k}\right) dx\,dy,$$

где Σ' — проекция поверхности Σ на плоскость Oxy; функции $\Phi(M)$, $\overline{F}(M)$ берутся в точках $M\big(x, y, z(x, y)\big)$ на Σ. При этом поверхностные интегралы вычисляются по внешней (положительной) стороне поверхности Σ (см. 8.6).

Поверхностный интеграл

$$\iint\limits_{\Sigma} \overline{F}(M)\,d\overline{S} = \iint\limits_{\Sigma} F_n\,dS$$

называется **потоком вектора** $\overline{F}(M)$ через поверхность Σ.

13.5.2. Объемные интегралы

Скалярный и векторный объемные интегралы по области D трехмерного пространства

$$\iiint\limits_{D} \Phi(M)\,dV = \iiint\limits_{D} \Phi(x, y, z)\,dx\,dy\,dz,$$

$$\iiint\limits_{D} \overline{F}(M)\,dV = \iiint\limits_{D} \left[F_x(x, y, z)\bar{i} + F_y\bar{j} + F_z\bar{k}\right] dx\,dy\,dz$$

определяются как пределы соответствующих интегральных сумм (см. 8.4.1) и вычисляются сведением их к тройным интегралам по x, y, z (см. 8.4.3).

Инвариантное (не зависящее от системы координат) **определение градиента** $\operatorname{grad}\Phi(M)$ скалярного поля $\Phi(M)$ в точке M дается формулой

$$\operatorname{grad}\Phi(M) = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \iint\limits_{\Sigma} \Phi(M_1)\,d\overline{S},$$

где V — объем области, содержащей точку M и ограниченной замкнутой поверхностью Σ; M_1 — переменная точка интегрирования на Σ; в пределе поверхность Σ стягивается к точке M. Вектор $d\overline{S}$ — внешний к области, ограниченной Σ.

13.6. Дивергенция и ротор векторного поля. Производная по направлению

13.6.1. Дивергенция

Дивергенцией $\operatorname{div}\overline{A}(M)$ векторного поля $\overline{A}(M)$ в точке M называется скалярная функция от M, определяемая формулой

$$\operatorname{div}\overline{A}(M) = \lim_{V\to 0} \frac{1}{V} \iint\limits_{\Sigma} \overline{A}(M_1)\,d\overline{S}.$$

Обозначения см. в 13.5.2.

В декартовых координатах дивергенция вычисляется по формуле

$$\operatorname{div}\bar{A}(\bar{r}) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}.$$

Векторное поле $\bar{A}(\bar{r})$ называется **соленоидальным** в области D, если всюду в этой области $\operatorname{div}\bar{A} = 0$. При помощи оператора набла $\nabla \equiv \bar{i}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{j}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{k}\frac{\partial}{\partial z}$ дивергенцию можно записать в виде скалярного произведения векторов ∇ и $\bar{A}$, т. е. $\operatorname{div}\bar{A} \equiv \nabla \cdot \bar{A}$.

Свойства дивергенции:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\bar{C} = 0 \quad (\bar{C} = \text{const}),\\
&\operatorname{div} C\bar{A}(\bar{r}) = C \operatorname{div}\bar{A} \quad (C = \text{const}),\\
&\operatorname{div}\left[\Phi(\bar{r})\bar{A}(\bar{r})\right] = \Phi \operatorname{div}\bar{A} + \bar{A} \operatorname{grad}\Phi,\\
&\operatorname{div}\left[\bar{A}(\bar{r}) \times \bar{B}(\bar{r})\right] = \bar{B} \operatorname{rot}\bar{A} - \bar{A} \operatorname{rot}\bar{B},\\
&\operatorname{div}\operatorname{grad}\Phi(\bar{r}) = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} \equiv \Delta\Phi.
\end{aligned}$$

Определение ротора см. в 13.6.2.

Пример 4.

1) Для поля $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ имеем $\operatorname{div}\bar{r} = \dfrac{\partial x}{\partial x} + \dfrac{\partial y}{\partial y} + \dfrac{\partial z}{\partial z} = 3$.
2) Для поля $\bar{A} = \Phi(x, y, z)\bar{r}$ имеем $\operatorname{div}\bar{A} = 3\Phi + \bar{r}\cdot\operatorname{grad}\Phi$. Если $\Phi = \Phi(r)$, где $r = |\bar{r}|$, то $\operatorname{div}\bar{A} = 3\Phi(r) + r\Phi'(r)$.

13.6.2. Ротор

Ротором $\operatorname{rot}\bar{A}(M)$ векторного поля $\bar{A}(M) \equiv \bar{A}(\bar{r})$ в точке M называется векторная функция от M, определяемая формулой

$$\operatorname{rot}\bar{A}(M) = -\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint\limits_{\Sigma}\bar{A}(M_1)\times d\bar{S}.$$

Обозначения см. в 13.5.2. Такое определение ротора не связано с какой-либо системой координат. В декартовых координатах

$$\operatorname{rot}\bar{A}(\bar{r}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} \equiv \nabla \times \bar{A}(\bar{r}) =$$

$$= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\bar{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\bar{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\bar{k}.$$

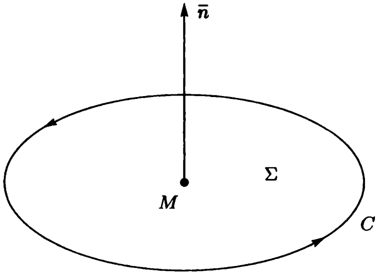


Рис. 13.4

Определение ротора через циркуляцию. Пусть Σ — небольшой кусок гладкой поверхности в пространстве, имеющий площадь S и ограниченный контуром C (рис. 13.4). Направление единичного вектора нормали $\bar{n}$ в точке M на Σ согласовано с направлением обхода контура C (из конца $\bar{n}$ обход контура виден против часовой стрелки). Тогда $\operatorname{rot}\bar{A}(M)$ определяется как такой вектор, проекция которого $\bar{n}\cdot\operatorname{rot}\bar{A}(M)$ на $\bar{n}$ определяется формулой

$$\bar{n}\cdot\operatorname{rot}\bar{A}(M) = \lim_{S\to 0}\frac{1}{S}\oint_C \bar{A}(M_1)\,d\bar{r},$$

где M_1 — точка интегрирования на C; в пределе C стягивается к точке M.

Свойства ротора:

$$\operatorname{rot}\left[\bar{A}(\bar{r})+\bar{B}(\bar{r})\right] = \operatorname{rot}\bar{A}+\operatorname{rot}\bar{B},$$
$$\operatorname{rot}\bar{C}=0\quad(\bar{C}=\text{const}),\qquad \operatorname{rot}\left[C\bar{A}(\bar{r})\right]=C\operatorname{rot}\bar{A}\quad(C=\text{const}),$$
$$\operatorname{rot}\left[\Phi(\bar{r})\bar{A}(\bar{r})\right]=\Phi\operatorname{rot}\bar{A}+(\operatorname{grad}\Phi)\times\bar{A},$$
$$\operatorname{rot}\left[\bar{A}(\bar{r})\times\bar{B}(\bar{r})\right]=(\bar{B}\nabla)\bar{A}-(\bar{A}\nabla)\bar{B}+\bar{A}\operatorname{div}\bar{B}-B\operatorname{div}\bar{A}.$$

Здесь, например,

$$(\bar{B}\nabla)\bar{A}\equiv B_x\frac{\partial\bar{A}}{\partial x}+B_y\frac{\partial\bar{A}}{\partial y}+B_z\frac{\partial\bar{A}}{\partial z}=(\bar{B}\nabla A_x)\bar{i}+(\bar{B}\nabla A_y)\bar{j}+(\bar{B}\nabla A_z)\bar{k}.$$

Справедливо также равенство

$$(\bar{B}\nabla)\Phi\equiv B_x\frac{\partial\Phi}{\partial x}+B_y\frac{\partial\Phi}{\partial y}+B_z\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\bar{B}\cdot(\nabla\Phi),$$

где в качестве Φ можно брать также величины A_x, A_y, A_z.

Пример 5.

1) Для поля $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$ имеем $\operatorname{rot}\bar{r} = 0$.
2) $\operatorname{rot}\left[\Phi(r)\bar{r}\right] = (\operatorname{grad}\Phi)\times\bar{r} = 0$.
3) $\operatorname{rot}\left[\bar{C}\times\bar{r}\right] = (\bar{r}\nabla)\bar{C} - (\bar{C}\nabla)\bar{r} + \bar{C}\operatorname{div}\bar{r} - \bar{r}\operatorname{div}\bar{C} = -(\bar{C}\nabla)\bar{r} + 3\bar{C} = -\bar{C} + 3\bar{C} = 2\bar{C}$.

13.6.3. Производная по направлению

1. Полный дифференциал скалярной функции. $\Phi(\bar{r})$, т. е. главная линейная часть ее приращения $\Phi(\bar{r}+d\bar{r}) - \Phi(\bar{r})$ при переходе из точки $\bar{r}$ в точку $\bar{r}+d\bar{r}$, где $d\bar{r} = \bar{i}\,dx + \bar{j}\,dy + \bar{k}\,dz$, равен

$$d\Phi = \Phi'_x\,dx + \Phi'_y\,dy + \Phi'_z\,dz = (\nabla\Phi)\,d\bar{r} = (d\bar{r}\nabla)\Phi.$$

2. Полная производная скалярной функции. $\Phi(\bar{r})$ по направлению вектора $\bar{a}(\bar{r})$ равна

$$\frac{d\Phi}{da} = \bar{a}_0\cdot\nabla\Phi = \Phi'_x a_{0x} + \Phi'_y a_{0y} + \Phi'_z a_{0z} = (\bar{a}_0\nabla)\Phi,$$

где $\bar{a}_0 = \bar{a}/|\bar{a}|$ — единичный вектор.

3. Полный дифференциал векторной функции. $\bar{F}(\bar{r})$, т. е. главная линейная часть ее приращения $\bar{F}(\bar{r}+d\bar{r}) - F(\bar{r})$, равен

$$d\bar{F} = \frac{\partial\bar{F}}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\bar{F}}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\bar{F}}{\partial z}\,dz = (d\bar{r}\nabla)\bar{F} = (d\bar{r}\nabla F_x)\bar{i} + (d\bar{r}\nabla F_y)\bar{j} +$$
$$+ (d\bar{r}\nabla F_z)\bar{k} = (d\bar{r}\nabla)F_x\bar{i} + (d\bar{r}\nabla)F_y\bar{j} + (d\bar{r}\nabla)F_z\bar{k} = \bar{i}\,dF_x + \bar{j}\,dF_y + \bar{k}\,dF_z.$$

4. Полная производная векторной функции. $\bar{F}(\bar{r})$ по направлению вектора $\bar{a}(\bar{r})$ определяется как предел (см. 13.3)

$$\frac{d\bar{F}}{da} = \lim_{\Delta l\to 0}\frac{\bar{F}(\bar{r}+\bar{a}_0\Delta l) - \bar{F}(\bar{r})}{\Delta l} \qquad \left(\bar{a}_0 = \frac{\bar{a}}{|\bar{a}|}\right)$$

и вычисляется по формуле

$$\frac{d\bar{F}}{da} = \frac{\partial\bar{F}}{\partial x}a_{0x} + \frac{\partial\bar{F}}{\partial y}a_{0y} + \frac{\partial\bar{F}}{\partial z}a_{0z} = (\bar{a}_0\nabla)\bar{F} =$$
$$= (\bar{a}_0\nabla)F_x\bar{i} + (\bar{a}_0\nabla)F_y\bar{j} + (\bar{a}_0\nabla)F_z\bar{k} = \frac{dF_x}{da}\bar{i} + \frac{dF_y}{da}\bar{j} + \frac{dF_z}{da}\bar{k}.$$

Аналогично находится полная производная $d\bar{F}(\bar{r})/dt$ по направлению кривой $\bar{r} = \bar{r}(t)$:

$$\frac{d\bar{F}}{dt} = \left(\frac{d\bar{r}}{dt}\nabla\right)\bar{F} = \frac{dF_x}{dt}\bar{i} + \frac{dF_y}{dt}\bar{j} + \frac{dF_z}{dt}\bar{k}.$$

5. Ряд Тейлора, если он сходится, для скалярной функции $\Phi(\bar{r})$ имеет вид

$$\Phi(\bar{r}+\Delta\bar{r}) = \Phi(\bar{r}) + (\Delta\bar{r}\nabla)\Phi(\bar{r}) + \frac{1}{2!}(\Delta\bar{r}\nabla)^2\Phi(\bar{r}) + \ldots .$$

Аналогично, для векторной функции $\overline{F}(\bar{r})$:

$$\overline{F}(\bar{r}+\Delta\bar{r}) = \overline{F}(\bar{r}) + (\Delta\bar{r}\nabla)\overline{F}(\bar{r}) + \frac{1}{2!}(\Delta\bar{r}\nabla)^2\overline{F}(\bar{r}) + \ldots .$$

При этом

$$\Delta\Phi(\bar{r}) = \Phi(\bar{r}+\Delta\bar{r}) - \Phi(\bar{r}) = d\Phi + \ldots,$$
$$\Delta\overline{F}(\bar{r}) = \overline{F}(\bar{r}+\Delta\bar{r}) - \overline{F}(\bar{r}) = d\overline{F} + \ldots .$$

13.7. Основные формулы векторного анализа

1. Для вывода формул векторного анализа следует раскладывать векторы в компонентах в декартовой системе координат, т. е. $\bar{a} = a_x\bar{i} + a_y\bar{j} + a_z\bar{k}$.

Например,

а) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi(x,y,z) =$
$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \equiv \Delta\varphi$$
(оператор Лапласа);

б) $\operatorname{grad}\operatorname{div}\overline{A} = \bar{i}\dfrac{\partial(\operatorname{div}\overline{A})}{\partial x} + \bar{j}\dfrac{\partial(\operatorname{div}\overline{A})}{\partial y} + \bar{k}\dfrac{\partial(\operatorname{div}\overline{A})}{\partial z}$,

где $\operatorname{div}\overline{A} = \dfrac{\partial A_x}{\partial x} + \dfrac{\partial A_y}{\partial y} + \dfrac{\partial A_z}{\partial z}$;

в) $\operatorname{div}\operatorname{rot}\overline{A} = \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y} - \dfrac{\partial A_y}{\partial z}\right) + \dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial A_x}{\partial z} - \dfrac{\partial A_z}{\partial x}\right) + \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial A_y}{\partial x} - \dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right) \equiv 0$;

г) $\operatorname{div}(\varphi\overline{A}) = \dfrac{\partial(\varphi A_x)}{\partial x} + \dfrac{\partial(\varphi A_y)}{\partial y} + \dfrac{\partial(\varphi A_z)}{\partial z} =$
$$= \frac{\partial\varphi}{\partial x}A_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y}A_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z}A_z + \varphi\frac{\partial Ax}{\partial x} + \varphi\frac{\partial Ay}{\partial y} + \varphi\frac{\partial Az}{\partial z} = \overline{A}\cdot\operatorname{grad}\varphi + \varphi\operatorname{div}\overline{A};$$

д) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\overline{A} = \bar{i}\operatorname{rot}_x(\operatorname{rot}\overline{A}) + \bar{j}\operatorname{rot}_y(\operatorname{rot}\overline{A}) + \bar{k}\operatorname{rot}_z(\operatorname{rot}\overline{A})$. Здесь

$$\operatorname{rot}_x(\operatorname{rot}\overline{A}) = \frac{\partial}{\partial y}(\operatorname{rot}\overline{A})_z - \frac{\partial}{\partial z}(\operatorname{rot}\overline{A})_y =$$
$$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) - \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{div}\bar{A} - \Delta A_x.$$

Следовательно, $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{A} - \Delta\bar{A}$, где $\Delta\bar{A} = \bar{i}\Delta A_x + \bar{j}\Delta A_y + \bar{k}\Delta A_z$.

Инвариантное определение **оператора Лапласа** Δ дается формулой

$$\Delta\varphi(M) = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\iint\limits_{\Sigma}\frac{\partial\varphi(M_1)}{\partial n}\,dS,$$

где $\bar{n}$ — внешняя нормаль, остальные обозначения см. в 13.5.2.

2. Вычисления с векторами удобно проводить, переходя к **индексным обозначениям**: $x_1, x_2, x_3 \equiv x, y, z$; $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3 \equiv \bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$ так, что

$$\bar{A} = \bar{e}_1\bar{A}_1 + \bar{e}_2\bar{A}_2 + \bar{e}_3A_3 = \sum_{i=1}^{3}\bar{e}_iA_i.$$

Введем символ ε_{ijk}, обозначающий набор из $3^3 = 27$ чисел, которые определяются следующим образом:

$$\begin{cases} \varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1, \\ \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1, \\ \text{все остальные } \varepsilon_{ijk} = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $\varepsilon_{ijk} = 0$, если хотя бы два индекса из трех совпадают.

Справедливо равенство

$$\sum_{p=1}^{3}\varepsilon_{pij}\varepsilon_{pmn} = \begin{vmatrix}\delta_{im} & \delta_{in}\\ \delta_{jm} & \delta_{jn}\end{vmatrix} = \delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm},$$

где $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$ — **символ Кронекера**.

Векторное произведение в индексных обозначениях можно записать в виде

$$\bar{A}\times\bar{B} = \sum_{i,j,m=1}^{3}\bar{e}_i(\varepsilon_{ijm}A_jB_m), \quad (\bar{A}\times\bar{B})_i = \sum_{j,m=1}^{3}\varepsilon_{ijm}A_jB_m.$$

Например,

$$(\bar{A}\times\bar{B})_1 = \varepsilon_{123}A_2B_3 + \varepsilon_{132}A_3B_2 = A_2B_3 - A_3B_2 \equiv A_yB_z - A_zB_y$$

и т. д.

Имеем также для ротора

$$\operatorname{rot}\bar{A} = \sum_{i,j,m=1}^{3}\bar{e}_i\left(\varepsilon_{ijm}\frac{\partial A_m}{\partial x_j}\right), \quad (\operatorname{rot}\bar{A})_i = \sum_{j,m=1}\varepsilon_{ijm}\frac{\partial A_m}{\partial x_j}.$$

Приведем примеры вычислений.

а) $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right) = \sum\limits_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial {x_i}^2} \equiv \Delta\varphi.$

б) $$(\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi)_i = \sum_{j,m=1}^{3} \varepsilon_{ijm}\frac{\partial}{\partial x_j}(\operatorname{grad}\varphi)_m =$$
$$= \sum_{j,m=1}^{3} \varepsilon_{ijm}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial \varphi}{\partial x_m} = \sum_{j,m=1}^{3} \varepsilon_{ijm}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_m} \equiv 0, \text{ т. е. } \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi \equiv 0.$$

в) $$\operatorname{div}(\bar{A}\times\bar{B}) = \sum_{i,j,m=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\varepsilon_{ijm}A_j B_m) = \sum_{i,j,m=1}^{3} \varepsilon_{ijm}\frac{\partial A_j}{\partial x_i}B_m +$$
$$+ \sum_{i,j,m=1}^{3} \varepsilon_{ijm}A_j\frac{\partial B_m}{\partial x_i} = \sum_{m,i,j=1}^{3} \varepsilon_{mij}\frac{\partial A_j}{\partial x_i}B_m - \sum_{j,i,m=1}^{3} \varepsilon_{jim}A_j\frac{\partial B_m}{\partial x_i} =$$
$$= \bar{B}\cdot\operatorname{rot}\bar{A} - \bar{A}\cdot\operatorname{rot}\bar{B}.$$

г) $$(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{A})_i = \sum_{j,p=1}^{3} \varepsilon_{ijp}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{m,n=1}^{3} \varepsilon_{pmn}\frac{\partial A_n}{\partial x_m}\right) = \sum_{j,p,m,n=1}^{3} \frac{\partial^2 A_n}{\partial x_j \partial x_m}\varepsilon_{ijp}\varepsilon_{pmn} =$$
$$= \sum_{j,m,n=1}^{3} \frac{\partial^2 A_n}{\partial x_j \partial x_m}\sum_{p=1}^{3}\varepsilon_{ijp}\varepsilon_{mnp} = \sum_{j,m,n=1}^{3} \frac{\partial^2 A_n}{\partial x_j \partial x_m}(\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm}) =$$
$$= \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 A_j}{\partial x_j \partial x_i} - \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 A_i}{\partial x_j \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_i}\operatorname{div}\bar{A} - \Delta A_i.$$

Умножая это равенство на $\bar{e}_i$ и суммируя по i, получим формулу, не зависящую от выбора системы координат
$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{A} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{A} - \Delta\bar{A}.$$

3. Некоторые формулы векторного анализа.
$$\operatorname{grad}(\bar{A}\cdot\bar{B}) = (\bar{B}\nabla)\bar{A} + (\bar{A}\nabla)\bar{B} + \bar{B}\times\operatorname{rot}\bar{A} + \bar{A}\times\operatorname{rot}\bar{B},$$
$$\frac{1}{2}\operatorname{grad}\bar{A}^2 = (\bar{A}\nabla)\bar{A} + \bar{A}\times\operatorname{rot}\bar{A},$$
$$\Delta(\varphi\psi) = \psi\Delta\varphi + \varphi\Delta\psi + 2\operatorname{grad}d\varphi\cdot\operatorname{grad}\psi.$$

4. Для скалярной функции $\Phi(|\bar{r}_a - \bar{r}_b|)$, зависящей от расстояния
$$R = |\bar{r}_a - \bar{r}_b| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3}(x_{ia} - x_{ib})^2}$$

между точками $\bar{r}_a$ и $\bar{r}_b$, в зависимости от того, какая из этих двух точек фиксирована, можно рассматривать градиент по координатам другой (переменной) точки. Градиент по координатам переменной точки $\bar{r}_a$ (соответственно $\bar{r}_b$):

$$(\nabla_a \Phi)_i = \frac{\partial \Phi}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x_{ai}}, \qquad (\nabla_b \Phi)_i = \frac{\partial \Phi}{\partial R} \frac{\partial R}{\partial x_{bi}}.$$

Поскольку $\dfrac{\partial R}{\partial x_{ai}} = -\dfrac{\partial R}{\partial x_{bi}}$, то $\nabla_a \Phi = -\nabla_b \Phi$.

Аналогично рассматриваются пространственные производные для векторной функции $\bar{F}(R)$ от двух точек.

13.8. Интегральные формулы

13.8.1. Формула Остроградского

Пусть D — конечная, в общем случае многосвязная область в пространстве $Oxyz$, ограниченная кусочно гладкой поверхностью Σ (которая может состоять из конечного числа замкнутых поверхностей Σ_i) и пусть компоненты $F_x(x, y, z)$, $F_y(\ldots)$, $F_z(\ldots)$ векторного поля $\bar{F}(\bar{r})$ непрерывны в замкнутой области $\bar{D}$, а их первые частные производные непрерывны в D, тогда справедлива **формула Остроградского** (в векторной форме)

$$\iiint\limits_D \operatorname{div} \bar{F}\, dV = \iint\limits_\Sigma \bar{F}\, d\bar{S} \equiv \iint\limits_\Sigma F_n\, dS,$$

где $d\bar{S} = \bar{n}\, dS$, $\bar{n}$ — внешняя нормаль (см. также 8.7.2).

13.8.2. Следствия из формулы Остроградского

Из формулы Остроградского следуют **формулы Грина, первая** и **вторая** соответственно:

$$1)\quad \iiint\limits_D \varphi \Delta \psi\, dV = \iint\limits_\Sigma \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n}\, dS - \iiint\limits_D (\nabla \varphi) \cdot (\nabla \psi)\, dV,$$

$$2)\quad \iiint\limits_D (\varphi \Delta \psi - \psi \Delta \varphi)\, dV = \iint\limits_\Sigma \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} \right) dS,$$

где $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n} = \bar{n} \cdot \nabla \varphi$ — производная от φ по направлению внешней нормали $\bar{n}$.

Частные случаи и следствия из формулы Остроградского.

1) Если в формуле Остроградского положить $\overline{F}(\overline{r}) = \overline{C}\varphi(\overline{r})$ $(\overline{C} = \text{const})$, то

$$\iint\limits_{\Sigma} \varphi\, d\overline{S} = \iiint\limits_{D} \operatorname{grad}\varphi\, dV.$$

2) Если положить $\overline{F}(\overline{r}) = \overline{C} \times \overline{A}(\overline{r})$ $(\overline{C} = \text{const})$, то

$$\iiint\limits_{D} \operatorname{div}(\overline{C} \times \overline{A}) = -\iiint\limits_{D} \overline{C} \cdot \operatorname{rot}\overline{A}\, dV = \iint\limits_{\Sigma} (\overline{C} \times \overline{A})\, d\overline{S} =$$

$$= \iint\limits_{\Sigma} \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} C_j A_k\, dS_i = \iint\limits_{\Sigma} \overline{C} \cdot (\overline{A} \times d\overline{S}) \quad (dS_i = n_i\, dS).$$

Отсюда

$$\iiint\limits_{D} \operatorname{rot}\overline{A}\, dV = -\iint\limits_{\Sigma} (\overline{A} \times d\overline{S}).$$

3) Если в первой формуле Грина положить $\varphi \equiv 1$, то

$$\iiint\limits_{D} \Delta\psi\, dV = \iint\limits_{\Sigma} \frac{\partial\psi}{\partial n}\, dS \quad \left(\frac{\partial\psi}{\partial n} = \overline{n}\nabla\psi\right).$$

4) Для замкнутой поверхности Σ:

$$\iint\limits_{\Sigma} d\overline{S} = 0, \quad \frac{1}{3}\iint\limits_{\Sigma} \overline{r} \cdot d\overline{S} = V,$$

где V — объем области, ограниченной поверхностью Σ.

13.8.3. Формула Стокса

Пусть Σ — конечная, в общем случае многосвязная (имеющая отверстия) двухсторонняя незамкнутая кусочно гладкая поверхность в пространстве $Oxyz$, ограниченная кусочно гладкой кривой C (которая может состоять из нескольких замкнутых кривых C_i); компоненты $F_x(x, y, z)$, $F_y(\ldots)$, $F_z(\ldots)$ векторного поля $\overline{F}(\overline{r})$ непрерывны вместе с первыми частными производными в некоторой пространственной окрестности Σ, тогда справедлива **формула Стокса** (в векторной форме)

$$\iint\limits_{\Sigma} (\operatorname{rot}\overline{F})_n\, dS \equiv \iint\limits_{\Sigma} \operatorname{rot}\overline{F}\, d\overline{S} = \oint\limits_{C} \overline{F}\, d\overline{r},$$

где интеграл по кривой C равен сумме интегралов по всем контурам C_i; $d\overline{S} = \overline{n}\,dS$, $\overline{n}$ — нормаль к Σ; обход контуров C_i при интегрировании совершается в направлении, при котором область Σ остается слева, если смотреть из конца вектора $\overline{n}$. В случае односвязной поверхности поток ротора через поверхность Σ, натянутую на контур C, равен циркуляции (см. также 8.8.1).

Следствия из формулы Стокса.

1) Если в формуле Стокса положить $\overline{F}(\overline{r}) = \overline{C}\varphi(r)$ $(\overline{C} = \text{const})$, то получается формула

$$\iint\limits_{\Sigma} (\operatorname{grad}\varphi) \times d\overline{S} = -\oint\limits_{C} \varphi\, d\overline{r}.$$

2) Если принять $\overline{F}(\overline{r}) = \overline{C} \times \overline{A}(\overline{r})$ $(\overline{C} = \text{const})$, то

$$\iint\limits_{\Sigma} (d\overline{S} \times \nabla) \times \overline{A} = -\oint\limits_{C} \overline{A} \times d\overline{r},$$

где

$$(d\overline{S} \times \nabla)_i = \sum_{j,m=1}^{3} \varepsilon_{ijm}\, dS_j \frac{\partial}{\partial x_m}.$$

13.9. Нахождение векторного поля по ротору и градиенту

1. Векторное поле $\overline{F}(\overline{r})$ называется **безвихревым** в области D пространства, если $\operatorname{rot}\overline{F} \equiv 0$ в каждой точке области D. Для того чтобы поле $\overline{F}(\overline{r})$ было безвихревым в D, необходимо и достаточно существование в этой области скалярной функции $U(\overline{r})$ (в общем случае **многозначной**) такой, что $\overline{F}(\overline{r}) = \operatorname{grad} U(\overline{r})$, при этом $dU = \overline{F}\,d\overline{r} = (\nabla U)\,d\overline{r}$. Функция $U(\overline{r})$ называется **скалярным потенциалом** векторного поля и определяется с точностью до произвольной аддитивной постоянной. В случае поверхностно односвязной области D функция $U(\overline{r})$ **однозначна** и находится по формуле, приведенной в 13.4.2; при этом безвихревое поле является потенциальным.

2. Векторное поле $\overline{F}(\overline{r})$ называется **соленоидальным** в области D, если $\operatorname{div}\overline{F} \equiv 0$ всюду в этой области. Условие $\overline{F} = \operatorname{rot}\overline{A}$ в D, где $\overline{A}(\overline{r})$ — некоторая векторная функция, называемая **векторным потенциалом**, необходимо и достаточно для соленоидальности поля. Потенциал $\overline{A}$ определяется с точностью до градиента произвольной скалярной функции. В пространственно односвязной области поток поля $\overline{F}(\overline{r})$ через любую замкнутую поверхность

Σ, расположенную в D, равен нулю, т. е.

$$\iint\limits_{\Sigma} \bar{F}\, d\bar{S} = 0 \quad (\operatorname{div} \bar{F} \equiv 0).$$

3. Если для поля $\bar{F}(\bar{r})$ заданы дивергенция и ротор как функции от $\bar{r}$, т. е. $\operatorname{div} \bar{F} = 4\pi q(\bar{r})$, $\operatorname{rot} \bar{F} = 4\pi \bar{J}(\bar{r})$, причем q и $\bar{J}$ стремятся на бесконечности к нулю, то поле $\bar{F}(\bar{r})$ можно записать в виде

$$\bar{F}(\bar{r}) = \operatorname{grad} U(\bar{r}) + \operatorname{rot} \bar{A}(\bar{r}),$$

где

$$U(\bar{r}) = -\iiint \frac{q(\bar{r}_1)}{|\bar{r} - \bar{r}_1|}\, dx_1\, dy_1\, dz_1,$$

$$\bar{A}(\bar{r}) = \iiint \frac{\bar{J}(\bar{r}_1)}{|\bar{r} - \bar{r}_1|}\, dx_1\, dy_1\, dz_1.$$

Здесь $\bar{r}_1 = x_1\bar{i} + y_1\bar{j} + z_1\bar{k}$ — переменный радиус-вектор интегрирования; $|\bar{r} - \bar{r}_1|$ — расстояние между точками $\bar{r}$ и $\bar{r}_1$; интегрирование ведется по всему безграничному пространству.

Если $\operatorname{div} \bar{F}(\bar{r})$ и $\operatorname{rot} \bar{F}(\bar{r})$ заданы в каждой точке $\bar{r}$ области D, а на ее границе Σ задана нормальная компонента F_n, то поле $\bar{F}(\bar{r})$ определяется однозначно в D и может быть представлено в виде

$$\bar{F}(\bar{r}) = \bar{F}_1(\bar{r}) + \bar{F}_2(\bar{r}) \quad (\operatorname{rot} \bar{F}_1 = 0,\ \operatorname{div} F_2 = 0),$$

т. е. в виде суммы безвихревой и соленоидальной составляющих.

13.10. Цилиндрические и сферические координаты

1. **Цилиндрические координаты ρ, φ, z.** Каждой точке M пространства поставлены в соответствие три единичных попарно ортогональных базисных вектора $\bar{e}_\rho$, $\bar{e}_\varphi$, $\bar{e}_z \equiv \bar{k}$, изменяющихся при переходе от одной точки к другой (см. 2.2.2). Любой вектор $\bar{A}(M)$, приложенный к точке M, имеет в этом базисе разложение

$$\bar{A}(M) = A_\rho(M)\bar{e}_\rho(M) + A_\varphi(M)\bar{e}_\varphi(M) + A_z(M)\bar{k},$$

где A_ρ, A_φ, A_z — цилиндрические координаты вектора в точке M. Декартовы координаты вектора $\bar{A}(M) = A_x(M)\bar{i} + A_y(M)\bar{j} + A_z(M)\bar{k}$ связаны с цилиндрическими следующими соотношениями:

$$A_x = A_\rho \cos\varphi - A_\varphi \sin\varphi, \quad A_y = A_\rho \sin\varphi + A_\varphi \cos\varphi, \quad A_z = A_z,$$
$$A_\rho = A_x \cos\varphi + A_y \sin\varphi, \quad A_\varphi = -A_x \sin\varphi + A_y \cos\varphi, \quad A_z = A_z.$$

Справедливы равенства:

$$\operatorname{grad} U(\rho,\varphi,z)=\frac{\partial U}{\partial \rho}\bar e_\rho+\frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\bar e_\varphi+\frac{\partial U}{\partial z}\bar k,$$

$$\operatorname{div}\bar A(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}+\frac{\partial A_z}{\partial z},$$

$$\Delta U(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial U}{\partial \rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2},$$

$$\operatorname{rot}\bar A(\rho,\varphi,z)=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\bar e_\rho & \rho\bar e_\varphi & \bar k\\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\varphi & \partial/\partial z\\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z\end{vmatrix}.$$

Для вычисления $\Delta\bar A=(\Delta\bar A)_\rho\bar e_\rho+(\Delta\bar A)_\varphi\bar e_\varphi+(\Delta\bar A)_z\bar k$ используется формула $\Delta\bar A=\operatorname{grad}\operatorname{div}\bar A-\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar A$.

Элемент длины:

$$dl^2=d\rho^2+\rho^2\,d\varphi^2+dz^2.$$

Связь между базисами:

$$\bar e_\rho=\bar i\cos\varphi+\bar j\sin\varphi,\quad \bar e_\varphi=-\bar i\sin\varphi+\bar j\cos\varphi,\quad \bar e_z\equiv\bar k.$$

2. Сферические координаты ρ,θ,φ. Каждой точке M пространства поставлены в соответствие три единичных попарно ортогональных базисных вектора $\bar e_\rho$, $\bar e_\theta$, $\bar e_\varphi$ (см. 2.2.2). Разложение вектора $\bar A(M)$ в этом базисе:

$$\bar A(M)=A_\rho(M)\bar e_\rho(M)+A_\theta(M)\bar e_\theta(M)+A_\varphi(M)\bar e_\varphi(M),$$

где A_ρ, A_θ, A_φ — сферические координаты вектора.

Связь между базисами:

$$\begin{aligned}\bar e_\rho&=\bar i\sin\theta\cos\varphi+\bar j\sin\theta\sin\varphi+\bar k\cos\theta,\\ \bar e_\theta&=\bar i\cos\theta\cos\varphi+\bar j\cos\theta\sin\varphi-\bar k\sin\theta,\\ \bar e_\varphi&=-\bar i\sin\varphi+\bar j\cos\varphi.\end{aligned}$$

Умножая обе части равенства $A_x\bar i+A_y\bar j+A_z\bar k=A_\rho\bar e_\rho+A_\theta\bar e_\theta+A_\varphi\bar e_\varphi$ скалярно, последовательно на $\bar i$, $\bar j$, $\bar k$, получим связь между координатами вектора $\bar A(M)$ в разных базисах.

Элемент длины:

$$dl^2=d\rho^2+\rho^2\,d\theta^2+\rho^2\sin^2\theta\,d\varphi^2.$$

Справедливы следующие представления:

$$\operatorname{grad} U(\rho,\theta,\varphi) = \frac{\partial U}{\partial \rho}\bar{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial U}{\partial \theta}\bar{e}_\theta + \frac{1}{\rho\sin\theta}\frac{\partial U}{\partial \varphi}\bar{e}_\varphi,$$

$$\operatorname{div} \bar{A}(\rho,\theta,\varphi) = \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho^2 A_\rho) + \rho\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta A_\theta) + \rho\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right],$$

$$\Delta U(\rho,\theta,\varphi) = \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial U}{\partial\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial U}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 U}{\partial\varphi^2}\right],$$

$$\operatorname{rot} \bar{A}(\rho,\theta,\varphi) = \frac{1}{\rho^2\sin\theta}\begin{vmatrix} \bar{e}_\rho & \rho\bar{e}_\theta & \rho\sin\theta\bar{e}_\varphi \\ \partial/\partial\rho & \partial/\partial\theta & \partial/\partial\varphi \\ A_\rho & \rho A_\theta & \rho\sin\theta A_\varphi \end{vmatrix}.$$

13.11. Некоторые сведения из тензорного анализа

Если в некоторой области D пространства каждой точке M поставлен в соответствие тензор какого-либо одного и того же ранга (см. 2.5), то говорят, что в D задано **тензорное поле**. Скалярное и векторное поля являются частными случаями тензорного поля. Рассмотрим следующие три примера тензоров второго ранга в декартовой системе координат $Oxyz$. Далее приняты обозначения: $x_1 \equiv x$, $x_2 \equiv y$, $x_3 \equiv z$; $\bar{e}_1 = \bar{i}$, $\bar{e}_2 \equiv \bar{j}$, $\bar{e}_3 \equiv \bar{k}$.

1. Тензор деформации. Пусть $\bar{u}(\bar{r}) \equiv \bar{u}(x_1, x_2, x_3)$ — **вектор смещения (вектор деформации)** деформируемого твердого тела. Тогда в результате деформации некоторая точка M_1 тела с радиус-вектором $\overline{OM}_1 = \bar{r}$ сместится в точку M_1' с радиус-вектором $\overline{OM}_1' = \bar{r} + \bar{u}(\bar{r})$. Точка $M_2(\bar{r} + d\bar{r})$, бесконечно близкая к точке M_1 (при этом $\overline{M_1M_2} = d\bar{r}$), перейдет после деформации в точку M_2' с радиус-вектором $OM_2' = \bar{r} + d\bar{r} + \bar{u}(\bar{r} + d\bar{r})$. Перемещение точки M_2 относительно точки M_1, т. е. относительно поступательно переместившейся на вектор $\bar{u}(\bar{r})$ системы координат с началом в точке M_1, равно

$$\bar{u}(\bar{r} + d\bar{r}) - \bar{u}(\bar{r}) = d\bar{u} = (d\bar{r}\nabla)\bar{u}$$

или в координатном виде

$$du_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}\, dx_j.$$

Используя формулы перехода от одной декартовой системы координат к другой, можно показать, что величины $u_{ij} = \partial u_i/\partial x_j$ являются компонентами тензора второго ранга. Разложим тензор u_{ij} на симметричную и антисимметричную части

$$u_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \equiv s_{ij} + a_{ij}$$

так, что

$$du_i = \sum_{j=1}^{3} s_{ij}\, dx_j + \sum_{j=1}^{3} a_{ij}\, dx_j.$$

Введем вектор $\bar{A}$ такой, что

$$A_k = -\frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{3} \varepsilon_{kij} a_{ij} \quad \text{или} \quad a_{ij} = -\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk} A_k.$$

Тогда часть относительного смещения du_i, связанная с тензором a_{ij}, равна

$$\sum_{j=1}^{3} a_{ij}\, dx_j = (\bar{A} \times d\bar{r})_i, \quad \text{где} \quad \bar{A} = \frac{1}{2} \operatorname{rot} \bar{u},$$

т. е. является чистым вращением (без деформации) вокруг мгновенной оси, проходящей через точку M_1 в направлении вектора $\bar{A}$, а угол поворота равен $|\bar{A}|$. Симметричная часть s_{ij} называется **тензором чистой деформации**.

2. Тензор напряжений. Из теории упругости известно, что на любую область D внутри деформированного тела со стороны частей тела, находящегося вне D, действуют силы на поверхность Σ, ограничивающую D, так, что к элементарной площадке dS в окрестности точки M на Σ приложена сила $\bar{p}_n\, dS$, где $\bar{p}_n$ — сила на единицу площади, называемая **напряжением** (рис. 13.5) и изменяющаяся вдоль Σ. При этом $\bar{p}_n = \bar{p}_1 n_1 + \bar{p}_2 n_2 + \bar{p}_3 n_3$, где

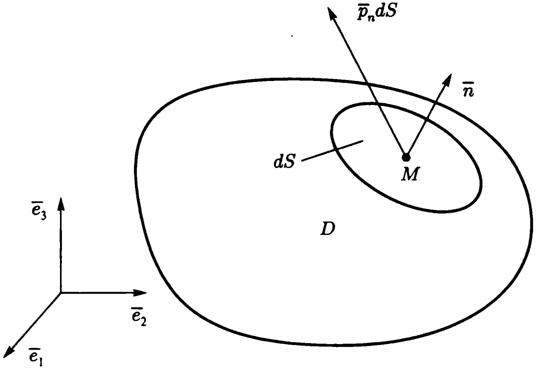


Рис. 13.5

$\bar{n} = (n_1, n_2, n_3)$ — внешняя нормаль к Σ; $\bar{p}_1, \bar{p}_2, \bar{p}_3$ — напряжения на площадках, проходящих через ту же точку M, нормалями к которым являются векторы $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3$ соответственно. Справедливы равенства

$$p_{nx} = p_{n1} = p_{11}n_1 + p_{12}n_2 + p_{13}n_3 = \sum_{j=1}^{3} p_{ij}n_j;$$

$$p_{ny} = p_{n2} = \sum_{j=1}^{3} p_{2j}n_j; \quad p_{nz} \equiv p_{n3} = \sum_{j=1}^{3} p_{3j}n_j.$$

Разложение вектора $\bar{p}_i$ в базисе $\bar{e}_j$ имеет вид

$$\bar{p}_i = \sum_{j=1}^{3} p_{ji}\bar{e}_j.$$

На всю поверхность Σ извне действует сила

$$F_i = \iint\limits_{\Sigma} p_{ni}\, dS = \iint\limits_{\Sigma} \sum_{j=1}^{3} p_{ij}n_j\, dS \quad (i = 1, 2, 3)$$

или, применяя формулу Остроградского,

$$F_i = \iiint\limits_{D} \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}\, dV \equiv \iiint\limits_{D} f_i\, dV.$$

Следовательно, на единицу объема тела действует сила

$$f_i = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial p_{ij}}{\partial x_j}.$$

Тензор с компонентами p_{ij} называется **тензором напряжений**.

3. Векторный градиент. Производная скалярного поля φ по направлению единичного вектора $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$

$$\frac{d\varphi}{da} = \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}a_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}a_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}a_3$$

определяется вектором (градиентом) $\left(\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_2}, \dfrac{\partial\varphi}{\partial x_3}\right)$.

Производная векторного поля $\bar{A}(\bar{r}) = (A_1, A_2, A_3)$ по направлению единичного вектора $\bar{a} = (a_1, a_2, a_3)$ равна $d\bar{A}/da = (\bar{a}\nabla)\bar{A}$ (см. 13.6.3) или в координатах

$$\frac{dA_1}{da} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1}a_1 + \frac{\partial A_1}{\partial x_2}a_2 + \frac{\partial A_1}{\partial x_3}a_3 = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial A_1}{\partial x_j}a_j,$$

$$\frac{dA_2}{da} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial A_2}{\partial x_j}a_j, \quad \frac{dA_3}{da} = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial A_3}{\partial x_j}a_j,$$

т. е.

$$\frac{dA_i}{da} = \sum_{j=1}^{3} G_{ij}a_j.$$

Следовательно, $d\bar{A}/da$ определяется величинами

$$G_{ij} \equiv \frac{\partial A_i}{\partial x_j},$$

являющимися компонентами тензора, называемого **векторным градиентом**.

Примечание. Тензор можно рассматривать также как **линейный оператор**, преобразующий одни векторы в другие. Например, тензоры u_{ij}, p_{ij}, G_{ij}, рассмотренные выше, преобразуют векторы dx_j, n_j, a_j соответственно в векторы du_i, p_{ni}, dA_i/da.

Глава 14

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ

В **дифференциальной геометрии** геометрические образы (кривые линии и поверхности в трехмерном евклидовом пространстве), заданные некоторыми уравнениями, изучаются методами математического анализа, в основном — дифференциального исчисления. Различают **локальные (дифференциальные)** свойства геометрического образа, которые относятся только к ближайшей окрестности той или иной точки, и его **свойства в целом,** относящиеся ко всему образу. Одни свойства геометрического образа зависят от выбора системы координат, в которой они изучаются, а другие — **инвариантные свойства** — от такого выбора не зависят.

14.1. Кривые на плоскости

14.1.1. Способы задания кривых на плоскости. Длина дуги кривой

Кривую L на плоскости (плоскую кривую) можно задать при помощи ее уравнения одним из следующих способов.

В декартовых координатах (x, y):

1) $y = y(x)$ (**явный вид**);
2) $F(x, y) = 0$ (**неявный вид**);
3) $x = x(t), y = y(t)$ (**параметрический вид**);
4) $\bar{r} = \bar{r}(t) = x(t)\bar{i} + y(t)\bar{j}$ (**векторно-параметрический вид**);

В полярных координатах (ρ, φ):

5) $\rho = \rho(\varphi)$.

Длина дуги гладкой (непрерывно дифференцируемой) кривой $y = y(x)$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ находится по формуле

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx.$$

В случае параметрического задания

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2}\, dt \quad (t_1 \leqslant t \leqslant t_2).$$

Здесь $\dot{x}, \dot{y}$ означают производные по t. В полярных координатах

$$l = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2}\, d\varphi \quad (\alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta).$$

Дифференциалом длины дуги называется величина

$$dl = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2} = \sqrt{1 + [y'(x)]^2}\, dx = \sqrt{[\dot{x}(t)]^2 + [\dot{y}(t)]^2}\, dt =$$
$$= \sqrt{\rho^2(\varphi) + [\rho'(\varphi)]^2}\, d\varphi \equiv \sqrt{(\rho\, d\varphi)^2 + (d\rho)^2}.$$

Если $\bar{r} = \bar{r}(t)$, то $dl = |d\bar{r}| \equiv \sqrt{d\bar{r} \cdot d\bar{r}}$.

14.1.2. Касательная и нормаль к плоской кривой

Касательной к кривой L в точке M называется прямая, являющаяся предельным положением секущей (хорды), проходящей через две разные точки M и M_1 на L, когда точка M_1 неограниченно приближается к фиксированной точке M ($M_1 \to M$) (рис. 14.1). Если $\bar{r} = \bar{r}(t)$ — уравнение кривой, то вектор

$$\overline{MT} \equiv \dot{\bar{r}}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overline{MM_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{r}}{\Delta t}$$

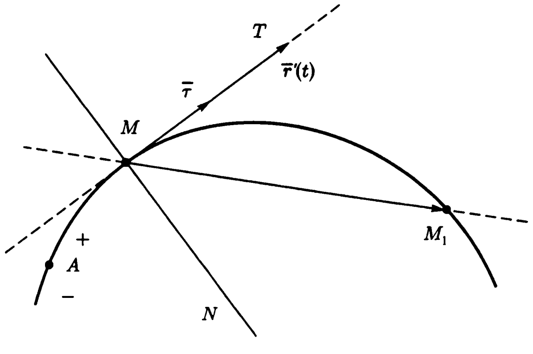


Рис. 14.1

направлен по касательной к кривой. Если в качестве параметра t взять длину l дуги кривой, отсчитываемую от некоторой фиксированной точки A до переменной точки M на кривой с положительным знаком в определенном выбранном направлении, и с отрицательным знаком — в противоположном (аналогично координате x, отсчитываемой от точки O на оси Ox), т. е. $\bar{r} = \bar{r}(l)$, то $\bar{\tau}(M) = \bar{r}'(l)$ будет единичным ($|\bar{\tau}| = 1$) вектором касательной в каждой точке M кривой, направленным в сторону увеличения l (рис. 14.1).

Уравнение касательной (если она существует) к кривой в точке $M_0(x_0, y_0)$, отвечающей значению параметра $t = t_0$, для различных способов задания кривой:

1) $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0) \quad (y_0 = y(x_0))$;
2) $F'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + F'_y(x_0, y_0)(y - y_0) = 0$;
3) $\dfrac{y - y_0}{\dot{y}(t_0)} = \dfrac{x - x_0}{\dot{x}(t_0)}$;
4) $\bar{r} = \dot{\bar{r}}(t_0)(p - p_0) + \bar{r}_0 \quad (\bar{r}_0 = \bar{r}(t_0))$, где p — параметр на касательной.

Угловой коэффициент k касательной равен

$$k = y'(x_0) = -\frac{F'_x(x_0, y_0)}{F'_y(x_0, y_0)} = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}.$$

Единичный вектор касательной в точке $M_0(x_0, y_0)$:

$$\bar{\tau} = \bar{i}\tau_x + \bar{j}\tau_y = \frac{d\bar{r}}{dl} = \frac{\bar{i}\,dx + \bar{j}\,dy}{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}} = \frac{\bar{i} + \bar{j}y'(x_0)}{\sqrt{1 + [y'(x_0)]^2}} = \frac{\bar{i}\dot{x}(t_0) + \bar{j}\dot{y}(t_0)}{\sqrt{[\dot{x}(t_0)]^2 + [\dot{y}(t_0)]^2}}.$$

Обычно вектор $\bar{\tau}$ направляют в сторону возрастания x, или t, или l.

Нормалью к кривой в точке M называется прямая MN, проходящая через точку M перпендикулярно к касательной в точке M (рис. 14.1). Если $\bar{\tau} = (\tau_x, \tau_y)$ — единичный вектор касательной, то единичный вектор нормали $\bar{n} = (n_x, n_y) \equiv \bar{i}n_x + \bar{j}n_y$ такой, что $\bar{n} \cdot \bar{\tau} = 0$, может иметь одно из двух направлений: либо $\bar{n} = (-\tau_y, \tau_x)$, либо $\bar{n} = (\tau_y, -\tau_x)$; т. е. $n_x = \mp\tau_y$, $n_y = \pm\tau_x$. Если выбрано $n_x = -\tau_y$, $n_y = \tau_x$, то векторы $\bar{\tau}$, $\bar{n}$ ориентированы так же, как и векторы $\bar{i}$, $\bar{j}$. Векторы $\bar{\tau}$ и $\bar{n}$ задают положительное направление касательной и нормали, соответственно.

Уравнение нормали, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, может быть задано одним из следующих способов:

1) $y'(x_0)(y - y_0) + x - x_0 = 0$;
2) $F'_x(x_0, y_0)(y - y_0) = F'_y(x_0, y_0)(x - x_0)$;
3) $\dot{x}(t_0)(x - x_0) + \dot{y}(t_0)(y - y_0) = 0$;
4) $\bar{r} = \bar{n}(t_0)(p - p_0) + \bar{r}_0 \quad (\bar{r}_0 = \bar{r}(t_0))$, где p — параметр на нормали.

Угол между двумя кривыми $y = y_1(x)$, $y = y_2(x)$ в точке их пересечения $M_0(x_0, y_0)$ по определению равен углу γ между единичными касательными векторами $\bar{\tau}_1(M_0)$, $\bar{\tau}_2(M_0)$, отсчитываемому от $\bar{\tau}_1$ к $\bar{\tau}_2$ против часовой стрелки, т. е. $\cos\gamma = \bar{\tau}_1 \cdot \bar{\tau}_2 = \tau_{1x}\tau_{2x} + \tau_{1y}\tau_{2y}$.

Пример 1. Для эллипса с уравнением $\bar{r} = \bar{i}a\cos t + \bar{j}b\sin t$ $(-\infty < t < +\infty)$, т. е. $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, находим вектор касательной $\dot{\bar{r}}(t) = -\bar{i}a\sin t + \bar{j}b\cos t$ и вектор нормали $\bar{N} = \mp\bar{i}b\cos t \pm \bar{j}a\sin t$. Здесь оба вектора, в общем случае, не единичные. Исключая t из уравнений $x = a\cos t$, $y = b\sin t$, получим уравнение эллипса в виде

$$F(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

При этом $F'_x = \dfrac{2x}{a^2}$, $F'_y = \dfrac{2y}{b^2}$ и уравнение касательной в точке (x_0, y_0) имеет вид

$$\frac{2x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{2y_0}{b^2}(y - y_0) = 0.$$

Поскольку $\dfrac{x_0^2}{a^2} + \dfrac{y_0^2}{b^2} = 1$, то получим уравнение касательной

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

Имеем далее $\dot{x}(t) = -a\sin t$, $\dot{y}(t) = b\cos t$. Уравнение касательной, проходящей через точку $x_0 = a\cos t_0$, $y_0 = b\sin t_0$, имеет вид

$$\frac{y - b\sin t_0}{b\cos t_0} = -\frac{x - a\cos t_0}{a\sin t_0}.$$

Решая уравнение $F(x, y) = 0$ относительно y, получим $y = \pm b\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}$. Рассмотрим случай $y \geqslant 0$, т. е. берем плюс перед радикалом (случай $y < 0$ рассматривается аналогично). Тогда

$$y' = -\frac{bx}{a^2\sqrt{1 - \dfrac{x^2}{a^2}}}$$

и уравнение касательной имеет вид

$$y - y_0 = -\frac{bx_0}{a^2\sqrt{1 - \dfrac{x_0^2}{a^2}}}(x - x_0).$$

14.1.3. Особые точки кривой

Пусть при параметрическом задании плоской кривой L функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют при $t = t_0$ непрерывные производные. Тогда точка $M_0(x_0, y_0)$ $(x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0))$ на кривой L называется **обыкновенной**, если $[\dot{x}(t_0)]^2 + [\dot{y}(t_0)]^2 \neq 0$. Если же $\dot{x}(t_0) = \dot{y}(t_0) = 0$, то M_0 называется **особой точкой** кривой L; при этом кривая в окрестности M_0 не может быть представлена в виде графика дифференцируемой функции $y = y(x)$ или $x = x(y)$. Однако, разлагая $x(t)$, $y(t)$ в ряды Тейлора

$$x(t) = x(t_0) + \frac{1}{2!}\ddot{x}(t_0)(t - t_0)^2 + \ldots,$$

$$y(t) = y(t_0) + \frac{1}{2!}\ddot{y}(t_0)(t - t_0)^2 + \ldots,$$

можно исследовать вид кривой L в окрестности $M_0(t_0)$.

Пусть кривая L задана уравнением $F(x, y) = 0$ и F имеет в некоторой окрестности $M_0(x_0, y_0)$ непрерывные частные производные по x, y. Тогда точка M_0 называется **обыкновенной** (соответственно **особой**) **точкой** кривой L, если в этой точке $(F_x')^2 + (F_y')^2 \neq 0$ (соответственно $F_x' = F_y' = 0$). Если точка M_0 обыкновенная (соответственно особая), то кривая может быть (соответственно не может быть) представлена уравнением $y = y(x)$ или $x = x(y)$ в окрестности M_0. Если в точке M_0 выполняется $F_x'(M_0) = 0$, $F_y'(M_0) = 0$, а вторые производные не все равны нулю, то особая точка называется **двойной**. Если в M_0 обращаются в нуль все первые и вторые частные производные, а третьи производные не все равны нулю, то точка M_0 называется **тройной** и т. д.

Если M_0 — двойная точка, то используя разложение Тейлора в окрестности M_0

$$F(x, y) = F(x_0, y_0) + A(x - x_0)^2 + 2B(x - x_0)(y - y_0) + C(y - y_0)^2 + \ldots = 0,$$

где

$$A = F''_{xx}(x_0, y_0), \quad B = F''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = F''_{yy}(x_0, y_0),$$

можно исследовать вид кривой L в окрестности точки M_0. Поведение кривой вблизи двойной точки определяется знаком выражения $D(x_0, y_0) = AC - B^2$. Если $D > 0$, то точка M_0 называется **изолированной**. Если $D < 0$, то M_0 называется точкой **самопересечения**. Если $D = 0$, то точка M_0 является либо изолированной, либо **точкой возврата**, либо **точкой самоприкосновения**. Имеются также и другие типы особых точек.

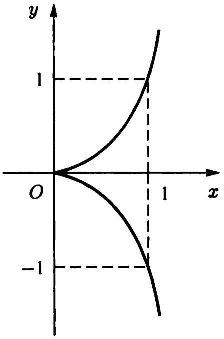


Рис. 14.2

Пример 2. Для кривой $F(x,y) \equiv y^2 - x^3 = 0$ в точке $O(0;0)$ имеем $F_x'(0;0) = 0$, $F_y'(0;0) = 0$, $F''_{yy} \equiv 2 \neq 0$, остальные вторые производные равны нулю. Следовательно, $O(0;0)$ — двойная особая точка. Имеем $D(0;0) = 0$. Точка $O(0;0)$ является **точкой возврата (заострения)** данной кривой (рис. 14.2). Ось Ox является ее касательной в точке O.

14.1.4. Асимптоты

Если кривая L имеет бесконечную ветвь, т. е. такую свою часть, которая неограниченно удаляется в бесконечность, то прямая линия, к которой неограничено приближается точка $M(x, y)$ на этой кривой при удалении в бесконечность, называется **асимптотой** данной кривой. Кривая неограниченно приближается к своей асимптоте, оставаясь либо с одной стороны от нее (рис. 14.3), либо пересекая ее (рис. 14.4). Для кривой, заданной уравнением $y = f(x)$, **наклонной асимптотой** является прямая $y = kx + b$, где

$$k = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} \frac{f(x)}{x}, \quad b = \lim_{\substack{x\to+\infty \\ (x\to-\infty)}} [f(x) - kx],$$

если эти пределы существуют. При $k = 0$ асимптота **горизонтальна**. Прямая $x = a$ называется **вертикальной асимптотой** графика $y = f(x)$, если

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = +\infty(-\infty) \quad \text{и (или)} \quad \lim_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = +\infty(-\infty).$$

Например, гипербола $y=1/x$ имеет вертикальную асимптоту $x=0$ (ось Oy), так как $y \to +\infty$ при $x \to 0$ справа ($x > 0$) и $y \to -\infty$ при $x \to 0$ слева ($x < 0$).

При параметрическом задании кривой $x = x(t)$, $y = y(t)$ находят значения t_0 такие, что $x(t)$ и $y(t)$ стремятся к $\pm\infty$ при $t \to t_0$ слева и(или) справа. Если при этом $x(t) \to \pm\infty$, а $y(t) \to b \neq \infty$, то прямая $y = b$ — горизонтальная асимптота. Если $y(t) \to \pm\infty$, а $x(t) \to a \neq \infty$, то прямая $x = a$ — вертикальная асимптота. При $x(t) \to \pm\infty$, $y(t) \to \pm\infty$, если существуют пределы

$$k = \lim_{t\to t_0} \frac{y(t)}{x(t)}, \quad b = \lim_{t\to t_0}[y(t) - kx(t)],$$

то асимптота имеет уравнение $y=kx+b$. Кривая с бесконечной ветвью может и не иметь асимптоты (например, парабола). Для функции $y = f(x)$, график которой имеет асимптоту $y = kx+b$, справедливо равенство $f(x) = kx+b+\alpha(x)$ где $\alpha(x)$ — бесконечно малая при $x \to \infty$.

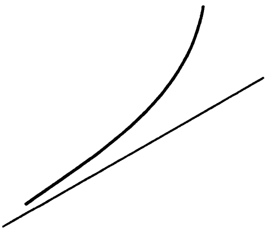


Рис. 14.3

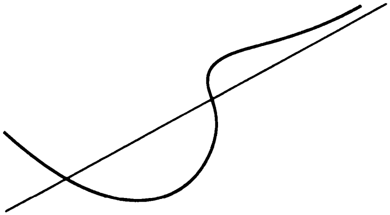


Рис. 14.4

14.1.5. Кривизна плоской кривой

Если $\bar{\tau} = d\bar{r}(l)/dl$ — единичный вектор касательной к кривой $\bar{r} = \bar{r}(l)$, где l — длина дуги кривой (см. 14.1.2), то

$$\bar{\tau}\frac{d\bar{\tau}}{dl} \equiv \bar{\tau}\bar{N} = 0,$$

т. е. вектор

$$\bar{N} = \frac{d\bar{\tau}}{dl} = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta\bar{\tau}}{\Delta l}, \quad \text{где} \quad \Delta\bar{\tau} = \bar{\tau}(l + \Delta l) - \bar{\tau}(l),$$

называемый **вектором кривизны**, перпендикулярен к касательной, т. е. направлен по нормали. При этом $\bar{N}$ всегда направлен в сторону вогнутости кривой (рис. 14.5). Точка C на конце вектора $\bar{N}$ называется **центром кривизны** кривой для точки M. Окружность радиуса $R = |\bar{N}| = MC$, описанная из центра C, называется **соприкасающейся окружностью** (или **кругом кривизны**) кривой для точки M. Эта окружность может быть определена также как предельное положение окружности, проходящей через точку M и две близкие к ней точки M_1, M_2 на кривой, когда M_1 и M_2 неограниченно приближаются к M (рис. 14.5).

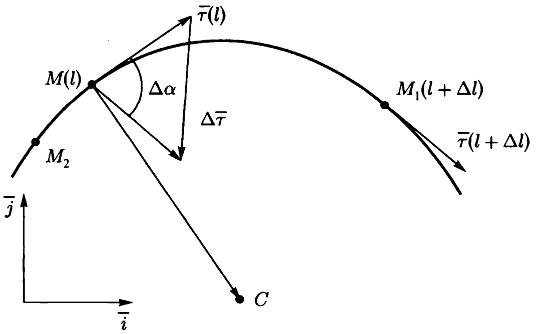
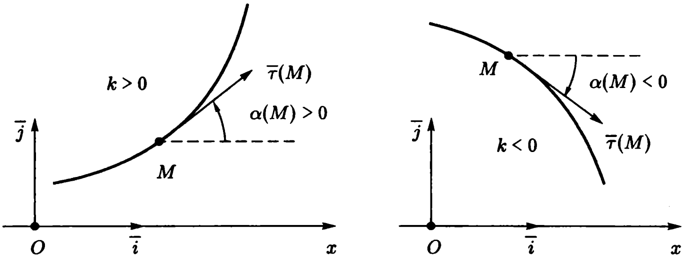


Рис. 14.5

Пусть $\alpha(M)$ — угол между $\bar{\tau}(M)$ и вектором $\bar{i}$ оси Ox, отсчитываемый против часовой стрелки. Тогда кривизной k данной кривой в точке M называется величина

$$k = \lim_{M_1 \to M} \frac{\Delta\alpha}{\Delta l},$$

где Δl — длина дуги MM_1 ($\Delta l > 0$ при $\Delta x > 0$); $\Delta\alpha = \alpha(M_1) - \alpha(M)$ — **угол смежности** (рис. 14.6). Если кривая вогнута (или выпукла) (см. 5.9.2), то кривизна k будет положительной (или отрицательной) величиной. Справедливо



а) *б)*

Рис. 14.6

равенство $|k| = |\overline{N}|$. Часто кривизной называют не k, а $|k|$. Кривизна изменяется от точки к точке и является мерой искривленности участка линии: чем больше $|k|$, тем больше линия искривлена. Для прямой $k \equiv 0$. Кривизна окружности радиуса R всюду равна $1/R$. Точки кривой, для которых $k = 0$, называются **точками спрямления** (таковыми являются, например, точки перегиба). Кривизна и радиус кривизны любой кривой связаны равенством $|k| = 1/R$.

Кривизна k кривой и центр $C(x_c, y_c)$ ее кривизны для точки $M(x, y)$ этой кривой, в зависимости от способа ее задания (см. 14.1.1), находятся по следующим формулам

$$1)\ k = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} \quad (y = y(x)), \tag{14.1а}$$

$$x_c = x - \frac{y'[1 + (y')^2]}{y''}, \quad y_c = y + \frac{1 + (y')^2}{y''}.$$

Если $y'' = 0$ (например, в точке перегиба), то $k = 0$, $R = \infty$, центр кривизны отсутствует.

$$2)\ k = \frac{-(F'_y)^2 F''_{xx} + 2F'_x F'_y F''_{xy} - (F'_x)^2 F''_{yy}}{[(F'_x)^2 + (F'_y)^2]^{3/2}}, \tag{14.1б}$$

$$x_c = x - \frac{F'_x[(F'_x)^2 + (F'_y)^2]}{(F'_y)^2 F''_{xx} - 2F'_x F'_y F''_{xy} + (F'_x)^2 F''_{yy}},$$

$$y_c = y - \frac{F'_y[(F'_x)^2 + (F'_y)^2]}{(F'_y)^2 F''_{xx} - 2F'_x F'_y F''_{xy} + (F'_x)^2 F''_{yy}}.$$

$$3)\ k = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}} \quad (x = x(t),\ y = y(t)), \tag{14.1в}$$

$$x_c = x - \frac{\dot{y}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}, \quad y_c = y + \frac{\dot{x}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)}{\dot{x}\ddot{y} - \dot{y}\ddot{x}}.$$

Если здесь принять $x = t$, $y = y(t)$, то в этих формулах $\dot{x} = 1$, $\ddot{x} = 0$; если $x = x(t)$, $y = t$, то $\dot{y} = 1$, $\ddot{y} = 0$.

$$4)\ k = \frac{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}{[\rho^2 + (\rho')^2]^{3/2}} \quad (\rho = \rho(\varphi)), \tag{14.1г}$$

$$x_c = \rho\cos\varphi - \frac{[\rho^2 + (\rho')^2](\rho\cos\varphi + \rho'\sin\varphi)}{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''},$$

$$y_c = \rho\sin\varphi - \frac{[\rho^2 + (\rho')^2](\rho\sin\varphi - \rho'\cos\varphi)}{\rho^2 + 2(\rho')^2 - \rho\rho''}.$$

Пример 3.

1) $y^2 = 2px$. Считая здесь x и y соответственно функцией и аргументом, запишем $x = \frac{1}{2p}y^2$, $x'(y) = \frac{y}{p}$, $x''(y) = \frac{1}{p}$. Для точки $M(0;0)$ имеем $k = \frac{1}{p}$, $R = p$, $x_c = p$, $y_c = 0$.
2) $F(x,y) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$, $F'_x = \frac{2x}{a^2}$, $F'_y = \frac{2y}{b^2}$, $F''_{xx} = \frac{2}{a^2}$, $F''_{xy} = 0$, $F''_{yy} = \frac{2}{b^2}$; $k = -\frac{a}{b^2}$, $x_c = \frac{a^2 - b^2}{a}$, $y_c = 0$ для точки $M(a, 0)$.
3) $x = t$, $y = t^2$ $(-\infty < t < +\infty)$; $\dot{x} = 1$, $\dot{y} = 2t$, $\ddot{x} = 0$, $\ddot{y} = 2$, $k = 2$ в точке $(0;0)$ при $t = 0$.
4) $\rho = 2R\cos\varphi$ $\left(-\frac{\pi}{2} \leqslant \varphi \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$; $k \equiv \frac{1}{R}$, $x_c = R$, $y_c = 0$.

Точка кривой, в которой она пересекается со своей касательной, т. е. переходит с одной стороны касательной на другую, называется ее **точкой перегиба**. Точки перегиба находятся из условия $k = 0$, при этом кривизна k должна изменять знак при переходе через точку перегиба. В частности, если $y = y(x)$ — уравнение кривой, то условие $k = 0$ при $x = x_0$ равносильно условию $y''(x_0) = 0$. Здесь при $x = x_0$ имеется точка перегиба, только если y'' изменяет знак при переходе через x_0 слева направо.

Пример 4.

1) Кривая $y = x^3$ имеет точку перегиба $(0;0)$, а ось Ox — ее касательная в этой точке (рис. 14.7) при переходе через $x = 0$ знак y'' изменяется.
2) Для кривой $y = x^4$ при $x = 0$ точка перегиба отсутствует, так как, хотя $y''(0) = 0$, однако y'' не меняет знак при переходе через $x = 0$ (рис. 14.8).

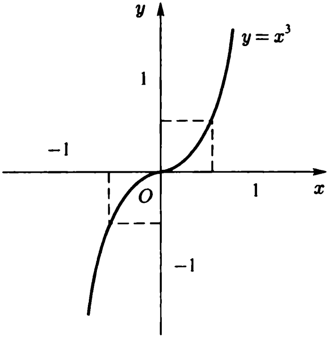


Рис. 14.7

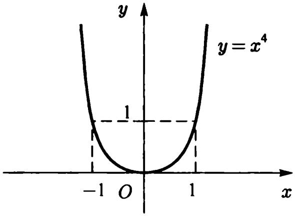


Рис. 14.8

14.1.6. Касание плоских кривых

Говорят, что две плоские кривые L_1, L_2 касаются друг друга в некоторой точке M_0, если они проходят через эту точку и их касательные в этой точке совпадают (рис. 14.9). Пусть кривые L_1, L_2 касаются друг друга в точке M_0 и M_1, M_2 — точки пересечения кривых L_1, L_2 с перпендикуляром к их общей касательной в произвольной точке M на этой касательной. Тогда говорят, что кривые L_1, L_2 имеют в точке M_0 **порядок касания** n, если существует ненулевой предел

$$\lim_{M \to M_0} \frac{|M_1 M_2|}{|M M_0|^{n+1}}.$$

Если этот предел равен нулю, то говорят, что кривые имеют порядок касания выше n. Если порядок касания кривых в некоторой точке больше любого числа n, то говорят, что эти кривые имеют в данной точке бесконечный порядок касания.

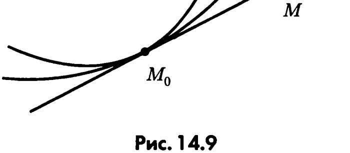


Рис. 14.9

Достаточное условие касания порядка n плоских кривых. Если для двух кривых $y = f_1(x)$, $y = f_2(x)$ в некоторой точке x_0 выполняются соотношения

$$f_1(x_0) = f_2(x_0), \quad f_1'(x_0) = f_2'(x_0), \quad \ldots,$$
$$f_1^{(n)}(x_0) = f_2^{(n)}(x_0), \quad f_1^{(n+1)}(x_0) \neq f_2^{(n+1)}(x_0),$$

то данные кривые имеют в точке $M_0(x_0, y_0)$, где $y_0 = f_1(x_0) = f_2(x_0)$, порядок касания n. Здесь предполагается, что $f_1(x)$ и $f_2(x)$ имеют в точке x_0 непрерывные производные до порядка $(n+1)$ включительно. При выполнении всех вышеперечисленных условий разность $f_2(x_0 + \Delta x) - f_1(x_0 + \Delta x)$ является бесконечно малой $(n+1)$-го порядка относительно Δx. Если графиком функции $y = f(x)$ является кривая L, имеющая в точке $M_0(x_0, f(x_0))$ касательную T с уравнением $y = g(x) \equiv f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$, то в случае $f''(x_0) \neq 0$ линии L и T имеют в точке M_0 порядок касания $n = 1$; если же $f''(x_0) = 0$, то $n \geqslant 2$.

Кривые L_1, L_2 пересекаются в точке касания только в том случае, когда n — четное. Точка, в которой кривая L и ее касательная T пересекаются и имеют касание любого четного порядка $n \geqslant 2$, называется **точка перегиба**. Кривизна линии в ее точке перегиба равна нулю.

Пример 5.

1) Кривые $y = f_1(x) \equiv x^2$, $y = f_2(x) \equiv 2x^2$ имеют в точке $O(0;0)$ порядок касания $n = 1$, так как $f_1(0) = f_2(0)$, $f_1'(0) = f_2'(0)$, $f_1''(0) \neq f_2''(0)$.
2) Кривая $y = x^3$ и ее касательная $y = 0$ в точке перегиба $O(0;0)$ имеют порядок касания $n = 2$.

14.1.7. Дискриминантная кривая и огибающая семейства кривых

Множество $\{L(C)\}$ кривых называется (**однопараметрическим**) **семейством**, если каждой кривой $L(C)$ этого семейства ставится в соответствие определенное значение параметра (числа) C, называемого **параметром семейства**. Изменяя значение C, получим различные кривые семейства. Пусть однопараметрическое семейство кривых определяется уравнением $F(x, y, C) = 0$, где F — дифференцируемая функция. Тогда, если точка $M(x, y)$ на данной кривой $L(C)$ семейства, отвечающей значению C параметра, является пределом при $\Delta C \to 0$ точек пересечения данной кривой $L(C)$ и близкой к ней кривой $L(C + \Delta C)$, то такая точка M называется **характеристической точкой** кривой $L(C)$. Координаты характеристической точки $M(x, y)$ кривой $L(C)$ удовлетворяют системе уравнений

$$F(x, y, C) = 0, \quad \frac{\partial F(x, y, C)}{\partial C} = 0. \tag{14.2}$$

Дискриминантной кривой семейства кривых называется геометрическое место (множество) характеристических точек кривых данного семейства. Исключая C из системы (14.2), получим уравнение дискриминантной кривой.

Огибающей семейства кривых называется такая кривая, которая в каждой своей точке касается только одной кривой семейства, а в разных своих точках касается различных кривых этого семейства.

Если в рассматриваемой области значений x, y, C выполняются условия

$$(F'_x)^2 + (F'_y)^2 \neq 0; \quad F''_{CC} \neq 0; \quad F'_x F''_{Cy} - F'_y F''_{Cx} \neq 0,$$

то уравнение огибающей можно найти, исключая параметр C из системы (14.2). Таким образом, если кривые семейства и дискриминантная кривая не имеют особых точек, то данная дискриминантная кривая является также огибающей. В общем случае дискриминантная кривая может существовать, а огибающая — отсутствовать. Дискриминантная кривая может наряду с огибающей содержать особые точки семейства.

Пример 6.

1) Для семейства полукубических парабол

$$F(x, y, C) \equiv x^3 - (y - C)^2 = 0$$

имеем $F'_C = 2(y - C)$. Исключая C из системы вида (14.2), получим дискриминантную линию $x = 0$ (рис. 14.10), состоящую из особых точек. Огибающая здесь отсутствует.

2) Для семейства окружностей

$$F(x, y, C) \equiv x^2 + (y - C)^2 - R^2 = 0$$

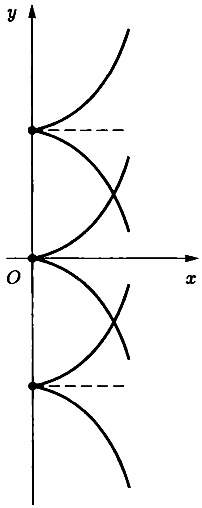


Рис. 14.10

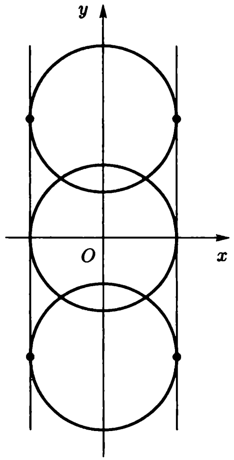


Рис. 14.11

имеем $F'_C = -2(y - C)$. Исключая C из системы вида (14.2), получим $x = \pm R$, т. е. огибающими являются две прямые (рис. 14.11). Все условия существования огибающей выполнены.

14.1.8. Эволюта и эвольвента

1. **Эволютой** плоской кривой называется геометрическое место (множество) центров кривизны данной кривой. Эволюта является также огибающей однопараметрического семейства нормалей этой кривой. Если плоская кривая L, не имеющая точек самопересечения, участков самоналегания и особых точек, задана в виде $y = y(x)$ или $x = x(t)$, $y = y(t)$, то формулы (14.1а) и (14.1в) для нахождения центров кривизны являются одновременно параметрическими уравнениями эволюты $x_c = f(x)$, $y_c = g(x)$; или $x_c = \varphi(t)$, $y_c = \psi(t)$; или, исключая отсюда x (соответственно t), получим уравнение эволюты в виде $y_c = F(x_c)$, где x_c, y_c — координаты переменной точки эволюты.

Пример 7.

1) Для параболы $y^2 = 2px$, принимая y за параметр (см. также пример 3, 1), получим $x = \dfrac{1}{2p}y^2$, $y = y$; $x' = \dfrac{y}{p}$, $x'' = \dfrac{1}{p}$, $y' = 1$, $y'' = 0$ (штрих означает дифференцирование по y). По формулам (14.1в) получим параметрическое уравнение эволюты параболы

$$x_c = \frac{y^2}{2p} + \frac{y^2 + p^2}{p} = \frac{3y^2 + 2p^2}{2p}, \quad y_c = -\frac{y^3}{p^2}.$$

Исключая отсюда y, получим уравнение эволюты в виде (рис. 14.12)

$$y_c^2 = \frac{8}{27p}(x_c - p)^3.$$

2) Для эллипса $x = x(t) \equiv a\cos t$, $y = y(t) \equiv b\sin t$ (см. также пример 3, 2) по формулам (14.1в) находим уравнение эволюты

$$x_c = \frac{a^2 - b^2}{a}\cos^3 t, \quad y_c = \frac{b^2 - a^2}{b}\sin^3 t.$$

3) Для параболы $y = x^2$ уравнение эволюты, найденное по формулам (14.1а), имеет вид $x_c = -4x^3$, $y_c = \dfrac{1}{2} + 3x^3$, или $y_c = \dfrac{1}{2} + 3\left(\dfrac{x}{4}\right)^{2/3}$.

2. Каждая кривая L по отношению к своей эволюте L_1 называется **эвольвентой (разверткой)**. Кривую L (эвольвенту) из ее эволюты L_1 можно получить следующим механическим построением. Если сматывать с эволюты L_1 натянутую на нее нерастяжимую нить, то свободный конец M этой нити будет описывать эвольвенту L. При этом данной эволюте L_1 соответствует

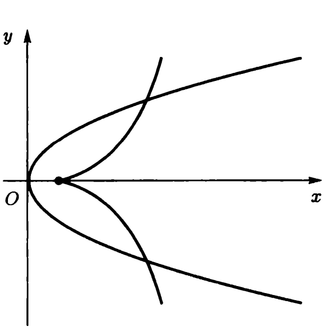


Рис. 14.12

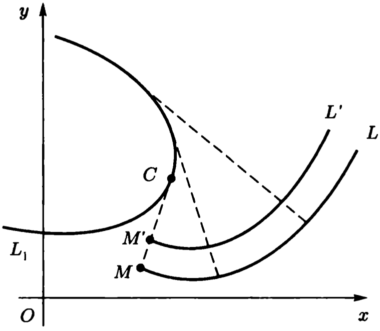


Рис. 14.13

семейство бесконечного множества эвольвент $L, L', \dots$, каждая из которых определяется выбором точки M' на нити (рис. 14.13). Любые две из этих эвольвент L, L' имеют общие нормали (например, MC), а отрезок любой нормали MM' между этими эвольвентами остается постоянным при перемещении точки M по кривой L. Каждая нормаль эвольвенты является касательной к эволюте. Эвольвенты пересекают все касательные к эволюте под прямым углом, т. е. являются ортогональными траекториями этих касательных. Система дифференциальных уравнений для нахождения эвольвенты может быть получена при помощи формул (14.1).

14.1.9. Изогональные траектории

Пусть однопараметрическое семейство кривых $\{L_1(C_1)\}$ задано уравнением $F(x, y_1, C_1) = 0$, определяющим ординату кривой y_1 как функцию от x и C_1. Дифференциальное уравнение $y_1' = f(x, y_1)$ этого семейства кривых находится исключением параметра C_1 из системы уравнений

$$F(x, y_1, C_1) = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y_1} y_1' = 0.$$

Изогональной траекторией данного семейства кривых называется кривая L_2, пересекающая каждую кривую L_1 этого семейства под одним и тем же заданным углом β (рис. 14.14), где $\beta = \alpha_2 - \alpha_1$ — угол между касательными в точке M к кривым L_1 и L_2, отсчитываемый от L_1 к L_2 обычно против часовой стрелки. Изогональные траектории образуют еще одно семейство кривых с параметром C_2. Если угол β прямой, то изогональная траектория называется **ортогональной**. Из равенств $\alpha_2 = \alpha_1 + \beta$, $\operatorname{tg} \alpha_2 = \operatorname{tg}(\alpha_1 + \beta)$, $\operatorname{tg} \alpha_1 = y_1'$,

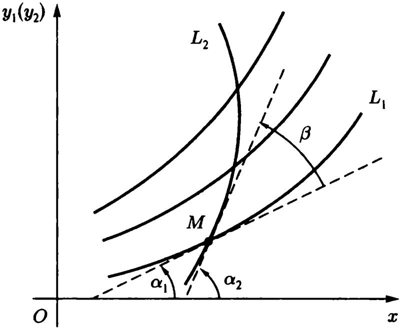


Рис. 14.14

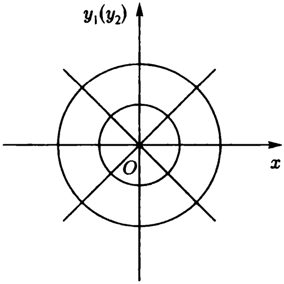


Рис. 14.15

$\operatorname{tg}\alpha_2 = y_2'$, где y_1, y_2 — ординаты кривых L_1, L_2, получаем дифференциальное уравнение семейства изогональных траекторий

$$y_2' = \frac{y_1' + \operatorname{tg}\beta}{1 - y_1' \operatorname{tg}\beta} = \frac{f(x, y_2) + \operatorname{tg}\beta}{1 - f(x, y_2)\operatorname{tg}\beta}. \tag{14.3}$$

Здесь учтено, что в точке M пересечения L_1 и L_2 справедливо $y_2 = y_1$. Если $\beta = \pi/2$, то из $\alpha_2 = \pi/2 + \alpha_1$, $\operatorname{tg}\alpha_2 = -1/\operatorname{tg}\alpha_1$ получается дифференциальное уравнение семейства ортогональных траекторий

$$y_2' = -\frac{1}{y_1'} = -\frac{1}{f(x, y_2)}. \tag{14.4}$$

Общее решение $y_2 = y_2(x, C_2)$ (или общий интеграл) уравнения (14.3) дает семейство изогональных траекторий.

Пример 8.

1) Для семейства лучей $y_1 = C_1 x$, выходящих из начала координат, дифференциальное уравнение семейства получается исключением C_1 из уравнений $y_1 = C_1 x$, $y_1' = C_1$ и имеет вид $y_1' = y_1/x \equiv f(x, y_1)$. Уравнение (14.4) семейства ортогональных траекторий имеет вид $y_2' = -x/y_2$, а его интегральными кривыми являются окружности $y_2^2 + x^2 = 2C_2$ $(C_2 > 0)$ с центром в начале координат (рис. 14.15).
2) Найдем изогональные траектории семейства парабол $F(x, y_1, C_1) = y_1 - C_1 x^2 = 0$, т. е. $y_1 = C_1 x^2$. Исключая C_1 из уравнений $y_1 - C_1 x^2 = 0$, $-2C_1 x + y_1' = 0$, получим дифференциальное уравнение этого семейства $y_1' = 2y_1/x \equiv f(x, y_1)$. Уравнение (14.3), в котором величина $\operatorname{tg}\beta = k$ задана, принимает вид

$$y_2' = \frac{2\dfrac{y_2}{x} + k}{1 - 2\dfrac{y_2}{x}k}.$$

Если $\beta = \pi/2$, то уравнение (14.4) семейства ортогональных траекторий имеет вид

$$y_2' = -\frac{1}{f(x, y_2)} = -\frac{x}{2y_2},$$

и его общим интегралом является

$$y_2^2 + \frac{1}{2}x^2 = C_2.$$

Следовательно, ортогональными траекториями (при $C_2 > 0$) являются подобные эллипсы с центром в начале координат.

14.2. Кривые в пространстве

14.2.1. Способы задания кривых. Длина дуги кривой

Кривую L в пространстве (пространственную кривую) в декартовой системе координат $Oxyz$ можно задать одним из следующих способов (см. также 3.2.1):

1) $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ (**параметрический вид**);

2) $\bar{r} = \bar{r}(t) = \bar{i}x(t) + \bar{j}y(t) + \bar{k}z(t)$ (**векторно-параметрический вид**),

где $\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z \equiv \overline{OM}$ — радиус-вектор точки $M(x, y, z)$ на кривой. Если за параметр t принять длину l дуги кривой (**натуральный параметр**), отсчитываемую с определенным знаком от фиксированной точки A до переменной точки M на этой кривой (см. 14.1.2), то

$$\bar{r} = \bar{r}(l) = \bar{i}x(l) + \bar{j}y(l) + \bar{k}z(l).$$

Производные по t и l обозначаются соответственно $\dot{x}$ и x'.

Кривая L может быть задана и как линия пересечения двух поверхностей с уравнениями

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0.$$

Если за параметр принять одну из координат, например x, то линию можно задать уравнениями

$$x = x, \quad y = f(x), \quad z = g(x).$$

Длина l дуги кривой между точками M_1 и M_2 (M_2 следует за M_1 с увеличением t), которым соответствуют значения параметра t_1 и t_2 ($t_2 > t_1$), равна

$$l = \int_{M_1}^{M_2} dl = \int_{M_1}^{M_2} \sqrt{(d\bar{r})^2} = \int_{M_1}^{M_2} \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} =$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{\bar{r}}^2}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt.$$

Выражение dl под каждым из этих интегралов называется **дифференциалом длины дуги** (или **элементом длины дуги**).

Пример 9. Длина дуги **винтовой линии** $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$, где $a > 0$ (при $b > 0$ — правая винтовая линия, при $b < 0$ — левая винтовая линия) равна

$$l = \int\limits_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt = t\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Если за параметр принять длину дуги, отсчитываемую от начальной точки при $l = 0$, то уравнения винтовой линии примут вид

$$x = a\cos\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y = a\sin\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad z = \frac{bl}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

Винтовая линия расположена на поверхности цилиндра радиуса a, осью которого является ось Oz.

14.2.2. Основные элементы пространственной кривой

Касательной к кривой L в точке M называется прямая, являющаяся предельным положением секущей, проходящей через две точки M, M_1 на L, когда точка M_1 стремится к M. Если функции $x(t), y(t), z(t)$ имеют непрерывные производные по t, то кривая L имеет в каждой точке M, в которой $d\bar{r}/dt \neq 0$, единственную касательную и вектор $d\bar{r}/dt$ направлен по касательной. Если l — натуральный параметр, то для кривой $\bar{r} = \bar{r}(l)$ единичный касательный вектор

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{dl} = \bar{i}x'(l) + \bar{j}y'(l) + \bar{k}z'(l)$$

соответствует положительному направлению на L (в котором величина l возрастает). Вектор

$$\frac{d\bar{\tau}}{dl} = \frac{d^2\bar{r}}{dl^2} = \overline{N}$$

называется **вектором кривизны** в точке M, а его длина

$$|\overline{N}| = |\bar{r}''| \equiv k = \sqrt{[x''(l)]^2 + [y''(l)]^2 + [z''(l)]^2}$$

(всегда $k \geqslant 0$) называется **кривизной кривой** в точке M, а величина $R = 1/k$ — радиусом кривизны кривой в точке M. В случае плоской кривой кривизна может иметь знак плюс или минус. Вектор $\overline{N}$ перпендикулярен к $\bar{\tau}$, а его направление называется направлением **главной нормали кривой** в точке M. Вводя единичный **вектор главной нормали**

$$\bar{n} = \frac{\bar{r}''(l)}{|\bar{r}''(l)|} = \frac{\bar{i}x''(l) + \bar{j}y''(l) + \bar{k}z''(l)}{k}$$

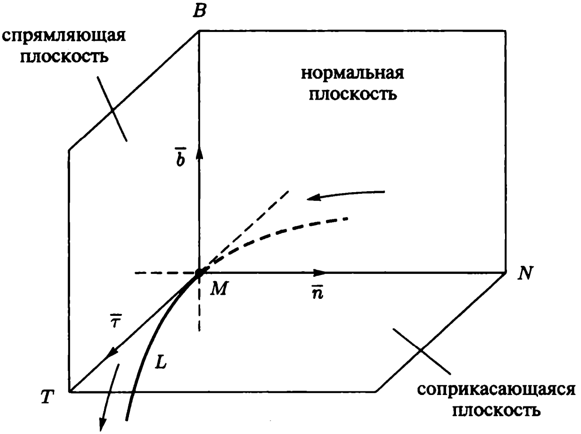


Рис. 14.16

в каждой точке M, можно записать $\bar{N} = k\bar{n}$. Единичный вектор $\bar{b} = \bar{\tau} \times \bar{n}$, перпендикулярный к $\bar{\tau}$ и $\bar{n}$, называется **вектором бинормали**. Тройка переменных единичных векторов $\bar{\tau}, \bar{n}, \bar{b}$, приложенных к каждой точке M кривой L и имеющая ту же ориентацию, что и тройка базисных векторов $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$, называется **сопровождающим** (или **подвижным**) **трехгранником** данной кривой (рис. 14.16). Плоскость TMN, проходящая через векторы $\bar{\tau}, \bar{n}$ называется **соприкасающейся плоскостью.** Плоскость BMN, содержащая векторы $\bar{b}$, $\bar{n}$, называется **нормальной плоскостью**. Плоскость BMT, на которой лежат векторы $\bar{b}, \bar{\tau}$, называется **спрямляющей плоскостью**. Соприкасающейся окружностью (или кругом кривизны) кривой L в точке M называется предельное положение окружности, проходящей через M и соседние точки M_1, M_2, которые стремятся к M. Круг кривизны лежит в соприкасающейся плоскости, его радиус равен радиусу кривизны кривой в точке M, а его центр C определяется радиус-вектором $\bar{r}_C = \bar{r}_M + R\bar{n}(M)$. С учетом разложения $\bar{r}(l + \Delta l)$ в ряд Тейлора в окрестности точки $M(l)$:

$$\bar{r}(l + \Delta l) = \bar{r}(l) + \frac{d\bar{r}(l)}{dl}\Delta l + \frac{1}{2!}\frac{d^2\bar{r}(l)}{dl^2}(\Delta l)^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^3\bar{r}(l)}{dl^3}(\Delta l)^3 + \ldots,$$

кривая L с точностью до членов $(\Delta l)^2$ лежит в соприкасающейся плоскости, а расстояние точки кривой до соприкасающейся плоскости не ниже третьего порядка по Δl. Кривая располагается, как правило, по одну сторону от спрямляющей плоскости и по обе стороны от соприкасающейся плоскости. Производная $\bar{b}'(l)$ вектора бинормали характеризует отклонение кривой от плоской формы. Вектор $\bar{b}'(l)$ параллелен вектору $\bar{n}$. В равенстве $\bar{b}'(l) = -T\bar{n}(l)$ величина $T = T(l)$, изменяющаяся вдоль кривой, называется **кручением кривой** L в точке в $M(l)$. Кручение T вычисляется по формуле

$$T = \frac{1}{k^2}\bar{r}'(l)\cdot\left[\bar{r}''(l)\times\bar{r}'''(l)\right] = \frac{1}{k^2}\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}, \tag{14.5}$$

где $k^2 = (x'')^2 + (y'')^2 + (z'')^2$.

В случае любого параметрического задания кривой $\bar{r} = \bar{r}(t)$ справедливы формулы

$$\begin{aligned} k^2 &= \frac{1}{R^2} = \frac{(\dot{\bar{r}}\times\ddot{\bar{r}})^2}{[(\dot{\bar{r}})^2]^3} = \frac{(\dot{y}\ddot{z}-\dot{z}\ddot{y})^2+(\dot{z}\ddot{x}-\dot{x}\ddot{z})^2+(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})^2}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^3} = \\ &= \frac{|\bar{v}|^2|\bar{w}|^2-(\bar{v}\cdot\bar{w})^2}{|\bar{v}|^6} \quad (\bar{v} = \bar{i}\dot{x}+\bar{j}\dot{y}+\bar{k}\dot{z},\ \bar{w} = \bar{i}\ddot{x}+\bar{j}\ddot{y}+\bar{k}\ddot{z}); \\ T &= \frac{\dot{\bar{r}}\cdot(\ddot{\bar{r}}\times\dddot{\bar{r}})}{|\dot{\bar{r}}\times\ddot{\bar{r}}|^2} = R^2\cdot\frac{\begin{vmatrix} \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ \ddot{x} & \ddot{y} & \ddot{z} \\ \dddot{x} & \dddot{y} & \dddot{z} \end{vmatrix}}{(\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2)^3}. \end{aligned} \tag{14.6}$$

Для того чтобы кривая была плоской, необходимо и достаточно, чтобы ее кручение всюду на кривой равнялось бы нулю ($T \equiv 0$). У неплоской кривой кручение может равняться нулю только в некоторых ее точках. Если $T > 0$ в точке M кривой, то в окрестности этой точки направление закручивания кривой такое же, как у правой винтовой линии, расположенной на поверхности цилиндра, ось которого параллельна вектору бинормали $\bar{b}(M)$ (см. пример 9); если же $T < 0$, то кривая закручивается как левая винтовая линия.

Пример 10. Для винтовой линии $x = a\cos t$, $y = a\sin t$, $z = bt$ (см. также пример 9) имеем

$$x = a\cos\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad y = a\sin\frac{l}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad z = \frac{bl}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \left(l = t\sqrt{a^2+b^2}\right);$$

$$k = \frac{1}{R} = \sqrt{(x'')^2+(y'')^2+(z'')^2} = \frac{a}{a^2+b^2};$$

$$T = \frac{1}{a^2(a^2+b^2)}\begin{vmatrix} -a\sin t & a\cos t & b \\ -a\cos t & -a\sin t & 0 \\ a\sin t & -a\cos t & 0 \end{vmatrix} = \frac{b}{a^2+b^2}.$$

14.2.3. Формулы Серре—Френе

1. В каждой точке кривой L единичные векторы $\bar{\tau}(l)$, $\bar{n}(l)$, $\bar{b}(l)$ сопровождающего трехгранника связаны между собой соотношениями

$$\frac{d\bar{\tau}}{dl} = k\bar{n}, \quad \frac{d\bar{n}}{dl} = -k\bar{\tau} + T\bar{b}, \quad \frac{d\bar{b}}{dl} = -T\bar{n}, \tag{14.7}$$

называемыми **формулами Серре—Френе.** Из этих формул следует, в частности, что если известны кривизна $k(l)$ и кручение $T(l)$ кривой L, то могут быть найдены производные от $\bar{\tau}(l)$, $\bar{n}(l)$, $\bar{b}(l)$ по l. В декартовой системе координат имеем $\bar{\tau} = \bar{i}\tau_x + \bar{j}\tau_y + \bar{k}\tau_z$, $\bar{n} = \bar{i}n_x + \bar{j}n_y + \bar{k}n_z$, $\bar{b} = \bar{i}b_x + \bar{j}b_y + \bar{k}b_z$ и, например,

$$\frac{d\bar{\tau}}{dl} = \bar{i}\frac{\tau_x}{dl} + \bar{j}\frac{\tau_y}{dl} + \bar{k}\frac{\tau_z}{dl}.$$

В силу этих равенств формулы (14.7) могут быть разложены в декартовой системе координат.

2. Если $\bar{r} = \bar{r}(t)$ (т. е. $l = l(t)$) — уравнение кривой L, то справедливо равенство

$$\ddot{\bar{r}} = \bar{\tau}\ddot{l} + \frac{\bar{n}}{R}\dot{l}^2 \equiv \bar{\tau}w_\tau + \bar{n}w_n,$$

являющееся разложением ускорения $\bar{w} \equiv \ddot{\bar{r}}$ движущейся точки в осях естественного трехгранника.

3. Если $k(l) > 0$ и $T(l)$ — любые заданные дифференцируемые функции, то существует единственная, с точностью до положения в пространстве, кривая $\bar{r} = \bar{r}(l)$ (l — длина ее дуги), для которой $k(l)$ и $T(l)$ — кривизна и кручение соответственно. В этой связи уравнения $k = k(l)$, $T = T(l)$ называют **натуральными (внутренними) уравнениями** кривой.

14.3. Поверхности

14.3.1. Общие сведения

Поверхность Σ в пространстве (см. также 3.2.1 и 8.6.1) в декартовой прямоугольной системе координат $Oxyz$ можно задать ее уравнениями одним из следующих способов:

1) $z = f(x,y)$ (**явный вид**), (14.8)

2) $F(x,y,z) = 0$ (**неявный вид**),

3) $\bar{r} = \bar{r}(u,v) = \bar{i}\cdot x(u,y) + \bar{j}\cdot y(u,y) + \bar{k}\cdot z(u,y)$ (**векторно-параметрический вид**),

4) $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, $z = z(u,v)$ (**параметрический вид**).

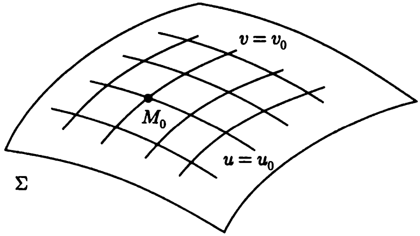


Рис. 14.17

Здесь $\bar{r} = \bar{i}x + \bar{j}y + \bar{k}z \equiv \overline{OM}$ — радиус-вектор точки $M(x, y, z)$ на поверхности; u, v — независимые переменные параметры, называемые **криволинейными координатами на поверхности.** Поверхность представляет собой двумерное многообразие, помещенное в трехмерное пространство. Поверхность можно изучать, не связывая ее с окружающим пространством, рассматривая параметры u, v как (**криволинейные**) **координаты** точек на поверхности Σ (рис. 14.17). Придавая параметру u определенное постоянное значение $u = C_1$, получим кривую $\bar{r} = \bar{r}(C_1, v)$ на поверхности Σ. Такая кривая, вдоль которой изменяется только параметр v, называется **v-кривой** или **кривой** $u = \text{const}$. Аналогично, принимая $v = C_2$, можно определить **u-кривую** (или **кривую** $v = \text{const}$), вдоль которой изменяется только u. Два семейства этих кривых образуют на поверхности Σ координатную сетку, при помощи которой можно задать положение любой точки M_0 как пересечение координатных кривых $u = u_0$, $v = v_0$ (рис. 14.17). Направление координатной кривой совпадает с направлением роста соответствующего параметра u (или v). На поверхности можно ввести бесконечное множество координатных систем, любые две из которых связаны соотношениями $u = u(\bar{u}, \bar{v})$, $v = v(\bar{u}, \bar{v})$, где якобиан $\dfrac{\partial(u, v)}{\partial(\bar{u}, \bar{v})} \not\equiv 0$. Произвольная кривая L на поверхности Σ может быть задана уравнением $v = f(u)$, либо $F(u, v) = 0$, либо параметрически: $u = u(t)$, $v = v(t)$.

Пример 11. Сфера радиуса R с центром в начале координат может быть определена одним из следующих способов:

1) $z = \pm\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ (знаки + и − соответствуют верхней и нижней полусфере);
2) $F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$;
3) $x = R\sin u \cos v$, $y = R\sin u \sin v$, $z = R\cos u$, где используются сферические координаты и приняты обозначения $u \equiv \theta$, $v \equiv \varphi$ $(0 \leqslant u \leqslant \pi,\ 0 \leqslant v < 2\pi)$;
4) $\bar{r} = \bar{i}R\sin u \cos v + \bar{j}R\sin u \sin v + \bar{k}R\cos u$. Координатными u-линиями (на которых $v = \text{const}$) здесь являются меридианы, а v-линиями ($u = \text{const}$) — параллели.

Если поверхность Σ определена уравнением $F(x, y, z) = 0$, где функция F имеет непрерывные частные производные первого порядка по всем аргументам в некоторой окрестности каждой точки на Σ, то точка M_0 на этой поверхности называется **особой**, если в этой точке $F'_x(M_0) = F'_y(M_0) = F'_z(M_0) = 0$. Точки на Σ, не являющиеся особыми, называются **обыкновенными**. Поверхность, не имеющая особых точек, называется **гладкой** (или **регулярной**).

Пример 12. Для кругового конуса имеем уравнение $F(x, y, z) \equiv x^2 + y^2 - z^2 = 0$ и $F'_x = 2x$, $F'_y = 2y$, $F'_z = -2z$. Единственной особой точкой является начало координат $O(0; 0; 0)$. В окрестности этой точки поверхность конуса нельзя однозначно спроецировать ни на одну из координатных плоскостей.

Пусть поверхность Σ определена параметрически, причем функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ в (14.8) имеют непрерывные частные производные первого порядка по u, v в некоторой окрестности точки M на Σ. Тогда точка M является обыкновенной, если существует система координат u, v в некоторой окрестности точки M такая, что в этой точке ранг матрицы

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial x}{\partial v} & \dfrac{\partial y}{\partial v} & \dfrac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \tag{14.9}$$

равен двум, т. е. три определителя, которые можно составить из элементов этой матрицы, не все одновременно равны нулю в точке M, или

$$\frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \bar{r}}{\partial v} \neq 0$$

в точке M. В противном случае точка M на поверхности Σ является особой. Через каждую обыкновенную точку поверхности проходит единственная u-линия и единственная v-линия, пересекающиеся в этой точке. У каждой обыкновенной точки имеется окрестность на поверхности Σ, однозначно проецирующаяся хотя бы на одну из координатных плоскостей в системе $Oxyz$.

14.3.2. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Касательная плоскость в каждой обыкновенной точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на поверхности Σ определяется как предельное положение плоскости, проходящей через точку M_0 и две другие точки M_1, M_2 на Σ при неограниченном произвольном приближении точек M_1, M_2 к M_0 вдоль поверхности Σ.

Если поверхность Σ задана уравнением $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$, то векторы

$$\bar{r}'_u = \frac{\partial x(u, v)}{\partial u}\bar{i} + \frac{\partial y(u, v)}{\partial u}\bar{j} + \frac{\partial z(u, v)}{\partial u}\bar{k},$$

$$\bar{r}'_v = \frac{\partial x(u, v)}{\partial v}\bar{i} + \frac{\partial y(u, v)}{\partial v}\bar{j} + \frac{\partial z(u, v)}{\partial v}\bar{k}$$

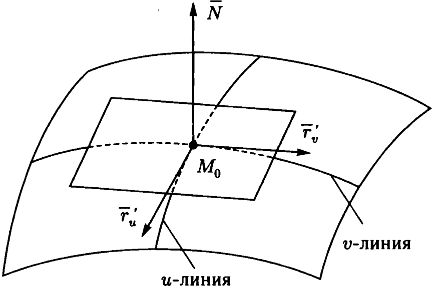


Рис. 14.18

являются касательными к (координатным) u-линиям и v-линиям соответственно. При этом векторы

$$\bar{e}_u = \frac{\bar{r}'_u}{|\bar{r}'_u|}, \quad \bar{e}_v = \frac{\bar{r}'_v}{|\bar{r}'_v|} \quad \text{— единичные.}$$

В каждой точке $M_0(u_0, v_0)$ векторы $\bar{r}'_u(M_0)$ и $\bar{r}'_v(M_0)$ лежат в касательной к поверхности Σ плоскости, а **единичный вектор нормали** к поверхности

$$\overline{N} = \frac{\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v}{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|}$$

перпендикулярен к касательной плоскости в каждой точке M_0 поверхности Σ и направлен так, что векторы $\bar{r}'_u$, $\bar{r}'_v$, $\overline{N}$ образуют правую тройку. (рис. 14.18).

Для поверхности Σ, заданной одним из способов (14.8), единичный вектор нормали $\overline{N}$ к поверхности в каждой обыкновенной точке $M_0(x_0, y_0, z_0) \equiv M_0(u_0, v_0)$ определяется формулами

$$\begin{aligned}
&1)\ \overline{N} = \frac{-f'_x\bar{i} - f'_y\bar{j} + \bar{k}}{\sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}},\\
&2)\ \overline{N} = \frac{F'_x\bar{i} + F'_y\bar{j} + F'_z\bar{k}}{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}},\\
&3)\ \overline{N} = \frac{\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v}{|\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|},\\
&4)\ \overline{N} = \frac{A\bar{i} + B\bar{j} + C\bar{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},
\end{aligned} \qquad (14.10)$$

где A, B, C — якобианы, составленные из элементов матрицы (14.9):

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}, \quad B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}, \quad C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \quad \text{(см. также 8.6).}$$

В формулах (14.10) производные вычисляются в точке M_0. Касательная плоскость в точке $M_0(\bar{r}_0)$ определяется условием ортогональности векторов $(\bar{r}-\bar{r}_0)$ и $\overline{N}$

$$(\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot \overline{N}(M_0) = 0,$$

где $\bar{r}$ — радиус-вектор переменной точки $M(x, y, z)$ в касательной плоскости:

$$\begin{aligned} &1)\ (x - x_0)f'_x(x_0, y_0) + (y - y_0)f'_y(x_0, y_0) - (z - z_0) = 0, \\ &2)\ (x - x_0)F'_x(M_0) + (y - y_0)F'_y(M_0) + (z - z_0)F'_z(M_0) = 0, \\ &3)\ (\bar{r} - \bar{r}_0) \cdot \left[\bar{r}'_u(M_0) \times \bar{r}'_v(M_0)\right] = 0, \\ &4)\ (x - x_0)A(M_0) + (y - y_0)B(M_0) + (z - z_0)C(M_0) = 0. \end{aligned} \tag{14.11}$$

Пример 13. Для эллипсоида $F(x,y,z) \equiv \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$, $F'_x = \frac{2x}{a^2}$, $F'_y = \frac{2y}{b^2}$, $F'_z = \frac{2z}{c^2}$, касательная плоскость в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеет уравнение

$$\frac{x_0}{a^2}(x - x_0) + \frac{y_0}{b^2}(y - y_0) + \frac{z_0}{c^2}(z - z_0) = 0,$$

или

$$\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} + \frac{z_0 z}{c^2} = 1.$$

Пусть однопараметрическое семейство поверхностей задано уравнением $F(x, y, z, C) = 0$, где F — дифференцируемая функция в области ее определения. Линия L на поверхности $\Sigma(C)$, соответствующей значению C параметра, называется **характеристикой**, если координаты точек L удовлетворяют системе двух уравнений $F(x, y, z, C) = 0$, $F'_C(x, y, z, C) = 0$. Геометрическое место (множество) характеристик называется **дискриминантной поверхностью** данного семейства. **Огибающей** однопараметрического семейства поверхностей называется такая поверхность, которая в каждой своей точке касается какой-нибудь поверхности данного семейства. Если все поверхности семейства и дискриминантная поверхность не имеют особых точек, то дискриминантная поверхность является также огибающей. В общем случае дискриминантная поверхность может полностью состоять из особых точек поверхностей семейства, а также иметь свои особые точки. Например, огибающей семейства сфер одинакового радиуса, центры которых находятся на окружности (радиус которой не меньше радиуса сфер), является **поверхность тора**. А для сфер с центрами на прямой — цилиндрическая поверхность.

14.3.3. Первая квадратичная форма поверхности. Элемент длины дуги и элемент площади

Пусть $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ — уравнение поверхности Σ, а $u = u(t)$, $v = v(t)$ — уравнения кривой L, лежащей на этой поверхности. Тогда дифференциал радиус-вектора $\bar{r} = \bar{r}[u(t), v(t)]$ вдоль этой кривой имеет вид $d\bar{r} = \bar{r}'_u\,du + \bar{r}'_v\,dv$, где $du = \dot{u}\,dt$, $dv = \dot{v}\,dt$, а квадрат дифференциала длины дуги кривой L равен

$$\begin{aligned} dl^2 &= |d\bar{r}|^2 = d\bar{r}\cdot d\bar{r} = dx^2 + dy^2 + dz^2 = \\ &= (x'_u\,du + x'_v\,dv)^2 + (y'_u\,du + y'_v\,dv)^2 + (z'_u\,du + z'_v\,dv)^2 = \\ &= E(u,v)\,du^2 + 2F(u,v)\,du\,dv + G(u,v)\,dv^2, \end{aligned} \tag{14.12}$$

где

$$\begin{aligned} E &= (\bar{r}'_u)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ F &= \bar{r}'_u\cdot\bar{r}'_v = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \\ G &= (\bar{r}'_v)^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2. \end{aligned}$$

Выражение $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ в (14.12) называется **первой квадратичной формой поверхности**. Если поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, то

$$E = 1 + (f'_x)^2, \quad F = f'_x f'_y, \quad G = 1 + (f'_y)^2.$$

В каждой обыкновенной точке поверхности с координатными линиями u, v первая квадратичная форма положительно определена (т. е. $E > 0$, $G > 0$, $EG - F^2 > 0$).

Длина дуги гладкой кривой L между точками $M_1[u(t_1), v(t_1)]$ и $M_2[u(t_2), v(t_2)]$ на Σ равна

$$l = \int_{t_1}^{t_2} dl = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\bar{r}}|\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2}\,dt.$$

Угол между двумя кривыми L_1 и L_2 на поверхности Σ, пересекающимися в точке M и имеющими уравнения $\bar{r} = \overline{R}_1(t) \equiv \bar{r}[u_1(t), v_1(t)]$ и $\bar{r} = \overline{R}_2(t) \equiv \bar{r}[u_2(t), v_2(t)]$, находится по формуле

$$\cos\alpha = \frac{d\overline{R}_1\cdot d\overline{R}_2}{|d\overline{R}_1|\cdot|d\overline{R}_2|} = \frac{E\dot{u}_1\dot{u}_2 + F(\dot{u}_1\dot{v}_2 + \dot{v}_1\dot{u}_2) + G\dot{v}_1\dot{v}_2}{\sqrt{E\dot{u}_1^2 + 2F\dot{u}_1\dot{v}_1 + G\dot{v}_1^2}\sqrt{E\dot{u}_2^2 + 2F\dot{u}_2\dot{v}_2 + G\dot{v}_2^2}},$$

где α — угол между положительными направлениями касательных в точке M; производные по t, обозначаемые точками, берутся при значении t, соответствующем точке M. Угол β между координатными линиями u, v, проходящими через точку $M(u, v)$, находится по формуле

$$\cos\beta = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \sin\beta = \frac{\sqrt{EG - F^2}}{\sqrt{EG}}.$$

Условием ортогональности координатных линий u, v является $F \equiv 0$.

Векторный элемент площади $d\bar{S}$ и элемент площади $dS = |d\bar{S}|$ поверхности в окрестности обыкновенной точки $M(u, v)$ определяются равенствами

$$d\bar{S} = (\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v)\,du\,dv = \bar{N}dS \quad (|\bar{N}| = 1),$$

$$dS = |\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v|\,du\,dv = \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,du\,dv.$$

Выражения для величин A, B, C приведены в 8.6 и 14.3.2. Для поверхности с уравнением $z = f(x, y)$ справедливо (см. 8.6.2):

$$dS = \sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}\,dx\,dy,$$

где в качестве параметров на поверхности берутся $x \equiv u$, $y \equiv v$.

Площадь гладкого куска поверхности находится по формуле:

$$S = \iint\limits_{\Omega} dS,$$

где Ω — область изменения параметров u, v на плоскости Ouv; в качестве dS берется одно из вышеприведенных выражений.

Формулы для вычисления длин, углов, площадей на поверхности Σ, в которых используется первая квадратичная форма, не связаны с окружающим пространством и относятся к **внутренней геометрии поверхностей**. Поверхности, имеющие одинаковую внутреннюю геометрию (т. е. одинаковые значения E, F, G) при соответствующем выборе координатной системы на каждой из этих поверхностей, называются **изометричными**, как, например, плоскость и параболический цилиндр, который может быть развернут на плоскость без изменения длин, углов и площадей.

14.3.4. Вторая квадратичная форма поверхности. Кривизна кривой на поверхности

1. Пусть L — гладкая кривая, заданная на гладкой поверхности Σ уравнением

$$\bar{r} = \bar{r}(l) = \bar{r}[u(l), v(l)] \quad \text{или} \quad u = u(l),\ v = v(l),$$

где l — длина дуги этой кривой. Вектор касательной $\bar{\tau} = \bar{r}'(l)$ к L перпендикулярен единичному вектору нормали $\overline{N}$ поверхности, т. е. $\bar{\tau}(l) \cdot \overline{N}(l) = 0$. Дифференцируя это равенство по l, получим

$$\frac{d\bar{\tau}}{dl} \cdot \frac{d\overline{N}}{dl} = -\frac{\bar{n} \cdot \overline{N}}{R} = -\frac{\cos\varphi}{R}, \tag{14.13}$$

где R — радиус кривизны кривой L, φ — угол между нормалью $\overline{N}$ к поверхности и главной нормалью $\bar{n}$ кривой L; $d\bar{r} = \bar{r}'_u\, du + \bar{r}'_v\, dv$, $d\overline{N} = \overline{N}'_u\, du + \overline{N}'_v\, dv$.

Введем обозначения:

$$-d\bar{r} \cdot d\overline{N} = L(u,v)\, du^2 + 2M(u,v)\, du\, dv + N(u,v)\, dv^2, \tag{14.14}$$

где

$$L = -\bar{r}'_u \cdot \bar{r}'_u = \bar{r}''_{uu} \cdot \overline{N} = \frac{\bar{r}''_{uu} \cdot (\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v)}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$M = -\bar{r}'_u \cdot \overline{N}'_v = -\bar{r}'_v \overline{N}'_u = \bar{r}''_{uv} \cdot \overline{N} = \frac{\bar{r}''_{uv} \cdot (\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v)}{\sqrt{EG - F^2}},$$

$$N = -\bar{r}'_v \cdot \overline{N}'_v = \bar{r}''_{vv} \cdot \overline{N} = \frac{\bar{r}''_{vv} \cdot (\bar{r}'_u \times \bar{r}'_v)}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

Выражение $L\,du^2 + 2M du\, dv + N dv^2$ в (14.14) называется **второй квадратичной формой поверхности**. Для поверхности, заданной в виде $z = f(x,y)$, имеем:

$$\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}; \quad \bar{r}'_x = \bar{i} + f'_x\bar{k}; \quad \bar{r}'_y = \bar{j} + f'_y\bar{k};$$

$$\bar{r}''_{xx} = f''_{xx}\bar{k}; \quad \bar{r}''_{xy} = f''_{xy}\bar{k}, \quad \bar{r}''_{yy} = f''_{yy}\bar{k};$$

$$L = \frac{f''_{xx}}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}; \quad M = \frac{f''_{xy}}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}};$$

$$N = \frac{f''_{yy}}{\sqrt{1 + (f'_x)^2 + (f'_y)^2}}.$$

2. В каждой точке $M(u,v)$ кривой L на поверхности Σ вектор кривизны $\bar{r}''(l) = k\bar{n}$ (см. 14.2.2) этой кривой единственным способом может быть представлен в виде суммы двух векторов

$$\bar{r}'' = k\bar{n} = k_G[\overline{N} \times \bar{r}'(l)] + k_N\overline{N},$$

где $k_G = [\overline{N} \times \bar{r}'(l)] \cdot \bar{r}''(l)$ — **геодезическая кривизна кривой** L в точке M, являющаяся кривизной проекции кривой L на касательную плоскость в точке M; $k_N = \bar{r}'' \cdot \overline{N} = -\bar{r}'(l) \cdot \overline{N}'(l)$ — **нормальная кривизна** кривой L в точке M, являющаяся кривизной **нормального сечения** поверхности Σ плоскостью, проходящей через векторы $\overline{N}$ и $\bar{\tau} = \bar{r}'(l)$, приложенные в точке M.

Теорема Мёнье. *Радиус кривизны $R = 1/k$ любой кривой на поверхности в данной ее точке M равен произведению радиуса кривизны $R_N = 1/|k_N|$ соответствующего нормального сечения на абсолютную величину косинуса угла φ между нормалью $\overline{N}$ к поверхности в точке M и главной нормалью $\overline{n}$ к кривой, т. е.*

$$R = R_N|\cos\varphi|. \tag{14.15}$$

Например, для сферы радиуса R в качестве нормального сечения можно взять любой меридиан. Взяв в качестве кривой L параллель на широте φ, получим для ее радиуса r соотношение $r = R\cos\varphi$ (здесь нормаль $\overline{N}$ к сфере направлена к ее центру).

Уравнение (14.15) выражает также радиус кривизны любого наклонного сечения поверхности через радиус кривизны нормального сечения с той же касательной к сечению. Соответствующие кривизны связаны равенством $k = |k_N/\cos\varphi|$.

Из (14.13) и (14.14) следует, что для всякой кривой L на поверхности Σ справедливо

$$\begin{aligned} k_N = -\overline{r}'(l)\cdot\overline{N}'(l) = \frac{\cos\varphi}{R} &= L\left(\frac{du}{dl}\right)^2 + 2M\frac{du}{dl}\frac{dv}{dl} + N\left(\frac{dv}{dl}\right)^2 = \\ &= \frac{L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2}{E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2}, \end{aligned} \tag{14.16}$$

где правая часть равенства зависит в заданной точке $M(u, v)$ поверхности только от отношения $dv : du$, т. е. только от направления касательной к кривой L в точке M. Для нормального сечения в (14.16) надо полагать $\cos\varphi = \pm 1$, где $\cos\varphi = 1$ (или $\cos\varphi = -1$), если направления вектора главной нормали $\overline{n}$ нормального сечения и вектора $\overline{N}$ совпадают (или противоположны). При этом для кривизны нормального сечения имеем соответственно $k_N = 1/R > 0$ (или $k_N = -1/R < 0$), где R — радиус кривизны нормального сечения.

14.3.5. Главные кривизны, гауссова кривизна и средняя кривизна поверхности

1. Главные кривизны поверхности. Точка гладкой поверхности Σ называется **сферической** (или **круговой**), если в этой точке кривизна k_N имеет одинаковые ненулевые значения для всех нормальных сечений (т. е. $L : E = M : F = N : G = \lambda$). В каждой несферической точке M поверхности Σ всегда существуют два таких нормальных сечения, называемых **главными нормальными сечениями**, которые имеют наименьшее k_1 и наибольшее k_2 значения нормальной кривизны k_N, называемые **главными кривизнами** поверхности Σ в точке M. При этом плоскости обоих главных нормальных сечений взаимно перпендикулярны. Направления главных нормальных сечений в касательной плоскости называются **главными направлениями**. Для каждого нормального сечения поверхности в точке M, плоскость которого образует угол α с плоскостью первого главного нормального сечения, справедлива **формула Эйлера**

$$k_N = k_1 \cos^2\alpha + k_2 \sin^2\alpha.$$

Значения k_1, k_2 находятся как корни уравнения

$$\begin{vmatrix} L - kE & M - kF \\ M - kF & N - kG \end{vmatrix} = 0.$$

2. **Средней кривизной** поверхности в точке $M(u, v)$ называется величина

$$H(u, v) \equiv \frac{1}{2}(k_1 + k_2),$$

где k_1, k_2 — главные кривизны поверхности. **Гауссовой (полной) кривизной** поверхности в этой точке $M(u, v)$ называется произведение $K(u, v) \equiv k_1 k_2$ главных кривизн в этой точке. Справедливы формулы

$$H = \frac{1}{2}\frac{LG - 2MF + NE}{EG - F^2}, \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

В частности, для сферы радиуса R имеем: $k_1 = k_2 = 1/R$, $H = 1/R$, $K = 1/R^2$ (нормаль $\overline{N}$ к сфере направлена к ее центру).

Знак гауссовой кривизны совпадает со знаком выражения $LN - M^2$, так как $EG - F^2$ всегда положительно. Величины k_1, k_2, H, K не зависят от выбора координат u, v на поверхности. Главные кривизны k_1, k_2 являются корнями квадратного уравнения $k^2 - 2Hk + K = 0$.

14.3.6. Классификация точек поверхности

Пусть $\overline{N}(P_0)$ — единичный вектор нормали к гладкой поверхности Σ в обыкновенной точке $P_0(u_0, v_0)$; $\Delta\bar{r} = \overline{P_0P} = \bar{r}(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v) - \bar{r}(u_0, v_0)$, где $P(u_0 + \Delta u, v_0 + \Delta v)$ — близкая к P_0 точка на Σ; $h = \overline{N}(P_0)\cdot\Delta\bar{r}$ — расстояние (взятое с определенным знаком) от точки P до касательной в точке P_0 плоскости. Тогда, используя формулу Тейлора, получим в окрестности точки P_0:

$$h(P_0, du, dv) = \overline{N}(P_0)\cdot\left[(d\bar{r})_{P_0} + \frac{1}{2}(d^2\bar{r})_{P_0} + \ldots\right] = \frac{1}{2}\overline{N}(P_0)\cdot(d^2\bar{r})_{P_0} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\left[L(P_0)\,du^2 + 2M(P_0)\,du\,dv + N(P_0)\,dv^2\right] + \ldots,$$

где $du \equiv \Delta u$, $dv \equiv \Delta v$; многоточием обозначено малое слагаемое, имеющее порядок $o(\rho^2)$, $\rho = \sqrt{du^2 + dv^2}$. Таким образом, пространственное строение любой гладкой поверхности Σ в окрестности каждой ее обыкновенной точки $P_0(u_0, v_0)$ определяется второй квадратичной формой поверхности в этой точке.

Точка $P_0(u_0, v_0)$ поверхности называется:

1) **Эллиптической точкой**, если в ней $K = k_1 k_2 > 0$ (вторая квадратичная форма знакоопределенна для всех du, dv и $LN - M^2 > 0$). В достаточно малой окрестности точки P_0 поверхность ведет себя как эллипсоид; ее нормальные сечения все выпуклы или все вогнуты; поверхность Σ располагается по одну сторону от своей касательной в точке P_0 плоскости. В частном случае, при $k_1 = k_2 \neq 0$, точка P_0 называется **сферической** (или **круговой**), а поверхность ведет себя как сфера. Все точки сферы, эллипсоида, эллиптического параболоида являются эллиптическими. Любое направление $dv : du$ в сферической точке является главным.

2) **Гиперболической точкой**, если в ней $K = k_1 k_2 < 0$ (вторая квадратичная форма знакопеременна и $LN - M^2 < 0$). В малой окрестности P_0 поверхность Σ ведет себя как однополостный гиперболоид и располагается по разные стороны от своей касательной плоскости. Имеются нормальные сечения с противоположными направлениями главной нормали. Все точки однополостного гиперболоида и гиперболического параболоида являются гиперболическими.

3) **Параболической точкой**, если в ней $K = k_1 k_2 = 0$, т.е. $LN - M^2 = 0$ (вторая квадратичная форма представляет собой полный квадрат и не меняет своего знака, но при одном направлении $dv : du$ нормального сечения выполняется $k_N \equiv k_1 = 0$ в некоторой точке). При этом в общем случае $k_2 \neq 0$. Если $k_1 = k_2 = 0$ ($L = M = N = 0$) в точке M_0, то M_0 называется **точкой уплощения**. Поверхность Σ в окрестности параболической точки может располагаться по разные стороны от касательной плоскости (с учетом слагаемых высших порядков малости).

Все точки цилиндрической поверхности параболические. Поверхность $z = x^4 + y^4$ имеет единственную точку уплощения $O(0; 0; 0)$.

14.3.7. Специальные кривые и направления на поверхности

Асимптотическим направлением на поверхности Σ называется такое направление $dv : du$, в котором нормальная кривизна k_N равна нулю. В этой точке

$$L\,du^2 + 2M\,du\,dv + N\,dv^2 = 0.$$

Вторая квадратичная форма обращается в нуль в гиперболических и параболических точках, а также точках уплощения. Поэтому только в таких точках имеются асимптотические направления: в гиперболической точке их два; в параболической точке одно; в точке уплощения — бесконечное множество. **Асимптотической линией** на поверхности называется кривая, касательное направление которой в каждой точке — асимптотическое. В частности, любая прямая на поверхности является асимптотической, например, прямолинейные образующие однополостного гиперболоида. Если на поверхности имеются два семейства асимптотических линий, то их можно принять за координатные линии u, v. Тогда вторая форма примет вид $2M\,du\,dv$ $(L = N = 0)$.

Линией кривизны на поверхности называется такая кривая, в каждой точке которой касательная направлена по главному направлению. Так как в каждой точке поверхности (не являющейся сферической или точкой уплощения) главных направлений два, то имеются два взаимно ортогональных семейства линий кривизны, дифференциальное уравнение которых имеет вид

$$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.$$

Если в качестве координатных линий u, v выбрать линии кривизны, то первая и вторая формы примут соответственно вид: $E\,du^2 + G\,dv^2$, $L\,du^2 + N\,dv^2$ (так как $F = 0$, $M = 0$).

Геодезической линией на поверхности называется такая кривая, главная нормаль которой к каждой точке колинеарна с нормалью к поверхности. Кривая на поверхности является геодезической линией тогда и только тогда, когда ее геодезическая кривизна в каждой точке равна нулю $k_G \equiv 0$. Если две точки на гладкой поверхности достаточно близки друг к другу, то соединяющая их дуга геодезической линии является кратчайшей из всех соединяющих эти точки линий на данной поверхности. На плоскости геодезическими линиями являются прямые, а на сфере — большие окружности. Геодезические линии на искривленной поверхности аналогичны прямым на плоскости.

14.3.8. Связь средней кривизны с вариацией площади поверхности

Пусть кусок поверхности Σ с площадью S и уравнением $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$ подвергается малому смещению $\delta h(u, v) \cdot \overline{N}(M)$ по нормали в каждой его точке $M(u, v)$. В результате смещения получается другая поверхность Σ_1, образованная точками $M_1(u, v)$, имеющими те же координаты, что и точка $M(u, v)$. Для точек поверхности Σ_1 имеем $\bar{r}_1(u, v) = \bar{r}(u, v) + \delta h(u, v) \cdot \overline{N}(u, v)$. Дифференцируя это равенство по u, получим

$$\frac{\partial \bar{r}_1}{\partial u} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} + \frac{\partial \delta h}{\partial u}\overline{N} + \delta h \frac{\partial \overline{N}}{\partial u},$$

аналогично записывается производная по v. Вычисляя коэффициенты E_1, F_1, G_1 для первой формы поверхности Σ_1 и отбрасывая малые второго порядка по δh и ее производным по u, v, получим для **вариации** площади

$$\delta S = S_1 - S = -\iint\limits_{\Sigma} 2\delta h \cdot H \cdot \sqrt{EG - F^2}\,du\,dv = -\iint\limits_{\Sigma} 2 \cdot \delta h \cdot H \cdot dS,$$

где S_1 — площадь куска поверхности Σ_1; H — средняя кривизна поверхности Σ.

14.3.9. Некоторые специальные поверхности

Минимальной называется поверхность, у которой в каждой ее точке средняя кривизна $H(u,v) \equiv 0$, т. е. $k_1(u,v) = -k_2(u,v)$. Для поверхности с минимальной площадью, натянутой на заданный контур, выполняется равенство $H \equiv 0$ вдоль всей этой поверхности.

Поверхностью постоянной кривизны называется такая поверхность, для всех точек которой гауссова кривизна $K \equiv \text{const}$; например, для сферы

$$K = \frac{1}{R^2} = \text{const}.$$

Линейчатой поверхностью называется поверхность, описываемая движением прямой (**образующей**) по некоторой линии, называемой **направляющей** (например, цилиндр, конус, однополостный гиперболоид, гиперболический параболоид). Линейчатые поверхности подразделяются на **развертывающиеся** и **косые**. Развертывающиеся поверхности путем изгибания можно наложить на плоскость (например, цилиндр, конус); в каждой точке такой поверхности $K = 0$, т. е. $LN - M^2 = 0$. Гиперболический параболоид и однополостный гиперболоид не являются развертывающимися поверхностями.

14.4. Формулы Гаусса, Вейнгартена и Гаусса—Бонне

1. Индексные обозначения. Введем следующие индексные обозначения: $u^1 \equiv u$, $u^2 \equiv v$; $\bar{r} = \bar{r}(u^1, u^2)$ — уравнение поверхности Σ;

$$\bar{r}_\alpha = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^\alpha} \quad (\alpha = 1, 2); \quad a_{\alpha\beta} = \bar{r}_\alpha \cdot \bar{r}_\beta, \quad a_{\alpha\beta} = a_{\beta\alpha} \quad (\alpha, \beta = 1, 2),$$

$$a_{11} \equiv E, \quad a_{12} = a_{21} \equiv F, \quad a_{22} \equiv G.$$

Если в некотором выражении какой-либо индекс повторяется дважды (один раз — внизу, один раз — вверху), то предполагается, что это выражение суммируется по повторяющемуся индексу (правило суммирования Эйнштейна). Например, первая квадратичная форма A поверхности запишется в виде

$$dl^2 = d\bar{r} \cdot d\bar{r} = a_{\alpha\beta}\, du^\alpha\, du^\beta \equiv a_{11}(du^1)^2 + a_{12}\, du^1\, du^2 + a_{21}\, du^2\, du^1 + a_{22}(du^2)^2 \equiv A,$$

так как

$$d\bar{r} = \frac{\partial \bar{r}}{\partial u^\alpha}\, du^\alpha = \bar{r}_\alpha\, du^\alpha \equiv \bar{r}_\beta\, du^\beta$$

(т. е. индекс суммирования можно обозначать различными символами).

Вторая квадратичная форма B запишется в виде

$$B \equiv -d\bar{r}\cdot d\overline{N} = -\frac{\partial\bar{r}}{\partial u^{\alpha}}\cdot\frac{\partial\overline{N}}{\partial u^{\beta}}\,du^{\alpha}du^{\beta} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\bar{r}}{\partial u^{\alpha}}\cdot\frac{\partial\overline{N}}{\partial u^{\beta}} + \frac{\partial\bar{r}}{\partial u^{\beta}}\cdot\frac{\partial\overline{N}}{\partial u^{\alpha}}\right) du^{\alpha}\,du^{\beta} \equiv b_{\alpha\beta}\,du^{\alpha}\,du^{\beta},$$

где $b_{11} \equiv L$, $b_{12} = b_{21} \equiv M$, $b_{22} \equiv N$ $(b_{\alpha\beta} = b_{\beta\alpha})$.

Вводя обозначения $a = \det a_{\alpha\beta} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 \equiv EG - F^2$; $a^{11} = a_{22}/a$, $a^{12} = a^{21} = -a_{12}/a = -a_{21}/a$, $a^{22} = a_{11}/a$ (при этом $a_{\alpha\beta}a^{\beta\gamma} = \delta_{\alpha}^{\gamma}$ — символ Кронекера), кривизны поверхности можно записать в виде:

$$H = \frac{1}{2}a^{\alpha\beta}b_{\alpha\beta};\quad K = \frac{b}{a}\quad (b = \det b_{\alpha\beta} = b_{11}b_{22} - b_{12}^2).$$

Гауссова кривизна K поверхности может быть выражена только через коэффициенты $a_{\alpha\beta}$ первой квадратичной формы поверхности и первые и вторые производные по u^1, u^2 от них (**теорема Гаусса**).

2. Справедливы следующие формулы для производных (**деривационные формулы**):

а) **формула Гаусса** $\dfrac{\partial^2\bar{r}}{\partial u^{\alpha}\partial u^{\beta}} \equiv \dfrac{\partial\bar{r}_{\alpha}}{\partial u_{\beta}} = \Gamma_{\alpha\beta}^{\gamma}\bar{r}_{\gamma} + b_{\alpha\beta}\overline{N}$,

б) **формула Вейнгартена** $\dfrac{\partial\overline{N}}{\partial u^{\alpha}} = -a^{\beta\gamma}b_{\gamma\alpha}\bar{r}_{\beta}$.

Здесь $\alpha, \beta, \gamma = 1, 2$; по повторяющимся индексам производится суммирование; выражения

$$\Gamma_{\alpha,\beta}^{\gamma} = \frac{1}{2}a^{\gamma\delta}\left(\frac{\partial a_{\alpha\delta}}{\partial u^{\beta}} + \frac{\partial a_{\beta\delta}}{\partial u^{\alpha}} - \frac{\partial a_{\alpha\beta}}{\partial u^{\delta}}\right)$$

называются **символами Кристоффеля**.

3. **Формула Гаусса—Бонне.** Пусть D — односвязная область на гладкой поверхности Σ, ограниченная кусочно гладкой замкнутой кривой (контуром) L (рис. 14.19), имеющей геодезическую кривизну $k_G(l)$, где l — дуговая координата (длина дуги) этой кривой (если L состоит из отрезков геодезических линий, то $k_G \equiv 0$), тогда справедлива следующая **формула Гаусса—Бонне**:

$$\iint\limits_{D} K\,dS + \oint\limits_{L} k_G\,dl = 2\pi - \sum_i(\pi - \alpha_i), \tag{14.17}$$

где $K(u, v)$ — гауссова кривизна поверхности; α_i — внутренние углы контура L в угловых точках A_i (α_i — это углы между касательными в точках A_i);

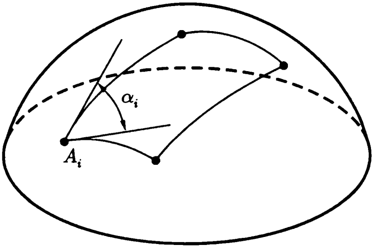


Рис. 14.19

$(\pi - \alpha_i)$ — внешние углы в точках A_i; суммирование ведется по всем угловым точкам. Если кривая L гладкая (т. е. отсутствуют угловые точки), то $\sum\limits_i (\pi - \alpha_i) = 0$. Первое слагаемое в левой части (14.17) называется **интегральной кривизной** области D. Две поверхности называются **топологически эквивалентными**, если они допускают взаимно однозначное и непрерывное в обоих направлениях отображение. Интегральная кривизна является топологическим инвариантом, т. е. одинакова для топологически эквивалентных поверхностей. Используя (14.17), можно показать, что для всех гладких поверхностей, топологически эквивалентных поверхности сферы, интегральная кривизна равна 4π; и равна нулю для всех гладких поверхностей, топологически эквивалентных поверхности тора (см. 14.3.2). Для всякого геодезического треугольника с внутренними углами A, B, C на поверхности с постоянной гауссовой кривизной K выполняется равенство $A+B+C-\pi = K\cdot S$, где S — площадь треугольника. В частности, если $K \equiv 0$, то геометрия на поверхности евклидова и $A + B + C = \pi$.

Глава 15

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

15.1. Теория вероятностей

15.1.1. Испытания и события

Испытанием называют наблюдение (опыт, измерение, эксперимент), осуществленное при определенной совокупности некоторых условий S. Предполагается, что испытание можно повторить любое число раз (с сохранением условий S). Результатом, исходом испытания, является **событие**. События обычно обозначают большими латинскими буквами $A, B, C \ldots$.

Достоверным называют событие, которое обязательно происходит при каждом повторении некоторого испытания. Обозначение: U.

Невозможным называют событие, которое заведомо не может произойти ни при каком повторении испытания. Обозначение: V.

Случайным называют событие, которое в данном испытании может либо произойти, либо не произойти по объективным, не зависящим от наблюдателя причинам. Разные случайные события имеют различную возможность появления. Мерой такой возможности является некоторое число, называемое вероятностью случайного события.

Теория вероятностей — раздел математики, занимающийся изучением свойств вероятностей появления случайных событий и устанавливающий соотношения между вероятностями событий, связанных друг с другом каким-либо образом.

Пример 1. Испытание: извлечение шара из урны, содержащей только белые шары. Событие A — извлечен белый шар — достоверное. Событие B — извлечен черный шар — невозможное.

Пример 2. Испытание: однократное бросание игральной кости (изготовленного из однородного материала кубика, на гранях которого отмечены числа очков от 1 до 6). Событие A — выпадение, например, одного очка — случайное, так как может либо произойти, либо нет.

Два события называют **несовместными**, если появление одного из них в данном испытании исключает появление другого события в этом же испытании. Если появление одного события не исключает появления другого в одном и том же испытании, то эти события называются **совместными**. Более чем два события называются несовместными, если они **попарно несовместны**. Если в одном испытании обязательно происходит только одно из двух несовместных событий, то эти события называются **противоположными**. Если A — одно из двух противоположных событий, то другое обозначают $\overline{A}$. Очевидно, $\overline{\overline{A}} = A$. Если событие A происходит, то $\overline{A}$ не происходит, и наоборот.

Пример 3.

1) Испытание: однократное бросание игральной кости. Событие A — появление двух очков, B — трех очков, C — четного числа очков. События A и B несовместные, A и C — совместные.
2) События выпадения любого числа очков от 1 до 6 при однократном бросании игральной кости несовместны.

Пример 4. Испытание: однократное бросание монеты. События A — выпадение герба и $B = \overline{A}$ — выпадение цифры являются противоположными.

15.1.2. Классическое определение вероятности

1. Определение и свойства вероятности. Совокупность событий образует **полную группу событий** в некотором испытании, если его исходом непременно должно быть хотя бы одно из них. В частности, в **полной группе попарно несовместных событий** при испытании реализуется одно и только одно из этих событий. Попарно несовместные равновозможные (т. е. имеющие одинаковые возможности появления) результаты испытания называются его **элементарными исходами (элементарными событиями)**. В полной группе E элементарных исходов $E_1, E_2, \ldots, E_n$ в результате испытания появляется один и только один элементарный исход

Пример 5. Испытание: однократное бросание игральной кости. Элементарные исходы (равновозможные попарно несовместные события), образующие полную группу: $E_1, E_2, E_3, E_4, E_5, E_6$, где E_i — означает событие выпадения i очков. Здесь выпадение любого числа очков от 1 до 6 исключает появление какого-либо другого числа очков (несовместность). Предположение равновозможности отдельных исходов может быть оправдано лишь в случае однородной правильной по форме игральной кости.

Появление какого-либо одного, любого из элементарных событий E_i, образующих полную группу, при каждом однократном испытании является достоверным событием U.

Те элементарные исходы, при наступлении которых достоверно происходит интересующее нас событие A, называются **благоприятными** для A, т. е. событие A подразделяется на эти благоприятные исходы и представляет собой реализацию одного из благопр ных для него событий.

Пример 6. Испытание: игральная кость брошена один раз. Событие A: выпадение четного числа очков. Благоприятными для A являются элементарные события E_2, E_4, E_6 (см. пример 5).

Вероятностью $P(A)$ события A называется отношение числа m благоприятных для него элементарных исходов к общему числу n всех элементарных исходов:

$$P(A) = \frac{m}{n} \quad (m \leqslant n).$$

Для отдельных элементарных исходов получаем

$$P(E_1) = \ldots = P(E_n) = \frac{1}{n},$$

т. е. равновозможность означает одинаковую вероятность.

Пример 7.

1) В урне имеется 4 белых и 3 черных шара одинакового размера. Испытание: извлечение наугад одного шара. Событие A — извлечен белый шар, B — извлечен черный шар. Полная группа исходов состоит из $n = 7$ равновозможных событий, следовательно, $P(A) = 4/7$, $P(B) = 3/7$.
2) Найдем вероятность выпадения четного числа очков в условиях примера 6. Число благоприятных для A элементарных исходов $m = 3$, число всех исходов $n = 6$, следовательно, $P(A) = m/n = 1/2$.
3) Найдем вероятность выпадения цифры (событие A) при одном бросании монеты. Здесь $n = 2$, $m = 1$ и $P(A) = 1/2$.
4) Испытание: однократное совместное бросание двух игральных костей. Событие A: выпадение в сумме 7 очков. Полная группа состоит из $n = 6^2 = 36$ равновозможных событий. Выпадение в сумме 7 очков возможно $m = 6$ способами: $7=1+6=6+1=2+5=5+2=3+4=4+3$. Следовательно, $P(A) = m/n = 6/36$.

Свойства вероятности:

1) Вероятность достоверного события равна единице (наибольшее значение вероятности): $P(U) = 1$.
2) Вероятность невозможного события равна нулю (наименьшее значение вероятности): $P(V) = 0$.
3) Вероятность случайного события A удовлетворяет неравенствам $0<P(A)<1$.

Следовательно, вероятность любого события A удовлетворяет неравенствам $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

Вероятность какого-либо события характеризует лишь возможность его появления. Практическое значение имеют те результаты теории вероятностей, которые позволяют установить, что вероятность события A близка к единице, или, что равносильно, вероятность противоположного события $\bar{A}$ близка к нулю. При этом используется основанный на результатах многочисленных опытов «принцип практической невозможности маловероятных событий», согласно которому практически можно полагать, что в единичном испытании событие A наступит, а $\bar{A}$ — нет. Вопрос о том, насколько близкой к единице (или к нулю) должна быть вероятность, чтобы можно было считать появление события достоверным (или невозможным) в одном испытании, решается в каждой конкретной задаче отдельно.

2. Основные сведения из комбинаторики. Комбинаторика — раздел математики, изучающий задачи выбора и расположения элементов некоторого конечного множества в виде определенных комбинаций, составленных согласно заданным правилам.

Перестановками из n различных элементов называются комбинации, состоящие из одних и тех же n элементов, но различающиеся порядком их расположения. Число всех перестановок из n элементов равно $P_n = n!$, где $n! \equiv 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n$. По определению, $0! = 1$.

Пример 8. Три разные книги, стоящие на полке, можно переставить $P_3 = 3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ способами.

Размещениями из n различных элементов по m $(m \leqslant n)$ элементов называются комбинации, состоящие из m элементов и отличающиеся друг от друга либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений

$$A_n^m = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1).$$

Здесь число сомножителей в правой части равно m. Если $m = n$, то $A_n^n = P_n = n!$.

Пример 9. Абонент, набиравший номер телефона, забыл две последние цифры и набрал их наугад, помня лишь, что они разные. Найдем вероятность правильного набора номера. Число всех равновозможных исходов равно числу размещений из 10 цифр по две, т. е. $A_{10}^2 = 10 \cdot 9 = 90$. Число благоприятных исходов $m = 1$. Искомая вероятность $P = 1 : A_{10}^2 = 1/90$.

Сочетаниями из n различных элементов по m элементов называются комбинации, составленные из m элементов и отличающиеся хотя бы одним элементом (порядок расположения элементов при этом не учитывается). Число всех возможных сочетаний

$$C_n^m = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}.$$

Для числа перестановок, размещений и сочетаний справедлива формула

$$A_n^m = P_m \cdot C_n^m.$$

Пример 10. В ящике находятся 10 одинаковых деталей, отмеченных номерами от 1 до 10. Найти вероятность того, что среди наугад извлеченных четырех деталей окажется деталь № 2 (событие A).

Решение. Общее число всех равновозможных исходов равно $n = C_{10}^4$. Благоприятными для события A являются такие события, в которых среди 4 извлеченных деталей имеется деталь № 2, а остальные 3 имеют другие номера. Число этих событий равно числу способов извлечения трех деталей из оставшихся девяти, т. е. $m = C_9^3$. Искомая вероятность

$$P(A) = C_9^3 : C_{10}^4 = \frac{9!}{3!\,6!} : \frac{10!}{4!\,6!} = \frac{(1\cdot 2\ldots 9)(1\cdot 2\cdot 3\cdot 4)}{(1\cdot 2\cdot 3)(1\cdot 2\ldots 9\cdot 10)} = \frac{4}{10}. \qquad \triangleright$$

Число перестановок из n элементов, среди которых некоторые *повторяются* $m_1, m_2, \ldots, m_k$ раз $(m_1 + \ldots + m_k = n)$, равно

$$P_n(m_1, \ldots, m_k) = \frac{n!}{m_1!m_2!\ldots m_k!}.$$

Например, буквы в слове «математика» можно переставить $\dfrac{10!}{2!\,3!\,2!\,1!\,1!\,1!} = 151\,200$ способами.

15.1.3. Статистическое определение вероятности

Недостатки классического определения вероятности, ограничивающие его практическое использование, обусловлены следующими предположениями:

1) число всех элементарных исходов испытания конечно,
2) элементарные события равновозможны,
3) интересующее нас событие представляется состоящим из некоторого числа элементарных исходов (благоприятных событий).

Вместе с тем, например, в случае неоднородной и неправильной по форме игральной кости предположение о равновозможности элементарных исходов неприменимо.

Пусть некоторое испытание производится n раз (с точным повторением каждый раз совокупности условий S) и при этом подсчитывается количество появлений интересующего нас случайного события A. Пусть событие A появилось m раз $(m \leqslant n)$. Отношение $w_n(A) = m/n$ называется **относительной частотой** случайного события A в n испытаниях. При многократном повторении серий испытаний относительная частота изменяется мало, и причем тем меньше, чем больше число испытаний в очередной серии, т. е. относительная частота в этом смысле **устойчива**. **Вероятностью** события A в данном испытании называется число $P(A)$, около которого группируются относительные частоты этого события при увеличении числа n испытаний. По значениям относительных частот можно найти лишь приближенное значение вероятности $P(A) \approx w_n(A)$, но при очень большом числе испытаний опыт может дать значение вероятности с достаточно высокой точностью. Например, многочисленные опыты с бросанием монеты показали, что относительные частоты появления герба мало отличаются от числа 0,5 и это отличие тем меньше, чем больше число бросаний. При достаточно широких предположениях классическая и статистическая вероятность события равны между собой.

15.1.4. Геометрическое определение вероятности

Геометрическое определение вероятности дает возможность найти вероятность попадания точки в некоторую область (отрезок прямой, область на плоскости или в пространстве), т. е. оно применимо к испытаниям с бесконечным множеством возможных исходов.

1. Пусть отрезок прямой (L_1) с длиной L_1 является частью отрезка (L), имеющего длину L. На отрезок (L) наугад ставят точку, вероятность ее попадания на (L_1) пропорциональна длине L_1 и не зависит от расположения (L_1) на отрезке (L). Тогда вероятность попадания точки на отрезок (L_1) равна

$$P = \frac{L_1}{L}.$$

2. Пусть область (S_1) на некоторой плоскости является частью области (S) на этой же плоскости. На область (S) наугад ставят точку, вероятность ее попадания в область (S_1) пропорциональна площади S_1 области (S_1) и не зависит ни от формы (S_1), ни от расположения (S_1) в области (S). Тогда вероятность попадания точки в область (S_1) равна

$$P = \frac{S_1}{S}.$$

Пример 11. Внутрь круга наугад ставят точку. Найдем вероятность ее попадания внутрь вписанного в окружность квадрата. Площади круга и квадрата равны соответственно

$$S = \pi R^2 \quad (R \text{ — радиус круга}), \qquad S_1 = \frac{1}{2}(2R)\cdot(2R) = 2R^2.$$

Искомая вероятность

$$P = \frac{S_1}{S} = \frac{2}{\pi}.$$

3. Пусть область (V_1) с объемом V_1 в пространстве является частью области (V) с объемом V. В области (V) наугад ставят точку. Тогда вероятность ее попадания в область (V_1) равна

$$P = \frac{V_1}{V}.$$

15.1.5. Алгебра событий

Если появление события A делает достоверным событие B, то говорят, что **событие B содержит в себе A** или **A влечет за собой B**. Обозначение: $A \subset B$. В общем случае из $A \subset B$ не следует $B \subset A$. Если $A \subset B$, то $P(A) \leqslant P(B)$.

Пример 12. Если при бросании игральной кости событие A — выпадение 3 очков, а B — нечетного числа очков, то $A \subset B$. Обратное утверждение здесь не справедливо, так как появление нечетного числа не делает достоверным появление 3 очков.

Если, в частном случае, справедливы оба соотношения $A \subset B$ и $B \subset A$, то события A и B называют **равносильными** и пишут: $A = B$.

Объединением (или **суммой**) двух событий A и B называют событие C, состоящее в появлении хотя бы одного из событий A или B (т. е. или A, или B, или обоих этих событий совместно). Обозначения: $C = A + B$ или $C = A \cup B$. Если события A и B несовместны, то событие $C = A + B$ будет состоять в появлении либо A, либо B (безразлично какого).

Объединением (или суммой) нескольких событий $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называют событие A, состоящее в появлении хотя бы одного из них. Обозначения: $A = A_1 + \ldots + A_n$ или $A = A_1 \cup \ldots \cup A_n$.

Пример 13.

1) Каждый из двух стрелков делает по одному выстрелу в одну мишень. События A и B — попадание в мишень первым и вторым стрелком, тогда событие $C = A + B$ состоит в попадании или только первым стрелком, или вторым, или обоими вместе.
2) Испытание: однократное бросание игральной кости. События A_2, A_4, A_6 — появление 2-х, 4-х, 6-ти очков. Тогда событие $A = A_2 + A_4 + A_6$ состоит в появлении четного числа.

Пересечением (или **произведением**, или **совмещением**) нескольких событий $A_1, \ldots, A_n$ называется событие A, состоящее в совместном появлении всех этих событий. Обозначения: $A = A_1 \cdots A_n$ или $A = A_1 \cap \ldots \cap A_n$.

Пример 14.

1) В условиях примера 13, 1 событие $C = AB$ означает совместное попадание в мишень обоими стрелками.
2) В условиях примера 13, 2 событие $C = A_2A_4A_6 = V$, т. е. является невозможным, так как A_2, A_4, A_6 — несовместные в одном испытании события.

Для любых случайных событий A, B, C справедливы соотношения:

$$A + B = B + A, \quad AB = BA, \quad A + B = A\overline{B} + B, \quad A + A = A, \quad AA = A,$$
$$(A + B) + C = A + (B + C), \quad (AB)C = A(BC), \quad (A + B)C = AC + BC,$$
$$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}, \quad \overline{A} + \overline{B} = \overline{A \cdot B},$$
$$A \cdot \overline{A} = V \text{ (невозможное событие)}, \quad A + \overline{A} = U \text{ (достоверное событие)}.$$

События A и $\overline{A}$ называются **противоположными** или **дополнительными** друг к другу. Запись: $A = U - \overline{A}$ или $A = U \backslash \overline{A}$ ($\overline{A} = U - A$ или $\overline{A} = U \backslash A$). Говорят при этом, что событие A является **разностью** событий U и $\overline{A}$.

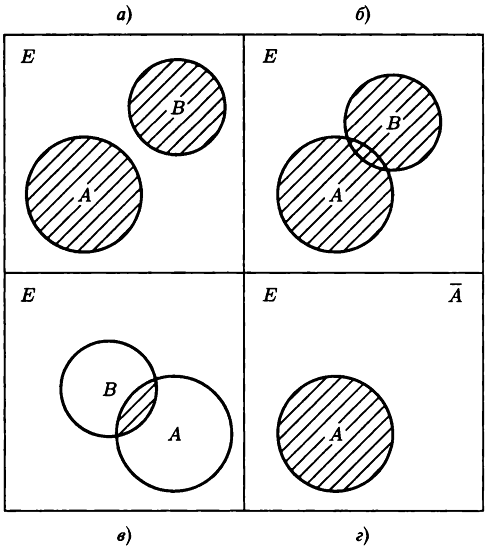


Рис. 15.1

Разностью любых двух событий A и B обозначение: $A - B$ или $A \backslash B$) называется событие C, означающее, что событие A происходит, а B не происходит.

Если случайное событие понимать геометрически как попадание точки в некоторую область на плоскости, то соотношения алгебры событий допускают наглядное толкование. На рис. 15.1 каждый из четырех прямоугольников означает полную группу E элементарных исходов испытания так, что попадание точки в прямоугольник является достоверным событием U, поскольку в результате испытания один из элементарных исходов обязательно произойдет. На рис. 15.1 *а* изображены два несовместных (непересекающихся) события A и B; на рис. 15.1 *б* объединение (сумма) событий A и B заштриховано; пересечение событий A и B изображено на рис. 15.1 *в* заштрихованной общей частью областей A и B; на рис. 15.1 *г* событие A изображено заштрихованной областью, а событие $\bar{A}$ внешней к области A частью прямоугольника (см. также рис. 17.1). Площадь прямоугольника принимается равной единице, а площади областей равны вероятностям соответствующих событий.

15.1.6. Правила сложения и умножения вероятностей

1. Вероятность объединения (суммы) двух несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Для нескольких попарно несовместных (когда несовместны любые два из них) событий $A_1, \ldots, A_n$ справедливо равенство

$$P(A_1 + \ldots + A_n) = P(A_1) + \ldots + P(A_n).$$

Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:

$$P(A) + P(\overline{A}) = 1.$$

Пример 15.

1) В урне 30 шаров одинакового размера: 5 красных, 10 синих, 15 белых. Найти вероятность появления цветного (синего или красного) шара при однократном извлечении.

Решение. Вероятность появления красного шара $P(A) = 5/30$, синего $P(B) = 10/30$. События A и B несовместные, следовательно $P(A+B) = P(A) + P(B) = 1/2$. ▷

2) Вероятность выпадения 3-х очков (событие A) при одном бросании игральной кости $P(A) = 1/6$. Вероятность невыпадения 3-х очков (событие $\overline{A}$) $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 5/6$.
3) В урне находятся n белых и черных шаров одинакового размера, из них m белых. Найти вероятность того, что из k наугад извлеченных шаров есть хотя бы один белый.

Решение. Обозначим соответственно A и $\overline{A}$ противоположные события: «среди извлеченных шаров есть хотя бы один белый» и «все извлеченные шары черные». Тогда $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. При этом $P(\overline{A}) = \dfrac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$, так как число всех исходов испытания равно C_n^k, а число способов извлечения k черных шаров из $(n-m)$ черных шаров равно C_{n-m}^k $(k \leqslant n-m)$. Следовательно, $P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \dfrac{C_{n-m}^k}{C_n^k}$. ▷

Если попарно несовместные события $A_1, \ldots, A_n$ образуют полную группу (т. е. в результате испытания только одно из них обязательно происходит), то

$$P(A_1) + \ldots + P(A_n) = 1.$$

2. Условная вероятность. Два события A и B называются **независимыми** (друг от друга), если появление одного из них не изменяет вероятность появления другого (т. е. не влияет на нее). В противном случае события называются **зависимыми**. Независимость (зависимость) событий является взаимным свойством.

Вероятность события B, вычисленная при условии, что событие A уже наступило, называется его **условной вероятностью** и обозначается $P(B|A)$ или $P_A(B)$. Если события A и B независимые, то $P(B|A)=P(B)$, $P(A|B)=P(A)$, т. е. условная вероятность равна обычной, безусловной вероятности, при вычислении которой никаких других условий, кроме условий S (см. 15.1.1) не налагается; тогда как $P(B|A)$ вычисляется при дополнительном условии, что произошло событие A.

Пример 16. Из урны, содержащей 4 белых и 4 черных шара, дважды извлекают по одному шару. Пусть событие A — при первом извлечении вынут белый шар, B — при втором извлечении вынут черный шар. Тогда $P(A) = 1/2$. Если после первого извлечения шара его возвращают обратно, то независимо от исхода первого извлечения вероятность события B равна $P(B) = 1/2$. Здесь A и B — независимые события.

Пусть теперь извлеченные шары не возвращаются обратно. Если первым извлечен белый шар (произошло событие A), то $P(B|A) = 4/7$, так как после первого извлечения осталось 7 шаров, из которых 4 черных. Если бы в первом извлечении был вынут черный шар (т. е. событие A не произошло бы), то вероятность события B была бы равна $3/7$. Вероятность события B зависит от появления или не появления A. Здесь A и B — зависимые события.

3. Вероятность пересечения (совместного появления) двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое событие уже произошло

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B|A) = P(B)\cdot P(A|B) = P(BA).$$

Если события A и B независимы, то

$$P(AB) = P(A)\cdot P(B).$$

Правило умножения вероятностей обобщается на случай произвольного числа событий. Например, для трех событий A, B, C:

$$P(ABC) = P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|AB).$$

Здесь $P(C|AB)$ — вероятность события C, вычисленная при условии, что события A и B уже произошли. Порядок расположения A, B, C может быть любым.

Пример 17. В условиях примера 16 найти вероятность $P(AB)$ того, что первым и вторым будут извлечены (без возвращения обратно) белый и черный шар соответственно.

Решение. $P(A) = 4/8$, $P(B|A) = 4/7$, следовательно,

$$P(AB) = \frac{4}{8}\cdot\frac{4}{7} = \frac{2}{7}.$$

Задача может быть решена также непосредственно по определению вероятности $P(C) = P(AB) = m/n = 2/7$, где общее число исходов $n = A_8^2 = 8\cdot 7 = 56$, а число благоприятных исходов $m = 4\cdot 4 = 16$. ▷

Пример 18. Найти вероятность совместного попадания в цель двух орудий, сделавших по одному выстрелу. Вероятность попадания первого орудия (событие A) равна 0,9, а второго (событие B) — 0,8.

Решение. События A и B независимые, следовательно

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B) = 0{,}9 \cdot 0{,}8 = 0{,}72. \qquad \triangleright$$

Случайные события $A_1, \ldots, A_n$ называются **независимыми в совокупности**, если независимы любые два из них, а также независимы каждое событие и все возможные пересечения остальных.

Из независимости в совокупности следует **попарная независимость** (когда независимы каждые два события из нескольких событий), но не наоборот. Для независимых в совокупности событий справедливо

$$P(A_1 \cdots A_n) = P(A_1) \cdots P(A_n).$$

Если события $A_1, \ldots, A_n$ — независимы в совокупности, то противоположные события $\overline{A}_1, \ldots \overline{A}_n$ также независимы в совокупности.

4. Вероятность появления хотя бы одного из событий. Пусть в результате испытания могут произойти все n независимых в совокупности событий $A_1, \ldots, A_n$, имеющих вероятности появления $p_1 = P(A_1)$, $p_2 = P(A_2)$, $\ldots$, $p_n = P(A_n)$, либо только некоторые из них (в частности, ни одного, либо только одно). Тогда событие A, состоящее в появлении хотя бы одного из $A_1, \ldots, A_n$, и событие $\overline{A} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \ldots \overline{A}_n$ (т. е. непоявление ни одного события) противоположны и $P(A) + P(\overline{A}) = 1$. Отсюда следует:

$$P(A) = 1 - q_1 q_2 \ldots q_n.$$

Здесь $q_1 = 1 - p_1$, $q_2 = 1 - p_2$, $\ldots$, $q_n = 1 - p_n$.

Если $p_1 = p_2 = \ldots = p_n = p$, то

$$P(A) = 1 - q^n \quad (q = 1 - p).$$

Пример 19. Каждая из трех игральных костей брошена по одному разу. Найти вероятность выпадения одного очка хотя бы на одной кости (событие A).

Решение. Событие A означает выпадение одного очка только на одной кости, либо на двух, либо на трех. События выпадения 1 очка на каждой из костей независимы в совокупности. Вероятность каждого из них $p = 1/6$. Вероятности противоположных событий $q = 1 - p = 5/6$. Отсюда $P(A) = 1 - q^3 = 91/216$. $\triangleright$

5. Правило сложения вероятностей совместных событий. Вероятность объединения (суммы) двух совместных событий A и B равна

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB). \qquad (15.1)$$

При этом события A и B могут быть либо независимыми, либо зависимыми. Для независимых событий

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B),$$

а для зависимых
$$P(AB) = P(A)P(B|A).$$
Если A и B несовместные, то
$$P(AB) = 0 \quad \text{и} \quad P(A + B) = P(A) + P(B).$$
Формуле (15.1) соответствует рис. 15.1 *б*.

Для трех совместных событий справедливо
$$P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(AC) - P(BC) + P(ABC).$$

Пример 20. Брошена игральная кость. Найти вероятность выпадения четного либо кратного трем числа очков.

Решение. Пусть событие A — выпадение четного числа очков, B — кратного трем. События A и B совместны (выпадение 6 очков). Находим $P(A) = m/n = 3/6$, $P(B) = 2/6$, $P(AB) = 1/6$ (вероятность выпадения 6 очков). Следовательно, согласно формуле (15.1) получим
$$P(A + B) = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{2}{3}.$$
Задача может быть решена также непосредственно с использованием определения вероятности. Благоприятным для A являются исходы E_2, E_4, E_6, для B — исходы E_3, E_6, для $A + B$ — исходы E_2, E_3, E_4, E_6, т. е. $m = 3 + 2 - 1 = 4$, $n = 6$ и
$$P(A + B) = \frac{m}{n} = \frac{2}{3}.$$ ▷

15.1.7. Формула полной вероятности. Формулы Байеса

1. Пусть случайное событие A может произойти при условии появления одного из попарно несовместных событий $B_1, B_2, \ldots, B_n$, образующих полную группу (т. е. одно из них обязательно происходит при испытании), тогда справедлива **формула полной вероятности**
$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A|B_1) + \ldots + P(B_n) \cdot P(A|B_n). \tag{15.2}$$

Здесь $P(B_k)$ — вероятности событий B_k $(k = 1, \ldots, n)$, называемых **гипотезами** для события A, при этом $P(B_1) + \ldots + P(B_n) = 1$; $P(A|B_k)$ — условные вероятности события A.

Пример 21. Имеются две урны. В первой 3 белых и 4 черных шара. Во второй 2 белых, 6 черных. Найти вероятность того, что наугад извлеченный шар из наугад выбранной урны окажется белым.

Решение. Пусть событие B_1 — выбрана первая урна, B_2 — вторая. Поскольку урн всего две, $P(B_1) = 1/2$, $P(B_2) = 1/2$. Условные вероятности $P(A|B_1) = 3/7$, $P(A|B_2) = 2/8$, где событие A — вынут белый шар. По формуле (15.2) находим
$$P(A) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{8} = \frac{19}{56}.$$ ▷

2. Вероятности гипотез, принятые до проведения испытания, равны $P(B_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Имеем

$$P(AB_k) = P(A) \cdot P(B_k|A) = P(B_k) \cdot P(A|B_k).$$

Отсюда получаем

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k) \cdot P(A|B_k)}{P(A)}.$$

Подставляя сюда $P(A)$ из (15.2), находим **формулы Байеса**:

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k)P(A|B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)} \quad (k = 1, 2, \ldots, n), \tag{15.3}$$

позволяющие найти условные вероятности гипотез $P(B_k|A)$ после испытания, при котором произошло событие A (**переоценка вероятностей гипотез по результатам испытания**). В частности, если $P(B_1) = \ldots = P(B_n) = 1/n$, формулы (15.3) упрощаются:

$$P(B_k|A) = \frac{P(A|B_k)}{\sum\limits_{i=1}^{n} P(A|B_i)}.$$

Пример 22. Пусть в условиях примера 21 после испытания стало известно, что вынут белый шар (произошло событие A). Какова вероятность того, что шар вынут из первой урны? Из второй?

Решение. Вероятности гипотез B_1 и B_2 до испытания $P(B_1) = P(B_2) = 1/2$. Вероятности гипотез после испытания находим по формулам (15.3):

$$P(B_1|A) = \frac{(1/2)(3/7)}{19/56} = \frac{12}{19}; \quad P(B_2|A) = \frac{(1/2)(2/8)}{19/56} = \frac{7}{19}. \qquad \triangleright$$

15.1.8. Повторение испытаний

15.1.8.1. Формула Бернулли

Пусть некоторое испытание повторяется n раз. В каждом испытании может произойти или не произойти случайное событие A. Пусть вероятность p события A в каждом из этих испытаний одна и та же и не зависит от исходов других испытаний (**независимые относительно A испытания**). Вероятность появления события $\overline{A}$ (т. е. непоявления A) равна $q = 1-p$ в каждом испытании. Вероятность того, что в результате n испытаний событие A произойдет ровно m $(m \leqslant n)$ раз (и не произойдет $n - m$ раз), находится по **формуле Бернулли**

$$P_n(m) = C_n^m \cdot p^m \cdot q^{n-m}, \quad C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad 0! = 1.$$

Вероятности наступления события A в n испытаниях: 1) менее m раз, 2) более m раз, 3) не менее m раз, 4) не более m раз — находят по формулам:

1) $P_n(k < m) = P_n(0) + P_1(1) + \ldots + P_n(m-1)$,
2) $P_n(k > m) = P_n(m+1) + P_n(m+2) + \ldots + P_n(n)$,
3) $P_n(k \geqslant m) = P_n(m) + P_n(m+1) + \ldots + P_n(n)$,
4) $P_n(k \leqslant m) = P_n(0) + P_n(1) + \ldots + P_n(m)$.

Пример 23. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что герб выпадет: 1) менее двух раз, 2) не менее двух раз.

Решение.
1)

$$P_5(k < 2) = P_5(0) + P_5(1) = C_5^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 + C_5^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \\ = \frac{5!}{0!\,5!} \cdot 1 \cdot \frac{1}{32} + \frac{5!}{1!\,4!} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} = \frac{3}{16},$$

2) Вероятность можно найти либо по формуле $P_5(k \geqslant 2) = P_5(2) + P_5(3) + P_5(4) + P_5(5)$, либо с учетом того, что события в пунктах 1) и 2) противоположны:

$$P_5(k \geqslant 2) = 1 - P(k < 2) = 1 - \frac{3}{16} = \frac{13}{16}. \qquad \triangleright$$

15.1.8.2. Локальная теорема Лапласа

Вероятность того, что при n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность события A постоянна и равна p $(0 < p < 1)$, это событие произойдет ровно m раз, приближенно равна (тем точнее, чем больше n):

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \qquad \left[\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2},\ x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}\right].$$

Функция $\varphi(x)$ — четная, т. е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$; ее значения приведены в табл. 15.1 на с. 765.

Пример 24. Найдем вероятность того, что событие A наступит ровно 125 раз в 250 испытаниях; в каждом испытании $P(A) = 0{,}5$.

Решение. По условию $n = 250$, $m = 125$, $p = q = 0{,}5$. Величина $x = \dfrac{125 - 0{,}5 \cdot 250}{\sqrt{250 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = 0{,}00$. По табл. 15.1 находим $\varphi(0{,}00) = 0{,}3989$. Искомая вероятность

$$P_{250}(125) = \frac{1}{7{,}93} \cdot 0{,}3989 = 0{,}05. \qquad \triangleright$$

15.1.8.3. Интегральная теорема Лапласа

Вероятность того, что при n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность события A одна и та же и равна p $(0 < p < 1)$, это событие произойдет не менее m_1 раз и не более m_2 раз (т. е. $m_1 \leqslant m \leqslant m_2$), приближенно равна (при достаточно большом n):

$$P_n(m_1, m_2) = P_n(m_1 \leqslant m \leqslant m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1),$$

$$\left[\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^x e^{-z^2/2}\,dz, \quad x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}}, \quad x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}\right].$$

Значения **функции Лапласа** $\Phi(x)$ приведены в табл. 15.2 для $x \geqslant 0$. Функция $\Phi(x)$ нечетная, т. е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. При $x > 5$ приближенно $\Phi(x) \approx 0{,}5$.

Пример 25. В условиях примера 24 найдем вероятность того, что m примет какое-либо значение от $m_1 = 100$ до $m_2 = 125$.

<u>Решение</u>. Имеем

$$x_1 = \frac{100 - 250 \cdot 0{,}5}{\sqrt{250 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5}} = -3{,}15; \quad x_2 = 0{,}00.$$

По табл. 15.2 находим

$$\Phi(-3{,}15) = -\Phi(3{,}15) = -0{,}499; \quad \Phi(0{,}00) = 0{,}000.$$

Искомая вероятность

$$P_{250}(100;\,125) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1) = 0{,}000 + 0{,}499 = 0{,}499. \qquad \triangleright$$

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых случайное событие A происходит с постоянной вероятностью p $(0 < p < 1)$, тогда вероятность того, что абсолютная величина отклонения относительной частоты m/n от вероятности $p = P(A)$ не превышает заданного числа $\varepsilon > 0$, приближенно равна

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \leqslant \varepsilon\right) \approx 2\Phi\left(\varepsilon\sqrt{\frac{n}{pq}}\right).$$

15.1.9. Случайные величины. Дискретные случайные величины

Случайной величиной называется действительная переменная величина, которая в результате испытания случайно принимает одно и только одно значение из множества ее **возможных значений**. При повторении испытаний случайная величина может принимать различные значения. Например, число очков, выпавших при однократном бросании игральной кости, является случайной величиной, принимающей какое-либо одно значение от 1 до 6. Случайная величина называется **дискретной**, если ее возможные значения можно перенумеровать. Множество этих значений может быть либо конечным (как в случае игральной кости), либо бесконечным (счетным). Случайные величины обозначают обычно большими буквами $X, Y, Z, \ldots$, а их возможные значения — соответствующими малыми буквами $x, y, z, \ldots$, возможно, с индексами. Каждому элементарному исходу E_i испытания ставится в соответствие некоторое число x_i (возможное значение случайной величины X). Например, в случае правильной игральной кости величина X принимает значения $x_1 = 1, \ldots, x_6 = 6$, каждое с вероятностью $1/6$. Если игральная кость неправильная, то возможные значения X будут теми же, но их вероятности — другими. При этом сумма всех вероятностей также будет равна 1.

Непрерывная случайная величина может принимать любое значение из некоторого промежутка, конечного или бесконечного. Например, расстояние, пролетаемое снарядом при выстреле из орудия, является непрерывной случайной величиной.

Законом распределения дискретной случайной величины X называется соответствие между всеми ее возможными значениями x_i и вероятностями их появления $p_i = P(X = x_i)$.

Закон распределения дискретной случайной величины может быть задан в виде формулы, выражающей p_i как функцию от x_i, а также в виде таблицы, в которой перечислены возможные значения x_i и их вероятности p_i:

X	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

,

где $p_1+p_2+\ldots+p_n = 1$, так как события $X=x_1, \ldots, X=x_n$ образуют полную группу. Если множество значений величины X бесконечно (счетно), то ряд $p_1 + p_2 + \ldots$ должен быть сходящимся, а его сумма — равной 1.

Закон распределения можно изобразить также графически, если в прямоугольной системе координат построить точки (x_i, p_i) $(i = 1, 2, \ldots)$ (рис. 15.2 *а, б*).

С каждым случайным событием A можно связать специальную случайную величину I_A, называемую **индикатором** этого события и принимающую только два значения:

$$I_A = \begin{cases} 1, & \text{если } A \text{ произошло,} \\ 0, & \text{если } A \text{ не произошло.} \end{cases}$$

Индикатор события A, имеющего вероятность $p = P(A)$, является дискретной случайной величиной с законом распределения:

I_A	0	1
P	$q = 1 - p$	p

15.1.9.1. Биномиальное распределение

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых может произойти событие A с одной и той же вероятностью p, а вероятность его непоявления $q = 1 - p$. Обозначим X дискретную случайную величину, равную

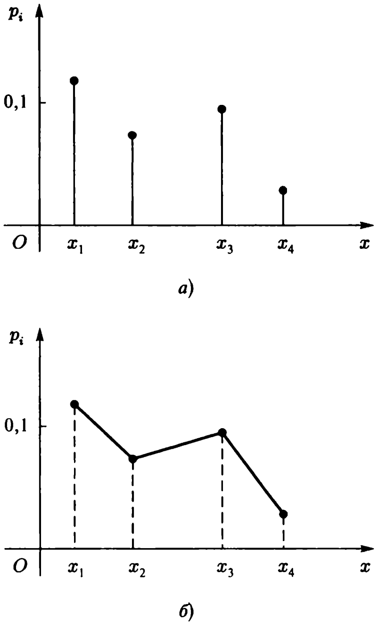


Рис. 15.2

числу появлений события A в n испытаниях. Возможными значениями X будут числа $0, 1, 2, \ldots, n-1, n$. Вероятности их появления находятся по формуле Бернулли $P(X = m) \equiv P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}$, где $m = 0, 1, 2, \ldots, n$. Закон распределения случайной величины X может быть записан в виде таблицы

X	0	1	$\ldots$	m	$\ldots$	n
P	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$\ldots$	$C_n^m p^m q^{n-m}$	$\ldots$	p^n

Случайная величина X называется распределенной по **биномиальному закону** с параметрами n и p.

При этом:

$$\sum_{m=0}^{n} P_n(m) = (p+q)^n = 1^n = 1.$$

15.1.9.2. Геометрическое распределение

Пусть вероятность появления события A в каждом из независимых испытаний постоянна и равна p $(0 < p < 1)$, а вероятность непоявления A равна $q = 1-p$. Испытания заканчивают при первом появлении события A. Обозначим X дискретную случайную величину, равную числу испытаний m, проведенных до первого появления A. Возможные значения X: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $\ldots$. Вероятность появления A в m-м испытании и непоявления его в предыдущих $m-1$ испытаниях равна по правилу умножения вероятностей независимых событий:

$$P(X = m) = q^{m-1}p \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Закон распределения случайной величины X:

X	1	2	3	...	m	...
P	p	qp	q^2p	...	$q^{m-1}p$	...

Значения вероятности P образуют геометрическую прогрессию, сумма которой равна единице.

Пример 26. Бросают игральную кость до первого появления 1 очка. Найти вероятность появления 1 очка при третьем бросании.

Решение. Вероятность появления 1 очка при одном бросании $p = 1/6$ $(q = 5/6)$. Искомая вероятность

$$P(X = 3) = \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{216}. \qquad \triangleright$$

15.1.9.3. Гипергеометрическое распределение

В урне находится N шаров одинакового размера, среди которых M белых $(M \leqslant N)$ и $N-M$ черных. Из урны наугад извлекают один за другим n шаров $(n \leqslant N)$ без возврата обратно (поэтому формула Бернулли неприменима). Обозначим X случайную величину, возможные значения которой равны числу m белых шаров среди n извлеченных. Множество возможных значений X: $0, 1, 2, \ldots, \min\{M, n\}$. Вероятность того, что величина X примет значение m, равна (согласно классическому определению вероятности):

$$P(X = m) = \frac{C_M^m \cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, \min\{M, n\}).$$

Распределение вероятностей, определяемое этой формулой, называется **гипергеометрическим** с параметрами N, M, n. Если числа N, M, $N - M$ значительно превышают n, то гипергеометрическое распределение может быть приближенно заменено биномиальным, в котором $p = M/N$.

Пример 27. Дано: $N = 40$, $M = 10$, $n = 4$, $m = 2$. Имеем $P(X = 2) = \dfrac{C_{10}^2 \cdot C_{30}^2}{C_{40}^4} = 0{,}214$.

15.1.9.4. Распределение Пуассона

1. Дискретная случайная величина X, принимающая бесконечное счетное множество возможных значений $0, 1, 2, \ldots$ с вероятностями

$$P(X = m) \equiv P_a(m) = \frac{a^m}{m!}e^{-a} \quad (m = 0, 1, \ldots),$$

где число $a > 0$ — параметр распределения, называется распределенной по **закону Пуассона**. Справедливо равенство $\sum\limits_{m=0}^{\infty} P_a(m) = 1$.

Распределение Пуассона, являющееся асимптотическим для биномиального распределения при малых значениях p и больших $n = a/p$, можно использовать для приближенного вычисления вероятностей в биномиальном распределении, если n очень велико, а p — мало, и при этом $np = a$ — постоянно: $P_n(m) \approx P_a(m)$. Имеются специальные таблицы для нахождения $P_a(m)$ для различных a и m.

Пример 28. Вероятность повреждения каждого изделия при перевозке $p = 0{,}001$. Отправлено в перевозку $n = 1000$ изделий. Найти вероятность того, что при перевозке будет повреждено изделий: 1) ровно два, 2) менее двух, 3) более двух, 4) хотя бы одно.

Решение. Параметр $a = np = 1000 \cdot 0{,}001 = 1$.

1) $m = 2$, $P(X = 2) = P_1(2) = \dfrac{1^2}{2!}e^{-1} = 0{,}184$.

2) $P(m < 2) = P_1(0) + P_1(1) = \dfrac{1^0}{0!}e^{-1} + \dfrac{1^1}{1!}e^{-1} = 2e^{-1} = 0{,}736$.

3) Событие «повреждено более двух изделий» противоположно событию «повреждено не более двух». Искомая вероятность равна

$$P(m > 2) = 1 - [P_1(0) + P_1(1) + P_1(2)] = 1 - (0{,}736 + 0{,}184) = 0{,}08.$$

4) События: «повреждено хотя бы одно изделие» и «не повреждено ни одного изделия, т. е. $m = 0$» противоположны. Искомая вероятность равна

$$1 - P_1(0) = 1 - \frac{1^0}{0!}e^{-1} = 1 - 0{,}368 = 0{,}632. \qquad \triangleright$$

2. Простейший поток событий.. Потоком событий называется последовательность событий, происходящих одно за другим в случайные моменты времени. Поток событий называется **простейшим (пуассоновским)**, если выполнены условия:

1) вероятность появления m событий $(m = 0, 1, 2, \ldots)$ за промежуток времени t зависит только от числа m и от длительности t и не зависит от выбора начала отсчета t;
2) вероятность появления m событий за промежуток t не зависит от появления или непоявления событий до начала этого промежутка;

3) вероятность появления более одного события за малый промежуток времени пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью появления только одного события;
4) вероятность появления одного события за бесконечно малый промежуток времени dt пропорциональна величине dt.

Вероятность появления m событий простейшего потока за промежуток времени t находится по **формуле Пуассона**

$$P_t(m) = \frac{(\lambda t)^m}{m!} e^{-\lambda t}.$$

Здесь λ — среднее число событий, появляющихся в единицу времени. Величина $a = \lambda t$ равна среднему числу событий за время t.

Пример 29. Среднее число вызовов, поступающих на АТС в одну минуту, равно трем. Найти вероятность того, что за 2 минуты поступит: а) четыре вызова, б) менее трех вызовов, в) не менее трех вызовов.

Решение. Здесь $\lambda = 3$, $t = 2$, $\lambda t = 6$.

а) $m = 4$, $P(m = 4) = P_2(4) = \dfrac{6^4 e^{-6}}{4!} = 0{,}135.$

б) Событие поступления менее трех вызовов означает наступление одного из следующих попарно несовместных событий: поступило 0, 1 или 2 вызова. По правилу сложения вероятностей искомая вероятность равна:

$$P(m < 3) = P_2(0) + P_2(1) + P_2(2) = \frac{6^0 e^{-6}}{0!} + \frac{6^1 e^{-6}}{1!} + \frac{6^2 e^{-6}}{2!} = 0{,}0625.$$

в) Событие поступления не менее трех вызовов противоположно событию поступления менее трех вызовов. Следовательно, искомая вероятность равна

$$P(m \geqslant 3) = 1 - [P_2(0) + P_2(1) + P_2(2)] = 1 - 0{,}0625 = 0{,}9375. \qquad \triangleright$$

15.1.10. Непрерывные случайные величины

15.1.10.1. Интегральная функция распределения

1. Интегральной функцией распределения непрерывной случайной величины X называется функция $F(x)$, равная вероятности того, что случайная величина примет какое-либо значение, строго меньшее чем x, т. е.

$$F(x) = P(X < x).$$

При этом функция $F(x)$ непрерывна и имеет кусочно-непрерывную производную.

2. Для дискретной случайной величины X функция распределения $F(x)$ равна сумме вероятностей всех ее значений, строго меньших чем x:

$$F(x) = \sum_{x_k < x} p_k.$$

В точках $x = x_k$ функция $F(x)$ имеет разрывы первого рода.

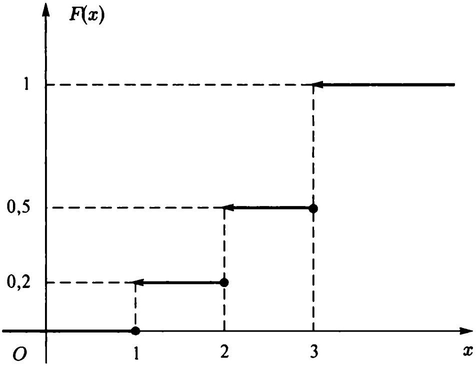


Рис. 15.3

Пример 30. Для дискретной случайной величины, заданной законом распределения

X	1	2	3
P	0,2	0,3	0,5

найти функцию распределения $F(x)$ и построить ее график.

Решение. Если $x \leqslant 1$, то $F(x) = P(X < x) = P(X < 1) = 0$, так как левее $x = 1$ нет возможных значений X. Если $1 < x \leqslant 2$, то $F(x) = P(X < 2) = P(X = 1) = 0{,}2$. Если $2 < x \leqslant 3$, то $F(x) = P(X < 3) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0{,}2 + 0{,}3 = 0{,}5$ (по правилу сложения вероятностей несовместных событий). Если $x > 3$, то $F(x) = P(X = 1) + P(X = 2) + P(x = 3) = 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}5 = 1$, так как левее точек $x > 3$ находятся все три возможные значения X: 1; 2; 3. Следовательно, $F(x)$ можно записать в виде

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \leqslant 1, \\ 0{,}2 & \text{при } 1 < x \leqslant 2, \\ 0{,}5 & \text{при } 2 < x \leqslant 3, \\ 1 & \text{при } x > 3. \end{cases}$$ ▷

График $y = F(x)$ приведен на рис. 15.3.

3. Свойства интегральной функции распределения:

1) Функция $F(x)$ — неубывающая, т. е. если $x_1 < x_2$, то $F(x_1) \leqslant F(x_2)$.
2) $0 \leqslant F(x) \leqslant 1$.
3) Вероятность того, что случайная величина X примет какое-либо значение в промежутке $[a; b)$, равна $P(a \leqslant X < b) = F(b) - F(a)$.

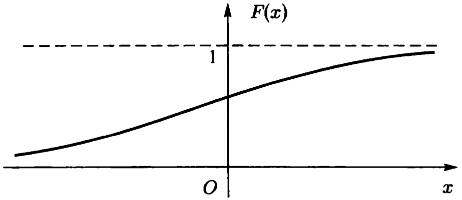


Рис. 15.4

4) Вероятность того, что непрерывная случайная величина X примет одно определенное значение x_1, равна нулю, т. е. $P(X = x_1) = 0$. Однако это не означает, что событие $X = x_1$ невозможно. Хотя вероятность невозможного события равна нулю, из равенства $P(A) = 0$ не следует невозможность появления события A. Из $P(A) = 1$ не следует достоверность A. Вместе с тем при классическом определении вероятности равенство нулю (единице) вероятности некоторого события равносильно его невозможности (достоверности).

5) Справедливы равенства:

$$P(a \leqslant X < b) = P(a < X < b) = P(a < X \leqslant b) = P(a \leqslant X \leqslant b).$$

6) Если возможные значения случайной величины X расположены только в интервале $(a; b)$, то $F(x) = 0$ при $x \leqslant a$ и $F(x) = 1$ при $x \geqslant b$. В частности, если возможные значения случайной величины расположены на всей числовой оси (рис.15.4), то

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$$

7) Функция $F(x)$ для дискретной случайной величины непрерывна слева в любой точке $x = x_0$:

$$\lim_{x\to x_0-0} F(x) = F(x_0).$$

15.1.10.2. Дифференциальная функция распределения

Дифференциальной функцией распределения (плотностью распределения, или плотностью вероятности) непрерывной случайной величины X называется функция $f(x)$, равная производной от $F(x)$:

$$f(x) = F'(x).$$

Плотность распределения неотрицательна: $f(x) \geqslant 0$. Вероятность попадания величины X в промежуток $(a; b)$ равна площади криволинейной

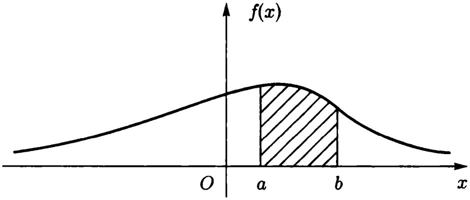


Рис. 15.5

трапеции под графиком $y = f(x)$ (рис.15.5):

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Отсюда, в частности, следует:

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \tag{15.4}$$

Для функции $f(x)$ выполняется **условие нормировки**

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Пример 31. Дана плотность распределения непрерывной случайной величины X

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{x}{18}, & 0 < x \leqslant 6, \\ 0, & x > 6. \end{cases}$$

Определить вероятность попадания X в интервал $(1; 5)$. Найти функцию $F(x)$.

Решение.

$$P(1 < X < 5) = \int\limits_1^5 \frac{x}{18}\,dx = \frac{x^2}{36}\Big|_1^5 = \frac{2}{3}.$$

Функцию $F(x)$ находим по формуле (15.4). Если $x \leqslant 0$, то $f(x) = 0$, следовательно $F(x) = 0$. Если $0 < x \leqslant 6$, то

$$F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)\,dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int\limits_0^x \frac{x}{18}\,dx = \frac{x^2}{36}.$$

Если $x > 6$, то

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,dx + \int_{0}^{6} \frac{x}{18}\,dx + \int_{6}^{x} 0\,dx = 1.$$

Таким образом,

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leqslant 0, \\ \dfrac{x^2}{36}, & 0 < x \leqslant 6, \\ 1, & x > 6. \end{cases}$$ ▷

15.1.10.3. Примеры непрерывных распределений

1. Равномерное распределение. Случайная величина X, принимающая все свои возможные значения только на отрезке $[a; b]$, называется **равномерно распределенной,** если ее плотность распределения равна:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ C = \dfrac{1}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 0, & x > b. \end{cases}$$

На $[a; b]$ функция $f(x)$ постоянна, а вне $[a; b]$ равна нулю. Постоянная C находится из **условия нормировки** $P(a \leqslant x \leqslant b) = C(b-a) = 1$. Равномерное распределение X на $[a; b]$ соответствует понятию о выборе точки на $[a; b]$ «*наугад*». Интегральная функция равна

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a \leqslant x \leqslant b, \\ 1, & x > b. \end{cases}$$

Графики $y = f(x)$ и $y = F(x)$ приведены на рис. 15.6 и 15.7 соответственно.

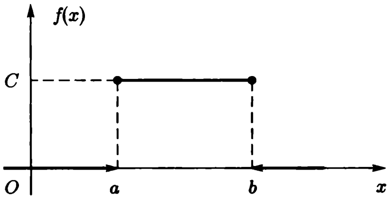


Рис. 15.6

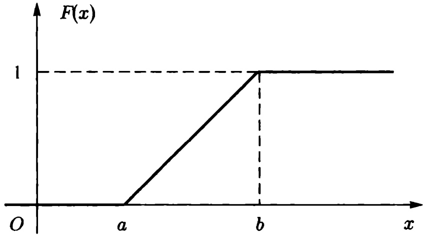


Рис. 15.7

2. Нормальное распределение (распределение Гаусса). Непрерывная случайная величина X, принимающая все свои возможные значения на промежутке $(-\infty; +\infty)$, называется **нормально распределенной**, если ее плотность распределения имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (\exp\{t\} \equiv e^t),$$

где a и $\sigma > 0$ — параметры распределения. График $y = f(x)$ приведен на рис. 15.8. Точка $x = a$ является точкой максимума $f(x)$ и $f(a) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$. График $f(x)$ симметричен относительно прямой $x = a$. Абсциссы двух точек перегиба равны $(a - \sigma)$ и $(a + \sigma)$. При $|x| \to +\infty$ функция $f(x) \to 0$. При $\sigma = 1$, $a = 0$ нормальное распределение называется **нормированным** и **центрированным (стандартизованным)**. Вероятность попадания нормально рас-

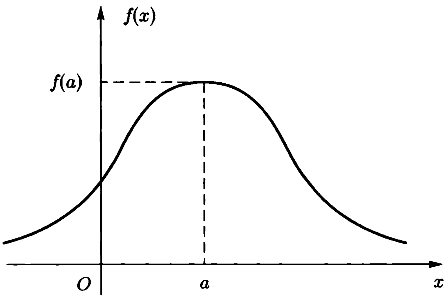


Рис. 15.8

пределенной случайной величины в интервал $(x_1; x_2)$ равна

$$P(x_1 < X < x_2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{x_1}^{x_2} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \Phi\left(\frac{x_2 - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{x_1 - a}{\sigma}\right),$$

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-z^2/2}\, dz.$$

Значения функции $\Phi(x)$ приведены в табл. 15.2. В частности, вероятность осуществления события $|X - a| < \delta$, где $\delta > 0$ — заданное число, равна

$$P(|X - a| < \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right).$$

Правило «трех сигм»: если случайная величина X распределена нормально, то вероятность того, что $|X - a|$ превышает 3σ, равна приближенно 0,003. Справедливо равенство $P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}997$.

3. Показательное (экспоненциальное) распределение. Непрерывная случайная величина X называется **экспоненциально распределенной**, если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0, \end{cases}$$

где λ — положительный параметр.

Интегральная функция $F(x)$ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geqslant 0. \end{cases}$$

Графики $y = f(x)$ и $y = F(x)$ приведены на рис. 15.9 и 15.10 соответственно.

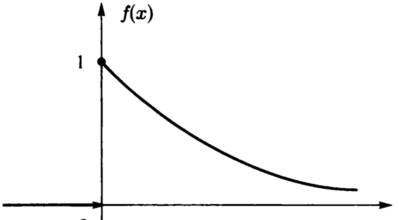


Рис. 15.9

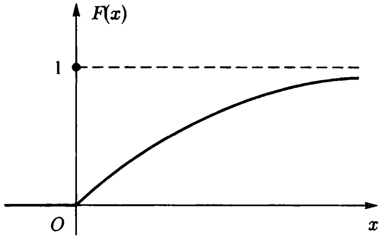


Рис. 15.10

15.1.11. Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины

15.1.11.1. Математическое ожидание

Математическим ожидание $M(X)$ дискретной случайной величины X называется число, равное сумме произведений всех возможных значений x_i на их вероятности p_i:

$$M(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \ldots + x_np_n.$$

Если X принимает счетное множество значений, то

$$M(x) = \sum_{i=1}^{\infty} x_ip_i,$$

если ряд сходится абсолютно (иначе математическое ожидание не существует).

Пусть дискретная случайная величина X может принимать только конечное множество значений $x_1, \ldots, x_n$. Пусть в результате достаточно большого числа N испытаний каждое значение x_i встретилось N_i $(i = 1, \ldots, n)$ раз, причем $N_1 + \ldots + N_n = N$, тогда среднее арифметическое $\overline{x}$ всех полученных значений равно

$$\overline{x} = \frac{1}{N}(x_1N_1 + \ldots + x_nN_n) = x_1\frac{N_1}{N} + \ldots + x_n\frac{N_n}{N}.$$

При достаточно большом N справедливо $N_i/N \approx p_i$ (см. 15.1.3). Следовательно, $M(X) \approx \overline{x}$. Это равенство тем точнее, чем больше N.

Пример 32. Для случайной величины X — числа очков, выпавших при однократном бросании игральной кости, закон распределения имеет вид

X	1	2	3	4	5	6
P	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Математическое ожидание:

$$M(X) = \frac{1}{6}(1+2+3+4+5+6) = 3{,}5.$$

Математическое ожидание числа появлений события в одном испытании равно вероятности этого события.

Свойства математического ожидания:

1) Математическое ожидание постоянной величины C равно $M(C) = C$.
2) Постоянный множитель можно выносить за знак математического ожидания: $M(CX) = CM(X)$.
3) Математическое ожидание суммы случайных величин равно сумме математических ожиданий: $M(X+Y) = M(X) + M(Y)$. Равенство справедливо для суммы любого числа **произвольных** случайных величин.

Примечание 1. **Сумма** $X+Y$ определяется как случайная величина $Z = X+Y$, возможные значения которой равны суммам всех возможных значений X и Y. Аналогично для суммы любого числа случайных величин.

4) Математическое ожидание произведения двух **независимых** случайных величин равно $M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y)$. Равенство справедливо для нескольких взаимно независимых случайных величин, например

$$M(XYZ) = M(X)M(Y)M(Z).$$

Примечание 2. Две случайные величины X, Y называются **независимыми**, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какие возможные значения приняла другая. Несколько случайных величин называются **взаимно независимыми**, если закон распределения любого их числа не зависит от того, какие из возможных значений приняли остальные.

Примечание 3. **Произведение** $Z = XY$ **независимых** случайных величин X, Y определяется как случайная величина, возможные значения которой равны произведениям каждого возможного значения X на каждое возможное значение Y. Аналогично для любого числа независимых случайных величин.

Пример 33. Математическое ожидание биномиально распределенной случайной величины X:

$$M(X) = \sum_{m=0}^{n} mC_n^m p^m q^{n-m} = np.$$

Следовательно, математическое ожидание числа появлений события A в n независимых испытаниях равно произведению $n \cdot p$, где $p = P(A)$ — вероятность появления A в каждом испытании. В n испытаниях событие A появится примерно $n \cdot p$ раз.

Пример 34. Математическое ожидание случайной величины, распределенной по геометрическому закону:

$$M(X) = 1p + 2qp + 3q^2p + \ldots + mq^{m-1}p + \ldots =$$

$$= p(1 + 2q + 3q^2 + \ldots) = p(1 + q + q^2 + \ldots)' = p\left(\frac{1}{1-q}\right)' = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

Пример 35. Для случайной величины, распределенной по закону Пуассона:

$$M(X) = \sum_{m=0}^{\infty} m\frac{a^m}{m!}e^{-a} = e^{-a}\sum_{k=1}^{\infty} k\frac{a^{k-1}}{k(k-1)!} = ae^{-a}e^a = a.$$

15.1.11.2. Дисперсия

Дисперсией $D(X)$ случайной величины X называется математическое ожидание квадрата **отклонения** $X - M(X)$ этой случайной величины от ее математического ожидания $M(X)$:

$$D(X) = M\left[X - M(X)\right]^2 =$$
$$= p_1(x_1 - a)^2 + p_2(x_2 - a)^2 + \ldots + p_n(x_n - a)^2 \quad \left[a \equiv M(X)\right].$$

Величина $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$ называется **средним квадратическим отклонением** (или **стандартом**) случайной величины X.

Дисперсию можно вычислить также по формуле

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2,$$

где

$$M(X^2) = p_1x_1^2 + p_2x_2^2 + \ldots + p_nx_n^2.$$

Пример 36. Для случайной величины в условиях примера 32 имеем:

$$D(X) = \frac{1}{6}\left[(1-3{,}5)^2 + (2-3{,}5)^2 + (3-3{,}5)^2 + (4-3{,}5)^2 + (5-3{,}5)^2 + (6-3{,}5)^2\right] = \frac{35}{12};$$

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{35}{12}} \approx 1{,}71.$$

Свойства дисперсии:

1) Дисперсия постоянной C равна $D(C) = 0$.
2) Если C — постоянная, то $D(CX) = C^2D(X)$.
3) Дисперсия суммы двух **независимых** случайных величин равна сумме дисперсий этих величин: $D(X + Y) = D(X) + D(Y)$. В частности, если $Y = C = \text{const}$, то $D(X + C) = D(X)$. Дисперсия суммы любого числа **попарно независимых** случайных величин равна сумме дисперсий отдельных слагаемых, например, $D(X + Y + Z) = D(X) + D(Y) + D(Z)$.

4) Для двух **независимых** случайных величин X, Y справедливо $D(X-Y) = D(X)+D(Y)$, где $X - Y \equiv X + (-1)\cdot Y$.

Если случайная величина X — число появлений события A в n независимых испытаниях, в каждом из которых вероятность появления A постоянна и равна p, то $D(X) = np(1-p)$.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — взаимно независимые случайные величины, имеющие одинаковые законы распределения (следовательно, одинаковые математические ожидания, равные a, дисперсии, равные D и т. д.). Тогда

$$M(\overline{X}) = M\left[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\right] = a,$$

$$D(\overline{X}) = D\left[\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)\right] = \frac{\sigma^2}{n},$$

$$\sigma(\overline{X}) = \sqrt{D(\overline{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}},$$

где $\overline{X} = \dfrac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$.

Таким образом, дисперсия среднего арифметического большого числа взаимно независимых случайных величин уменьшается с увеличением числа слагаемых.

Пример 37. Для биномиального распределения

$$D(X) = \sum_{m=0}^{n}(m-np)^2 C_n^m p^m q^{n-m} = npq, \quad \sigma(X) = \sqrt{npq}.$$

Пример 38. Для геометрического распределения

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = \frac{1-p}{p^2}, \quad \sigma(X) = \frac{\sqrt{1-p}}{p}.$$

См. также пример 34.

Пример 39. Для распределения Пуассона

$$D(X) = M(X^2) - [M(X)]^2 = a, \quad \sigma(X) = \sqrt{a}.$$

15.1.12. Математическое ожидание и дисперсия непрерывной случайной величины

Пусть X — непрерывная случайная величина с плотностью вероятности $f(x)$.

1. **Математическое ожидание** $M(X)$ величины X определяется равенством

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)\, dx. \tag{15.5}$$

Предполагается, что несобственный интеграл сходится абсолютно.

2. **Дисперсия** $D(X)$ величины X определяется равенством

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x-a)^2 f(x)\,dx \quad [a \equiv M(X)]. \tag{15.6}$$

3. **Среднее квадратическое отклонение (стандарт)** $\sigma(X)$ величины X определяется равенством $\sigma(X) = \sqrt{D(X)}$.

Дисперсия может быть вычислена по формуле

$$D(x) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)\,dx - [M(X)]^2.$$

Все свойства математического ожидания и дисперсии дискретных величин остаются в силе и для непрерывных величин.

4. Если $M(X) = a$, $D(X) = \sigma^2$, то случайная величина $(X - a)$ называется **центрированной**, X/σ — **нормированной**, а величина $Y = (X-a)/\sigma$, для которой $M(Y) = 0$, $D(Y) = 1$, называется **центрированной** и **нормированной** (или **стандартизованной**).

Пример 40. Для равномерно распределенной случайной величины (см. 15.1.10.3):

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx = \int_a^b \frac{x\,dx}{b-a} = \frac{a+b}{2}.$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]^2 f(x)\,dx = \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^2 \frac{dx}{b-a} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

Пример 41. Для нормального распределения (см. 15.1.10.3):

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = a.$$

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-a)^2}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} dx = \sigma^2.$$

Пример 42. Для показательного распределения (см. 15.1.10.3):

$$M(X) = \int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx = \frac{1}{\lambda}, \quad D(X) = \int_0^{\infty} x^2 \lambda e^{-\lambda x}\,dx - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.$$

5. Функции случайного аргумента. Если $Y = \varphi(X)$ — заданная функция случайного аргумента X, имеющего плотность распределения $f(X)$, то

$$M(Y) = M[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) f(x)\, dx,$$

$$D(Y) = D[\varphi(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} [\varphi(x) - M(Y)]^2 f(x)\, dx.$$

15.1.13. Многомерные случайные величины

15.1.13.1. Основные понятия

1. Упорядоченная система $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ случайных величин называется **многомерной случайной величиной (случайным вектором)**. Ограничимся далее двумерной случайной величиной (X, Y), возможными значениями которой являются упорядоченные пары чисел (x, y). Двумерную случайную величину можно представить геометрически как **случайную точку** на плоскости Oxy (т. е. точку, имеющую случайные координаты). **Составляющие** X и Y случайного вектора могут быть либо дискретными, либо непрерывными. **Законом распределения** дискретной двумерной случайной величины (X, Y) называется соответствие между упорядоченными парами чисел (x_i, y_j) всех ее возможных значений и вероятностями их появления $P(x_i, y_j) = p_{ij}$ $(i = 1, 2, \ldots, n;$ $j = 1, 2, \ldots, m)$. При этом $\sum\limits_{i,j=1}^{n,m} p_{ij} = 1$, так как совокупность всех событий $(X = x_i, Y = y_j)$ образует полную группу попарно несовместных событий. Вероятность того, что случайная величина X примет значение x_i, равна

$$P(X = x_i) = P(x_i, y_1) + P(x_i, y_2) + \ldots + P(x_i, y_m) = \sum_{j=1}^{m} P(x_i, y_j).$$

Аналогично находится вероятность $P(Y = y_j)$.

2. Функцией распределения двумерной случайной величины (X, Y) называется функция $F(x, y)$, определяющая вероятность того, что $X < x$, $Y < y$ для каждой заданной пары чисел (x, y):

$$F(x, y) = P(X < x,\ Y < y).$$

Свойства функции распределения:

1) $0 \leqslant F(x, y) \leqslant 1$.
2) Если $x_1 < x_2$, то $F(x_1, y) \leqslant F(x_2, y)$; если $y_1 < y_2$, то $F(x, y_1) \leqslant F(x, y_2)$.
3) $F(-\infty; y) = 0$, $F(x; -\infty) = 0$, $F(-\infty; -\infty) = 0$, $F(+\infty; +\infty) = 1$.

4) При $y \to +\infty$ функция $F(x, y)$ переходит в функцию распределения величины X:
$$F(x; +\infty) = F_1(x);$$
при $x \to +\infty$ функция $F(x, y)$ переходит в функцию распределения величины Y:
$$F(+\infty, y) = F_2(y).$$

3. Вероятность попадания случайной точки в прямоугольник со сторонами
$$X = x_1, \quad X = x_2, \quad Y = y_1, \quad Y = y_2$$
равна:
$$P(x_1 \leqslant X < x_2,\ y_1 \leqslant Y < y_2) = [F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2)] - [F(x_2, y_1) - F(x_1, y_1)].$$

4. Двумерная плотность распределения $f(x, y)$ непрерывной случайной величины (X, Y) определяется равенством
$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}.$$

Свойства функции $f(x, y)$:
$$1)\ f(x, y) \geqslant 0; \qquad 2)\ \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x, y)\,dx\,dy = 1.$$

Справедливо равенство:
$$F(x, y) = \int\limits_{-\infty}^{y}\int\limits_{-\infty}^{x} f(x, y)\,dx\,dy.$$

5. Вероятность $P(G)$ **попадания случайной точки** (X, Y) **в область** G на плоскости Oxy равна
$$P(G) \equiv P\big((X, Y) \in G\big) = \iint\limits_{G} f(x, y)\,dx\,dy.$$

6. Математическое ожидание функции $\varphi(X, Y)$ от двух случайных величин X, Y определяется равенством
$$M[\varphi(X, Y)] = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, y) f(x, y)\,dx\,dy.$$

Аналогично для функции $\varphi(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ любого числа случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Для двух дискретных случайных величин X, Y:

$$M[\varphi(X,Y)] = \sum_{i,j=1}^{n,m} \varphi(x_i, y_j)p_{ij}.$$

Плотности распределения $f_1(x)$ и $f_2(y)$ составляющих случайных величин X и Y находятся по формулам:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx.$$

15.1.13.2. Числовые характеристики системы двух случайных величин

1. Две случайные величины X и Y называются **независимыми**, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какие из возможных значений приняла другая величина. В противном случае эти величины называются **зависимыми**. Для того чтобы случайные величины X, Y были независимыми, необходимо и достаточно выполнения одного из двух следующих равенств:

$$F(x,y) = F_1(x)F_2(y) \quad \text{или} \quad f(x,y) = f_1(x)f_2(y),$$

где F_1 и F_2 — функции распределения, а f_1 и f_2 — плотности распределения величин X и Y соответственно.

Аналогично для n **взаимно независимых** случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ выполняются равенства (см. также независимость событий в совокупности в 15.1.6):

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = F(x_1)F(x_2)\cdots F_n(x_n),$$
$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1)f(x_2)\cdots f_n(x_n).$$

2. Для описания системы двух любых (не обязательно независимых) случайных величин X и Y наряду с их математическими ожиданиями и дисперсиями используют также корреляционный момент (ковариацию) и коэффициент корреляции.

Корреляционным моментом (ковариацией) μ_{XY} системы (X,Y) называется величина

$$\mu_{XY} \equiv \operatorname{cov}(X,Y) = M\{[X - M(X)]\cdot[Y - M(Y)]\} =$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} [x - M(X)]\cdot[y - M(Y)]f(x,y)\,dx\,dy,$$

где

$$M(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf_1(x)\,dx, \quad M(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} yf_2(y)\,dy.$$

Для дискретных величин X, Y:

$$\mu_{XY} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} [x_i - M(X)] \cdot [y_j - M(Y)] p_{ij}.$$

Коэффициентом корреляции величин X и Y называется величина

$$r_{XY} \equiv r = \frac{\mu_{XY}}{\sigma_X \sigma_Y}; \quad \sigma(X) = \sqrt{D(X)}, \quad \sigma(Y) = \sqrt{D(Y)},$$

где $D(X)$, $D(Y)$ — дисперсии величин X, Y. Коэффициент корреляции не имеет размерности и удовлетворяет неравенствам: $-1 \leqslant r_{XY} \leqslant 1$.

Для любых двух (не обязательно независимых) случайных величин X, Y справедливы равенства

$$M(X \cdot Y) = M(X) \cdot M(Y) + r_{XY} \sigma_X \sigma_Y,$$
$$D(X \pm Y) = D(X) + D(Y) \pm 2 r_{XY} \sigma_X \sigma_Y.$$

Для независимых величин X, Y справедливо $\mu_{XY} = 0$, $r_{XY} = 0$. Две случайные величины X, Y называются **коррелированными**, если $r_{XY} \neq 0$, и **некоррелированными**, если $r_{XY} = 0$. Две коррелированные величины также и зависимы. Если две величины зависимы, то они могут быть как коррелированными, так и некоррелированными. Две независимые величины также и некоррелированы. Из некоррелированности величин в общем случае не следует их независимость. Для системы двух нормально распределенных случайных величин из некоррелированности величин следует их независимость, и наоборот.

15.1.13.3. Регрессии

Если случайные события A и B зависимы, то условная вероятность $P(A|B)$ события A отличается от его безусловной вероятности $P(A)$ и находится по формуле $P(A|B) = \dfrac{P(AB)}{P(B)}$. Аналогично, зависимость между составляющими X и Y случайного вектора (X, Y) с функцией распределения $F(x, y)$ характеризуется условным распределением.

Для дискретного случая **условный закон распределения величины** X при условии, что событие $Y = y_j$ (j зафиксировано) уже произошло, имеет вид:

$$P(X = x_i \mid Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{\sum\limits_{i=1}^{n} p_{ij}},$$

аналогично записывается **условный закон распределения величины** Y при условии $X = x_i$ (i зафиксировано):

$$P(Y = y_j \mid X = x_i) = \frac{p_{ij}}{\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij}}, \quad \text{где} \quad i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m.$$

Для непрерывных случайных величин **условные плотности распределения** записываются в виде

$$f(x|y) = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx}, \qquad f(y|x) = \frac{f(x,y)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy}.$$

Составляющие X и Y случайного вектора (X,Y) могут быть связаны между собой вероятностной (статистической) зависимостью, называемой **корреляционной зависимостью** (см. также 15.2.7.1) и отличающейся от обычной функциональной зависимости. Если X и Y связаны корреляционной зависимостью, то для каждого возможного значения x случайной величины X величина Y является случайной с определенным (зависящим от значения x) условным распределением вероятностей, аналогично тому, что для двух зависимых случайных событий условная вероятность каждого из них при наступлении другого отличается от обычной безусловной вероятности.

Условное математическое ожидание дискретной случайной величины Y при условии, что $X = x_i$ (x_i — определенное возможное значение X), определяется равенством:

$$M(Y \mid X = x_i) = \sum_{j=1}^{m} y_j P(Y = y_j \mid X = x_i).$$

Аналогично определяется $M(X \mid Y = y_j)$.

Условные математические ожидания непрерывных случайных величин X и Y определяются равенствами

$$M(Y \mid X = x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} y f(y|x)\,dy; \quad M(X \mid Y = y) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} x f(x|y)\,dx.$$

Функция $\varphi(x) \equiv M(Y \mid X = x)$, зависящая от переменной x, называется (**теоретической**) **функцией регрессии величины Y на величину X** (или **регрессией Y на X**). Иногда ее называют **регрессией Y по X**. Уравнение $y = \varphi(x)$ называется **уравнением регрессии Y на X**, а соответствующий график — **линией** (или **кривой**) **регрессии Y на X** (или Y **по** X). Регрессия Y на X показывает, как в среднем изменяется Y при изменении x. Аналогично рассматривается функция $\psi(y) \equiv M(X \mid Y = y)$, называемая **регрессией X на Y**, а также соответствующее уравнение $x = \psi(y)$ и график.

Условная дисперсия $D(Y \mid X = x)$ величины Y, вычисленная для каждого значения $X = x$, характеризует точность, с которой уравнение регрессии Y на X передает изменение Y в среднем при изменении x.

Основное свойство функции регрессии. Среди всех функций $g(x)$ минимум математического ожидания $M[Y - g(X)]^2$ достигается для функции регрессии

$\varphi(x)$, которая, таким образом, минимизирует среднее квадратическое отклонение прогноза величины Y, сделанную на основании значений величины X. Отсюда, в частности, следует, что если известен вид функции регрессии, то ее неизвестные параметры могут быть найдены методом наименьших квадратов. Согласно основному свойству, для каждого $X = x_0$ наилучшим прогнозируемым значением Y является значение $y_0 = \varphi(x_0)$ функции регрессии.

В самом простом случае (теоретическая) линия регрессии Y на X является прямой с уравнением

$$y = m_Y + r_{XY}\frac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x - m_X). \tag{15.7}$$

Здесь m_X и m_Y — математические ожидания величин X и Y; σ_X^2 и σ_Y^2 — дисперсии величин X и Y; $r_{XY} = \dfrac{\mu_{XY}}{\sigma_X \cdot \sigma_Y}$ — коэффициент корреляции X и Y.

Аналогично записывается уравнение прямой регрессии X на Y:

$$x = m_X + r_{XY}\frac{\sigma_X}{\sigma_Y}(y - m_y). \tag{15.8}$$

В частности, если X и Y связаны линейной функциональной зависимостью $Y = aX + b$, то $m_Y = am_X + b$, $\mu_{XY} = a\sigma_X^2$, $D(Y) = a^2D(X) = a^2\sigma_X^2$, $r_{XY} = a/|a| = \pm 1$. Следовательно, функция регрессии Y на X принимает вид $y = ax + b$. Коэффициент корреляции r_{XY} является оценкой силы линейной связи между X и Y: чем ближе $|r_{XY}|$ к единице, тем сильнее эта связь, чем ближе $|r_{XY}|$ к нулю, тем эта связь слабее. При $r_{XY} = \pm 1$ величины X и Y связаны линейной функциональной зависимостью.

В общем случае истинные функции регрессии $y = \varphi(x)$ и $x = \psi(y)$ не являются линейными. Однако и в этом случае можно составить уравнения прямых (15.7) и (15.8), которые будут **линейными аппроксимациями** (приближениями) истинных функций регрессии. Аппроксимирующие функции могут быть и более сложными, чем линейные.

15.1.14. Закон больших чисел

Совокупность утверждений, носящих общее название **закона больших чисел**, рассматривает условия, при выполнении которых совместное действие большого числа случайных причин приводит к результату, практически не зависящему от случая.

15.1.14.1. Неравенство Чебышёва

Вероятность отклонения случайной величины X от ее математического ожидания $M(X)$ удовлетворяет неравенству:

$$P\big(|X - M(X)| < \varepsilon\big) \geqslant 1 - \frac{D(X)}{\varepsilon^2},$$

где ε — любое положительное число, $D(X)$ — дисперсия.

15.1.14.2. Теорема Чебышёва

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — какая-либо последовательность попарно независимых случайных величин с равномерно ограниченными дисперсиями, т. е. $D(X_k) \leqslant C$ (C — некоторое число) для любого k, тогда среднее арифметическое первых n из этих случайных величин

$$\overline{X} = \frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$$

сходится по вероятности к среднему арифметическому их математических ожиданий, т. е.

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} M(X_k)\right| < \varepsilon\right) = 1,$$

где ε — любое положительное число.

Примечание. Говорят, что последовательность случайных величин $X_1, X_2, \ldots$ **сходится по вероятности** к случайной величине X, если для любого $\varepsilon > 0$ вероятность выполнения неравенства $|X - X_n| < \varepsilon$ стремится к единице при $n \to \infty$. При этом для некоторых отдельных номеров n неравенство может не выполняться, в отличие от сходимости последовательности к своему пределу в обычном смысле сходимости.

Частный случай теоремы Чебышёва. *Если все X_k имеют одинаковые математические ожидания $M(X_k) = a$, то*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - a\right| < \varepsilon\right) = 1.$$

Частный случай теоремы Чебышёва является теоретическим обоснованием практического приема измерения какой-либо величины, согласно которому производится несколько независимых измерений этой величины, а затем находится среднее арифметическое результатов измерений. Ошибкой измерения называется разность между результатом измерения и истинным (обычно заранее неизвестным) значением измеряемой величины. Если при измерении имеются лишь **случайные ошибки**, то математические ожидания всех результатов измерения одинаковы и равны истинному значению измеряемой величины. Следовательно, при достаточно большом числе измерений, их среднее арифметическое с вероятностью сколь угодно близкой к 1 будет как угодно мало отличаться от истинного значения измеряемой величины.

15.1.14.3. Теорема Бернулли

Пусть производится n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A постоянна и равна $p = P(A)$. Тогда, если m — число появления события A в этих испытаниях, то относительная частота

m/n появления A стремится по вероятности (*см.* 15.1.14.2) *к* p, *т. е.*

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n}-p\right|<\varepsilon\right)=1.$$

15.1.14.4. Центральная предельная теорема

Сумма любого числа взаимно независимых нормально распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_n$ с различными, в общем случае, математическими ожиданиями $M(X_i)=a_i$ и дисперсиями $D(X_i)=\sigma_i^2$ ($i=1,2,\ldots,n$) является также нормально распределенной случайной величиной с параметрами $a=a_1+a_2+\ldots+a_n$, $\sigma^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_n^2$.

Справедливо и обратное утверждение: если сумма любого числа взаимно независимых случайных величин является нормальной случайной величиной, то каждая случайная величина (слагаемое) является нормальной.

Обобщением этих утверждений является **предельная теорема Ляпунова**, формулируемая следующим образом.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$ — какая-либо бесконечная последовательность взаимно независимых случайных величин, каждая из которых имеет конечное математическое ожидание $M(X_i)=a_i$, дисперсию $D(X_i)=\sigma_i^2$, абсолютный центральный момент третьего порядка $M(|X-a_i|^3)=\gamma_i$. Величины

$$A_n=a_1+a_2+\ldots+a_n,\quad B_n^2=\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots+\sigma_n^2$$

являются математическим ожиданием и дисперсией соответственно для случайной величины $S_n=X_1+X_1+\ldots+X_n$. Случайные величины

$$Z_n=\frac{S_n-A_n}{B_n}$$

являются центрированными и нормированными, т. е. $M(Z_n)=0$, $D(Z_n)=1$. Обозначим $F_n(x)$ интегральную функцию распределения величины Z_n:

$$F_n(x)=P\left(\frac{S_n-A_n}{B_n}<x\right).$$

Тогда, если при $n\to\infty$ выполняется **условие Ляпунова**

$$\frac{1}{B_n^3}\sum_{i=1}^{n}\gamma_i\to 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}\,dz \tag{15.9}$$

равномерно по x. Таким образом, случайная величина Z_n **асимптотически** (*при* $n\to\infty$) **нормальна**.

Примечание. Говорят, что функция $f(x)$ является **асимптотическим выражением** (или **приближением**) для функции $g(x)$ при $x \to x_0$ (в частности, при $x \to \pm\infty$), если

$$\lim_{x \to x_0} \frac{g(x)}{f(x)} = 1.$$

В условиях предельной теоремы Ляпунова требуется, чтобы $n \to \infty$, однако, если n конечно, но достаточно велико, то распределение величины Z_n будет близким к нормальному.

Говорят, что к последовательности $X_1, X_2, \ldots$ применима **центральная предельная теорема**, если при любом x выполняется соотношение (15.9). Условие Ляпунова означает, что отдельные слагаемые $(X_i - a_i)/B_n$, составляющие сумму Z_n, равномерно малы по сравнению со значениями суммы Z_n.

Смысл центральной предельной теоремы состоит в том, что если рассматриваемая случайная величина является суммой большого числа взаимно независимых случайных величин, каждая из которых мала по сравнению со всей суммой, то эта сумма имеет приблизительно нормальное распределение. Например, на случайную ошибку, возникающую при измерении какой-либо величины, влияет большое число не зависящих друг от друга случайных причин. Если вклад каждой из этих причин в суммарную ошибку незначителен, то можно считать, что суммарная ошибка имеет распределение, близкое к нормальному. При этом математическое ожидание случайной ошибки равно нулю (т. е. среднее арифметическое всех ошибок близко к нулю), а среднее квадратическое отклонение, являющееся средней квадратической ошибкой, характеризует точность измерений.

15.2. Математическая статистика

Математическая статистика — раздел математики, в котором рассматриваются методы сбора, классификации, обработки и анализа статистических сведений, полученных в результате наблюдений или опытов над объектами какой-либо достаточно обширной совокупности. Математическая статистика, изучающая закономерности, которым подчиняются массовые случайные явления, связана с теорией вероятностей, результаты которой используются в математической статистике. Но и сами вероятностные закономерности находят свое статистическое выражение в соответствии с законом больших чисел (вероятность события приближенно равна его относительной частоте, а математическое ожидание случайной величины — среднему арифметическому ее значений) и т. п.

15.2.1. Выборочный метод

Множество объектов, однородных относительно какого-либо количественного или качественного признака этих объектов, называется **генеральной совокупностью (статистической совокупностью)**.

Генеральная совокупность может иметь дискретное (конечное или бесконечное) распределение признака, либо непрерывное его распределение.

Совокупность объектов, отобранных независимо друг от друга случайным образом из генеральной совокупности, называется **простой выборкой** (**выборочной совокупностью**). **Объемом** совокупности (генеральной или выборочной) называется число ее объектов. Выборка называется **возвратной**, если объект после регистрации признака возвращается обратно в генеральную совокупность. В противном случае выборка называется **безвозвратной**. На практике генеральная совокупность часто имеет конечный объем, однако в теоретических исследованиях могут использоваться генеральные совокупности с бесконечно большим объемом.

Выборочный метод представляет собой статистический метод исследования свойств генеральной совокупности на основе изучения свойств лишь части ее, т. е. простой выборки.

Если из генеральной совокупности случайным образом (наугад) извлечь один объект, а после регистрации и возвращения его обратно наугад и независимо от первого объекта извлечь второй и т. д., то значения изучаемого количественного признака этих объектов можно рассматривать как значения некоторой случайной величины X.

Пример 43. В качестве генеральной совокупности можно рассматривать совокупность деталей, изготовленных на одном станке при неизменных условиях. Количественным признаком X здесь является, например, какой-либо размер детали, а качественным ее стандартность. Если деталь стандартная, то можно, например, принять $Y = 1$, а если нет, то $Y = 0$. Выборкой здесь можно считать любую совокупность деталей, взятых из данной генеральной совокупности.

Пусть признак (т. е. случайная величина) X объектов генеральной совокупности имеет интегральную функцию распределения $F(x)$. Из этой генеральной совокупности можно осуществить много возвратных независимых простых выборок объема n, т. е. получать при каждой выборке различные наборы конкретных значений $x_1, x_2, \dots, x_n$ признака X для отобранных n объектов. **Математической выборкой** объема n называется упорядоченная система (случайный вектор) n взаимно независимых случайных величин $X_1, X_2, \dots, X_n$ с одинаковой функцией распределения $F(x)$. Каждая простая возвратная выборка $x_1, x_2, \dots, x_n$ из данной генеральной совокупности является конкретной числовой реализацией математической выборки $X_1, X_2, \dots, X_n$. Для того чтобы простая выборка достаточно правильно представляла свойства генеральной совокупности, отбор объектов должен проводиться случайно, т. е. все выборки одинакового объема должны иметь равные вероятности быть выбранными. Если N и n — объемы генеральной и выборочной совокупности соответственно, то число выборок равно числу сочетаний

$$C_N^n = \frac{N!}{n!(N-n)!}.$$

В случае $n \ll N$ применение возвратных и безвозвратных выборок равного объема дает практически одинаковые результаты. Это различие исчезает совсем, если рассматривать теоретически бесконечную генеральную совокупность. Далее каждая простая выборка из генеральной совокупности конечного объема предполагается возвратной, если не оговорено противное.

15.2.2. Полигон и гистограмма

Пусть из генеральной совокупности с признаком X извлечена простая выборка $x_1, x_2, \ldots, x_k$, в которой значение x_i наблюдалось n_i $(i = 1, \ldots, k)$ раз и $n_1 + \ldots + n_k = n$ — объем выборки. Каждое значение x_i называется **вариантой**. Набор вариант выборки, расположенных в порядке возрастания, называется **вариационным рядом**. Число n_i называется **частотой** варианты x_i, а $n_i/n = w_i$ — ее **относительной частотой**.

Совокупность вариант простой выборки и соответствующих им частот или относительных частот называется **статистическим распределением выборки** (**эмпирическим распределением**). Для наглядного графического представления распределения количественного признака в простой выборке используют полигон или гистограмму. На оси абсцисс откладывают значения вариант x_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ вариационного ряда (в порядке возрастания), а на оси ординат — соответствующие частоты n_i (или относительные частоты w_i). Ломаная, отрезки которой соединяют точки $(x_1, n_1), (x_2, n_2), \ldots, (x_k, n_k)$, где $x_1 < x_2 < \ldots < x_k$ (или точки $(x_1, w_1), (x_2, w_2), \ldots, (x_k, w_k)$), называется **полигоном частот** (или **полигоном относительных частот**) (ср. с рис. 15.2 *б*). Если число различных вариант достаточно велико, то применяется **гистограмма** — столбчатая фигура, которая строится следующим образом. Вариационный ряд $x_1, x_2, \ldots, x_k$, представляющий выборку, при помощи точек $c_0, c_1, \ldots, c_r$ делится на промежутки (обычно одинаковой длины h). На оси абсцисс отмечают точки $c_0 \equiv x_1, c_1, \ldots, c_r \equiv x_k$. Подсчитывают суммы m_i частот вариант, попавших в промежутки $[c_{i-1}; c_i)$ для $i = 1, 2, \ldots, r-1$; для $i = r$ — в промежуток $[c_{r-1}; c_r]$. При этом следует учесть, что гистограммы со слишком большими или слишком малыми промежутками не отражают точно существенных особенностей распределения. На отрезках $[c_{i-1}; c_i]$ с длиной h строятся прямоугольники с высотами, равными m_i/h. Площадь i-го прямоугольника равна $h(m_i/h) = m_i$, а площадь всей гистограммы равна объему выборки $n = m_1 + m_2 + \ldots + m_r$. В результате получается **гистограмма частот**. Для построения **гистограммы относительных частот** высоты прямоугольников берут равными $(m_i/n)/h$. При этом площадь i-го прямоугольника равна m_i/n, а площадь всей гистограммы равна $m_1/n + \ldots + m_r/n = 1$. Рассматриваются также гистограммы, в которых высоты прямоугольников равны m_i, а площади $m_i h$.

Пример 44. Построить гистограмму частот по данному распределению выборки объемом $n = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 = 100$, приведенному в таблице:

i	$[c_{i-1}; c_i]$	m_i	m_i/h
1	[5; 10]	10	2
2	[10; 15]	20	4
3	[15; 20]	50	10
4	[20; 25]	15	3
5	[25; 30]	5	1

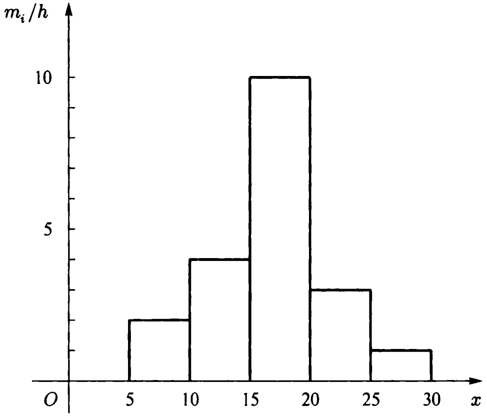


Рис. 15.11

Решение. Строим на оси абсцисс 5 отрезков длиной $h = c_1 - c_0 = 5$, причем $c_0 = 5$, $c_5 = 30$. На этих отрезках строим прямоугольники с высотами m_i/h. Гистограмма изображена на рис. 15.11. Ее площадь равна $n = 100$. ▷

15.2.3. Эмпирическая функция распределения

Пусть известно статистическое распределение какого-либо признака X объектов простой выборки объема n, т. е. для каждой варианты x_i известна ее частота n_i. Обозначим через $m_n(x)$ число всех вариант (т. е. сумму частот n_i отдельных вариант), строго меньших данного действительного числа x (т. е. $x_i < x$). **Эмпирической** (т. е. наблюдаемой, взятой из опыта) **функцией распределения** (**функцией распределения выборки**) называется ступенчатая функция

$F_n^*(x)$, определяемая для каждого заданного числа x равенством:

$$F_n^*(x) = \frac{m_n(x)}{n}.$$

Следовательно, $F_n^*(x)$ является относительной частотой события $X < x$. Функция $F_n^*(x)$ изменяется при переходе от одной простой выборки объема n к другой.

Функция распределения генеральной совокупности $F(x) = P(X < x)$ (см. также 15.1.10.1) называется **теоретической функцией распределения** и по определению равна вероятности события $X < x$. Если n_i — частота варианты x_i, а N — объем (конечной) генеральной совокупности, то согласно классическому определению вероятность того, что X примет значение x_i, равна n_i/N. Тогда вероятность события $X < x$ равна сумме вероятностей n_i/N для всех $x_i < x$. Функцию $F_n^*(x)$ можно рассматривать как приближение (оценку) теоретической функции распределения $F(x)$ бесконечной генеральной совокупности, поскольку из теоремы Бернулли (см. 15.1.14.3) следует, что относительная частота $F_n^*(x)$ события $X < x$ при $n \to \infty$ стремится по вероятности (см. 15.1.14) к вероятности этого события $F(x)$, т. е. вероятность выполнения неравенства $|F(x) - F_n^*(x)| < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$, стремится к единице при $n \to \infty$, так что при достаточно большом номере n значения $F(x)$ и $F_n^*(x)$ практически не отличаются друг от друга.

Пример 45. Построить график эмпирической функции $F^*(x) \equiv F_{100}^*(x)$ по заданному распределению выборки

x_i	1	3	4
n_i	30	20	50

<u>*Решение*</u>. Объем выборки $n = 30 + 20 + 50 = 100$. Варианта $x_1 = 1$ — наименьшая, и $F^*(x) = 0$ при $x \leqslant 1$. Для $X < 3$ варианта $x_1 = 1$ наблюдалась 30 раз, т. е. $m_{100}(3) = 30$, $F^*(x) = 30/100 = 0{,}3$ при $1 < x \leqslant 3$. Для $X < 4$ варианта $x_1 = 1$ наблюдалась бы 30 раз, $x_2 = 3$ — 20 раз; $m_{100}(4) = 30 + 20 = 50$, $F^*(x) = 50/100$ при $3 < x \leqslant 4$. Варианта $x_3 = 4$ — наибольшая; $F^*(x) = (30 + 20 + 50)/100 = 1$ при $x > 4$. Следовательно,

$$F^*(x) = \begin{cases} 0; & x \leqslant 1, \\ 0{,}3; & 1 < x \leqslant 3, \\ 0{,}5; & 3 < x \leqslant 4, \\ 1; & x > 4. \end{cases}$$

График этой ступенчатой функции приведен на рис. 15.12. ▷

Свойства эмпирической функции распределения:

1. $0 \leqslant F_n^*(x) \leqslant 1$.
2. $F_n^*(x)$ — неубывающая функция.
3. Если x_1 и x_k — наименьшая и наибольшая варианты, то $F_n^*(x) = 0$ при $x \leqslant x_1$, $F_n^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

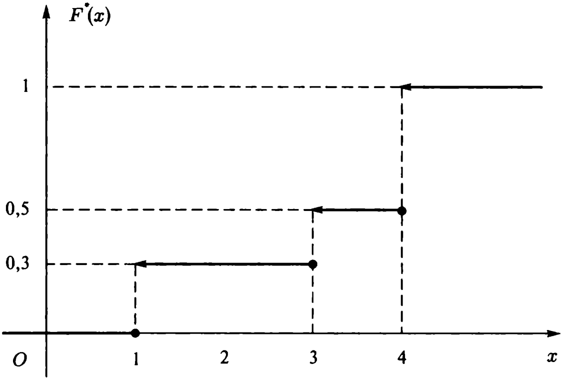


Рис. 15.12

15.2.4. Точечная оценка параметров генеральной совокупности

15.2.4.1. Выборочные средние и дисперсии

Пусть дана математическая выборка $X_1, X_2, \ldots, X_n$ (см. 15.2.1). Функция $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, являющаяся случайной величиной, называется **статистикой (функцией выборки)**. Для каждой числовой реализации $x_1, x_2, \ldots, x_n$ математической выборки статистика Y принимает конкретное числовое значение.

Функция выборки:

1. $\overline{X}_B = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} X_i$ называется **выборочным средним** случайной величины X;

2. $D_B = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_B)^2$ называется **выборочной дисперсией** величины X;

3. $S_B^2 = \dfrac{n}{n-1}D_B = \dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_B)^2$ называется **исправленной (несмещенной) выборочной дисперсией** величины X.

Каждая из случайных величин $\overline{X}_B$, D_B, S_B^2 для любой простой возвратной выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принимает конкретное числовое значение, равное соответственно:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i; \quad D \equiv \sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2; \quad s^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Здесь $\bar{x}$ называется **эмпирическим средним** для простой выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$; D — **эмпирической дисперсией**; s^2 — **эмпирической несмещенной (исправленной) дисперсией**, s^2 обычно используется в практических расчетах.

15.2.4.2. Точечные оценки

На практике функция распределения $F(x)$ признака X генеральной совокупности (теоретическая функция распределения) обычно неизвестна. Известна лишь простая выборка, т. е. набор числовых значений признака $x_1, x_2, \ldots, x_n$, полученных из n наблюдений, предполагаемых независимыми. Задача состоит в том, чтобы, зная эти числовые значения, получить **оценку** (**приближенное значение**) какого-либо неизвестного параметра (числа) β, характеризующего генеральную совокупность, например, математического ожидания $\beta = M(X)$. Для решения этой задачи необходимо найти такую функцию выборки (случайную величину) $B = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$, которая для каждой простой выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ принимала бы числовое значение $\beta^* = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, в каком-либо определенном смысле близкое к параметру β. Переходя от одной простой выборки к другой, будем получать всякий раз различные значения β^*, являющиеся возможными значениями случайной величины B. Такая случайная величина B называется **точечной оценкой** параметра β (так как параметр β при этом оценивается одним числом β^*). Точечная оценка $B = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ параметра β называется **несмещенной**, если ее математическое ожидание равно оцениваемому параметру β при любом объеме выборки, т. е. $M(B) = \beta$. В противном случае оценка называется **смещенной**. Например $\overline{X}_B$ является несмещенной оценкой математического ожидания $M(X)$ так как

$$M(\overline{X}_B) = M\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M(X_i) = M(X) \equiv M_0,$$

поскольку все X_i имеют по определению одинаковые функции распределения $F(x)$. Следовательно, математическое ожидание выборочного среднего равно математическому ожиданию M_0 признака X генеральной совокупности.

Дисперсия выборочного среднего равна

$$D(\overline{X}_B) = M\left[(\overline{X}_B - M_0)^2\right] = M\left[\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - M_0)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n^2} nD(X) = \frac{1}{n}D(X) \equiv \frac{1}{n}D_0$$

в силу взаимной независимости X_i и X_j $(i \neq j)$. Здесь $D(X) \equiv D_0$ — дисперсия признака X генеральной совокупности.

Математическое ожидание выборочной дисперсии равно

$$M(D_B) = M\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_B)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{n}M\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[(X_i - M_0) - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(X_j - M_0)\right]^2\right\} = \frac{n-1}{n}D_0.$$

Величина D_B является смещенной оценкой параметра $D_0 \equiv D(X)$, так как $M(D_B) \neq D_0$. Для несмещенной выборочной дисперсии имеем

$$M(S_B^2) = \frac{n}{n-1}M(D_B) = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n}D_0 = D_0,$$

т. е. $M(S_B^2) = D_0$.

Оценка B параметра β, имеющая при заданном объеме n выборки наименьшую возможную дисперсию $D(B) = M[(B-\beta)^2]$, называется **эффективной**. Оценка B параметра β, которая при $n \to \infty$ стремится по вероятности (см. 15.1.14) к оцениваемому параметру β, называется **состоятельной**:

$$\lim_{n\to\infty} P(|B-\beta| < \varepsilon) = 1 \quad (\varepsilon > 0).$$

Состоятельной будет, например, несмещенная оценка, дисперсия которой стремится к нулю при $n \to \infty$.

15.2.4.3. Точечные оценки генерального среднего и дисперсии

Генеральным средним признака X генеральной совокупности называется число, равное математическому ожиданию этого признака: $\bar{x}_\Gamma \equiv M(X)$. В случае конечной дискретной генеральной совокупности, состоящей из N объектов с различными значениями признака X, равными $x_1, x_2, \ldots, x_N$, вероятность извлечь наугад один объект с любым конкретным значением признака равна $1/N$. Тогда

$$M(X) = \frac{1}{N}(x_1 + x_2 + \ldots + x_N).$$

Точечной оценкой неизвестного генерального среднего $\bar{x}_\Gamma$ является выборочное среднее $\overline{X}_B$. Оценка $\overline{X}_B$ — несмещенная, состоятельная, т. е. при увеличении объема n выборки она стремится по вероятности к $\bar{x}_\Gamma$ (отсюда следует, что различные простые выборки достаточно большого объема, извлеченные из некоторой генеральной совокупности, дадут примерно одинаковые эмпирические средние значения $\bar{x}$). Чем больше объем выборки, тем меньше $\bar{x}$ отличается от $\bar{x}_\Gamma$.

Генеральной дисперсией признака X генеральной совокупности называется число, равное

$$D_Г \equiv D(X) = M\left[(X - \bar{x}_Г)^2\right].$$

Генеральным средним квадратическим отклонением (стандартом) называется число $\sigma_Г = \sqrt{D_Г}$. В случае конечной дискретной генеральной совокупности

$$D_Г = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}(x_i - \bar{x}_Г)^2.$$

Случайная величина S_B^2 (см. 15.2.4.1) является несмещенной оценкой для $D_Г$, т. е. $M(S_B^2) = D_Г$. Оценка D_B величины $D_Г$ является смещенной, так как $M(D_B) = \dfrac{n-1}{n}D_Г \neq D_Г$ (см. 15.2.4.2). На практике величиной S_B^2 обычно пользуются, когда объем n выборки меньше 30, поскольку при достаточно больших n различие между S_B^2 и D_B незначительно.

15.2.4.4. Метод моментов точечной оценки параметров

1. Теоретические моменты. Начальным теоретическим моментом порядка k (k — натуральное число) случайной величины X (дискретной или непрерывной) называется математическое ожидание величины X^k:

$$\nu_k = M(X^k).$$

В частности, $M(X) = \nu_1$, $D(X) = \nu_2 - \nu_1^2$.

Центральным теоретическим моментом порядка k случайной величины X называется математическое ожидание величины $\mathring{X}^k$:

$$\mu_k = M(\mathring{X}^k),$$

где $\mathring{X} = X - M(X)$ — **отклонение случайной величины от математического ожидания**. В частности, $\mu_1 = M[X - M(X)] = 0$, $\mu_2 = D(X)$. Справедливы соотношения:

$$\mu_2 = \nu_2 - \nu_1^2; \quad \mu_3 = \nu_3 - 3\nu_1\nu_2 + 2\nu_1^3; \quad \mu_4 = \nu_4 - 4\nu_1\nu_3 + 6\nu_1^2\nu_2 - 3\nu_1^4.$$

Для нахождения теоретических моментов необходимо иметь функцию распределения случайной величины.

2. Выборочные и эмпирические моменты. Начальным выборочным моментом порядка k (k — натуральное) называется функция математической выборки (см. 15.2.4.1):

$$\alpha_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k.$$

В частности, $\alpha_1 = \overline{X}_B$.

Центральным выборочным моментом порядка k называется функция математической выборки

$$m_k = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X}_B)^k.$$

В частности, $m_1 = 0$, $m_2 = S_B^2$.

Конкретные числовые реализации выборочных моментов для каждой простой возвратной выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются эмпирическими моментами и обозначаются α_k^* и m_k^*:

$$\alpha_k^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k; \quad m_k^* = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^k.$$

В частности, $\alpha_1^* = \bar{x}$, $m_2^* = \dfrac{n}{n-1}D \equiv s^2$ (см. 15.2.4.1).

При вычислении центральных эмпирических моментов m_k^* удобнее перейти от обычных **равноотстоящих** вариант x_i к **условным** вариантам u_i:

$$u_i = \frac{1}{h}(x_i - C),$$

где C — некоторое число, в качестве которого берут любую варианту, расположенную примерно в середине вариационного ряда; h — шаг (постоянная разность между любыми двумя соседними вариантами). Условные варианты — целые числа. В частности

$$\bar{x} = C + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i.$$

Кроме вышеперечисленных применяются также следующие эмпирические характеристики вариационного ряда:

1) **модой** m_0 называется варианта x_i, имеющая наибольшую частоту n_i;
2) **медианой** m_e называется варианта, делящая вариационный ряд на две части, равные по числу вариант, при n — четном m_e определяется как полусумма центральных вариант;
3) **размахом варьирования** R называется разность между наибольшей и наименьшей вариантами: $R = x_{\max} - x_{\min}$;
4) **средним абсолютным отклонением** называется число

$$\theta = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|;$$

5) **коэффициентом вариации** V называется выражение

$$V = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\% \quad (\sigma = \sqrt{D}).$$

3. Метод моментов точечной оценки параметров генеральной совокупности. Метод состоит в замене теоретических моментов соответствующими выборочными моментами того же порядка и основан на том, что начальные и центральные выборочные моменты являются состоятельными оценками (см. 15.2.4.2) соответствующих теоретических моментов. Для нахождения конкретного числового значения точечной оценки (являющейся случайной величиной) необходимо найти значение соответствующего эмпирического момента (или нескольких моментов) для данной простой выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и приравнять его (или их) к соответствующему теоретическому моменту (или моментам). Пусть требуется оценить один неизвестный параметр β плотности распределения $f(x, \beta)$ заданного вида. Для этого приравнивают какой-либо один теоретический момент к эмпирическому моменту того же порядка, например, $\nu_1 = \alpha_1^*$ $(k = 1)$. Рассматривая это равенство как уравнение для нахождения параметра β, входящего в выражение для $\nu_1 = M(X)$, и решая это уравнение, найдем числовую (точечную) оценку β^* параметра β, выраженную через значения вариант $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Пример 46. Найти методом моментов во выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ числовую (точечную) оценку a^* неизвестного параметра a распределения Пуассона

$$P_a(X = m) = \frac{a^m}{m!}e^{-a} \quad (m = 0, 1, \ldots).$$

Решение. Для случайной величины X, распределенной по закону Пуассона, справедливо $M(X) = a$. Поскольку $\alpha_1^* = \bar{x}$, из уравнения $\nu_1 = \alpha_1^*$ находим, что

$$a^* = \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n). \qquad \triangleright$$

Пример 47. По данной выборке найти числовую (точечную) оценку λ^* параметра λ показательного распределения, плотность вероятности которого

$$f(x) = 0 \ \ (x < 0), \qquad f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \ \ (x \geqslant 0).$$

Решение. Здесь $\nu_1 = M(X) = 1/\lambda$, $1/\lambda^* = \bar{x}$, т. е. $\lambda^* = 1/\bar{x}$. $\triangleright$

Если плотность распределения $f(x, \beta_1, \beta_2)$ зависит от двух параметров β_1, β_2, необходимо приравнять два каких-либо теоретических момента к двум соответствующим эмпирическим моментам, например $\nu_1 = \alpha_1^*$, $\mu_2 = m_2^*$. Здесь оценка m_2 является состоятельной и несмещенной.

Пример 48. Найти числовые (точечные) оценки a^*, σ^* неизвестных параметров нормального распределения

$$f(x, a, \sigma) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right\} \quad (\exp\{z\} \equiv e^z).$$

Решение. Для нормального распределения $\nu_1 = M(X) = a$, $\mu_2 = D(X) = \sigma^2$. Имеем два уравнения:

$$\nu_1 = a = \alpha_1^* = \bar{x}; \quad \mu_2 = \sigma^2 = m_2^* = s^2.$$

Отсюда $a^* = \bar{x}$, $\sigma^* = \sqrt{s^2}$. Выражение s^2 через $x_1, x_2, \dots, x_n$ приведено в 15.2.4.1. ▷

Примечание. Эмпирическая дисперсия D здесь не используется, так как оценка D_B — смещенная.

Пример 49. Найти числовые оценки параметров a и b равномерного распределения с плотностью вероятности $f(x) = 0$ ($x < a$ или $x > b$), $f(x) = (b-a)^{-1}$ ($a \leqslant x \leqslant b$).

Решение. Для равномерного распределения $M(X) = \dfrac{1}{2}(a+b)$; $D(X) = \dfrac{1}{12}(b-a)^2$. Из условий $\nu_1 = \alpha_1^*$, $\mu_2 = m_2^*$ следует: $\dfrac{1}{2}(a+b) = \bar{x}$, $\dfrac{1}{12}(b-a)^2 = s^2$. Отсюда находим $a^* = \bar{x} - \sqrt{3s^2}$, $b^* = \bar{x} + \sqrt{3s^2}$. ▷

15.2.4.5. Метод наибольшего правдоподобия

1. Дискретные случайные величины. Пусть задан вид закона распределения дискретной случайной величины X с неизвестным параметром β. Требуется найти оценку β^* этого параметра по известной простой выборке $x_1, x_2, \dots, x_k$ с частотами n_i вариант ($i = 1, 2, \dots, k$; $\sum\limits_i n_i = n$).

Функцией правдоподобия дискретной случайной величины X называется следующая функция от β:

$$L(x_1, \dots, x_n; \beta) = p^{n_1}(x_1; \beta) p^{n_2}(x_2; \beta) \cdots p^{n_k}(x_k; \beta),$$

где $p(x_i; \beta)$ — вероятность того, что величина X примет значение x_i. Здесь $\sum\limits_{i=1}^{k} n_i p(x_i; \beta) \neq 1$, так как вероятности относятся к выборке, но не к генеральной совокупности.

Метод наибольшего (максимального) правдоподобия состоит в том, что в качестве оценки параметра β берется такое его значения β^*, при котором функция правдоподобия достигает максимума. Значение **оценки наибольшего правдоподобия** $\beta^* = \beta^*(x_1, \dots, x_n)$ находят, решая относительно β уравнение, выражающее необходимое условие максимума функции правдоподобия

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{1}{L}\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0.$$

Если функция правдоподобия зависит от нескольких неизвестных параметров β_i ($i = 1, 2, \dots, r$), то для нахождения β_i^* решают систему уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_i} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, r).$$

В общем случае оценки, полученные по методу наибольшего правдоподобия и по методу моментов, не совпадают.

Пример 50. Методом наибольшего правдоподобия по заданной простой выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ найти значение оценки неизвестного параметра p геометрического распределения

$$P(X = m) = p(1-p)^{m-1} \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

<u>*Решение*</u>. Функция правдоподобия имеет вид

$$L = p(1-p)^{x_1-1} p(1-p)^{x_2-1} \cdots p(1-p)^{x_n-1}.$$

Логарифм от функции правдоподобия

$$\ln L = n \ln p + \left[(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - n\right] \ln(1-p).$$

Необходимое условие максимума

$$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{n}{p} - \left[(x_1 + x_2 + \ldots + x_n) - n\right] \frac{1}{1-p} = 0$$

выполняется при $p = 1/\bar{x}$. Вторая производная

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p^2} = -\frac{n}{p} - [\bar{x}n - n] \frac{1}{(1-p)^2} < 0$$

при $p = 1/\bar{x}$. Следовательно, в точке $p = 1/\bar{x}$ достигается максимум функции правдоподобия. Таким образом, искомое значение оценки $p^* = 1/\bar{x}$. ▷

2. Непрерывные случайные величины. Пусть задан вид плотности распределения $f(x; \beta)$ непрерывной случайной величины X с неизвестным параметром β. Требуется по заданной простой выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ из генеральной совокупности значений X найти значение оценки β^* этого параметра.

Функцией правдоподобия непрерывной случайной величины называют следующую функцию от β:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \beta) = f(x_1; \beta) f(x_2; \beta) \cdots f(x_n; \beta).$$

Значение оценки β^* находят из уравнения

$$\frac{\partial L}{\partial \beta} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = 0.$$

Если $f(x; \beta_1, \ldots, \beta_r)$ зависит от нескольких неизвестных параметров β_i, то для нахождения β_i^* решают систему уравнений

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_i} = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \ln L}{\partial \beta_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, r).$$

Пример 51. Методом наибольшего правдоподобия по выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ найти значения оценок неизвестных параметров a и σ нормального распределения (см. пример 48).

Решение. Функция правдоподобия:

$$L(x_1, \dots, x_n; a, \sigma) = \frac{1}{(\sigma\sqrt{2\pi})^n} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2\right\}.$$

Логарифм этой функции:

$$\ln L = -n \ln \sigma - n \ln \sqrt{2\pi} - \frac{1}{2\sigma^2}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2.$$

Для нахождения значений оценок a^*, σ^* имеем уравнения

$$\frac{\partial \ln L}{\partial a} = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i - na\right) = 0,$$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \sigma} = -\frac{n}{\sigma} + \frac{1}{\sigma^3}\sum_{i=1}^{n}(x_i - a)^2 = 0,$$

решая которые, получим значения оценок

$$a^* = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}; \quad \sigma^{*2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \equiv D \equiv \frac{n-1}{n}s^2.$$

Здесь оценка $\overline{X}_B$ (с числовым значением $\bar{x}$) — несмещенная; тогда как оценка $D_B = \dfrac{n-1}{n}S_B^2$ (с числовым значением D) — смещенная, но она **асимптотически** (при $n \to \infty$) **несмещенная**, так как $M(D_B) \to \sigma^2$ при $n \to \infty$. ▷

15.2.5. Интервальная оценка параметров генеральной совокупности

15.2.5.1. Основные понятия

Наряду с точечной оценкой неизвестных параметров теоретического распределения, при которой параметры оцениваются отдельными числами, применяется также **интервальная (доверительная) оценка**, представляющая собой некоторый интервал, содержащий в себе значение оцениваемого параметра. В отличие от точечной интервальная оценка позволяет установить точность оценки и ее надежность.

Пусть дана математическая выборка $X_1, X_2, \dots, X_n$ из некоторой генеральной совокупности объектов с признаком X с заданным видом распределения, содержащего неизвестный параметр β.

Доверительным интервалом для параметра β с **надежностью (доверительной вероятностью**, или **коэффициентом доверия**) $1 - \alpha$, где α — заданное число ($0 < \alpha < 1$), называется такой случайный интервал $(B_1; B_2)$ с границами, определяемыми двумя функциями выборки

$$B_1 = f_1(X_1, \dots, X_n), \quad B_2 = f_2(X_1, \dots, X_n) \quad (B_1 < B_2),$$

для которого вероятность

$$P(B_1 < \beta < B_2) = 1 - \alpha.$$

Границы интервала B_1 и B_2 (случайные величины) называются **доверительными границами**. Для заданного значения α доверительный интервал покрывает (т. е. содержит) неизвестное значение параметра β с вероятностью $\gamma = 1-\alpha$. Вероятность того, что доверительный интервал не покроет истинное значение β, не превышает α. Доверительный интервал может быть записан также в виде $(B-\delta; B+\delta)$ или $B-\delta < \beta < B+\delta$, где B и δ — случайные величины. Для каждой простой выборки $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (т. е. набора чисел) доверительный интервал $(B_1; B_2)$ переходит в обычный числовой (эмпирический) интервал $(\beta_1^*; \beta_2^*)$, где $\beta_1^* = f_1(x_1, \ldots, x_n)$, $\beta_2^* = f_2(x_1, \ldots, x_n)$, или в интервал $(\beta^* - \delta^*; \beta^* + \delta^*)$, где число $\delta^* > 0$ характеризует точность оценки. Из всей совокупности эмпирических интервалов, найденных для простых выборок, примерно $\gamma \cdot 100\,\%$ покрывают истинное значение параметра β. Задаваемое значение α обычно берут близким к нулю, соответственно $\gamma = 1-\alpha$ близким к единице, а именно: 0,95; 0,99; 0,999.

15.2.5.2. Интервальная оценка неизвестного параметра a нормального распределения при известном σ

Пусть признак X генеральной совокупности распределен нормально с **известной** дисперсией $D(X) = \sigma^2$. Необходимо найти доверительный интервал для оценки **неизвестного** математического ожидания $a = M(X)$ по заданному эмпирическому среднему $\bar{x}$. Интервальная оценка основана на том, что если признак X распределен нормально, то выборочная средняя $\overline{X}_B$ является также нормально распределенной величиной с параметрами распределения

$$M(\overline{X}_B) = a; \quad D(\overline{X}_B) = \frac{\sigma^2}{n}; \quad \sigma(\overline{X}_B) = \sqrt{D(\overline{X}_B)} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Для нормально распределенной величины $\overline{X}_B$ можно записать (см. 15.1.10.3)

$$P(|\overline{X}_B - a| < \delta^*) = 2\Phi\left(\frac{\delta^*\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\Phi(t), \tag{15.10}$$

где $\delta^* > 0$ — некоторое число, $\Phi(t)$ — функция Лапласа (см. табл. 15.2), $t = \delta^*\sqrt{n}/\sigma$.

Соотношения (15.10) можно записать также в виде

$$P\left(\overline{X}_B - \delta^* < a < \overline{X}_B + \delta^*\right) = 2\Phi(t). \tag{15.11}$$

Соотношение (15.11) означает, что при заданной надежности (вероятности) $\gamma = 2\Phi(t)$ доверительный интервал

$$\left(\overline{X}_B - \frac{t\sigma}{\sqrt{n}};\ \overline{X}_B + \frac{t\sigma}{\sqrt{n}}\right), \tag{15.12}$$

где t находится из равенства $\Phi(t) = \gamma/2$, покрывает неизвестное значение a с вероятностью γ, причем точность оценки $\delta^* = t\sigma/\sqrt{n}$. Для каждой простой выборки случайная величина $\overline{X}_B$ принимает конкретное числовое значение $\bar{x}$, поэтому в каждом случае будем иметь интервал с определенными границами $(\bar{x} - t\sigma/\sqrt{n};\ \bar{x} + t\sigma/\sqrt{n})$, которые изменяются при переходе от одной простой выборки к другой. При увеличении γ величины t и δ^* возрастают (т. е. точность уменьшается). Если заданы γ и δ^*, то наименьший объем выборки n, обеспечивающий требуемую точность, равен $n = t^2\sigma^2/\delta^{*2}$.

Пример 52. Найти доверительный интервал для оценки с надежностью $\gamma = 0{,}99$ неизвестного параметра a нормального распределения случайной величины X по эмпирическому среднему $\bar{x} = 9$, дисперсии $\sigma^2 = 4$, объему выборки $n = 40$.

Решение. Из равенства $\Phi(t) = \gamma/2 = 0{,}495$ находим $t = 2{,}57$ (см. табл. 15.2). Точность оценки $\delta^* = t\sigma/\sqrt{n} = 2{,}57 \cdot 2/\sqrt{40} = 0{,}81$. Доверительный интервал $(\bar{x} - 0{,}81;\ \bar{x} + 0{,}81) = (8{,}19;\ 9{,}81)$ с вероятностью 0,99 покрывает неизвестный параметр a. ▷

15.2.5.3. Интервальная оценка неизвестного параметра a нормального распределения при неизвестном параметре σ

Оценка основана на использовании случайной величины

$$\frac{\overline{X}_B - a}{S_B}\sqrt{n}$$

(S_B^2 — исправленная выборочная дисперсия), имеющей так называемое **распределение Стьюдента** с $(n-1)$ степенями свободы. Пусть из генеральной совокупности, признак X которой распределен нормально с неизвестными параметрами a, σ, извлечена простая выборка $x_1, x_2, \ldots, x_n$ заданного объема n, по которой найдены: эмпирическое среднее $\bar{x}$ и эмпирическая несмещенная дисперсия s^2. Тогда доверительный интервал, покрывающий с заданной надежностью (вероятностью) γ неизвестный параметр a, имеет вид

$$\left(\bar{x} - \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}};\ \bar{x} + \frac{t_\gamma s}{\sqrt{n}}\right), \tag{15.13}$$

где величина t_γ находится по табл. 15.3 по заданным значениям γ и n. Если $n \geqslant 30$, то с достаточной точностью вместо доверительного интервала (15.13) можно использовать также доверительный интервал (15.12), заменив приближенно σ на s.

Пример 53. Найти доверительный интервал, покрывающий с надежностью $\gamma = 0{,}999$ неизвестный параметр a нормального распределения, если известно: $\bar{x} = 18{,}3$; $n = 10$; $s = 0{,}7$.

Решение. По известным γ и n по табл. 15.3 находим $t_\gamma = t(\gamma, n) = 4{,}78$. Далее: $t_\gamma s/\sqrt{n} = (4{,}78 \cdot 0{,}7)/\sqrt{10} = 1{,}06$. Доверительный интервал $(17{,}24;\ 19{,}9)$ с вероятностью 0,999 покрывает неизвестный параметр a. ▷

15.2.5.4. Интервальная оценка неизвестного параметра σ нормального распределения по заданному значению s

Оценка основана на использовании случайной величины

$$\frac{(n-1)S_B^2}{\sigma^2},$$

распределенной по так называемому закону χ^2 (хи-квадрат) с $(n-1)$ степенями свободы. Пусть из генеральной совокупности извлечена простая выборка объема n, по которой найдены эмпирические величины $\bar{x}$ и s. Тогда доверительный интервал, покрывающий неизвестный параметр σ (при этом параметр a также неизвестен) нормального распределения с заданной надежностью γ, имеет вид

$$s(1-q) < \sigma < s(1+q) \quad (\text{для } q < 1),$$
$$0 < \sigma < s(1+q) \quad (\text{для } q > 1),$$

где q находится по табл. 15.4 по заданным γ и n.

Пример 54. Дано: $n = 15$, $s = 0{,}1$. Найти доверительный интервал, покрывающий неизвестный параметр σ нормального распределения с надежностью $\gamma = 0{,}99$.

Решение. По табл. 15.4 по данным γ и n находим $q = q(\gamma, n) = 0{,}73$. Искомый доверительный интервал: $0{,}027 < \sigma < 0{,}173$. ▷

15.2.6. Оценка неизвестной вероятности по относительной частоте

15.2.6.1. Точечная оценка вероятности

Точечной оценкой вероятности $p = P(A)$ события A является случайная величина, называемая **относительной частотой**:

$$W_n(A) = \frac{M_n}{n},$$

где M_n — случайная величина, возможные значения которой равны числу m $(0 \leqslant m \leqslant n)$ появления события A в каждой серии из n независимых испытаний. Величина M_n в каждой серии случайно принимает разные значения от $m = 0$ до $m = n$. Математическое ожидание величины W_n равно

$$M(W_n) = M\left(\frac{M_n}{n}\right) = \frac{M(M_n)}{n} = \frac{np}{n} = p$$

(см. пример 33 в 15.1.11), т. е. оценка $W_n(A)$ — несмещенная. Дисперсия оценки W_n равна

$$D(W_n) = D\left(\frac{M_n}{n}\right) = \frac{D(M_n)}{n^2} = \frac{npq}{n^2} = \frac{pq}{n}$$

(см. пример 37 в 15.1.11). Следовательно,

$$\sigma = \sqrt{D(W_n)} = \sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Частота $W_n(A)$ имеет асимптотически, при $n \to \infty$ (т. е. для выборок достаточно большого объема), нормальное распределение с плотностью вероятности $f(x, a, \sigma)$ (см. пример 48), где $a = p$, $\sigma = \sqrt{pq/n}$ $(0 < p < 1)$.

15.2.6.2. Интервальная оценка вероятности

Оценка основана на том, что частота $W_n(A)$ для достаточно больших объемов n выборок (при условии, что вероятность $p = P(A)$ не очень близка к 0 и 1) приближенно имеет нормальное распределение (см. 15.2.6.1).

Если w — возможное значение (числовая реализация) случайной величины $W_n(A)$ в конкретной серии из n испытаний, то с заданной надежностью (вероятностью) γ доверительный интервал (p_1, p_2) покрывает неизвестную вероятность p $(p_1 < p < p_2)$, где

$$p_1 = \frac{n}{t^2+n}\left(w + \frac{t^2}{2n} - \Lambda\right), \quad p_2 = \frac{n}{t^2+n}\left(w + \frac{t^2}{2n} + \Lambda\right),$$

$$\Lambda = t\left[\frac{w(1-w)}{n} + \left(\frac{t}{2n}\right)^2\right]^{1/2}.$$

Здесь значение t находится из условия $\Phi(t) = \gamma/2$, где $\Phi(t)$ — функция Лапласа (см. табл. 15.2).

Пример 55. Произведено $n = 100$ независимых испытаний, в каждом из которых неизвестная вероятность p появления события A одна и та же. Событие A появилось $m = 45$ раз. Найти доверительный интервал, покрывающий вероятность p с надежностью $\gamma = 0{,}99$.

Решение. Частота $w = m/n = 45/100 = 0{,}45$. Из равенства $\Phi(t) = \gamma/2 = 0{,}495$ по табл. 15.2 находим $t = 2{,}58$. Доверительный интервал с границами $p_1 = 0{,}330$; $p_2 = 0{,}571$ имеет вид $0{,}330 < p < 0{,}571$. ▷

15.2.7. Анализ корреляции и регрессии по результатам выборок

15.2.7.1. Оценка корреляционных и регрессионных параметров

В простейшем случае две случайные величины X и Y могут быть связаны обычной функциональной зависимостью $Y = f(X)$, например $Y = X^2$, когда каждому возможному значению X соответствует определенное возможное значение Y. Более сложной является вероятностная (статистическая) зависимость между случайными величинами X и Y, когда изменение значений одной из них приводит к изменению закона распределения другой. Такая зависимость, называемая **корреляционной зависимостью** (или просто **корреляцией**), появляется в том случае, когда среди совокупности случайных факторов, влияющих на X и Y, есть общие для них факторы, действующие одновременно как на X, так и на Y. Корреляция проявляется также в том случае, когда Y зависит не только от X, но и от нескольких других случайных факторов.

Для изучения связи (зависимости) между случайными величинами X и Y, образующими случайный вектор (X, Y), делается выборка объема n, состоящая из n пар чисел $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_n, y_n)$. Такие выборки называются **связанными**, в отличие от **независимых** выборок по признакам X и Y отдельно. При этом каждому возможному значению x величины X может соответствовать несколько возможных значений y величины Y (в зависимости от случая). Оценкой условного математического ожидания $M(Y|x)$ (см. 15.1.13.3) является **условное среднее** $\bar{y}(x_i)$, равное среднему арифметическому всех n_i значений величины Y, наблюдаемых при $X = x_i$:

$$\bar{y}(x_i) = \frac{1}{n_i}(y_{i1} + y_{i2} + \ldots + y_{in_i}).$$

Аналогично определяется условное среднее $\bar{x}(y_j)$. **Регрессия** представляет собой зависимость условного математического ожидания (условного среднего значения) какой-либо величины от одной или нескольких других величин.

В самом простом случае (теоретические) функции регрессии (см. 15.1.13.3), конкретизирующие вид корреляционной зависимости, являются линейными, а линии регрессии — прямыми. В этом случае величины X и Y называются линейно **коррелированными**. Для теоретических параметров (см. 15.1.13.3), характеризующих прямые регрессии, могут быть даны при этом нижеприведенные оценки по результатам связанной выборки согласно методу моментов.

1. Оценки математических ожиданий m_X и m_Y равны соответственно:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \bar{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i.$$

2. Оценки дисперсий $D(X) = \sigma_X^2$ и $D(Y) = \sigma_Y^2$ соответственно:

$$s_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2, \quad s_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2.$$

3. Оценка корреляционного момента (ковариации) μ_{XY}:

$$m_{XY} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}).$$

4. Оценка коэффициента корреляции r_{XY}:

$$r = \frac{m_{XY}}{s_X s_Y} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}}.$$

Оценки параметров 1–4 называются соответственно **эмпирическими: средними, дисперсиями, корреляционным моментом, коэффициентом корреляции.**

15.2.7.2. Эмпирические прямые регрессии

Для линейно коррелированных случайных величин X и Y уравнения эмпирических (т. е. полученных на основании наблюдений) прямых регрессии получаются из уравнений (15.7) и (15.8) прямых регрессии посредством замены в последних всех теоретических параметров соответствующими эмпирическими оценками. Эмпирические прямые регрессии Y на X и X на Y (в общем случае разные) имеют соответственно уравнения:

$$y = \bar{y} + r\frac{s_Y}{s_X}(x - \bar{x}), \tag{15.14}$$

$$x = \bar{x} + r\frac{s_X}{s_Y}(y - \bar{y}). \tag{15.15}$$

Уравнения (15.14), (15.15) применяют также в случае приближенной линейной корреляции X и Y. В большинстве случаев наличие даже приближенной линейной корреляции между X и Y не может быть установлено теоретически. На практике поступают следующим образом. Пусть (x_i, y_{ij}) — точки связанной выборки (эмпирические точки). Построим на плоскости Oxy точки $(x_i, \bar{y}(x_i))$, где $\bar{y}(x_i)$ — условное среднее значение Y для заданного значения $X = x_i$. Если на основании полученного расположения эмпирических точек можно сделать заключение о близости этого расположения к прямолинейному, то линию регрессии допустимо искать приближенно в виде прямой с уравнением (15.14) или (15.15). Эмпирические прямые регрессии с уравнением (15.14) являются прямыми наилучшего среднеквадратического приближения к эмпирическим точкам (x_i, y_i), т. е. сумма квадратов отклонений

$$\sum_{i=1}^{n}[y_i - y(x_i)]^2,$$

где $y(x_i) = \bar{y} + r(s_Y/s_X)(x_i - \bar{x})$, минимальна по сравнению со всякой другой прямой, отличающейся от прямой (15.14). Аналогично рассматривается сумма квадратов отклонений

$$\sum_{i=1}^{n}[x_i - x(y_i)]^2,$$

где $x(y_i)$ находится по уравнению (15.15).

На этом свойстве эмпирических прямых регрессии основан метод нахождения уравнений (15.14) и (15.15) для этих прямых, называемый **методом наименьших квадратов**, смысл которого заключается в следующем. Пусть, например, пары значений (x_i, y_i) наблюдались только по одному разу каждая. Подберем параметры k и b искомой прямой регрессии $y = kx + b$ так, чтобы функция

$$F(k, b) = \sum_{i=1}^{n}[y_i - (kx_i + b)]^2$$

была минимальной. Параметры k и b находятся из системы уравнений

$$\frac{\partial F}{\partial k} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0.$$

Если же каждому x_i соответствует несколько наблюдаемых значений y_{ij}, то в правой части выражения для $F(k, b)$ вместо y_i должно стоять условное среднее $\bar{y}(x_i)$. Аналогично находится эмпирическое уравнение (15.15). Если регрессии Y на X и X на Y отличаются от линейных, то уравнения (15.14) и (15.15), полученные методом наименьших квадратов, являются линейными приближениями истинных уравнений регрессии. Если эмпирический коэффициент корреляции r, являющийся оценкой коэффициента корреляции r_{XY} генеральной совокупности, отличен от нуля, то на основании этого в общем случае нельзя делать вывод, что $r_{XY} \neq 0$. Следовательно, возникает необходимость проверки гипотезы о значимости (существенности) эмпирического коэффициента корреляции, т. е. гипотезы о некоррелированности величин X и Y (см. 15.2.8.9).

Если значения признаков X и Y заданы в виде равноотстоящих вариант, то вычисления удобнее вести с использованием условных вариант:

$$u_i = \frac{1}{h}(x_i - C_1), \quad v_j = \frac{1}{h}(y_j - C_2),$$

где C_1, C_2 — варианты, расположенные примерно в середине вариационных рядов; h_1, h_2 — шаги вариант X и Y.

В более сложных случаях графиком регрессии может быть некоторая кривая линия (**криволинейная регрессия**).

Пример 56. Найти эмпирическое уравнение прямой линии регрессии Y на X по данным **корреляционной таблицы**:

y_j \ x_i	1	2	4	5	$n(y_j)$
3	10	0	10	0	20
6	5	0	0	5	10
8	0	4	16	0	20
$n(x_i)$	15	4	26	5	$n = 50$

В этой таблице приведены данные о выборке (объема $n = 50$) пар наблюдаемых значений системы признаков (X, Y). В первой строке таблицы приведены значения x_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ признака X, в первом столбце — значения y_j $(j = 1, 2, 3)$ признака Y. На пересечении строк и столбцов находятся частоты n_{ij} пар признаков. Например, пара чисел $(x_4 = 5;\ y_2 = 6)$ наблюдалась $n_{42} = 5$ раз. Пара $(2; 3)$ не наблюдалась ни разу $(n_{21} = 0)$. В шестом столбце записаны суммы частот $n(y_j)$ каждого из y_j, наблюдавшегося совместно с различными значениями X, например, $y_2 = 6$ наблюдалось 10 раз. В пятой строке указаны суммы частот $n(x_i)$ каждого x_i, наблюдавшегося совместно с различными значениями Y, например, $x_3 = 4$ наблюдалось 26 раз. При этом $\sum\limits_i n(x_i) = \sum\limits_j n(y_j) = n = 50$.

Решение. Найдем эмпирические параметры:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_i x_i = \frac{1}{n}\sum_k n(x_k)x_k = \frac{1}{50}(15\cdot 1 + 4\cdot 2 + 26\cdot 4 + 5\cdot 5) = 3{,}04;$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n}\sum_j y_j = \frac{1}{n}\sum_r n(y_r)y_r = \frac{1}{50}(20\cdot 3 + 10\cdot 6 + 20\cdot 8) = 5{,}6;$$

$$s_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_i (x_i - \bar{x})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_k n(x_k)(x_k - \bar{x})^2 =$$

$$= \frac{1}{49}\left[15\cdot(1-3{,}04)^2 + 4\cdot(2-3{,}04)^2 + 26\cdot(4-3{,}04)^2 + 5\cdot(5-3{,}04)^2\right] = 2{,}26;$$

$$s_X = 1{,}50;$$

$$s_Y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_j (y_j - \bar{y})^2 = \frac{1}{n-1}\sum_r n(y_r)(y_r - \bar{y})^2 =$$

$$= \frac{1}{49}\left[20\cdot(3-5{,}6)^2 + 10\cdot(6-5{,}6)^2 + 20\cdot(8-5{,}6)^2\right] = 5{,}14;$$

$$s_Y = 2{,}27;$$

$$r = \frac{m_{XY}}{s_X s_Y} = \frac{1}{(n-1)s_X s_Y}\sum_k (x_k - \bar{x})(y_k - \bar{y}) = \frac{1}{(n-1)s_X s_Y}\sum_{i,j} n_{ij}x_i y_j - n\bar{x}\bar{y},$$

где сумму $\sum\limits_{i,j} n_{ij}x_iy_j$ можно вычислить двумя способами:

1. $$\sum_{i,j} n_{ij}x_iy_j = \sum_i x_i\Big(\sum_j n_{ij}y_j\Big) = 1\cdot(10\cdot3+5\cdot6+0\cdot8)+$$
$$+2\cdot(0\cdot3+0\cdot6+4\cdot8)+4\cdot(10\cdot3+0\cdot6+16\cdot8)+5\cdot(0\cdot3+5\cdot6+0\cdot8)=906;$$

2. $$\sum_{i,j} n_{ij}x_iy_j = \sum_j y_j\Big(\sum_i n_{ij}x_i\Big) = 3\cdot(10\cdot1+0\cdot2+10\cdot4+0\cdot5)+$$
$$+6\cdot(5\cdot1+0\cdot2+0\cdot4+5\cdot5)+8\cdot(0\cdot1+4\cdot2+16\cdot4+0\cdot5)=906.$$

Следовательно,
$$r=\frac{906-50\cdot3{,}04\cdot5{,}6}{49\cdot1{,}50\cdot2{,}27}=0{,}33.$$

Величина $rs_Y/s_X = 0{,}33\cdot2{,}27/1{,}50=0{,}50$.

Уравнение эмпирической прямой регрессии Y на X:
$$y=5{,}6+0{,}50\cdot(x-3{,}04)=0{,}50x+4{,}08.$$

Аналогично находится уравнение эмпирической прямой регрессии X на Y. ▷

15.2.8. Проверка статистических гипотез

15.2.8.1. Основные понятия

Статистической гипотезой называется предположение о неизвестных параметрах распределений заданного вида или о виде неизвестного распределения.

Пример 57.

1) Дисперсии двух нормально распределенных генеральных совокупностей равны между собой,
2) генеральная совокупность имеет геометрическое распределение признака X.

Здесь в первой гипотезе сделано предположение о параметрах известных распределений, а во второй — о виде неизвестного распределения.

Совместно с предложенной (проверяемой) гипотезой H_0, которую называют **нулевой (основной)**, рассматривают также гипотезу H_1, противоречащую основной и называемую **конкурирующей (альтернативной)**. Если гипотезу H_0 отвергают, то следует принять гипотезу H_1, и наоборот.

Пример 58. Если гипотеза H_0 состоит в предположении равенства $\sigma_1^2=\sigma_2^2$ дисперсий двух нормальных распределений, то гипотеза H_1 может предполагать, например, что $\sigma_1^2\neq\sigma_2^2$. Запись:
$$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2;\quad H_1:\sigma_1^2\neq\sigma_2^2.$$

Гипотеза называется **простой**, если она однозначно определяет распределение. В противном случае она называется **сложной**. Сложная гипотеза состоит из конечного или бесконечного множества простых гипотез.

Пример 59. Гипотеза о том, что параметр распределения Пуассона $a = 2$ — простая, так как распределение Пуассона определяется только одним параметром. Гипотеза $H_0 : a > 2$ является сложной.

Пусть дана некоторая простая выборка (упорядоченный набор чисел) $x_1, x_2, \dots, x_n$ объема n из генеральной совокупности. Правило, позволяющее принять или отклонить данную гипотезу на основании простой выборки, называется **статистическим критерием**. Статистический критерий не доказывает правильность или неправильность гипотезы, а устанавливает лишь ее соответствие или несоответствие с данными наблюдений на принятом уровне значимости. **Статистикой критерия** называется случайная величина $T = f(X_1, X_2, \dots, X_n)$ — подходящим образом подобранная применительно к данной задаче функция математической выборки (см. 15.2.1), которая служит для проверки гипотезы. Конкретное числовое значение $t = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ статистики T, найденное по каждой простой выборке, называется **частным** (**наблюдаемым**) значением статистики. Множество всех возможных значений статистики T разбивают на два непересекающихся подмножества: **критическую область** и область **принятия гипотезы**. Множество значений статистики T, при которых нулевую гипотезу отклоняют, называется **критической областью**. Множество значений T, при которых нулевую гипотезу принимают, называется **областью принятия гипотезы**.

Последовательность проверки гипотезы состоит в следующем: в зависимости от специфики конкретной задачи осуществляется одна или несколько простых выборок, по которым вычисляется частное значение t статистики T критерия. Если t принадлежит критической области, то гипотезу H_0 отклоняют. Если t принадлежит области принятия гипотезы H_0, то ее принимают. Каждое возможное значение случайной величины T определяется одним числом t, следовательно, эти значения можно изобразить точками на числовой оси Ot. **Критической точкой** (**критическим значением**) называется точка t_0, отделяющая критическую область от области принятия гипотезы. Критические области могут быть следующего вида:

1) $t > t_0 > 0$ (**правосторонняя область**),
2) $t < t_0 < 0$ (**левосторонняя область**),
3) $t < t_1$ или $t > t_2$, где $t_1 < t_2$ (**двухсторонняя область**, определяемая двумя критическими точками t_1 и t_2).

Для нахождения критической области задают **уровень значимости** (**вероятность ошибки**) α, являющийся достаточно малым числом. Величина $1 - \alpha$ называется **надежностью** (**доверительной вероятностью**). Затем ищут критические точки (одну или две) такие, что если нулевая гипотеза верна, то вероятности попадания значения случайной величины T в соответствующие критические области равны α:

1) для правосторонней области $P(T > t_0) = \alpha$,
2) для левосторонней области $P(T < t_0) = \alpha$,

3) для двухсторонней области $P(T < t_1) + P(T > t_2) = \alpha$.

В частности, для двухсторонней симметричной области ($t_2 = -t_1 = t_0 > 0$):

$$P(T > t_0) = \frac{\alpha}{2}.$$

Если наблюдаемое значение t статистики T попадает в критическую область, то от гипотезы H_0 отказываются. Однако значение t может попасть в критическую область не только в случае ложности гипотезы H_0, но и по другим причинам (например, из-за недостаточного объема выборки). Чем меньше α, тем меньше вероятность совершения **ошибки первого рода** (при которой отвергают правильную гипотезу H_0). Вероятность совершения ошибки первого рода равна α. **Ошибка второго рода** заключается в том, что не отвергается неправильная гипотеза.

Если же значение t находится в области принятия гипотезы H_0, то можно только заключить, что нет оснований отвергать эту гипотезу. Гипотеза принимается при этом с надежностью вывода, равной $1 - \alpha$.

Принятие гипотезы или отказ от нее не являются ее логическим доказательством или опровержением. Здесь возможны четыре случая:

1. Гипотеза H_0 верна и принимается.
2. Гипотеза H_0 неверна и отвергается.
3. Гипотеза H_0 верна, но отвергается (**ошибка первого рода**).
4. Гипотеза H_0 неверна, но принимается (**ошибка второго рода**).

Мощностью статистического критерия называется вероятность того, что значение t величины T принадлежит критической области при условии правильности конкурирующей гипотезы H_1. Мощность критерия равна, таким образом, вероятности того, что будет отвергнута нулевая гипотеза при условии правильности конкурирующей гипотезы. Мощность критерия равна $1 - \beta$, где β — вероятность ошибки второго рода.

При заданном уровне значимости α критическая область определяется неоднозначно. Критическую область строят так, чтобы при заданном значении α вероятность β была минимальной, т. е. чтобы мощность критерия была максимальной.

Для одновременного уменьшения вероятностей ошибок первого и второго рода следует увеличить объем выборки. Ниже в 15.2.8.2–15.2.8.9 рассматриваются некоторые, наиболее часто применяемые статистические критерии.

15.2.8.2. Сравнение дисперсий двух нормально распределенных генеральных совокупностей. Критерий F

Пусть необходимо проверить гипотезу о равенстве двух генеральных дисперсий $H_0 : D(X) = D(Y)$ при условии, что X и Y распределены нормально. Из обеих генеральных совокупностей производятся независимые выборки объема n_1 и n_2 соответственно, по которым найдены эмпирические исправленные дисперсии s_X^2 и s_Y^2 (см. 15.2.4.1).

1. Для проверки гипотезы $H_0 : D(X) = D(Y)$ при заданном уровне значимости α и конкурирующей гипотезе $H_1 : D(X) > D(Y)$ находят наблюдаемое значение

$$f = \frac{s_X^2}{s_Y^2} \quad \text{или} \quad f = \frac{s_Y^2}{s_X^2} \tag{15.16}$$

статистики (случайной величины) F, равное **отношению большего из чисел** s_X^2, s_Y^2 **к меньшему**. Величина F имеет так называемое **распределение Фишера** (или F**-распределение**) со степенями свободы $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$, где n_1 — объем выборки, дающий большее значение исправленной дисперсии, так как необходимо выполнение условий $M(S_X^2) = D(X)$, $M(S_Y^2) = D(Y)$, где S_X^2, S_Y^2 — исправленные выборочные дисперсии (случайные величины). Затем по табл. 15.7 (критические точки распределения F) для заданного α и числам $k_1 = n_1 - 1$, $k_2 = n_2 - 1$ (k_1 — относится к большей исправленной дисперсии) находят критическую точку $f_0(\alpha, k_1, k_2)$. Если наблюдаемое значение f больше, чем f_0, то гипотезу H_0 отклоняют с вероятностью ошибки α. Если $f < f_0$, то нет оснований отклонять гипотезу H_0. Здесь критическая область — правосторонняя.

2. Если конкурирующая гипотеза имеет вид $H_1 : D(X) \neq D(Y)$, то критическую точку $f_0(\alpha/2; k_1, k_2)$ ищут в табл. 15.7 по уровню значимости $\alpha/2$ (т. е. вдвое меньше заданного) и числам степеней свободы k_1 и k_2. Критическая область здесь — двухсторонняя. Если $f > f_0$, то H_0 отклоняют. Если $f < f_0$, то нет оснований отклонять H_0.

Пример 60. Даны две независимые выборки ($n_1 = 10$, $n_2 = 15$) из нормальных генеральных совокупностей X и Y, по которым вычислены исправленные выборочные дисперсии $s_X^2 = 1{,}52$ и $s_Y^2 = 0{,}85$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ требуется проверить гипотезу $H_0 : D(X) = D(Y)$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : D(X) \neq D(Y)$.

Решение. Наблюдаемое значение статистики F (отношение большей дисперсии к меньшей) $f = 1{,}52/0{,}85 = 1{,}79$. Для отыскания (правой) критической точки по табл. 15.7 берем уровень значимости, равный $0{,}1/2 = 0{,}05$, а также $k_1 = n_1 - 1 = 9$, $k_2 = n_2 - 1 = 14$:

$$f_0(0{,}05; 9; 14) = 2{,}65.$$

Поскольку $f < f_0$ ($1{,}79 < 2{,}65$) — нет оснований отклонять гипотезу: $D(X) = D(Y)$. Различие исправленных дисперсий s_X^2, s_Y^2 здесь может быть объяснено случайными причинами, т. е. **не является значимым**. ▷

15.2.8.3. Сравнение исправленной эмпирической дисперсии с предполагаемой генеральной дисперсией нормальной совокупности. Критерий хи-квадрат

Пусть из нормально распределенной генеральной совокупности с неизвестной дисперсией σ^2 извлечена выборка объема n и по ней вычислена исправленная эмпирическая дисперсия s^2 (см. 15.2.4.1).

1. При заданном уровне значимости α требуется проверить нулевую гипотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2$ о равенстве неизвестной дисперсии предполагаемому значению σ_0^2, при конкурирующей гипотезе $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2$. Для этого надо вычислить наблюдаемое значение $\widetilde{\chi}^2$ статистики

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S_B^2}{\sigma_0^2},$$

являющейся случайной величиной, имеющей так называемое **распределение хи-квадрат** с $k = n - 1$ степенями свободы, так как необходимо выполнение условия $M(S_B^2) = \sigma^2$. Затем по табл. 15.5 (критические точки распределения χ^2) по заданной величине α и числу $k = n - 1$ находят критическую точку $\widetilde{\chi}_0^2(\alpha; k)$. Если $\widetilde{\chi}^2 > \widetilde{\chi}_0^2$, то гипотезу H_0 отклоняют. Если $\widetilde{\chi}^2 < \widetilde{\chi}_0^2$, то нет оснований отменять гипотезу H_0.

2. В случае конкурирующей гипотезы $H_1 : \sigma^2 < \sigma_0^2$ критическое значение равно $\widetilde{\chi}_0^2(1 - \alpha; k)$. При этом, если $\widetilde{\chi}^2 > \widetilde{\chi}_0^2$, то нет оснований отвергать гипотезу H_0. Если $\widetilde{\chi}^2 < \widetilde{\chi}_0^2$, то гипотезу H_0 отвергают.

3. При конкурирующей гипотезе $H_1 : \sigma^2 \neq \sigma_0^2$ находят левую $\widetilde{\chi}_1^2(1-\alpha/2; k)$ и правую $\widetilde{\chi}_2^2(\alpha/2; k)$ критические точки. Если $\widetilde{\chi}_1^2 < \widetilde{\chi}^2 < \widetilde{\chi}_2^2$, то нет оснований отвергать гипотезу H_0. Если же $\widetilde{\chi}^2 < \widetilde{\chi}_1^2$ или $\widetilde{\chi}^2 > \widetilde{\chi}_2^2$, то нулевую гипотезу отвергают.

4. Если $k = n - 1 > 30$, то критическую точку можно найти по приближенной формуле

$$\widetilde{\chi}_0^2(\alpha, k) \approx k\left[1 - \frac{2}{9k} + z_\alpha\sqrt{\frac{2}{9k}}\right]^3,$$

где z_α находят из равенства $\Phi(z_\alpha) = \dfrac{1}{2} - \alpha$ (см. табл. 15.2).

Пример 61. Из нормальной генеральной совокупности извлечена выборка ($n = 25$, $s^2 = 11{,}3$). При уровне значимости $\alpha = 0{,}025$ проверить гипотезу $H_0 : \sigma^2 = \sigma_0^2 = 10$, если конкурирующая гипотеза $H_1 : \sigma^2 > \sigma_0^2 = 10$.

Решение. Критическую точку находим по табл. 15.5 по значению $\alpha = 0{,}025$ и $k = n - 1 = 25 - 1 = 24$, имеем $\widetilde{\chi}_0^2(0{,}025; 24) = 39{,}4$. Наблюдаемое значение статистики

$$\widetilde{\chi}^2 = \frac{(n-1)s^2}{\sigma_0^2} = \frac{(25-1)\cdot 11{,}3}{10} = 27{,}12.$$

Поскольку $\widetilde{\chi}^2 < \widetilde{\chi}_0^2$ ($27{,}12 < 39{,}4$), то нет оснований отклонять гипотезу о равенстве $\sigma^2 = 10$. Различие между $s^2 = 11{,}3$ и $\sigma_0^2 = 10$ здесь может быть объяснено случайными причинами, т. е. не является значи м. ▷

15.2.8.4. Сравнение генеральных средних двух нормальных совокупностей с неизвестными, но равными дисперсиями. Критерий Стьюдента

Пусть необходимо проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных средних (математических ожиданий) $H_0 : M(X) = M(Y)$ при условии, что X и Y распределены нормально с неизвестными, но равными дисперсиями $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Если нет оснований в истинности предположения $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$, то необходимо сначала его проверить (см. 15.2.8.2). Пусть из генеральных совокупностей X, Y извлечены независимые случайные выборки объемов n_1, n_2 соответственно, по которым найдены эмпирические средние $\bar{x}, \bar{y}$ и исправленные эмпирические дисперсии s_X^2, s_Y^2.

1. Для проверки нулевой гипотезы $H_0 : M(X) = M(Y)$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : M(X) \neq M(Y)$ вычисляют наблюдаемое значение t статистики

$$T = \frac{\overline{X}_B - \overline{Y}_B}{\sqrt{(n_1 - 1)S_X^2 + (n_2 - 1)S_Y^2}} \sqrt{\frac{n_1 n_2 (n_1 + n_2 - 2)}{n_1 + n_2}}, \tag{15.17}$$

где S_X^2, S_Y^2 — исправленные выборочные дисперсии, являющейся случайной величиной, имеющей **распределение Стьюдента** с числом степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$, так как на величины $\overline{X}_B$ и $\overline{Y}_B$ наложены два условия:

$$M(\overline{X}_B) = M(\overline{X}_B), \quad \sigma(\overline{X}_B) = \sigma(\overline{Y}_B).$$

Затем по табл. 15.6 (Критические точки распределения Стьюдента) для заданного уровня значимости α (находящегося в верхней строке таблицы) и числа степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 2$ ищут критическую точку $t_0(\alpha; k)$, являющуюся правой границей двухсторонней критической области. Если наблюдаемое значение t удовлетворяет условию $|t| > t_0(\alpha; k)$, то гипотезу H_0 отвергают; если $|t| < t_0(\alpha; k)$, то нет оснований отвергать гипотезу H_0.

2. В случае конкурирующей гипотезы $H_1 : M(X) > M(Y)$ критическую точку $t_0(\alpha; k)$ ищут по заданному значению α (находящемуся в нижней строке табл. 15.6) и числу степеней свободы $k = n_1 + n_2 - 1$. Если наблюдаемое значение $t > t_0(\alpha; k)$, то гипотезу H_0 отвергают. Если $t < t_0(\alpha; k)$, то нет оснований отвергать гипотезу H_0.

3. При конкурирующей гипотезе $H_1 : M(X) < M(Y)$ критическая точка t_0^* находится из равенства $t_0^* = -t_0(\alpha; k)$, где величина $t_0(\alpha; k)$ ищется по значениям α и k по схеме п. 2. Если наблюдаемое значение $t < t_0^*$, то гипотезу H_0 отвергают. Если $t > t_0^*$, то нет оснований отвергать гипотезу H_0.

Примечание 1. Если объемы выборок малы ($n_1 < 30$, $n_2 < 30$), то по этим выборкам нельзя получить достаточно точные оценки генеральных дисперсий. При отсутствии уверенности (основанной на содержании задачи) в равенстве $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ необходимо проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий при помощи критерия F (см. 15.2.8.2).

Примечание 2. Случайная величина T не очень чувствительна к условию нормальности распределения величин X и Y. Ее можно применять и в случае, когда статистические распределения обеих выборок имеют по одной вершине и достаточно симметричны, т. е. похожи на график функции $f(x)$ нормального распределения.

Пример 62. Из двух нормальных генеральных совокупностей X и Y извлечены независимые выборки объема $n_1 = 7$, $n_2 = 9$ соответственно, по которым вычислены эмпирические средние и исправленные дисперсии: $\bar{x} = 5{,}4$; $\bar{y} = 4{,}9$; $s_X^2 = 0{,}75$; $s_Y^2 = 0{,}45$. При уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить гипотезу $H_0 : M(X) = M(Y)$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : M(X) \neq M(Y)$.

Решение. Исправленные эмпирические дисперсии различаются, однако, в связи с малостью чисел n_1 и n_2, нельзя сделать заключения об оценках генеральных дисперсий. Проверим гипотезу $\widetilde{H}_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$ при помощи критерия F. Имеем $f = 0{,}75/0{,}45 = 1{,}67$. Поскольку $s_X^2 > s_Y^2$, примем следующую конкурирующую гипотезу $\widetilde{H}_1 : \sigma_X^2 > \sigma_Y^2$. По значениям величин $\alpha = 0{,}01$; $k_1 = 7 - 1 = 6$, $k_2 = 9 - 1 = 8$ из табл. 15.7 находим критическую точку $f_0(0{,}01; 6; 8) = 6{,}37$. Поскольку $f < f_0$ $(1{,}67 < 6{,}37)$, нет оснований для отклонения гипотезы $\widetilde{H}_0 : \sigma_X^2 = \sigma_Y^2$. Учитывая теперь равенство генеральных дисперсий, переходим к рассмотрению гипотезы $H_0 : M(X) = M(Y)$. Для нахождения наблюдаемого значения t величины T подставим в (15.17) вместо $\overline{X}_B$, $\overline{Y}_B$, S_X^2, S_Y^2 данные значения $\bar{x}$, $\bar{y}$, s_X^2, s_Y^2, получим

$$t = \frac{5{,}4 - 4{,}9}{\sqrt{6 \cdot 0{,}75 + 8 \cdot 0{,}45}} \sqrt{\frac{7 \cdot 9(7 + 9 - 2)}{7 + 9}} = 1{,}34.$$

Согласно п. 1 для двухсторонней критической области по значениям $\alpha = 0{,}01$ и $k = n_1 + n_2 - 2 = 7 + 9 - 2 = 14$ находим критическую точку $t_0(\alpha; k) = t_0(0{,}01; 14) = 2{,}98$. Поскольку $t < t_0$ $(1{,}34 < 2{,}98)$, то нет оснований отвергать нулевую гипотезу H_0 о равенстве генеральных средних $M(X) = M(Y)$. Различие $\bar{x}$ и $\bar{y}$ незначимо (случайно). ▷

15.2.8.5. Сравнение генеральных дисперсий нескольких нормальных совокупностей. Критерий Кочрена

Пусть из нормально распределенных генеральных совокупностей $X_1, X_2, \ldots, X_l$ $(l \geqslant 2)$ произведено l независимых простых выборок одинакового объема n, по которым вычислены исправленные эмпирические дисперсии $s_1^2, s_2^2, \ldots, s_l^2$ (см. 15.2.4.1). При заданном уровне значимости α необходимо проверить нулевую гипотезу о равенстве генеральных дисперсий $H_0 : D(X_1) = D(X_2) = \ldots = D(X_l)$. Для проверки гипотезы H_0 используется случайная величина (**статистика критерия Кочрена**)

$$C = \frac{S_{\max}^2}{S_1^2 + S_2^2 + \ldots + S_l^2}, \qquad (15.18)$$

где $S^2_{\max}$ — максимальная исправленная выборочная дисперсия. Каждая из выборочных дисперсий (являющихся случайными величинами) S_i^2 $(i = 1, \dots, l)$ имеет $k = n - 1$ степеней свободы, так как необходимо выполнение условий $M(S_i^2) = D(X_i)$ $(i = 1, \dots, l)$.

По заданным значениям уровня значимости α, а также $k = n - 1$ и l при помощи табл. 15.8 (Критические точки распределения Кочрена) находят критическую точку $c_0(\alpha; k, l)$. Затем по формуле (15.18) вычисляют наблюдаемое значение c случайной величины C. Если $c > c_0$, то гипотезу H_0 отклоняют. Если $c < c_0$, то нет оснований отклонять гипотезу. В случае справедливости нулевой гипотезы **в качестве оценки генеральной дисперсии каждой совокупности берут среднее арифметическое исправленных эмпирических дисперсий.**

Пример 63. Дано $l = 5$ независимых выборок одинакового объема $n = 37$ из нормальных генеральных совокупностей. Эмпирические дисперсии s^2 равны: 0,31; 0,39; 0,28; 0,37; 0,38. При уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить гипотезу о равенстве генеральных дисперсий.

Решение. Наблюдаемое значение статистики равно, согласно (15.18),

$$c = \frac{0{,}39}{0{,}31 + 0{,}39 + 0{,}28 + 0{,}37 + 0{,}38} = 0{,}225,$$

где $s^2_{\max} = 0{,}39$. По значениям $\alpha = 0{,}01$; $k = 37 - 1 = 36$; $l = 5$ при помощи табл. 15.8 находим $c_0(0{,}01; 36; 5) = 0{,}3351$. Так как $c < c_0$ $(0{,}225 < 0{,}3351)$, то нет оснований отклонять гипотезу H_0, т. е. различие эмпирических дисперсий незначимо (случайно). Оценка генеральной дисперсии

$$\sigma^2 = \frac{1}{5}(0{,}31 + 0{,}39 + 0{,}28 + 0{,}37 + 0{,}38) = 0{,}35. \qquad \triangleright$$

15.2.8.6. Критерий W Вилкоксона или Манна—Уитни

Критерий W Вилкоксона или Манна—Уитни применяется для проверки **гипотезы о принадлежности двух выборок к одной и той же генеральной совокупности**. Нулевая гипотеза $H_0 : F_1(x) = F_2(y)$ состоит в равенстве неизвестных функций распределения непрерывных случайных величин (каких-либо предположений о виде распределений X и Y не делается) и проверяется при помощи одной выборки $x_1, x_2, \dots, x_{n_1}$ из X и одной выборки $y_1, y_2, \dots, y_{n_2}$ из Y. Далее предполагается, что $n_1 \leqslant n_2$. Этого можно всегда достичь перестановкой выборок местами. В качестве конкурирующей гипотезы возьмем $H_1 : F_1(x) \neq F_2(x)$. Для проверки нулевой гипотезы при заданном уровне значимости α (если $n_1 \leqslant 25$, $n_2 \leqslant 25$) располагают варианты обеих выборок в возрастающем порядке в одном и том же вариационном ряду, а затем находят в этом ряду сумму порядковых номеров w всех вариант первой выборки, которая и является наблюдаемым значением **статистики W критерия Вилкоксона (Манна—Уитни)**. Далее по табл. 15.9 (Критические точки распределения W) ищут:

1) нижнюю критическую точку $w_н(Q, n_1, n_2)$, где $Q = \alpha/2$;

2) верхнюю критическую точку $w_в = (n_1 + n_2 + 1)n_1 - w_н$.

Если $w_н < w < w_в$, то нет оснований отклонять гипотезу H_0. Если $w < w_н$ или $w > w_в$, то гипотезу H_0 отклоняют.

Если в какой-либо одной выборке имеется несколько одинаковых вариант, то в общем вариационном ряде их нумеруют как разные варианты. При совпадении вариант разных выборок таким вариантам приписывают одинаковый номер, равный среднему арифметическому номеров этих вариант в общем вариационном ряде. Если объем хотя бы одной выборки больше 25, то нижняя критическая точка $w_н(Q, n_1, n_2)$ равна **целой части** числа

$$\frac{(n_1 + n_2 + 1)n_1 - 1}{2} - z_0\sqrt{\frac{n_1 n_2(n_1 + n_2 + 1)}{12}},$$

где $Q = \alpha/2$, z_0 находят по таблице значений функции Лапласа $\Phi(x)$ (табл. 15.2) из равенства $\Phi(z_0) = \frac{1}{2}(1 - \alpha)$.

Примечание. Целой частью $[a]$ числа a называется наибольшее целое число, не превосходящее a. Например, $[4{,}7] = 4$; $[-3{,}1] = -4$. **Дробная часть** $\{a\}$ числа a есть разность $a - [a]$. Причем $0 < \{a\} < 1$.

Пример 64. Даны две выборки из генеральных совокупностей X и Y с объемами $n_1 = 6$, $n_2 = 7$ $(n_1 < n_2)$:

x_i	1	2	2	4	7	8	—
y_i	5	6	9	10	11	13	15

При уровне значимости $\alpha = 0{,}1$ проверить гипотезу $H_0 : F_1(x) = F_2(y)$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : F_1(x) \neq F_2(x)$.

<u>Решение</u>. Расположим варианты обеих выборок в возрастающем порядке в виде одного ряда (варианты x_i подчеркнуты:

номера вариант	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
варианты	<u>1</u>	<u>2</u>	<u>2</u>	<u>4</u>	5	6	<u>7</u>	<u>8</u>	9	10	11	13	15

Сумма порядковых номеров подчеркнутых вариант первой выборки равна

$$w = 1 + 2 + 3 + 4 + 7 + 8 = 25.$$

По значениям $Q = \alpha/2 = 0{,}05$; $n_1 = 6$; $n_2 = 7$ при помощи табл. 15.9 находим:

$$w_н(0{,}05; 6; 7) = 30.$$

Верхняя критическая точка

$$w_в = (n_1 + n_2 + 1)n_1 - w_н = (6 + 7 + 1) \cdot 6 - 30 = 54.$$

Так как $w < w_н$ $(25 < 30)$, то гипотезу H_0 отклоняем, т. е. выборки не принадлежат к одной и той же генеральной совокупности. ▷

15.2.8.7. Критерий согласия хи-квадрат Пирсона

Критерии согласия служат для проверки гипотез о том, что неизвестный закон распределения случайной величины X имеет определенный вид $F_0(x)$. Одним из таких, наиболее часто используемых критериев, является **критерий хи-квадрат Пирсона**, позволяющий, в частности, проверить гипотезу о нормальном виде закона распределения. Критерий Пирсона применим и для других гипотетических распределений как непрерывных, так и дискретных случайных величин.

1. Проверка гипотезы о нормальности распределения непрерывной случайной величины при помощи критерия Пирсона. Пусть эмпирическое распределение непрерывной случайной величины X задано в виде конечного множества промежутков Λ_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ обычно одинаковой длины и соответствующих им сумм m_i частот n_j вариант выборки x_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$, попавших в эти промежутки (т. е. m_i равно числу вариант x_j в промежутке Λ_i):

Λ_i	$\Lambda_1 = [b_0; b_1)$	$\Lambda_2 = [b_1; b_2)$	$\ldots$	$\Lambda_r = [b_{r-1}; b_r]$
m_i	m_1	m_2	$\ldots$	m_r

Примечание 1. Иногда частоты вариант, попавших на границы промежутков $b_1, b_2, \ldots, b_{r-1}$, приписываются пополам каждому из соседних промежутков (так что возможны дробные значения частот).

Объем выборки равен $m_1 + m_2 + \ldots + m_r = n$.

Для того чтобы при помощи критерия Пирсона при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу H_0 о нормальности распределения генеральной совокупности, следует:

1. Найти середины c_i всех промежутков Λ_i:

$$c_i = \frac{1}{2}(b_{i-1} + b_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, r)$$

   и записать последовательность вариант c_i вместе с их частотами, которые полагают равными m_i:

$$\begin{matrix} c_1 & c_2 & \ldots & c_r \\ m_1 & m_2 & \ldots & m_r. \end{matrix}$$

2. Для вариационного ряда c_i $(i = 1, 2, \ldots, r)$ найти эмпирическое среднее $\bar{c}$ и эмпирическое среднеквадратическое отклонение $\sigma(c) = \sqrt{D(c)}$, тогда для исходного вариационного ряда x_j приближенно $\bar{x} \approx \bar{c}$; $\sigma(x) \approx \sigma(c)$.
3. Найти теоретические вероятности $p_i = \Phi(z_i) - \Phi(z_{i-1})$, $i = 1, 2, \ldots, r$, попадания случайной величины X в промежутки Λ_i при условии принятия гипотезы о нормальности распределения, где $\Phi(z)$ — функция Лапласа

(см. табл. 15.2); $z_j = (b_j - \bar{c})/\sigma(c)$; $j = 0, 1, 2, \ldots, r$; при этом наименьшее значение z_j (т. е. z_0) полагают равным $-\infty$, а наибольшее (т. е. z_r) полагают равным $+\infty$, так что

$$p_1 = P(X < b_1) = \Phi(z_1) - \Phi(-\infty) = \Phi(z_1) + 0{,}5,$$
$$p_r = P(X > b_{r-1}) = \Phi(+\infty) - \Phi(z_{r-1}) = 0{,}5 - \Phi(z_{r-1}),$$

при этом $\sum\limits_{i=1}^{r} p_i = 1$.

4. Вычислить теоретические частоты m'_i (т. е. математические ожидания частот) $m'_i = np_i$, где n — объем выборки.
5. Найти наблюдаемое значение $\widetilde{\chi}^2$ **хи-квадрат статистики Пирсона**

$$\widetilde{\chi}^2 = \sum_{i=1}^{r} \frac{(m_i - m'_i)^2}{m'_i} \equiv \sum_{i=1}^{r} \frac{m_i^2}{m'_i} - n, \tag{15.19}$$

где $\sum\limits_i m_i = \sum\limits_i m'_i = n$.

6. По табл. 15.5 по заданному значению α и числу степеней свободы $k = r-3$ найти критическую точку $\widetilde{\chi}_0^2(\alpha, k)$ правосторонней критической области. Если $\widetilde{\chi}^2 > \widetilde{\chi}_0^2$, то нулевую гипотезу отклоняют. Если $\widetilde{\chi}^2 < \widetilde{\chi}_0^2$, то нет оснований отклонять гипотезу.

Примечание 2. Объем выборки должен быть достаточно большим ($n \geqslant 50$), а все частоты m_i должны удовлетворять неравенствам $m_i \geqslant 5$. Промежутки, для которых $m_i < 5$, следует укрупнять, объединяя их с соседними промежутками, складывая при этом частоты вариант. Число степеней свободы находится по формуле $k = r - 3$, где в качестве r берется число промежутков, получившихся в результате объединения.

Примечание 3. Так как объем выборки достаточно велик ($n \geqslant 50$), различием эмпирических дисперсий D и s^2 пренебрегается, т. е. $D \approx s^2$.

Пример 65. При уровне значимости $\alpha = 0{,}05$, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о нормальности распределения непрерывной случайной величины X. Эмпирическое распределение выборки из X объема $n = 100$ задано в виде промежутков вариант и их суммарных частот m_i в таблице:

номер промежутка	промежуток		суммарная частота m_i
	от b_{i-1}	до b_i	
1	−5	0	6
2	0	5	7
3	5	10	16
4	10	15	43
5	15	20	17
6	20	25	6
7	25	30	5

Решение.

1. Найдем середины промежутков $c_i = \frac{1}{2}(b_{i-1} + b_i)$, например, $c_1 = \frac{1}{2} \cdot (-5+0) = -2{,}5$ и запишем варианты c_i с их частотами m_i:

c_i	−2,5	2,5	7,5	12,5	17,5	22,5	27,5
m_i	6	7	16	43	17	6	5

2. $\bar{c} = \frac{1}{n} \sum c_i m_i = 12{,}30$; $\sigma^2(c) = \frac{1}{n} \sum (c_i - \bar{c})^2 m_i = 49{,}50$; $\sigma(c) = \sqrt{49{,}50} = 7{,}00$.
   Для вариант x_j принимаем приближенно: $\bar{x} \approx \bar{c} = 12{,}30$; $\sigma(x) \approx \sigma(c) = 7{,}00$.
3. Находим $z_j = \dfrac{b_j - \bar{c}}{\sigma(c)}$:

$$z_1 = \frac{0 - 12{,}30}{7{,}00} = -1{,}76; \quad z_2 = -1{,}04; \quad z_3 = -0{,}33;$$

$$z_4 = 0{,}38; \quad z_5 = 1{,}1; \quad z_6 = 1{,}81.$$

Вероятности p_i находим по табл. 15.2:

$$p_1 = \Phi(z_1) - \Phi(-\infty) = \Phi(-1{,}76) + 0{,}5 = -0{,}4608 + 0{,}5 = 0{,}0392;$$
$$p_2 = -0{,}3508 + 0{,}4608 = 0{,}11;$$
$$p_3 = 0{,}2215;$$
$$p_4 = 0{,}2773;$$
$$p_5 = 0{,}2163;$$
$$p_6 = 0{,}1006;$$
$$p_7 = \Phi(+\infty) - \Phi(1{,}81) = 0{,}5 - 0{,}4649 = 0{,}0351.$$

Проверка: $\sum p_i = 1$.

4. Теоретические частоты $m'_i = np_i$:

$$m'_1 = 100 \cdot 0{,}0392 = 3{,}92; \quad m'_2 = 11; \quad m'_3 = 22{,}15;$$
$$m'_4 = 27{,}73; \quad m'_5 = 21{,}63; \quad m'_6 = 10{,}06; \quad m'_7 = 3{,}51.$$

Проверка: $\sum m'_i = 100$.

5. Наблюдаемое значение статистики Пирсона получим, подставляя в (15.19) значения m_i и m'_i:

$$\tilde{\chi}^2 = \sum_i \frac{(m_i - m'_i)^2}{m'_i} = 15{,}75.$$

Проверка: $\tilde{\chi}^2 = \sum_i \dfrac{m_i^2}{m'_i} - n = 15{,}75$.

6. По табл. 15.5 по значению $\alpha = 0{,}05$ и $k = r - 3 = 7 - 3 = 4$ получим критическую точку $\widetilde{\chi}_0^2(0{,}05; 4) = 9{,}5$. Поскольку $\widetilde{\chi}^2 > \widetilde{\chi}_0^2$ ($15{,}75 > 9{,}5$), то гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности отвергаем. Различие эмпирических и теоретических частот здесь значимо (т. е. не может быть объяснено случайностью). ▷

2. Общая схема применения критерия Пирсона к непрерывным случайным величинам. Пусть по выборке из генеральной совокупности X требуется с помощью критерия Пирсона при заданном уровне значимости α проверить правильность гипотезы $H_0 : F_0(x) \equiv F(x; \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s)$, где $F_0(x)$ — функция распределения непрерывной случайной величины X; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_s$ — неизвестные параметры гипотетического распределения $F_0(x)$. Например, если $F_0(x)$ — нормальное распределение, то имеются два неизвестных параметра (a и σ). Если $F_0(x)$ — показательное распределение, то неизвестен один параметр λ и т. д.

Для проверки гипотезы H_0 вначале по выборке объема n из X при помощи метода наибольшего правдоподобия (см. 15.2.4.5) находят значения оценок параметров $\beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_s^*$ и полагают, что $F_0(x) \equiv F(x; \beta_1^*, \beta_2^*, \ldots, \beta_s^*)$. Затем область возможных значений величины X разбивают на конечное число непересекающихся промежутков $\Lambda_i = [b_{i-1}; b_i)$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$ любой (не обязательно одинаковой) длины. Далее находят вероятности $p_i = P(b_{i-1} \leqslant X < b_i) = F_0(b_i) - F_0(b_{i-1})$ и теоретические частоты $m_i' = np_i$ (число выборочных значений в Λ_i равно m_i), по которым вычисляют наблюдаемое значение $\widetilde{\chi}^2$ **статистики Пирсона** по формуле (15.19). Число степеней свободы находят по формуле $k = r - s - 1$, где r — число промежутков Λ_i, s — число оцениваемых параметров функции распределения. По табл. 15.5 по заданным значениям α и k находят критическую точку $\widetilde{\chi}_0^2$. Если $\widetilde{\chi}^2 > \widetilde{\chi}_0^2$ ($\widetilde{\chi}^2 < \widetilde{\chi}_0^2$), то нулевую гипотезу H_0 отклоняют (принимают).

2а) Проверка с помощью критерия Пирсона гипотезы о равномерном распределении непрерывной случайной величины. Пусть эмпирическое распределение непрерывной случайной величины X (генеральной совокупности) задано в виде конечного множества r промежутков $\Lambda_i = [b_{i-1}; b_i]$ $(i = 1, \ldots, r)$ и соответствующих им суммарных частот m_i вариант, так что $\sum\limits_i m_i = n$ — объем выборки. Пусть требуется при заданном уровне значимости α проверить гипотезу о том, что случайная величина X распределена равномерно (см. 15.1.10.3).

Для этого следует:

1. Середины c_i всех промежутков Λ_i принять в качестве новых вариант с частотами m_i. Для вариационного ряда c_i вычислить эмпирическое среднее $\bar{c}$ и эмпирическое среднее квадратическое отклонение $\sigma(c)$.
2. Найти числовые оценки параметров a и b, являющихся концами промежутка $[a; b]$, в котором наблюдаются возможные значения величины X,

по формулам (см. пример 49):

$$a^* = \bar{x} - \sigma(c)\sqrt{3}, \quad b^* = \bar{x} + \sigma(c)\sqrt{3}.$$

3. Записать плотность вероятности предполагаемого равномерного распределения (приняв $a = a^*$, $b = b^*$):

$$f(x) = \frac{1}{b^* - a^*} \equiv C^*.$$

4. Вычислить теоретические частоты m_i':

$$m_1' = np_1 = nC^*(b_1 - a^*);$$
$$m_2' = np_2 = nC^*(b_2 - b_1);$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$m_r' = np_r = nC^*(b^* - b_{r-1}).$$

5. Найти наблюдаемое значение статистики Пирсона по формуле (15.19).
6. При заданном α и числе степеней свободы $k = r - 3$ по табл. 15.5 либо принять гипотезу, либо отклонить ее (аналогично п. 1).

2б) Проверка с помощью критерия Пирсона гипотезы о показательном распределении непрерывной случайной величины. Пусть, аналогично п. 2а, эмпирическое распределение непрерывной случайной величины X (генеральной совокупности) задано в виде конечного множества r промежутков Λ_i и соответствующих суммарных частот m_i вариант x_j. И пусть требуется при заданном уровне значимости α проверить гипотезу о том, что величина X распределена по показательному закону (см. 15.1.10.3, **3**).

Для этого следует:

1. Ввести варианты c_i с частотами m_i (аналогично п. 2а) и вычислить эмпирическое среднее $\bar{c}$.
2. В качестве числовой оценки параметра λ показательного распределения взять $\lambda^* = 1/\bar{c}$ (см. пример 47).
3. Найти вероятности попадания величины X в промежутки Λ_i; при этом всегда $b_0 = 0$, т. е. $\Lambda_1 = [0, b_1)$:

$$p_i = P(b_{i-1} \leqslant X < b_i) = F(b_i) - F(b_{i-1}) = e^{-\lambda^* b_{i-1}} - e^{\lambda^* b_i};$$
$$p_1 = e^0 - e^{-\lambda^* b_1}, \quad \dots .$$

4. Вычислить теоретические суммарные частоты $m_i' = np_i$.
5. Вычислить наблюдаемое значение статистики Пирсона по формуле (15.19).
6. При заданном α и числе степеней свободы $k = r - 2$ по табл. 15.5 принять гипотезу, либо отклонить ее (аналогично п. 1).

3. Применение критерия Пирсона к дискретным случайным величинам. Схема применения критерия Пирсона к дискретным случайным величинам аналогична общей схеме его применения к непрерывным случайным величинам (см. п. 2).

Пусть эмпирическое распределение дискретной случайной величины X задано в виде последовательности вариант выборки и соответствующих частот ($n_1 + n_2 + \ldots + n_r = n$ — объем выборки):

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_r
n_i	n_1	n_2	$\ldots$	n_r

Для того чтобы при помощи критерия Пирсона при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу о заданном виде закона распределения генеральной совокупности X, следует:

1. По данной выборке найти методом моментов или методом наибольшего правдоподобия (см. 15.2.4.4 и 15.2.4.5) значения оценок параметров, от которых зависит заданный закон распределения.
2. Найти вероятности p_i того, что случайная величина X примет значения $x_1, x_2, \ldots, x_r$, а также вычислить теоретические частоты $n'_i = np_i$ ($i = 1, 2, \ldots, r$).
3. Найти число степеней свободы по формуле $k = r - s - 1$, где r — число (групп) разных вариант выборки, s — число оцениваемых параметров закона распределения.

Примечание. При этом малые частоты ($n_i < 5$) надо предварительно объединить (сложить). Складываются также и соответствующие теоретические частоты n'_i. В каждой группе должно быть не менее 5 вариант. Варианты с объединенными частотами принимают за одну группу при подсчете числа степеней свободы.

4. Найти наблюдаемое значение $\widetilde{\chi}^2$ статистики Пирсона по формуле (15.19) для новых (объединенных) значений частот как эмпирических n_i, так и теоретических n'_i.
5. Аналогично п. 2 принять или отклонить нулевую гипотезу.

Пример 66. По данной выборке объема $n = 200$ из генеральной совокупности X:

x_i	0	1	2	3	4
n_i	119	51	23	4	3

требуется при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ проверить гипотезу о том, что величина X распределена по закону Пуассона (см. пример 46).

Решение.

1. Закон распределения Пуассона

$$P_a(X = m) = \frac{a^m}{m!}e^{-a} \quad (m = 0, 1, \ldots)$$

зависит от одного параметра a, оценка которого по методу моментов (см. 15.2.4.4) имеет вид

$$a^* = \bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots x_n) = \frac{1}{n}\sum n_i x_i =$$
$$= \frac{1}{200}(119 \cdot 0 + 51 \cdot 1 + 23 \cdot 2 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 4) = 0{,}61.$$

2. Вычислим вероятности $P_a(m)$, где $a = 0{,}61$; $m = 0, 1, 2, 3, 4$:

$$p_0 = P_a(0) = \frac{a^0}{0!}e^{-a} = e^{-0{,}61} = 0{,}5434 \quad (0! = 1);$$
$$p_1 = P_a(1) = \frac{a^1}{1!}e^{-a} = 0{,}3315;$$
$$p_2 = 0{,}1011;$$
$$p_3 = 0{,}0206;$$
$$p_4 = 0{,}0031.$$

Теоретические частоты $n'_i = np_i$: $n'_0 = 108{,}68$; $n'_1 = 66{,}3$; $n'_2 = 20{,}22$; $n'_3 = 4{,}12$; $n'_4 = 0{,}62$. Объединим малые частоты $\widetilde{n}_3 = n_3 + n_4 = 7$; $\widetilde{n}'_3 = n'_3 + n'_4 = 4{,}74$.

3. Число степеней свободы $k = r - s - 1 = 4 - 1 - 1 = 2$, где $r = 4$ — число групп вариант после объединения, $s = 1$ — число оцениваемых параметров.
4. Наблюдаемое значение статистики Пирсона:

$$\widetilde{\chi}^2 = \frac{(n_0 - n'_0)^2}{n'_0} + \frac{(n_1 - n'_1)^2}{n'_1} + \frac{(n_2 - n'_2)^2}{n'_2} + \frac{(\widetilde{n}_3 - \widetilde{n}'_3)^2}{n'_3} = 5{,}971.$$

5. По табл. 15.5 по значениям $\alpha = 0{,}01$ и $k = 2$ находим критическую точку $\widetilde{\chi}_0^2 = 9{,}2$. Так как $\widetilde{\chi}^2 < \widetilde{\chi}_0^2$ ($5{,}971 < 9{,}2$), то нет оснований отвергать гипотезу о пуассоновском распределении величины X. ▷

15.2.8.8. Сравнение генеральных средних двух нормально распределенных случайных величин, дисперсии которых известны

Пусть из двух генеральных совокупностей X и Y, распределенных нормально и имеющих известные генеральные дисперсии $D(X)$, $D(Y)$ (в общем случае разные), извлечены независимые случайные выборки достаточно больших объемов $n_1 > 30$, $n_2 > 30$ соответственно. И пусть требуется при заданном уровне значимости α и известных (вычисленных) эмпирических средних $\bar{x}$, $\bar{y}$ проверить нулевую гипотезу $H_0 : M(X) = M(Y)$ (или, что равносильно, $M(\overline{X}_B) = M(\overline{Y}_B)$) о равенстве генеральных средних (математических ожиданий) случайных величин X и Y:

1. При конкурирующей гипотезе $H_1 : M(X) \neq M(Y)$. Для этого следует найти наблюдаемое значение статистики
$$Z = \frac{\overline{X}_B - \overline{Y}_B}{\sqrt{D(\overline{X}_B - \overline{Y}_B)}} = \frac{\overline{X}_B - \overline{Y}_B}{\sqrt{\dfrac{D(X)}{n_1} + \dfrac{D(Y)}{n_2}}},$$
равное
$$z = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{D(X)}{n_1} + \dfrac{D(Y)}{n_2}}},$$
а затем по табл. 15.2 найти критическую точку z_0 из уравнения $\Phi(z_0) = \dfrac{1}{2}(1 - \alpha)$. Если $|z| < z_0$, то нет оснований отклонять нулевую гипотезу; если же $|z| > z_0$, то нулевую гипотезу отклоняют.
2. При конкурирующей гипотезе $H_1 : M(X) > M(Y)$ критическую точку z_0 находят из уравнения $\Phi(z_0) = \dfrac{1}{2}(1-2\alpha)$. Если $z < z_0$ $(z > z_0)$, то нулевую гипотезу принимают (отклоняют).
3. При конкурирующей гипотезе $H_1 : M(X) < M(Y)$ находят t_0 из уравнения $\Phi(t_0) = \dfrac{1}{2}(1-2\alpha)$. Критическая точка $z_0 = -t_0$. Если $z > z_0$ $(z < z_0)$, то нулевую гипотезу принимают (отклоняют).

Примечание. Если величины X и Y не распределены нормально, то для проверки нулевой гипотезы $H_0 : M(X) = M(Y)$ при соответствующей конкурирующей гипотезе может использоваться приближенное наблюдаемое значение z' статистики Z:
$$z' = \frac{\bar{x} - \bar{y}}{\sqrt{\dfrac{D_1}{n_1} + \dfrac{D_2}{n_2}}},$$
где $n_1 > 30$, $n_2 > 30$ — объемы выборок; D_1, D_2 — эмпирические дисперсии для первой и второй выборки соответственно.

Пример 67. Из генеральных совокупностей X и Y с дисперсиями $D(X) = 90$ и $D(Y) = 120$ извлечены независимые выборки с объемами $n_1 = 45$ и $n_2 = 60$ соответственно, для которых найдены эмпирические средние $\bar{x} = 135$, $\bar{y} = 140$. Требуется проверить нулевую гипотезу $H_0 : M(X) = M(Y)$ при уровне значимости $\alpha = 0{,}01$ и конкурирующей гипотезе $H_1 : M(X) \neq M(Y)$.

Решение. Наблюдаемое значение статистики Z равно
$$z = \frac{135 - 140}{\sqrt{90/45 + 120/60}} = -2{,}5.$$

Из уравнения $\Phi(z_0) = \frac{1}{2}(1-\alpha) = 0{,}495$ по табл. 15.2 находим $z_0 = 2{,}58$. Так как $|z| = |-2{,}5| < z_0 = 2{,}58$, то нет оснований отклонять нулевую гипотезу, т. е. эмпирические средние различаются незначимо (случайно). ▷

15.2.8.9. Проверка гипотезы о некоррелированности двух случайных величин

Пусть из двумерной нормально распределенной генеральной совокупности (X, Y) извлечена связанная выборка объема n (см. 15.2.7.1) и по ней найден эмпирический коэффициент корреляции $r \neq 0$. Требуется при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0 : r_{XY} = 0$ о некоррелированности величин X и Y, при конкурирующей гипотезе $H_1 : r_{XY} \neq 0$. Если гипотеза H_0 принимается, то X и Y некоррелированы, т. е. коэффициент r незначимо (случайно) отличается от нуля.

Для проверки (при заданном α) гипотезы H_0 при конкурирующей гипотезе H_1 следует вычислить наблюдаемое значение

$$t = \frac{r\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}} \tag{15.20}$$

случайной величины (статистики) T, имеющей **распределение Стьюдента** с $k = n - 2$ степенями свободы. Затем по заданным α и k найти критическую точку $t_0(\alpha; k)$ для двухсторонней критической области по табл. 15.6. Тогда, если $|t| < t_0$, то нет оснований отклонять нулевую гипотезу. Если $|t| > t_0$, то нулевую гипотезу отклоняют.

Пример 68. Предполагая, что в условиях примера 56 выборка объема $n = 50$ — из нормальной двумерной совокупности, проверить при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ нулевую гипотезу $H_0 : r_{XY} = 0$ при конкурирующей гипотезе $H_1 : r_{XY} \neq 0$.

Решение. Найденное в примере 56 значение $r = 0{,}33$. Наблюдаемое значение статистики равно

$$t = \frac{0{,}33 \cdot \sqrt{50-2}}{\sqrt{1-0{,}33^2}} = 2{,}42.$$

По значениям $\alpha = 0{,}05$ и $k = n - 2 = 50 - 2 = 48$ по табл. 15.6 можно установить лишь, что $2{,}00 < t_0(0{,}05; 48) < 2{,}02$, так как $40 < 48 < 60$. Поскольку $t > t_0$, нулевую гипотезу отклоняем. Значит, отличие коэффициента r от нуля значимо (неслучайно), и величины X и Y коррелированы. ▷

15.2.9. Таблицы

Таблица 15.1

Значения функции $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3652	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2131	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006

Окончание таблицы 15.1

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001

Таблицы 15.1–15.9 заимствованы из книги: *Гмурман В. Е.* Теория вероятностей и математическая статистика. М.: Высшая школа, 1999. 479 с.
Более подробные таблицы приведены, например, в книге: *Большев Л. Н.*, *Смирнов Н. В.* Таблицы математической статистики. М.: Наука, 1965.

Таблица 15.2

Значения функции $\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-z^2/2}\, dz$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,00	0,0000	0,24	0,0948	0,48	0,1844	0,72	0,2642
0,01	0,0040	0,25	0,0987	0,49	0,1879	0,73	0,2673
0,02	0,0080	0,26	0,1026	0,50	0,1915	0,74	0,2703
0,03	0,0120	0,27	0,1064	0,51	0,1950	0,75	0,2734
0,04	0,0160	0,28	0,1103	0,52	0,1985	0,76	0,2764
0,05	0,0199	0,29	0,1141	0,53	0,2019	0,77	0,2794
0,06	0,0239	0,30	0,1179	0,54	0,2054	0,78	0,2823
0,07	0,0279	0,31	0,1217	0,55	0,2088	0,79	0,2852
0,08	0,0319	0,32	0,1255	0,56	0,2123	0,80	0,2881
0,09	0,0359	0,33	0,1293	0,57	0,2157	0,81	0,2910
0,10	0,0398	0,34	0,1331	0,58	0,2190	0,82	0,2939
0,11	0,0438	0,35	0,1368	0,59	0,2224	0,83	0,2967
0,12	0,0478	0,36	0,1406	0,60	0,2257	0,84	0,2995
0,13	0,0517	0,37	0,1443	0,61	0,2291	0,85	0,3023
0,14	0,0557	0,38	0,1480	0,62	0,2324	0,86	0,3051
0,15	0,0596	0,39	0,1517	0,63	0,2357	0,87	0,3078
0,16	0,0636	0,40	0,1554	0,64	0,2389	0,88	0,3106
0,17	0,0675	0,41	0,1591	0,65	0,2422	0,89	0,3133
0,18	0,0714	0,42	0,1628	0,66	0,2454	0,90	0,3159
0,19	0,0753	0,43	0,1664	0,67	0,2486	0,91	0,3186
0,20	0,0793	0,44	0,1700	0,68	0,2517	0,92	0,3212
0,21	0,0832	0,45	0,1736	0,69	0,2549	0,93	0,3238
0,22	0,0871	0,46	0,1772	0,70	0,2580	0,94	0,3264
0,23	0,0910	0,47	0,1808	0,71	0,2611	0,95	0,3289

Окончание таблицы 15.2

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
0,96	0,3315	1,37	0,4147	1,78	0,4625	2,36	0,4909
0,97	0,3340	1,38	0,4162	1,79	0,4633	2,38	0,4913
0,98	0,3365	1,39	0,4177	1,80	0,4641	2,40	0,4918
0,99	0,3389	1,40	0,4192	1,81	0,4649	2,42	0,4922
1,00	0,3413	1,41	0,4207	1,82	0,4656	2,44	0,4927
1,01	0,3438	1,42	0,4222	1,83	0,4664	2,46	0,4931
1,02	0,3461	1,43	0,4236	1,84	0,4671	2,48	0,4934
1,03	0,3485	1,44	0,4251	1,85	0,4678	2,50	0,4938
1,04	0,3508	1,45	0,4265	1,86	0,4686	2,52	0,4941
1,05	0,3531	1,46	0,4279	1,87	0,4693	2,54	0,4945
1,06	0,3554	1,47	0,4292	1,88	0,4699	2,56	0,4948
1,07	0,3577	1,48	0,4306	1,89	0,4706	2,58	0,4951
1,08	0,3599	1,49	0,4319	1,90	0,4713	2,60	0,4953
1,09	0,3621	1,50	0,4332	1,91	0,4719	2,62	0,4956
1,10	0,3643	1,51	0,4345	1,92	0,4726	2,64	0,4959
1,11	0,3665	1,52	0,4357	1,93	0,4732	2,66	0,4961
1,12	0,3686	1,53	0,4370	1,94	0,4738	2,68	0,4963
1,13	0,3708	1,54	0,4382	1,95	0,4744	2,70	0,4965
1,14	0,3729	1,55	0,4394	1,96	0,4750	2,72	0,4967
1,15	0,3749	1,56	0,4406	1,97	0,4756	2,74	0,4969
1,16	0,3770	1,57	0,4418	1,98	0,4761	2,76	0,4971
1,17	0,3790	1,58	0,4429	1,99	0,4767	2,78	0,4973
1,18	0,3810	1,59	0,4441	2,00	0,4772	2,80	0,4974
1,19	0,3830	1,60	0,4452	2,02	0,4783	2,82	0,4976
1,20	0,3849	1,61	0,4463	2,04	0,4793	2,84	0,4977
1,21	0,3869	1,62	0,4474	2,06	0,4803	2,86	0,4979
1,22	0,3883	1,63	0,4484	2,08	0,4812	2,88	0,4980
1,23	0,3907	1,64	0,4495	2,10	0,4821	2,90	0,4981
1,24	0,3925	1,65	0,4505	2,12	0,4830	2,92	0,4982
1,25	0,3944	1,66	0,4515	2,14	0,4838	2,94	0,4984
1,26	0,3962	1,67	0,4525	2,16	0,4846	2,96	0,4985
1,27	0,3980	1,68	0,4535	2,18	0,4854	2,98	0,4985
1,28	0,3997	1,69	0,4545	2,20	0,4861	3,00	0,49865
1,29	0,4015	1,70	0,4554	2,22	0,4868	3,20	0,49931
1,30	0,4032	1,71	0,4564	2,24	0,4875	3,40	0,49966
1,31	0,4049	1,72	0,4573	2,26	0,4881	3,60	0,499841
1,32	0,4066	1,73	0,4582	2,28	0,4887	3,80	0,499928
1,33	0,4082	1,74	0,4591	2,30	0,4893	4,00	0,499968
1,34	0,4099	1,75	0,4599	2,32	0,4898	4,50	0,499997
1,35	0,4115	1,76	0,4608	2,34	0,4904	5,00	0,499997
1,36	0,4131	1,77	0,4916				

Таблица 15.3

Значения $t_\gamma = t(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2 20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,001	2,640	3,418
15	2,15	2 98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Таблица 15.4

Значения $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Таблица 15.5

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,99
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,55
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	40,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Таблица 15.6

Критические точки распределения Стьюдента

Число степеней свободы k	Уровень значимости α (двухсторонняя критическая область)					
	0,10	0,05	0,02	0,01	0,002	0,001
1	6,31	12,7	31,82	63,7	318,3	637,0
2	2,92	4,30	6,97	9,92	22,33	31,6
3	2,35	3,18	4,54	5,84	10,22	12,9
4	2,13	2,78	3,75	4,60	7,17	8,61
5	2,01	2,57	3,37	4,03	5,89	6,86
6	1,94	2,45	3,14	3,71	5,21	5,96
7	1,89	2,36	3,00	3,50	4,79	5,40
8	1,86	2,31	2,90	3,36	4,50	5,04
9	1,83	2,26	2,82	3,25	4,30	4,78
10	1,81	2,23	2,76	3,17	4,14	4,59
11	1,80	2,20	2,72	3,11	4,03	4,44
12	1,78	2,18	2,68	3,05	3,93	4,32
13	1,77	2,16	2,65	3,01	3,85	4,22
14	1,76	2,14	2,62	2,98	3,79	4,14
15	1,75	2,13	2,60	2,95	3,73	4,07
16	1,75	2,12	2,58	2,92	3,69	4,01
17	1,74	2,11	2,57	2,90	3,65	3,96
18	1,73	2,10	2,55	2,88	3,61	3,92
19	1,73	2,09	2,54	2,86	3,58	3,88
20	1,73	2,09	2,53	2,85	3,55	3,85
21	1,72	2,08	2,52	2,83	3,53	3,82
22	1,72	2,07	2,51	2,82	3,51	3,79
23	1,71	2,07	2,50	2,81	3,49	3,77
24	1,71	2,06	2,49	2,80	3,47	3,74
25	1,71	2,06	2,49	2,79	3,45	3,72
26	1,71	2,06	2,48	2,78	3,44	3,71
27	1,71	2,05	2,47	2,77	3,42	3,69
28	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
29	1,70	2,05	2,46	2,76	3,40	3,66
30	1,70	2,04	2,46	2,75	3,39	3,65
40	1,68	2,02	2,42	2,70	3,31	3,55
60	1,67	2,00	2,39	2,66	3,23	3,46
120	1,66	1,98	2,36	2,62	3,17	3,37
∞	1,64	1,96	2,33	2,58	3,09	3,29
	0,05	0,025	0,01	0,005	0,001	0,0005
	Уровень значимости α (односторонняя критическая область)					

Таблица 15.7

Критические точки распределения F (k_1 — число степеней свободы для большей дисперсии, k_2 — число степеней свободы для меньшей дисперсии)

Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$

k_2	k_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	4052	4999	5403	5625	5764	5889	5928	5981	6022	6056	6082	6106
2	98,49	99,01	99,17	99,25	99,30	99,33	99,34	99,36	99,38	99,40	99,41	99,42
3	34,12	30,81	29,46	28,71	28,24	27,91	27,67	27,49	27,34	27,23	27,13	27,05
4	21,20	18,00	16,69	15,98	15,52	15,21	14,98	14,80	14,66	14,54	14,45	14,37
5	16,26	13,27	12,06	11,39	10,97	10,67	10,45	10,27	10,15	10,05	9,96	9,89
6	13,74	10,92	9,78	9,15	8,75	8,47	8,26	8,10	7,98	7,87	7,79	7,72
7	12,25	9,55	8,45	7,85	7,46	7,19	7,00	6,84	6,71	6,62	6,54	6,47
8	11,26	8,65	7,59	7,01	6,63	6,37	6,19	6,03	5,91	5,82	5,74	5,67
9	10,56	8,02	6,99	6,42	6,06	5,80	5,62	5,47	5,35	5,26	5,18	5,11
10	10,04	7,56	6,55	5,98	5,64	5,39	5,21	5,06	4,95	4,85	4,78	4,71
11	9,86	7,20	6,22	5,67	5,32	5,07	4,88	4,74	4,63	4,54	4,46	4,40
12	9,33	6,93	5,95	5,41	5,06	4,82	4,65	4,50	4,39	4,30	4,22	4,16
13	9,07	6,70	5,74	5,20	4,86	4,62	4,44	4,30	4,19	4,10	4,02	3,96
14	8,86	6,51	5,56	5,03	4,69	4,46	4,28	4,14	4,03	3,94	3,86	3,80
15	8,68	6,36	5,42	4,89	4,56	4,32	4,14	4,00	3,89	3,80	3,73	3,67
16	8,53	6,23	5,29	4,77	4,44	4,20	4,03	3,89	3,78	3,69	3,61	3,55
17	8,40	6,11	5,18	4,67	4,34	4,10	3,93	3,79	3,68	3,59	3,52	3,45

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$

k_2	k_1 = 1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,36	19,37	19,38	19,39	19,40	19,41
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79

Окончание таблицы 15.7

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$												
k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38

Таблица 15.8

Критические точки распределения Кочрена
(k — число степеней свободы, l — количество выборок)

Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$							
l	k						
	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9999	0,9950	0,9794	0,9586	0,9373	0,9172	0,8988
3	9933	9423	8831	8335	7933	7606	7335
4	9676	8643	7814	7212	6761	6410	6129
5	0,9279	0,7885	0,6957	0,6329	0,5875	0,5531	0,5259
6	8828	7218	6258	5635	5195	4866	4608
7	8376	6644	5685	5080	4659	4347	4105
8	0,7945	0,6152	0,5209	0,4627	0,4226	0,3932	0,3704
9	7544	5727	4810	4251	3870	3592	3378
10	7175	5358	4469	3934	3572	3308	3106
12	0,6528	0,4751	0,3919	0,3428	0,3099	0,2861	0,2680
15	5747	4069	3317	2882	2593	2386	2228
20	4799	3297	2654	2288	2048	1877	1748
24	0,4247	0,2871	0,2295	0,1970	0,1759	0,1608	0,1495
30	3632	2412	1913	1635	1454	1327	1232
40	2940	1915	1508	1281	1135	1033	0957
60	0,2151	0,1371	0,1069	0,0902	0,0796	0,0722	0,0668
120	1225	0759	0585	0489	0429	0387	0357
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Продолжение таблицы 15.8

Уровень значимости $\alpha = 0{,}01$

l	k						
	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8823	0,8674	0,8539	0,7949	0,7067	0,6062	0,5000
3	7107	6912	6743	6059	5153	4230	3333
4	5897	5702	5536	4884	4057	3251	2500
5	0,5037	0,4854	0,4697	0,4094	0,3351	0,2644	0,2000
6	4401	4229	4084	3529	2858	2229	1667
7	3911	3751	3616	3105	2494	1929	1429
8	0,3522	0,3373	0,3248	0,2779	0,2214	0,1700	0,1250
9	3207	3067	2950	2514	1992	1521	1111
10	2945	2813	2704	2297	1811	1376	1000
12	0,2535	0,2419	0,2320	0,1961	0,1535	0,1157	0,0833
15	2104	2002	1918	1612	1251	0934	0667
20	1646	1567	1501	1248	0960	0709	0500
24	0,1406	0,1338	0,1283	0,1060	0,0810	0,0595	0,0417
30	1157	1100	1054	0867	0658	0480	0333
40	0898	0853	0816	0668	0503	0363	0250
60	0,0625	0,0594	0,0567	0,0461	0,0344	0,0245	0,0167
120	0334	0316	0302	0242	0178	0125	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$

l	k						
	1	2	3	4	5	6	7
2	0,9985	0,9750	0,9392	0,9057	0,8772	0,8534	0,8332
3	9669	8709	7977	7457	7071	6771	6530
4	9065	7679	6841	6287	5895	0,5598	5365
5	0,8412	0,6338	0,5981	0,5440	0,5063	4783	0,4564
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3980
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3535
8	0,6798	0,5157	0,4377	0,3910	0,3595	0,3362	0,3185
9	6385	4775	4027	3584	3286	3067	2901
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2666
12	0,5410	0,3924	0,3624	0,2880	0,2624	0,2439	0,2299
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1911
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1501
24	0,3434	0,2354	0,1907	0,1656	0,1493	0,1374	0,1286

Окончание таблицы 15.8

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$							
l	k						
	1	2	3	4	5	6	7
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1061
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	0827
60	0,1737	0,1131	0,0895	0,0765	0,0682	0,0623	0,0583
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0312
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Уровень значимости $\alpha = 0{,}05$							
l	k						
	8	9	10	16	36	144	∞
2	0,8159	0,8010	0,7880	0,7341	0,6602	0,5813	0,5000
3	6333	6167	6025	5466	4748	4031	3333
4	5175	5017	4884	4366	3720	3093	2500
5	0,4387	0,4241	0,4118	0,3645	0,3066	0,2013	0,2000
6	3817	3682	3568	3135	2612	2119	1667
7	3384	3259	3154	2756	2278	1833	1429
8	0,3043	0,2926	0,2829	0,2462	0,2022	0,1616	0,1250
9	2768	2659	2568	2226	1820	1446	1111
10	2541	2439	2353	2032	1655	1308	1000
12	0,2187	0,2098	0,2020	0,1737	0,1403	0,1100	0,0833
15	1815	1736	1671	1429	1144	0889	0667
20	1422	1357	1303	1108	0879	0675	0500
24	0,1216	0,1160	0,1113	0,0942	0,0743	0,0567	0,0417
30	1002	0958	0921	0771	0604	0457	0333
40	0780	0745	0713	0595	0462	0347	0250
60	0,0552	0,0520	0,0497	0,0411	0,0316	0,0234	0,0167
120	0292	0279	0266	0218	0165	0120	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Таблица 15.9

Критические точки распределения W

Объемы выборок		Q			
n_1	n_2	0,005	0,01	0,025	0,05
6	6	23	24	26	28
	7	24	25	27	30
	8	25	27	29	31
	9	26	28	31	33
	10	27	29	32	35
	11	28	30	34	37
	12	30	32	35	38
	13	31	33	37	40
	14	32	34	38	42
	15	33	36	40	44
	16	34	37	42	46
	17	36	39	43	47
	18	37	40	45	49
	19	38	41	46	51
	20	39	43	48	53
	21	40	44	50	55
	22	42	45	51	57
	23	43	47	53	58
	24	44	48	54	60
	25	45	50	56	62
7	7	32	34	36	39
	8	34	35	38	41
	9	35	37	40	43
	10	37	39	42	45
	11	38	40	44	47
	12	40	42	46	49
	13	41	44	48	52
	14	43	45	50	54
	15	44	47	52	56
	16	46	49	54	58
	17	47	51	56	61
	18	49	52	58	63
	19	50	54	60	65
	20	52	56	62	67
	21	53	58	64	69
	22	55	59	66	72
	23	57	61	68	74
	24	58	63	70	76
	25	60	64	72	78
8	8	43	45	49	51
	9	45	47	51	54
	10	47	49	53	56
	11	49	51	55	59
	12	51	53	58	62
	13	53	56	60	64
	14	54	58	62	67
	15	56	60	65	69
	16	58	62	67	72
	17	60	64	70	75
	18	62	66	72	77
	19	64	68	74	80
	20	66	70	77	83
	21	68	72	79	85
	22	70	74	81	88
	23	71	76	84	90
	24	73	78	86	93
	25	75	81	89	96
9	9	56	59	62	66
	10	58	61	65	69
	11	61	63	68	72
	12	63	66	71	75
	13	65	68	73	78
	14	67	71	76	81
	15	69	73	79	84
	16	72	76	82	87
	17	74	78	84	90
	18	76	81	87	93
	19	78	83	90	96
	20	81	85	93	99
	21	83	88	95	102
	22	85	90	98	105
	23	88	93	101	108
	24	90	95	104	111
	25	92	98	107	114

Продолжение таблицы 15.9

Объемы выборок		Q			
n_1	n_2	0,005	0,01	0,025	0,05
10	10	71	74	78	82
	11	73	77	81	86
	12	76	79	84	89
	13	79	82	88	92
	14	81	85	91	96
	15	84	88	94	99
	16	86	91	97	103
	17	89	93	100	106
	18	92	96	103	110
	19	94	99	107	113
	20	97	102	110	117
	21	99	105	113	120
	22	102	108	116	123
	23	105	110	119	127
	24	107	113	122	130
	25	110	116	126	134
11	11	87	91	96	100
	12	90	94	99	104
	13	93	97	103	108
	14	96	100	106	112
	15	99	103	110	116
	16	102	107	113	120
	17	105	110	117	123
	18	108	113	121	127
	19	111	116	124	131
	20	114	119	128	135
	21	117	123	131	139
	22	120	126	135	143
	23	123	129	139	147
	24	126	132	142	151
	25	129	136	146	155
12	12	105	109	115	120
	13	109	113	119	125
	14	112	116	123	129
	15	115	120	127	133
	16	119	124	131	138
	17	122	127	135	142
	18	125	131	139	146
	19	129	134	143	150
	20	132	138	147	155
	21	136	142	151	159
	22	139	145	155	163
	23	142	149	159	168
	24	146	153	163	172
	25	149	156	167	176
13	13	125	130	136	142
	14	129	134	141	147
	15	133	138	145	152
	16	136	142	150	156
	17	140	146	154	161
	18	144	150	158	166
	19	148	154	163	171
	20	151	158	167	175
	21	155	162	171	180
	22	159	166	176	185
	23	163	170	180	189
	24	166	174	185	194
	25	170	178	189	199
14	14	147	152	160	166
	15	151	156	164	171
	16	155	161	169	176
	17	159	165	174	182
	18	103	170	179	187
	19	168	174	183	192
	20	172	178	188	197
	21	176	183	193	202
	22	180	187	198	207
	23	184	192	203	212
	24	188	196	207	218
	25	192	200	212	223

Окончание таблицы 15.9

Объемы выборок		Q				Объемы выборок		Q			
n_1	n_2	0,005	0,01	0,025	0,05	n_1	n_2	0,005	0,01	0,025	0,05
15	15	171	176	184	192	19	19	283	291	303	313
	16	175	181	190	197		20	289	297	309	320
	17	180	186	195	203		21	295	303	316	328
	18	184	190	200	208		22	301	310	323	335
	19	189	195	205	214		23	307	316	330	342
	20	193	200	210	220		24	313	323	337	350
	21	198	205	216	225		25	319	329	344	357
	22	202	210	221	231	20	20	315	324	337	348
	23	207	214	226	236		21	322	331	344	356
	24	211	219	231	242		22	328	337	351	364
	25	216	224	237	248		23	335	344	359	371
16	16	196	202	211	219		24	341	351	366	379
	17	201	207	217	225		25	348	358	373	387
	18	206	212	222	231	21	21	349	359	373	385
	19	210	218	228	237		22	356	366	381	393
	20	215	223	234	243		23	363	373	388	401
	21	220	228	239	249		24	370	381	396	410
	22	225	233	245	255		25	377	388	404	418
	23	230	238	251	261	22	22	386	396	411	424
	24	235	244	256	267		23	393	403	419	432
	25	240	249	262	273		24	400	411	427	441
17	17	223	230	240	249		25	408	419	435	450
	18	228	235	246	255	23	23	424	434	451	465
	19	234	241	252	262		24	431	443	459	474
	20	239	246	258	268		25	439	451	468	483
	21	244	252	264	274	24	24	464	475	492	507
	22	249	258	270	281		25	472	484	501	517
	23	255	263	276	287	25	25	505	517	536	552
	24	260	269	282	294						
	25	265	275	288	300						
18	18	252	259	270	280						
	19	258	265	277	287						
	20	263	271	283	294						
	21	269	277	290	301						
	22	275	283	296	307						
	23	280	289	303	314						
	24	286	295	309	321						
	25	292	301	316	328						

Глава 16

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ

16.1. Приближенные числа и действия с ними

1. Пусть число A — точное (обычно неизвестное) значение некоторой величины, a — известное число, близкое к точному значению, заменяющее его в вычислениях и называемое **приближенным числом**. Абсолютная величина разности чисел A и a, т. е. $\Delta a = |A - a|$, называется **абсолютной погрешностью** или **абсолютной ошибкой** приближенного числа a. Отношение

$$\delta a = \frac{\Delta a}{|a|} \quad (a \neq 0)$$

называется **относительной погрешностью** приближенного числа a. Всякое число $\overline{\Delta} a$ (соответственно $\overline{\delta} a$), удовлетворяющее неравенству $\Delta a \leqslant \overline{\Delta} a$ (соответственно $\delta a \leqslant \overline{\delta} a$), называется **предельной абсолютной** (соответственно **предельной относительной) погрешностью** приближенного числа a. Обычно предполагается, что $\overline{\Delta} a$ и $\overline{\delta} a$ связаны соотношением $\overline{\Delta} a = |a|\overline{\delta} a$ (если $a \neq 0$). Часто применяемая запись $A = a \pm \overline{\Delta} a$ означает, что неизвестное точное число A заключено в промежутке $a - \overline{\Delta} a \leqslant A \leqslant a + \overline{\Delta} a$. Обычно приближенные числа могут быть записаны в виде конечных десятичных дробей. Первая слева не равная нулю цифра, и все расположенные справа от нее цифры, называются **значащими цифрами**. Например, число $-17{,}0035$ имеет шесть значащих цифр, включая два нуля. Число 0,003040 имеет четыре значащие цифры, включая последний нуль; первые три нуля не являются значащими цифрами. Если нуль в конце числа не является значащей цифрой, то это число следует записать в виде 0,00304.

Цифра α_i в десятичной записи приближенного числа

$$a = \pm \alpha_m \alpha_{m-1} \ldots \alpha_0{,}\alpha_{-1} \ldots \alpha_{-n}$$

называется **верной**, если абсолютная погрешность числа a не превышает половины единицы соответствующего разряда т. е. $\Delta a \leqslant 0{,}5 \cdot 10^i$. Например, для точного числа $A = 14{,}98$ приближенное значение $a = 15{,}0$ имеет три верных цифры, так как $\Delta a = 0{,}02 < 0{,}5 \cdot 10^{-1}$ ($i = -1$). Если предельная абсолютная погрешность приближенного числа не указана, то в записи этого числа приводятся (указываются) только верные цифры, включая нули в конце числа. Приближенные числа 0,072 и 0,0720 отличаются друг от друга: абсолютная погрешность первого не превышает $0{,}5 \cdot 0{,}001 = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$, а второго не превышает $0{,}5 \cdot 10^{-4}$. В таких случаях, для избежания неопределенности, приближенные числа записывают в виде: $0{,}072 = 7{,}2 \cdot 10^{-2}$ и $0{,}0720 = 7{,}20 \cdot 10^{-2}$. Число $5{,}79 \cdot 10^5$ имеет три верных значащих цифры, а число $5{,}790 \cdot 10^5$ — четыре. Запись этих чисел в виде 579 000 была бы неправильной. Если о каком-то числе, например 0,5, заведомо известно, что оно точное, то верные нули справа можно не писать.

Округлением числа называется замена его другим числом с меньшим количеством значащих цифр.

Правило округления чисел. Если первая из отбрасываемых цифр меньше 5, то оставшиеся десятичные знаки не изменяются; если — больше или равна 5, то к последней сохраняемой цифре прибавляется единица того же разряда с тем же знаком, что и у округляемого числа.

Пример 1. В результате округления соответственно до первого, второго и третьего десятичных знаков после запятой следующих чисел: 2,718; 0,036; $-0{,}00453$, будем иметь числа: 2,7; 0,04; $-0{,}005$.

Точность приближенного числа определяется не количеством значащих цифр, а количеством верных значащих цифр. При наличии излишнего количества неверных значащих цифр применяют округление

2. Вычисление погрешностей в арифметических действиях с приближенными числами. Пусть $a_1, a_1, \ldots, a_n$ — приближенные числа, тогда справедливы следующие утверждения.

1) Предельная абсолютная погрешность алгебраической суммы $a = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ нескольких приближенных чисел равна сумме предельных абсолютных погрешностей слагаемых:

$$\overline{\Delta} a = \overline{\Delta} a_1 + \overline{\Delta} a_2 + \ldots + \overline{\Delta} a_n.$$

Если все слагаемые имеют одинаковый знак, то предельная относительная погрешность их суммы не превышает наибольшей из предельных относительных погрешностей слагаемых.

2) При умножении $a = a_1 a_2 \ldots a_n$ (делении $a = a_1/a_2$) приближенных чисел, не равных нулю, их предельные относительные погрешности складываются:

$$\overline{\delta} a = \overline{\delta} a_1 + \overline{\delta} a_2 + \ldots + \overline{\delta} a_n \quad (\overline{\delta} a = \overline{\delta} a_1 + \overline{\delta} a_2).$$

Для двух приближенных чисел a_1 и a_2 справедливы приближенные формулы для предельных абсолютных погрешностей:

$$\overline{\Delta}(a_1a_2) = |a_2|\cdot\overline{\Delta}a_1 + |a_1|\cdot\overline{\Delta}a_2,$$

$$\overline{\Delta}\left(\frac{a_1}{a_2}\right) = \left[|a_2|\cdot\overline{\Delta}a_1 + |a_1|\cdot\overline{\Delta}a_2\right]\cdot|a_2|^{-2}.$$

3. Практические рекомендации при проведении приближенных вычислений.

1) При сложении и вычитании приближенных чисел с различным количеством верных цифр после запятой результат округляется по наименьшему количеству верных цифр после запятой у этих чисел.
2) Следует избегать вычитания двух близких по величине приближенных чисел.
3) При умножении и делении приближенных чисел с различным количеством верных значащих цифр результат округляется по наименьшему количеству верных значащих цифр у этих чисел.
4) При извлечении квадратного или кубического корня из приближенного числа результат должен содержать столько же верных значащих цифр, сколько их содержит подкоренное число.
5) Во всех промежуточных результатах приближенных вычислений рекомендуется сохранять кроме верных значащих цифр еще на одну или две дополнительные значащие цифры больше по сравнению с вышеизложенными рекомендациями.

4. Общая формула для погрешности. Пусть дана дифференцируемая функция $u = f(x_1, \dots, x_n)$. Тогда предельные абсолютные погрешности функции $\overline{\Delta}u$ и аргументов $\overline{\Delta}x_i$ связаны соотношением

$$\overline{\Delta}u = \left|\frac{\partial u}{\partial x_1}\right|\overline{\Delta}x_1 + \ldots + \left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|\overline{\Delta}x_n,$$

а предельная относительная погрешность $\overline{\delta}u$ функции равна

$$\overline{\delta}u = \left|\frac{\partial}{\partial x_1}\ln u\right|\overline{\Delta}x_1 + \ldots + \left|\frac{\partial}{\partial x_n}\ln u\right|\overline{\Delta}x_n.$$

Для функции одного аргумента $y = f(x)$ справедлива формула

$$\overline{\Delta}x = \frac{1}{|y'|}\overline{\Delta}y,$$

позволяющая по известной предельной абсолютной погрешности функции $\overline{\Delta}y$ найти предельную абсолютную погрешность аргумента $\overline{\Delta}x$. Такая необходимость возникает, в частности, когда по значению функции, заданной, например, таблично, находят соответствующее значение аргумента.

Пример 2. Для функций $u = \sin x$; $v = x^n$; $w = \sqrt[n]{x}$ (n — натуральное число) имеем соответственно:

$$\overline{\Delta}u = |\cos x|\overline{\Delta}x; \quad \overline{\Delta}v = n|x^{n-1}|\overline{\Delta}x; \qquad \overline{\Delta}w = \frac{1}{n}\left|x^{(1-n)/n}\right|\overline{\Delta}x;$$

$$\overline{\delta}u = |\mathrm{ctg}\, x|\overline{\Delta}x; \quad \overline{\delta}v = n\frac{\overline{\Delta}x}{|x|} = n\overline{\delta}x; \quad \overline{\delta}w = \frac{1}{n}\frac{\overline{\Delta}x}{|x|} = \frac{1}{n}\overline{\delta}x.$$

5. Пусть приближенные числа $x_1, \ldots, x_n$ получены в результате независимых измерений величины x, а абсолютные погрешности Δx_i имеют случайный характер и не превышают некоторого числа Δ (зависящего от точности измерительного прибора). Тогда на практике в качестве неизвестного истинного значения величины x принимают среднее арифметическое

$$x_{\text{ср}} = \frac{1}{n}(x_1 + \ldots + x_n).$$

В теории вероятностей доказывается, что в качестве предельной абсолютной погрешности величины $x_{\text{ср}}$ можно принять число $\overline{\Delta} = \Delta/\sqrt{n}$. Результат измерения запишется тогда в виде $x = x_{\text{ср}} \pm \overline{\Delta}$. Видно, что погрешность $\overline{\Delta}$ уменьшается с увеличением количества измерений n.

16.2. Решение систем линейных уравнений

Для упрощения изложения ограничимся здесь рассмотрением неоднородной системы линейных уравнений третьего порядка

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = a_{14}, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = a_{24}, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = a_{34}, \end{cases} \tag{16.1}$$

которая при условии, что $\det A \equiv \det(a_{ij}) \neq 0$ $(i, j = 1, 2, 3)$ имеет единственное решение $X \equiv (c_1, c_2, c_3)$. **Расширенная матрица** системы (16.1) имеет вид:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix}. \tag{16.1'}$$

Для нахождения решения X системы (16.1) рассмотрим следующие два метода.

16.2.1. Метод Гаусса

Алгоритм метода Гаусса.

1. Пусть **ведущий элемент** $a_{11} \neq 0$. Если $a_{11} = 0$, то следует переставить местами уравнения системы (16.1) так, чтобы на месте a_{11} оказался коэффициент, не равный нулю. Разделим первое из уравнений (16.1) на a_{11}, получим

$$x_1 + a'_{12}x_2 + a'_{13}x_3 = a'_{14}, \tag{16.2}$$

где $a'_{1j} = a_{1j}/a_{11}$ $(j = 2, 3, 4)$.

2. При помощи уравнения (16.2) исключим неизвестную x_1 из второго и третьего уравнений (16.1). Для этого из второго уравнения (16.1) вычтем уравнение (16.2), умноженное на a_{21}, а из третьего уравнения (16.1) вычтем уравнение (16.2), умноженное на a_{31}. В результате вместо второго и третьего уравнений (16.1) получим уравнения

$$\begin{aligned} a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 &= a'_{24}, \\ a'_{32}x_2 + a'_{33}x_3 &= a'_{34}, \end{aligned} \tag{16.3}$$

где $a'_{ij} = a_{ij} - a_{i1}a'_{1j}$ $(i = 2, 3;\ j = 2, 3, 4)$.

3. Пусть ведущий элемент $a'_{22} \neq 0$ (в противном случае см. п. **1**). Разделив первое уравнение (16.3) на a'_{22}, получим уравнение

$$x_2 + a''_{23}x_3 = a''_{24}, \tag{16.4}$$

где $a''_{23} = a'_{23}/a'_{22}$; $a''_{24} = a'_{24}/a'_{22}$.

4. Умножая уравнение (16.4) на a'_{32} и вычитая из второго уравнения (16.3), получим (x_2 при этом исключается) уравнение

$$a''_{33}x_3 = a''_{34}, \tag{16.5}$$

где $a''_{33} = a'_{33} - a''_{23}a'_{32}$; $a''_{34} = a'_{34} - a''_{24}a'_{32}$. Разделив обе части (16.5) на ведущий элемент a''_{33}, находим

$$x_3 = \frac{a''_{34}}{a''_{33}} \equiv c_3. \tag{16.6}$$

Подставляя затем $x_3 = c_3$ в (16.4), найдем $x_2 = a''_{24} - a''_{23}c_3 \equiv c_2$. Аналогично, подставляя $x_2 = c_2$, $x_3 = c_3$ в (16.2), получим $x_1 = c_1$.

Решение системы: $X = (c_1, c_2, c_3)$.

Пример 3. Решить методом Гаусса систему

$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 - x_3 &= 5, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 &= 0, \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Решение. Запишем последовательность расширенных матриц исходной системы в соответствии с методом Гаусса (знаком * отмечены ведущие элементы):

$$\begin{bmatrix} 5^* & -2 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2/5 & -1/5 & 1 \\ 0 & (1/5)^* & 3/5 & 2 \\ 0 & -1/5 & 22/5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2/5 & -1/5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 5^* & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2/5 & -1/5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Передвигаясь в обратном направлении от последней матрицы к первой, получим

$$x_3 = 1, \quad x_2 = 10 - 3x_3 = 7, \quad x_1 = 1 + \frac{2}{5}x_2 + \frac{1}{5}x_3 = 1 + \frac{14}{5} + \frac{1}{5} = 4.$$

Решение системы: $x_1 = 4$, $x_2 = 7$, $x_3 = 1$ или $X = (4; 7; 1)$. ▷

16.2.2. Метод Гаусса—Жордана

Алгоритм метода. Пункты (шаги) **1–3** при нахождении решения системы (16.1) данным методом такие же, как в методе Гаусса (см. 16.2.1).

4. При помощи уравнения (16.4) исключим неизвестную x_2 не только из второго уравнения (16.3), но и из уравнения (16.2). Для этого умножим (16.4) на a'_{12} и, вычитая из (16.2), найдем

$$x_1 + a''_{13}x_3 = a''_{14}, \tag{16.7}$$

где $a''_{13} = a'_{13} - a''_{23}a'_{12}$; $a''_{14} = a'_{14} - a''_{24}a'_{12}$.

5. При помощи (16.6) исключим x_3 из уравнений (16.7) и (16.4). Для этого сначала умножим (16.6) на a''_{13} и вычтем из (16.7), получим (x_3 исключается):

$$x_1 = a''_{14} - c_3a''_{23} \equiv c_1.$$

Затем умножим (16.6) на a''_{23} и вычтем из (16.4), найдем (x_3 исключается):

$$x_2 = a''_{24} - c_3a''_{23} \equiv c_2.$$

В результате получаем решение $X \equiv (c_1, c_2, c_3)$ системы (16.1).

Процесс нахождения неизвестных x_1, x_2, x_3 методом Гаусса—Жордана удобно записывать в виде последовательности преобразованных согласно этому методу расширенных матриц системы (16.1), начиная с матрицы (16.1′).

Пример 4. Решить методом Гаусса—Жордана систему из примера 3.

Решение. Записывая исходную систему в виде (16.1′) и производя вычисления согласно пп. **1–5**, получим последовательность расширенных матриц (знаком * отмечены ведущие элементы):

$$\begin{bmatrix} 5^* & -2 & -1 & 5 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -2/5 & -1/5 & 1 \\ 0 & (1/5)^* & 3/5 & 2 \\ 0 & -1/5 & 22/5 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 10 \\ 0 & 0 & 5^* & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Видно, что система имеет решени $= (4; 7; 1)$. ▷

16.3. Решение нелинейных уравнений

16.3.1. Графическое решение уравнений

Уравнением называется равенство, содержащее неизвестные величины и не являющееся тождеством. Уравнение с одной неизвестной x можно записать в виде $f(x) = 0$, где функция $f(x)$ определена и непрерывна в некотором интервале $(a; b)$, конечном или бесконечном. Уравнение называется **алгебраическим**, если $f(x)$ — полином относительно x. К **неалгебраическим уравнениям** относятся, например, **иррациональные** и **трансцендентные** уравнения. Трансцендентное уравнение содержит неизвестную в аргументе трансцендентной функции (тригонометрической, показательной, гиперболической и обратных к ним функций). Числовые значения неизвестных, при которых уравнение превращается в тождество, называются **решениями** или **корнями** уравнения.

Для весьма приближенного нахождения (оценки) корней уравнений может использоваться **графический метод**. Корни уравнения $f(x) = 0$ находятся как абсциссы точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью Ox. Если уравнение имеет вид $g(x) = h(x)$ (или приводится к такому виду), то для нахождения его корней строят графики $y = g(x)$ и $y = h(x)$. Тогда искомые корни находятся как абсциссы точек пересечения этих графиков.

Пример 5. Графически решить уравнение $\lg x = -x$.

Решение. Если построить графики $y = \lg x$ и $y = -x$ на координатной (миллиметровой) бумаге (рис. 16.1), то можно приближенно найти единственный корень $x^* = 0{,}4$ данного уравнения. ▷

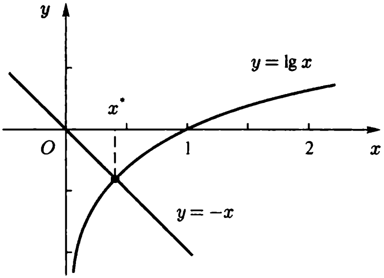


Рис. 16.1

16.3.2. Метод половинного деления

Данный метод обычно используется для приближенной оценки корня уравнения и основан на следующем свойстве непрерывных функций. Если непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция $f(x)$ принимает значения разных знаков на концах этого отрезка, т. е. $f(a) \cdot f(b) < 0$, то в интервале $(a; b)$ существует хотя бы один корень x^* уравнения $f(x) = 0$ (т. е. $f(x^*) \equiv 0$). Корень x^* будет при этом единственным, если производная $f'(x)$ существует и сохраняет постоянный знак в конечном или бесконечном интервале $(a; b)$. Это позволяет **отделить** корни уравнения друг от друга, т. е. для каждого корня подобрать такой отрезок, в котором содержится только один этот корень. Процесс отделения корней упрощается, если производная $f'(x)$ непрерывна и корни уравнения $f'(x) = 0$ легко находятся. Тогда отрезок $[a; b]$ можно разбить на участки знакопостоянства для $f'(x)$, содержащие каждый по одному корню уравнения $f(x) = 0$ в интервале $(a; b)$. Отделение корней можно осуществить также при помощи построения графика $y = f(x)$.

Пусть требуется найти в интервале $(a; b)$ корень уравнения $f(x) = 0$, где $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$. Если $f(c_1) = 0$, где $c_1 = (a+b)/2$, то c_1 — корень уравнения. Если $f(c_1) \neq 0$, то выбираем тот из половинных отрезков $[a; c_1]$ и $[c_1; b]$, на концах которого $f(x)$ принимает противоположные знаки. Середину этого половинного отрезка обозначим c_2 и аналогично предыдущему рассмотрим знаки функции $f(x)$ и т. д. Метод половинного деления либо заканчивается на некотором шаге нахождением точного корня $f(c_n) = 0$, либо дает бесконечную последовательность вложенных друг в друга отрезков, концы которых «стягиваются» к искомому корню с двух сторон.

Пример 6. Методом половинного деления вычислить корень уравнения

$$f(x) \equiv x^3 - 9x + 4 = 0,$$

лежащий в интервале $(0; 1)$.

Решение. Запишем последовательность значений функции $f(x)$ на концах соответствующих отрезков:

1) $f(0) = 4,\ f(1) = -5;$	2) $f(0{,}5) = -0{,}375;$
3) $f(0{,}25) = 1{,}766;$	4) $f(0{,}375) = 0{,}678;$
5) $f(0{,}4375) = 0{,}099;$	6) $f(0{,}4688) = -0{,}116;$
7) $f(0{,}4532) = 0{,}016;$	8) $f(0{,}461) = -0{,}05;$
9) $f(0{,}457) = -0{,}017;$	10) $\mathbf{f(0{,}455)} = -0{,}0008.$

Следовательно, искомый корень $x^* = 0{,}455$. ▷

Примечание. Рекомендуется изображать на оси Ox точки, в которых вычисляются значения $f(x)$.

16.3.3. Метод хорд

Пусть требуется найти в интервале $(a; b)$ корень x^* уравнения $f(x) = 0$, где $f(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и $f(a) \cdot f(b) < 0$. Для определенности примем: 1) $f(a) < 0$, $f(b) > 0$; 2) корень x^* отделен (т. е. в $(a; b)$ нет других корней).

В частности, корень будет единственным, если $f'(x)$ сохраняет знак в $(a; b)$. Числовая последовательность x_n, сходящаяся к искомому корню x^* (т. е. $x^* = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$), строится по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(b) - f(x_n)}(b - x_n), \tag{16.8}$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$; $x_0 = a$.

Если $f(a) > 0$, $f(b) < 0$, то вместо (16.8) имеем

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(x_n) - f(a)}(x_n - a),$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$; $x_0 = b$.

Название данного метода связано в тем, что последовательные приближения x_n ($n = 1, 2, \ldots$) являются точками пересечения оси Ox с хордами, соединяющими точки графика функции $y = f(x)$. Если требуется найти корень x^* с точностью до ε (т. е. $|x^* - x_n| < \varepsilon$), то процесс вычисления следует остановить, как только $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$.

Пример 7. Вычислить положительный корень уравнения

$$f(x) \equiv x^3 + 1{,}5x^2 - 2{,}5x - 3 = 0$$

с точностью до 0,005.

<u>Решение</u>. Отделяем корень: $f(1) = -3$, $f(2) = 6$; производная $f'(x) = 3x^2 + 3x - 2{,}5$ сохраняет знак плюс в интервале $(1; 2)$, следовательно, в этом интервале корень единственный. Найдем его по формуле (16.8). Имеем последовательно:

$$\begin{array}{llll} x_0 = 1;\ x_1 = 1{,}333; & f(x_1) = -1{,}299; & x_2 = 1{,}452; & f(x_2) = -0{,}406; \\ x_3 = 1{,}487; & f(x_3) = -0{,}113; & x_4 = 1{,}497; & f(x_4) = -0{,}026; \\ x_5 = 1{,}499; & f(x_5) = -0{,}009. & & \end{array}$$

Поскольку $|x_5 - x_4| = 1{,}499 - 1{,}497 = 0{,}002 < 0{,}005$, принимаем, что $x^* = 1{,}499$. Для надежности убедимся в том, что $f(1{,}499 + 0{,}005) > 0$, т. е. $1{,}499 < x^* < 1{,}499 + 0{,}005$. ▷

16.3.4. Метод касательных (метод Ньютона)

Пусть требуется найти отделенный на отрезке $[a; b]$ корень x^* уравнения $f(x) = 0$, при условии, что производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знак на $[a; b]$. Числовая последовательность x_n, сходящаяся к искомому корню x^*, строится по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots). \tag{16.9}$$

Здесь в качестве x_0 берется тот конец отрезка $[a; b]$, в котором знаки $f(x)$ и $f''(x)$ одинаковы.

Название данного метода связано с тем, что последовательные приближения x_n $(n = 1, 2, \ldots)$ находятся как точки пересечения оси Ox с касательными к графику $y = f(x)$.

Если вычисление $f'(x_n)$ затруднительно, то вместо (16.9) можно применять формулу

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_0)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Пример 8. Вычислить наименьший корень уравнения $e^x = 5x$ с точностью до $10^{-4} = 0{,}0001$.

<u>*Решение*</u>. Запишем уравнение в виде $f(x) \equiv e^x - 5x = 0$. Отделяем корень: $f(0) = 1 > 0$, $f(1) = 2{,}71828 - 5 = -2{,}28172 < 0$ и $f'(x) = e^x - 5$ сохраняет отрицательный знак в интервале $(0; 1)$. Искомый корень находится в этом интервале. Поскольку $f''(x) = e^x > 0$, берем $x_0 = 0$ (так как $f(0) > 0$). Далее имеем последовательно по формуле (16.9):

$$\begin{array}{lll} x_1 = 0{,}25; & f(x_1) = 0{,}034; & f'(x_1) = -3{,}716; \\ x_2 = 0{,}2591; & f(x_2) = 0{,}0003; & f'(x_2) = -3{,}7042; \\ x_3 = 0{,}25918; & f(x_3) = -3 \cdot 10^{-5} < 0. & \end{array}$$

Поскольку $f(x_3 - 0{,}0001) = f(0{,}25908) = 0{,}0003 > 0$, то $0{,}25908 < x^* < 0{,}25918$, следовательно, с ошибкой, не превышающей 10^{-4}, можно принять $x^* = 0{,}2591$. ▷

16.3.5. Комбинированный метод хорд и касательных

Методы хорд и касательных могут использоваться совместно. Пусть при выполнении условий, приведенных в 16.3.4, требуется найти отделенный корень уравнения $f(x) = 0$. Для определенности полагаем, что $f'(x) > 0$, $f''(x) > 0$ на $[a; b]$. Другие возможные случаи рассматриваются аналогично. Комбинированный метод дает две числовые последовательности x_n и $\overline{x}_n$, сходящиеся к искомому корню x^* с двух сторон:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f(\overline{x}_n) - f(x_n)}(\overline{x}_n - x_n),$$

$$\overline{x}_{n+1} = \overline{x}_n - \frac{f(\overline{x}_n)}{f'(\overline{x}_n)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Здесь $x_0 = a$, $\overline{x}_0 = b$. При этом $x_n < x^* < \overline{x}_n$. Процесс прекращается, как только $\overline{x}_n - x_n < \varepsilon$, где ε — заданная точность (абсолютная погрешность) приближенного корня. Значение корня x^* берут равным $x^* = (x_n + \overline{x}_n)/2$.

16.3.6. Метод итераций (метод последовательных приближений)

Пусть требуется вычислить корень уравнения $x = g(x)$, где $g(x)$ определена и дифференцируема на отрезке $[a; b]$, причем все ее значения $g(x)$ принадлежат $[a; b]$. Тогда, если существует число q такое, что $|g'(x)| \leqslant q < 1$ всюду в $(a; b)$, то данное уравнение имеет ровно один корень x^* на $[a; b]$, а сходящаяся к нему последовательность x_n строится по формуле

$$x_n = g(x_{n-1}) \quad (n = 1, 2, \ldots). \tag{16.10}$$

В качестве x_0 здесь может быть взято любое приближенное значение корня (найденное, например, графическим методом), или даже любое произвольное значение x_0 на $[a; b]$. Если ε — заданная предельная абсолютная погрешность корня x^* (т. е. $|x^* - x_n| \leqslant \varepsilon$), то процесс продолжается до выполнения неравенства

$$|x_n - x_{n-1}| \leqslant \frac{1-q}{q}\varepsilon.$$

Пример 9. Вычислить $\sqrt{2}$ с точностью до 10^{-4}.

Решение. Значение $x = \sqrt{2}$ является корнем уравнения $x^2 = 2$, которое можно привести к виду

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right) \equiv g(x).$$

Здесь $g'(x) = \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{2}{x^2}\right)$ и условие $|g'(x)| < 1$ выполняется при $x^2 > 2/3$. Возьмем $x_0 = 1$ ($1^2 > 2/3$). Вычисляем приближения x_n с одной запасной цифрой по формуле (16.10): $x_1 = g(x_0) = 1{,}5$; $x_2 = g(x_1) = 1{,}41667$; $x_3 = g(x_2) = 1{,}41422$; $x_4 = 1{,}41421$. Поскольку $|g'(x)| \leqslant 0{,}5 = q$ на отрезке $[1; 2]$, имеем $(1 - q)/q = 1$. Следовательно, можно принять $\sqrt{2} = 1{,}4142$ с точностью до 10^{-4}, так как $|x_4 - x_3| = 10^{-5} < 10^{-4}$. ▷

Примечание. Если для уравнения $x = g(x)$ выполняется условие $|g'(x)| > 1$, то следует перейти к решению равносильного уравнения $x = h(x)$, где $h(x)$ — обратная к $g(x)$ функция, для которой $|h'(x)| < 1$.

16.4. Вычисление значений функций

16.4.1. Приближенные формулы

Приведенные в табл. 16.1 **приближенные формулы** позволяют вычислять значения некоторых часто используемых функций. Для получения результата с n верными цифрами, $|x|$ не должно превышать определенного числа, стоящего на пересечении соответствующей строки и столбца.

16.4.2. Вычисление значений полинома по схеме Горнера

Пусть требуется найти значение полинома

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n-1}x^{n-1} + a_n x^n$$

Таблица 16.1

Формула	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$
$(1+x)^2 \approx 1+2x$	0,07	0,022	0,007
$(1+x)^3 \approx 1+3x$	0,04	0,012	0,004
$\dfrac{1}{1+x} \approx 1-x$	0,06	0,022	0,007
$\sqrt{1+x} \approx 1+\dfrac{1}{2}x$	0,19	0,062	0,020
$\sqrt[3]{1+x} \approx 1+\dfrac{1}{3}x$	0,20	0,065	0,021
$\sin x \approx x$	0,31	0,144	0,067
$\cos x \approx 1$	0,10	0,031	0,010
$\operatorname{tg} x \approx x$	0,25	0,112	0,053
$\lg(1+x) \approx 0{,}4343x$	0,14	0,047	0,015
$10^x \approx 1+2{,}303x$	0,04	0,014	0,004
$\lg\dfrac{1+x}{1-x} \approx 0{,}8686x$	0,25	0,119	0,055

Табл. 16.1 заимствована из кн.: Математический энциклопедический словарь. М.: Сов. энциклопедия, 1988. 847 с.

В тригонометрических формулах x измеряется в радианах. Если радианная мера угла равна x, то этот угол содержит $(180^\circ/\pi)\cdot x$ градусов. Угол в 1 радиан равен приближенно $57^\circ 17' 44''{,}8$. Угол в 1° равен $\pi/180 \approx 0{,}017453292$ радиан.

с действительными коэффициентами a_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ при $x = a$. Если записать многочлен в виде

$$P(x) = a_0 + x\Big(a_1 + x\big(a_2 + \ldots + x(a_{n-2} + x(a_{n-1} + a_n x)) \ldots\big)\Big),$$

то нахождение значения $P(a)$ сведется к следующей последовательности вычислений, называемой **схемой Горнера**:

$$b_n = a_n, \quad b_{n-1} = a_{n-1} + ab_n, \quad b_{n-2} = a_{n-2} + ab_{n-1},$$
$$\ldots \qquad b_1 = a_1 + ab_2, \qquad b_0 = a_0 + ab_1 = P(a).$$

При проведении вычислений схему Горнера удобнее записывать в виде:

$$
\begin{array}{c|c|c|c|l}
(+)\; a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \ldots & a_0 \\
 & ab_n & ab_{n-1} & \ldots & ab_1 \\
\hline
b_n & b_{n-1} & b_{n-2} & \ldots & b_0 = P(a)
\end{array}
\qquad \underline{|a}
$$

Пример 10. Вычислить при $x = 2$ значение полинома $P(x) = 3 + 2x - 3x^2 + x^3 - x^4$.

Решение.

$$
\begin{array}{c|c|c|c|l}
(+)\; -1 & 1 & -3 & 2 & 3 \\
 & -2 & -2 & -10 & -16 \\
\hline
-1 & -1 & -5 & -8 & -13 = P(2)
\end{array}
\qquad \underline{|2}
$$

Ответ: $P(2) = -13$. ▷

16.4.3. Вычисление значений аналитической функции

Пусть действительная функция $f(x)$ аналитична в точке x_0 (см. 9.7, 10.3) и ее разложение в ряд Тейлора в некоторой окрестности $|x - x_0| < R$ этой точки имеет вид

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots \\ \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots . \tag{16.11}$$

При $x_0 = 0$ из (16.11) получается ряд Маклорена

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \ldots . \tag{16.12}$$

Выражение (16.11) можно записать в виде

$$\begin{gathered} f(x) = S_n(x) + R_n(x), \\ S_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k, \\ R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}; \\ c = x_0 + \theta(x - x_0); \quad 0 < \theta < 1. \end{gathered} \tag{16.13}$$

Для ряда Маклорена имеем

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}; \quad c = \theta x, \quad 0 < \theta < 1.$$

В равенствах (16.13) $S_n(x)$ и $R_n(x)$ называются полиномом Тейлора и остаточным членом соответственно.

Значение $f(x_0+h)$ при известном $f(x_0)$, где h — заданное приращение аргумента, можно найти по формуле (16.13), записанной в виде

$$\begin{gathered} f(x_0+h)=f(x_0)+f'(x_0)h+\frac{f''(x_0)}{2!}h^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}h^n+R_n(h); \\ R_n(h)=\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}h^{n+1}; \quad c=x_0+\theta h, \quad 0<\theta<1. \end{gathered} \tag{16.14}$$

Видно, что при приближенной замене функции ее полиномом Тейлора $S_n(h)$ погрешность выражается остаточным членом $R_n(h)$ и быстро стремится к нулю при $h\to 0$ (при $x\to x_0$) и возрастает при увеличении h. Погрешность уменьшается также при увеличении числа n слагаемых в $S_n(h)$ $[R_n(h)\to 0$ при $n\to\infty]$.

Пример 11. Вычисление некоторых значений функции e^x.

1) Вычислим $\sqrt{e}$ с точностью до четвертого десятичного знака (т. е. до $\varepsilon=0{,}5\cdot 10^{-4}$). Для функции $f(x)=e^x$ ряд Маклорена имеет вид

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots$$

с интервалом сходимости $-\infty<x<+\infty$. Согласно (16.13) запишем

$$\begin{gathered} e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+R_n(x), \\ R_n(x)=\frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1} \quad (0<c<x). \end{gathered} \tag{16.15}$$

По условию $x=0{,}5$. Имеем: $2<e<3$; $e^{0,5}<2$; $e^c<2$; следовательно

$$R_n(0{,}5)<\frac{2}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}<\frac{1}{(n+1)!2^n}. \tag{16.16}$$

Число слагаемых в полиноме Тейлора (при $x=0{,}5$)

$$S_n(x)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}, \tag{16.17}$$

обеспечивающих заданную точность ε при замене e^x полиномом $S_n(x)$, находится из условия

$$R_n\left(\frac{1}{2}\right)<\frac{1}{(n+1)!2^n}<\varepsilon.$$

В действительности окончательная погрешность оказывается больше, чем ε, в связи с погрешностями арифметических действий и округлении при вычислении отдельных слагаемых полинома (16.17) и его суммы. По этой причине на практике все промежуточные вычисления проводятся с двумя запасными точным знаками после запятой. Окончательный результат округляется до требуемого количества цифр после запятой.

Вычисляя правую часть неравенства (16.16) при $n = 1, 2, \ldots$, получим последовательно

$$\frac{1}{2!\,2} = \frac{1}{4}, \quad \frac{1}{3!\,2^2} = \frac{1}{24}, \quad \frac{1}{4!\,2^3} = \frac{1}{192}, \quad \frac{1}{5!\,2^4} = \frac{1}{1920}, \quad \frac{1}{6!\,2^5} = \frac{1}{23040} = 0{,}43 \cdot 10^{-4} < 0{,}5 \cdot 10^{-4},$$

т. е. в полиноме (16.17) достаточно взять $n = 5$, так как $R_5(0{,}5) < 0{,}5 \cdot 10^{-4}$. Вычисляя в (16.17) при $x = 0{,}5$ все шесть слагаемых с шестью десятичными знаками (два знака запасных), получим

$$S_5(0{,}5) = 1{,}000000 + 0{,}500000 + 0{,}125000 + 0{,}020833 + 0{,}002604 + 0{,}000260 = 1{,}648697;$$

т. е. $\sqrt{e} = 1{,}6487$.

2) Если $x = 1$, то полином (16.17), дающий приближенное значение e, примет вид

$$S_n(1) = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!}.$$

Для нахождения числа n имеем неравенство

$$R_n(1) = \frac{e^c}{(n+1)!} < \frac{3^c}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}.$$

Вычисления, аналогичные предыдущим, показывают, что для нахождения e с точностью до $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ (до четвертого десятичного знака), надо взять $n = 8$, при этом $e = 2{,}7183$.

3) Если $x = -1$, то (16.17) примет вид

$$S_n(-1) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{1}{n!},$$

а остаточный член ($-1 < c < 0$):

$$|R_n(-1)| = \left| \frac{e^c}{(n+1)!} (-1)^{n+1} \right| < \frac{1}{(n+1)!},$$

так как $e^c < e^0 = 1$.

Здесь при $n = 7$ имеем $\dfrac{1}{8!} = 2 \cdot 10^{-5} = 0{,}2 \cdot 10^{-4} < 0{,}5 \cdot 10^{-4}$. Следовательно, для обеспечения точности до $0{,}5 \cdot 10^{-4}$, в полиноме (16.17) надо взять 8 слагаемых:

$$S_7(-1) = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!}.$$

Проводя вычисления с двумя запасными цифрами, получим

$$\begin{aligned} S_7(-1) &= 1 - 1 + 0{,}500000 - 0{,}166667 + 0{,}041667 - 0{,}008333 + 0{,}001389 - 0{,}000198 = \\ &= 0{,}367858; \quad \text{т. е.} \quad 1/e = 0{,}3679. \end{aligned}$$

Если $|x| > 1$, то использование формулы (16.15) связано с очень большим объемом вычислений. В это случае x следует представить как сумму $x = [x] + \{x\}$, где $[x]$ — целая часть числа x (т. е. наибольшее целое число, не превосходящее x); $\{x\} = x - [x]$ — дробная часть числа x. Например,

$$4{,}3 = [4{,}3] + \{4{,}3\} \equiv 4 + 0{,}3; \quad -2{,}4 = [-2{,}4] + \{-2{,}4\} \equiv -3 + 0{,}6.$$

Задача нахождения e^x сводится теперь к вычислению целой (положительной или отрицательной) степени числа e ($e = 2{,}718281828$; $1/e = 0{,}367879441$) и числа e^r, где $r = \{x\}$ $(0 < r < 1)$. Вычисление e^r удобно проводить так[1]:

$$e^r = u_0 + u_1 + u_2 + \ldots + u_n + R_n(r);$$

$$R_n(r) < \frac{r}{n}u_n; \quad u_0 = 1; \quad u_k = \frac{r}{k}u_{k-1} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Если точность ε задана, то вычисления заканчиваются при условии $|u_n| < \varepsilon$, так как при этом $|R_n| < |u_n|$. Вычисления проводятся с двумя запасными цифрами после запятой. Окончательно, $e^r \approx u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Пример 12. Вычисление значений функции $f(x) = \ln(1+x)$. Справедливы разложения Маклорена:

$$\begin{aligned}
\ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots \quad (-1 < x \leqslant 1),\\
\ln(1-x) &= -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots - \frac{x^n}{n} + \ldots \quad (-1 \leqslant x < 1).
\end{aligned} \tag{16.18}$$

Введя обозначение[2]

$$z = \frac{1-x}{1+x} \quad \left(x = \frac{1-z}{1+z}\right),$$

получим из (16.18) (при $0 < z < +\infty$):

$$\ln z = -2\left[\frac{1-z}{1+z} + \frac{1}{3}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{1-z}{1+z}\right)^5 + \ldots\right].$$

Отсюда следует, что для любого числа $x > 0$, записанного в виде $x = 2^m \cdot z$ (m — целое число; $0{,}5 \leqslant z < 1$), справедливо равенство

$$\ln x = m\ln 2 - 2(v_1 + v_2 + \ldots + v_n) - R_n, \tag{16.19}$$

где

$$v_i = \frac{t^{2i-1}}{2i-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \quad t = \frac{1-z}{1+z}; \quad 0 < t \leqslant \frac{1}{3};$$

$$\ln 2 = 0{,}6931472; \quad 0 < R_n < \frac{9}{4}\frac{t^{2n+1}}{2n+1}.$$

Суммирование $v_1 + v_2 + \ldots + v_n$ заканчивается при условии $v_n < 4\varepsilon$, где ε — заданная точность ($R_n < \varepsilon$).

1) Вычислим $\ln 0{,}9$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$. Промежуточные вычисления проведем с двумя запасными цифрами (см. пример 11). Запишем $0{,}9 = 2^0 \cdot 0{,}9$ ($m = 0$; $z = 0{,}9$), тогда $t = \dfrac{1-0{,}9}{1+0{,}9} = 0{,}052632$. Имеем последовательно по формулам (16.19): $v_1 = t = 0{,}052632$; $v_2 = t^3/3 = 0{,}000049$. Видно, что $v_2 < 4\varepsilon = 2 \cdot 10^{-4}$. Следовательно, $\ln 0{,}9 = -2(0{,}052632 + 0{,}000049) = -0{,}105362 \approx -0{,}1054$.

[1] *Демидович Б. П., Марон И. А.* Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1966. 664 с.

[2] См.: Там же.

2) Вычислим $\ln 5$ с точностью до $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$. Промежуточные вычисления проведем с двумя запасными цифрами после запятой. Имеем $5 = 2^3 \cdot \dfrac{5}{2^3} = 2^3 \cdot 0{,}625$ ($m = 3$; $z = 0{,}625$). Отсюда $t = 0{,}2307692$. Имеем последовательно: $v_1 = t = 0{,}2307692$; $v_2 = t^3/3 = 0{,}0040965$; $v_3 = t^5/5 = 0{,}0001309$; $v_4 = t^7/7 = 0{,}0000050$. Видно, что $v_4 < 0{,}5 \cdot 10^{-5} < 4\varepsilon = 2 \cdot 10^{-5}$. Следовательно,

$$\ln 5 = 3 \cdot 0{,}6931472 - 2(0{,}2307692 + 0{,}0040965 + 0{,}0001309 + 0{,}0000050) =$$
$$= 1{,}6094383 \approx 1{,}60944.$$

Пример 13. Вычисление значений $\sin x$ и $\cos x$.

Для вычисления $\sin x$ при $0 \leqslant x \leqslant \pi/4$ используется разложение Маклорена

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots \quad (-\infty; +\infty),$$

которое для практических расчетов удобнее записать в виде[3]:

$$\sin x = v_1 + v_2 + \ldots + v_n + R_n;$$
$$v_1 = x, \quad v_{i+1} = -\frac{x^2}{2i(2i+1)} v_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1); \qquad (16.20)$$
$$|R_n| \leqslant |v_{n+1}|.$$

Суммирование $v_1 + \ldots + v_n$ в (16.20) заканчивается при выполнении условия $|v_n| < \varepsilon$, где ε — заданная точность.

Если $\pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/2$, то для вычисления $\sin x$ используется разложение функции $\cos t$, где $t = \pi/2 - x$ и $0 \leqslant t \leqslant \pi/4$.

Функция $\cos t$ вычисляется по схеме[4]:

$$\cos t = u_1 + u_2 + \ldots + u_n + R_n,$$
$$u_1 = 1, \quad u_{i+1} = -\frac{t^2}{2i(2i-1)} u_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1);$$
$$|R_n| \leqslant |u_{n+1}|.$$

Вычисление заканчивается при условии $|u_n| < \varepsilon$, где ε — заданная точность.

Если угол выражен в градусах, то для перевода его в радианы используется равенство: $1^\circ = 0{,}017453292$ радиан. Например, для угла $10^\circ 15'$ имеем (точность до $0{,}5 \cdot 10^{-5}$):

$$x = \frac{\pi \cdot 10}{180} + \frac{\pi \cdot 0{,}25}{180} = 10{,}25 \cdot 0{,}0174532 = 0{,}1788953 \approx 0{,}17890.$$

Вычислим $\sin 0{,}5$ с точностью до четвертого знака после запятой (т. е. до $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$). Имеем последовательно (по формуле (16.20)):

$$v_1 = x = 0{,}500000; \quad v_2 = -\frac{x^2}{2 \cdot 1(2 \cdot 1 + 1)} v_1 = -0{,}020833;$$

[3] *Демидович Б. П., Марон И. А.* Указ. соч.

[4] См.: Там же

$$v_3 = 0{,}000260; \quad v_4 = -0{,}000002; \quad |v_4| = 0{,}02 \cdot 10^{-4} < 0{,}5 \cdot 10^{-4}.$$

Следовательно, $\sin 0{,}5 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = 0{,}479425 \approx 0{,}4794$. Вычисления проводились с двумя запасными цифрами.

16.5. Интерполяция функций

16.5.1. Постановка задачи интерполяции

Интерполяцией (интерполированием) в общем случае называется нахождение значений какой-либо величины по известным отдельным ее значениям.

Задача интерполяции функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ по ее известным значениям y_j $(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$ в $n+1$ точках x_j $(a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant b)$ заключается в построении другой функции $F(x)$ (обычно, это полином $P(x)$ степени не выше n) такой, что $F(x_j) = y_j$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Точки $x_0, x_1, \ldots, x_n$ называются **узлами (опорными точками) интерполяции**, а $F(x)$ — **интерполяционной функцией**. Функцию $y = F(x)$ применяют для приближенного нахождения значений функции $f(x)$ в точках x, отличающихся от узлов интерполяции. Нахождение значений $f(x)$, когда x лежит между x_0 и x_n, называется **интерполяцией**; если же x находится вне отрезка $[x_0; x_n]$ — **экстраполяцией**. При этом справедливо приближенное равенство $f(x) \approx F(x)$.

16.5.2. Интерполяционный полином Лагранжа

Пусть в $n + 1$ точках $x_0 < x_1 < x_1 < \ldots < x_n$, принадлежащих отрезку $[a; b]$, заданы значения некоторой функции $y = f(x)$:

$$y_0 = f(x_0), \quad y_1 = f(x_1), \quad \ldots \quad y_n = f(x_n).$$

Тогда существует единственный **интерполяционный полином Лагранжа**:

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \sum_{i=0}^{n} y_i L_{ni}(x), \\ L_{ni}(x) &= \frac{(x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \ldots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_n)}, \\ i &= 0, 1, \ldots, n, \end{aligned} \tag{16.21}$$

где полиномы $L_{ni}(x)$ называются **лагранжевыми коэффициентами**. При этом $L_{ni}(x_j) = 0$ если $i \neq j$, $L_{ni}(x_i) = 1$; $P_n(x_j) = y_j$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$.

В частности, при $n = 2$ (три узла интерполяции):

$$P_2(x) = y_0 \cdot \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} + y_1 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} + y_2 \cdot \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)}.$$

Графиком функции $y = P_2(x)$ является парабола, проходящая через три точки (x_0, y_0), (x_1, y_1), (x_2, y_2).

Пример 14. Дана таблица значений функции $y = f(x)$

i	0	1	2	3
x_i	−1	1	2	4
y_i	2	3	1	5

Найти значение $f(3)$.

Решение. Согласно (16.21) при $n = 3$ имеем

$$P_3(x) = 2\cdot\frac{(x-1)(x-2)(x-4)}{(-1-1)(-1-2)(-1-4)} + 3\cdot\frac{(x+1)(x-2)(x-4)}{(1+1)(1-2)(1-4)} +$$
$$+ 1\cdot\frac{(x+1)(x-1)(x-4)}{(2+1)(2-1)(2-4)} + 5\cdot\frac{(x+1)(x-1)(x-2)}{(4+1)(4-1)(4-2)} =$$
$$= \frac{1}{30}(8x^3 - 31x^2 + 7x + 106).$$

Отсюда $f(3) \approx P_3(3) = \frac{1}{30}(8\cdot 3^3 - 31\cdot 3^2 + 7\cdot 3 + 106) = 2\frac{2}{15}$. ▷

Погрешность (остаточный член) интерполяции определяется как разность $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. Если $f(x)$ имеет на $[a;b]$ все непрерывные производные $f'(x)$, $f''(x)$, …, $f^{(n+1)}(x)$, то

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)(c)}}{(n+1)!}(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n),$$

где c — некоторая неизвестная точка, зависящая от x и лежащая внутри $(a;b)$. Вводя обозначения

$$M_{n+1} = \max_{a\leqslant x\leqslant b}\left|f^{(n+1)}(x)\right|; \quad \Pi_{n+1}(x) = (x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_n),$$

запишем оценку абсолютной погрешности интерполяции в точке x отрезка $[a;b]$:

$$|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}|\Pi_{n+1}(x)|,$$

а также на всем отрезке $[a;b]$:

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|R_n(x)| \leqslant \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\Pi_{n+1}(x)|. \quad (16.22)$$

Пример 15. Оценить абсолютную погрешность интерполяции в точке $x = 118$ и на отрезке $[a;b]$ (при $a = 100$, $b = 135$), возникающую при замене функции $y = \sqrt{x}$ интерполяционным полиномом Лагранжа второй степени ($n = 2$), построенным на трех узлах: $x_0 = 100$, $x_1 = 123$, $x_2 = 135$.

<u>*Решение*</u>. $y' = \frac{1}{2}x^{-1/2}$, $y'' = -\frac{1}{4}x^{-3/2}$, $y''' = \frac{3}{8}x^{-5/2}$. Отсюда:

$$M_3 = \max|y'''| = \frac{3}{8} \cdot 100^{-5/2} = \frac{3}{8}10^{-5} \quad (100 \leqslant x \leqslant 135).$$

Следовательно,

$$|R_2(118)| \leqslant \frac{(3/8) \cdot 10^{-5}}{(2+1)!}\bigl|(118-110)(118-123)(118-135)\bigr| = 0{,}96 \cdot 10^{-3};$$

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b}|R_2(x)| \leqslant \frac{10^{-5}}{16}\max_{a \leqslant x \leqslant b}\bigl|(x-100)(x-123)(x-144)\bigr| = 2{,}8 \cdot 10^{-3}. \qquad \triangleright$$

Задача минимизации оценки погрешности интерполяции состоит в нахождении такого расположения узлов интерполяции x_i $(i = 0, 1, \ldots, n)$ на отрезке $[a; b]$, для которого величина $\max\limits_{a \leqslant x \leqslant b}|\Pi_{n+1}(x)|$ в правой части (16.22) была бы наименьшей. Доказано (П. Л. Чебышёв), что наилучшими в этом смысле узлами являются точки

$$x_i = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t_i, \quad t_i = -\cos\frac{2i+1}{2n+2}\pi \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n), \qquad (16.23)$$

где t_i — нули так называемого полинома Чебышёва $T_{n+1}(t)$. При таком выборе узлов оценка погрешности интерполяции (16.22) примет вид

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b}|R_n(x)| \leqslant 2\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}.$$

Полиномы Чебышёва определяются равенством $T_n(t) = \cos(n \cdot \arccos t)$, $(-1 \leqslant t \leqslant 1)$. В частности, $T_0(t) = 1$, $T_1(t) = t$. Справедлива рекуррентная формула

$$T_{n+1}(t) = 2t \cdot T_n(t) - T_{n-1}(t) \quad (n = 1, 2, \ldots),$$

из которой следует:

$$T_2(t) = 2t^2 - 1; \quad T_3(t) = 4t^3 - 3t; \quad T_4(t) = 8t^4 - 8t^2 + 1;$$

$$T_5(t) = 16t^5 - 20t^3 + 5t; \quad T_6(t) = 32t^6 - 48t^4 + 18t^2 - 1; \quad \ldots .$$

Свойство: $\max\limits_{[-1;1]}|T_n(t)| = 1$ $(n \geqslant 0)$.

16.5.3. Линейная интерполяция

При $n = 1$, когда имеются два узла интерполяции x_0, x_1, полином (16.21) принимает вид

$$P_1(x) = y_0\frac{x - x_1}{x_0 - x_1} + y_1\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}. \qquad (16.24)$$

Графиком линейной функции $y = P_1(x)$ является прямая, проходящая через две точки: (x_0, y_0) и (x_1, y_1). При **линейной интерполяции** функция $y = f(x)$ приближенно заменяется на отрезке $[x_0; x_1]$ линейной функцией $y = P_1(x)$.

Пусть известны значения функции $y_0 = f(x_0)$ и $y_1 = f(x_1) \equiv y_0 + \Delta$, тогда значение $f(x)$, где x находится между точками x_0 и $x_1 \equiv x_0 + h$, вычисляется приближенно по **формуле линейной интерполяции**

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{x - x_0}{h}\Delta. \tag{16.25}$$

Предельная абсолютная погрешность при линейной интерполяции на отрезке $[x_0; x_1]$ имеет согласно (16.22) оценку:

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |R_1(x)| \leqslant \frac{M_2 h^2}{8}; \quad M_2 = \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} |f''(x)|. \tag{16.26}$$

Пример 16. Дано: $y_0 = \operatorname{tg} x_0 = \operatorname{tg} 47°40' = 1{,}098$; $y_1 = \operatorname{tg} x_1 = \operatorname{tg} 47°50' = 1{,}104$. Найти при помощи линейной интерполяции $\operatorname{tg} x$ при $x = 47°46'$.

Решение. $h = x_1 - x_0 = 10'$; $\Delta = y_1 - y_0 = 0{,}006$; $x - x_0 = 6'$. По формуле (16.25) имеем

$$\operatorname{tg} 47°46' = 1{,}098 + \frac{6'}{10'} \cdot 0{,}006 = 1{,}102.$$

Согласно (16.26) абсолютная погрешность интерполяции (без учета погрешностей округления) не превышает величины

$$\frac{M_2 h^2}{8} = \max |f''(x)| \cdot \frac{h^2}{8} < 5{,}6 \cdot 10^{-6},$$

где $h = \frac{\pi}{180} \cdot \frac{1}{6} \approx 3 \cdot 10^{-3}$ в радианной мере. ▷

Примечание. При вычислениях с тригонометрическими функциями удобнее пользоваться только радианной мерой углов, во избежание недоразумений.

16.5.4. Интерполяционный полином Лагранжа с равноотстоящими узлами

Если узлы интерполяции x_i являются равноотстоящими друг от друга точками, то $x_i = x_0 + ih$, $i = 0, 1, \ldots, n$, $h > 0$ — шаг интерполяции. Тогда интерполяционный полином Лагранжа (16.21) можно записать в виде

$$P_n(x) = P_n(x_0 + qh) = \sum_{i=0}^{n} y_i \overline{L}_{ni}(q), \quad q = \frac{x - x_0}{h} \quad (x = x_0 + qh),$$

$$\overline{L}_{ni}(q) = (-1)^{n-i} \cdot \frac{q(q-1)\ldots(q-i+1)(q-i-1)\ldots(q-n)}{i!(n-i)!}.$$

Здесь узлу x_i соответствует $q = q_i = (x_i - x_0)/h = i$. В частности, при $n = 1$:

$$P_1(x) = P_1(x_0 + qh) = (1 - q) \cdot y_0 + q \cdot y_1,$$

а при $n = 2$:

$$P_2(x) = P_2(x_0 + qh) = \frac{1}{2}(q - 1)(q - 2)y_0 - q(q - 2)y_1 + \frac{1}{2}q(q - 1)y_2.$$

Погрешность интерполяции имеет вид

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = R_n(x_0 + qh) = h^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}q(q-1)\dots(q-n),$$

где $c = c(x)$ — некоторая точки внутри $(a; b)$ (см. 16.5.2).

Абсолютная погрешность интерполяции на отрезке $[x_0; x_n]$ не превышает величины

$$\max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_n} |R_n(x)| \leqslant h^{n+1}\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\max_{1 \leqslant q \leqslant n}\left|q(q-1)\dots(q-n)\right|,$$

$$M_{n+1} = \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_n}\left|f^{(n+1)}(x)\right|.$$

16.5.5. Интерполяционные полиномы Ньютона

1. Пусть функция $y = f(x)$ задана на множестве равноотстоящих друг от друга точек $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2, \dots, n;\ h > 0)$ своими значениями $y_i = f(x_i)$. Величины

$$\begin{aligned}
\Delta y_i &= y_{i+1} - y_i = f(x_i + h) - f(x_i),\\
\Delta^2 y_i &= \Delta(\Delta y_i) = \Delta y_{i+1} - \Delta y_i = (y_{i+2} - y_{i+1}) - (y_{i+1} - y_i) = y_{i+2} - 2y_{i+1} + y_i,\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\Delta^n y_i &= \Delta^{n-1}y_{i+1} - \Delta^{n-1}y_i,
\end{aligned}$$

где $n \geqslant 1$ $(\Delta^0 y_i \equiv y_i)$, называются **конечными разностями первого, второго, ..., n-го порядка** соответственно. Конечные разность удобно записывать в виде таблиц (см. табл. 16.2).

2. Первый интерполяционный полином Ньютона (для интерполяции вперед) имеет вид

$$P_n(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2!}\Delta^2 y_0 + \dots + \frac{q(q-1)\dots(q-n+1)}{n!}\Delta^n y_0, \quad (16.27)$$

где $q = (x - x_0)/h$. При этом $P_n(x_i) = y_i$ $(i = 0, 1, \dots, n)$.

Погрешность интерполяции (остаточный член), появляющаяся при замене функции $y = f(x)$ первым интерполяционным полиномом Ньютона (16.27), равна

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = h^{n+1} \cdot \frac{q(q-1)\dots(q-n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c),$$

Таблица 16.2

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	x_0	y_0			
			Δy_0		
1	x_1	y_1		$\Delta^2 y_0$	
			Δy_1		$\Delta^3 y_0$
2	x_2	y_2		$\Delta^2 y_1$	
			Δy_2		
3	x_3	y_3			

где c — некоторое неизвестное число, зависящее от x и принадлежащее отрезку $[x_0; x_n]$ при интерполяции; в случае экстраполяции c может не принадлежать $[x_0; x_n]$. Обозначая

$$M_{n+1} = \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_n} \left| f^{(n+1)}(x) \right|,$$

запишем оценку для **абсолютной погрешности интерполяции**

$$|R_n(x)| \leqslant h^{n+1} \frac{|q(q-1)\ldots(q-n)|}{(n+1)!} M_{n+1}.$$

Для $n = 1$ формула (16.27) принимает вид (**линейная интерполяция**):

$$P_1(x) = y_0 + q\Delta y_0.$$

При $n = 2$ получим формулу **квадратичной (параболической) интерполяции**:

$$P_2(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{q(q-1)}{2}\Delta^2 y_0.$$

Полиномом (16.27) удобно пользоваться для интерполяции (экстраполяции) функции $y = f(x)$ в окрестности значения x_0 как правее ($q > 0$), так и левее ($q < 0$) точки x_0.

Пример 17. В первых трех столбцах табл. 16.3 приведены: номера узлов, узлы интерполяции, значения $y = f(x)$ в этих узлах. Требуется построить первый интерполяционный полином Ньютона и приближенно вычислить $f(3)$.

Решение. В последних трех столбцах табл. 16.3 приведены конечные разности (аналогично табл. 16.2). Конечные разности, используемые для построения полинома (16.27), подчеркнуты. Вводя $q = (x-2)/2$, запишем полином (16.27) в виде ($n = 3$):

$$P_3(x) = 1 + 1 \cdot q + 1 \cdot \frac{q(q-1)}{2!} + 1 \cdot \frac{q(q-1)(q-2)}{3!} =$$

$$= 1 + q + \frac{1}{2}q(q-1) + \frac{1}{6}q(q-1)(q-2).$$

Таблица 16.3

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	2	1			
			1		
1	4	2		1	
			2		1*
2	6	4		2*	
			4*		
3	8	8*			

При $x = 3$ имеем $q = (3-2)/2 = 1/2$ (здесь $h = 2$);

$$f(3) \approx P_3(3) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right) + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-1\right)\left(\frac{1}{2}-2\right) = \frac{23}{16}.$$

Погрешность интерполяции в этом примере не может быть оценена, так как о функции $f(x)$ ничего не известно, кроме ее значений в узлах интерполяции. ▷

Примечание. Если для некоторого числа m конечные разности m-го порядка $\Delta^m y_i$ практически постоянны (с заданной точностью) для различных значений i, то это свидетельствует о том, что порядок интерполяционного полинома можно принять равным m.

3. Второй интерполяционный полином Ньютона (для интерполяции назад) с узлами $x_i = x_0 + ih$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ имеет вид

$$P_n(x) = y_n + t\Delta y_{n-1} + \frac{t(t+1)}{2!}\Delta^2 y_{n-2} + \ldots + \frac{t(t+1)\ldots(t+n-1)}{n!}\Delta^n y_0, \tag{16.28}$$

где $t = \dfrac{x - x_n}{h}$; $\Delta y_{n-1} = y_n - y_{n-1}$, $\Delta y_{n-2} = y_{n-1} - y_{n-2}$ и т. д. (см. табл. 16.2) — конечные разности. Полином (16.28) удобно использовать для **интерполяции назад** ($q < 0$) и **экстраполяции вперед** ($q > 0$).

Погрешность интерполяции (остаточный член) второго интерполяционного полинома Ньютона (16.28) имеет вид:

$$R_n(x) = f(x) - P_n(x) = h^{n+1}\cdot\frac{t(t+1)\ldots(t+n)}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c),$$

где c — некоторое неизвестное число, принадлежащее отрезку $[x_0; x_n]$ при интерполяции; при экстраполяции c может не принадлежать $[x_0; x_n]$.

Обозначая

$$M_{n+1} = \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_n}\left|f^{(n+1)}(x)\right|,$$

запишем следующую оценку для **абсолютной погрешности интерполяции**:

$$|R_n(x)| \leqslant h^{n+1}\frac{|t(t+1)\dots(t+n)|}{(n+1)!}\cdot M_{n+1}.$$

Пример 18. В условиях примера 17 построить второй интерполяционный полином Ньютона и приближенно вычислить значение $f(7)$.

Решение. Конечные разности функции $y = f(x)$, используемые для построения полинома (16.28), отмечены в табл. 16.3 знаком *. Вводя переменную $t = (x-8)/2$ (здесь шаг $h = 2$), запишем полином (16.28) в виде ($n = 3$):

$$P_3(x) = 8 + 4\cdot t + 2\cdot\frac{t(t+1)}{2!} + 1\cdot\frac{t(t+1)(t+2)}{3!} = 8 + 4t + t(t+1) + \frac{1}{6}t(t+1)(t+2).$$

При $x = 7$ имеем $t = (7-8)/2 = -1/2$;

$$f(7) \approx P_3(7) = 8+4\left(-\frac{1}{2}\right)+\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+1\right)+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}+1\right)\left(-\frac{1}{2}+2\right) = 5\frac{11}{16}.$$

Погрешность интерполяции здесь не может быть оценена (см. пример 17). ▷

16.5.6. Численное дифференцирование

Численное нахождение производной применяется к функциям, заданным таблично, а также аналитически.

Для численного дифференцирования заменяют данную функцию $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$ некоторой интерполяционной функцией $F(x)$, а затем приближенно полагают

$$f^{(m)}(x) \approx F^{(m)}(x) \quad (a < x < b),$$

где m — порядок производной.

1. Пусть в точках $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \dots, n$; $h > 0$ — постоянный шаг), принадлежащих отрезку $[a; b]$, заданы значения $y_i = f(x_i)$ функции. Тогда для нахождения в $(a; b)$ производных (если они существуют) от функции $f(x)$ ее приближенно заменяют первым интерполяционным полиномом $P_k(x)$ Ньютона (см. 16.5.5), построенным на узлах $x_0, x_1, \dots, x_k$ ($k \leqslant n$):

$$f(x) = P_k(x) = y_0 + q\Delta y_0 + \frac{1}{2}(q^2 - q)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}(q^3 - 3q^2 + 2q)\Delta^3 y_0 + \dots,$$

где $q = (x - x_0)/h$.

Производные от $f(x)$ находятся приближенно, с учетом равенства

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{h}\frac{dy}{dq},$$

по формулам:

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 + \frac{1}{2}(2q-1)\Delta^2 y_0 + \frac{1}{6}(3q^2 - 6q + 2)\Delta^3 y_0 + \ldots\right),$$

$$f''(x) = \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 + (q-1)\Delta^3 y_0 + \frac{1}{12}(6q^2 - 18q + 11)\Delta^4 y_0 + \ldots\right) \text{ и т. д.} \tag{16.29}$$

При нахождении производных по формулам (16.29) в точке x, в качестве x_0 следует брать ближайший к x узел x_i. Формулы (16.29) упрощаются при нахождении производных в узловых точках $x = x_i$. Обозначая точку x_i через x_0 $(q = 0)$, получим

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \frac{1}{h}\left(\Delta y_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 y_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 y_0 + \ldots\right), \\ f''(x_0) &= \frac{1}{h^2}\left(\Delta^2 y_0 - \Delta^3 y_0 + \frac{11}{12}\Delta^4 y_0 - \ldots\right) \text{ и т. д.} \end{aligned} \tag{16.30}$$

При нахождении производных по формулам (16.29), (16.30) происходит деление на h^m (m — порядок производной), поэтому при малом h погрешности в значениях функции могут сильно повлиять на окончательный результат.

Погрешность $\rho_m(x)$ производной m-го порядка интерполяционного полинома $P_k^{(m)}(x)$ выражается через погрешность интерполяции

$$R_k(x) = f(x) - P_k(x): \qquad \rho_m(x) = f^{(m)}(x) - P_k^{(m)}(x) = R_k^{(m)}(x).$$

В частности, при $x = x_0$ погрешность в нахождении первой производной имеет оценку

$$|\rho_1(x_0)| = |R_k'(x_0)| = \frac{h^k}{k+1}\left|f^{(k+1)}(c)\right| \leqslant \frac{h^k}{k+1}\max_{[x_0;x_k]}\left|f^{(k+1)}(x)\right|, \tag{16.31}$$

где c — некоторое неизвестное число $(x_0 < c < x_k)$.

При малой величине шага h приближенно принимают

$$|\rho_1(x_0)| \approx \frac{1}{h}\left|\frac{\Delta^{k+1} y_0}{k+1}\right|.$$

Пример 19. Для функции $y = \ln x$, значения которой заданы в табл. 16.4, найти $y'(30)$.

Решение. $h = 5$. Конечные разности приведены в табл. 16.4. Согласно первой формуле (16.30) находим (используются **подчеркнутые** конечные разности):

$$y'(30) = \frac{1}{5}(0{,}1541 + 0{,}0103 + 0{,}0016) = 0{,}0332.$$

Таблица 16.4

i	x	y	Δy	$\Delta^2 y$	$\Delta^3 y$
0	30	3,4012			
			0,1541		
1	35	3,5553		−0,0205	
			0,1336		0,0047
2	49	3,6889		−0,0158	
			0,1178		
3	45	3,8067			

Так как $y' = 1/x$, то точное значение $y'(30) = 1/30 \approx 0{,}0333$. Полученные значения $y'(30)$ различаются на 10^{-4}. С учетом $y^{(4)} = -6x^{-4}$, абсолютная погрешность согласно (16.31) не превышает $2{,}3 \cdot 10^{-4}$ (без учета погрешностей округления). ▷

2. Для численного дифференцирования функции $y = f(x)$, значения y_i которой заданы в равноотстоящих узлах $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, 1, 2, \ldots, n$; $h > 0$), ее можно приближенно заменить также интерполяционным полиномом Лагранжа с равноотстоящими узлами (см. 16.5.4), а затем принять приближенно

$$f^{(m)}(x) = P_n^{(m)}(x) \quad (m \leqslant n).$$

3. Пусть узлы $x_0, x_1, \ldots, x_n$ принадлежат отрезку $[a; b]$, на котором существуют соответствующие производные функции $y = f(x)$. Тогда для нахождения этих производных в узлах x_i справедливы следующие формулы.

При $m = 1$, $n = 1$ **(узлы** x_0, x_1**):**

1) $f'(x_0) = \dfrac{y_1 - y_0}{h} - \dfrac{h}{2} f''(c); \quad (x_0 < c < x_1);$

При $m = 1$, $n = 2$ **(узлы** x_0, x_1, x_2**):**

2) $f'(x_0) = \dfrac{1}{2h}(-3y_0 + 4y_1 - y_2) + \dfrac{h^2}{3} f'''(c),$

3) $f'(x_1) = \dfrac{1}{2h}(y_2 - y_0) - \dfrac{h^2}{6} f'''(c),$

4) $f'(x_2) = \dfrac{1}{2h}(y_0 - 4y_1 + 3y_2) + \dfrac{h^2}{3} f'''(c),$

где неизвестные точки c (различающиеся в разных формулах) принадлежат интервалу $(x_0; x_2)$.

При $m = 2$, $n = 2$ **(узлы** x_0, x_1, x_2**):**

5) $f''(x_0) = \dfrac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) - hf'''(c),$

6) $f''(x_1) = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) - \frac{h^2}{12}f^{(4)}(c)$,

7) $f''(x_2) = \frac{1}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) + hf'''(c)$,

где точки c принадлежат интервалу $(x_0; x_2)$.

При $m = 1$, $n = 3$ (**узлы** x_0, x_1, x_2, x_3):

8) $f'(x_0) = \frac{1}{6h}(-11y_0 + 18y_1 - 9y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{4}f^{(4)}(c)$,

9) $f'(x_1) = \frac{1}{6h}(-2y_0 - 3y_1 + 6y_2 - y_3) + \frac{h^3}{12}f^{(4)}(c)$,

10) $f'(x_2) = \frac{1}{6h}(y_0 - 6y_1 + 3y_2 + 2y_3) - \frac{h^3}{12}f^{(4)}(c)$,

11) $f'(x_3) = \frac{1}{6h}(-2y_0 + 9y_1 - 18y_2 + 11y_3) + \frac{h^3}{4}f^{(4)}(c)$,

и т. д., где точки c в разных формулах принадлежат интервалу $(x_0; x_3)$. (16.32)

В каждой формуле (16.32) (от 1-й до 11-й) первое слагаемое в правой части дает приближенное значение производной, указанной в левой части; а второе слагаемое, зависящее от неизвестного числа c, является погрешностью (остаточным членом) соответствующей производной. В общем случае точность формул (16.33) увеличивается с ростом n и гладкости $f(x)$ и уменьшается с ростом m, где m — порядок производной.

Пример 20. В условиях примера 18 вычислить производную от $y = \ln x$ при $x = x_0 = 30$ и $x = x_2 = 40$.

Решение. По 8-й и 10-й формуле (16.32) находим

$$f'(30) = \frac{1}{6 \cdot 5}(-11 \cdot 3{,}4012 + 18 \cdot 3{,}5553 - 9 \cdot 3{,}6899 + 2 \cdot 3{,}8067) = 0{,}0332;$$

$$f'(40) = \frac{1}{6 \cdot 5}(3{,}4012 - 6 \cdot 3{,}5553 + 3 \cdot 3{,}6889 + 2 \cdot 3{,}8067) = 0{,}0250$$

(точное значение $f'(40) = 1/40 = 0{,}0250$). ▷

4. Для **аппроксимации** (приближенной замены) дифференциальных уравнений разностными уравнениями обычно используют формулы численного дифференцирования, приведенные ниже.

Пусть для функции $y = f(x)$ заданы ее значения y_i в узлах $x_i = x_0 + ih$ ($i = 0, \pm1, \pm2, \ldots$; $h > 0$ — постоянный шаг), тогда справедливы следующие приближенные формулы для первой и второй производной:

1) $y'(x_i) \approx \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}$, 2) $y''(x_i) \approx \frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2}$ $(i = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$.

Остаточные члены этих формул (т. е. разности между левой и правой частями) равно соответственно:

$$1)\ \rho_1(c_i) = -\frac{h^2}{6} f'''(c_i) \quad (x_{i-1} < c_i < x_{i+1});$$

$$2)\ \rho_2(c_i) = -\frac{h^2}{12} f^{(4)}(c_i) \quad (x_{i-1} < c_i < x_{i+1}).$$

Причем предполагается, что в первом случае $f(x) \in C_3[x_{i-1}; x_{i+1}]$, а во втором $f(x) \in C_4[x_{i-1}; x_{i+1}]$. Следовательно, погрешность обеих этих формул порядка h^2.

16.6. Приближение (аппроксимация) функций

16.6.1. Постановка задачи аппроксимации функций

Приближением (аппроксимацией) данной функции $f(x)$ называется приближенная замена (представление) ее другой, более простой функцией $g(x)$, принадлежащей к некоторому классу функций (например, алгебраических полиномов заданной степени) и в каком-либо определенном смысле близкой к $f(x)$.

Приведем некоторые основные сведения, необходимые для формулирования задачи аппроксимации функций.

Говорят, что функция $f(x)$, заданная на отрезке $[a; b]$, принадлежит **классу** $C_m[a; b]$ (запись: $f(x) \in C_m[a; b]$), если она непрерывно дифференцируема m раз на $[a; b]$. Посредством $C[a; b]$ обозначается класс всех непрерывных на $[a; b]$ функций.

Для оценки близости двух функций используется понятие расстояния между ними. **Расстояние (метрика) между двумя функциями** $f(x)$, $g(x) \in C[a; b]$ определяется одним из двух способов:

$$1)\ \rho_1(f, g) \equiv \|f - g\|_{C[a;b]} = \max_{[a;b]} |f(x) - g(x)|,$$

$$2)\ \rho_2(f, g) \equiv \|f - g\|_{L_2} = \left[\frac{1}{b-a} \int_a^b (f(x) - g(x))^2\, dx\right]^{1/2}. \tag{16.33}$$

Расстояние $\rho_1(f, g)$ имеет смысл максимального по модулю отклонения друг от друга функций f и g на отрезке $[a; b]$, а расстояние $\rho_2(f, g)$ — среднеквадратичного отклонения f и g на $[a; b]$. **Скалярным произведением** функций $f, g \in C[a; b]$ здесь называется число (f, g), определяемое равенством

$$(f, g) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) g(x)\, dx. \tag{16.34}$$

Функции f и g называются **ортогональными** на $[a; b]$, если $(f, g) = 0$. Если функции заданы на конечном множестве точек $x_0, x_1, \ldots, x_m$ отрезка $[a; b]$, то **скалярное произведение** определяется равенством

$$(f, g) = \frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} f(x_i) \cdot g(x_i). \tag{16.35}$$

Расстояние между функциями f и g выражается через скалярное произведение

$$\rho(f, g) = (f - g, f - g)^{1/2}.$$

Скалярному произведению (16.35) соответствует среднеквадратичное расстояние

$$\rho(f, g) = \left[\frac{1}{m+1} \sum_{n=0}^{m} (f(x_i) - g(x_i))^2\right]^{1/2}. \tag{16.36}$$

Система функций $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ называется **ортогональной** на $[a; b]$, если каждые две из этих функций ортогональны друг другу на $[a; b]$, т. е. $(\varphi_i, \varphi_j) = 0$ $(i \neq j)$; $(\varphi_i, \varphi_i) > 0$. Очевидно, $(\varphi_i, \varphi_j) = (\varphi_j, \varphi_i)$.

Система функций $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C[a; b]$ называется **линейно зависимой,** если

$$C_0\varphi_0 + C_1\varphi_1 + \ldots + C_n\varphi_n = 0, \tag{16.37}$$

где $C_0, C_1, \ldots, C_n$ — одновременно не равные нулю числа. Если равенство (16.37) выполняется только при $C_0 = C_1 = \ldots = C_n$, то система функций называется **линейно независимой**. Если система функций ортогональна, то она линейно независима. Наиболее распространенной является задача аппроксимации заданных на отрезке $[a; b]$ функций **обобщенными полиномами**

$$\Phi_n(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \ldots + a_n\varphi_n(x), \tag{16.38}$$

где $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ — заданные функции; $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — произвольные числа. Обычно $\Phi_n(x)$ — это **алгебраические полиномы**

$$a_0 + a_1x + \ldots + a_nx^n,$$

или **тригонометрические полиномы**

$$a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_n$ приближения функции $f(x)$ полиномом $\Phi_n(x)$ находятся из условия минимума одной из метрик (16.33). Применяется также аппроксимация **сплайнами** — функциями, являющимися некоторыми алгебраическими полиномами на каждом частичном отрезке, на которые разбит данный отрезок $[a; b]$; причем эти полиномы подбираются так, что на всем отрезке $[a; b]$ сплайн непрерывен вместе с несколькими своими производными (см. 16.6.4).

16.6.2. Равномерное приближение функций

1. Наилучшим равномерным приближением непрерывной функции $f(x) \in C[a;b]$ полиномами (16.38) называется величина

$$E_n(f) = \min \rho_1(f, \Phi_n),$$

где минимум берется по всем числам $a_0, a_1, \ldots, a_n$. Полином Φ_n^*, доставляющий этот минимум, называется **полиномом наилучшего равномерного приближения** функции f (определения для других метрик аналогичны). Чаще всего в качестве Φ_n берут алгебраические полиномы некоторой степени n

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n.$$

Доказано (П. Л. Чебышев), что среди всех алгебраических полиномов $P_n(x)$ существует и притом единственный полином наилучшего равномерного приближения $P_n^*(x)$ такой, что

$$\max_{[a;b]} |f(x) - P_n^*(x)| \leqslant \max_{[a;b]} |f(x) - P_n(x)|.$$

Построение полинома наилучшего равномерного приближения для функции $f(x)$ часто бывает связано со значительными затруднениями, поэтому на практике обычно ограничиваются нахождением **полинома, близкого к полиному наилучшего равномерного приближения**, или просто какого-либо полинома $P_n(x)$, равномерно аппроксимирующего $f(x)$ с заданной точностью ε, т. е. $\rho_1(f, P_n) \leqslant \varepsilon$.

Для всякой функции $f(x) \in C[a;b]$ последовательность ее полиномов наилучшего равномерного приближения $\{P_n^*(x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ на $[a;b]$ ($\lim\limits_{n\to\infty} E_n(f) = 0$).

2. Если производная $f^{(n+1)}(x)$ функции $f(x) \in C_{n+1}[a;b]$ на отрезке $[a;b]$ изменяется незначительно, то полиномом, близким к полиному наилучшего равномерного приближения функции $f(x)$, является интерполяционный полином Лагранжа (16.21) с узлами интерполяции (16.23), причем

$$\rho_1(f, P_n) \leqslant 2\frac{M_{n+1}}{(n+1)!}\left(\frac{b-a}{4}\right)^{n+1}.$$

В частности, если $f^{(n+1)}(x)$ — постоянна на $[a;b]$, то

$$P_n^*(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i L_{ni}(x).$$

3. Метод близкого к наилучшему равномерного приближения функций, разлагающихся в ряд Тейлора, рассмотрим на конкретном примере.

Пример 21. Равномерно аппроксимировать функцию $y = e^x$ на отрезке $[-0{,}5; 0{,}5]$ при помощи алгебраического полинома, имеющего наименьшую возможную степень, с точностью до $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$.

Решение. При аппроксимации полиномом Тейлора ($x_0 = 0$) для обеспечения заданной точности необходимо взять $n = 5$ (см. пример 11 в 16.4.3). Погрешность аппроксимации при этом существенно неравномерна на заданном отрезке: она приближается к нулю при $x \to 0$ и возрастает на концах отрезка до $0{,}43 \cdot 10^{-4}$.

Для построения искомого алгебраического полинома $P_n(x)$ возьмем сначала полином Тейлора, аппроксимирующий функцию с более высокой точностью ($n = 6$)

$$f(x) = e^x \approx S_6(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^6}{720}.$$

При этом $\rho_1(f, S_6) < 0{,}3 \cdot 10^{-5}$.

При помощи замены $x = 0{,}5t$ перейдем к отрезку $[-1; 1]$, тогда (берем две запасные цифры после запятой):

$$Q_6(t) \equiv S_6(0{,}5t) = 1 + 0{,}5t + 0{,}125t^2 + 0{,}020833t^3 + 0{,}002604t^4 + 0{,}000260t^5 + 0{,}000022t^6.$$

Прибавим к полиному $Q_6(t)$ выражение:

$$-0{,}000022 \cdot 2^{-5} \cdot T_6(t),$$

где $T_6(t) \equiv 32t^6 - 48t^4 + 18t^2 - 1$ — полином Чебышёва. Получим полином более низкой (пятой) степени

$$\begin{aligned} Q_5(t) &= Q_6(t) - 0{,}000022 \cdot 2^{-5} \cdot T_6(t) = \\ &= 1 + 0{,}5t + 0{,}124988t^2 + 0{,}020833t^3 + 0{,}002637t^4 + 0{,}000260t^5. \end{aligned}$$

На отрезке $[-1; 1]$ справедлива оценка

$$\rho_1(Q_6, Q_5) = \max_{[-1;1]} |Q_6 - Q_5| = 0{,}000022 \cdot 2^{-5} \cdot 1 < 0{,}7 \cdot 10^{-6}.$$

Следовательно, если бы в полиноме Q_6 просто отбросить слагаемое $0{,}000022t^6$, то получилась бы в $2^5 = 32$ раз бо́льшая ошибка.

Аналогично предыдущему

$$\begin{aligned} Q_4(t) &= Q_5(t) - 0{,}000260 \cdot 2^{-4} \cdot T_5(t) = \\ &= Q_5(t) - 0{,}000260 \cdot 2^{-4} \cdot (16t^5 - 20t^3 + 5t) = \\ &= 1 + 0{,}499920t + 0{,}124988t^2 + 0{,}021153t^3 + 0{,}002637t^4; \end{aligned}$$

$$\rho_1(Q_5, Q_4) = \max_{[-1;1]} |Q_5 - Q_4| = \frac{0{,}000260}{16} < 1{,}7 \cdot 10^{-5}.$$

Возвращаясь к переменной x, находим искомый полином

$$P_4(x) = Q_4(2x) = 1 + 0{,}999840x + 0{,}499952x^2 + 0{,}169224x^3 + 0{,}042192x^4.$$

В частности, $P_4(0{,}5) = 1{,}648698$. Оценка погрешности аппроксимации на отрезке $[-0{,}5; 0{,}5]$:

$$\max_{[-0,5;0,5]} |f(x) - P_4(x)| = \max_{[-1;1]} |f(t) - Q_4(t)| \leqslant \rho_1(f, S_6) + \rho_1(Q_6, Q_5) + \rho_1(Q_5, Q_4) <$$
$$< 0{,}03 \cdot 10^{-4} + 0{,}007 \cdot 10^{-4} + 0{,}17 \cdot 10^{-4} = 0{,}21 \cdot 10^{-4}.$$

Требуемая точность выполнена. Процесс понижения степени полинома

$$Q_{n+1}(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_{n+1} t^{n+1},$$

аппроксимирующего функцию $f(t)$ на отрезке $[-1; 1]$, заканчивается при выполнении условия [5]

$$|a_{n+1}| 2^{-n} - \max_{[-1;1]} |f - Q_{n+1}| > \varepsilon.$$

Коэффициент при t^4 полинома $Q_4(t)$ равен $a_{n+1} = 0{,}002637$ ($n = 3$); $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$; $\max |f - Q_{n+1}| = 0{,}21 \cdot 10^{-4}$. Так как выполняется условие

$$0{,}002637 \cdot 2^{-3} - 0{,}21 \cdot 10^{-4} = 3{,}09 \cdot 10^{-4} > \varepsilon,$$

то дальнейшее понижение степени найденного, равномерно аппроксимирующего с требуемой точностью, полинома $P_4(x)$ невозможно. ▷

16.6.3. Метод наименьших квадратов

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi_i(x)$ ($i = 0, 1, \ldots, n$) принадлежат классу $C[a; b]$, где $\varphi_i(x)$ — заданная система линейно независимых функций, называемых **базисными функциями**. Задача состоит в том, чтобы среди полиномов вида (16.38) найти такой (т. е. найти его коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_n$) полином

$$\Phi_n^*(x) = c_0\varphi_0(x) + c_1\varphi_1(x) + \ldots + c_n\varphi_n(x),$$

для которого метрика $\rho_2(f, \Phi_n^*)$ (см. 16.6.1) была бы наименьшей. Такой полином $\Phi_n^*(x)$, называемый полином наилучшего среднеквадратичного приближения функции $f(x)$, всегда существует, и притом единственный. Для нахождения $c_0, c_1, \ldots, c_n$ частные производные выражения

$$\rho_2^2(f, \Phi_n) = (f - \Phi_n, f - \Phi_n) = (f, f) + \sum_{i,j=0}^{n} c_i c_j (\varphi_i, \varphi_j) - 2\sum_{i=1}^{n} c_i (f, \varphi_i)$$

по c_i ($i = 0, 1, \ldots, n$) приравнивают к нулю и решают полученную систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{gathered}
c_0(\varphi_0, \varphi_0) + c_1(\varphi_0, \varphi_1) + \ldots + c_n(\varphi_0, \varphi_n) = (f, \varphi_0), \\
c_0(\varphi_1, \varphi_0) + c_1(\varphi_1, \varphi_1) + \ldots + c_n(\varphi_1, \varphi_n) = (f, \varphi_1), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
c_0(\varphi_n, \varphi_0) + c_1(\varphi_n, \varphi_1) + \ldots + c_n(\varphi_n, \varphi_n) = (f, \varphi_n).
\end{gathered}$$

[5] *Волков Е. А.* Численные методы. М.: Наука, 1982. 256 с.

Определитель этой системы, называемый **определителем Грама**, не равен нулю для линейно независимой системы функций $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$.

В качестве базисных функций $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ можно взять, в частности, $1, x, x^2, \ldots, x^n$.

Пример 22. Для функции $f(x) = \sqrt[3]{x}$ построить на отрезке $[0; 1]$ полином наилучшего среднеквадратичного приближения вида $\Phi_2(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2$.

Решение. $\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$, $\varphi_2(x) = x^2$.

$$(\varphi_0, \varphi_0) = \int_0^1 1^2\,dx = 1; \qquad (\varphi_0, \varphi_1) = \int_0^1 1 \cdot x\,dx = \frac{1}{2};$$

$$(\varphi_0, \varphi_2) = \int_0^1 1 \cdot x^2\,dx = \frac{1}{3}; \quad (\varphi_1, \varphi_1) = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3};$$

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int_0^1 x \cdot x^2\,dx = \frac{1}{4}; \quad (\varphi_2, \varphi_2) = \int_0^1 x^4\,dx = \frac{1}{5};$$

$$(f, \varphi_0) = \int_0^1 \sqrt[3]{x}\,dx = \frac{3}{4}; \qquad (f, \varphi_1) = \frac{3}{7}; \quad (f, \varphi_2) = \frac{3}{10}.$$

Получаем систему уравнений

$$c_0 + \frac{1}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 = \frac{3}{4}, \quad \frac{1}{2}c_0 + \frac{1}{3}c_1 + \frac{1}{4}c_2 = \frac{3}{7}, \quad \frac{1}{3}c_0 + \frac{1}{4}c_1 + \frac{1}{5}c_2 = \frac{3}{10},$$

имеющую решение $c_0 = 9/28$, $c_1 = 9/7$, $c_2 = -9/14$.

Искомый полином

$$\Phi_2^*(x) = \frac{9}{28} + \frac{9}{7}x - \frac{9}{14}x^2.$$

Среднеквадратичное отклонение Φ_2^* от $f(x) = \sqrt[3]{x}$:

$$\rho_2(f, \Phi_2^*) = \left[\int_0^1 \left(\sqrt[3]{x} - \frac{9}{28} - \frac{9}{7}x + \frac{9}{14}x^2\right)^2 dx\right]^{1/2} \approx 0{,}04. \qquad \triangleright$$

Примечание. Если $f(x)$ задана на конечном множестве точек $x_0, x_1, \ldots x_m$ (число которых должно быть достаточно большим) отрезка $[a; b]$, то при заданных базисных функциях $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$ нахождение коэффициентов проводится аналогично с помощью скалярного произведения (16.36).

16.6.4. Сплайны

Пусть отрезок $[a; b]$ разбит точками (узлами) $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ на частичные отрезки. **Сплайном** называется функция, заданная на отрезке $[a; b]$, которая на каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ является алгебраическим полиномом некоторой, обычно третьей степени. Коэффициенты этих полиномов подбираются так, что на всем отрезке $[a; b]$ сплайн непрерывен вместе с его первой и, возможно, второй производной. Такие сплайны называются кубическими и обозначаются $S_3(x)$ или просто $S(x)$. Далее ограничимся лишь наиболее часто применяемыми на практике кубическими сплайнами. Сплайн называется **интерполирующим** для данной функции $f(x)$, если $S(x_i) = f(x_i) \equiv y_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$.

1. Построение сплайна, принимающего в узлах заданные значения. Пусть $S(x)$ — кубический сплайн, $y = f(x)$ — функция, определенная на отрезке $[a; b]$. Введем обозначения:

$$S(x_i) \equiv y_i, \quad S'(x_i) \equiv S_i', \quad S''(x_i) \equiv S_i'' \quad (i = 0, 1, \ldots, n),$$

$x_i - x_{i-1} = h_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Построим на отрезке $[a; b]$ кубический сплайн, интерполирующий для функции $f(x)$, принимающий заданные значения $y_i = f(x_i)$ в узлах x_i и **имеющий непрерывные на $[a; b]$ первую и вторую производные**. На каждом частичном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ сплайн $S(x)$ является кубическим полиномом, поэтому его вторую производную можно записать в виде линейной функции

$$S''(x) = -S_{i-1}'' \frac{x - x_i}{h_i} + S_i'' \frac{x - x_{i-1}}{h_i}.$$

Интегрируя это равенство по x два раза, найдем для любого x из $[x_{i-1}; x_i]$:

$$S(x) = -S_{i-1}'' \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + S_i'' \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + A_i x + B_i,$$

где S_i, A_i, B_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — неизвестные числа.

Исключая величины A_i, B_i с учетом заданных значений $S(x_i) = y_i$, получим

$$S(x) = - S_{i-1}'' \frac{(x - x_i)^3}{6h_i} + S_i'' \frac{(x - x_{i-1})^3}{6h_i} + \left(\frac{y_i}{h_i} - \frac{S_i'' h_i}{6}\right)(x - x_{i-1}) - \\ - \left(\frac{y_{i-1}}{h_i} - \frac{S_{i-1}'' h_i}{6}\right)(x - x_i) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{16.39}$$

Производная от $S(x)$ равна

$$S'(x) = -S_{i-1}'' \frac{(x - x_i)^2}{2h_i} + S_i'' \frac{(x - x_{i-1})^2}{2h_i} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} - \frac{h_i}{6}(S_i'' - S_{i-1}'') \tag{16.40}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Заменяя в выражениях (16.39), (16.40) индекс $(i - 1)$ на i, а i — на $(i + 1)$, получим соответствующий кубический полином и его производную на отрезке $[x_i; x_{i+1}]$. Приравнивая друг к другу значения первых производных этих полиномов в узлах $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (в силу непрерывности производной $S'(x)$), получим систему $(n-1)$ уравнений, содержащих $(n+1)$ неизвестную $S''_0, S''_1, \ldots, S''_n$:

$$\frac{1}{6}S''_{i-1}h_i + \frac{1}{3}S''_i(h_i + h_{i+1}) + \frac{1}{6}S''_{i+1}h_{i+1} - \frac{y_{i+1} - y_i}{h_{i+1}} + \frac{y_i - y_{i-1}}{h_i} = 0 \qquad (16.41)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

Так как здесь число неизвестных на два больше, чем уравнений, то к этой системе следует добавить еще два уравнения, связанные обычно с условиями на концах отрезка $x_0 = a$, $x_n = b$.

1) Если известны значения производных $y'_0 = f'(a)$ и $y'_n = f(b)$ на концах отрезка, то полагаем $S'_0 = y'_0$, $S'_n = y'_n$. Два добавочных уравнения находятся из выражения (16.40) при $x = a$, $i = 1$ и $x = b$, $i = n$ соответственно.

2) Если известны значения $f''(x)$ в точках a и b, то полагаем

$$S''_0 = y''_0 = f''(a); \quad S''_n = y''_n = f''(b).$$

3) Если $f(x)$ периодична с периодом $(b-a)$, т.е. $f(x+b-a) = f(x)$, то $f''(x+b-a) = f''(a)$. Отсюда следует: $S''_n = S''_0$, $S''_{n+1} = S''_1$. В этом случае к системе (16.41) следует добавить уравнение, получающееся из формулы (16.41) при $i = n$ с учетом периодичности:

$$\frac{1}{6}h_1S''_1 + \frac{1}{6}h_nS''_{n-1} + \frac{1}{3}(h_1 + h_n)S''_n - \frac{y_1 - y_n}{h_1} + \frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} = 0.$$

2. Построение сплайна по заданным в узлах значениям сплайна и его первой производной. Построенный вышеприведенным способом в п. **1**. интерполирующий сплайн, с заданными значениями в узлах (причем значения производных в узлах не заданы, но требуется их непрерывность), применяется для аппроксимации функции $y = f(x)$ и ее первых двух производных на отрезке $[a; b]$. Если же в узлах x_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ одновременно заданы значения кубического сплайна $S(x_i) = y_i \equiv f(x_i)$ и его первой производной $S'(x_i) = y' \equiv f'(x_i)$, то, в предположении, что длины всех частичных отрезков $x_i - x_{i-1} = h = (b-a)/n$ одинаковые, сплайн имеет на каждом отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ вид

$$S(x) = \frac{(x_i - x)^2[2(x - x_{i-1}) + h]}{h^3}y_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^2[2(x_i - x) + h]}{h^3}y_i +$$
$$+ \frac{(x_i - x)^2(x - x_{i-1})}{h^2}y'_{i-1} + \frac{(x - x_{i-1})^2(x - x_i)}{h^2}y'_i.$$

Здесь гарантирована непрерывность сплайна и лишь его первой производной $S'(x)$ в промежутке $[a; b]$.

3. Оценка погрешности аппроксимации сплайнами. Если $f(x) \in C_4[a;b]$ и $x_i - x_{i-1} = h$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то сплайн $S(x)$, построенный одним из двух вышеприведенных способов, удовлетворяет неравенству[6]:

$$\max_{[x_{i-1};x_i]} \left|f^{(j)}(x) - S^{(j)}(x)\right| \leqslant C \cdot h^{4-j} \max_{[a;b]} \left|f^{(4)}(x)\right|,$$

где $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 0, 1, 2$; C — некоторая постоянная. Максимальные в $[a;b]$ отклонения $S(x)$, $S'(x)$, $S''(x)$ от $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ имеют соответственно порядок $O(h^4)$, $O(h^3)$, $O(h^2)$.

Пример 23. Для функции $y = \cos x$ построим на отрезке $[-\pi/2; \pi/2]$ кубический интерполирующий сплайн, непрерывный вместе со своими первой и второй производными (см. п. **1**). Возьмем $n = 2$, $h_1 = h_2 = h = \pi/2$. Значения функции в узлах $x_0 = -\pi/2$, $x_1 = 0$, $x_2 = \pi/2$ равны $y_0 = 0$, $y_1 = 1$, $y_2 = 0$. Значения ее производной на концах отрезка известны: $y_0' = 1$; $y_2' = -1$.

Используя формулы (16.40), (16.41), составим систему трех уравнений с неизвестными S_0'', S_1'', S_2'':

$$\frac{1}{6}S_0''h + \frac{2}{3}S_1''h + \frac{1}{6}S_2''h = \frac{y_2 - y_1}{h} - \frac{y_1 - y_0}{h},$$

$$y_0' = -\frac{1}{3}S_0''h - \frac{1}{6}S_1'' + \frac{y_1 - y_0}{h},$$

$$y_2' = \frac{1}{6}S_1''h + \frac{1}{3}S_2''h + \frac{y_2 - y_1}{h}.$$

Подставляя в эту систему числовые значения величин и решая ее, получим

$$S_0'' = \frac{24}{\pi^2} - \frac{8}{\pi}; \quad S_1'' = -\frac{24}{\pi^2} + \frac{4}{\pi}; \quad S_2'' = \frac{24}{\pi^2} - \frac{8}{\pi}.$$

Согласно (16.39) искомый сплайн имеет вид:

$$S(x) = -\left(\frac{24}{\pi^2} - \frac{8}{\pi}\right)\frac{x^3}{3\pi} + \left(-\frac{24}{\pi^2} + \frac{4}{\pi}\right)\frac{(x + \pi/2)^3}{3\pi} +$$
$$+ \left(\frac{4}{\pi} - \frac{1}{3}\right)\left(x + \frac{\pi}{2}\right) + \left(-\frac{2}{\pi} + \frac{1}{3}\right)x \quad \text{при} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0;$$

$$S(x) = -\left(-\frac{24}{\pi^2} + \frac{4}{\pi}\right)\frac{(x - \pi/2)^3}{3\pi} + \left(\frac{24}{\pi^2} - \frac{8}{\pi}\right)\frac{x^3}{3\pi} +$$
$$+ \left(-\frac{2}{\pi} + \frac{2}{3}\right)x - \left(\frac{4}{\pi} - \frac{1}{3}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{при} \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

[6] *Волков Е. А.* Указ. соч. (см. сноску 5).

16.7. Приближенное вычисление интегралов

16.7.1. Вычисление интегралов при помощи рядов

Для вычисления интегралов используется свойство знакочередующихся числовых рядов с убывающими членами, согласно которому остаток такого ряда имеет знак своего первого члена и меньше его по абсолютной величине (см. 9.3.1).

Пример 24. Вычислить с точностью до $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-5}$ интеграл

$$J_1 = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx.$$

Решение. Заменяя x на x^2 в разложении e^{-x} (см. 9.7.2), получим ряд

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{x^2}{1!} + \frac{x^4}{2!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \ldots, \tag{1}$$

сходящийся в промежутке $(-\infty; +\infty)$. Интегрируя обе части (1), получим знакочередующийся числовой ряд с убывающими членами

$$J_1 = \int_0^1 e^{-x^2}\,dx = 1 - \frac{1}{3\cdot 1!} + \frac{1}{5\cdot 2!} - \frac{1}{7\cdot 3!} + \frac{1}{9\cdot 4!} - \frac{1}{11\cdot 5!} + \frac{1}{13\cdot 6!} - \frac{1}{15\cdot 7!} + \frac{1}{17\cdot 8!} + \ldots\,. \tag{2}$$

Здесь $1/(17\cdot 8!) \approx 0{,}15 \cdot 10^{-5} < 0{,}5 \cdot 10^{-5}$.

Отбрасывая в (2) девятый и последующие члены, будем иметь остаточную погрешность, не превышающую заданного ε. Складывая первые восемь членов в (2), оставляя в них по две запасные цифры и округляя окончательный результат до 5 цифр после запятой, получим $J_1 \approx 0{,}74682$. ▷

Пример 25. Вычислить с точность до $0{,}5 \cdot 10^{-3}$ интеграл

$$J_2 = \int_0^{0{,}5} \frac{\ln(1+x^2)}{x}\,dx.$$

Решение. Заменяя x на x^2 в разложении $\ln(1+x)$ (см. 9.7.2) и разделив его почленно на x, получим степенной ряд

$$\frac{\ln(1+x^2)}{x} = x - \frac{x^3}{2} + \frac{x^5}{3} - \frac{x^7}{4} + \ldots\,. \tag{1}$$

Полагаем, что функция в левой части (1) равна нулю при $x = 0$. Согласно признаку равномерной сходимости Вейерштрасса ряд в правой части (1) сходится равномерно и абсолютно на отрезке $[0; 0{,}5]$ в силу сходимости числового ряда

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 2^3} + \frac{1}{2\cdot 2^5} + \frac{1}{2\cdot 2^7} + \ldots\,.$$

Следовательно, ряд (1) можно почленно интегрировать. Получим

$$\int\limits_0^{0,5} \frac{\ln(1+x^2)}{x}\,dx = \frac{1}{2\cdot 2^2} - \frac{1}{2\cdot 4\cdot 2^4} + \frac{1}{3\cdot 6\cdot 2^6} - \frac{1}{4\cdot 8\cdot 2^8} + \ldots . \tag{2}$$

Четвертый (отбрасываемый) член ряда (2) равен $0{,}12\cdot 10^{-3} < 0{,}5\cdot 10^{-3}$. Складывая первые три члена в (2), получим (выполняя промежуточные вычисления с 5 цифрами после запятой): $J_2 = 0{,}118$. ▷

Пример 26. Вычислить с точностью до $0{,}5\cdot 10^{-4}$ интеграл

$$J_3 = \int\limits_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx.$$

Решение. Разлагая $\sin x$ в ряд (см. 9.7.2) и деля его почленно на $\sqrt{x}$, получим функциональный ряд

$$\frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \frac{x^{1/2}}{1!} - \frac{x^{5/2}}{3!} + \frac{x^{9/2}}{5!} - \frac{x^{13/2}}{7!} + \ldots . \tag{1}$$

Примем, что функция в левой части (1) равна нулю при $x = 0$. Согласно признаку равномерной сходимости Вейерштрасса ряд в (1) сходится равномерно и абсолютно на отрезке $[0; 1]$ в силу сходимости числового ряда

$$\frac{1}{1!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{7!} + \ldots .$$

Интегрируя почленно ряд в (1), получим

$$\int\limits_0^1 \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,dx = \frac{2}{3\cdot 1!} - \frac{2}{7\cdot 3!} + \frac{2}{11\cdot 5!} - \frac{2}{15\cdot 7!} + \ldots . \tag{2}$$

Четвертый (отбрасываемый) член ряда в (2) имеет порядок $0{,}13\cdot 10^{-4} < 0{,}5\cdot 10^{-4}$. Складывая три первых члена в (2), получим (выполняя промежуточные вычисления с 6 цифрами после запятой): $J_3 = 0{,}6206$. ▷

16.7.2. Квадратурные формулы

Метод квадратур при вычислении определенного интеграла состоит в замене интегрируемой на отрезке $[a; b]$ функции $f(x)$ интерполирующей или аппроксимирующей функцией $g(x)$ более простого вида. Приближенное равенство

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \int\limits_a^b g(x)\,dx \tag{16.42}$$

называется **квадратурной формулой**. Формулу (16.42) можно записать также в виде

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + R_n(f),$$

где $R_n(f)$ — **погрешность (остаточный член)** квадратурной формулы. Отметим, что **полная погрешность** складывается из погрешностей промежуточных действий и остаточного члена.

Для приближенного вычисления интеграла в левой части равенства (16.42) разобьем отрезок $[a; b]$ на n промежутков $[x_{i-1}; x_i]$ ($i = 1, 2, \ldots, n$) одинаковой длины $h = (b-a)/n$ при помощи $n+1$ точек $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, где $x_i = x_{i-1} + h$.

Рассмотрим три наиболее часто применяемые квадратурные формулы. Квадратурная формула, как правило, тем точнее, чем больше точек разбиения.

16.7.2.1. Формула прямоугольников

Пусть $n = 2m$ — четное число и даны значения $y_j = f(x_j)$ функции $y = f(x)$ в точках x_j с нечетными номерами $j = 1, 3, \ldots, 2m-1$. Поскольку на удвоенном промежутке $[x_0; x_2]$ задано только одно значение $y_1 = f(x_1)$ функции, получим интерполяционный полином нулевой степени $P_0(x) \equiv y_1$. Приближенное значение интеграла на отрезке $[x_0; x_2]$ согласно (16.42) равно

$$\int_{x_0}^{x_2} f(x)\,dx \approx 2h \cdot y_1.$$

Аналогично и для всех остальных удвоенных промежутков. Складывая вычисленные таким способом интегралы для всех удвоенных отрезков, получим **формулу прямоугольников**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx 2h(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{2m-1}).$$

Остаточный член формулы прямоугольников для $f(x) \in C_2[a; b]$ удовлетворяет неравенству:

$$|R_n(f)| \leqslant h^2 \cdot \frac{b-a}{6} \max_{[a;b]} |f''(x)|.$$

Если $f(x)$ задана лишь значениями в нескольких отдельных точках, то строгая оценка невозможна.

Пример 27. Вычислить по формуле прямоугольников интеграл

$$J = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 e^{-x^2/2}\, dx.$$

<u>*Решение*</u>. Берем $h = 0{,}1$; $n = 2m = 10$; $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0{,}3989$. Обозначим $f(x) \equiv \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$. Значения $f(x)$ приведены в таблице:

x	$x^2/2$	$y = f(x)$
$x_1 = 0{,}1$	0,005	0,3970
$x_3 = 0{,}3$	0,045	0,3813
$x_5 = 0{,}5$	0,125	0,3520
$x_7 = 0{,}7$	0,245	0,3122
$x_9 = 0{,}9$	0,405	0,2661

Интеграл равен $J = 2 \cdot 0{,}1 \cdot \sum\limits_j y_j = 0{,}3417$. Вторая производная от $f(x)$ равна:

$$y'' = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2 - 1)e^{-x^2/2}$$

и имеет $\max\limits_{[0;1]} |y''| \approx 0{,}4$ при $x = 0$. Оценка остаточного члена

$$|R_n(f)| \leqslant 0{,}01 \cdot \frac{1}{6} \cdot 0{,}4 \approx 0{,}067 \cdot 10^{-2} < 0{,}5 \cdot 10^{-2}.$$

Промежуточные вычисления проводились с 4 знаками после запятой. Точными в полученном результате $J = 0{,}3417$ являются лишь две цифры после запятой. Для сравнения, значение J, взятое из табл. 15.2, равно 0,3413. Ошибка равна примерно $|0{,}3413 - 0{,}3417| = 0{,}0004$. ▷

16.7.2.2. Формула трапеций

Пусть n — любое натуральное число и даны значения $y_i = f(x_i)$ функции $f(x)$ в точках $x_0, x_1, \ldots, x_n$. Поскольку на отрезке $[x_0; x_1]$ заданы значения y_0, y_1 функции в двух точках x_0, x_1, то имеем интерполяционный полином первой степени (16.24), который можно записать в виде

$$P_1(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - x_0).$$

Приближенное значение интеграла на отрезке $[x_0; x_1]$ согласно (16.42) равно

$$\int_{x_0}^{x_0+h} f(x)\, dx \approx \int_{x_0}^{x_0+h} P_1(x)\, dx = \frac{1}{2}h(y_0 + y_1).$$

Вычисляя аналогично интегралы для всех частичных отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ и складывая их, получим **формулу трапеций**

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + \ldots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right).$$

Если $f(x) \in C_2[a;b]$, то **остаточная погрешность** формулы трапеций удовлетворяет неравенству

$$|R_n(f)| \leqslant h^2 \frac{b-a}{12} \max_{[a;b]} |f''(x)|.$$

Пример 28. Вычислить интеграл J в примере 27 по формуле трапеций.

Решение. Берем $h = 0{,}2$; $n = 5$; $1/\sqrt{2\pi} = 0{,}3989$. Обозначим $f(x) \equiv \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$. В таблице приведены значения $f(x)$.

x	$x^2/2$	$y = f(x)$
$x_0 = 0$	0	0,3989
$x_1 = 0{,}2$	0,02	0,3910
$x_2 = 0{,}4$	0,08	0,3682
$x_3 = 0{,}6$	0,18	0,3332
$x_4 = 0{,}8$	0,32	0,2900
$x_5 = 1$	0,5	0,2419

По формуле трапеций находим приближенно $J = 0{,}3406$. Оценка остаточного члена (см. пример 27):

$$|R_n(f)| \leqslant 0{,}04 \cdot \frac{1}{12} \cdot 0{,}4 \approx 0{,}0013 < 0{,}5 \cdot 10^{-2}.$$

Точными в полученном здесь значении $J = 0{,}3406$ являются лишь две цифры после запятой. Используя табличное значение J, находим погрешность $|0{,}3413 - 0{,}3406| = 0{,}0007$. ▷

16.7.2.3. Формула Симпсона (формула парабол)

Пусть $n = 2m$ — четное число и даны значения $y_i = f(x_i)$ функции $f(x)$ в равноотстоящих точках x_i $(i = 0, 1, 2, \ldots, 2m)$. На удвоенном отрезке $[x_0; x_2]$ с точкой x_1 в середине заданы три значения y_0, y_1, y_2 функции, поэтому будем иметь интерполяционный полином второй степени (см. 16.5.2), который можно записать в виде $(x_1 = x_0 + h,\ x_2 = x_0 + 2h)$:

$$P_2(x) = y_0 + \frac{y_1 - y_0}{h}(x - x_0) + \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{2h^2}(x - x_0)[x - (x_0 + h)].$$

Согласно (16.42) получим приближенно

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+2h} f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + 4y_1 + y_2).$$

Вычисляя аналогично интегралы для всех удвоенных отрезков и складывая их, получим **формулу Симпсона** (или **формулу парабол**):

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{3}(y_0 + y_{2m} + 4\sigma_1 + 2\sigma_2),$$

где $\sigma_1 = y_1 + y_3 + \ldots + y_{2m-1}$; $\sigma_2 = y_2 + y_4 + \ldots + y_{2m-2}$.

Если $f(x) \in C_4[a;b]$, то имеет место следующая оценка остаточного члена формулы Симпсона

$$|R_{2m}(f)| \leqslant h^4\frac{b-a}{180}M_4; \quad M_4 = \max_{[a;b]}\left|f^{(4)}(x)\right|.$$

Правая часть этого неравенства является предельной остаточной погрешностью. Если предельная допустимая погрешность задана и равна ε, то следует брать шаг h, удовлетворяющий неравенству

$$h^4 < \frac{180\varepsilon}{(b-a)M_4}.$$

Пример 29. Вычислить интеграл в примере 27 по формуле Симпсона.

Решение. Берем $h = 0{,}25$; $n = 2m = 4$; $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} = 0{,}398942$. Обозначим $f(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-x^2/2}$. В таблице приведены значения $f(x)$:

x	$x^2/2$	$y = f(x)$
$x_0 = 0$	0	0,398942
$x_1 = 0{,}25$	0,03125	0,386668
$x_2 = 0{,}5$	0,125	0,352065
$x_3 = 0{,}75$	0,28125	0,301137
$x_4 = 1$	0,5	0,241970

Имеем $y_0 + y_4 = 0{,}640913$; $4\sigma_1 = 4(y_1 + y_3) = 2{,}751220$; $2\sigma_2 = 2y_2 = 0{,}704130$; $J = \frac{0{,}25}{3} \cdot 4{,}096265 = 0{,}34136$. Табличное значение интеграла равно 0,34134. Погрешность вычислений по формуле Симпсона: $0{,}34136 - 0{,}34134 = 0{,}2 \cdot 10^{-4}$.

Полная предельная погрешность вычисленного значения интеграла складывается из остаточного члена $R_4(f)$ (называемого также погрешностью метода) и погрешности суммирования. Оценка остаточного члена:

$$f^{(4)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(3 - 6x^2 + x^4)e^{-x^2/2}; \quad \max_{[0;1]}|f^{(4)}(x)| = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \approx 1{,}2;$$

$$|R_4(f)| \leqslant 0{,}25^4 \cdot \frac{1}{180} \cdot 1{,}2 < 0{,}26 \cdot 10^{-4}.$$

Если ε — наибольшая абсолютная погрешность округления значений подынтегральной функции (в нашем случае $\varepsilon = 0{,}5 \cdot 10^{-6}$), то, согласно формуле Симпсона, предельная погрешность суммирования имеет оценку:

$$h \cdot n \cdot \varepsilon = (b - a)\varepsilon = 1 \cdot 4 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-6} = 0{,}02 \cdot 10^{-4}.$$

Полная предельная абсолютная погрешность равна

$$0{,}26 \cdot 10^{-4} + 0{,}02 \cdot 10^{-4} = 0{,}28 \cdot 10^{-4}.$$

Таким образом, $J = 0{,}34136 \pm 0{,}28 \cdot 10^{-4}$. Верными здесь являются 4 знака после запятой. Промежуточные вычисления проводились с двумя запасными цифрами после запятой. ▷

16.7.3. Метод Монте-Карло

Идея **метода Монте-Карло (метода статистических испытаний)** состоит в следующем. Пусть требуется найти значение a некоторой величины, тогда выбирают такую случайную величину Y (см. 15.1.9), математическое ожидание которой равно a, т. е. $M(Y) = a$. На практике производят n независимых испытаний величины Y, в результате которых получают n ее возможных значений (т. е. выборку) $y_1, y_2, \ldots y_n$ и находят их среднее арифметическое

$$\overline{y} = \frac{1}{n}(y_1 + \ldots + y_n),$$

принимаемое в качестве приближенного значения числа a, т. е. $\overline{y} \approx a$.

Рассматривая числа $y_1, y_2, \ldots, y_n$ как возможные значения взаимно независимых случайных величин $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, имеющих одинаковые математические ожидания a и дисперсии σ^2, имеем (см. 15.1.11):

$$M(\overline{Y}) \equiv M\left(\frac{Y_1 + \ldots + Y_n}{n}\right) = \frac{1}{n}[M(Y_1) + \ldots + M(Y_n)] = \frac{na}{n} = a;$$

$$D(\overline{Y}) = \frac{1}{n^2}D(Y_1 + \ldots + Y_n) = \frac{1}{n^2}[D(Y_1) + \ldots D(Y_n)] = \frac{n\sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n};$$

$$\left[\overline{Y} = \frac{1}{n}(Y_1 + \ldots + Y_n)\right],$$

где $M(Y_1) = \ldots = M(Y_n) = a$; $D(Y_1) = \ldots = D(Y_n) = \sigma^2$.

На основании центральной предельной теоремы и правила «трех сигм» (см. 15.1.10.3) при достаточно большом числе испытаний ($n \geqslant 30$):

$$P\left(|\overline{Y} - a| < 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \approx 0{,}997,$$

т. е. вероятность того, что абсолютная величина отклонения случайной величины $\overline{Y}$ от числа a будет меньше чем $3\sigma/\sqrt{n}$, равна 0,997. Для оценки σ на практике (при $n \geqslant 30$) применяют равенство

$$\sigma^2 \approx s^2 = \frac{1}{n-1}\left[(y_1 - \overline{y})^2 + \ldots + (y_n - \overline{y})^2\right]. \qquad (16.43)$$

Определенный интеграл от некоторой функции $h(t)$ на отрезке $a \leqslant t \leqslant b$ при помощи подстановки $t = a + (b-a)x$ сводится к интегралу

$$J = \int\limits_0^1 g(x)\,dx. \qquad (16.44)$$

Один из способов вычисления интеграла (16.44) по методу Монте-Карло (**способ усреднения подынтегральной функции**) состоит в следующем. Пусть X — равномерно распределенная на отрезке $[0;\,1]$ случайная величина с плотностью распределения

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1, & 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Тогда $Y = g(X)$ также является случайной величиной с математическим ожиданием

$$M(Y) = \int\limits_0^1 g(x)f(x)\,dx = \int\limits_0^1 g(x)\,dx = J.$$

Заменяя приближенно математическое ожидание средним арифметическим, будем иметь

$$J \approx \overline{y} = \frac{1}{n}\left[g(x_1) + g(x_2) + \ldots + g(x_n)\right], \qquad (16.45)$$

где $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — случайные числа.

Случайными числами называются возможные значения равномерно распределенной на отрезке $[0;\,1]$ случайной величины. Случайные числа имеют, вообще говоря, бесконечное множество цифр после запятой. На практике используют случайные числа, содержащие конечное число десятичных знаков (цифр) после запятой. Для получения случайных чисел имеются специальные таблицы. Ниже приведен фрагмент таблицы равномерно распределенных на отрезке [0; 1] случайных чисел с двумя цифрами после запятой[7]:

Таблица 16.5

10	09	73	25	33	76	52	01	35	86	34	67	35	48	76	80	95	90	91	17
37	54	20	48	05	64	89	47	42	96	24	80	52	40	37	20	63	61	04	02
08	42	26	89	53	19	64	50	93	03	23	20	90	25	60	15	95	33	47	64
99	01	90	25	29	09	37	67	07	15	38	31	13	11	65	88	67	67	43	97
12	80	79	99	70	80	15	73	61	47	64	03	23	66	53	98	95	11	68	77

Погрешность $|J - \overline{y}|$ формулы (16.45) оценивается неравенством

$$|J - \overline{y}| < 3\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

с вероятностью $p \approx 0{,}997$, причем σ оценивается по формуле (16.43), в которой $y_i = g(x_i)$ $(i = 1, \dots, n)$. Смысл этой оценки погрешности состоит в том, что с вероятностью $p \approx 0{,}997$ доверительный интервал $(\overline{y} - 3\sigma/\sqrt{n},\ \overline{y} + 3\sigma/\sqrt{n})$ покрывает неизвестную величину J, причем $\varepsilon = 3\sigma/\sqrt{n}$ является предельной погрешностью (см. 15.2.5).

Пример 30. Методом Монте-Карло приближенно вычислить интеграл

$$J = \int_0^1 x\,dx.$$

Найти минимальное число испытаний, обеспечивающее погрешность $\varepsilon = 0{,}1$ с вероятностью 0,997.

Решение. Ограничимся десятью испытаниями ($n = 10$). Возьмем следующие случайные числа x_i с тремя цифрами после запятой (i — номер испытания), сконструированные по табл. 16.5:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i	0,100	0,973	0,253	0,376	0,520	0,135	0,863	0,467	0,354	0,876

Приближенное значение (оценка) интеграла

$$J \approx \overline{y} = \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = \frac{1}{10}\cdot 4{,}917 \approx 0{,}492.$$

Точное значение интеграла $J = 0{,}5$; поэтому абсолютная погрешность равна $|J - \overline{y}| = 0{,}5 - 0{,}492 = 0{,}008$. Для равномерно распределенной на [0; 1] случайной

[7] Таблица заимствована из кн.: *Гмурман В.Е.* Указ. соч. (см. 15.2.9).

величины $\sigma^2 = 1/12$ (см. 15.1.12). Минимальное число испытаний, обеспечивающих предельную погрешность $\varepsilon = 0{,}1$ с вероятностью 0,997, находим из равенства

$$n = \frac{3^2 \cdot \sigma^2}{\varepsilon^2} = \frac{9(1/12)}{0{,}01} = 75. \qquad \triangleright$$

16.8. Численное решение дифференциальных уравнений

16.8.1. Метод Эйлера

Предполагая, что решение задачи Коши (см. 11.1.1)

$$\bar{y}' = f(x, \bar{y}), \quad \bar{y}(x_0) = \bar{y}_0, \tag{16.46}$$

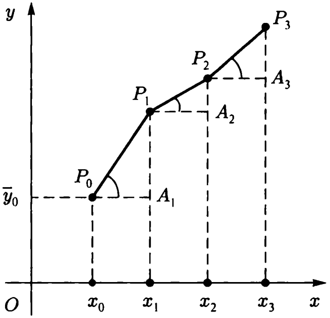


Рис. 16.2

где $x_0, \bar{y}_0$ — заданные числа, существует и единственно, найдем приближенное решение $y(x)$ этой задачи на отрезке $[x_0; x_n]$, разбитом на n равных частичных отрезков при помощи равноотстоящих точек

$$x_i = x_0 + ih \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

На отрезке $[x_0; x_1]$ принимаем

$$y(x) = \bar{y}_0 + f(x_0, y_0)(x - x_0),$$

т. е. проводим прямую P_0P_1 из точки $P_0(x_0, y_0)$ под углом $\alpha_0 = \measuredangle P_1P_0A_1$ к оси Ox $[\operatorname{tg}\alpha_0 = f(x_0, y_0)]$ (рис. 16.2). На отрезке $[x_1; x_2]$:

$$y(x) = y_1 + f(x_1, y_1)(x - x_1),$$
$$\operatorname{tg}\alpha_1 = f(x_1, y_1).$$

Для отрезка $[x_i; x_{i+1}]$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$:

$$y(x) = y_i + f(x_i, y_i)(x - x_i), \quad \operatorname{tg}\alpha_i = f(x_i, y_i), \quad y_0 = \bar{y}_0.$$

При этом $y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \cdot h$. В результате получаем ломаную линию $P_0P_1 \ldots P_{n-1}P_n$ $(\measuredangle P_1P_0A_1 = \alpha_0, \measuredangle P_2P_1A_2 = \alpha_1, \ldots)$.

Полученное решение можно представить в виде таблицы:

x_0	x_1	x_2	$\ldots$	x_{n-1}	x_n	$\ldots$
y_0	y_1	y_2	$\ldots$	y_{n-1}	y_n	$\ldots$

Отметим, что изложенный **метод Эйлера** обычно применяют лишь для весьма грубой оценки решения.

Пример 31. Найти приближенное решение задачи Коши: $\bar{y}' = x\bar{y}$, $\bar{y}(0) = 1$ на отрезке $[0; 0{,}5]$.

Решение. Берем $n=5$; $h=0{,}1$; $x_0=0$; $x_5=0{,}5$. Вычисления производим по формулам:

$$x_i = ih \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5);$$

$$y_{i+1} = y_i + f(x_i, y_i) \cdot h = y_i + x_i y_i h = y_i \cdot (1 + ih^2) \quad (i = 0, 1, 2, 3, 4).$$

Результаты вычислений приведены в таблице:

x_i	0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
y_i	1	1	1,01	1,0302	1,0611	1,1035
$\bar{y}(x_i)$	1	1,0050	1,0202	1,0460	1,0833	1,1331

Точное решение данной задачи: $\bar{y}(x) = e^{x^2/2}$. Значения $\bar{y}(x_i)$ приведены в третьей строке таблицы. Видно, что абсолютная погрешность $|y_i - \bar{y}(x_i)|$ растет с увеличением x_i и при $x = 0{,}5$ составляет 0,0296, т. е. 2,7%. ▷

Оценки погрешности приближенного решения. Погрешностью округления $\varepsilon(x_i)$ называется погрешность, возникающая при действиях с приближенными числами, в том числе при вычислении значений функции $f(x, y)$ в точках (x_i, y_i).

Погрешностью приближенного решения называется разность $\varepsilon_i = \bar{y}(x_i) - y_i$, где $\bar{y}(x)$ — точное решение задачи Коши (16.46).

Локальной погрешностью метода Эйлера $\varepsilon_M(x_i)$ называют погрешность, возникающую при замене интегральной кривой, проходящей через точку $(x_i, \bar{y}_i)$, на касательную к этой интегральной кривой в точке $(x_i, \bar{y}_i)$ при переходе из точки x_i в x_{i+1} $(\bar{y}_i \equiv \bar{y}(x_i))$.

Согласно методу Эйлера

$$y_0 = \bar{y}_0, \quad y_{i+1} = y_i + h \cdot f(x_i, y_i) \quad (i = 0, 1, \ldots, n-1). \tag{16.47}$$

Используя формулу Тейлора для точного решения, получим

$$\bar{y}(x_0) = \bar{y}_0, \quad \bar{y}_{i+1} = \bar{y}_i + h \cdot f(x_i, \bar{y}_i) + \frac{h^2}{2}\bar{y}''(c_i), \tag{16.48}$$

где $x_i < c_i < x_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$; $\bar{y}_i \equiv \bar{y}(x_i)$.

Вычитая (16.47) из (16.48) и применяя формулу Тейлора к функции $f(x_i, \bar{y})$, получим[8]:

$$\varepsilon_0 = 0, \quad \varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + h \cdot f'_{\bar{y}}(x_i, \gamma_i) \cdot \varepsilon_i + \frac{h^2}{2}\bar{y}''(c_i),$$

где $y_i < \gamma_i < \bar{y}_i$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$.

[8] *Волков Е. А.* Указ. соч. (см. сноску 5).

В силу формулы (16.48) локальная погрешность метода равна

$$\varepsilon_M(x_i) = \frac{h^2}{2}\overline{y}''(c_i)$$

и имеет порядок $O(h^2)$. Максимальная погрешность приближенного решения по методу Эйлера $\max\limits_{0\leqslant i\leqslant n} |\varepsilon_i|$ имеет порядок $O(h)$, т. е. метод имеет **первый по h порядок точности** ($s = 1$).

16.8.2. Методы Рунге—Кутта

Приведем три метода Рунге—Кутта для приближенного решения задачи Коши (16.46).

16.8.2.1. Усовершенствованный метод Эйлера второго порядка точности ($s = 2$):

$$y_i^* = y_i + \frac{h}{2}\cdot f(x_i, y_i) \quad (y_0 = \overline{y}_0 = \overline{y}(x_0)),$$

$$y_{i+1} = y_i + h\cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}, y_i^*\right) \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Максимальная погрешность приближенного решения порядка $O(h^2)$ (см. 16.8.1).

16.8.2.2. Метод второго порядка точности ($s = 2$):

$$y_{i+1}^{**} = y_i + h\cdot f(x_i, y_i) \quad (y_0 = \overline{y}_0)$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}\left[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1},\ y_{i+1}^{**})\right].$$

Максимальная погрешность приближенного решения порядка $O(h^2)$.

16.8.2.3. Метод четвертого порядка точности ($s = 4$):

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad (y_0 = \overline{y}_0),$$

$$k_1 = h\cdot f(x_i, y_i), \quad k_2 = h\cdot f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_1}{2}\right),$$

$$k_3 = h\cdot f\left(x_i + \frac{h}{2},\ y_i + \frac{k_2}{2}\right), \quad k_4 = h\cdot f(x_i + h, y_i + k_3).$$

Если $f(x, y)$ имеет непрерывные производные по x и y до 4 порядка включительно, то максимальная погрешность приближенного решения равно $O(h^4)$.

Методы Рунге—Кутта применимы и в случае, когда шаги $h_i = x_{i+1} - x_i$ — разные.

Для оценки погрешности приближенного решения задачи Коши (16.46) на практике обычно используется **правило Рунге**, заключающееся в следующем.

Пусть приближенное решения задачи Коши (16.46) ищется методом Рунге—Кутта s-го порядка точности (для метода Эйлера $s=1$; для усовершенствованного метода Эйлера $s=2$ и т. д.). Обозначим $y(x,h)$ и $y(x,2h)$ значения двух разных приближенных решений в одной и той же точке x, вычисленных с шагами h и $2h$ соответственно. Тогда оценка погрешности приближенного решения $y(x,h)$ в точке x_{i+2} имеет вид

$$\overline{y}(x_{i+2}) - y(x_{i+2},h) \approx \frac{y(x_{i+2},h) - y(x_{i+2},2h)}{2^s - 1}.$$

Здесь при переходе от точки x_i к $x_{i+2} = x_i + 2h$ величина $y(x_{i+2},h)$ вычисляется дважды (при помощи двух шагов h), а $y(x_{i+2},h)$ — один раз.

16.8.3. Метод Адамса

Пусть каким-либо методом (например, методом Рунге—Кутта) найдены приближенные значения решения задачи Коши (16.46) $y_1, y_2, \ldots, y_m$ в нескольких точках $x_1, x_2, \ldots, x_m$. Тогда последующие значения $y_{m+1}, \ldots, y_{n-1}, y_n$ вычисляются по формуле[9]:

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot \sum_{r=0}^{m} \alpha_{mr} \cdot f(x_{i-r}, y_{i-r}) \quad (i = m, \ldots, n-1).$$

Здесь m — **порядок метода**, α_{mr} — постоянные, зависящие только от порядка метода m. В частности, для $m = 0, 1, 2, 3$ соответственно:

$$\begin{array}{llll}
(m=0,\ \text{метод Эйлера}) & \alpha_{00} = 1; & & \\
(m=1)\quad \alpha_{10} = \dfrac{3}{2}, & \alpha_{11} = -\dfrac{1}{2}; & & \\
(m=2)\quad \alpha_{20} = \dfrac{23}{12}, & \alpha_{21} = -\dfrac{4}{3}, & \alpha_{22} = \dfrac{5}{12}; & \\
(m=3)\quad \alpha_{30} = \dfrac{55}{24}, & \alpha_{31} = -\dfrac{59}{24}, & \alpha_{32} = \dfrac{37}{24}, & \alpha_{33} = -\dfrac{3}{8}.
\end{array}$$

Максимальная погрешности приближенного решения имеет порядок $O(h^{m+1})$. В отличие от методов Рунге—Кутта, в которых шаг может быть изменен в процессе вычисления, в методе Адамса шаг зафиксирован.

[9] *Матвеев Н. М.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. СПб.: Специальная литература, 1996. 384 с.

Пример 32. Найти приближенное решение задачи Коши $\bar{y}' = \bar{y}$, $\bar{y}(0) = \bar{y}_0 \equiv 1$ методом Адамса на отрезке $[0; 1]$.

Решение. Берем $m = 2$, $h = 0{,}05$. Значения y_1 и y_2 найдем, используя известное точное решение

$$\bar{y}(x) = e^x: \quad y_1 = \bar{y}(0{,}05) = 1{,}051271; \quad y_2 = \bar{y}(0{,}1) = 1{,}105171.$$

Последующие значения находим по формуле (здесь $f(x, y) \equiv y$):

$$y_{i+1} = y_i + 0{,}05 \cdot \left[\frac{23}{12}y_i - \frac{4}{3}y_{i-1} + \frac{5}{12}y_{i-2}\right], \quad y_0 = \bar{y}_0,$$

где $i = 2, \ldots, 19$. В частности,

$$y_3 = y_2 + 0{,}05 \cdot \left[\frac{23}{12}y_2 - \frac{4}{3}y_1 + \frac{5}{12}y_0\right].$$

Здесь максимальная погрешность приближенного решения равна

$$O(h^3) = O(0{,}13 \cdot 10^{-4}).$$

Значения точного и приближенного решения с шестью цифрами после запятой (из них две — запасные) приведены в таблице через каждые 5 шагов[10]:

x	Точное решение	Приближенное решение
0	1	1
0,25	1,284025	1,284017
0,50	1,648731	1,648692
0,75	2,117000	2,116939
1,00	2,718282	2,718173

▷

16.8.4. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений

16.8.4.1. Понятие краевой задачи

Краевой задачей будем называть задачу о решении дифференциального уравнения

$$L[y] \equiv y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x) \quad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{16.49}$$

при наличии двух **краевых условий**

$$R_0[y] \equiv \alpha_0 y(a) + \beta_0 y'(a) = \gamma_0,$$
$$R_1[y] \equiv \alpha_1 y(b) + \beta_1 y'(b) = \gamma_1.$$

Здесь $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ — заданные функции, непрерывные на $[a; b]$; $\alpha_i, \beta_i, \gamma_i$ — заданные числа $(\alpha_i^2 + \beta_i^2 \neq 0)$ $(i = 0, 1)$. Краевые условия, для которых $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$, называются **однородными**, в противном случае — **неоднородными**.

[10] *Матвеев Н. М.* Указ. соч. (см. сноску 9).

16.8.4.2. Метод аппроксимирующих функций

Выберем на отрезке $[a; b]$ систему линейно независимых базисных функций (см. 16.6.1) $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in C_2[a; b]$ таких, что $\varphi_0(x)$ удовлетворяет неоднородным краевым условиям $R_0[\varphi_0] = \gamma_0$, $R_1[\varphi_0] = \gamma_1$, а остальные функции — однородным условиям $R_0[\varphi_i] = R_1[\varphi_i] = 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Решение краевой задачи (16.49) аппроксимируем (т. е. приближенно заменяем) функцией

$$y_n(x) = \varphi_0(x) + C_1\varphi_1(x) + \ldots + C_n\varphi_n(x) \tag{16.50}$$

с коэффициентами $C_1, \ldots, C_n$, которые требуется найти. Функция $y_n(x)$ удовлетворяет краевым условиям (16.49). Функция

$$E(x; C_1, \ldots, C_n) \equiv L[y_n] - f(x) = L[\varphi_0] + \sum_{j=1}^{n} C_j L[\varphi_j] - f(x) \tag{16.51}$$

называется **невязкой**. Если при некоторых значениях $C_1, \ldots, C_n$ невязка равно нулю всюду на $[a; b]$, то $y_n(x)$ является решением краевой задачи (16.49). Поскольку обычно невязку нельзя выбрать тождественно равной нулю на $[a; b]$, то для нахождения $C_1, \ldots, C_n$ исходят из **условия минимизации невязки**.

Метод коллокации заключается в том, что в интервале $(a; b)$ выбираются точки $x_1, \ldots, x_n$, в которых невязки (16.51) приравниваются к нулю. В результате получается система линейных алгебраических уравнений для нахождения $C_1, \ldots, C_n$.

Интегральный метод наименьших квадратов основан на отыскании минимума интеграла

$$J(C_1, \ldots, C_n) = \int_a^b E^2(x; C_1, \ldots, C_n)\, dx.$$

Коэффициенты $C_1, \ldots, C_n$ находятся из необходимого условия экстремума

$$\frac{\partial J(C_1, \ldots, C_n)}{\partial C_i} = 0 \quad (i = 1, \ldots, n),$$

сводящегося к решению системы линейных уравнений относительно $C_1, \ldots, C_n$.

Дискретный метод наименьших квадратов. Коэффициенты $C_1, \ldots, C_n$ находятся из условия минимума суммы

$$\sum_{i=1}^{m} E^2(x_i; C_1, \ldots, C_n),$$

где точки x_i принадлежат $(a; b)$ и $m \geqslant n$. При $m = n$ отсюда следует метод коллокации.

Метод частичных областей. На $[a; b]$ выбираются точки $a = x_1 < x_2 < \ldots$ $\ldots < x_{n+1} = b$. Коэффициенты $C_1, \ldots, C_n$ находятся из условий

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} E(x; C_1, \ldots, C_n)\,dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Метод ортогонализации (метод Галёркина). Коэффициенты $C_1, \ldots, C_n$ находятся из условий

$$\int_a^b E(x; C_1, \ldots, C_n)\varphi_i(x)\,dx = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Пример 33. Методом Галёркина решить краевую задачу

$$L[y] \equiv y'' - 2y' + y = x - 2 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1), \quad y(0) = y(1) = 0,$$

имеющую точное решение $\overline{y} = -xe^{x-1} + x$.

Решение. Возьмем следующие базисные функции ($n = 2$):

$$\varphi_0(x) = 0, \quad \varphi_1(x) = x(x-1), \quad \varphi_2(x) = x^2(x-1),$$

удовлетворяющие однородным краевым условиям задачи. Согласно (16.51) невязка равна

$$E(x; C_1, C_2) = L[\varphi_0] + C_1 L[\varphi_1] + C_2 L[\varphi_2] - f(x) =$$
$$= 0 + C_1(x^2 - 5x + 4) + C_2(x^3 - 7x^2 + 10x - 2) - x + 2.$$

Умножая невязку последовательно на $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ и интегрируя оба произведения от 0 до 1, получим, согласно методу Галёркина, систему двух уравнений

$$\frac{3}{10}C_1 + \frac{11}{60}C_2 = -\frac{1}{4}, \quad \frac{7}{60}C_1 + \frac{13}{105}C_2 = -\frac{7}{60},$$

решение которой

$$C_1 = -0{,}60705; \quad C_2 = -0{,}37028.$$

Приближенное решение задачи имеет вид

$$y_2(x) = \varphi_0(x) + C_1\varphi_1(x) + C_2\varphi_2(x) = -x(x-1)(0{,}60705 + 0{,}37028x).$$

Для сравнения: $y_2(0{,}5) = 0{,}1980$; $\overline{y}(0{,}5) = 0{,}1967$. Погрешность равна

$$y_2(0{,}5) - \overline{y}(0{,}5) = 0{,}13 \cdot 10^{-2}. \qquad \triangleright$$

16.8.4.3. Понятие о разностном методе

Возьмем на $[a; b]$ равноотстоящие точки $x_i = x_0 + ih$ ($i = 1, 2, \ldots, n-1$), $x_0 = a$, $x_n = b$ и заменим все производные в дифференциальном уравнении и в краевых условиях соответствующими приближенными (разностными) выражениями (см. 16.5.6,4). В результате дифференциальная краевая задача аппроксимируется разностной краевой задачей, численное решение которой сводится к решению системы алгебраических уравнений относительно неизвестных значений функции $y_i = y(x_i)$.

Пример 34. Аппроксимировать краевую задачу в примере 33 соответствующей разностной задачей.

Решение. Заменяя производные разностными выражениями (см. 16.5.6, **4**), получим

$$\frac{y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1}}{h^2} - 2\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} + y_i = x_i - 2 \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1);$$
$$y_0 = 0, \quad y_n = 0.$$

В частности, при $n=4$ получим систему уравнений относительно y_1, y_2, y_3 ($h=0{,}25$):

$$\begin{aligned} -1{,}94y_1 + 0{,}75y_2 \phantom{- 0{,}25y_3} &= -0{,}11;\\ 1{,}25y_1 - 1{,}94y_2 - 0{,}25y_3 &= -0{,}09;\\ 1{,}25y_2 - 1{,}94y_3 &= -0{,}08. \end{aligned}$$

▷

Глава 17

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ И ТЕОРИИ МНОЖЕСТВ

17.1. Алгебра логики (алгебра высказываний)

17.1.1. Общие сведения

Математической логикой называется раздел математики, посвященный исследованию математических доказательств и вопросов оснований математики. **Алгебра логики (алгебра высказываний)** является разделом математической логики, изучающим логические операции над высказываниями. Под **высказыванием** понимается предложение естественного или формализованного языка, о котором можно говорить, что оно истинно или ложно. В этом заключается отличие высказываний, например, от вопросительных или повествовательных предложений естественного языка. Высказывания обозначаются большими латинскими буквами $A, B, C, \dots$ (возможно, с индексами). **Логические операции** позволяют получить из исходных высказываний некоторые новые высказывания. Содержание высказываний при этом не рассматривается. Каждое высказывание имеет **истинностное значение** истина (И) или ложь (Л), которое в алгебре логики обозначают также числами 1 (истина) и 0 (ложь). В математической логике обычно не делается различия между высказыванием и его истинностным значением.

Пример 1. Предложение «$2 + 3 = 5$» является высказыванием, так как о нем можно сказать, что оно истинно (И). Предложение «4 — простое число» есть высказывание, так как его истинностное значение равно Л. Предложение «$2x = 6$» не является высказыванием, т. е. о нем нельзя сказать, истинно оно или ложно. Однако, давая переменной x различные числовые значения, будем получать высказывания.

17.1.2. Логические операции

Используя в обычной речи связки вида: «и», «или», «если ..., то», «тогда и только тогда, когда» и др., можно из одних высказываний образовывать новые, другие высказывания.

Способ построения из данных высказываний (или высказывания) нового высказывания называется **логической операцией**. При этом **истинностное** значение нового высказывания полностью определяется **истинностными** значениями исходных высказываний. Знак, применяемый для **обозначения** логической операции, называется **логической связкой** (или просто — **связкой**). Логические операции и связки могут быть **одноместными, двухместными и т. д.**

Примерами логических операций являются «конъюнкция», «дизъюнкция», «импликация», «отрицание», «эквивалентность», обозначаемые соответственно следующими связками: $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\overline{}$, $\Leftrightarrow$. Из них отрицание — одноместная операция, а остальные — двухместные. Пусть даны два произвольных высказывания A и B, тогда:

1. **Конъюнкцией (логическим умножением)** называется логическая операция, состоящая в построении нового высказывания «A и B», которое истинно тогда и только тогда, когда истинны оба A и B. Применяются следующие обозначения конъюнкции высказываний A и B: $A \wedge B$, $A \cdot B$, AB (читается A и B). Истинностные значения конъюнкции $A \wedge B$ приведены в табл. 17.1.

2. **Дизъюнкцией (логическим сложением)** называется логическая операция, состоящая в построении нового высказывания «A или B», которое истинно тогда и только тогда, когда истинно хотя бы одно (может быть, и оба) из исходных высказываний A или B. Обозначение дизъюнкции высказываний A и B: $A \vee B$, $A+B$ (читается: A или B). Истинностные значения конъюнкции $A \vee B$ приведены в табл. 17.1.

Примечание. Связка «или» здесь понимается в неисключающем смысле, т. е. оба высказывания A и B могут быть совместно истинными (или ложными).

Таблица 17.1

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$\bar{A}$	$A \Leftrightarrow B$
Л (0)	Л (0)	Л (0)	Л (0)	И (1)	И (1)	И (1)
Л (0)	И (1)	Л (0)	И (1)	И (1)	И (1)	Л (0)
И (1)	Л (0)	Л (0)	И (1)	Л (0)	Л (0)	Л (0)
И (1)	И (1)	И (1)	И (1)	И (1)	Л (0)	И (1)

3. **Импликацией (логическим следованием)** называется логическая операция, состоящая в построении нового высказывания «если A, то B», которое ложно тогда и только тогда, когда A истинно, а B ложно. Обозначения импликации высказываний A и B: $A \Rightarrow B$, $A \to B$ (читается: если A, то B; из A следует B). Истинностные значения $A \Rightarrow B$ приведены в табл. 17.1. Высказывание A в импликации называется **посылкой**, а B — **следствием (заключением)**. Наличия смысловой или причинной связи между высказываниями A и B

здесь не предполагается. При ложном высказывании A высказывание $A \Rightarrow B$ истинно всегда независимо от истинности или ложности B (в краткой формулировке: «из ложного утверждения может следовать все что угодно»).

Пример 2. Истинными будут, например, высказывания «$1 > 2 \Rightarrow \sin(\pi/3) = 3$», «$1 + 1 = 2 \Rightarrow 8$ — четное число».

4. **Отрицанием** называется логическая операция построения нового высказывания «не A», которое истинно, когда A ложно, и ложно, когда A истинно. Обозначения отрицания высказывания A это: $\overline{A}$, $\rceil A$ (читается: не A; отрицание A). Истинностные значения $\rceil A$ приведены в табл. 17.1.

5. **Эквиваленцией** (или **эквивалентностью**) называется логическая операция построения нового высказывания «A равносильно B», которое истинно тогда и только тогда, когда A и B совместно истинны или совместно ложны. Наличия смысловой связи между высказываниями A и B при этом не предполагается. Обозначения эквивалентности высказываний A и B это: $A \Leftrightarrow B$, $A \sim B$, $A \leftrightarrow B$, $A \equiv B$ (читается A равносильно B; A эквивалентно B; A тогда и только тогда, когда B; если A, то B, и обратно). Истинностные значения $A \Leftrightarrow B$ приведены в табл. 17.1. Смысл равносильности высказываний A и B состоит в том, что A является **необходимым и достаточным условием** B, т. е. из A следует B, а из B следует A. Истинность A **достаточна** для признания истинности B, и наоборот. **Необходимость** состоит в том, что из ложности A следует ложность B, и наоборот. Высказывания A и B называются **логически эквивалентными**, если высказывание $A \Leftrightarrow B$ истинно.

Пример 3. Теорема представляет собой математическое утверждение (предложение), истинность которого доказывается. Всякая теорема может быть записана в виде импликации $A \Rightarrow B$ (из A следует B), у которой в посылке A стоит условие (то, что дано), а в заключении B то, что требуется доказать. **Обратной теореме** соответствует импликация $B \Rightarrow A$; **противоположной теореме** — импликация $\overline{A} \Rightarrow \overline{B}$. При доказательстве теоремы, в предположении истинности посылки A, устанавливается (доказывается) истинность заключения B, тем самым исключается единственный случай, когда импликация ложна (см. табл. 17.1). В случае ложной посылки из справедливости теоремы нельзя сделать выводов об истинности или ложности заключения. Если к высказыванию A, истинность которого не установлена, применена правильная теорема $A \Rightarrow B$, то из истинности высказывания B нельзя делать заключение об истинности A. Справедливость двух взаимно обратных теорем означает, что A является необходимым и достаточным условием для B, и наоборот. Если, например, высказывание A: «сумма цифр числа делится на три», а B: «это число делится на три», то для теоремы «если A, то B» ($A \Rightarrow B$) обратная теорема $B \Rightarrow A$ верна. Противоположная теорема здесь имеет вид: «Если сумма цифр числа не делится на три, то это число не делится на три», и является правильной теоремой.

Доказательство методом от противного теоремы $A \Rightarrow B$ состоит в том, что предполагают противное тому, что требуется доказать, и получают противоречие с условием.

Вышеприведенные логические операции 1 – 5 сведены в одну **истинностную таблицу** (или **таблицу истинности**), имеющую $2^2 = 4$ строки (табл. 17.1).

17.1.3. Формулы и функции алгебры высказываний

Из нескольких исходных высказываний при помощи логических операций 1–5 можно получить **сложное** высказывание. При этом исходные высказывания могут быть **постоянными**, т. е. иметь определенные значения И (1) или Л (0), либо **переменными** — не имеющими определенного значения. При задании всех исходных переменных высказываний, сложное высказывание примет определенное значение И или Л (соответственно 1 или 0).

Пример 4. Пусть в сложном высказывании $X \Rightarrow (Y \vee Z)$ переменным высказываниям X, Y, Z заданы значения Л, И, И соответственно. Тогда $X \Rightarrow (Y \vee Z)$ можно записать в виде Л $\Rightarrow$ (И $\vee$ И), значение которого есть И. Действительно, И $\vee$ И есть И, а Л $\Rightarrow$ И есть также И. Аналогично находится значение данного сложного высказывания при других значениях переменных высказываний при помощи табл. 17.1.

Пропозициональной переменной называется переменная, возможными значениями которой являются высказывания (имеющие истинностные значения 0 или 1).

Список основных символов алгебры высказываний состоит из трех групп символов: 1) пропозициональные переменные $X, Y, Z, \ldots$ (возможно, с индексами); 2) связки: $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$, $\overline{}$, $\Leftrightarrow$; 3) скобки ( ).

Формулами алгебры высказываний (**пропозициональными формулами**) являются: 1) все пропозициональные переменные; 2) если F_1 и F_2 — формулы, то выражения $(F_1 \wedge F_2)$, $(F_1 \vee F_2)$, $(F_1 \Rightarrow F_2)$, $(\overline{F_1})$, $(F_1 \Leftrightarrow F_2)$ — также формулы. Каждая формула, представляющая собой форму сложного высказывания, превращается в высказывание, если вместо переменных в нее подставить определенные высказывания и произвести операции, указанные в формуле. Если после всякой такой подстановки получается истинное высказывание, то формула называется **общезначимой** или **тавтологией**.

Пример 5. Выражения: $(X \Leftrightarrow (Y \vee Z))$; $(\overline{Z} \vee (Z \Rightarrow Y))$; $\overline{Z} \Leftrightarrow (X \wedge Y)$ являются формулами.

Примечание. Обычно при записи формул для краткости внешние скобки опускаются, а вместо $F_1 \wedge F_2$ пишут F_1F_2.

Пример 6. Формулу $(\overline{Z} \Leftrightarrow (X \wedge Y))$ можно записать короче: $\overline{Z} \Leftrightarrow XY$.

Пусть $X_1, X_2, \ldots, X_n$ — пропозициональные переменные, которым можно придать истинностные значения 0 или 1. Каждой формуле F, содержащей только эти переменные, соответствует **n-местная функция** $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, зависящая от аргументов $x_1, x_2, \ldots, x_n$, числовые значения которых равны истинностным значениям (0 или 1) соответствующих пропозициональных переменных $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ принимает также одно из значений 0 или 1, для нахождения которого всем пропозициональным переменным в формуле F следует придать их истинностные значения 0 или 1 и произвести затем вычисления, соответствующие операциям, указанным в этой формуле, согласно табл. 17.1. При этом говорят, что формула F **реализует** функцию f.

Логическим операциям соответствуют функции, принимающие значения 0; 1, аргументы которых также принимают значения 0; 1. Эти функции обозначаются теми же знаками, что и связки соответствующих логических операций (см. табл. 17.1).

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, принимающая значение 0 или 1, когда каждый ее аргумент также принимает значение 0 или 1, называется **логической функцией** или **функцией алгебры логики**, или **булевой функцией** (по имени математика Дж. Буля). Логическую функцию можно задать с помощью формулы или посредством истинностной таблицы.

Пример 7. Формула $\overline{X} \Leftrightarrow (Y \vee Z)$ реализует логическую функцию $f(x, y, z)$, задаваемую таблицей, имеющей $2^3 = 8$ строк:

x	y	z	$f(x,y,z)$
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	0

Две формулы F_1 и F_2, содержащие лишь пропозициональные переменные $X_1, X_2, \ldots, X_n$, называются **равными**, или **эквивалентными**, или **равносильными** (обозначение: $F_1 = F_2$, или $F_1 \equiv F_2$), если логические функции $f_1(x_1, x_2, \ldots x_n)$ и $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, реализуемые формулами F_1 и F_2 соответственно, совпадают на всяком наборе истинностных значений переменных (т. е. их истинностные таблицы совпадают).

Некоторые основные равенства.

$$\left.\begin{array}{l} 1)\ F \wedge F = F \\ 2)\ F \vee F = F \end{array}\right\} \text{(}\textit{законы идемпотентности}\text{);}$$

3) $\overline{\overline{F}} = F$ (*закон снятия двойного отрицания*);

$$\left.\begin{array}{l}4)\ F_1 \wedge F_2 = F_2 \wedge F_1\\ 5)\ F_1 \vee F_2 = F_2 \vee F_1\end{array}\right\}\ (\textit{законы коммутативности});$$

6) $F_1 \Leftrightarrow F_2 = F_2 \Leftrightarrow F_1$ (*коммутативность эквивалентности*);

$$\left.\begin{array}{l}7)\ (F_1 \wedge F_2) \wedge F_3 = F_1 \wedge (F_2 \wedge F_3)\\ 8)\ (F_1 \vee F_2) \vee F_3 = F_1 \vee (F_2 \vee F_3)\end{array}\right\}\ (\textit{законы ассоциативности});$$

$$\left.\begin{array}{l}9)\ F_1 \wedge (F_2 \vee F_3) = (F_1 \wedge F_2) \vee (F_1 \wedge F_3)\\ 10)\ F_1 \vee (F_2 \wedge F_3) = (F_1 \vee F_2) \wedge (F_1 \vee F_3)\end{array}\right\}\ (\textit{законы дистрибутивности});$$

11) $\overline{F_1 \wedge F_2} = \overline{F_1} \vee \overline{F_2}$ и $\overline{F_1 \vee F_2} = \overline{F_1} \wedge \overline{F_2}$ (*закон де Моргана*);

$$\left.\begin{array}{l}12)\ F_1 \wedge (F_2 \vee F_1) = F_1\\ 13)\ F_1 \vee (F_2 \wedge F_1) = F_1\end{array}\right\}\ (\textit{законы поглощения});$$

14) $F_1 \Rightarrow F_2 = \overline{F_1} \vee F_2$;

15) $F \wedge \overline{F} = \text{Л}$ (*закон противоречия*);

16) $F \vee \overline{F} = \text{И}$ (*закон исключенного третьего*);

17) $F \wedge \text{И} = F$;

18) $F \vee \text{И} = \text{И}$;

19) $F \wedge \text{Л} = \text{Л}$;

20) $F \vee \text{Л} = F$.

17.1.4. Логика предикатов

Пусть M — некоторое множество объектов и a_1, a_2, a_3, a_4 — знаки (символы), обозначающие какие-то определенные объекты (предметы) этого множества. Обычно объекты и соответствующие им символы отождествляются. Высказывания об этих объектах будем обозначать $P(a_1), Q(a_2), R(a_3, a_4)$ и т. д. Здесь $P(a_1)$ — высказывание об объекте a_1, $Q(a_2)$ — высказывание об объекте a_2, $R(a_3, a_4)$ — высказывание об объектах a_3, a_4 и т. д.

Пример 8. M — множество всех натуральных чисел. Пусть знаки a_1, a_2, a_3, a_4 обозначают соответственно числа 4; 6; 5; 3. Тогда можно привести, например, следующие высказывания: $P(a_1)$ — «4 — простое число»; $Q(a_2)$ — «6 — четное число»; $R(a_3, a_4)$ — «$5 > 3$». При этом $P(a_1)$ — ложное высказывание, а два других истинные. Таким образом, здесь значения И и Л ставятся в соответствие объектам.

Множество M некоторых объектов называют **предметной областью** (или просто **областью**). Знаки, обозначающие определенные объекты из M, называют **предметными постоянными.** Знаки, обозначающие неопределенные (произвольные) объекты из M, называют **предметными переменными**.

Обозначим $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ какое-либо высказывание об упорядоченном наборе определенных объектов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ из области M. Если $n = 1$, то

$P(a_1)$ есть высказывание о **свойстве** объекта a_1. Если $n = 2$, то $P(a_1, a_2)$ есть высказывание об **отношении** объектов a_1, a_2 (расположенных в данном порядке) и т. д.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — предметные переменные с некоторыми областями изменения, являющимися подмножествами множества M. Выражение $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, являющееся n-местной функцией, определенной на M и принимающей значения 0 или 1, называется **n-местным предикатом**, переходящим в высказывание при замене $x_1, x_2, \ldots, x_n$ определенными объектами из соответствующих подмножеств множества M. Произвольное высказывание можно рассматривать как нуль-местный предикат. Если предикат $P(a_1, a_2, \ldots, a_n) = 1$ при наборе определенных значений аргументов (объектов) $a_1, a_2, \ldots, a_n$, то говорят, что этот набор значений аргументов **удовлетворяет** данному предикату, а предикат **выполняется** для этого набора значений аргументов. Предикат называется **тождественно истинным** (**тождественно ложным**) если любой набор значений его аргументов удовлетворяет (не удовлетворяет) этому предикату. **Областью истинности** предиката называется множество наборов значений аргументов, удовлетворяющих данному предикату.

Пример 9.

1) M — множество всех натуральных чисел. Неопределенное выражение «x — простое число» является одноместным предикатом, переходящим в определенное высказывание, если x заменить числом из M, например «5 — простое число», «6 — простое число». Первое высказывание есть И, а второе — Л.
2) Неопределенное выражение «$x < y$» есть 2-местный предикат. Если $x = 2$, $y = 3$, получим высказывание «$2 < 3$». Если $x = 4$, $y = 2$, получим высказывание «$4 < 2$». Первое высказывание есть И, а второе — Л.

Выше символ P был использован для обозначения вполне определенного конкретного предиката. Произвольный неконкретизированный предикат $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ на предметной области M называется **n-местным переменным предикатом**. Если $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — переменный предикат, а $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — предметные постоянные или предметные переменные, то выражение $P(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ называется **элементарной формулой**. Элементарные формулы считаются предикатами. Элементарные формулы могут принимать только значения И и Л. Следовательно, эти формулы можно связать с помощью логических связок и получать сложные формулы, называемые **предикатными формулами**.

Пример 10. Выражения: 1) $A \wedge P(x)$, где A — переменное высказывание, $P(x)$ — одноместный предикат; 2) $(x < y) \vee (x$ — простое число); 3) $P(x) \Leftrightarrow P(y)$ — являются предикатными формулами. Если x и y принимают одинаковые значения, то предикат, представляемый третьей формулой, имеет значение И.

Наряду с логическими операциями 1–5, действующими над высказываниями, для построения новых предикатных формул из уже имеющихся вводятся новые операции, называемые **кванторами**. Наиболее употребительными из них являются: **квантор всеобщности** (обозначение: $\forall\, x$; читается: «для всех x») и **квантор существования** (обозначение: $\exists\, x$; читается: «для некоторых x» или «существует x такое, что»).

Обобщение понятия предикатной формулы: предикатные формулы строятся из элементарных формул при помощи логических связок 1–5 и кванторов всеобщности и существования.

Пусть $P(x)$ — определенный предикат, принимающий значения И или Л для каждого элемента x из некоторой предметной области M. Тогда формула $\forall\, xP(x)$ означает высказывание, истинное, когда $P(x)$ истинно для каждого x из M, и ложное в противном случае, т. е. высказывание $\forall\, xP(x)$ означает, что область истинности $P(x)$ совпадает с множеством значений переменной x.

Формула $\exists\, xP(x)$ означает высказывание, истинное, если существует элемент x из M, для которого $P(x)$ истинно, и ложное — в противном случае, т. е. высказывание $\exists\, xP(x)$ означает, что область истинности $P(x)$ не пуста.

Символы логических операций (логические связки) $\vee$, $\wedge$, $\Rightarrow$, $\rceil$, $\Leftrightarrow$, $\forall$, $\exists$ часто используются в математике для сокращения записи.

Пример 11. 1) Выражение $\forall\, x \in M : A$ означает: «для всякого элемента x из множества M высказывание A истинно»; 2) Выражение $\exists\, y \in N : B$ означает: «существует элемент y из множества N, для которого высказывание B истинно».

Отрицание высказывания $\forall\, x \in M : A$ означает, что высказывание A истинно не для всех $x \in M$. Следовательно, существует такой элемент $x \in M$, для которого A ложно (т. е. истинно $\rceil A$):

$$\rceil(\forall\, x \in M : A) \Leftrightarrow \exists\, x \in M : \rceil A.$$

Аналогично строится эквиваленция

$$\rceil(\exists\, y \in N : B) \Leftrightarrow \forall\, y \in N : \rceil B,$$

или

$$\overline{\exists\, y \in N : B} \Leftrightarrow \forall\, y \in N : \overline{B}.$$

17.1.5. Метод математической индукции

Данный метод доказательства математических утверждений основан на следующей аксиоме.

Аксиома полной индукции (принцип математической индукции). Если утверждение $A(n)$, зависящее от натуральной переменной n, верно (доказано) при $n = 1$, и если доказано, что для любого натурального n из предположения, что $A(n)$ истинно, следует истинность $A(n+1)$, то $A(n)$ истинно для всех натуральных n.

Символическая запись аксиомы полной индукции:

$$\left.\begin{array}{c} A(1) \\ \forall\, n(A(n) \Rightarrow A(n+1)) \end{array}\right\} \Rightarrow \forall\, nA(n).$$

Пример 12. Докажем, что $n^3 + 5n$ делится на 6 при любом натуральном n.

Доказательство.

1) **Начало индукции.** При $n = 1$ число $1^3 + 5 \cdot 1 = 6$ делится на 6.
2) **Шаг индукции.** Предполагаем, что $n^3 + 5n = 6 \cdot p$ (p — целое число). Докажем, что $(n+1)^3 + 5(n+1) = 6 \cdot q$ (q — целое число). Действительно:
$$(n+1)^3 + 5(n+1) = (n^3 + 5n) + 3n(n+1) + 6 = 6 \cdot \left[p + \frac{n(n+1)}{2} + 1\right] = 6 \cdot q.$$
3) **Заключение.** Число $n^3 + 5n$ делится на 6 при любом натуральном n. □

17.2. Основы теории множеств

17.2.1. Основные понятия

Понятие множества является основным первичным понятием; оно не определяется, но поясняется с помощью примеров. Под **множеством** понимается совокупность объектов, обладающих каким-либо общим свойством. Объекты, образующие множество, называются его **элементами**. Для описания множества можно указать свойство, которым обладают все элементы этого множества, и только они.

Пример 13.

1) Элементами множества решений уравнения $x^3 - x = 0$ являются числа: $-1; 0; 1$.
2) Элементами множества всех четных натуральных чисел являются: $2; 4; 6; \ldots$.
3) Точки, лежащие на отрезке $a \leqslant x \leqslant b$, являются элементами множества $[a; b]$.

Множества обычно обозначают большими латинскими буквами $A, B, C, \ldots$, а их элементы — малыми буквами $a, b, c, \ldots$. Множество обозначают также при помощи фигурных скобок, внутри которых каким-либо образом описываются его элементы. Для множества элементов x, обладающих свойством $A(x)$, обычно применяют запись $\{x : A(x)\}$. В частности, множества в примере 13 можно записать так: 1) $\{-1; 0; 1\}$, 2) $\{2; 4; 6; \ldots\}$, 3) $\{x : a \leqslant x \leqslant b\}$.

Если a — элемент множества A, то это записывают так: $a \in A$ (читается: «a принадлежит A», или «a есть элемент A»). Если a не принадлежит A, то пишут $a \overline{\in} A$ или $a \notin A$.

Два множества A и B называются **равными**, если они состоят их одних и тех же элементов (запись: $A = B$). Множество, не содержащее ни одного элемента, называется **пустым** (обозначение: $\varnothing$). Если все элементы множества A являются также элементами множества B, то множество A называют **подмножеством** (**частью**) множества B (запись: $A \subset B$; читается B содержит, или включает A). Подмножеством множества A является и само это множество A. Если $A \subset B$ и $A \neq B$, то A называется **правильной частью**

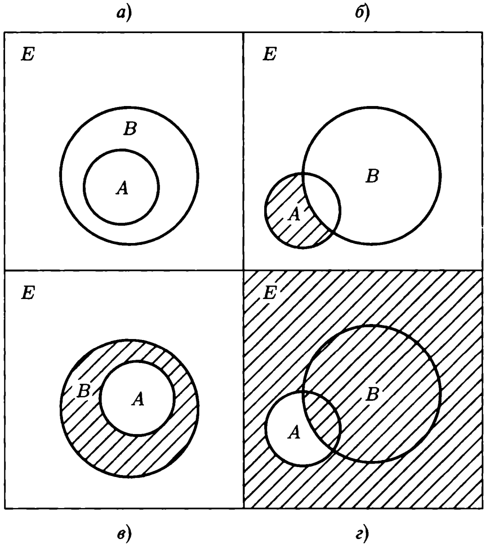


Рис. 17.1

(**собственным подмножеством**) множества B. По определению считается, что $\varnothing \subset A$, где A — любое множество. Для равенства $A = B$ двух множеств A и B необходимо и достаточно выполнение соотношений $A \subset B$ и $B \subset A$.

Для наглядности множества и операции над ними изображают в виде **фигур Эйлера—Венна**, представляющих собой некоторые области на плоскости (рис. 15.1 *а–г*). При этом каждый из прямоугольников, обозначенный посредством E, изображает множество **всех** элементов, обладающих рассматриваемым свойством, а множества A и B являются подмножествами E. На рис. 17.1 *а* изображено соотношение $A \subset B$.

17.2.2. Операции над множествами

Пусть A и B — два множества, являющиеся подмножествами E (см. 17.2.1). **Объединением** (или **суммой**) множеств A и B называется множество C, состоящее из элементов множеств A и B, т. е. C состоит из элементов, принадлежащих хотя бы одному из множеств A и B (на рис. 15.1 *б* множество C заштриховано). Обозначение объединения: $A \cup B$ или $A + B$. Очевидно, что $A \cup A = A$.

Пересечением (или **произведением**) множеств A и B называется множество, состоящее из элементов, общих для A и B (на рис. 15.1 *в* пересечение заштриховано). Обозначение: $A \cap B$ или AB. Очевидно, что $A \cap A = A$. Если $A \cap B = \oslash$ (т. е. A и B не имеют общих элементов), то множества A и B называются **непересекающимися**. Для непересекающихся множеств A и B объединение $C = A \cup B$ изображено на рис. 15.1 *а* (заштриховано).

Для любых множество A, B, C справедливы равенства:

1) $A \cup B = B \cup A$;
2) $A \cap B = B \cap A$;
3) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$;
4) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$;
5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$;
6) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$;
7) $A \cup (A \cap B) = A$;
8) $A \cap (A \cup B) = A$;
9) $A \cup \oslash = A$;
10) $A \cap \oslash = \oslash$.

Разностью множеств A и B (обозначение: $A \setminus B$ или $A - B$) называется множество, состоящее из элементов множества A, которые не принадлежат множеству B (на рис. 17.1 *б* разность заштрихована). Если множество A есть часть множества B, то разность $B \setminus A$ называется **дополнением** множества A в множестве B (на рис. 17.1 *в* дополнение заштриховано). Дополнение $E \setminus A$ множества A в множестве E обозначается также $\overline{A}$ (на рис. 15.1 *г* множество $\overline{A}$ изображается точками E, внешними по отношению к заштрихованной области A). На рис. 17.1 *г* изображено множество $\overline{A \setminus B}$ (заштриховано). Для дополнения $E \setminus A$ используется также обозначение $C_E A$.

Примечание. В главах, посвященных дифференциальному и интегральному исчислению, посредством $\overline{\{M\}}$ обозначается замкнутая область, соответствующая открытой области $\{M\}$ (см. 8.1.1), однако это не может привести к недоразумению, так как из контекста понятно, о чем идет речь.

Для любых множеств A, B, C являющихся подмножествами множества E, справедливы соотношения:

1) $A \setminus A = \oslash$;
2) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
3) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$;
4) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
5) $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$;
6) $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$;
7) $(A \setminus B) \setminus C = A \setminus (B \cup C)$;

8) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$;
9) $A \cap B = A \Leftrightarrow A \setminus B = \varnothing$;
10) $A \cap B = \varnothing \Leftrightarrow B \setminus A = B$;
11) $A \cup \overline{A} = E$;
12) $A \cap \overline{A} = \varnothing$;
13) $\overline{\varnothing} = E$;
14) $\overline{E} = \varnothing$;
15) $\overline{\overline{A}} = A$;
16) $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$;
17) $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$.

Пример 14. На числовой оси $E = (-\infty; +\infty) \equiv \{x : -\infty < x < +\infty\}$ даны множества: $A = [-2; 1] \equiv \{x : -2 \leqslant x \leqslant 1\}$; $B = (-1; 2] \equiv \{x : -1 < x \leqslant 2\}$; $C = (-\infty; 0] \equiv \{x : -\infty < x \leqslant 0\}$. Для этих множеств имеем: $A \cup B = [-2; 2]$; $A \cap B = (-1; 1]$; $A \setminus B = [-2; -1]$; $C \cap B = (-1; 0]$; $\overline{C} = E \setminus C = (0; +\infty)$; $\overline{A} = E \setminus A = (-\infty; -2) \cup (1; +\infty)$; $(A \cap B) \cap \overline{B} = \varnothing$; $\overline{B} = E \setminus B = (-\infty; -1] \cup (2; +\infty)$; $(A \cup B) \cup \overline{C} = [-2; +\infty)$; $(A \cup B) \cap \overline{C} = (0; 2]$.

Прямым произведением (или **декартовым произведением**) двух множеств A и B (обозначение: $A \times B$) называется множество всевозможных пар $(a; b)$, где $a \in A$, $b \in B$. Здесь элементы a и b взяты в определенном порядке, т. е. указано, какой из них считается первым, а какой — вторым. Аналогично, для n множеств $A_1, \ldots, A_n$ вводится прямое произведение $A_1 \times \ldots \times A_n$ как множество всевозможных конечных последовательностей элементов $(a_1, \ldots, a_n)$, расположенных в определенном порядке, где $a_1 \in A_1, \ldots, a_n \in A_n$. Если $A_1 = \ldots = A_n \equiv A$, то вместо $A_1 \times \ldots \times A_n$ пишут A^n. По определению $(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n)$ тогда и только тогда, когда $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$, или $(a_1, \ldots, a_n) = (b_1, \ldots, b_n) \Leftrightarrow (a_1 = b_1) \wedge \ldots \wedge (a_n = b_n)$. Если $a \neq b$ ($a \in A$, $b \in B$), то $(a; b) \neq (b, a)$.

17.2.3. Мощность множеств

Пусть каждому элементу множества A поставлен в соответствие по какому-либо правилу некоторый определенный элемент множества B. Если при этом каждый элемент из B поставлен в соответствие одному и только одному элементу из A, то говорят, что **между множествами A и B установлено взаимно однозначное соответствие**. Множество A называется **конечным**, если существует такое натуральное n, что все элементы из A могут быть пронумерованы числами от 1 до n. В противном случае множество называется **бесконечным**.

Если множества A и B конечные, то взаимно однозначное соответствие между ними может быть установлено в том и только том случае, когда числа элементов в обоих множествах равны.

Два множества A и B (конечные или бесконечные) называются **равномощными** или **эквивалентными** (обозначение: $A \sim B$), если между ними может быть установлено взаимно однозначное соответствие.

Пример 15. Множество всех натуральных чисел и множество всех четных чисел равномощны, так как каждому натуральному числу n можно поставить в соответствие четное число $2n$, и наоборот. Следовательно, между этими двумя множествами существует взаимно однозначное соответствие.

Множество называется **счетным**, если оно конечно или равномощно множеству всех натуральных чисел. Элементы счетного множества можно пронумеровать. Мощность счетных множеств является наименьшей мощностью, которую может иметь бесконечное множество. Мощность множества всех действительных чисел называется **мощностью континуума**. Мощность континуума имеют: 1) множество всех точек на плоскости; 2) множество всех комплексных чисел; 3) множество всех точек n-мерного пространства и т. д.

17.2.4. Отображение множеств

Отображением, действующим из множества X **в** множество Y, называют правило, в силу которого каждому элементу $x \in X$ ставится в соответствие один или несколько элементов из Y. Отображение обозначается через $f : X \to Y$ или $X \xrightarrow{f} Y$. Соответствие между $x \in X$ и $y \in Y$ записывается в виде $y = f(x)$. Если при этом каждому элементу $x \in X$ соответствует только один элемент $y \in Y$, то отображение называется **однозначным**, в противном случае — **многозначным**. Вместо термина «отображение» используется: термин «функция», если X и Y — числовые множества; термин «функционал», если числовым является множество Y, а X — произвольное множество; термин «оператор» — в линейной алгебре и функциональном анализе. Если множество Y совпадает с X, то отображение $f : X \to X$ называется **преобразованием** множества X.

Множество всех элементов из Y, соответствующих элементу $x \in X$ при отображении: $f : X \to Y$, называется **образом** элемента x. Если отображение $f : X \to Y$ — однозначное, то отображение $f^{-1} : Y \to X$, ставящее в соответствие каждому $y \in Y$ элемент $x \in X$ (именуемый **прообразом** элемента y), называется **обратным** по отношению к отображению f. Отображение $f^{-1} : Y \to X$ может быть однозначным либо многозначным.

Образом некоторого подмножества множества X называется объединение образов всех элементов x из этого подмножества. Образ всего множества X (являющийся подмножеством множества Y) называется **областью значений** отображения f.

Однозначное отображение $f : X \to Y$ называется:

а) **Инъективным отображением** (**инъекцией**, или **вложением**, или **отображением X в Y**), если для любых двух элементов $x_1, x_2 \in X$ из равенства

$f(x_1) = f(x_2)$ следует $x_1 = x_2$, т.е. разные $x \in X$ имеют разные образы в Y (при этом могут существовать $y \in Y$, которые не имеют прообраза $x \in X$).

б) **Сюръективным отображением** (**сюръекцией**, или **отображением** X **на** Y), если образ всего множества X совпадает с множеством Y, т.е. $f(X) = Y$. При этом каждому $y \in Y$ соответствует хотя бы один прообраз $x \in X$.

Примечание 1. Если каждому $y \in Y$ соответствует только один прообраз, то формула $y = f(x)$ устанавливает **взаимно однозначное отображение** X **на** Y.

в) **Биективным отображением** (**биекцией**, или **взаимно однозначным отображением** X **на** Y), если оно инъективно и сюръективно одновременно, т.е. разные $x \in X$ имеют разные образы $y \in Y$ и $f(X) = Y$. Биекция устанавливает взаимно однозначное соответствие между всеми элементами множеств X и Y (см. примечание 1).

г) **Тождественным отображением** множества X на это же множество, если $f(x) = x$ для всех $x \in X$.

Примечание 2. Отображение **на** некоторое множество распространяется на все элементы этого множества, а **в** множество — возможно, не на все его элементы. В этом смысле всякое отображение «на» можно назвать и отображением «в», но не наоборот.

Пример 16. Отображение $x \to x^2$ отображает множество действительных чисел $R \equiv (-\infty; +\infty)$ **на** множество всех неотрицательных действительных чисел $R_+ \equiv [0; +\infty)$. Множество R_+ отображается при этом взаимно однозначно **на** R_+.

Именной указатель

Предметный указатель

Основные обозначения

$e(\pi)$	— число $e = 2{,}718\ldots$ (число $\pi = 3{,}141\ldots$)
$=,\ \neq,\ \equiv$	— равно, не равно, тождественно (либо по определению) равно
$\approx$	— приближенно равно
$\sim$	— асимптотическое равенство, эквивалентность, равносильность
$\lvert a\rvert$	— абсолютная величина, модуль
$(a;b)$; $[a;b]$	— интервал, отрезок
$(a;b]$; $[a;b)$	— полуинтервалы
$+$; $-$; $\times(\cdot)$; $-(:,\ /)$	— сложение, вычитание, умножение, деление
$>,\ \geqslant$	— больше, больше или равно
$<,\ \leqslant$	— меньше, меньше или равно
$\sup$	— верхняя грань множества
$\inf$	— нижняя грань множества
$\max$	— максимальный элемент множества
$\min$	— минимальный элемент множества
$\log_a$	— логарифм по основанию a
$\lg$	— десятичный логарифм
$\ln$	— натуральный логарифм
$\sqrt{\ }$	— корень квадратный
$\sqrt[n]{\ }$	— корень степени n
$n!$	— факториал (n-факториал)
C_n^m	— биномиальные коэффициенты
$(a_1, a_2, \ldots, a_n)$	— вектор-строка
$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$	— вектор-столбец
A, $[a_{ij}]$, (a_{ij})	— матрица
D, $\det A$, $\det(a_{ij})$	— определитель (детерминант)
A^{-1}, A^T, $\overline{A}$	— матрица обратная, транспонированная, комплексно сопряженная
Sp, Tr	— след матрицы или тензора

Ox	— ось координат (числовая ось)
Oxy, $Oxyz$	— декартова система координат на плоскости, в пространстве
ρ, φ	— полярные координаты
ρ, φ, z	— цилиндрические кординаты
ρ, θ, φ	— сферические координаты
$\bar{a}$, $\overline{AB}$	— вектор
$\lvert\bar{a}\rvert$, a, $\lvert\overline{AB}\rvert$	— модуль, длина вектора
$\bar{r}$	— радиус-вектор
a_x, a_y, a_z	— координаты вектора $\bar{a}$
$\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$	— декартов базис
$\bar{a}\bar{b}$; $\bar{a}\cdot\bar{b}$; $(\bar{a},\bar{b})$	— скалярное произведение
$\bar{a}\times\bar{b}$; $[\bar{a},\bar{b}]$	— векторное произведение
$(\bar{a},\bar{b},\bar{c})$; $\bar{a}\bar{b}\bar{c}$; $\bar{a}\cdot(\bar{b}\times\bar{c})$	— смешанное произведение
$\bar{e}_i$	— единичные попарно-ортогональные базисные векторы
a_i	— координаты вектора $\bar{a}$ в декартовой системе $Ox_1x_2x_3$
δ_{ij}	— символ Кронекера
$\sum$, $\prod$	— сумма, произведение
(x, y)	— скалярное произведение элементов векторного пространства
$\lVert x \rVert$	— норма элемента векторного пространства
$y = f(x)$	— функция от аргумента x
$\{a_n\}$	— бесконечная последовательность
$x \to a$	— x стремится к a
$\lim$, $\underline{\lim}$, $\overline{\lim}$	— предел обычный, нижний, верхний
∞, $+\infty$, $-\infty$	— обозначения бесконечности
$x \to a-0$, $x \to a+0$	— стремление x к a слева, справа
$f(a-0)$, $f(a+0)$	— предел слева, справа
o, O	— o малое, O большое (символы порядка малости функции)
Δx, Δy	— приращение аргумента, функции
dx, dy	— дифференциал аргумента, функции
y', y'_x, $\dfrac{dy}{dx}$, $\dfrac{df}{dx}$, $f'(x)$	— производная по x
y'', y''', $\ldots$, $y^{(n)}$	— производная вторая, третья, ..., порядка n
$\dot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ldots$	— производные по параметру
$f'_-(x)$, $f'_+(x)$	— левая, правая производные
$[\ln f]'$	— логарифмическая производная

$\exp\{x\} \equiv e^x$	— показательная функция (экспонента)
sh, ch, th, cth	— гиперболический синус, косинус, тангенс, котангенс
Arsh, Arch, Arth, Arcth	— ареасинус, ареакосинус, ареатангенс, ареакотангенс
$^\circ,\ ',\ ''$	— градус, минута, секунда
sin, cos, tg, ctg, sec, cosec	— синус, косинус, тангенс, котангенс, секанс, косеканс
arcsin, arccos, arctg, arcctg	— главное значение арксинуса, арккосинуса, арктангенса, арккотангенса
$\frac{\delta z}{\delta x}, \frac{\delta z}{\delta y}, \frac{\delta^2 z}{\delta x^2}, \ldots, \frac{\delta z}{\delta x_i}, \frac{\delta f}{\delta x_i}, \frac{\delta^2 f}{\delta x_i \delta x_j}, \ldots$	— частные производные
$\int, \int\limits_a^b, \iint, \iiint, \int\limits_{AB}, \oint$	— интеграл неопределенный, определенный, двойной или поверхностный, тройной, криволинейный по дуге AB и замкнутому контуру
$J \equiv \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$	— якобиан
i	— мнимая единица
$\arg z$, $\operatorname{Arg} z$	— аргумент комплексного числа z
$\bar{z}$, z^*	— комплексно сопряженное число
$\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$	— действительная, мнимая часть комплексного числа
Δ	— оператор Лапласа, приращение
$G(M, M_0)$	— функция Грина
$J = \Phi[y(x)]$	— функционал
$\delta J, \delta^2 J, \ldots$	— вариация функционала первая, вторая, ...
$\frac{d\bar{a}}{dt}$	— производная векторной функции
grad, ∇	— градиент, оператор набла (гамильтониан)
div, rot	— дивергенция, ротор
U, V	— событие достоверное, невозможное
$P(A)$	— вероятность события A
$\cup$ $(+)$	— объединение (сумма) событий, множеств
$\cap$ $(\cdot)$	— пересечение (произведение) событий, множеств
$-$ $(\setminus)$	— разность событий, множеств
$\in$ $(\bar{\in}, \notin)$	— элемент принадлежит (не принадлежит) множеству
$\subset$	— событие (множество) содержится в другом событии (множестве)
$\varnothing$	— пустое множество
$f : X \to Y$ $(X \xrightarrow{f} Y)$	— отображение

$M(X)$, $D(X)$	— математическое ожидание, дисперсия
$\sigma(X)$	— среднее квадратическое отклонение
μ_{XY}	— корреляционный момент (ковариация)
r_{XY}	— коэффициент корреляции
$\overline{X}_в$	— выборочное среднее
$D_в$	— выборочная дисперсия
$S_в^2$	— исправленная выборочная дисперсия
$\bar{x}$, D, s^2	— эмпирическое среднее, эмпирическая дисперсия, эмпирическая исправленная дисперсия
ν_k (μ_k)	— начальный (центральный) теоретический момент
$\overset{\circ}{X}$	— отклонение случайной величины от математического ожидания
a_k (a_k^*)	— начальный выборочный (эмпирический) момент
m_k (m_k^*)	— центральный выборочный (эмпирический) момент
m_{XY}	— оценка корреляционного момента
r	— оценка коэффициента корреляции
C_0; $C[a;b]$	— класс (множество) всех непрерывных на отрезке $[a;b]$ функций
C_m; $C_m[a;b]$	— класс всех m раз $(m = 1, 2, \ldots)$ непрерывно дифференцируемых
	— на $[a;b]$ функций
ρ_0, ρ_1	— метрика в классе C_0, C_1
$\vee$ $(+)$	— дизъюнкция (логическое сложение)
$\wedge$ $(\cdot)$	— конъюнкция (логическое умножение)
$\Rightarrow$ $(\rightarrow)$	— импликация, логическое следование
$\rceil$ $(\bar{\ })$	— отрицание
$\sim$ $(\leftrightarrow, \equiv)$	— эквиваленция, эквивалентность
$\forall$ $(\exists)$	— квантор всеобщности (существования)

Николай Григорьевич ТАКТАРОВ

Доктор физико-математических наук, профессор. Окончил Мордовский государственный университет по специальности «математика», аспирантуру МГУ им. М. В. Ломоносова по гидромеханике.

В течение многих лет заведовал кафедрой теоретической механики на математическом факультете Мордовского университета. В настоящее время — профессор математики. Опубликовал свыше 120 научных работ и учебных пособий, в том числе 2 монографии. Заслуженный деятель науки Республики Мордовия. Занимался популяризацией естественных наук в периодической печати, на радио и телевидении.

4226 ID 41042

9 785397 001083

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА

Тел./факс: 7 (499) 135–42–16
Тел./факс: 7 (499) 135–42–46

URSS

E-mail: URSS@URSS.ru

Каталог изданий в Интернете: http://URSS.ru