



ЛЕОНАРД САССКИНД
АРТ ФРИДМАН

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

Специальная теория относительности
и классическая теория поля



SPECIAL
RELATIVITY AND
CLASSICAL
FIELD THEORY

THE THEORETICAL MINIMUM

LEONARD SUSSKIND
AND ART FRIEDMAN

BASIC BOOKS
New York



ЛЕОНАРД САССКИНД
АРТ ФРИДМАН

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ МИНИМУМ

Специальная теория относительности
и классическая теория поля



Санкт-Петербург • Москва • Екатеринбург • Воронеж
Нижний Новгород • Ростов-на-Дону
Самара • Минск

2021

ББК 22.313.3+22.313.33
УДК 530.121+530.21
С20

Сасскинд Л., Фридман А.

С20 Теоретический минимум. Специальная теория относительности и классическая теория поля. — СПб.: Питер, 2021. — 432 с.: ил. — (Серия «New Science»).

ISBN 978-5-4461-0802-2

Вы уже познакомились с классической и квантовой механикой? Настало время для нового погружения в глубины физики.

Физик Леонард Сасскинд и консультант по обработке данных Арт Фридман знакомят читателей со специальной теорией относительности Эйнштейна и классической теорией поля Максвелла. Сасскинд и Фридман в своем фирменном стиле, с помощью математики, поучительных рисунков и юмора, проведут для нас экскурсию по волнам, силам и частицам, расскажут о специальной теории относительности и электромагнетизме.

Яркие примеры и картины вымышленных миров превращают книгу в увлекательное путешествие по миру, который управляется законами специальной теории относительности.

Все (или почти все) тайны волн, взаимодействий и частиц будут раскрыты.

Книга обязательна к прочтению фанатам серии «Теоретический минимум» и всем, кто интересуется физикой.

16+ (В соответствии с Федеральным законом от 29 декабря 2010 г. № 436-ФЗ.)

ББК 22.313.3+22.313.33
УДК 530.121+530.21

Права на издание получены по соглашению с Brockman Agency. Все права защищены. Никакая часть данной книги не может быть воспроизведена в какой бы то ни было форме без письменного разрешения владельцев авторских прав.

Информация, содержащаяся в данной книге, получена из источников, рассматриваемых издательством как надежные. Тем не менее, имея в виду возможные человеческие или технические ошибки, издательство не может гарантировать абсолютную точность и полноту приводимых сведений и не несет ответственности за возможные ошибки, связанные с использованием книги. Издательство не несет ответственности за доступность материалов, ссылки на которые вы можете найти в этой книге. На момент подготовки книги к изданию все ссылки на интернет-ресурсы были действующими.

ISBN 978-0465093342 англ.

ISBN 978-5-4461-0802-2

© 2017 by Leonard Susskind and Art Friedman.
All rights reserved.

© Перевод на русский язык ООО Издательство «Питер», 2021

© Издание на русском языке, оформление
ООО Издательство «Питер», 2021

© Серия «New Science», 2021

Это третья книга из серии «Теоретический минимум». Книга первая, «Теоретический минимум. Что необходимо знать, чтобы начать заниматься физикой», была посвящена классической механике, составляющей основу любого физического образования. Время от времени мы будем ссылаться на него просто как на *Книга I*. Во второй книге объясняется квантовая механика и ее отношение к механике классической. В этой, третьей, книге рассматриваются специальная теория относительности и классическая теория поля. Параллельно книгам данной серии выходят видеолекции Леонарда Сасскинда, выкладываемые на сайте Стэнфордского университета (см. их перечень на www.theoreticalminimum.com, лекции на английском языке). Книги, в которых рассматриваются те же общие вопросы, что и в видеолекциях, конечно, содержат дополнительные детали и темы, которые в лекции не вошли.

Содержание

Предисловие	14
Введение.....	17
Лекция 1. Преобразования Лоренца	24
1.1. Системы отсчета	25
1.2. Инерциальные системы отсчета	27
1.2.1. Ньютоновские (дорелятивистские) системы отсчета	29
1.2.2. Системы отсчета СТО.	34
1.2.3. Историческое отступление.	53
1.2.4. Возвращаемся к уравнениям.	54
1.2.5. Ничто не движется быстрее света.	58
1.3. Обобщенные преобразования Лоренца.	59
1.4. Сокращение длины и замедление времени	60
1.5. Мир Минковского	71
1.5.1. Минковский и световой конус.	76
1.5.2. Физический смысл собственного времени	78
1.5.3. Пространственно-временной интервал	80
1.5.4. Времениподобные, пространственноподобные и светоподобные интервалы.	81
1.6. Историческая перспектива	83
1.6.1. Эйнштейн.	83
1.6.2. Лоренц	84

Лекция 2. Скорости и 4-векторы	86
2.1. Сложение скоростей	87
2.1.1. Мэгги	88
2.2. Световые конусы и 4-векторы	92
2.2.1. Как движутся световые лучи.	93
2.2.2. Введение в 4-векторы	94
 Лекция 3. Релятивистские законы движения	 100
3.1. Еще об интервалах	101
3.1.1. Пространственноподобные интервалы	102
3.1.2. Времениподобные интервалы	103
3.2. Подробнее о 4-скорости	104
3.3. Математическая интерлюдия: инструмент аппроксимации	108
3.4. Механика частиц.	112
3.4.1. Принцип наименьшего действия	112
3.4.2. Нерелятивистское действие: краткий обзор	115
3.4.3. Релятивистское действие	116
3.4.4. Нерелятивистский предел	119
3.4.5. Релятивистский импульс	120
3.5. Релятивистская энергия.	123
3.5.1. Медленные частицы	125
3.5.2. Безмассовые частицы	128
3.5.3. Пример: распад позитрония	130
 Лекция 4. Классическая теория поля	 133
4.1. Поля и пространство-время	134
4.2. Поля и действие	135
4.2.1. И снова нерелятивистские частицы	136

4.3. Принципы теории поля	140
4.3.1. Принцип действия	140
4.3.2. Стационарное действие для ϕ	142
4.3.3. Еще об уравнениях Эйлера — Лагранжа	145
4.3.4. Волны и волновые уравнения	148
4.4. Релятивистские поля.	150
4.4.1. Поведение полей при преобразованиях	151
4.4.2. Математическая интерлюдия: ковариантные компоненты	155
4.4.3. Построение релятивистского лагранжиана.	163
4.4.4. Пользуемся нашим лагранжианом	165
4.4.5. Классическая теория поля: итоги.	167
4.5. Поля и частицы: дегустация	167
4.5.1. Тайное поле	170
4.5.2. Некоторые подробности	170
Лекция 5. Частицы и поля	173
5.1. Поле воздействует на частицу (обзор)	176
5.2. Частица воздействует на поле	179
5.2.1. Уравнения движения	186
5.2.2. Зависимость от времени	190
5.3. Верхние и нижние индексы.	191
5.4. Эйнштейновское правило суммирования	195
5.5. Обозначения в случае скалярного поля	199
5.6. Новый скаляр.	202
5.7. Преобразование ковариантных компонент	203
5.8. Математическая интерлюдия: применение экспонен- циальных функций к решению волновых уравнений	204
5.9. Волны	205

Интерлюдия: чокнутые единицы.....	211
И.1. Единицы и масштаб	212
И.2. Планковские единицы	214
И.3. Электромагнитные единицы	216
Лекция 6. Сила Лоренца	222
6.1. Расширяем обозначения	226
6.1.1. 4-векторы: сводка результатов.	227
6.1.2. Образование скаляров.	229
6.1.3. Производные	229
6.1.4. Обобщенные преобразования Лоренца	231
6.1.5. Ковариантные преобразования	235
6.2. Тензоры	236
6.2.1. Тензоры 2-го ранга	237
6.2.2. Тензоры высшего ранга	238
6.2.3. Инвариантность тензорных уравнений	239
6.2.4. Поднятие и опускание индексов	240
6.2.5. Симметричные и антисимметричные тензоры.	242
6.2.6. Антисимметричный тензор.	244
6.3. Электромагнитные поля	245
6.3.1. Интеграл действия и векторный потенциал	246
6.3.2. Лагранжиан	248
6.3.3. Уравнения Эйлера — Лагранжа	250
6.3.4. Лоренц-инвариантные уравнения	259
6.3.5. Уравнения с 4-скоростью	262
6.3.6. Связь A_μ с \vec{E} и \vec{B}	263
6.3.7. Значение U^μ	264
6.4. Интерлюдия: тензор поля	266

Лекция 7. Фундаментальные принципы и калибровочная инвариантность	270
7.1. Сводка фундаментальных принципов	271
7.2. Калибровочная инвариантность	275
7.2.1. Примеры симметрии.	275
7.2.2. Новый тип инвариантности	278
7.2.3. Уравнения движения	280
7.2.4. Резюме	282
Лекция 8. Уравнения Максвелла.....	284
8.1. Пример Эйнштейна	285
8.1.1. Преобразование тензора поля	288
8.1.2. Пример Эйнштейна: сводка	292
8.2. Введение в уравнения Максвелла	293
8.2.1. Векторные тождества	294
8.2.2. Магнитное поле	295
8.2.3. Электрическое поле	296
8.2.4. Еще два уравнения Максвелла	298
8.2.5. Плотность заряда и плотность тока	300
8.2.6. Сохранение заряда	305
8.2.7. Уравнения Максвелла: тензорная форма	311
8.2.8. Тождество Бьянки	313
Лекция 9. Физические следствия уравнений Максвелла	317
9.1. Математическая интерлюдия	317
9.1.1. Теорема Гаусса.	318
9.1.2. Теорема Стокса	321
9.1.3. Безымянная теорема	323

9.2. Законы электродинамики	324
9.2.1. Сохранение электрического заряда.	325
9.2.2. От уравнений Максвелла к законам электродинамики	326
9.2.3. Закон Кулона	327
9.2.4. Закон Фарадея	329
9.2.5. Закон Ампера	332
9.2.6. Закон Максвелла	335
Лекция 10. От Лагранжа к Максвеллу	338
10.1. Электромагнитные волны	339
10.2. Лагранжева формулировка электродинамики	344
10.2.1. Локальность	346
10.2.2. Лоренц-инвариантность.	347
10.2.3. Калибровочная инвариантность.	350
10.2.4. Лагранжиан в отсутствие источников	350
10.3. Вывод уравнений Максвелла	354
10.4. Лагранжиан с ненулевой плотностью тока	359
Лекция 11. Поля и классическая механика	365
11.1. Энергия и импульс поля	365
11.2. Три вида импульса	367
11.2.1. Механический импульс	367
11.2.2. Канонический импульс	368
11.2.3. Нётер-импульс.	369
11.3. Энергия	372
11.4. Теория поля	374
11.4.1. Лагранжиан для полей.	374
11.4.2. Действие для полей.	377

11.4.3. Гамильтониан для полей.	378
11.4.4. Следствие конечности энергии	381
11.4.5. Электромагнитные поля через калибровочную инвариантность.	382
11.5. Энергия и импульс в четырех измерениях	392
11.5.1. Локально сохраняющиеся величины.	393
11.5.2. Энергия, импульс и лоренцева симметрия	396
11.5.3. Тензор энергии-импульса	399
11.6. До свидания!.	403
Приложение А. Магнитные монополи:	
Ленни дурачит Арта.....	406
Приложение Б. Обзор 3-векторных операторов.....	420
Б.1. Оператор.....	420
Б.2. Градиент	420
Б.3. Дивергенция	421
Б.4. Ротор	422
Б.5. Лапласиан.....	423
Алфавитный указатель	426

Моему отцу и герою,
храброму человеку —
Бенджамену Сасскинду

Л. С.

Моей жене Мэгги
и ее родителям,
Дэвиду и Барбаре Слоун

А. Ф.

Предисловие

Эта книга — одна из серии книг, тесно связанных с моим курсом лекций в интернете под названием «Теоретический минимум». Мой соавтор Арт Фридман прошел этот курс в качестве студента, и книга выиграла оттого, что как человек, изучавший предмет, Арт понимал, какие вопросы могут представлять трудность для новичка. Работа над книгой доставляла нам огромное удовольствие, и мы попытались передать это чувство посредством шуток. Если этот юмор вам мешает, не обращайтесь на него внимания.

Две предыдущие книги этой серии посвящены классической механике и основам квантовой механики. До сих пор мы не рассматривали вопросов, связанных со светом, потому что свет представляет собой релятивистское явление: он связан со специальной теорией относительности или, как мы будем ее иногда называть, СТО. СТО и классическая теория поля и составляют предмет этой книги. Классическая теория поля — это теория электромагнитного поля, то есть волн, сил, действующих на заряженные частицы, и т. д., в контексте СТО. Со специальной теории относительности мы и начнем.

Леонард Сасскинд

* * *

Мои родители, дети иммигрантов, были двуязычными. Они учили нас, своих детей, кое-каким словам и выражениям на идише, но в основном приберегали этот язык для себя, иногда говоря на нем друг другу то, что не предназначалось для наших ушей.

Часто эти их «секретные» разговоры сопровождались бурными взрывами хохота.

Идиш — язык очень экспрессивный, он хорошо приспособлен и для великой литературы, и для повседневной жизни. Есть в нем и простецкий юмор. Мне жаль, что мое понимание этого языка так ограничено — я бы хотел прочесть все написанные на нем великие произведения в оригинале, но, честно говоря, был бы доволен, если бы понимал хотя бы шутки.

Многие из нас испытывают похожие чувства по отношению к математической физике. Мы хотим понять ее великие идеи и проблемы, найти применение и своему творчеству. Мы знаем, что в физике есть поэзия, которую можно и понимать, и создавать, нам очень хотелось бы внести в нее и свой вклад. Но нам недостает ее «секретного языка». В этой серии книг мы ставим себе целью научить вас языку физики и показать некоторые из великих идей этой науки в их естественной «среде обитания».

Если вы доверитесь нам, перед вами раскроется картина значительной части физики XX века. Вы будете в достаточной степени экипированы, чтобы понять основную часть ранних работ Эйнштейна. Как минимум вы научитесь не только «понимать шутки», но и серьезные идеи, стоящие за ними. Чтобы вам было легче начать, мы познакомим вас с нашими собственными шутками — по-моему, среди них есть настоящие «хиты».

Я искренне благодарен всем, кто помогал нам и поддерживал нас. Фраза «мы не могли бы сделать это без вас» звучит стандартно, но тем не менее это истинная правда.

Работать с профессионалами из издательств Brockman, Inc., и Basic Books — всегда удовольствие и полезный опыт. Джон Брокман, Макс Брокман и Майкл Хили сыграли огромную роль в превращении нашей идеи в реальный проект. «Ти Джей» Келлер, Элен Бартелеми, Кэрри Наполитано и Мелисса Веронези с огромным мастерством и пониманием провели нас через все

стадии издательского и производственного процесса. Лаура Стикни из Penguin Books координировала выпуск британского издания столь ювелирно, что мы почти не заметили, как все произошло. Выпускающий редактор Эми Шнайдер внесла существенные улучшения в исходную рукопись, как и корректоры Лор Гэрет и Бен Тэдофф.

Многие бывшие студенты Леонарда великодушно предложили свою помощь в просмотре рукописи. Это было нелегким делом. Их глубокий анализ и предложения были бесценны, и благодаря им книга стала гораздо лучше. Мы искренне благодарны Джереми Брэнски, Байрону Дому, Джеффу Джастису, Клинтону Льюису, Иоганну Шамрилу Соса и Дон Марсии Уилсон.

Как всегда, на протяжении всего проекта я чувствовал тепло и поддержку моей семьи и друзей. Моя жена Мэгги часами переделывала два рисунка, изображающие «Кабачок “У Германа”», несмотря на свои недомогания и безвременную кончину ее матери.

Этот проект обеспечил мне такую роскошь, как возможность предаваться сразу двум самым большим страстям моей жизни: физике (на уровне третьекурсника) и юмору (на уровне четвероклассника). В этом отношении мы с Леонардом оказались прекрасной командой, и сотрудничество с ним стало для меня незабываемой радостью.

Арт Фридман

Введение

Здравствуйте, дорогие читатели «Теоретического минимума». С возвращением к необыкновенным приключениям Ленни и Арта! Мы расстались с отважными приятелями, когда они только начали приходить в чувство после отчаянных и бесшабашных полетов на американских горках в квантовом мире запутанности и неопределенности. Им срочно требовалось что-нибудь успокаивающее, надежное, однозначно детерминистское, что-нибудь классическое. Но в *Книге III* их гонка продолжается, и она не станет менее сумасшедшей. Сокращающиеся стержни, замедление времени, парадокс близнецов, относительная одновременность, растягивающиеся лимузины, которые одновременно и влезают, и не влезают в гаражи размером с «фольксваген» — да, похоже, сумасбродные приключения Ленни и Арта не собираются заканчиваться. А в конце гонки Ленни еще и одурачит Арта при помощи фальшивого монополя.

Может, я нагоняю страху, но для новичка релятивистский мир представляется какой-то причудливой «комнатой смеха» с кривыми зеркалами, полной опасных головоломок и скользких парадоксов. Но мы всегда будем рядом, чтобы помочь вам преодолеть трудности. Вам также пригодилось бы знакомство с основами математического анализа и линейной алгебры.

Мы всегда ставили себе цель объяснять предмет со всей серьезностью, ничего не упрощая, но и не добавляя ничего сверх того, что необходимо для перехода к следующему этапу курса. В зависимости от ваших предпочтений это может быть либо квантовая теория поля, либо общая теория относительности.

Прошло уже некоторое время с тех пор, как мы с Артом опубликовали *Книгу II*,¹ посвященную квантовой механике. Мы были щедро вознаграждены тысячами электронных писем с выражением благодарности за наши усилия по описанию наиболее важных теоретических принципов физики в нашем «Теоретическом минимуме».

В первом томе, посвященном классической механике, были в основном очерчены общие рамки классической физики, установленные в XIX веке Лагранжем, Гамильтоном, Пуассоном и другими гигантами. Этот подход по-прежнему актуален и лежит в основе развития всей современной физики, вплоть до квантовой механики.

Проникновение квантовой механики в физику началось с 1900 года, когда Макс Планк обнаружил пределы классической физики, и продолжалось до 1926 года, когда Поль Дирак объединил идеи Планка, Эйнштейна, Бора, де Бройля, Шрёдингера, Гейзенберга и Борна в рамках единой согласованной математической теории. Этот великий синтез (основанный, кстати, на заложенных Гамильтоном и Пуассоном базовых принципах классической механики) подробно рассматривается в *Книге II* «Теоретического минимума».

В *Книге III* мы делаем в историческом смысле шаг назад, в XIX столетие, к источникам современной теории поля. Я не историк, но думаю, что не ошибаюсь, когда возвожу идею поля к Майклу Фарадею. Фарадей пользовался элементарным математическим аппаратом, но при этом обладал исключительной силой воображения, что и привело его к представлениям об электромагнитном поле, силовых линиях и электромагнитной индукции. Интуитивно он уже понимал большую часть из того, что Максвелл позже объединил в своих универсальных уравне-

¹ Сасскинд Л., Фридман А. Квантовая механика. Теоретический минимум / Пер. с англ. А. Сергеева. — СПб.: Питер, 2015. — 400 с.: ил.

ниях электромагнетизма. Фарадею не доставало лишь одного: понимания, что переменное электрическое поле приводит к эффектам, подобным тем, которые производит электрический ток.

Именно Максвелл позже, примерно в начале 1860-х, открыл так называемый ток смещения и пошел дальше, построив первую настоящую теорию поля: теорию электромагнетизма и электромагнитного излучения. Но теория Максвелла была не свободна от некоторых вызывающих беспокойство противоречий.

Проблема максвелловской теории заключалась в том, что она, по-видимому, не согласовывалась с основным принципом, открытие которого приписывается Галилею и который в явном виде сформулировал Ньютон: все движения относительны. Ни одна (инерциальная) система отсчета не может считаться покоящейся в большей степени, чем любая другая система. Однако этот принцип вошел в противоречие с электромагнитной теорией, которая предсказывала, что свет движется с постоянной скоростью $c = 3 \times 10^8$ метров в секунду. Как мог свет иметь одну и ту же скорость во всех системах отсчета? Как мог он распространяться с одной и той же скоростью относительно и покоящегося вокзала, и несущегося мимо него поезда?

Максвелл и другие знали об этом конфликте и решали его простейшим известным им путем: отказываясь от галилеевского принципа относительности движения. Они рисовали картину мира, заполненного особой субстанцией — эфиром, — который, как и всякое обычное вещество, был связан с покоящейся системой отсчета, в которой он был неподвижен. Эта система отсчета, согласно приверженцам теории эфира, была единственной, в которой уравнения Максвелла были верны. В любой другой системе, движущейся относительно эфира, эти уравнения надо было корректировать.

Вопрос оставался в этом состоянии до 1887 года, когда Альберт Майкельсон и Эдвард Морли выполнили свой знаменитый эксперимент, пытаясь измерить малые изменения в скорости света,

связанные с движением Земли сквозь эфир. Большинство читателей, несомненно, знают, чем это кончилось: никаких изменений экспериментаторы не обнаружили. Многие пытались как-то объяснить результат, полученный Майкельсоном и Морли, не отказываясь от идеи эфира. Проще всего было предположить, что эфир увлекается за Землей в ее движении, так что установка Майкельсона — Морли на деле оставалась неподвижной относительно эфира. Но как бы ни пытались спасти теорию эфира, она оставалась неуклюжей и громоздкой.

Если верить свидетельству самого Эйнштейна, он ничего не знал об опыте Майкельсона — Морли, когда в 1895 году (в возрасте шестнадцати лет) начал размышлять о противоречии между электромагнетизмом и идеей относительности движения. Он интуитивно чувствовал, что каким-то образом этого противоречия на деле не существует. Его размышления основывались на двух постулатах, которые выглядели несовместимыми друг с другом.

1. Законы природы одинаковы во всех системах отсчета. Поэтому не может быть никакой предпочтительной системы, связанной с эфиром.
2. Свет движется со скоростью c — это закон природы.

И сколь бы несообразным это ни казалось, объединение этих двух принципов приводило к выводу, что свет должен двигаться с одной и той же скоростью во всех системах отсчета.

Потратив на это почти десять лет, к 1905 году Эйнштейн сумел согласовать два указанных принципа в рамках теории, которую назвал специальной теорией относительности. Интересно, что в названии его статьи 1905 года слова «относительность» нет; она называется «Об электродинамике движущихся тел». Из физики ушла все более усложняющаяся идея эфира; ее место заняла новая теория пространства и времени. Однако и по сей день вы найдете в учебниках оставленный теорией эфира след в виде символа ϵ_0 , так называемой диэлектрической постоянной вакуума, как будто вакуум представляет собой субстанцию с ма-

териальными свойствами. Студенты, знакомящиеся с предметом, часто страдают от путаницы, которую создают обозначения и терминология, восходящие к теории эфира. И если в моих лекциях есть что-то новое, то это попытка избавления от этой путаницы.

Как и в других книгах «Теоретического минимума», я ограничиваюсь тем минимумом материала, который необходим для следующего шага, — в зависимости от ваших предпочтений, им будет либо квантовая теория поля, либо общая теория относительности.

Как вы уже слышали, классическая механика построена на интуиции: тела движутся вполне предсказуемо. Опытный бейсболист может лишь мельком взглянуть на летящий мяч и по его положению и скорости понять, куда ему бежать, чтобы оказаться ровно там и тогда, где и когда мяч окажется в его руках. Конечно, внезапный порыв ветра может оставить его в дураках, но это лишь потому, что он не принял во внимание все переменные. Есть очевидная причина интуитивности классической механики: люди, а до них и животные, каждый день многократно пользуются ею, чтобы выжить. В нашей книге по квантовой механике мы очень подробно объяснили, почему при изучении этого предмета от нас требуется забыть нашу физическую интуицию и заменить ее чем-то совершенно иным. Нам пришлось изучить новые математические абстракции и новый способ соединять их с физическим миром. А что можно сказать о специальной теории относительности? В то время как квантовая механика исследует мир **ОЧЕНЬ МАЛОГО**, специальная теория относительности уводит нас в мир **ОЧЕНЬ БЫСТРОГО** — и нам снова придется заставлять себя не верить нашей интуиции. Но есть и хорошая новость: математика специальной теории относительности гораздо менее абстрактна, и нам не понадобится «перепрошивка мозга», чтобы связать эти абстракции с физическим миром. Да, СТО тоже расширяет пределы нашей интуиции, но гораздо мягче. Фактически СТО в целом считается ветвью классической физики.

Специальная теория относительности требует от нас пересмотра наших представлений о пространстве, времени и особенно одновременности. Этот пересмотр дался физикам нелегко. Как и любой принципиальный скачок, СТО встретила сопротивление многих. Можно, пожалуй, сказать, что некоторых физиков приходилось тащить к ОТО насильно, а они упирались руками и ногами. А кое-кто так и не согласился принять эту теорию.¹ Почему же большинство из них в конце концов сдались? Помимо многих экспериментов, которые подтверждали предсказания ОТО, у нее была и очень сильная *теоретическая* поддержка. Классическая теория электромагнетизма, в XIX веке доведенная до совершенства Максвеллом и другими, невозмутимо провозглашала, что «*скорость света есть скорость света*». Другими словами, что скорость света остается одной и той же во всех инерциальных (не ускоряющихся) системах отсчета. И хотя это заключение вызывало беспокойство, его нельзя было просто проигнорировать — теория электромагнетизма слишком успешно работает, чтобы от нее можно было бы отмахнуться. В этой книге мы исследуем глубокие связи СТО с электромагнитной теорией, а также ее многочисленные и интересные предсказания и парадоксы.

¹ Отметим, что среди них были Альберт Майкельсон, первый американец, получивший Нобелевскую премию по физике, и его сотрудник Эдвард Морли. Их точные измерения стали веским подтверждением СТО.



Рисунок Маргарет Слоун. «Кабачок “У Германа”»

ЛЕКЦИЯ 1

Преобразования Лоренца

Мы открываем Книгу III и видим, как Арт и Ленни со всех ног от кого-то убегают.

Арт: Ох, Ленни, слава богу, нам удалось улизнуть из заведения Гильберта живыми! Я уж думал, нам оттуда не выбратся. Может, найдем более классическое место, чтобы потусить?

Ленни: Верно, Арт. Хватит с меня этих неопределенностей. Пошли лучше к Герману в кабачок, там со всей определенностью что-то происходит.

Арт: Это где? И что за тип этот Герман?

Ленни: Минковский? Тебе точно понравится. Гарантирую, у Минковского не встретишь ни одного бра. И кетов нету.¹

И вот Ленни и Арт уже в кабачке «У Германа», тесно набитом возбужденной публикой.

Арт: С какой стати Герман открыл свой кабачок здесь, на отшибе, посреди — чего? Коровьего пастбища? Рисовой плантации?

Ленни: Мы зовем это просто полем. Можно выращивать тут что хочешь: коров, рис, маринованные огурчики... Герман — мой старый друг, я сдаю ему этот участок очень дешево.

¹ «Бра» и «кеты» (от англ. bracket) — введенный Дираком алгебраический формализм квантовой механики для обозначения квантовых состояний. — *Примеч. пер.*

Арт: Так ты, выходит, фермер-любитель! Кто бы мог подумать? А кстати, почему это здесь все такие тощие? Кормят плохо?

Ленни: Кормят потрясающе. А тощие они потому, что очень быстро двигаются. Герман раздает всем бесплатные реактивные ранцы. Скорей! Смотри! Утка! УТКА!

Арт: Ух ты! Попробуем догнать! Хоть похудеем, что ли.

Специальная теория относительности — это прежде всего теория систем отсчета. Если мы говорим что-то о физическом мире, остается ли наше утверждение верным в другой системе отсчета? Является ли наблюдение, которое сделал человек, стоящий на земле, верным для того, кто летит в самолете? Существуют ли величины или утверждения, остающиеся инвариантными — не зависящими от системы отсчета наблюдателя? Ответы на такие вопросы оказываются интересными и неожиданными. По сути, именно они и привели к революции в физике в самом начале XX века.

1.1. Системы отсчета

О системах отсчета вы уже кое-что знаете. Я рассказывал о них в *Книге I*, посвященной классической механике. Декартовы координаты, например, знакомы большинству людей. В декартовой системе отсчета есть набор пространственных координат x , y и z и есть начало отсчета. Если вы хотите наглядно представить себе, что означает понятие системы координат, вообразите, что все пространство заполнено решеткой из мерных реек, так что любая точка в нем может быть обозначена определенным числом метров влево, определенным числом метров вверх и определенным числом метров вперед или назад от начала отсчета. Это и есть пространственная система координат. Она позволяет нам обозначать точное место, в котором произошло событие.

Чтобы отметить не только *где*, но и *когда* что-то произошло, нам еще требуется временная координата. Система отсчета — это система координат и в пространстве, и во времени. Она включает в себя оси x, y, z и t . Мы можем расширить наше наглядное представление, вообразив, что в каждой точке пространства есть еще и часы. Еще представим себе, что мы позаботились о синхронизации всех наших часов — это значит, что все они показывали $t = 0$ в один и тот же момент и что все они идут с одной и той же скоростью. Итак, наша система отсчета (или для краткости СО) представляет собой реальную или воображаемую решетку мерных реек вкупе с установленными в каждой точке синхронизированными часами.

Разумеется, есть множество способов обозначить положения точек в пространстве и времени, и это значит, что у нас могут быть различные СО. Мы можем перенести начало отсчета $x = y = z = t = 0$ в какую-нибудь другую точку, чтобы измерять положения в пространстве и времени относительно нее. Мы можем и поворачивать оси координат, придавая им то одну, то другую ориентацию. Наконец, мы можем рассматривать системы, движущиеся относительно какой-то одной определенной системы. Мы можем говорить о *вашей* системе и *моей* системе, и здесь мы приходим к важному пункту: кроме осей координат и начала отсчета, система отсчета может ассоциироваться с *наблюдателем*, который и будет пользоваться для своих измерений всеми этими часами и мерными рейками.

Предположим, что вы неподвижно сидите в аудитории в середине первого ряда. Аудитория заполнена мерными рейками и часами, которые в вашей системе отсчета неподвижны. Каждому событию, которое происходит в аудитории, вы приписываете определенное положение и время при помощи ваших реек и часов. Я тоже нахожусь в этой аудитории, но не стою неподвижно, а хожу. Я могу пройти мимо вас справа налево или слева направо, и с собой я ношу свою решетку часов и мерных реек. В каждый миг я нахожусь в начале моей системы пространственных координат так же, как вы находитесь в начале своей. Мои координаты, очевидно,

отличаются от ваших. Вы описываете событие координатами x, y, z и t , а я описываю *то же самое* событие другим набором координат, который отражает тот факт, что я могу двигаться мимо вас. В частности, если я двигаюсь относительно вас вдоль оси x , мы не придем к согласию в вопросе о наших x -координатах. Я всегда буду считать, что кончик моего носа находится на $x = 5$, то есть он в пяти дюймах впереди центра моей головы. Однако вы на это скажете, что мой нос не находится на координате $x = 5$ — вы скажете, что мой нос движется и его положение изменяется со временем.

Я могу почесать свой нос в момент времени $t = 2$, подразумевая под этим, что, когда я его почесал, часы на кончике моего носа показывали 2 секунды с момента начала лекции. Вы можете поддаться искушению и подумать, что и ваши часы тоже показывали $t = 2$ в точке, в которой я почесал свой нос. Но именно тут релятивистская физика расходится с ньютоновской. Предположение, что все часы во всех системах отсчета можно синхронизировать, интуитивно кажется очевидным, но оно входит в противоречие с предположением Эйнштейна об относительности движения и универсальности скорости света.

Мы скоро подробно рассмотрим вопрос о том, как и до какой степени можно синхронизировать часы в разных местах и в разных системах отсчета, но пока что просто предположим, что в любой данный момент времени все ваши часы показывают одно и то же время и что все они выставлены одинаково с моими часами. Другими словами, мы пока что будем следовать Ньютону и предполагать, что временная координата у вас в точности та же, что и у меня, и что нет никаких расхождений, происходящих из нашего относительного движения.

1.2. Инерциальные системы отсчета

Законы физики было бы очень трудно описать без координат, которыми отмечаются события. Как мы только что убедились, имеется множество систем координат и, следовательно, множе-

ство описаний одного и того же события. Для Галилея и Ньютона точно так же, как и для Эйнштейна, понятие относительности значило, что законы, управляющие этими событиями, остаются одними и теми же во всех инерциальных системах отсчета.¹ Инерциальная система — это такая, в которой частица, не испытывающая воздействия никаких внешних сил, движется по прямой с постоянной скоростью. Ясно, что не все системы инерциальны. Допустим, ваша система отсчета инерциальная, то есть частица, летящая по комнате, имеет постоянную скорость при измерении вашими рейками и часами. Если мне вздумается ходить туда-сюда, то для меня эта частица будет выглядеть ускоряющейся каждый раз, когда я поворачиваю. Но если я иду равномерно по прямой линии, то для меня и эта частица будет двигаться с постоянной скоростью. Вообще можно сказать, что любые две инерциальные системы должны двигаться друг относительно друга равномерно и прямолинейно.

Особенностью ньютоновской механики является то, что законы физики, например $F = ma$ и ньютоновский закон гравитационного притяжения, одни и те же во всех ИСО. Мне нравится описывать это так: представим себе, что я опытный жонглер. Я изучил кое-какие законы жонглирования, например такой: если бросить мяч вертикально вверх, он вернется в ту же точку, откуда стартовал. Я изучил эти законы, пока стоял на платформе в ожидании поезда.

Когда подходит поезд, я сажусь в него и тут же начинаю жонглировать. Но едва поезд трогается, законы вдруг перестают работать. Некоторое время мячи движутся как-то странно, падая в неожиданные места. Однако как только поезд начинает двигаться с постоянной скоростью, мои законы опять вступают в силу. Если я нахожусь в движущейся ИСО и все окна занавешены, так что я не могу выглянуть наружу, я не могу сказать, что я двигаюсь. Если я попытаюсь это выяснить посредством

¹ Иногда для обозначения *инерциальной системы отсчета* мы будем пользоваться сокращением ИСО.

жонглирования, я увижу, что мои стандартные законы жонглирования действуют. Я мог бы предположить, что нахожусь в покое, но это неверно; все, что я могу точно сказать, это что я нахожусь в инерциальной системе отсчета.

Принцип относительности гласит, что *законы физики одни и те же во всех ИСО*. Этот принцип не был изобретен Эйнштейном; он существовал и до него. Обычно его формулировку приписывают Галилею. Ньютон, разумеется, с ним бы тоже согласился. Что же нового внес Эйнштейн? Он добавил еще один закон физики: что скорость света есть скорость света, c . В метрах в секунду скорость света равна приблизительно 3×10^8 , в милях в секунду около 186 000, а в световых годах в год — ровно единице. Но какие бы единицы измерения ни выбирать, новый закон Эйнштейна постулирует, что скорость света одинакова для всех наблюдателей.

Когда вы объединяете эти две идеи — что законы физики одинаковы во всех ИСО и что законом физики является то, что свет движется с фиксированной скоростью, — вы приходите к выводу, что свет должен двигаться с одной и той же скоростью в *каждой* ИСО. Этот вывод поистине странный. Он заставлял некоторых физиков категорически отвергать теорию относительности. В следующем разделе мы исследуем логику Эйнштейна и выясним, каковы последствия нового закона.

1.2.1. Ньютоновские (дорелятивистские) системы отсчета

В этом разделе я объясню, как Ньютон описал бы отношения между системами отсчета и какие выводы он бы сделал о движении световых лучей. Основной постулат Ньютона заключался в том, что существует универсальное время, одинаковое во всех системах отсчета.

Начнем с того, что забудем о направлениях y и z и целиком сосредоточимся на направлении x . Притворимся, что мир одномерный

и что все наблюдатели свободны в своих передвижениях вдоль оси x , но «заморожены» в остальных двух пространственных направлениях. Рисунок 1.1 следует стандартному соглашению, согласно которому ось x направлена вправо, а ось t — вверх. Эти оси описывают мерные рейки и часы в вашей системе — системе, покоящейся в этой аудитории. (Я буду произвольно называть вашу систему покоящейся, а свою — движущейся.) Мы предположим, что в вашей системе свет движется со своей стандартной скоростью c . Такая схема называется пространственно-временной диаграммой. Вы можете считать ее картой мира, но такой картой, которая показывает все возможные места и все возможные моменты времени. Если световой луч послан из начала координат и движется вправо, его траектория будет задаваться уравнением

$$x = ct.$$

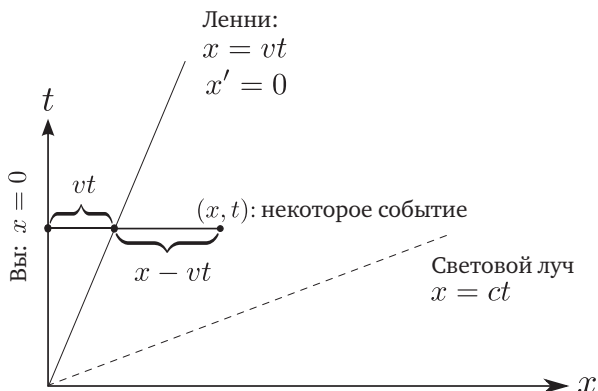


Рис. 1.1. Ньютоновские системы отсчета

Подобным же образом световой луч, движущийся влево, будет представлен уравнением

$$x = -ct.$$

Отрицательная скорость означает просто движение влево. Графические схемы, которые будут представлены ниже, я буду рисовать так, как если бы моя система двигалась вправо (v положительно). В виде упражнения можете перерисовать их для отрицательного значения v .

На рис. 1.1 световой луч показан пунктиром. Если за единицы на осях взять метры и секунды, световой луч покажется почти горизонтальным; линия пройдет 3×10^8 метров вправо, сдвинувшись по вертикали всего на 1 секунду! Но численное значение c полностью зависит от выбранных нами единиц. Следовательно, удобно выбрать какие-то другие единицы измерения для скорости света — такие, с которыми мы более ясно будем видеть, что наклон траектории светового луча конечен.

Теперь добавим сюда *мою* систему, движущуюся относительно вашей вдоль оси x с постоянной скоростью v .¹ Эта скорость может быть положительной (в этом случае относительно вас я буду двигаться вправо), отрицательной (тогда для вас я буду смещаться влево) или нулевой (а в этом случае мы покоимся друг относительно друга, и моя траектория на рисунке будет вертикальной).

Я буду обозначать координаты в моей системе x' и t' вместо x и t . Тот факт, что я двигаюсь относительно вас с постоянной скоростью, означает, что моя траектория в пространстве-времени — прямая линия. Вы можете описать мое движение уравнением

$$x = vt$$

или

$$x - vt = 0,$$

где v — моя скорость относительно вас. Все это иллюстрирует рис. 1.1. Как мне описать мое собственное движение? Легко:

¹ Это движение можно было бы также представить и как «мою траекторию в вашей системе».

я всегда нахожусь в начале моей системы координат. Другими словами, я описываю себя уравнением $x' = 0$. Интересный вопрос: как нам перейти от одной системы к другой, то есть какова связь между вашими координатами и моими? По Ньютону, эта связь выражается так:

$$t' = t \quad (1.1)$$

$$x' = x - vt. \quad (1.2)$$

Первое из этих уравнений отражает предположение Ньютона об универсальном времени, одинаковом для всех наблюдателей. Второе просто показывает, что моя координата x' смещена относительно вашей координаты на величину нашей относительной скорости, умноженной на время, отсчитываемое от начала координат. Отсюда мы видим, что уравнения

$$x - vt = 0$$

и

$$x' = 0$$

означают одно и то же. Уравнения (1.1) и (1.2) и представляют собой ньютоновское преобразование координат между двумя инерциальными системами отсчета. Если вы знаете, когда и где в вашей системе координат произошло событие, вы сможете сказать мне, когда и где оно случилось в моих координатах. Можно ли сделать обратное преобразование? Это легко, и я поручу это вам. Результат будет таким:

$$t = t' \quad (1.3)$$

$$x = x' + vt'. \quad (1.4)$$

Теперь посмотрим на световой луч на рис. 1.1. В соответствии с предположением, в вашей системе он движется вдоль пути $x = ct$. Как я могу описать его движение в моей системе? Я просто

подставлю значения x и t из уравнений (1.3) и (1.4) в уравнение $x = ct$, чтобы получить

$$x' + vt' = ct',$$

что можно переписать в форме

$$x' = (c - v)t'.$$

Как и следовало ожидать, это описание светового луча, движущегося со скоростью $(c - v)$ в моей системе. Это не вяжется с новым законом Эйнштейна, по которому все световые лучи движутся с одинаковой скоростью c во всех ИСО. Если Эйнштейн прав, в наших рассуждениях есть какая-то серьезная ошибка. Эйнштейн и Ньютон не могут быть правы оба: скорость света не может быть универсальной величиной, если существует универсальное время, единое для всех наблюдателей.

Прежде чем двинуться дальше, давайте посмотрим, что случится со световым лучом, который движется *влево*. В вашей системе такой световой луч будет описываться уравнением

$$x = -ct.$$

Легко видеть, что в моей системе отсчета ньютоновские правила дают

$$x' = -(c + v)t.$$

Другими словами, если я по отношению к вам двигаюсь вправо, световой луч, движущийся в том же направлении, перемещается немного медленнее (со скоростью $c - v$), а световой луч, движущийся в противоположную сторону, летит немного быстрее (со скоростью $c + v$) относительно меня. С этим согласились бы Ньютон и Галилей. С этим согласился бы *каждый* — вплоть до конца XIX века, когда физики научились измерять скорость света с большой точностью и обнаружили, что она всегда одинакова, независимо от того как движется инерциальный наблюдатель.

Единственный способ уладить этот конфликт — это признать, что с ньютоновским преобразованием координат от системы к системе что-то не так.¹ Нам необходимо разобраться, как изменить уравнения (1.1) и (1.2), чтобы скорость света в обеих системах отсчета оставалась неизменной.

1.2.2. Системы отсчета СТО

Прежде чем приступить к выводу наших новых преобразований, давайте еще раз посмотрим на одно из основных предположений Ньютона. Самое уязвимое из его предположений — именно оно и является неверным — заключается в том, что одновременность во всех системах означает одно и то же, то есть если мы синхронизируем наши часы и после этого я начну движение, мои часы останутся синхронизированными с вашими.

Мы сейчас увидим, что уравнение

$$t' = t$$

не является верным преобразованием отсчетов времени между движущимися и покоящимися часами. Сама идея одновременности оказывается зависящей от системы отсчета.

Синхронизация часов

Представим себе следующую ситуацию. Мы находимся в аудитории. Вы, студент, сидите в первом ряду, среди других внимательно слушающих лекцию студентов, у каждого из которых есть часы. Все эти часы идентичны друг другу и абсолютно надежны. Вы внимательно проверили все эти часы и убедились: все они показывают одно и то же время и тикают

¹ Это утверждение, возможно, кажется слишком поспешным. Многие талантливейшие физики всего мира пытались найти выход из создавшегося положения, не принося в жертву равенства $t' = t$. Ни у кого из них ничего не вышло.

с одной и той же частотой. У меня, в моей системе отсчета, тоже есть эквивалентная вашей коллекция часов, расположенная относительно меня таким же образом, каким расположены ваши часы. У каждого часового механизма из вашего набора имеется соответствующий партнер в моем наборе, и наоборот. Я убедился, что все мои часы синхронизированы друг с другом и с вашими часами. Затем я вместе со всеми моими часами начинаю двигаться относительно вас и ваших часов. Когда каждый из моих часовых механизмов проходит мимо каждого из ваших, мы сверяемся друг с другом, чтобы посмотреть, показывают ли они по-прежнему одно и то же время, и если нет, насколько каждое из устройств разошлось со своим партнером. Ответ на этот вопрос может зависеть от положения каждого из часовых механизмов на координатной прямой.

Разумеется, подобный вопрос мы могли бы задать и в отношении своих мерных реек: «Когда я прохожу мимо вас, имеет ли моя единичная мерная рейка такую же единичную длину в ваших координатах?» Именно здесь Эйнштейн и совершил свой великий прорыв. Он понял, что нам надо отнестись гораздо внимательнее к нашим определениям длины, времени и одновременности. Мы должны подумать о том, как мы синхронизируем два наших часовых механизма *экспериментально*. Но при этом мы должны держаться постулата о постоянстве скорости света во всех ИСО. И тогда нам придется отказаться от ньютоновского постулата об универсальном времени. Как обнаружил Эйнштейн, «одновременность относительна». Мы будем следовать его логике.

Что на самом деле мы имеем в виду, когда говорим, что два часовых механизма — назовем их A и B — синхронизированы? Если и те и другие часы находятся в одном и том же месте и движутся с одной и той же скоростью, очень просто сравнить их показания и выяснить, показывают ли они одно и то же время. Но даже если A и B неподвижны, скажем, в вашей системе отсчета, но не находятся в одной и той же точке, проверка их синхронизации

требует некоторого размышления. Дело в том, что свету нужно время для того, чтобы дойти от A до B .

Стратегия Эйнштейна заключалась в следующем: представим себе третьи часы C , расположенные на полпути между A и B .¹ Например, пусть все три механизма расположены в первом ряду нашей аудитории. Часы A держит в руках студент на левом краю ряда, часы B — студент на правом краю, а часы C находятся в центре ряда. При этом мы особенно тщательно позаботились о том, чтобы расстояние от A до C было в точности равно расстоянию от B до C .

Ровно в тот момент, когда часы A показывают полдень, они посылают световой сигнал в сторону часов C . Точно так же, когда часы B показывают полдень, в сторону часов C летит световой импульс и от них. Конечно, обоим сигналам потребуется время, чтобы достичь часов C , но так как скорость света одна и та же для обеих вспышек и расстояние, которое сигналы должны пройти, также одинаково, то и время, которое они затратят на то, чтобы дойти до C , тоже будет одним и тем же. Говоря, что часы A и B синхронизированы, мы имеем в виду, что световые сигналы придут в точку C ровно в одно и то же время. Конечно, если они придут не одновременно, студентка C заключит, что часы A и B не синхронизированы. Тогда она может послать студентам A или B сообщение о том, насколько им надо изменить показания своих часов, чтобы их синхронизировать.

Допустим, часы A и B *синхронизированы* в вашей системе. Что происходит в моей движущейся системе? Например, пусть я двигаюсь вправо и достиг средней точки C как раз в момент послышки этих двух сигналов. Но свет вспышек не достигнет C ровно в полдень; он придет сюда чуть позже. К этому времени я уже немного сдвинулся вправо от центра. А так как я справа от центра, световой луч слева достигнет меня немного позже, чем это сделает световой луч справа. Следовательно, мне придется

¹ Вообще-то это небольшое видоизменение подхода Эйнштейна.

заключить, что ваши часы *не* синхронизированы — ведь световые сигналы от них пришли ко мне в разное время.

Очевидно, что для меня и для вас синхронность — тот факт, что два события произошли в одно и то же время — определяется по-разному. Два события, которые произошли в одно и то же время в вашей системе отсчета, в моей системе происходят в разное время. Во всяком случае, исходя из двух постулатов Эйнштейна, мы должны прийти именно к такому выводу.

Единицы и измерения: краткое отступление

Прежде чем двигаться дальше, нам надо сделать небольшую паузу и объяснить, что мы будем использовать две системы единиц. Каждая из этих систем хорошо приспособлена для своих задач, и переходить от одних единиц к другим очень просто.

В первой из этих систем используются знакомые нам единицы: метры, секунды и т. д. Будем называть их *обычными*, или *общепринятыми*. Эти единицы превосходно описывают окружающий мир, где в большинстве случаев скорости гораздо меньше световой. Скорость 1 в этих единицах означает 1 метр в секунду, что на много порядков меньше c .

Вторая система основана на скорости света. В этой системе единицы длины и времени определяются так, чтобы скорость света была безразмерной величиной, равной 1. Эти единицы мы будем называть *релятивистскими*. В релятивистских единицах гораздо проще делать выкладки и устанавливать симметрию в уравнениях. Мы уже видели, что обычные единицы неудобны для построения пространственно-временных диаграмм. А релятивистские единицы для этого прекрасно приспособлены.

В релятивистских единицах не только $c = 1$, но и *все* скорости безразмерны. Чтобы это обеспечить, мы должны соответствующим образом определить единицы длины и времени — ведь скорость есть не что иное, как длина, деленная на время. Если

в качестве единицы времени мы возьмем секунду, то нашей единицей длины будет световая секунда. Много это или мало? Мы знаем, что это 300 000 км, но для наших целей это совершенно несущественно. Важно вот что: световая секунда теперь наша мера длины, и в соответствии с ее определением свет пролетает расстояние в 1 световую секунду за секунду! По сути, мы теперь измеряем в секундах *и* время, *и* длину. Таким образом, скорость — длина, деленная на время — становится величиной безразмерной. Когда мы пользуемся релятивистскими единицами, любая переменная скорость v является безразмерной частью скорости света. И это вполне согласуется с тем, что сама скорость света c имеет численное значение 1.

На пространственно-временной диаграмме, такой как на рис. 1.2, оси x и t откалиброваны в секундах.¹ Траектория светового луча образует равные углы и с осью x , и с осью t . И наоборот, любая траектория, которая образует равные углы с обеими осями, представляет собой световой луч. В вашей стационарной СО этот угол равен 45 градусам.

Знание того, как легко и быстро переходить от одного типа единиц измерения к другому, нам очень пригодится. Основной принцип здесь заключается в том, что размерность математических выражений должна быть внутренне согласованной, независимо от того, какую именно систему единиц мы в том или ином случае используем. Наиболее распространенный и полезный прием при переходе от релятивистских к обычным единицам заключается в замене v на v/c . Есть и другие схемы перехода, которые, как правило, основаны на умножении или делении на некоторую подходящую степень скорости света c . С такими примерами мы скоро встретимся в ходе изложения, и вы увидите, что эти преобразования систем единиц довольно просты.

¹ Если вам так больше нравится, можете считать, что ось t откалибрована в световых секундах, а не в секундах времени, но количественно это одно и то же.

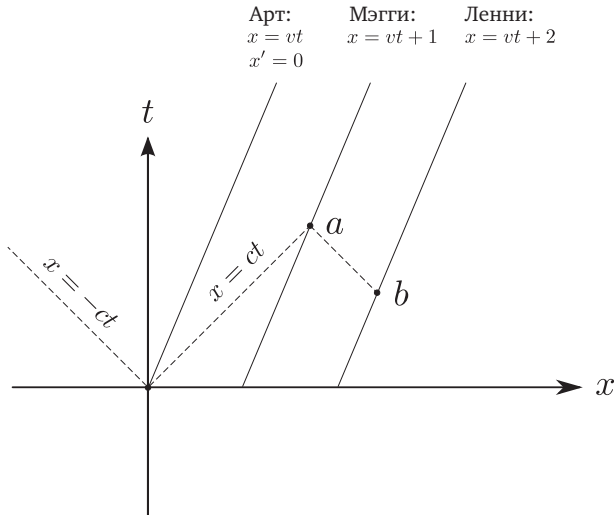


Рис. 1.2. Системы отсчета СТО в релятивистских единицах ($c = 1$). Уравнения, связанные с Артом, представляют два различных способа описания его мировой линии. Пунктиром показаны мировые линии световых лучей. Постоянные 1 и 2 в уравнениях мировых линий Мэгги и Ленни не просто числа — это секунды в релятивистских единицах

И снова координаты!

Давайте вернемся к нашим двум системам координат. На этот раз мы будем очень внимательно относиться к точному значению слова *одновременность* в движущейся СО. В покоящейся СО две точки синхронны (или одновременны), если они находятся на одном и том же горизонтальном уровне на пространственно-временной диаграмме. Обе эти точки имеют одну и ту же координату t , и прямая, которая их соединяет, параллельна оси x . Со всем этим Ньютон был бы полностью согласен.

Но что, если система отсчета движется? Мы сейчас увидим, что в *движущейся* системе точка

$$x = 0, \quad t = 0$$

не одновременна с другими точками оси x , но зато одновременна с совершенно другим множеством точек. По сути дела, вся поверхность, которая в движущейся системе называется «одновременной», находится где-то в другом месте. Как мы можем изобразить эту поверхность? Мы используем для этой цели процедуру синхронизации, описанную в предыдущем подразделе («Синхронизация часов») и проиллюстрированную на рис. 1.2.

Рисование пространственно-временной диаграммы — это обычно лучший способ понять суть проблемы относительности. Основа этого графика всегда одна и та же: горизонтальная ось x , вертикальная — t . Эти координаты составляют СО, которую мы считаем неподвижной. Другими словами, они являются *вашей* системой отсчета. Линия, которая представляет траекторию наблюдателя, движущегося в пространстве-времени, называется *мировой линией*.

Определившись с осями, мы нарисуем световые лучи. На рис. 1.2 они представлены линиями $x = ct$ и $x = -ct$. Пунктирная линия, проведенная из точки a в точку b , тоже является световым лучом.

Вернемся на главную дорогу

Возвращаясь к рис. 1.2, нарисуем на нем наблюдателя: Арта, сидящего в купе поезда, который движется вправо с постоянной скоростью v . Его мировая линия обозначена уравнением, которое описывает его движение. Напомним еще раз, что система Арта будет двигаться так, что $x' = x - vt$ — в точности как двигался наблюдатель на рис. 1.1.

Теперь давайте подумаем, как нарисовать ось x' в системе Арта. Начнем с того, что добавим еще двух наблюдателей, Мэгги и Ленни. Мэгги сидит в следующем купе перед Артом (для вас — правее), а в купе перед ней, то есть еще правее, сидит Ленни. Соседние наблюдатели отделены друг от друга одной единицей длины, измеренной в вашей (покоящейся) системе. Уравнения мировых линий Мэгги и Ленни даны на рисунке.

Так как Мэгги расположена на одну единицу длины справа от Арта, ее траектория описывается как $x = vt + 1$, а траектория Ленни — как $x = vt + 2$. Арт, Мэгги и Ленни находятся в одной и той же движущейся системе отсчета. Друг относительно друга они неподвижны.

У нашего первого наблюдателя, Арта, есть часы, и в тот момент, когда он достигает начала отсчета, они показывают ровно 12 дня. Предположим, что и в покоящейся системе отсчета часы в этот момент тоже показывают полдень. Договоримся считать 12 часов дня нашим нулевым моментом времени и обозначим наше общее начало координат ($x = 0$; $t = 0$) в вашей координатной системе и ($x' = 0$; $t' = 0$) в системе координат Арта.

Итак, по нашему допущению, движущийся и неподвижный наблюдатели договорились о нулевом моменте времени $t = 0$. Для вас (неподвижного наблюдателя) $t = 0$ на всей горизонтальной оси. По сути, это *определение* горизонтальной оси: это как раз такая линия, на которой все моменты времени неподвижного наблюдателя равны нулю.

Пусть Арт из своего начала отсчета посылает световой сигнал Мэгги. Ленни *тоже* посылает в сторону Мэгги световой сигнал из некоторой точки — мы пока не знаем из какой. Каким-то образом он ухитряется сделать это так, что оба сигнала достигают Мэгги в один и тот же момент. Если сигнал Арта послан из начала отсчета, Мэгги получит его в точке *a* на рис. 1.2. Из какой же точки должен послать свой сигнал Ленни, чтобы этот сигнал достиг Мэгги в тот же самый момент? Мы можем это определить, если развернем события в обратном направлении. Мирровая линия любого светового сигнала, который Ленни отправляет к Мэгги, должна образовать с осью x угол 45 градусов. Поэтому мы просто должны построить прямую из точки *a* с наклоном 45 градусов вниз и направо и продолжать ее до пересечения с линией движения Ленни. На нашем рисунке это точка *b*, и, как легко можно видеть из рисунка, она лежит над осью x , а не на ней.

Мы только что показали, что начало отсчета и точка b являются *одновременными* событиями в системе отсчета Арта! Другими словами, движущийся наблюдатель (Арт) скажет, что $t' = 0$ в точке b . Почему? Потому, что в движущейся системе отсчета Арт и Ленни, находящиеся на одинаковом расстоянии от центрального наблюдателя Мэгги, послали ей световые сигналы, которые пришли к ней в один и тот же момент времени. А Мэгги скажет: «Ребята, вы послали мне световые сигналы ровно в один и тот же момент времени, потому что они пришли ко мне в одно и то же время, а я ведь знаю, что вы находитесь от меня на одинаковом расстоянии».

Находим ось x'

Мы установили, что для Арта (а также для Мэгги и Ленни) ось x — это прямая, соединяющая общее (для обеих систем отсчета) начало отсчета с точкой b . Нашей следующей задачей будет точно отыскать положение точки b . Как только мы вычислим координаты точки b , мы тут же узнаем, как определить направление оси x' в системе Арта. Давайте сделаем это шаг за шагом. Процедура немного громоздкая, но простая. Шагов два. Первый — это поиск или определение координат точки a .

Точка a лежит на пересечении двух прямых: движущегося направо светового луча $x = ct$ и прямой $x = vt + 1$, которая является мировой линией Мэгги. Чтобы найти это пересечение, мы просто подставим одно уравнение в другое. Так как мы используем релятивистские единицы, в которых скорость света c равна 1, уравнение

$$x = ct$$

можно записать еще проще:

$$x = t. \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в уравнение мировой линии Мэгги,

$$x = vt + 1;$$

получаем

$$t = vt + 1,$$

или

$$t(1 - v) = 1.$$

Или еще лучше:

$$t_a = 1/(1 - v). \quad (1.6)$$

Теперь, когда известна временная координата точки a , можно найти и ее координату x . Это легко сделать, если заметить, что вдоль всего светового луча $x = t$. Другими словами, мы просто можем заменить в (1.6) t на x и написать

$$x_a = 1/(1 - v).$$

Поздравляю! Мы нашли точку a !

Обладея координатами точки a , посмотрим на прямую ab . Как только у нас будет ее уравнение, мы сможем определить, где она пересекает мировую линию Ленни $x = vt + 2$. Для этого потребуются несколько шагов, но, во-первых, они интересные, а во-вторых, я не знаю более короткого пути.

Каждая прямая с наклоном 45 градусов, направленная вправо и вниз, обладает тем свойством, что величина $x + t$ вдоль всей прямой постоянна. У каждой прямой, направленной под углом в 45 градусов вверх и вправо, постоянна величина $x - t$. Возьмем прямую ab . Ее уравнение:

$$x + t = \text{некоторая постоянная.}$$

Чему же равна эта постоянная? Легко найти ее, взяв какую-нибудь точку на этой прямой с конкретными значениями x и t . В частности, мы уже знаем, что в точке a

$$x_a + t_a = 2/(1 - v).$$

Следовательно, так как мы знаем, что это равенство будет выполняться вдоль всей прямой ab , уравнение этой прямой должно иметь вид

$$x + t = 2/(1 - v). \quad (1.7)$$

Теперь можно найти координаты b , решая систему линейных уравнений для прямой ab и мировой линии Ленни. Мировая линия Ленни — это $x = vt + 2$, что мы перепишем как $x - vt = 2$. Составим нашу систему уравнений

$$x + t = 2/(1 - v)$$

и

$$x - vt = 2$$

и после несложных алгебраических преобразований решим ее:

$$t_b = \frac{2v}{(1-v^2)},$$

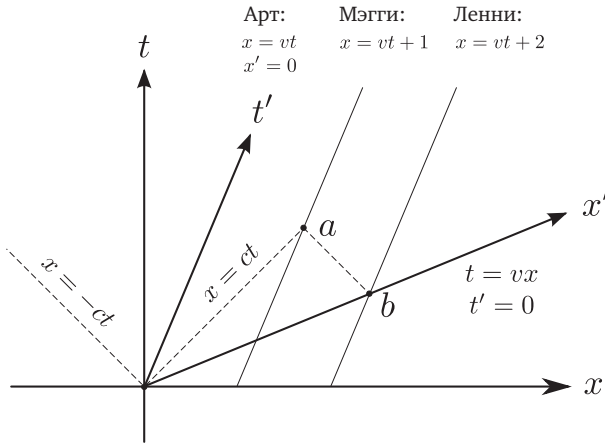
$$x_b = \frac{2}{(1-v^2)}. \quad (1.8)$$

Первое и самое важное: t_b не равно нулю. Следовательно, точка b , одновременная с началом отсчета движущейся системы координат, *не* одновременна с началом отсчета в неподвижной системе. Далее, рассмотрим прямую, соединяющую начало отсчета с точкой b . По определению, наклон этой прямой равен t_b/x_b , а из уравнений (1.8) мы видим, что этот наклон равен v . Эта прямая — не что иное, как ось x' , что весьма просто получается из уравнения

$$t = vx. \quad (1.9)$$

Не забудем при этом, что скорость v может быть положительной или отрицательной в зависимости от того, двигаюсь ли я вправо

или влево относительно вашей системы. Если скорость отрицательна, вам придется перерисовать все диаграммы или просто перевернуть их.



согласовать размерности, нам придется умножить правую часть на соответствующую степень c , а именно на $1/c^2$:

$$t = \left(\frac{v}{c^2} \right) x. \quad (1.10)$$

В уравнении (1.10) интересно то, что оно описывает прямую с невероятно малым наклоном: v/c^2 . То есть, например, если бы v равнялась 300 метров в секунду (примерная скорость реактивного самолета), наклон составил бы $v/c^2 = 3 \times 10^{-15}$. Другими словами, ось x' на рис. 1.3 была бы почти совершенно горизонтальной, а поверхности одновременности в покоящейся и движущейся системах почти точно совпадали бы, как это и происходит в ньютоновской физике.

Это пример того, как эйнштейновское описание пространства-времени сводится к ньютоновскому, если относительная скорость систем отсчета много меньше скорости света. И, конечно, это дает нам важный критерий правильности нашего подхода.

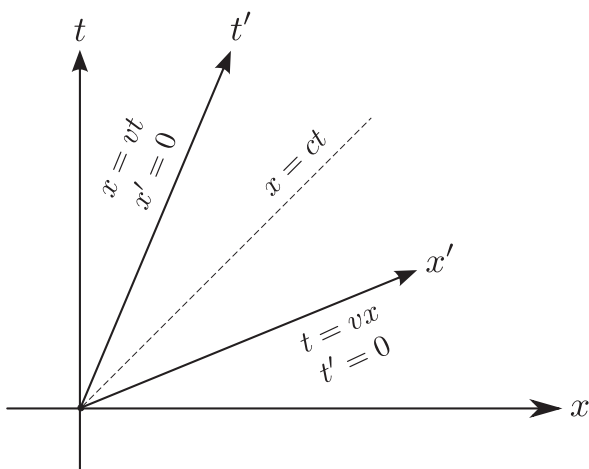


Рис. 1.4. Упрощенные системы отсчета СТО

Теперь мы можем вернуться к релятивистским единицам, в которых $c = 1$. Упростим нашу диаграмму и оставим на ней только то, что потребуется нам для дальнейшего движения вперед. Пунктирная линия на рис. 1.4 представляет луч света, мировая линия которого образует угол в 45 градусов и с осью t , и с осью x . Мировая линия Арта показана как ось t' , обозначена и его ось x' . Над обеими осями системы Арта также надписаны соответствующие уравнения. Отметим симметрию этих двух осей: $x = vt$ и $t = vx$. Эти две прямые являются отражениями друг друга относительно пунктирной световой траектории. Они связаны взаимозаменяемостью t и x . Другой способ выразить это — сказать, что они образуют одинаковый угол с соответствующими осями без штрихов — осью x в случае $t = vx$ и осью t в случае $x = vt$. Мы обнаруживаем две интересные вещи. Во-первых, если скорость света действительно одна и та же во всех системах отсчета и вы используете световые лучи для синхронизации часов, то пары событий, одновременные в одной системе, не являются одновременными в другой. Во-вторых, мы поняли, что именно означает одновременность в движущейся системе: она соответствует поверхностям, которые *не являются* горизонтальными, а наклонены под углом v . Мы определили направления осей x' и t' в движущейся системе Арта. Впоследствии мы выясним, как измерять интервалы на этих осях.

Пространство-время

Остановимся на минутку, чтобы поразмышлять о том, что мы узнали о пространстве и времени. Ньютон, разумеется, знал и о том и о другом, но считал их полностью независимыми друг от друга. Для Ньютона «пространство» было трехмерным пространством, а «время» — универсальным временем. Они были полностью самостоятельны, и различие между ними было абсолютным.

Но такие диаграммы, как рис. 1.3 и 1.4, указывают на нечто, чего Ньютон знать не мог, а именно на то, что при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой пространственные

и временные координаты начинают смешиваться друг с другом. Например, на рис. 1.3 интервал между началом отсчета и точкой b представляет две точки в один и тот же момент времени в движущейся системе отсчета. Но в покоящейся системе точка b сдвинута по отношению к началу отсчета не только в пространстве, но и во времени.

Спустя три года после основополагающей статьи Эйнштейна 1905 г., в которой были изложены основы специальной теории относительности, Минковский совершил революцию в физике. В обращении к 80-й Ассамблее Общества немецких естествоиспытателей и врачей он писал:

Пространство само по себе и время само по себе должны обратиться в фикции, и лишь некоторый вид соединения обоих должен еще сохранить самостоятельность.¹

Это объединение четырехмерно, с координатами t, x, y, z . Физики иногда называют его *пространством-временем*. Иногда мы зовем его и *пространством Минковского*. Сам Минковский называл его иначе: он называл его *миром*.

Точки в пространстве-времени Минковский называл *событиями*. Событие обозначается своими четырьмя координатами: t, x, y, z . Называя точку пространства-времени событием, Минковский имел в виду не то, что в точке t, x, y, z действительно что-то произошло, — он подразумевал, что там что-то *могло* произойти. Прямые или кривые линии, описывающие траектории объектов, Минковский называл *мировыми линиями*. Например, прямая $x' = 0$ на рис. 1.3 является мировой линией Арта.

Этот случившийся в 1908 году переход от независимых пространства и времени к единому пространству-времени был радикаль-

¹ Цит. по: Минковский Г. Пространство и время. Сборник работ классиков релятивизма «Принцип относительности» / Под ред. Фредерикса и Иванченко. — ОНТИ, 1935. — С. 181. — *Примеч. ред.*

ным шагом. Сегодня пространственно-временные диаграммы так же знакомы физикам, как линии на их собственных ладонях.

Преобразования Лоренца

Событие, или, другими словами, точку пространства-времени, можно пометить значениями координат в покоящейся или в движущейся системе отсчета. В зависимости от того, какую из систем мы выбираем, мы говорим при этом о двух различных описаниях одного и того же события. Следует очевидный вопрос: как мы переходим от одного описания к другому? Другими словами, каково *преобразование координат*, связывающее координаты в покоящейся системе t, x, y, z с координатами в движущейся системе t', x', y', z' ?

Одно из предположений Эйнштейна заключалось в том, что пространство-время повсюду одно и то же, в том же смысле, в каком повсюду одной и той же остается бесконечная плоскость. Это единообразие пространства-времени представляет собой симметрию, в соответствии с которой ни одно событие не отличается от любого другого события и при помещении начала отсчета в какой угодно точке физические уравнения не изменяются. Такой подход имеет математические последствия для природы преобразований от одной системы отсчета к другой. Например, ньютоновское уравнение

$$x' = x - vt \quad (1.11)$$

линейно, то есть содержит только первые степени координат. Уравнение (1.11) не удастся сохранить в его простой форме, но одну вещь оно все же ясно показывает, а именно, что $x' = 0$ при любом $x = vt$. По сути, существует единственный способ видоизменить уравнение (1.11), сохранив при этом его линейность наряду с тем фактом, что $x' = 0$ при любом $x = vt$: это умножить его правую часть на функцию скорости:

$$x' = (x - vt) f(v). \quad (1.12)$$

Вначале функция $f(v)$ могла быть любой, но у Эйнштейна был в запасе еще один трюк: использование другого вида симметрии, симметрии между левым и правым. Иначе говоря, не существует никаких физических причин считать скорость движения вправо положительной, а скорость движения влево — отрицательной. Такая симметрия предполагает, что $f(v)$ не должна зависеть от того, является ли v положительной или отрицательной. Есть простой путь записать любую функцию так, чтобы она была одинакова для положительных и отрицательных v : записать ее как функцию квадрата скорости v^2 .¹ Поэтому вместо (1.12) Эйнштейн написал

$$x' = (x - vt) f(v^2). \quad (1.13)$$

Подводя итог, можно сказать, что, записывая $f(v^2)$ вместо $f(v)$, мы подчеркиваем то обстоятельство, что в пространстве нет выделенного направления.

А как быть с t' ? Здесь вполне подходит та же логика, что и для x' . Мы знаем, что $t' = 0$ при всех $t = vx$. Другими словами, мы просто можем поменять ролями x и t и написать

$$t' = (t - vx) g(v^2), \quad (1.14)$$

где $g(v^2)$ — некоторая другая возможная функция. Уравнения (1.13) и (1.14) говорят нам, что $x' = 0$ при любых $x = vt$ и что $t' = 0$ при любом $t = vx$. Симметрия этих двух уравнений приводит к тому, что ось t' является просто отражением оси x' относительно прямой $x = t$ и наоборот.

Итак, пока мы знаем, что наши преобразования координат должны иметь вид:

$$\begin{aligned} x' &= (x - vt) f(v^2), \\ t' &= (t - vx) g(v^2). \end{aligned} \quad (1.15)$$

¹ Вообще-то здесь мы опять немного отклоняемся от эйнштейновского подхода.

Следующая наша задача — установить, какими именно должны быть функции $f(v^2)$ и $g(v^2)$. Для этого рассмотрим путь светового луча в этих двух системах отсчета и применим эйнштейновский принцип, гласящий, что скорость света одинакова. Если скорость света c равна 1 в неподвижной системе, она должна быть равна 1 и в движущейся системе. Перефразируем это: если мы начинаем с отправки светового луча, удовлетворяющего уравнению $x = t$ в неподвижной системе отсчета, он должен удовлетворять и уравнению $x' = t'$ в движущейся системе. Иначе говоря, из

$$x = t$$

должно следовать

$$x' = t'.$$

Вернемся к уравнениям (1.15). Полагая $x = t$ и требуя, чтобы $x' = t'$, мы приходим к простому условию:

$$f(v^2) = g(v^2).$$

Другими словами, требование, чтобы скорость света была одной и той же в вашей и моей системах отсчета, приводит к простому условию равенства функций $f(v^2)$ и $g(v^2)$. Тогда мы можем упростить уравнения (1.15)

$$\begin{aligned} x' &= (x - vt) f(v^2), \\ t' &= (t - vx) f(v^2). \end{aligned} \tag{1.16}$$

Чтобы найти $f(v^2)$, Эйнштейн использовал еще одно средство. По сути, он сказал: «Постойте, а откуда мы знаем, какая из систем движется? Откуда мы знаем, движется ли моя система относительно вашей со скоростью v или ваша относительно моей со скоростью $-v$?» Какими бы ни были отношения между двумя системами отсчета, эти отношения должны быть симметричны. В рамках такого подхода мы можем вывернуть наизнанку всю нашу аргументацию: вместо того чтобы начинать с x и t и выводить

из них x' и t' , мы можем сделать все наоборот. Единственным различием будет то, что тогда с моей точки зрения вы будете двигаться со скоростью $-v$, но с вашей я буду двигаться со скоростью $+v$. Основываясь на уравнениях (1.16), которые выражают x' и t' через x и t , мы тут же можем записать обратные преобразования. Уравнения, выражающие x и t через x' и t' , таковы:

$$\begin{aligned}x &= (x' + vt') f(v^2), \\t &= (t' + vx') f(v^2).\end{aligned}\tag{1.17}$$

Мы должны при этом ясно понимать, что получили уравнения (1.17) из общих соображений о физических отношениях между двумя системами отсчета, а не просто нашли остроумный способ решить уравнения (1.16) для нештрихованных переменных без выполнения необходимых преобразований. Фактически, получив эти две системы уравнений, мы оказались перед необходимостью проверить, что они совместимы друг с другом.

Возьмем для начала уравнения (1.17) и подставим в них выражения для x' и t' из уравнений (1.16). На первый взгляд может показаться, что мы попадаем в замкнутый круг, но мы сейчас увидим, что это не так. После всех подстановок мы потребуем, чтобы результаты были эквивалентны и давали $x = x$ и $t = t$. Как же может быть иначе, если исходные уравнения верны? Отсюда путем немного скучных, но вполне очевидных алгебраических преобразований мы найдем форму $f(v^2)$. Начиная с первого из уравнений (1.17), первые несколько подстановок для x будут выглядеть так:

$$\begin{aligned}x &= (x' + vt') f(v^2), \\x &= \{(x - vt) f(v^2) + v(t - vx) f(v^2)\} f(v^2), \\x &= (x - vt) f^2(v^2) + v(t - vx) f^2(v^2).\end{aligned}$$

Раскрыв скобки в последней строчке, получим:

$$x = x f^2(v^2) - v^2 x f^2(v^2) - v t f^2(v^2) + v t f^2(v^2),$$

что упростится до

$$x = x f^2(v^2)(1 - v^2).$$

Сократив на x с обеих сторон, найдем $f(v^2)$:

$$f(v^2) = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (1.18)$$

Теперь у нас есть все необходимое, чтобы преобразовать координаты в покоящейся системе к координатам в движущейся и наоборот. Переходя к уравнениям (1.16), получим

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (1.19)$$

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (1.20)$$

Это и есть знаменитые преобразования Лоренца для перехода между покоящейся и движущейся системами отсчета.

Арт: Ого, Ленни, вот это здорово. Неужели ты до этого сам додумался?

Ленни: Если бы. Нет, я просто сделал все, как написано в статье Эйнштейна. Я, правда, читал ее лет пятьдесят назад, но впечатление она на меня произвела сильное.

Арт: Хорошо, но как вышло, что их назвали преобразованиями Лоренца, если открыл их Эйнштейн?

1.2.3. Историческое отступление

Ответим на вопрос Арта. Действительно, Эйнштейн не был первым, кто вывел эти преобразования. Эта честь принадлежит голландскому физiku Хендрику Лоренцу. А некоторым

другим, например Джорджу Фицджеральду, даже раньше, чем ему, уже приходило в голову, что максвелловская теория электромагнетизма требует, чтобы движущиеся объекты сокращались в направлении своего движения — явление, которое мы сейчас называем *лоренцевым сокращением*. Руководствуясь соображениями об этом сокращении движущихся тел, Лоренц к 1900 году уже вывел свои преобразования. Но взгляды предшественников отличались от идей Эйнштейна и в некотором смысле были скорее возвратом к более старым идеям, чем обеспечивали стартовую позицию для движения вперед. Лоренцу и Фицджеральду казалось, что взаимодействие между неподвижным эфиром и движущимися атомами, из которых состоит все обычное вещество, должно создавать давление, которое и сжимает материю вдоль направления ее движения. В некотором приближении это давление сжимает все вещество как раз в такой степени, какая получается из преобразования координат.

Непосредственно перед выходом статьи Эйнштейна великий французский математик Анри Пуанкаре опубликовал работу, в которой вывел преобразования Лоренца из требования, чтобы уравнения Максвелла сохраняли свой вид в любой инерциальной системе отсчета. Но ни одна из работ предшественников Эйнштейна не обладала ясностью, простотой и степенью обобщения, присущими его подходу.

1.2.4. Возвращаемся к уравнениям

Если мы знаем координаты события в покоящейся системе, уравнения (1.19) и (1.20) дадут нам координаты этого события в движущейся системе. Можем ли мы пойти другим путем? Иными словами, можем ли мы предсказать координаты события в покоящейся системе, если мы знаем их в движущейся? Мы могли бы сделать это, выразив в наших уравнениях x и t через x' и t' , но есть и более простой путь.

Все, что нам нужно, — это осознать, что между покоящейся и движущейся системами существует полная симметрия. В конце концов, кто решает, какая из систем является движущейся, а какая покоящейся? Чтобы они поменялись ролями, мы могли бы просто поменять местами штрихованные и нештрихованные координаты в (1.19) и (1.20). Это почти так — но все же не вполне.

Подумаем вот о чем: если я двигаюсь вправо относительно вас, то вы двигаетесь влево относительно меня. Это значит, что ваша скорость относительно меня равна $-v$. Следовательно, когда я записываю преобразования Лоренца для x, t через x', t' , я должен заменить v на $-v$. В результате получится

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (1.21)$$

$$t = \frac{t' + vx'}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (1.22)$$

Переход к обычным единицам

А что, если мы не будем выбирать единицы измерения так, чтобы скорость света равнялась 1? Простейший способ перейти от релятивистских единиц обратно к общепринятым — позаботиться о том, чтобы согласовать размерности в наших уравнениях с этими единицами. Например, выражение $x - vt$ уже имеет согласованную размерность, так как и x , и vt имеют размерность длины — например, выражены в метрах. С другой стороны, выражение $t - vx$ не согласовано по размерности в общепринятых единицах: t выражается в секундах, а vx — в квадратных метрах за секунду. Существует единственный способ навести порядок с единицами: заменить $t - vx$ на

$$t - \frac{v}{c^2} x.$$

Теперь оба слагаемых имеют размерность времени. Но если мы захотим использовать единицы, приведенные к условию $c = 1$, то снова придем к исходному выражению $t - vx$.

Подобным же образом не является согласованным по размерности множитель $\sqrt{1-v^2}$ в знаменателе. Чтобы исправить это, нам придется заменить v на v/c . После этих изменений преобразования Лоренца можно записать в общепринятых единицах:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, \quad (1.23)$$

$$t' = \frac{t - \frac{vx}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (1.24)$$

Отметим, что, когда скорость v очень мала по сравнению со скоростью света, $v^2 = c^2$ еще меньше. Например, если $v/c = 1/10$, $v^2/c^2 = 1/100$, а если $v/c = 10^{-5}$, то v^2/c^2 становится очень мало и выражение $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ в знаменателе очень близко к 1.¹ С очень большой точностью мы можем написать:

$$x' = x - vt.$$

Это добрая старая ньютоновская версия. А что происходит с уравнением для времени (1.24), когда v/c очень мало? Пусть v составляет 100 метров в секунду. Мы знаем, что скорость света c очень велика, около 3×10^8 метров в секунду. Значит, v/c^2 — очень маленькое число. Если скорость движущейся системы мала, то вторым членом в числителе, vx/c^2 , можно пренебречь и с большой точностью второе уравнение преобразований Лоренца тоже превращается в ньютоновское:

$$t' = t.$$

¹ Для $v/c = 10^{-5}$ получается, что $\sqrt{1 - v^2/c^2} = 0,99999999995$.

Итак, для систем, медленно движущихся друг относительно друга, преобразования Лоренца переходят в ньютоновские формулы. Это хорошо: значит, пока мы движемся со скоростью, малой по сравнению с c , мы получаем старые привычные ответы. Но когда скорость становится близка к скорости света, поправки становятся большими и растут тем быстрее, чем ближе v к c .

Две другие оси

Уравнения (1.23) и (1.24) — это преобразования Лоренца в общепринятых (обычных) единицах. Конечно, полная система этих уравнений должна включать и преобразования двух остальных пространственных координат, y и z . Мы очень внимательно рассмотрели вопрос о том, что происходит с координатами x и t , когда системы отсчета находятся в относительном движении по оси x . А что происходит с координатой y ?

На этот вопрос мы ответим при помощи простого мысленного эксперимента. Пусть ваша рука и моя имеют одинаковую длину, когда мы оба находимся в покоящейся системе. Затем я начинаю двигаться с постоянной скоростью в направлении x . Когда мы проходим мимо друг друга, каждый из нас держит руку под прямым углом к направлению нашего относительного движения. Вопрос: когда мы проходим мимо друг друга, будут ли наши руки по-прежнему иметь одинаковую длину, или ваша будет длиннее моей? Из соображений симметрии ясно, что наши руки должны быть одной длины — ни у одной из них нет никакой причины быть длиннее другой. Следовательно, преобразования Лоренца должны иметь вид $y' = y$ и $z' = z$. Другими словами, когда относительное движение происходит вдоль оси x , интересные вещи наблюдаются только в плоскости x, t . Координаты x и t взаимодействуют друг с другом, а y и z остаются пассивными.

Для дальнейших ссылок поместим здесь полное преобразование Лоренца в обычных единицах для системы отсчета (обозначенной штрихами), движущейся со скоростью v в положительном направлении x относительно нештрихованной системы:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (1.25)$$

$$t' = \frac{t - vx/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}, \quad (1.26)$$

$$y' = y, \quad (1.27)$$

$$z' = z. \quad (1.28)$$

1.2.5. Ничто не движется быстрее света

Беглый взгляд на уравнения (1.25) и (1.26) показывает, что если относительная скорость двух систем отсчета превышает c , происходит нечто странное: $1 - v^2/c^2$ становится отрицательной величиной, а $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ — мнимой. Это очевидная бессмыслица: мерные рейки и часы могут показывать только координаты, выраженные действительными числами.

Эйнштейн разрешил этот парадокс при помощи дополнительного постулата: никакая материальная система не может двигаться со скоростью, превышающей скорость света. Точнее, никакая материальная система не может двигаться быстрее света относительно любой другой материальной системы. В частности, никакие два наблюдателя не могут двигаться быстрее света друг относительно друга.

Таким образом, у нас никогда не возникает необходимости сделать скорость v больше световой. Сегодня этот принцип является краеугольным камнем современной физики. Обычно его формулируют так: никакой сигнал не может распространяться быстрее, чем свет. Но так как сигналы состоят из материальных носителей, пусть и не более весомых, чем фотоны, эта формулировка сводится к тому же исходному принципу.

1.3. Обобщенные преобразования Лоренца

Эти четыре уравнения напоминают нам, что мы рассмотрели лишь самый простой вид преобразований Лоренца: преобразование, в котором каждая штрихованная ось параллельна своему нештрихованному аналогу, а относительное движение двух систем происходит только вдоль согласованно направленных осей x и x' .

Равномерное движение — вещь простая, но все же не всегда настолько примитивная. Ничто не мешает двум системам пространственных осей быть ориентированными по-разному, когда каждая штрихованная ось направлена под каким-либо ненулевым углом к своему нештрихованному аналогу.¹ Нетрудно также представить себе, что две системы отсчета движутся друг относительно друга не только в направлении x , но и вдоль осей y и z . Но тогда возникает вопрос: не упускаем ли мы каких-либо существенных особенностей физики равномерного движения, игнорируя эти обстоятельства? К счастью, ответ на этот вопрос *отрицательный*.

Представим себе две системы отсчета, находящиеся во взаимном относительном движении вдоль некоторого наклонного по отношению ко всем координатным осям направления. Не составило бы труда связать координаты по штрихованным осям с координатами по нештрихованным через последовательные повороты систем координат. Выполнив эти повороты, вы снова пришли бы к равномерному движению в направлении x . Обобщенные преобразования Лоренца — такие, где две системы связаны друг с другом поворотом на произвольный угол в пространстве

¹ Мы говорим о *фиксированном* различии в ориентации систем, а не о ситуации, когда какая-либо из систем вращается относительно другой с ненулевой угловой скоростью.

и движутся друг относительно друга в некотором произвольном направлении — эквивалентны:

- 1) повороту в пространстве, в результате которого штрихованные оси координат согласуются с нештрихованными;
- 2) простому преобразованию Лоренца вдоль новой оси x ;
- 3) второму повороту в пространстве, в результате которого восстанавливается первоначальная ориентация нештрихованных осей относительно штрихованных.

Если вы позаботились о том, чтобы ваша теория была инвариантна *как* относительно *простых* преобразований Лоренца вдоль, скажем, оси x , *так* и относительно поворотов системы координат, то можете быть уверены, что она будет инвариантна и относительно любого преобразования Лоренца.

Если говорить о терминологии, то преобразования, включающие относительную скорость одной системы относительно другой, называются иногда *бустами*. Например, о таких преобразованиях Лоренца, как задаваемые уравнениями (1.25) и (1.26), говорят как о *бустах* вдоль оси x .

1.4. Сокращение длины и замедление времени

До той поры, пока вы не привыкнете к выводам специальной теории относительности, она будет казаться вам контринтуитивной — возможно, не настолько, как квантовая механика, но тем не менее полной парадоксов. Мой совет: каждый раз, когда вы сталкиваетесь с одним из таких парадоксов, рисуйте пространственно-временные диаграммы. Не приставайте с вопросами к вашим друзьям-физикам, не шлите мне писем по электронной почте — рисуйте пространственно-временные диаграммы.

Сокращение длины

Представим себе, что вы держите мерную рейку, а я прохожу мимо вас в положительном направлении x . Вы знаете, что длина вашей рейки 1 метр, но я в этом не уверен. Когда я прохожу мимо вас, я измеряю вашу рейку своими собственными мерными рейками. Так как я нахожусь в движении, я должен быть очень аккуратен, иначе может получиться, что я измеряю положения конечных точек вашей рейки в два различных момента времени. Не забывайте, что события, одновременные в вашей системе отсчета, не одновременны в моей. Я хочу измерить положения концов вашей рейки ровно в одно и то же время в *моей* системе. Именно эту длину я и *принимаю* за длину вашей рейки в моей системе.

Рисунок 1.5 изображает пространственно-временную диаграмму этой ситуации. В вашей системе мерная рейка изображается горизонтальным отрезком прямой \overline{OQ} , параллельным оси x , которая для вас является поверхностью одновременности. Мерная рейка покоится, и мировые линии ее концов — это вертикальные прямые $x = 0$ и $x = 1$ в вашей системе.

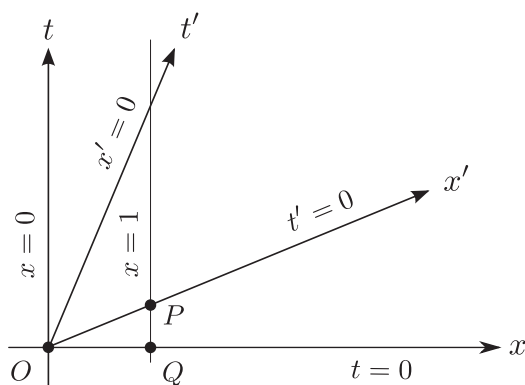


Рис. 1.5. Сокращение длины

В моей движущейся системе та же мерная рейка в некоторый момент времени представляется отрезком OP , параллельным оси x' . Ось x' является для меня поверхностью одновременности, и на диаграмме наклонена. Один конец рейки находится в нашем общем начале отсчета O в момент, когда я прохожу мимо него. Другой же конец рейки в момент $t' = 0$ отмечен на диаграмме буквой P .

Чтобы измерить положение обоих концов рейки в момент $t' = 0$ в моей системе, мне необходимо знать значения координат x' в точках O и P . Но я уже знаю, что в точке O $x' = 0$, поэтому мне надо только вычислить значение x' в точке P . Мы легко сделаем это, используя релятивистские единицы (скорость света равна 1). Другими словами, мы воспользуемся преобразованиями Лоренца в формуле (1.19) и (1.20).

Сначала заметим, что точка P находится на пересечении двух прямых, $x = 1$ и $t' = 0$. Вспомним (пользуясь уравнением 1.20), что то, что $t' = 0$, означает, что $t = vx$. Подставляя vx вместо t в уравнение (1.19), получим

$$x' = \frac{(x - v^2 x)}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Подстановка $x = 1$ в предыдущее уравнение дает

$$x' = \frac{(1 - v^2)}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

или

$$x' = \sqrt{1 - v^2}.$$

Готово! Движущийся наблюдатель находит, что в некоторый момент времени — другими словами, на поверхности одновременности $t' = 0$ — два конца рейки разделены расстоянием $\sqrt{1 - v^2}$, то есть в движущейся системе рейка оказывается немного *короче*, чем она была в покоейся.

Может показаться противоречием, что одна и та же рейка имеет одну длину в вашей системе и другую в моей. Заметьте, однако, что два наблюдателя на деле говорят о несколько разных вещах. В покоящейся системе, где сама мерная рейка покоится, мы говорим о расстоянии от точки O до точки Q , измеренном покоящимися мерными рейками. В движущейся системе мы говорим о расстоянии между точкой O и точкой P , измеренном движущимися мерными рейками. P и Q — разные точки в пространстве-времени, и поэтому никакого противоречия в том, чтобы сказать, что \overline{OP} короче \overline{OQ} , нет.

В качестве упражнения попробуйте выполнить противоположные вычисления: начните с определения длины движущейся мерной рейки в покоящейся системе. Не забудьте начать с рисования диаграммы! Если запутаетесь, можете посмотреть в книжку и проделать все еще раз.

Подумайте о наблюдении движущейся рейки из покоящейся системы. Эта ситуация иллюстрируется на рис. 1.6. Если длина рейки составляет одну единицу в ее *собственной* покоящейся системе и ее передний конец проходит через точку Q , что мы можем сказать о ее мировой линии? То, что это $x = 1$? Нет! Длина рейки равна 1 метру в движущейся системе, что означает, что мировая линия ее переднего конца — это $x' = 1$. Теперь покоящийся наблюдатель видит, что длина рейки равна длине отрезка \overline{OQ} и x -координата точки Q *не равна* 1. Это некоторая величина, вычисляемая из преобразований Лоренца. Прodelав эти вычисления, вы обнаружите, что эта длина также сократилась в $\sqrt{1-v^2}$ раз.

Движущиеся рейки сокращаются в неподвижной системе, а неподвижные — в движущейся. Никакого противоречия здесь нет. Повторим еще раз: наблюдатели просто говорят о разных вещах. Неподвижный наблюдатель говорит о длинах, измеренных в момент *его* времени. Движущийся наблюдатель говорит о длинах, измеренных в момент *другого* времени. Получается, что у них

различные представления о том, что они называют длиной, потому, что у них различные представления об одновременности.

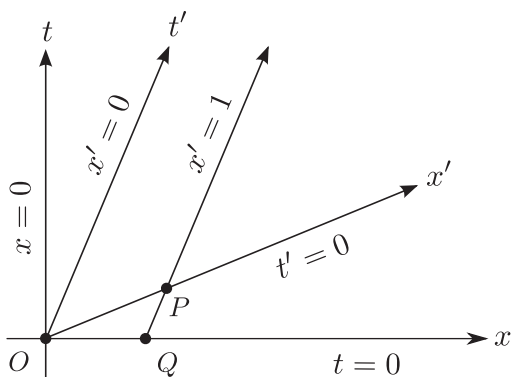


Рис. 1.6. К упражнению по сокращению длины

Упражнение 1.1. Покажите, что x -координата точки Q на рис. 1.6, равна $\sqrt{1-v^2}$.

Замедление времени

Замедление времени происходит в основном таким же образом. Допустим, у меня есть движущиеся часы — *мои* часы. Предположим, что они движутся вместе со мной с постоянной скоростью, как показано на рис. 1.7.

Вопрос: который час в вашей системе в момент, когда мои часы показывают $t' = 1$ в моей системе? У меня, кстати, отличные наручные часы, «Ролекс».¹ Я хочу знать, какое значение t показывает в это время ваш «Таймекс». Горизонтальная поверхность на диаграмме (пунктирная линия) — это поверхность, которую *вы* называете поверхностью одновременности.

¹ Если не верите, спросите у парня с Канал-стрит, который продал мне их за 25 баксов.

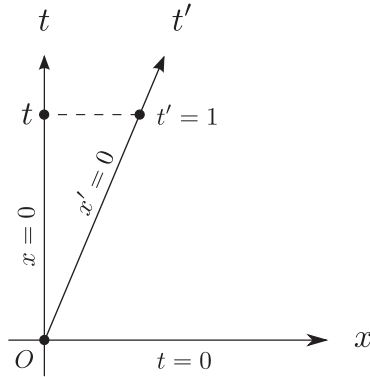


Рис. 1.7. Замедление времени

Чтобы измерить значение t в вашей системе, нам нужны две вещи. Во-первых, мой «Ролекс» движется вдоль оси t' , что выражается уравнением $x' = 0$. Кроме того, мы знаем, что $t' = 1$. Теперь, чтобы вычислить t , все, что нам требуется, — это уравнение (1.22), входящее в преобразования Лоренца:

$$t = \frac{t' + vx'}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Подставляя $x' = 0$ и $t' = 1$, найдем

$$t = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Так как знаменатель в правой части меньше 1, t оказывается больше, чем 1. Интервал времени, измеренный вдоль оси t (время на вашем «Таймексе»), больше, чем временной интервал, измеренный наблюдателем, движущимся вдоль оси t' (время на моем «Ролексе») в $1/\sqrt{1 - v^2}$ раза. Короче, $t > t'$.

Другими словами, для наблюдателя в покоящейся системе движущиеся часы идут медленнее в $\sqrt{1 - v^2}$ раз.

Парадокс близнецов

Ленни: Эй, Арт! Вон Лоренц идет, поздоровайся с ним. У него есть вопрос.

Арт: Что??? У Лоренца вопрос к нам?

Лоренц: Зовите меня Лорнц. Это «лоренцево сокращение», ха-ха. Все эти годы, что я хожу в кабачок «У Германа», я никогда, братцы, не видел одного из вас без другого. Вы близнецы, что ли?

Арт: Чтооо? Слушай, если бы мы были близнецами, то либо я был бы гением... не подавись своей сосиской, Лорнц, это совсем не так уж смешно... да, так вот я говорю: либо я был бы гением, либо Ленни — каким-нибудь умником из Бронкса. Погоди-ка минутку...¹

Замедление времени лежит в основе так называемого парадокса близнецов. На рис. 1.8 Ленни покоится, а Арт отправляется в скоростное путешествие в положительном направлении вдоль оси x . В точке, обозначенной на диаграмме $t' = 1$, Арт в возрасте 1 разворачивается и направляется обратно к дому.

Мы уже вычисляли время, которое проходит в покоящейся системе между началом отсчета и точкой, обозначенной на диаграмме t . Это $1 / \sqrt{1 - v^2}$. Другими словами, мы показали, что вдоль пути движущихся часов проходит меньше времени, чем вдоль пути покоящихся. То же самое можно сказать и о второй части путешествия. И когда Арт возвращается домой, он обнаруживает, что его близнец Ленни теперь старше него.

Мы откалибровали возраст Арта и Ленни по времени, регистрируемому их часами. Но замедление времени, которое замедлило часы Арта с точки зрения наблюдателя в неподвижной системе,

¹ Мы будем здесь считать, что рождение Арта и Ленни было одним и тем же пространственно-временным событием (обозначенным как O) на рис. 1.8.

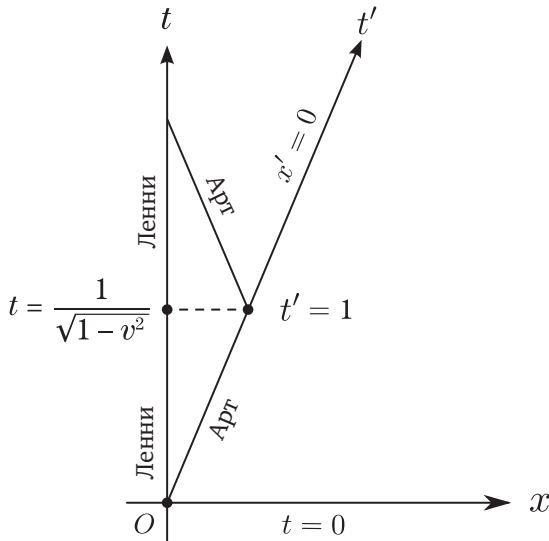


Рис. 1.8. Парадокс близнецов

повлияло бы на любые часы, в том числе и на биологические. То есть Арт мог бы вернуться на Землю молодым, а у Ленни уже была бы длинная седая борода.

Людей часто ставят в тупик два аспекта парадокса близнецов. Во-первых, естественно считать, что для обоих близнецов эта ситуация должна быть симметричной. Если Ленни видит, как Арт улетает от него в путешествие, то и ведь и Арт видит, как Ленни удаляется от него с той же скоростью, но в противоположном направлении. А раз в пространстве нет выделенных направлений, то почему же наши близнецы должны стареть по-разному? Но дело в том, что никакой симметрии здесь нет: путешествующий близнец при повороте обратно к дому испытывает большое ускорение, а с его оставшимся дома братом ничего подобного не происходит. Это отличие оказывается критическим. Из-за этого разворота система Арта не может считаться инерциальной, в отличие от системы Ленни. Мы предлагаем вам развить эту идею в следующем упражнении.

Упражнение 1.2. На рис. 1.8 путешествующий близнец не только разворачивается, но и переходит при развороте в другую систему отсчета.

- а) Пользуясь преобразованием Лоренца, покажите, что до разворота отношения между близнецами *симметричны*: каждый из них считает, что другой стареет медленнее, чем он сам.
- б) Пользуясь пространственно-временными диаграммами, покажите, как резкий переход путешественника из одной системы в другую меняет его определение одновременности. В новой системе путешественника его близнец внезапно становится гораздо старше, чем он был в исходной системе путешественника.

Другое затруднение возникает на почве простых геометрических соображений. Возвращаясь к рис. 1.7, вспомним, что определенное нами «временное расстояние» от точки O до точки, обозначенной $t' = 1$, оказалось меньше, чем расстояние от O до точки t (равное $1/\sqrt{1-v^2}$). Из сопоставления этих двух значений получается, что вертикальный катет в прямоугольном треугольнике длиннее его гипотенузы. Многих это ставит в тупик: численное сравнение противоречит визуальному содержанию диаграммы. Фактически же это несоответствие приводит нас к одной из центральных идей теории относительности: к концепции *инвариантности*. Мы подробно обсудим эту идею в разделе 1.5.

Парадокс лимузина и «фольксвагена-жука»

Другой парадокс иногда называют парадоксом жерди в амбаре. Но так как сейчас амбары мало у кого остались, мы расскажем вместо этого историю о лимузине и «фольксвагене-жуке».

Арт водит «фольксваген» модели «жук» длиной чуть меньше 14 футов.¹ И гараж у него как раз под размер его машинки.

А у Ленни — отреставрированный лимузин длиной 28 футов.² Арт уезжает в отпуск и сдает дом Ленни. Но до его отъезда друзья решили встретиться, чтобы проверить, влезет ли машина Ленни в гараж Арта. Ленни настроен скептически, но у Арта есть план. Арт просит Ленни дать задний ход и отъехать от гаража на порядочное расстояние, чтобы хватило места для разгона. Затем он кричит, чтобы Ленни дал газу и разогнался как следует. Если Ленни удастся въехать на своем лимузине в гараж на скорости в 260 000 километров в секунду, то он как раз там поместится. Они решают попробовать.

С тротуара Арт наблюдает за тем, как Ленни пятится назад на своем лимузине и затем жмет на газ. Стрелка спидометра подскакивает до 277 000 километров в секунду — хорошая скорость! Но тут Ленни бросает взгляд на гараж и в ужасе кричит: «Ёлки-палки! Гараж летит прямо на меня, и он сжался больше чем вдвое! Я не влезу!»

«Да влезешь, Ленни. Я вот тут подсчитал: в системе отсчета неподвижного гаража твой лимузин чуть длиннее тринадцати футов.³ Не о чем беспокоиться, поверь».

«Ладно, Арт, надеюсь, ты не ошибаешься».

Рисунок 1.9 представляет пространственно-временную диаграмму, на которой лимузин Ленни показан плотно зачерненной полосой, а гараж — слабо затененной. Нос лимузина входит в гараж в точке *a* и выходит из него (мы считаем, что Арт предусмотрительно оставил заднюю дверь гаража открытой) чуть выше точки *c*; корма лимузина входит в точке *b*, а выходит

¹ 4,2 метра.

² 8,5 метра.

³ 3,9 метра.

в точке d . Теперь посмотрим на прямую \overline{bc} : это часть поверхности одновременности в покоящейся системе гаража. Как мы видим, в этот момент весь лимузин целиком находится в гараже. План Арта сработал: в его системе лимузин в гараж поместился. Однако теперь давайте взглянем на поверхность одновременности в системе Ленни — это линия \overline{be} , и мы видим, что в ней лимузин в гараж не вмещается, как и казалось Ленни.

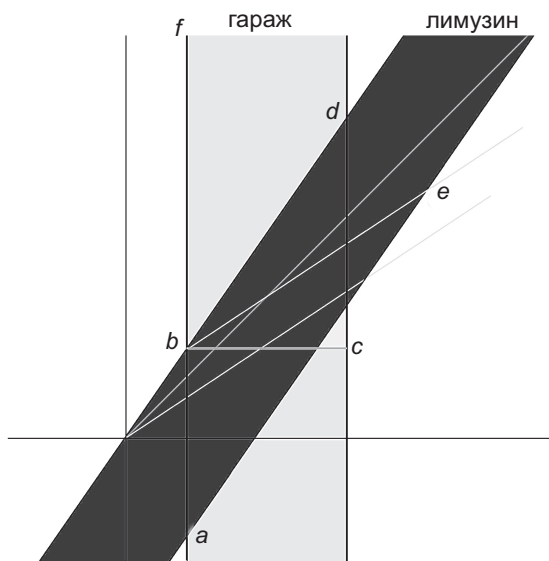


Рис. 1.9. Пространственно-временная диаграмма
«лимузин — гараж»

Рисунок ясно показывает суть парадокса. Сказать, что лимузин находится в гараже, значит сказать, что его нос и корма поместились внутрь гаража одновременно. Опять это слово — «одновременно»! Одновременно для кого? Для Арта? Или для Ленни? Высказывание «машина находится в гараже» просто означает разные вещи в различных системах. И нет никакого противоречия в том, чтобы сказать, что в некоторый момент

в системе Арта лимузин действительно находился в гараже и что ни в один момент в системе Ленни он целиком в гараж не помещался.

Почти все парадоксы специальной теории относительности получают очевидное разрешение, если их рассмотреть внимательно. Просто надо всегда следить за тем, какой смысл неявно вкладывается в слово «одновременно». «Одновременно» по отношению к кому? В этом обычно и скрыта разгадка парадокса.

1.5. Мир Минковского

Один из самых мощных инструментов физики — это концепция инвариантности. Инвариант — это величина, значение которой не меняется в зависимости от того, с какой точки зрения ее рассматривают. Здесь мы укажем на некоторый аспект пространства-времени, который имеет одно и то же значение во всех системах отсчета.

Чтобы объяснить нашу мысль, возьмем пример из евклидовой геометрии. Рассмотрим двумерную плоскость, на которой определены две системы декартовых координат, (x, y) и (x', y') . Предположим, что обе системы координат начинаются в одной и той же точке, но что оси (x', y') (штрихованные) поворачиваются против часовой стрелки на фиксированный угол относительно нештрихованных осей. В этом примере у нас нет оси времени и нет движущихся наблюдателей, только обычная евклидова плоскость из школьной геометрии. Она изображена на рис. 1.10.

Рассмотрим в этом пространстве произвольную точку P . В наших двух системах координат она имеет различные координаты. Очевидно, что x и y , координаты этой точки, не те же самые числа, что координаты x' и y' , несмотря на то что обе эти пары чисел относятся к одной и той же точке P в пространстве. Мы можем сказать, что координаты точки не инвариантны.

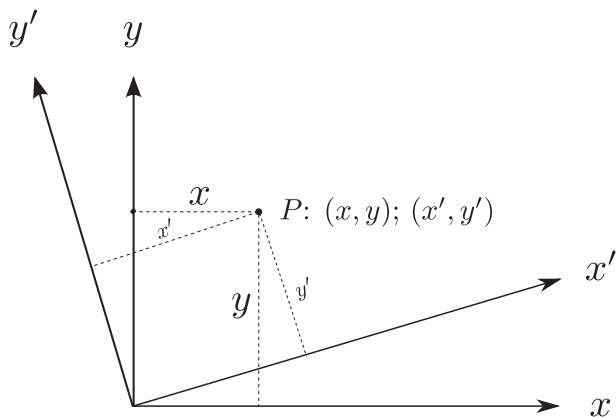


Рис. 1.10. Евклидова плоскость

Однако существует все же величина, которая *остается* одной и той же, вычисляете вы ее в штрихованных или в нештрихованных координатах: *это расстояние точки P от начала координат*. Оно одно и то же во всех системах координат с этим началом, независимо от их ориентации. То же самое можно сказать и о квадрате этого расстояния. Чтобы вычислить это расстояние в нештрихованных координатах, мы воспользуемся теоремой Пифагора: $d^2 = x^2 + y^2$, и в результате получим квадрат этого расстояния. А в штрихованных координатах то же расстояние было бы равно $x'^2 + y'^2$. Следовательно,

$$x^2 + y^2 = x'^2 + y'^2.$$

Другими словами, для произвольной точки P величина $x^2 + y^2$ инвариантна. *Инвариантность* означает, что ее значение не зависит от того, в какой системе координат мы ее определяем. Во всех случаях мы получим один и тот же ответ.

В евклидовой геометрии для прямоугольных треугольников всегда выполняется одно правило: гипотенуза больше, чем любой из катетов (если только один из них не нуль; в этом случае гипотенуза равна другому катету). Поэтому расстояние d по

крайней мере равно x или y . По той же причине оно по крайней мере не меньше, чем x' или y' .

Возвращаясь теперь к теории относительности, мы можем сказать, что наша дискуссия о парадоксе близнецов содержала один момент, очень напоминающий нашу историю с прямоугольным треугольником. Вернемся к рис. 1.8 и рассмотрим треугольник, образованный прямыми, которые соединяют три черные точки — горизонтальной пунктирной линией, первой половиной вертикальной мировой линии Ленни и гипотенузой, образованной первым участком путешествия Арта. Расстояние вдоль пунктирной линии между двумя точками определяет пространственно-временное расстояние между ними.¹ Время вдоль стороны треугольника, принадлежащей Ленни, тоже можно представить себе как пространственно-временное расстояние. Его длина равна $1/\sqrt{1-v^2}$. И наконец, время, которое заняла первая половина путешествия Арта, — это пространственно-временная длина гипотенузы. И тут мы обнаруживаем кое-что необычное: вертикальный катет треугольника оказывается длиннее его гипотенузы! Вот почему у Ленни было время отрастить бороду, пока Арт оставался мальчишкой! Мы получили доказательство того, что пространство Минковского управляется совсем не теми законами, что евклидово пространство.

Тем не менее мы можем задать вопрос: есть ли в пространстве Минковского аналог инвариантной пространственной величины, связанной с преобразованиями Лоренца, — величины, которая остается неизменной во всех инерциальных системах отсчета? Мы знаем, что квадрат расстояния от начала координат до фиксированной точки P инвариантен по отношению к поворотам евклидовых координат. Будет ли подобная величина, возможно, $t^2 + x^2$, инвариантна по отношению к преобразованиям Лорен-

¹ Мы пользуемся термином *пространственно-временное расстояние* в общем смысле. Позже мы перейдем к более точным терминам *собственного времени* и *пространственно-временного интервала*.

ца? Попробуем-ка это проверить. Рассмотрим произвольную точку P на пространственно-временной диаграмме. Эта точка характеризуется значениями t и x , а в некоторой движущейся системе отсчета — значениями t' и x' . Мы уже знаем, что эти две системы координат связаны преобразованиями Лоренца. Посмотрим, верна ли наша догадка:

$$t'^2 + x'^2 \stackrel{?}{=} t^2 + x^2.$$

Используем преобразования Лоренца (1.19) и (1.20) для выражения t' и x' :

$$t'^2 + x'^2 \stackrel{?}{=} \frac{(t - vx)^2}{1 - v^2} + \frac{(x - vt)^2}{1 - v^2},$$

что упрощается до

$$t'^2 + x'^2 \stackrel{?}{=} \frac{t^2 + v^2 x^2 - 2vtx}{1 - v^2} + \frac{x^2 + v^2 t^2 - 2vtx}{1 - v^2}.$$

Равна ли правая часть $t^2 + x^2$? Ничего подобного! Мы сразу же видим, что член tx в первом выражении складывается с членом tx во втором выражении. Они не сокращаются, и слева нет члена tx , который мог бы уравновесить ситуацию. Равенства здесь быть не может.

Но, посмотрев внимательно, вы заметите, что если мы возьмем не сумму, а разность двух членов в правой части, члены tx сократятся. Определим новую величину

$$\tau^2 = t^2 - x^2.$$

Вычитая x'^2 из t'^2 , получим:

$$\begin{aligned} t'^2 - x'^2 &= \frac{t^2 + v^2 x^2 - 2vtx}{1 - v^2} - \frac{x^2 + v^2 t^2 - 2vtx}{1 - v^2} = \\ &= \frac{t^2 + v^2 x^2}{1 - v^2} - \frac{x^2 + v^2 t^2}{1 - v^2}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

И после небольших преобразований получится ровно то, чего мы хотели:

$$t'^2 - x'^2 = t^2 - x^2 = \tau^2. \quad (1.30)$$

Бинго! Мы нашли инвариант τ^2 , значение которого одно и то же при любом преобразовании Лоренца вдоль оси x . Квадратный корень из этой величины, τ , называется *собственным временем*. Происхождение этого названия вам скоро станет ясно.

До сих пор мы представляли себе мир в виде железной дороги, в которой все движения происходят только вдоль оси x . Преобразования Лоренца действовали только по оси x , и вы могли спокойно забыть о двух других направлениях, перпендикулярных к движению и описываемых координатами y и z . Теперь давайте вернем их на место. В разделе 1.2.4 я объяснил, что полный комплект преобразований Лоренца (при $c = 1$) для относительного движения вдоль оси x состоит из четырех уравнений:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}},$$

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}},$$

$$y' = y,$$

$$z' = z.$$

А как быть с движениями (бустами) вдоль остальных осей? Как я объяснял в разделе 1.3, их можно выразить в виде комбинации движений вдоль оси x и поворотов оси x , которые придают ей другое направление. Как следствие, некоторая величина инвариантна относительно всех преобразований Лоренца, если она инвариантна относительно буста вдоль оси x и вращения пространства. Что можно сказать в этом смысле о $\tau^2 = t^2 - x^2$?

Мы уже видели, что эта величина инвариантна относительно буста вдоль оси x , но изменяется, если пространство вращается.

Это очевидно, так как она содержит x , но не y и z . К счастью, нетрудно представить τ в виде полноформатного обобщенного инварианта. Рассмотрим обобщенную версию уравнения (1.30):

$$\tau^2 = t^2 - x^2 - y^2 - z^2. \quad (1.31)$$

Докажем сначала, что величина τ инвариантна относительно движений вдоль оси x . Мы уже видели, что член $t^2 - x^2$ инвариантен. Прибавим к этому тот факт, что перпендикулярные координаты y и z не изменяются при сдвигах вдоль оси x . Но если ни $t^2 - x^2$, ни $y^2 + z^2$ не изменяются при преобразовании от одной системы к другой, то очевидно, что величина $t^2 - x^2 - y^2 - z^2$ тоже будет инвариантной. Итак, вопрос со сдвигами по оси x улажен.

Теперь посмотрим, почему τ не будет меняться при вращении осей в пространстве. Опять проведем наше доказательство в два этапа. Первый состоит в том, что поворот пространственных координат действует одновременно на x , y и z , но никак не влияет на временную координату. Следовательно, t инвариантно относительно поворотов пространства. Теперь рассмотрим величину $x^2 + y^2 + z^2$. Согласно трехмерной версии теоремы Пифагора, $x^2 + y^2 + z^2$ является квадратом расстояния точки (x, y, z) от начала координат. А этот параметр тоже не изменяется при поворотах в пространстве. Сочетая инвариантность времени с инвариантностью расстояния от начала координат (при вращении системы в пространстве), мы приходим к заключению, что собственное время τ , определяемое формулой (1.31), инвариантно для любого наблюдателя. Это касается не только наблюдателей, движущихся в любом направлении, но и наблюдателей, оси координат которых ориентированы произвольным образом.

1.5.1. Минковский и световой конус

Инвариантность собственного времени τ — факт огромного значения. Не знаю, был ли он известен Эйнштейну, но в процессе написания этого раздела я просмотрел свое старинное, протертое

до дыр доверовское издание, содержащее эйнштейновскую статью 1905 года (с ценой \$1,50 на обложке), и не нашел никакого упоминания формулы (1.31) или идеи пространственно-временного расстояния. Именно Минковский первым понял, что инвариантность собственного времени с его интуитивно непонятными знаками минус ляжет в основу совершенно новой четырехмерной геометрии пространства-времени — пространства Минковского. Думаю, надо отдать Минковскому должное и признать, что именно ему принадлежала честь завершить в 1908 году ту революцию, которую Эйнштейн тремя годами ранее начал своей специальной теорией относительности. Именно Минковскому мы обязаны концепцией *времени как четвертого измерения* четырехмерного пространства-времени. У меня до сих пор мурашки бегут по коже от восхищения, когда я читаю эти две работы.

Давайте вслед за Минковским рассмотрим путь световых лучей, которые исходят из начала координат. Пусть вспышка света произошла в начале отсчета, и свет распространяется из него наружу. Спустя время t световой импульс пройдет расстояние ct . Мы можем описать эту вспышку уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 = c^2 t^2. \quad (1.32)$$

Здесь в левой части — расстояние от начала координат, а в правой — расстояние, пройденное световым сигналом за время t . Приравнявая эти величины, мы получим геометрическое место всех точек, которых достигла вспышка света. Это уравнение можно визуализировать, пусть и всего в трех, а не в четырех измерениях, в виде конуса в пространстве-времени. И хоть Минковский и не изобразил этот конус графически, он все же подробно его описал. Мы изобразили световой конус Минковского на рис. 1.11. Ветвь, направленная вверх, называется *световым конусом будущего*, а ветвь, направленная вниз, — *световым конусом прошлого*.

А теперь давайте вернемся к «железнодорожному» миру, в котором движения происходят только вдоль оси x .

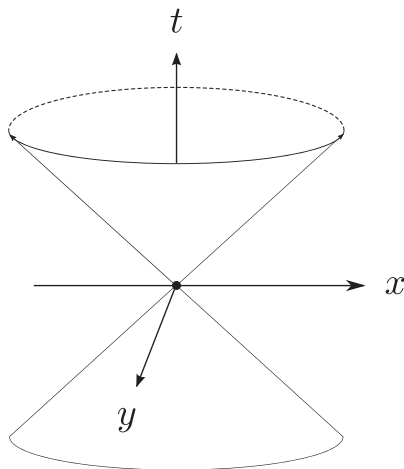


Рис. 1.11. Световой конус Минковского

1.5.2. Физический смысл собственного времени

Инвариантная величина τ^2 — не просто математическая абстракция. У нее есть физический — и даже экспериментальный — смысл. Чтобы это понять, давайте посмотрим на Ленни, который, как обычно, движется вдоль оси x , и Арта, покоящегося в неподвижной системе. Они проходят мимо друг друга в начале отсчета O . А мы еще отметим на мировой линии Ленни другую точку D , которая представляет движение Ленни вдоль оси t' .¹ Все это показано на рис. 1.12.

Начальная точка мировой линии — это общее начало отсчета O . По определению, Ленни расположен на $x' = 0$ и движется вдоль оси t' .

¹ В этом обсуждении мы использовали обозначение t' в двух немного отличающихся значениях. Основное значение этой величины: « t' -координата Ленни». Но кроме того, мы использовали это обозначение, чтобы отметить ось t' .

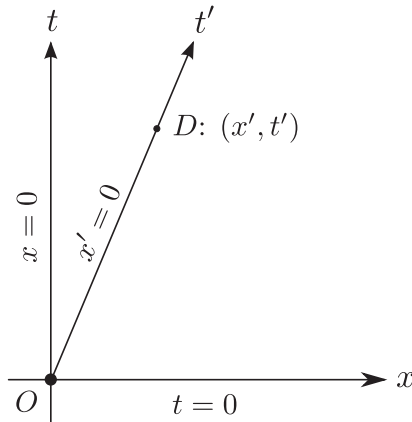


Рис. 1.12. Собственное время. Прочтите примечание, в котором объясняются два значения t' на этой диаграмме

Координаты (x, t) относятся к системе отсчета Арта, а штрихованные координаты (x', t') — к системе отсчета Ленни. Инвариант τ^2 в системе отсчета Ленни определяется как $t'^2 - x'^2$. По определению, Ленни всегда остается на $x' = 0$ в своей собственной покоящейся системе, и, так как в точке D $x' = 0$, то $t'^2 - x'^2$ ничем не отличается от t'^2 .

Следовательно, уравнение

$$\tau^2 = t'^2 - x'^2$$

переходит в

$$\tau^2 = t'^2,$$

откуда

$$\tau = t'.$$

Но что такое t' ? Это время, прошедшее в системе отсчета Ленни с тех пор, как он покинул начало координат. А значит, мы показали, что инвариант τ имеет физический смысл:

Инвариантное собственное время вдоль мировой линии — это время, отмечаемое часами, движущимися вдоль этой мировой линии. В данном случае оно представляет число секунд, которое отсчитал принадлежащий Ленни «Ролекс» за время движения от начала отсчета до точки D.

Чтобы завершить наше обсуждение собственного времени, запишем его в обычных координатах:

$$\tau^2 = t^2 - \frac{x^2}{c^2}.$$

1.5.3. Пространственно-временной интервал

Термин «*собственное время*» имеет вполне конкретное физическое и количественное значение. С другой стороны, я уже использовал для передачи того же понятия свой собственный термин «*пространственно-временное расстояние*». Далее мы начнем пользоваться более точным термином «*пространственно-временной интервал*», $(\Delta s)^2$, который определяется так:

$$(\Delta s)^2 = -\Delta t^2 + (\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2).$$

Чтобы определить пространственно-временной интервал между событием (t, x, y, z) и началом отчета, запишем:

$$s^2 = -t^2 + (x^2 + y^2 + z^2).$$

Другими словами, s^2 — это просто отрицательное τ^2 , а следовательно, инвариант.¹ До сих пор различие между τ^2 и s^2 не имело существенного значения, но скоро оно сыграет свою роль.

¹ В теории относительности правило знаков выполняется не столь неукоснительно, как нам бы хотелось: некоторые авторы определяют s^2 так, чтобы эта величина имела тот же знак, что и τ^2 .

1.5.4. Времениподобные, пространственно-подобные и светоподобные интервалы

Среди многих геометрических идей, которые Минковский ввел в теорию относительности, была концепция времениподобных, пространственноподобных и светоподобных интервалов между событиями. Эта классификация может основываться на инварианте

$$\tau^2 = t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

или на его «альтер эго»

$$s^2 = -t^2 + (x^2 + y^2 + z^2),$$

то есть пространственно-временном интервале, который отделяет событие (t, x, y, z) от начала отсчета. Мы будем использовать обозначение s^2 . Интервал s^2 может быть отрицательным, положительным или нулевым, и именно это определяет, отделено ли событие от начала координат времениподобным, пространственноподобным или светоподобным интервалом.

Чтобы придать этому вопросу какую-то наглядность, представим себе нулевой сигнал, сгенерированный на Альфе Центавра в нулевой момент времени. Этот сигнал достигнет нас на Земле примерно через четыре года. В этом примере световая вспышка на Альфе Центавра происходит в начале отсчета, и мы рассматриваем световой конус будущего (верхняя половина рис. 1.11).

Времениподобный интервал

Сначала рассмотрим точку, лежащую внутри конуса. Она окажется там, если модуль ее временной координаты $|t|$ будет больше, чем пространственное расстояние до события, другими словами, если

$$-t^2 + (x^2 + y^2 + z^2) < 0.$$

Такие события называются *времениподобными* относительно начала отсчета. Все точки на оси t отделены от начала координат

времениподобным интервалом (я просто называю их времениподобными). Свойство времениподобности инвариантно: если событие времениподобно в одной системе отсчета, оно остается таким во всех системах.

Если какое-либо событие на Земле случилось больше чем через четыре года после обсуждаемой световой вспышки, то это событие времениподобно относительно этой вспышки. На такие события этот световой сигнал уже не повлияет. Он к этому времени уже будет в прошлом.

Пространственноподобный интервал

Пространственноподобные события — это события, происходящие вне конуса.¹ Другими словами, это такие события, для которых

$$-t^2 + (x^2 + y^2 + z^2) > 0.$$

Для этих событий пространственное расстояние от начала отсчета больше, чем временные. Пространственноподобность также инвариантна.

Пространственноподобные события происходят слишком далеко, чтобы световой сигнал мог их достичь. Любое событие на Земле, происходящее раньше, чем через четыре года после того, как световой сигнал начал свое путешествие, не может испытать влияния события, вызвавшего вспышку.

Светоподобный интервал

Наконец, происходят и события на световом конусе, для которых

$$-t^2 + (x^2 + y^2 + z^2) = 0.$$

¹ И опять мы используем короткий термин «пространственноподобное событие» в смысле «событие, которое отделено от начала отсчета пространственноподобным интервалом».

Это такие точки, которых достигнет световой сигнал, идущий из начала отсчета. Человек, находящийся в точке светоподобного события относительно начала координат, увидит вспышку света.

1.6. Историческая перспектива

1.6.1. Эйнштейн

Люди часто задумываются над вопросом, было ли эйнштейновское объявление постоянства скорости света c законом природы основано на теоретическом провидении или на экспериментальных результатах, в частности, на результатах опыта Майкельсона — Морли. Конечно, мы не можем ответить на этот вопрос с уверенностью. Никто точно не знает, что думает другой человек. Сам Эйнштейн заявлял, что, когда он писал свою статью 1905 года, ему не было известно о полученном Майкельсоном и Морли результате. Думаю, есть все основания ему верить.

Эйнштейн считал законом природы уравнения Максвелла. Он знал, что они дают решения в виде волн. В шестнадцатилетнем возрасте он задумался о том, что произойдет, если двигаться вместе со световым лучом. «Очевидный» ответ на этот вопрос: ты увидишь статическую, неподвижную волновую структуру электрического и магнитного полей. Каким-то образом Эйнштейн знал, что этот ответ неверен — что это *не* является решением уравнений Максвелла. Уравнения Максвелла говорят, что свет движется со скоростью света. В общем, я склонен верить, что, согласно его собственному свидетельству, Эйнштейн не знал об эксперименте Майкельсона — Морли, когда писал свою работу.

На современном языке мы объяснили бы ход мыслей Эйнштейна немного иначе. Мы бы сказали, что уравнения Максвелла обладают определенного рода *симметрией* — что существует некоторая система преобразований координат, для которой эти уравнения имеют одну и ту же форму во всех системах отсчета. Если взять

уравнения Максвелла, содержащие координаты x и t , и применить к ним старые галилеевские правила преобразования,

$$x' = x - vt,$$

$$t' = t,$$

то вы увидите, что в штрихованной системе эти уравнения приобретут другой вид, не тот, что в нештрихованных координатах.

Однако если вы примените к уравнениям Максвелла преобразования Лоренца, то окажется, что преобразованные уравнения будут выглядеть в штрихованных координатах точно так же, как в нештрихованных. Великое достижение Эйнштейна, если пользоваться современным языком, заключалось в обнаружении симметрии уравнений Максвелла относительно преобразований Лоренца, а не преобразований Галилея. И он сумел заключить все это в одном-единственном принципе. В каком-то смысле он не нуждался в том, чтобы знать уравнения Максвелла (хотя он их, конечно, знал). Все, что ему было нужно, — это знать, что уравнения Максвелла являются законом природы и что этот закон природы требует, чтобы свет двигался с определенной скоростью. Исходя из этого принципа, Эйнштейн и смог описать движение световых лучей.

1.6.2. Лоренц

Лоренц об эксперименте Майкельсона — Морли знал. Он предложил те же самые преобразования, но интерпретировал их иначе. Он представлял их себе как воздействия на движущиеся объекты, вызванные их движением сквозь эфир. Различные виды давления эфира приводят к тому, что объекты сжимаются и поэтому сокращаются в размерах.

Ошибался ли он? Думаю, мы можем сказать, что в каком-то смысле он был прав. Но он определенно не обладал эйнштейновским пониманием структурной *симметрии* — симметрии,

которой должны подчиняться пространство и время, чтобы удовлетворять принципу относительности и движения со скоростью света. Но никто не мог бы сказать, что Лоренц сделал то же самое, что сделал Эйнштейн.¹ Более того, Лоренц не считал полученные результаты точными. Он представлял себе свои преобразования как первое приближение. Объект, движущийся сквозь некоторую среду, должен сокращаться, и в первом приближении эта ситуация описывалась лоренцевым сокращением. Лоренц был уверен, что и опыт Майкельсона — Морли не является точным. Он полагал, что должны существовать поправки, зависящие от более высоких степеней v/c , и что техника эксперимента в конце концов достигнет достаточной точности, чтобы все же зарегистрировать различия в скорости света. Именно Эйнштейн сказал, что постоянство скорости света — фундаментальный принцип, закон природы.

¹ В том числе, думаю, и сам Лоренц.

ЛЕКЦИЯ 2

Скорости и 4-векторы

Арт: Все это просто захватывающе! Я чувствую себя полностью преобразованным.

Ленни: Лоренцевым преобразованием?

Арт: Ну да, меня словно подтолкнули вперед.

Действительно, когда предметы движутся с релятивистскими скоростями, они сплюсчиваются, по крайней мере с точки зрения покоящегося наблюдателя. Фактически, когда их скорость приближается к световой, в направлении движения они сокращаются до бесконечно малой толщины, хотя со своей собственной точки зрения они выглядят и чувствуют себя по-прежнему. Не могут ли они сократиться еще сильнее и вообще исчезнуть, если будут двигаться быстрее света? Нет, конечно, по той простой причине, что никакой физический объект не может двигаться быстрее света. Но тогда возникает следующий парадокс.

Допустим, Арт стоит на железнодорожной платформе. Мимо него со скоростью в 90% скорости света проносится поезд, в котором едет Ленни. Их относительная скорость равна $0,9c$. В том же вагоне, что и Ленни, Мэгги ездит по коридору на велосипеде со скоростью $0,9c$ относительно Ленни. Разве не очевидно, что относительно Арта она движется быстрее света? В ньютоновской физике, чтобы вычислить скорость Мэгги относительно Арта, мы сложили бы ее скорость со скоростью Ленни, и получилось

бы, что она проносится мимо Арта со скоростью $1,8c$, что почти вдвое больше скорости света. Ясно, что здесь что-то не так.

2.1. Сложение скоростей

Чтобы понять, что именно здесь не так, нам придется внимательно проанализировать сложение скоростей в рамках преобразований Лоренца. Теперь у нас три наблюдателя: Арт в состоянии покоя, Ленни, движущийся относительно Арта со скоростью v , и Мэгги, движущаяся относительно Ленни со скоростью u . Мы будем употреблять релятивистскую систему единиц, в которой $c = 1$; предположим, что и v , и u положительны и меньше 1. Наша цель: определить, с какой скоростью Мэгги движется относительно Арта. Ситуация изображена на рис. 2.1.

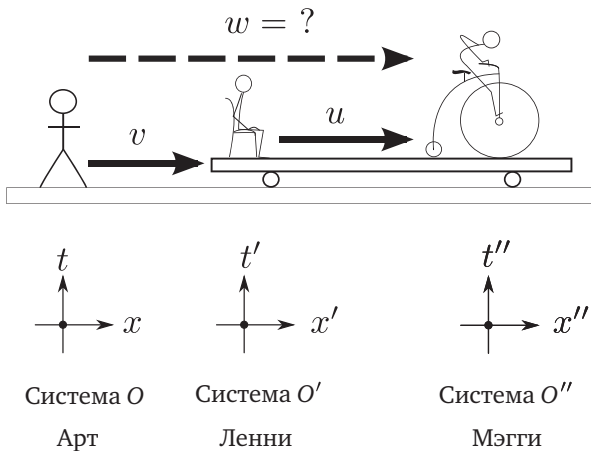


Рис. 2.1. Сложение скоростей

У нас есть три системы отсчета и три набора координат. Пусть (x, t) — система координат Арта в покоящейся системе железнодорожной платформы. Пусть (x', t') — система координат Ленни, покоящейся относительно поезда. И, наконец, пусть (x'', t'')

t'') — система координат Мэгги, движущейся вместе с ее велосипедом. Каждая пара систем отсчета связана преобразованиями Лоренца с соответствующей скоростью. Например, связь между координатами Ленни и Арта такая:

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (2.1)$$

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (2.2)$$

Мы знаем, как эти соотношения обратить: для этого надо выразить в них x и t через x' и t' . Напомню, что в результате мы получим:

$$x = \frac{x' + vt'}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad (2.3)$$

$$t = \frac{t' + vx'}{\sqrt{1 - v^2}}. \quad (2.4)$$

2.1.1. Мэгги

Наш третий наблюдатель — Мэгги. Мы знаем о ней, что она движется относительно Ленни со скоростью u . Выразим это через преобразования Лоренца, связывающие координаты Ленни и Мэгги, на этот раз через скорость u :

$$x'' = \frac{x' - ut'}{\sqrt{1 - u^2}}, \quad (2.5)$$

$$t'' = \frac{t' - ux'}{\sqrt{1 - u^2}}. \quad (2.6)$$

Наша цель — найти преобразования, связывающие координаты в системах Арта и Мэгги, и вывести из этих преобразований их

относительные скорости. Другими словами, мы хотим избавиться от Ленни.¹ Начнем с уравнения (2.5):

$$x'' = \frac{x' - ut'}{\sqrt{1-u^2}}.$$

Теперь подставим в правую часть выражения для x' и t' из (2.1) и (2.2):

$$x'' = \frac{\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{u(t-vx)}{\sqrt{1-v^2}}}{\sqrt{1-u^2}}$$

и объединим знаменатели:

$$x'' = \frac{x-vt-u(t-vx)}{\sqrt{1-v^2}\sqrt{1-u^2}}. \quad (2.7)$$

Теперь мы подходим к главному — к определению скорости Мэгги относительно Арта в системе отсчета Арта. То, что уравнение (2.7) имеет вид преобразования Лоренца, не вполне очевидно (хотя это именно так), но, к счастью, мы пока можем оставить этот вопрос в стороне. Заметим, что мировая линия Мэгги задается уравнением $x'' = 0$. Чтобы достичь цели, нам надо всего лишь сделать числитель в уравнении (2.7) равным нулю. Перегруппируем члены в числителе:

$$(1+uv)x - (v+u)t = 0$$

и получим

$$x = \frac{u+v}{1+uv}t. \quad (2.8)$$

Теперь уже вполне очевидно, что уравнение (2.8) — это уравнение мировой линии, соответствующей движению со скоростью

¹ Не волнуйтесь: мы хотим избавиться не от самого Ленни, а только от его скорости.

$(u + v) = (1 + uv)$. Следовательно, для скорости Мэгги в системе отсчета Арта получается:

$$w = \frac{u + v}{1 + uv}. \quad (2.9)$$

Теперь довольно легко убедиться в том, что системы отсчета Арта и Мэгги действительно связаны преобразованиями Лоренца. Пусть читатель сам проверит, что

$$x'' = \frac{x - wt}{\sqrt{1 - w^2}} \quad (2.10)$$

и

$$t'' = \frac{t - wx}{\sqrt{1 - w^2}}. \quad (2.11)$$

Подведем итог: если Ленни движется относительно Арта со скоростью v и Мэгги движется относительно Ленни со скоростью u , то Мэгги движется относительно Арта со скоростью

$$w = \frac{u + v}{1 + uv}. \quad (2.12)$$

Сейчас мы этот результат проанализируем, но сперва выразим (2.12) в обычных единицах, согласовав размерности. В числителе $u + v$ с размерностью все в порядке. Однако в выражении $1 + uv$ в знаменателе размерности не согласованы: 1 — безразмерная величина, а u и v имеют размерность скорости. Порядок в размерностях легко навести, заменив u и v на u/c и v/c . Это дает релятивистское правило сложения скоростей:

$$w = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}. \quad (2.13)$$

Сравним этот результат с тем, чего мы ожидали бы с ньютоновских позиций. Ньютон сказал бы, что для определения скорости Мэгги относительно Арта нужно просто сложить u и v . Это как раз то, что делается в числителе (2.13). Но теория относи-

тельности требует поправки, которая вносится знаменателем: $(1 + uv/c^2)$.

Возьмем несколько численных примеров. Рассмотрим сначала случай, когда u и v малы по сравнению со скоростью света. Для простоты будем пользоваться уравнением (2.9), где скорости безразмерны. Помните, что u и v — это скорости, выраженные в единицах скорости света. Положим, $u = 0,01$, то есть 1% скорости света, так же как и v . Подставляя эти значения в (2.9), получаем:

$$w = \frac{0,01 + 0,01}{1 + (0,01)(0,01)}$$

или

$$w = \frac{0,02}{1,0001} = 0,019998.$$

По Ньютону вышло бы, конечно, 0,02, но релятивистское значение чуть меньше. Вообще, чем меньше u и v , тем ближе друг к другу будут релятивистский и ньютоновский результаты.

Однако вернемся теперь к исходному парадоксу: если поезд Ленни движется со скоростью $v = 0,9$ относительно Арта, а велосипед Мэгги — со скоростью $u = 0,9$ относительно Ленни, не получится ли, что относительно Арта Мэгги движется быстрее света? Подставляя соответствующие значения v и u , мы получим

$$w = \frac{0,9 + 0,9}{1 + 0,9 \times 0,9}$$

или

$$w = \frac{1,8}{1,81}.$$

Знаменатель чуть больше, чем 1,8, и результирующая скорость чуть меньше единицы. Другими словами, нам не удалось заставить Мэгги двигаться быстрее света в системе Арта.

Ну а теперь давайте удовлетворим свое любопытство и посмотрим, что бы случилось, если бы и u , и v были бы *равны* скорости света. Для значения w получается:

$$w = \frac{1+1}{1+(1)(1)}$$

или

$$w = \frac{2}{2} = 1.$$

То есть даже если бы Ленни мог каким-то образом двигаться со скоростью света относительно Арта, и Мэгги могла бы двигаться со скоростью света относительно Ленни, она все равно не могла бы двигаться быстрее света относительно Арта.

2.2. Световые конусы и 4-векторы

Как мы видели в разделе 1.5, собственное время

$$\tau^2 = t^2 - (x^2 + y^2 + z^2)$$

и его «альтер эго», пространственно-временной интервал относительно начала отсчета,

$$s^2 = -t^2 + (x^2 + y^2 + z^2),$$

являются инвариантными величинами относительно обобщенных преобразований Лоренца в четырехмерном пространстве-времени. Другими словами, эти величины инвариантны относительно любой комбинации лоренцевых смещений (бустов) и поворотов координат.¹ Мы иногда будем записывать τ в сокращенной форме:

¹ В явном виде мы показали это только для τ , но те же самые аргументы приложимы и к s .

$$\tau^2 = t^2 - \vec{x}^2. \quad (2.14)$$

Это, пожалуй, и есть центральная идея теории относительности.

2.2.1. Как движутся световые лучи

Вернемся к лекции 1, где мы обсуждали пространственно-временные области и траектории световых лучей. Рисунок 2.2 иллюстрирует эту идею немного подробнее. Различные виды интервалов соответствуют отрицательному, положительному или нулевому значению инвариантной величины s . Мы также обнаружили тот интересный факт, что если две точки в пространстве-времени разделены нулевым интервалом, это *не* значит, что они обязательно должны совпадать. Нулевой интервал просто означает, что световой луч, выпущенный из одной из этих точек, может пройти через другую. В этом и заключается одна из

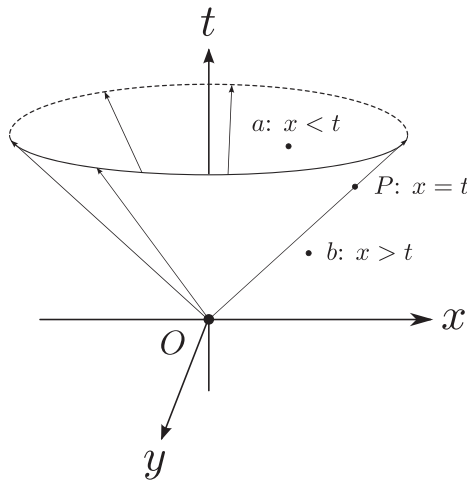


Рис. 2.2. Световой конус будущего. От начала отсчета точка a отделена времениподобным интервалом, точка b — пространственноподобным, а точка P — светоподобным. Показаны только два пространственных измерения

важных концепций движения светового луча: он движется так, что собственное время (другими словами, пространственно-временной интервал) вдоль его траектории остается равным нулю. Траектория светового луча, который начинает движение из начала координат, служит некой границей между областями пространства-времени, отделенными от начала координат времениподобными интервалами, и областями, отделенными от него пространственноподобными интервалами.

2.2.2. Введение в 4-векторы

Мы сейчас вернемся к рассмотрению пространственных измерений y и z . Дело в том, что математический язык теории относительности основывается на так называемых 4-векторах, которые включают в себя все три пространственных измерения. Сейчас мы введем в рассмотрение эти математические объекты, а позже, в лекции 3, разовьем этот аппарат более подробно. Самый простой и распространенный пример вектора в трех измерениях — это интервал между двумя точками в пространстве.¹ Если заданы две точки, то имеется и вектор, который их соединяет. У него есть направление и модуль. Не имеет значения, где именно он начинается. Если мы будем перемещать его, он останется все тем же вектором. Вы можете представлять его как перемещение, которое начинается в начале отсчета и заканчивается в некоторой точке пространства. У нашего вектора есть координаты, в данном случае x , y и z , которые определяют положение конечной точки.

Новые обозначения

Конечно, координаты необязательно обозначать x , y и z . Мы вправе их переименовать. Например, можно обозначить их X^i ,

¹ Мы здесь говорим только о векторах в пространстве, а не об абстрактных векторах состояния квантовой механики.

где i принимает значения 1, 2 или 3. В такой форме мы можем написать

$$X^i \Rightarrow (x, y, z)$$

или

$$X^i \Rightarrow (X^1, X^2, X^3).$$

Такую форму записи мы будем применять повсеместно. Так как мы будем измерять относительно некоторого начала отсчета не только расстояние, но и время, то нам понадобится и временная координата t . В результате наш вектор становится четырехмерным: 4-вектором с одной временной и тремя пространственными компонентами. Временную компоненту вектора принято записывать первой:

$$X^\mu \Rightarrow (X^0, X^1, X^2, X^3),$$

где (X^0, X^1, X^2, X^3) имеют то же значение, что и (t, x, y, z) . Не забудем, что эти верхние индексы *не являются* показателями степени! Координата X^3 означает «третья пространственная координата, которая часто записывается как z ». Это *не* значит $X \times X \times X$. В конкретных случаях различие между верхними индексами и показателями степени должно быть понятно из контекста. Здесь и далее при использовании четырехмерных координат мы всегда будем записывать первой временную координату.

Обратите внимание, что мы будем использовать два немного отличающихся варианта индексов:

X^μ : греческий индекс, например μ , означает, что индекс пробегает по всем четырем значениям — 0, 1, 2 и 3.

X^i : латинская буква, например i , означает, что индекс охватывает только три пространственных компоненты — 1, 2 и 3.

Как теперь обозначать собственное время и пространственно-временной интервал между точкой и началом отсчета? Мы можем записать их так:

$$\tau^2 = (X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2$$

и

$$s^2 = -(X^0)^2 + (X^1)^2 + (X^2)^2 + (X^3)^2.$$

В этом нет никакого нового смысла, просто новые обозначения.¹ Однако обозначения здесь очень важны. В данном случае они позволяют удобно и просто представить наши формулы в виде 4-векторов. Когда вы видите индекс μ , он пробегает все четыре значения, соответствующие всем возможным координатам в пространстве и времени. Когда вы видите индекс i , он может пробегать только значения, соответствующие пространству. Так же, как X^i можно представлять как обычный пространственный вектор, четырехкомпонентный вектор X^μ представляет собой 4-вектор в пространстве-времени. И точно так же, как обычные векторы преобразуются при повороте координат, 4-векторы подчиняются преобразованиям Лоренца при переходе от одной движущейся системы отсчета к другой. Вот как выглядят преобразования Лоренца в нашей новой записи:

$$(X')^0 = \frac{X^0 - vX^1}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$(X')^1 = \frac{X^1 - vX^0}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$(X')^2 = X^2,$$

$$(X')^3 = X^3.$$

Эту запись можно обобщить, получив правило преобразования любого 4-вектора. По определению, 4-вектором является любая

¹ Вас, возможно, удивляет, почему мы используем верхние, а не нижние индексы. Позже (в разделе 4.4.2) мы введем и нижние индексы, смысл которых будет несколько иным.

совокупность компонент A^μ , которые преобразуются в соответствии с правилами

$$\begin{aligned}(A')^0 &= \frac{A^0 - vA^1}{\sqrt{1-v^2}}, \\(A')^1 &= \frac{A^1 - vA^0}{\sqrt{1-v^2}}, \\(A')^2 &= A^2, \\(A')^3 &= A^3\end{aligned}\tag{2.15}$$

при бусте вдоль оси x . Мы также предполагаем, что пространственные компоненты A^1 , A^2 , A^3 преобразуются как обычные 3-векторы при повороте осей координат в пространстве и что A^0 при этом не меняется.

Точно так же, как и 3-векторы, 4-векторы можно умножать на число путем умножения на это число всех компонент вектора. Можно также складывать 4-векторы, складывая их соответствующие компоненты. Результатом таких операций снова будут 4-векторы.

4-скорость

Рассмотрим один 4-вектор. На этот раз вместо того, чтобы говорить о компонентах относительно начала отсчета, мы будем рассматривать малый интервал вдоль пространственно-временной траектории. В итоге мы впоследствии сократим этот интервал до бесконечно малого смещения, но пока будем представлять его как малый, но конечный. То, что мы имеем в виду, представлено на рис. 2.3. ΔX^μ — это интервал, разделяющий точки a и b , которые лежат на траектории. Проще говоря, это изменение значений четырех координат при переходе от одного конца вектора к другому. Этот вектор состоит из компонент Δt , Δx , Δy и Δz .

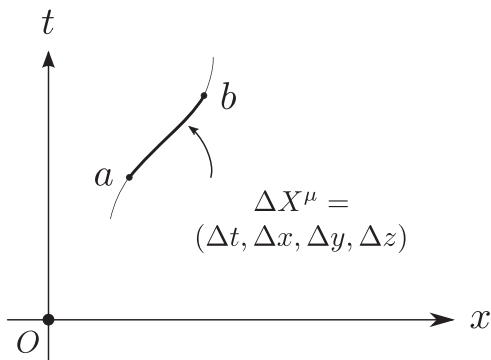


Рис. 2.3. Пространственно-временная траектория (частицы)

Теперь мы готовы ввести понятие 4-скорости. Четырехмерная скорость немного отличается от обычного понятия скорости. Допустим, что кривая на рис. 2.3 является траекторией частицы. Нас интересует понятие скорости в определенный момент вдоль отрезка \overline{ab} . Если бы мы определяли обычную скорость, то взяли бы Δx и разделили на Δt . Затем перешли бы к пределу этой величины при стремлении Δt к нулю. У обычной скорости три компоненты: x , y и z . Четвертой компоненты у нее нет.

Мы будем строить вектор четырехмерной скорости подобным же образом. Начнем с ΔX^μ . Но вместо того чтобы делить эти компоненты на Δt , обычную временную координату, мы разделим их на собственное время $\Delta \tau$, потому что $\Delta \tau$ — инвариант. Деление 4-вектора ΔX^μ на инвариант сохраняет свойства преобразования 4-вектора. Другими словами, $\Delta X^\mu / \Delta \tau$ — это 4-вектор, а $\Delta X^\mu / \Delta t$ таковым не является.

Чтобы отличать 4-скорость от обычной 3-скорости, мы будем обозначать ее U вместо V . U имеет четыре компоненты U^μ , определяемые следующими выражениями:

$$U^0 = \frac{dX^0}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau},$$

$$\begin{aligned}U^1 &= \frac{dX^1}{d\tau} = \frac{dx}{d\tau}, \\U^2 &= \frac{dX^2}{d\tau} = \frac{dy}{d\tau}, \\U^3 &= \frac{dX^3}{d\tau} = \frac{dz}{d\tau}.\end{aligned}\tag{2.16}$$

Мы подробнее рассмотрим 4-скорость в следующей лекции. Эта величина играет важную роль в теории движения частиц. В релятивистской теории движения частиц нам понадобится новый взгляд на такие привычные понятия, как скорость, положение, импульс, энергия, кинетическая энергия и т. д. Конструируя релятивистские обобщения ньютоновских понятий, мы будем делать это на языке 4-векторов.

ЛЕКЦИЯ 3

Релятивистские законы движения

Ленни сидит у барной стойки, обхватив голову руками. Перед ним лежит сотовый телефон с электронным сообщением на экране.

Арт: Ты чего, Ленни? Перебрал пивного милкшейка?

Ленни: Вот, Арт, взгляни-ка на это письмо. Я таких пару в день получаю.

Электронное сообщение:¹

Дорогой профессор Сускин [так!],

Эйнштейн крупно облажался, а я это открыл. Я писал вашему другу Хокингу [так], но он мне не ответил.

Давайте я вам объясню, в чем Эйнштейн [так] ошибся. Сила — это масса на ускорение. Если я толкаю что-то с постоянной силой, ускорение будет постоянным, и если делать это достаточно долго, скорость будет все расти и расти. Я посчитал, что если толкать человека весом в 100 килограммов (это мой вес, надо бы сесть на диету) с постоянной силой в 101,818 килограмма в горизонтальном направлении, то через год он будет двигаться быстрее скорости света. Все, что я использовал, — это уравнение ньютона [так] $F = MA$. Так что Эйнштейн

¹ Реальное сообщение, полученное 22 января 2007 года.

неправ, ведь он сказал, что быстрее света ничего не может быть. Надеюсь, вы поможете мне опубликовать это, так как я уверен, релятивистам [так] надо это знать. У меня много денег, и я могу вам заплатить.

Арт: Господи, ну и дурак. Кстати, а что здесь не так?

Ответ на вопрос Арта таков: мы находимся в рамках теории Эйнштейна, а не теории Ньютона. Всю физику, в том числе законы движения, силы и ускорения, пришлось перестроить с самого основания в соответствии с принципами специальной теории относительности.

Давайте попробуем с этим разобраться. Нас особенно будет интересовать механика частиц — как частицы движутся в соответствии со специальной теорией относительности. Чтобы это проделать, нам придется затронуть широкий круг идей, в том числе и многие концепции классической механики. Наш план заключается в том, чтобы обсуждать каждую идею по отдельности, прежде чем в итоге сплести их все в единый узел.

Идея относительности строится на классических понятиях энергии, импульса, канонических моментов импульса, гамильтонианов и лагранжианов; центральную роль играет принцип наименьшего действия. Хотя мы по ходу изложения будем кратко напоминать о сути этих понятий и идей, мы предполагаем, что вы в целом помните, что говорилось о них в *Книге I* нашей серии «*Теоретический минимум: что необходимо знать, чтобы начать заниматься физикой*». Если же это не так, то сейчас вам представляется прекрасная возможность освежить в памяти этот материал.

3.1. Еще об интервалах

Мы обсуждали времениподобные и пространственноподобные интервалы в лекциях 1 и 2. Как мы выяснили, интервал или рас-

стояние между двумя точками в пространстве-времени является времениподобным, когда инвариантная величина

$$(\Delta s)^2 = -(\Delta t)^2 + (\Delta \vec{x})^2 \quad (3.1)$$

меньше нуля, то есть когда временная компонента этого интервала больше, чем пространственная.¹ С другой стороны, когда пространственно-временной интервал $(\Delta s)^2$ между двумя событиями больше нуля, то верно обратное и интервал называется пространственноподобным. Эта идея уже была проиллюстрирована на рис. 2.2.

3.1.1. Пространственноподобные интервалы

Когда $(\Delta \vec{x})^2$ больше, чем $(\Delta t)^2$, пространственный интервал между двумя событиями больше временного интервала между ними и $(\Delta s)^2$ больше нуля. Это видно на рис. 3.1, где интервал между событиями a и b пространственноподобный. Линия, соединяющая эти две точки, образует с осью x угол меньше 45 градусов.

В пространственноподобных интервалах больше пространства, чем времени. Они также обладают тем свойством, что *нельзя* найти такую систему отсчета, в которой эти два события произошли бы в одном и том же месте. Вместо этого вы можете найти систему отсчета, в которой оба они происходят в точности в одно и то же время, хоть и в разных местах. Для этого нужно найти систему, в которой ось x' проходит через обе точки.² Но здесь есть один большой сюрприз. В системе (t, x) на рис. 3.1 событие a происходит до события b . Однако если мы перейдем

¹ Не забывайте, что, когда мы говорим о четырехмерном пространстве-времени — трех пространственных координатах и одной временной, — символ $\Delta \vec{x}$ обозначает все три направления в пространстве. В этом контексте $(\Delta \vec{x})^2$ выражает сумму их квадратов, которую мы обычно записываем как $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$.

² Вполне подошла бы и система, в которой ось x' параллельна этой соединительной линии.

с помощью преобразований Лоренца к системе (t', x') на той же диаграмме, то событие b произойдет раньше события a . Их временная последовательность действительно изменится. Из этого ясно, что именно мы понимаем под относительностью одновременности: последовательность событий, то есть то, что одно из них произошло раньше или позже другого, не является инвариантной, если эти события разделены пространственно-подобным интервалом.

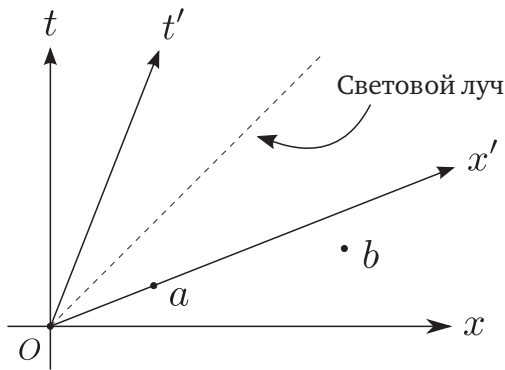


Рис. 3.1. Пространственноподобный интервал

3.1.2. Времениподобные интервалы

Частицы с ненулевой массой движутся вдоль времениподобных траекторий. Чтобы в этом разобраться, рассмотрим пример на рис. 3.2. Если проследовать по пути из точки a в точку b , то каждый малый отрезок этого пути будет времениподобным интервалом. Утверждение, что частица движется по времениподобной траектории, эквивалентно утверждению, что ее скорость никогда не достигает скорости света.

Когда интервал времениподобен, вы всегда можете найти систему отсчета, в которой данные два события происходят в одном и том же месте — там, где они имеют одинаковые пространственные

координаты, но происходят в разное время. Фактически все, что вам необходимо сделать, — это выбрать систему отсчета, в которой прямая, соединяющая две данные точки, покоится, систему, в которой ось t' совпадает с прямой, соединяющей эти две точки.¹

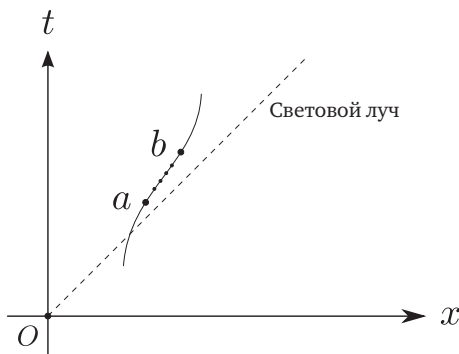


Рис. 3.2. Времениподобные траектории

3.2. Подробнее о 4-скорости

Ранее, в лекции 2, мы ввели некоторые определения и обозначения для 4-скорости. Теперь пора эту идею развить. Компоненты 4-скорости $dX^\mu = dt$ аналогичны компонентам $dX^i = dt$ скорости в обычных координатах, за некоторыми исключениями:

- у 4-скорости — сюрприз! — четыре, а не три компоненты;
- 4-скорость обозначает скорость изменений относительно собственного времени, а не относительно времени в системе координат.

Как и должно быть в случае правильно определенного 4-вектора, компоненты 4-скорости преобразуются тем же образом, как и прототип всех 4-векторов

¹ Вполне подошла бы и система, в которой ось t' параллельна линии, соединяющей точки.

$$(t, x, y, z)$$

или

$$(X^0, X^1, X^2, X^3)$$

в нашей новой системе обозначений. Другими словами, эти компоненты преобразуются в соответствии с преобразованиями Лоренца. По аналогии с обычными скоростями, 4-скорости ассоциируются с малыми или бесконечно малыми отрезками вдоль пути, или мировой линии, в пространстве-времени. У каждого малого отрезка имеется ассоциированный с ним вектор 4-скорости. Мы будем записывать обычную трехмерную скорость как

$$\vec{V} = \frac{d\vec{x}}{dt}$$

или

$$V^i = \frac{dX^i}{dt},$$

а 4-скорость как

$$U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau}. \quad (3.2).$$

Какова связь между 4-скоростью и обычной скоростью? Обычная нерелятивистская скорость, разумеется, имеет только три компоненты. Это заставляет ожидать чего-то необычного от четвертой компоненты (которую мы обозначили как нулевую). Начнем разбираться с U^0 , записав ее в виде

$$U^0 = \frac{dX^0}{d\tau} = \frac{dX^0}{dt} \frac{dt}{d\tau}.$$

Вспомним теперь, что X^0 — это всего лишь другой способ записи t , такой, что первый множитель в правой части равен просто 1. Тогда можно записать:

$$U^0 = \frac{dt}{d\tau} \quad (3.3)$$

или

$$U^0 = \frac{1}{d\tau/dt}.$$

Следующий шаг — это вспомнить, что $d\tau = \sqrt{dt^2 - d\vec{x}^2}$, и поэтому

$$\frac{d\tau}{dt} = \frac{\sqrt{dt^2 - d\vec{x}^2}}{dt}$$

или

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \vec{v}^2}, \quad (3.4)$$

где \vec{v} — обычный 3-вектор скорости. Теперь вернемся к формуле (3.3). С помощью (3.4) найдем, что

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}} \quad (3.5)$$

и

$$U^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}}. \quad (3.6)$$

Мы видим здесь новый смысл вездесущего множителя

$$1/\sqrt{1 - v^2},$$

который появляется в преобразованиях Лоренца и в формулах лоренцева сокращения и замедления времени. Это временная компонента 4-скорости движущегося наблюдателя.

Что нам делать с временной компонентой U ? А что бы с ней сделал Ньютон? Предположим, что частица движется гораздо медленнее света, другими словами, что $v \ll 1$. Тогда ясно, что U^0 очень близка к 1. В ньютоновском пределе это и есть 1, и никакого интереса не представляет. Ведь в ньютоновской парадигме эта

величина не играет никакой роли. Теперь обратимся к пространственным компонентам U . В частности, U^1 можно записать как

$$U^1 = \frac{dx}{d\tau},$$

что также можно представить в виде

$$U^1 = \frac{dx}{dt} \frac{dt}{d\tau}.$$

Первый множитель dx/dt является обычной x -компонентой скорости V^1 . Второй множитель снова дается формулой (3.5). Объединяя их, получаем:

$$U^i = \frac{V^i}{\sqrt{1 - \vec{v}^2}}.$$

И вновь спросим себя: что бы подумал об этом Ньютон? Мы знаем, что для очень малых v $\sqrt{1 - \vec{v}^2}$ очень близко к 1. Следовательно, пространственные компоненты релятивистской скорости практически те же, что и компоненты обычной 3-скорости.

Про 4-скорость следует знать еще одно: только три из четырех ее компонентов U^μ независимы. На них наложено одно ограничение. Его можно выразить через инвариант. Точно так же, как инвариантна величина

$$(X^0)^2 - (X^1)^2 - (X^2)^2 - (X^3)^2,$$

инвариантом является и соответствующая комбинация компонент скорости, а именно

$$(U^0)^2 - (U^1)^2 - (U^2)^2 - (U^3)^2.$$

Чем интересна эта величина? Я предлагаю читателю в качестве упражнения показать, что она всегда равна 1:

$$(U^0)^2 - (U^1)^2 - (U^2)^2 - (U^3)^2 = 1. \quad (3.7)$$

Подытожим все наши результаты для 4-скорости.

Сводка по 4-скорости:

$$U^0 = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \quad (3.8)$$

$$U^i = \frac{V^i}{\sqrt{1-v^2}} \quad (3.9)$$

$$(U^0)^2 - (\vec{U})^2 = 1. \quad (3.10)$$

Эти формулы показывают, как найти компоненты 4-скорости. В нерелятивистском пределе, где v близко к нулю, выражение $\sqrt{1-v^2}$ очень близко к единице, и два понятия скорости, U^i и V^i , суть одно и то же. Однако когда скорость объекта приближается к скорости света, U^i становится гораздо больше, чем V^i . В любой точке своей траектории частица характеризуется 4-вектором положения X^μ и 4-вектором скорости U^μ .

Наш список ингредиентов почти полон. Осталось добавить лишь один важный параметр, и мы сможем описать механику частиц.

Упражнение 3.1. Выведите уравнение (3.7) из определения $(\Delta\tau)^2$.

3.3. Математическая интерлюдия: инструмент аппроксимации

Набор инструментов физика неполон без хороших методов аппроксимации. Простой и незаменимый прием, который здесь описывается, — это старая добрая рабочая лошадка. Эта аппрокс-

симация основана на биноме Ньютона.¹ Рассматривать теорему в общем виде мы не станем, достаточно будет пары примеров. Нам понадобится хорошее приближение для выражения типа

$$(1+a)^p,$$

которое будет точным при $a \ll 1$. В этом выражении показатель степени p может быть любым. Пусть, например, $p = 2$. В этом случае точная форма разложения имеет вид

$$(1+a)^2 = 1 + 2a + a^2.$$

При малом a первый член (в данном случае 1) уже позволяет достичь неплохой точности. Но мы все же хотим точности выше. Следующее приближение:

$$(1+a)^2 \approx 1 + 2a.$$

Попробуем вычислить это при $a = 0,1$. Тогда аппроксимация дает $(1 + 0,1)^2 \approx 1,2$, в то время как точный ответ 1,21. И чем меньшие значения a мы будем брать, тем менее существенным будет член a^2 и тем лучше будет приближение. Посмотрим, что произойдет при $p = 3$. Точное разложение таково:

$$(1+a)^3 = 1 + 3a + 3a^2 + a^3,$$

а первое приближение

$$(1+a)^3 \approx 1 + 3a.$$

Для $a = 0,1$ аппроксимация дает 1,3, при том что точный ответ 1,4641. Терпимо, хотя и не очень хорошо. Но пусть теперь $a = 0,01$. Тогда приближенный ответ

$$(1,01)^3 \approx 1,03,$$

¹ Если вы все еще чувствуете себя неуверенно, взгляните сюда: https://en.wikipedia.org/wiki/binomial_approximation.

что гораздо ближе к точному значению

$$(1,01)^3 = 1,030301.$$

Теперь без какого-либо доказательства я запишу общий ответ в первом приближении для любого p :

$$(1+a)^p \approx 1+ap. \quad (3.11)$$

В общем случае, если p не целое, точное выражение имеет вид бесконечного ряда. Тем не менее формула (3.11) имеет весьма высокую точность при малых a , и с уменьшением a становится все лучше и лучше.

Мы сейчас воспользуемся формулой (3.11) для вывода двух приближенных формул, которые все время появляются в теории относительности:

$$\sqrt{1-v^2} \quad (3.12)$$

и

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \quad (3.13)$$

где v — скорость движущегося объекта или системы отсчета. Мы сделаем это, записав формулы (3.12) и (3.13) в виде

$$\begin{aligned} \sqrt{1-v^2} &= (1-v^2)^{1/2}, \\ \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} &= (1-v^2)^{-1/2}. \end{aligned}$$

В первом случае роли a и p играют $-v^2$ и $1/2$. Во втором — $a = -v^2$, но $p = -1/2$. С учетом этих подстановок наши аппроксимации приобретают вид:

$$\sqrt{1-v^2} \approx 1 - \frac{1}{2}v^2, \quad (3.14)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \approx 1 + \frac{1}{2}v^2. \quad (3.15)$$

Мы записали эти выражения в релятивистских единицах, так что v является безразмерной долей скорости света. В обычных единицах они принимают вид:

$$\sqrt{1-(v/c)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}, \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}. \quad (3.17)$$

Позвольте мне на минутку остановиться, чтобы объяснить, зачем мы все это делаем. Зачем надо заниматься приближениями, если не составляет труда, особенно с современными калькуляторами, вычислить нужное выражение с очень высокой точностью? Дело в том, что нашей целью не является упрощение вычислений (хотя этот эффект тоже может быть достигнут). Мы строим новую теорию, описывающую движение при очень больших скоростях. Однако мы не можем делать что заблагорассудится: в описании движений, значительно более медленных, чем скорость света, мы ограничены старой теорией — ньютоновской механикой. Наша истинная цель при использовании таких аппроксимаций, как (3.16) и (3.17), — в демонстрации того, что релятивистские уравнения переходят в ньютоновские при очень малом v/c . Вот для справки сводка приближений, которые мы будем использовать.

Приближения:

$$\sqrt{1-v^2} \approx 1 - \frac{v^2}{2} \quad (3.18)$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-v^2}} \approx 1 + \frac{v^2}{2} \quad (3.19)$$

В дальнейшем мы будем обходиться без символа приблизительного равенства \approx и будем использовать приближенные формулы лишь в тех случаях, когда они достаточно точны, чтобы оправдать использование обычного знака равенства.

3.4. Механика частиц

Теперь, когда все ингредиенты в сборе, мы готовы поговорить о механике частиц. Слово «*частица*» часто ассоциируется с образом элементарной частицы, такой как электрон. Однако мы используем этот термин в гораздо более широком смысле. Частицей может быть все, что сохраняет свою целостность. Элементарные частицы этому критерию, конечно, соответствуют, но, кроме них, под это определение попадают и многие другие объекты: Солнце, булочка, мячик для гольфа, корреспондент, присылающий мне электронные письма. Когда мы говорим о положении или скорости частицы, то в действительности подразумеваем положение или скорость ее центра масс.

Прежде чем перейти к следующему разделу, я очень советую освежить знания о принципе наименьшего действия, лагранжевой механике и гамильтоновой механике, если вы все это подзабыли. В частности, эти сведения можно найти в *Книге I* нашего «*Теоретического минимума*».

3.4.1. Принцип наименьшего действия

Принцип наименьшего действия со своим квантовомеханическим обобщением, возможно, является центральной идеей всей физики. На нем основаны все физические законы, от ньютоновых законов движения до электродинамики и современных так называемых калибровочных теорий фундаментальных взаимодействий. Знаем ли мы в точности, какова его природа? Думаю, что этот принцип коренится в квантовой теории, но достаточно будет сказать, что он глубоко связан с сохранением энергии

и импульса. Он гарантирует внутреннюю математическую непротиворечивость уравнений движения. Понятие действия очень подробно обсуждалось в первой книге нашей серии. Сейчас мы сделаем краткий и беглый обзор этой концепции.

Посмотрим вкратце, как принцип действия определяет движение частицы в классической механике. Действие — это величина, которая зависит от траектории частицы, движущейся в пространстве-времени. Можно представлять себе эту траекторию мировой линией, как было показано на рис. 3.2, который мы для удобства повторяем здесь как рис. 3.3. Эта диаграмма служит хорошей моделью для нашего обсуждения действия. Будем, однако, помнить, что, когда мы указываем положение системы, ось x представляет все пространственное описание этой системы — координата x может играть роль одномерной координаты, но может представлять и пространственный 3-вектор. (Она даже может представлять все пространственные координаты большого количества частиц, но здесь мы рассматриваем лишь одиночную частицу.) Мы называем ее *пространством*, или *координатным пространством*. Как обычно, вертикальная ось представляет время координат, и траектория системы имеет вид кривой.

Лагранжиан частицы зависит от ее положения и скорости и, что самое главное, определяется ее кинетической и потенциальной

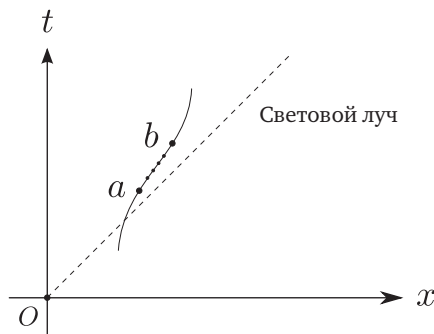


Рис. 3.3. Времениподобные траектории частиц

энергией. Кривая на рис. 3.3 представляет времениподобную мировую линию единичной частицы с ненулевой массой. Мы будем рассматривать ее поведение при ее перемещении из точки a в точку b .¹

Наше изложение принципа наименьшего действия будет тесно связано с тем, как мы подходили к нему в классической механике. Единственное существенное различие заключается в том, что теперь мы добавляем требование независимости от системы отсчета; мы хотим, чтобы физические законы были одинаковы во всех инерциальных системах. Добиться этого можно, выражая эти законы через величины, которые не меняются при изменении системы отсчета. Другими словами, действие должно быть инвариантом, а это лучше всего достигается, если инвариантны его составляющие.

Принцип наименьшего действия состоит в том, что если система начинает движение в точке a и заканчивает в точке b , она среди всех возможных путей «выбирает» совершенно определенный, а именно тот, вдоль которого достигает минимума определенная величина, которую мы и называем действием.² Действие накапливается как сумма по всей траектории. Для каждого малого отрезка траектории есть связанная с ним величина действия. Мы вычисляем действие по всему пути от a до b , складывая друг с другом все эти малые порции действия. С уменьшением размеров

¹ Концепция мировой линии в нерелятивистской физике работает так же хорошо, как и в релятивистской. Но в теории относительности она получает дополнительное преимущество за счет связи пространства и времени — того факта, что пространство и время переходят друг в друга в преобразованиях Лоренца.

² Здесь есть технический момент, который я упомяну, чтобы предупредить недовольство со стороны особо взыскательных читателей. Утверждение, что действие должно достигать минимума, не вполне верно. Действие может быть минимальным, максимальным или, в более общем случае, стационарным. Эта тонкость, вообще говоря, не играет никакой роли во всем последующем изложении. Поэтому мы будем следовать традиции и говорить о принципе наименьшего (минимального) действия.

отрезков пути до бесконечно малых величин их сумма становится интегралом. Это представление о действии как интеграле по траектории с фиксированными концами напрямую заимствуется из дорелятивистской физики. То же самое можно сказать и о представлении, в соответствии с которым система каким-то образом выбирает такой путь, который минимизирует интеграл действия.

3.4.2. Нерелятивистское действие: краткий обзор

Вспомним формулу действия для нерелятивистской частицы из *Книги I*. Действие — это интеграл вдоль траектории системы, а его подынтегральное выражение называется лагранжианом и обозначается \mathcal{L} :

$$\text{Действие} = \int_a^b \mathcal{L} dt. \quad (3.20)$$

Как правило, лагранжиан является функцией положения и скорости частицы вдоль траектории. В простейшем случае частицы, на которую не действуют никакие силы, лагранжиан является просто кинетической энергией $(1/2)mv^2$. Другими словами,

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2}mv^2 = \\ &= \frac{1}{2}m(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2), \end{aligned} \quad (3.21)$$

где m — масса частицы, а v — ее мгновенная скорость.¹ Для нерелятивистской частицы действие запишется так:

$$\text{Действие} = m \int_a^b \frac{1}{2}v^2 dt. \quad (3.22)$$

¹ Напомним, что переменная с точкой означает «производная переменной по времени». Например, \dot{x} — сокращение выражения dx/dt .

Отметим, что действие пропорционально массе: для стеклянного шарика и шара для боулинга, движущихся по одной и той же траектории, действие шара для боулинга больше, чем действие стеклянного шарика, во столько же раз, во сколько различаются их массы.

3.4.3. Релятивистское действие

Нерелятивистское описание движения частиц является в высшей степени точным для частиц, движущихся гораздо медленнее света, но совершенно не подходит для релятивистских частиц с большими скоростями. Чтобы понять поведение релятивистских частиц, нам необходимо начать с самых оснований, но что-то одно останется неизменным. Теория релятивистского движения тоже основана на принципе наименьшего действия.

Как же тогда вычислить действие релятивистской частицы на каждом малом отрезке ее траектории? Гарантеей того, что законы движения не зависят от системы отсчета, была бы инвариантность действия. Но есть лишь одна величина, остающаяся инвариантной при движении частицы из некоторого положения в соседнее — собственное время, разделяющее эти два положения. Собственное время от одной точки до другой — это величина, относительно значения которой согласны все наблюдатели. Они не придут к согласию относительно величин Δt или $\Delta \vec{x}$, но по поводу $\Delta \tau$ у них не будет никаких разногласий. Поэтому можно сделать хорошее предположение (которое оказывается правильным): принять, что действие *пропорционально* сумме всех малых $\Delta \tau$. Эта сумма равняется полному собственному времени вдоль мировой линии. На математическом языке

$$\text{Действие} = -\text{constant} \times \sum \Delta \tau,$$

где суммирование идет от одного конца траектории до другого — от точки a до точки b на рис. 3.3. Мы скоро вернемся к обсуждению постоянного множителя и знака «минус».

Коль скоро мы построили схему вычисления действия, сделаем теперь в точности то же самое, что происходит в классической механике: зафиксировав начальную и конечную точки траектории, будем соединять их так и сяк, меняя кривизну пути до тех пор, пока не найдем такой, который минимизирует действие. Так как действие составляется из инвариантных величин $\Delta\tau$, каждый наблюдатель согласится с выбором того пути, при котором их сумма будет минимальна.

Каково значение постоянного множителя при вычислении действия? Чтобы понять это, вернемся к нерелятивистскому случаю (3.22). Мы видели тогда, что действие для данного пути пропорционально массе частицы. Если мы хотим воспроизвести стандартные закономерности нерелятивистской физики в пределе малых скоростей, релятивистское действие также должно быть пропорционально массе частицы. Причины появления знака «минус» станут ясны по ходу изложения. Попробуем ввести следующее определение действия:

$$\text{Действие} = -m \sum \Delta\tau.$$

Теперь представим, что каждый малый отрезок траектории стягивается до бесконечно малых размеров. Математически это означает, что мы преобразуем нашу сумму в интеграл:

$$\text{Действие} = -m \int_a^b d\tau,$$

и $\Delta\tau$ становится его бесконечно малой составляющей $d\tau$. Мы добавили пределы интегрирования a и b , показывающие, что интегрируем от одного конца траектории до другого. Из (3.4) мы уже знаем, что

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1-v^2}.$$

Этим можно воспользоваться, чтобы заменить в интеграле действия $d\tau$ на $dt \sqrt{1-v^2}$, в результате чего получается:

$$\text{Действие} = -m \int_a^b dt \sqrt{1-v^2}.$$

В наших новых обозначениях v^2 превращается в $(\dot{X}^i)^2$, и принцип принимает вид:

$$\text{Действие} = -m \int_a^b dt \sqrt{1(\dot{X}^i)^2}. \quad (3.23)$$

Я использую символ $(\dot{X}^i)^2$ вместо $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, где точки обозначают производные по обычной временной координате. Можно также записать, что $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2 = \vec{v}^2$, где \vec{v} — обычный трехмерный вектор скорости.

Мы превратили интеграл действия во что-то почти знакомое — в интеграл функции скорости. В целом он выглядит так же, как и уравнение (3.20), но на этот раз лагранжиан, вместо выражения для нерелятивистской кинетической энергии, как в уравнении (3.21), приобретает несколько более сложную форму:

$$\mathcal{L} = -m \sqrt{1 - (\dot{X}^i)^2} \quad (3.24)$$

или

$$\mathcal{L} = -m \sqrt{1 - v^2}. \quad (3.25)$$

Прежде чем познакомиться с этим лагранжианом поближе, вернем на место необходимые множители c , чтобы восстановить размерность в обычных единицах. Для наведения порядка с размерностями в выражении $1 - (\dot{X}^i)^2$ надо разделить компоненты скорости на c . Вдобавок, чтобы лагранжиан выражался в единицах энергии, необходимо умножить все выражение на c^2 . Тогда в обычных единицах мы получим

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad (3.26)$$

или более подробно:

$$\mathcal{L} = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}. \quad (3.27)$$

Возможно, вы не обратили внимания, что в формуле (3.26) впервые появляется выражение mc^2 .

3.4.4. Нерелятивистский предел

Теперь мы покажем, что в пределе малых скоростей поведение релятивистских систем сводится к ньютоновской физике. Так как все, относящееся к движению, закодировано в лагранжиане, нужно лишь показать, что для малых скоростей лагранжиан сводится к уравнению (3.21). Именно для этой и других подобных целей мы и ввели приближения, задаваемые формулами (3.16) и (3.17):

$$\sqrt{1-(v/c)^2} \approx 1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2},$$

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \approx 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}.$$

Если первую из этих формул применить к уравнению (3.26), получится

$$\mathcal{L} = -mc^2 \left(1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right),$$

что можно переписать в виде

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} mv^2 - mc^2.$$

Первый член в этом выражении, $1/2 mv^2$, — это старая добрая кинетическая энергия из ньютоновской механики — ровно то, чего мы и ждем от нерелятивистского лагранжиана. И между прочим, не поставь мы общий знак минус в выражении для действия, мы не воспроизвели бы этот член с его правильным знаком.

А что можно сказать о добавочном члене $-mc^2$? Здесь в голову приходят два вопроса. Первый: влияет ли он как-то на движение

частицы? Ответ: для любой системы изменение лагранжиана на постоянную величину не влечет никаких последствий. Мы можем сохранить ее или убрать — это никак не повлияет на движение системы. Второй вопрос: какое этот член имеет отношение к уравнению $E = mc^2$? Это мы скоро узнаем.

3.4.5. Релятивистский импульс

Понятие импульса чрезвычайно важно в механике не в последнюю очередь потому, что в замкнутой системе он сохраняется. Более того, если мы разделим систему на части, то скорость изменения импульса одной из частей будет равна силе, с которой на эту часть действуют остальные части системы.

Импульс, часто обозначаемый \vec{P} , является 3-вектором, который в ньютоновской физике равен произведению массы на скорость:

$$\vec{P} = m\vec{v}.$$

Релятивистская физика здесь ничем не отличается от ньютоновской: импульс по-прежнему сохраняется. Но взаимоотношения между импульсом и скоростью более сложные. В своей статье 1905 года Эйнштейн сформулировал эти отношения в классическом рассуждении, которое было не только блестящим по своему остроумию, но и характерно простым. Он начал с рассмотрения объекта в покоящейся системе отсчета, а потом предложил мысленно разделить его на два более легких объекта, каждый из которых движется так медленно, что весь процесс может быть описан в рамках ньютоновской физики. Затем он предложил представить, что тот же процесс наблюдается из другой системы отсчета, в которой первоначальный объект движется с релятивистской скоростью. Скорость образовавшихся после разделения объектов легко определить, применив преобразования Лоренца к известным скоростям в исходной системе. Затем, вновь объединяя фрагменты объекта, Эйнштейн вывел формулу для их импульсов из условия сохранения импульса в движущейся системе отсчета.

Я представлю здесь другое рассуждение, не столь простое и, возможно, менее изящное, но зато более современное и гораздо более общее. В классической механике (см. *Книгу I*) импульс системы — скажем, частицы — является производной лагранжиана по скорости, или

$$P^i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^i}. \quad (3.28)$$

По причинам, которые мы еще не объяснили, мы часто предпочитаем записывать уравнения такого рода в форме

$$P_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^i}, \quad (3.29)$$

где P_i имеет нижний индекс вместо верхнего; здесь мы приводим такую запись просто для сведения. Смысл верхних и нижних индексов мы объясним позже, в разделе 5.3.

Всё, что нужно для получения релятивистского выражения импульса частицы, — это применить уравнение (3.28) к лагранжиану в уравнении (3.27). Например, x -компонента импульса — это

$$P^x = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}}.$$

Дифференцируя, получаем

$$P^x = m \frac{\dot{x}}{\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}{c^2}}},$$

или в более общем виде:

$$P^i = \frac{mV^i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (3.30)$$

Сравним эту формулу с ее нерелятивистским вариантом

$$P^i = mV^i.$$

Первый интересный факт состоит в том, что разница не так уж велика. Вернемся к определению релятивистской скорости:

$$U^i = \frac{dX^i}{d\tau}.$$

Сравнивая (3.9) с (3.30), мы видим, что релятивистский импульс — это просто произведение массы на релятивистскую скорость:

$$P^i = m \frac{dX^i}{d\tau} = mU^i. \quad (3.31)$$

Наверное, можно было догадаться, какой будет формула (3.31), и не выполняя всех этих действий. Важно, однако, что мы можем получить ее из базовых принципов механики: фундаментального определения импульса как производной лагранжиана по скорости.

Как и следовало ожидать, релятивистское и нерелятивистское определения импульса совпадают при скорости значительно меньше скорости света. В этом случае выражение

$$\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

очень близко к 1. Заметьте, однако, что происходит, когда скорость увеличивается и приближается к c . В этом пределе значение выражения стремительно растет. То есть, когда скорость стремится к c , импульс массивного объекта становится бесконечным!

Теперь давайте вернемся к электронному письму, с которого я начал свою лекцию, и посмотрим, можем ли мы ответить его автору. Все его аргументы основывались на втором законе Ньютона, как записал его наш корреспондент, $F = MA$. Читателям нашей *Книги I* хорошо известно, что этот закон может быть выражен и иначе: сила равна скорости изменения импульса,

$$F = \frac{dP}{dt}. \quad (3.32)$$

Эти два способа выражения второго закона Ньютона совпадают в ограниченных пределах ньютоновской механики, где импульс дается обычной нерелятивистской формулой $P = mV$. Однако в соответствии с более общими принципами механики уравнение (3.32) является более фундаментальным и приложимо как к релятивистским, так и к нерелятивистским задачам.

Что произойдет, если, как предполагал наш адресат, к объекту будет приложена постоянная сила? Ответ: импульс будет равномерно расти со временем. Но, так как достижение скорости света потребует *бесконечного* импульса, на это уйдет и бесконечное время.

3.5. Релятивистская энергия

Рассмотрим теперь понятие энергии в релятивистской динамике. Как вы, без сомнения, знаете, это еще одна сохраняющаяся величина. Вероятно — по крайней мере, если вы прочли *Книгу I*, — вам также известно и то, что энергия представляет собой гамильтониан системы. И если вам требуется освежить в памяти все, что связано с гамильтонианами, сейчас самое время сделать перерыв и вернуться к *Книге I*.

Гамильтониан — сохраняющаяся величина. Это один из ключевых элементов систематического подхода к механике, развитого Лагранжем, Гамильтоном и другими. Установленная ими система понятий позволяет нам рассуждать в рамках единых основополагающих принципов, а не просто придумывать решения задач по мере их поступления. Гамильтониан H определяется через лагранжиан. Наиболее общий способ определить его такой:

$$H = \sum_i \dot{Q}^i P^i - \mathcal{L}, \quad (3.33)$$

где Q^i и P^i — координаты и канонические импульсы, определяющие фазовое пространство рассматриваемой системы.

Для движущейся частицы координаты являются просто тремя составляющими ее положения, X^1 , X^2 и X^3 , и (3.33) принимает форму

$$H = \sum_i \dot{X}^i P^i - \mathcal{L}. \quad (3.34)$$

Из (3.31) нам уже известно, что импульсы равны

$$P^i = mU^i$$

или

$$P^i = \frac{m\dot{X}^i}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Из (3.24) также известно, что лагранжиан равен

$$\mathcal{L} = -m\sqrt{1-(\dot{X}^i)^2}$$

или

$$\mathcal{L} = -m\sqrt{1-v^2}.$$

Подставляя эти выражения для P^i и \mathcal{L} в (3.34), получаем

$$H = \sum_i \frac{m(\dot{X}^i)^2}{\sqrt{1-v^2}} + m\sqrt{1-v^2}.$$

Это выражение для гамильтониана выглядит довольно запутанным, но его можно немного упростить. Для начала заметим, что $(\dot{X}^i)^2$ — это просто квадрат скорости. В результате первый член даже не надо переписывать в виде суммы; это просто $m v^2 / \sqrt{1-v^2}$. Если мы умножим и разделим второй член на $\sqrt{1-v^2}$, он приобретет тот же знаменатель, что и первый. Результирующий числитель будет равен $m(1-v^2)$. Выполнив все перечисленное, получаем:

$$H = \frac{m v^2}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{m(1-v^2)}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Выражение значительно упростилось, но мы еще не закончили. Заметим, что mv^2 в первом члене сокращается с mv^2 во втором, и все становится совсем просто:

$$H = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (3.35)$$

Это — гамильтониан, он же энергия. Узнаёте в этом уравнении множитель $1/\sqrt{1-v^2}$? Если нет, вернитесь к уравнению (3.8). Это U^0 . Теперь мы уверены, что нулевая компонента 4-импульса,

$$P^0 = mU^0, \quad (3.36)$$

это энергия. На самом деле это так важно, что я крикну об этом во весь голос:

Три компоненты пространственного импульса P^i совместно с энергией P^0 образуют 4-вектор.

Важное следствие этого утверждения заключается в том, что энергия и импульс смешиваются при преобразованиях Лоренца. Например, объект в состоянии покоя в одной системе отсчета обладает энергией, но не обладает импульсом, а в другой системе тот же объект обладает и энергией, и импульсом.

Наконец, дорелятивистская концепция сохранения импульса превращается в сохранение 4-импульса: сохраняются x -импульс, y -импульс, z -импульс и энергия.

3.5.1. Медленные частицы

Прежде чем двинуться дальше, мы должны выяснить, как новое понятие энергии связано со старым. На некоторое время мы снова обратимся к общепринятым единицам измерения и вернем в наши уравнения c . Возьмем уравнение (3.35). Теперь, когда мы понимаем, что гамильтониан — это то же самое, что энергия, можно записать

$$E = \frac{mv^2}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (3.37)$$

Чтобы восстановить надлежащие множители c , отметим сначала, что единицы энергии имеют размерность массы, умноженной на квадрат скорости (легкий способ запомнить это — вспомнить нерелятивистское выражение для кинетической энергии $(1/2)mv^2$). Следовательно, в правой части уравнения требуется множитель c^2 . Вдобавок скорость следует заменить на v/c , что приводит к

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (3.38)$$

Формула (3.38) — это общее выражение для энергии частицы с массой m через ее скорость. В этом смысле оно похоже на нерелятивистскую формулу кинетической энергии. Поэтому следует ожидать, что при скорости много меньше c оно упростится до нерелятивистской формулы. Проверить это можно, воспользовавшись аппроксимацией (3.19). Для малых v/c мы имеем:

$$E = mc^2 + \frac{mv^2}{2}. \quad (3.39)$$

Второй член в правой части (3.39) — это нерелятивистская кинетическая энергия, но что собой представляет первый? Конечно, это знаменитое, возможно, самое знаменитое во всей физике выражение: mc^2 . Как объяснить его присутствие в выражении для энергии?

И до появления теории относительности было понятно, что энергия объекта не ограничивается его кинетической энергией. Кинетическая энергия — это энергия движения объекта, но объект может содержать энергию и в состоянии покоя. Эта энергия мыслилась как необходимая для построения системы. Для этого вида энергии характерно, что она не зависит от скорости объекта. Можно назвать ее «энергией покоя». Уравнение (3.39),

вытекающее из эйнштейновской теории относительности, дает нам точное значение энергии покоя любого объекта. Из него следует, что при нулевой скорости объекта его энергия равна

$$E = mc^2. \quad (3.40)$$

Я уверен, что любой из вас видит эту формулу не в первый раз, но, возможно, вы впервые видите, как она выводится из основных физических принципов. Насколько общей она является? Ответ: степень ее общности очень высока. Не имеет значения, является ли объект элементарной частицей, куском мыла, звездой или черной дырой. В системе отсчета, в которой объект покоится, его энергия равна произведению его массы на квадрат скорости света.

Терминология: масса и масса покоя

Термин «*масса покоя*» представляет собой анахронизм, хотя его еще используют во многих университетских учебниках. Однако я не знаю ни одного работающего физика, кто продолжал бы пользоваться этим выражением. Общепринятый новый подход состоит в том, что слово «*масса*» и значит то, что раньше значил термин «*масса покоя*».¹ Масса частицы — это параметр, который связан с ней и характеризует саму эту частицу, а не ее движение. Если вы ищете в справочнике значение массы электрона, вы не найдете величины, зависящей от того, движется электрон или покоится. Вы получите число, которое характеризует электрон в состоянии покоя. А как же та величина, которую раньше называли массой и которая все же зависела от движения частицы? Теперь мы называем ее *энергией*, или, возможно, энергией, деленной на квадрат скорости света. Энергия характеризует движущуюся частицу. Энергия покоя и есть то, что называется массой. А термина «*масса покоя*» мы теперь избегаем.

¹ Я думаю, что этот «новый подход» стал общепринятым лет сорок-пятьдесят тому назад.

3.5.2. Безмассовые частицы

До сих пор мы обсуждали свойства массивных частиц — частиц, у которых энергия покоя не равна нулю. Но массой обладают не все частицы — например, ее нет у фотона. Выражение «частица без массы» звучит немного странно. Уравнение (3.37) говорит нам, что энергия равна $m/\sqrt{1-v^2}$. Но чему равна скорость безмассовой частицы? Единице! Что-то не так! С другой стороны, может, ничего страшного и не случилось: ведь в нуль обратились обе части дроби, и числитель, и знаменатель. Это обстоятельство само по себе не дает нам ответа, но, по крайней мере, у нас есть какое-то пространство для маневра.

В нашей головоломке с делением нуля на нуль все же имеется некое рациональное зерно: она показывает, что не следует говорить об энергии безмассовой частицы в терминах ее скорости, так как все безмассовые частицы движутся *с одной и той же* скоростью. А могут ли они в этом случае иметь различную энергию? Ответ на этот вопрос положительный, и основывается он именно на том, что результат деления нуля на нуль не определен.

Но если попытка различить безмассовые частицы по их скоростям ведет в тупик, что еще можно сделать? Мы можем записать их энергию в виде функции *импульса*.¹ Вообще-то мы довольно часто делаем это в дорелятивистской механике, когда записываем выражение для кинетической энергии частицы. Ведь формулу

$$E = \frac{1}{2}mv^2$$

можно записать и другим способом:

$$E = \frac{p^2}{2m}.$$

¹ В действительности этот подход применим к любой частице.

Чтобы найти релятивистское выражение энергии через импульс, можно прибегнуть к простому трюку: воспользоваться тем, что U^0 , U^x , U^y и U^z не являются вполне независимыми. В разделе 3.2 мы вывели их связь. Раскрывая скобки в уравнении (3.10) и полагая $c = 1$, можно записать:

$$(U^0)^2 - (U^x)^2 - (U^y)^2 - (U^z)^2 = 1.$$

Составляющие импульса те же, что и составляющие 4-скорости, отличаются только множителем массы, и мы можем умножить предыдущее уравнение на m^2 , чтобы получить

$$m^2(U^0)^2 - m^2(U^x)^2 - m^2(U^y)^2 - m^2(U^z)^2 = m^2. \quad (3.41)$$

В первом члене этого выражения мы узнаем $(P^0)^2$. Но P^0 — это просто энергия, а остальные три члена в левой части (3.41) — это x -, y - и z -компоненты 4-импульса. Другими словами, (3.41) можно переписать в виде

$$E^2 - P^2 = m^2. \quad (3.42)$$

Мы видим, что уравнения (3.10) и (3.42) эквивалентны друг другу. Члены уравнения (3.10) — компоненты 4-скорости, тогда как члены (3.42) — соответствующие компоненты 4-импульса. Решив уравнение (3.42) относительно E , получим:

$$E = \sqrt{P^2 + m^2}. \quad (3.43)$$

Теперь вернем в это уравнение скорость света и посмотрим, как оно будет выглядеть в обычных единицах. В качестве упражнения вы можете сделать это сами и убедиться в том, что уравнение для энергии приобретет вид

$$E = \sqrt{P^2 c^2 + m^2 c^4}. \quad (3.44)$$

Итак, мы пришли к следующим результатам. Уравнение (3.44) выражает энергию через импульс и массу. Оно описывает все

частицы: как с нулевой, так и с ненулевой массой. Из этой формулы *непосредственно* получается предельный переход при стремлении массы к нулю. Мы столкнулись с трудностями при описании энергии фотона в терминах его скорости, но эти трудности полностью исчезают, когда энергия выражается в терминах импульса. Что следует из уравнения (3.44) для частиц с нулевой массой, таких как фотоны? При $m = 0$ второй член подкоренного выражения обращается в нуль, и квадратный корень из $P^2 c^2$ — это просто произведение модуля P и скорости света c . Почему именно *модуль* P ? Левая часть уравнения — E , действительное число. Значит, и правая часть тоже должна быть действительным числом. Суммируя все эти соображения, мы приходим к простой формуле:

$$E = c|P|. \quad (3.45)$$

Энергия безмассовой частицы есть модуль вектора ее импульса, но для сохранения размерности мы доумножаем его на скорость света. Формула (3.45) верна в отношении фотонов. Она приближенно соблюдается для нейтрино, масса которых очень мала. Она неверна для частиц, движущихся значительно медленнее скорости света.

3.5.3. Пример: распад позитрония

Теперь, когда мы знаем, как выразить энергию безмассовой частицы, мы можем решить одну простую, но интересную задачу. Позитроний — это частица, которая состоит из электрона и позитрона, обращающихся друг вокруг друга. Позитроний электрически нейтрален и его масса приблизительно равна массе двух электронов.¹

¹ Интересно отметить, что масса позитрония чуть-чуть *меньше* суммы масс составляющих его электрона и позитрона. Почему? Потому, что он ограничен. Он обладает некоторой кинетической энергией, соответствующей движению составляющих его частиц, и это увеличивает его массу. Но он обладает еще большей отрицательной потенциальной энергией, которая перевешивает положительную кинетическую энергию.

Позитрон — античастица электрона, и если вы на некоторое время предоставите позитроний самому себе, составляющие его античастицы аннигилируют, производя два фотона. Позитроний исчезнет, а фотоны разлетятся в противоположных направлениях. Другими словами, позитроний, нейтральная частица с ненулевой массой, превратится в чистую электромагнитную энергию. Можем ли мы вычислить энергию и импульс этих двух фотонов?

В дорелятивистской физике эта задача не имела бы никакого смысла. До появления теории относительности сумма масс частиц считалась неизменной. Да, происходят химические реакции, в ходе которых одни вещества превращаются в другие, и всё такое. Но если вы взвесите все составляющие этой системы — то есть определите их массу, — то сумма их «обычных» масс всегда останется неизменной. Однако когда позитроний распался на фотоны, сумма «обычных» масс частиц *изменилась*. Частицы, составляющие позитроний, имеют конечную ненулевую массу, а два фотона, в которые эти частицы превращаются, — безмассовые. Истина заключается *не* в том, что сумма всех масс сохраняется, а в том, что сохраняются энергия и импульс. Рассмотрим сначала сохранение импульса.

Допустим, позитроний покоится в вашей системе отсчета.¹ Его импульс в этой системе по определению равен нулю. Далее, атом позитрония распадается на два фотона. Наше первое заключение состоит в том, что эти фотоны должны разлетаться в строго противоположных направлениях друг от друга с равными и противоположно направленными импульсами. Если они не полетят в противоположных направлениях, то ясно, что их полный импульс не будет равен нулю. А конечный импульс должен быть нулевым, потому что нулевым был начальный им-

¹ Если это не так, начните двигаться и окажитесь в такой системе отсчета, в которой он *будет* покоиться.

пульс. Это значит, что фотон, летящий вправо, имеет импульс P , а фотон, летящий влево — импульс $-P$.¹

Теперь мы можем применить принцип сохранения энергии. Возьмем наш атом позитрония, положим на весы и измерим его массу. В неподвижной системе отсчета его энергия равна mc^2 . Так как энергия сохраняется, эта величина должна равняться сумме энергий двух фотонов. Каждый из этих фотонов должен обладать той же энергией, что и другой, потому что их импульсы имеют одно и то же абсолютное значение. Согласно (3.45), мы можем приравнять эту энергию к mc^2 :

$$mc^2 = 2c|P|.$$

Решая это уравнение относительно $|P|$, находим, что

$$|P| = \frac{mc}{2}.$$

Каждый из фотонов имеет импульс, равный по модулю $mc/2$.

Это и есть механизм, посредством которого масса превращается в энергию. Конечно, масса *всегда* была энергией, но в «застывшей» форме — энергией покоя. Когда атом позитрония распадается, образуется два летящих в разные стороны фотона. Эти фотоны впоследствии с чем-то столкнутся. Они могут нагреть атмосферу, могут быть поглощены электронами, породить электрические токи и т. д. Сохраняется именно общая энергия, а не индивидуальные массы частиц.

¹ Вообще-то мы не знаем, в каких направлениях разлетятся фотоны — знаем только, что в противоположных. Согласно законам квантовой механики, прямая, соединяющая эти два фотона, будет ориентирована случайным образом. Однако ничто не мешает так ориентировать ось x нашей системы отсчета, чтобы она совпала с «избранным» фотонами направлением движения.

ЛЕКЦИЯ 4

Классическая теория поля

Идут игры бейсбольного чемпионата, и кабачок «У Германа» набит болельщиками. Все следят за игрой. Подзапоздавший Арт плюхается на табурет рядом с Лени.

Арт: Что это за тип там в конце поля?

Ленни: «Что» — это в квантовом поле, а в обычном — «кто».

Арт: Перестань, Лени, я же только спросил. Так кто там в квантовом поле?

Ленни: «Кто» — это в обычном поле.

Арт: Так я об этом и спрашиваю. Ладно, попробуем иначе. Как насчет электрического поля?

Ленни: Ты хочешь знать, как зовут того типа в электрическом поле?

Арт: Конечно.

Ленни: Конечно? Нет, конечно — в магнитном поле.

До сих пор мы рассматривали только релятивистское движение частиц. В этой лекции мы перейдем к теории поля — не квантовой, но классической релятивистской теории поля. У нее будут некоторые отдельные точки соприкосновения с квантовой механикой, и я обязательно их упомяну. Но в основном мы все же будем придерживаться классической теории поля.

Теория поля, с которой вы, вероятно, лучше всего знакомы, — это теория электрического и магнитного полей. Эти поля векторные. Они характеризуются и направлением в пространстве, и численным значением. Мы начнем с немного более простой вещи: со скалярного поля. Как вы знаете, скаляры — это величины, обладающие численным значением, но не направлением. Поле, которое мы сейчас рассмотрим, похоже на одно скалярное поле, играющее важную роль в физике частиц. Когда мы начнем о нем говорить, вы, возможно, догадаетесь, что я имею в виду.

4.1. Поля и пространство-время

Начнем с пространства-времени. Пространство-время всегда имеет *одну* временную и несколько пространственных координат. В принципе мы могли бы построить физику с любым количеством временных и пространственных координат. Но в физическом мире, даже в теориях, в которых у пространства-времени может быть десять, одиннадцать, двадцать шесть измерений, временное измерение всегда только одно. Никто не знает, какой логический смысл можно было бы извлечь из большего числа временных измерений.

Обозначим пространственные координаты X^i ; для временной координаты пока примем обозначение t . Не будем забывать, что в теории поля X^i — не степени свободы, а просто обозначения точек пространства. События в пространстве-времени будем обозначать (t, X^i) . Индекс i пробегает столько целых значений, сколько есть пространственных координат.

Неудивительно, что степенями свободы в теории поля являются поля. Поле — измеримая величина, зависящая от положения в пространстве и способная также изменяться со временем. Обычная «бытовая» физика дает нам множество примеров таких величин. Температура атмосферы меняется от места к месту и от одного момента времени к другому. Это выражают в следующей

форме: $T(t, X^i)$. Так как температура определяется лишь одной составляющей — одним числом, она представляет собой *скалярное* поле. Скорость ветра — *векторное* поле, так как у скорости есть направление, которое само по себе может изменяться в пространстве и времени.

Математически мы представляем поле как функцию пространства и времени. Эту функцию мы часто обозначаем греческой буквой ϕ :

$$\phi(t, X^i).$$

В теории поля обычно считается, что пространство-время имеет размерность $(3 + 1)$ — под этим подразумевается, что существует три пространственных и одно временное измерение. В более общих случаях мы могли бы интересоваться изучением полей в пространстве-времени с другим числом пространственных измерений. Если у пространства-времени d пространственных измерений, мы будем называть его $(d + 1)$ -мерным.

4.2. Поля и действие

Как я уже отмечал, принцип наименьшего действия является одним из наиболее фундаментальных принципов физики, который лежит в основе всех известных физических законов. Без него у нас не было бы причин верить в закон сохранения энергии или даже в существование решений наших уравнений. Мы также будем строить наше исследование полей на принципе действия. Принципы действия, которые управляют полями, являются обобщением принципов действия для частиц. Наш план заключается в том, чтобы параллельно рассмотреть принципы действия, которые управляют полями, и принципы действия, управляющие частицами, попутно сравнивая их. Чтобы упростить это сравнение, мы сначала заново сформулируем принцип действия для нерелятивистских частиц на языке полей.

4.2.1. И снова нерелятивистские частицы

Я хочу ненадолго вернуться к теории нерелятивистских частиц — не из интереса к медленно движущимся частицам, а потому, что математика в этом случае имеет некоторое сходство с математическим аппаратом теории полей. Ведь фактически в некотором формальном смысле теория нерелятивистских частиц является простой разновидностью теории поля в мире, в котором пространство-время имеет *ноль* пространственных измерений и, как всегда, одно временное измерение.

Чтобы посмотреть, как эта идея работает, рассмотрим частицу, которая движется вдоль оси x . Обычно мы описываем движение частицы ее траекторией $x(t)$. Однако, ничуть не меняя содержания теории, мы можем изменить *обозначения* и назвать положение частицы ϕ . Вместо $x(t)$ траектория будет описываться функцией $\phi(t)$.

Если бы мы хотели переосмыслить значение символа $\phi(t)$, а именно использовать его для представления скалярного поля, он превратился бы в частный случай функции $\phi(t, X^i)$ — частный случай, в котором пространственные измерения *отсутствуют*. Другими словами, теория частиц в одномерном пространстве имеет ту же математическую структуру, что и теория скалярного поля в нульмерном пространстве. Физики иногда говорят о теории единичной частицы как о $(0 + 1)$ -мерной теории поля, причем единственным измерением является время.

Рисунок 4.1 иллюстрирует движение нерелятивистской частицы. Отметим, что по горизонтальной оси мы откладываем время — просто чтобы подчеркнуть, что t является независимым параметром. По вертикальной оси мы откладываем положение частицы в момент времени t , называя его $\phi(t)$. Кривая $\phi(t)$ представляет историю движения частицы. Она дает положение частицы ϕ на каждый момент времени. Как показывает график, ϕ может быть как отрицательным, так и положительным. Мы охарактеризуем эту траекторию на основе принципа наименьшего действия.

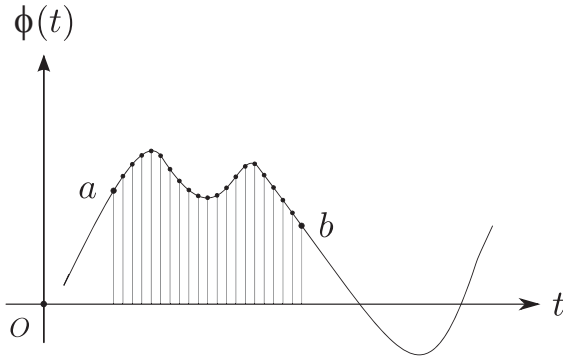


Рис. 4.1. Траектория нерелятивистской частицы

Напомним, что действие определяется как интеграл некоторого лагранжиана \mathcal{L} от начального момента времени a до конечного времени b :

$$\text{Действие} = \int_a^b \mathcal{L} dt.$$

Для нерелятивистских частиц вид этого лагранжиана прост — кинетическая энергия частицы *минус* ее потенциальная энергия. Кинетическая энергия обычно выражается как $\frac{1}{2}mv^2$, но в наших новых обозначениях мы будем записывать скорость как $\dot{\phi}$ или $\frac{d\phi}{dt}$ вместо v . В этих обозначениях кинетическая энергия — это $\frac{1}{2}m\dot{\phi}^2$, или $\frac{1}{2}m\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2$. Мы немного упростим эту запись, положив массу m равной 1. Тогда кинетическая энергия будет равна:

$$\text{Кинетическая энергия} = \frac{1}{2}\left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2.$$

А какова будет потенциальная энергия? В нашем примере потенциальная энергия — это просто функция положения, другими словами, это функция ϕ , которую мы назовем $V(\phi)$. Вычитая $V(\phi)$ из кинетической энергии, получаем лагранжиан:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - V(\phi), \quad (4.1)$$

и интеграл действия приобретает вид:

$$\text{Действие} = \int_a^b \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 - V(\phi) \right] dt. \quad (4.2)$$

Как мы знаем из классической механики, уравнение Эйлера — Лагранжа помогает нам минимизировать интеграл действия и таким образом позволяет получить уравнения движения частицы.¹ Уравнение Эйлера — Лагранжа для нашего примера выглядит так:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi},$$

а наша задача состоит в том, чтобы применить это уравнение к лагранжиану (4.1). Начнем с того, что запишем производную \mathcal{L} по $\left(\frac{d\phi}{dt} \right)$:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{d\phi}{dt} \right)} = \frac{d\phi}{dt}.$$

Далее, согласно уравнению Эйлера — Лагранжа, мы должны взять от этого результата производную по времени:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{d\phi}{dt} \right)} = \frac{d^2 \phi}{dt^2}.$$

Таким образом, мы построили левую часть уравнения Эйлера — Лагранжа.

¹ Для нашего примера достаточно лишь одного уравнения Эйлера — Лагранжа, так как единственными переменными являются ϕ и $\dot{\phi}$.

Займемся теперь правой частью. Снова обращаясь к (4.1), мы находим, что

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = - \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}.$$

И наконец, приравнивая левую и правую части, получаем

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = - \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}. \quad (4.3)$$

Это уравнение должно быть нам знакомо: это просто ньютоновское уравнение движения частицы. В правой его части — сила, в левой — ускорение. Если бы мы не положили массу равной единице, то получили бы просто второй закон Ньютона: $F = ma$.

Уравнения Эйлера — Лагранжа позволяют решить задачу отыскания траектории, по которой частица движется между двумя фиксированными точками a и b . Это решение эквивалентно отысканию траектории наименьшего действия, которая соединяет две фиксированные конечные точки.¹

Но, как вам известно, есть и другой способ рассмотрения этой ситуации. Нарисовав на рис. 4.1 сеть близких вертикальных линий, можно разделить ось времени на множество малых интервалов. И вместо того чтобы представлять действие как интеграл, просто думайте о нем как о сумме членов. От чего эти члены зависят? От значений функции $\phi(t)$ и ее производных в каждый момент времени. Другими словами, полная величина действия является попросту функцией многих значений $\phi(t)$. Как минимизировать функцию ϕ ? Надо продифференцировать ее по ϕ . Именно в этом и состоит суть уравнений Эйлера — Лагранжа. Можно выразиться иначе, сказав, что эти уравнения решают задачу передвижения

¹ Я часто употребляю выражения «*наименьший*» или «*минимум*», но вы хорошо знаете, что на самом деле я имею в виду «*стационарный*»: действие может достигать *либо* максимума, *либо* минимума.

точек траектории до тех пор, пока они не лягут на траекторию, минимизирующую действие.

4.3. Принципы теории поля

До сих пор мы рассматривали теорию поля в мире без пространственных измерений. Основываясь на этом примере, попробуем сделать интуитивные предположения о теории, которая описывала бы мир, более похожий на тот, в котором мы живем, — мир с одним или более чем одним пространственным измерением. При этом будем исходить из того, что теория поля, и, по сути, весь мир подчиняются принципу действия. Стационарность действия — могучий принцип, в котором сжато и зашифровано огромное количество физических законов.

4.3.1. Принцип действия

Определим принцип действия для полей. Для частицы, движущейся в одном измерении (рис. 4.1), мы сначала выбрали две фиксированные конечные точки, a и b , в качестве границ по оси времени. Затем мы рассмотрели все возможные траектории, соединяющие эти две точки, и стали искать среди них кривую, которая минимизирует действие. (Это очень похоже на отыскание кратчайшего пути между двумя точками.) Это и есть способ, которым принцип наименьшего действия говорит нам, как заполнить значениями $\phi(t)$ интервал между граничными точками a и b .

Задачей теории поля является обобщение этой идеи заполнения промежутка между граничными данными. Начнем с пространственно-временной области, которую мы можем визуализировать как четырехмерную «коробку». Чтобы построить ее, возьмем трехмерную пространственную «коробку» — скажем, область пространства внутри некоторого куба — и рассмотрим ее на некотором временном интервале. Так строится четырехмерный

пространственно-временной «бокс». На рис. 4.2 я попытался нарисовать такой, но только с двумя пространственными направлениями.

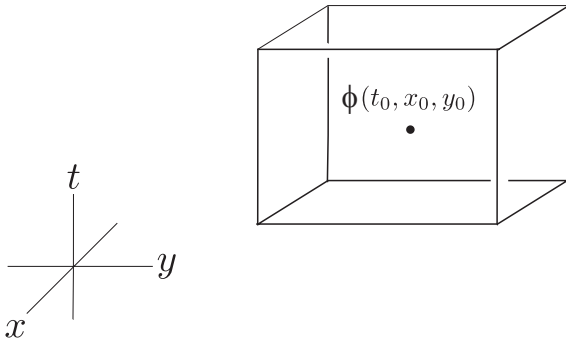


Рис. 4.2. Граница пространственно-временной области для применения принципа наименьшего действия. Показано только два пространственных измерения

Общая задача теории поля может быть сформулирована следующим образом: имея значения ϕ в каждой точке на границе пространственно-временного бокса, определить поле в любой точке внутри бокса. Правила этой игры похожи на те, что были приняты в случае одной частицы. Нам понадобится выражение для действия — и скоро мы его получим, — но пока допустим, что нам известна величина действия для всех конфигураций поля внутри бокса. Принцип наименьшего действия требует от нас, чтобы мы деформировали поле до тех пор, пока не найдем тот частный случай функции $\phi(t, x, y, z)$, при котором действие будет наименьшим.

В случае движения частицы действие строилось сложением малых его порций на каждом бесконечно малом временном отрезке. Тем самым мы получали интеграл по интервалу времени между граничными точками a и b на рис. 4.1. Естественное обобщение этой процедуры в теории поля заключается в том, что действие

конструируется как сумма малых пространственно-временных ячеек — другими словами, как интеграл по пространственно-временному боксу на рис. 4.2:

$$\text{Действие} = \int \mathcal{L} dt dx dy dz,$$

где \mathcal{L} — лагранжиан, который мы все еще не определили. Но в теории относительности мы уже привыкли рассматривать все четыре координаты на единой основе, когда каждая из них является частью пространства-времени. Мы размываем различие между пространством и временем, присваивая координатам одинаковые обозначения. Все они обозначаются как X^μ , где индекс μ пробегает через все четыре координаты. Стало стандартной практикой записывать предыдущий интеграл как

$$\text{Действие} = \int \mathcal{L} d^4x.$$

4.3.2. Стационарное действие для ϕ

Так как в случае поля лагранжиан \mathcal{L} интегрируется как по пространству, так и по времени, его часто называют *плотностью лагранжиана*.¹

От каких переменных зависит \mathcal{L} ? Вернемся на минуту к нерелятивистской частице. Лагранжиан зависит от ее координат и скорости. В используемых нами обозначениях лагранжиан зависит от ϕ и $\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$. Естественное обобщение, основанное на идее пространства-времени Минковского, заключается в том, чтобы \mathcal{L} зависел от ϕ и частных производных ϕ по *всем* координатам. Другими словами, \mathcal{L} зависит от

¹ Это лишь вопрос согласования размерностей. В отличие от случая движения частицы интеграл действия для поля берется по $dx dy dz$, а также и по dt . Чтобы действие для поля выражалось в тех же единицах, что и для частиц, лагранжиан должен иметь размерность энергии, отнесенной к объему. Отсюда и термин *плотность*.

$$\phi, \frac{\partial \phi}{\partial t}, \frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z},$$

и, следовательно, мы можем записать:

$$\text{Действие} = \int \mathcal{L} \left(\phi, \frac{\partial \phi}{\partial X^\mu} \right) d^4x,$$

где индекс μ пробегает временную и все три пространственные координаты. В этом интеграле действия мы не указали прямой зависимости \mathcal{L} от t, x, y или z . Однако в некоторых задачах \mathcal{L} , конечно, может зависеть от этих переменных, так же как лагранжиан для движения частицы может явно зависеть от времени. Для замкнутой системы — системы, в которой энергия и импульс сохраняются, — \mathcal{L} не зависит в явной форме от времени или пространственного положения.

Как и в обычной классической механике, уравнения движения выводятся варьированием ϕ и минимизацией действия. В *Книге I* я показал, что результат процесса варьирования может быть достигнут применением специальной системы уравнений, называемых уравнениями Эйлера — Лагранжа. Для случая движения частицы уравнения Эйлера — Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (4.4)$$

Как изменились бы уравнения Эйлера — Лагранжа для многомерного пространственно-временного случая? Посмотрим внимательно на каждый из членов в левой части. Ясно, что нам необходимо модифицировать уравнение (4.4), чтобы включить в него все четыре направления пространства-времени. Первый член, который уже соответствует временному направлению, становится суммой членов — по одному для каждого направления пространства-времени. Правильный рецепт состоит в замене уравнения (4.4) следующим:

$$\sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial X^{\mu}} \right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (4.5)$$

Первый член этой суммы — это просто

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)},$$

его сходство с первым членом уравнения (4.4) очевидно. Остальные три слагаемых включают в себя аналогичные пространственные производные, которые дополняют выражение и придают ему пространственно-временной характер.

Уравнение (4.5) — это уравнение Эйлера — Лагранжа для одночного скалярного поля. Как мы впоследствии увидим, такие уравнения тесно связаны с волновыми уравнениями, которые описывают волнообразные осцилляции ϕ .

Как и в механике частиц, степеней свободы может быть более одной. В теории поля это означало бы, что полей больше одного. Допустим в явной форме, что имеется два поля, ϕ и χ . Действие будет зависеть от обоих полей и от их производных:

$$\phi, \frac{\partial \phi}{\partial X^{\mu}}, \\ \chi, \frac{\partial \chi}{\partial X^{\mu}}.$$

Если поля два, для каждого из них будет свое уравнение Эйлера — Лагранжа:

$$\sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial X^{\mu}} \right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0, \\ \sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \chi}{\partial X^{\mu}} \right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \chi} = 0. \quad (4.6)$$

В более общем случае, если имеется несколько полей, уравнение Эйлера — Лагранжа существует для каждого из них.

Между прочим, хоть мы и рассматриваем данный случай как пример *скалярного* поля, мы до сих пор ничего не сказали о том, на каком основании *требуется*, чтобы величина ϕ была скаляром. Единственным намеком на скалярный характер ϕ является тот факт, что мы имеем дело только с одной компонентой. Векторное поле имело бы добавочные компоненты, и каждая новая компонента порождала бы добавочное уравнение Эйлера — Лагранжа.

4.3.3. Еще об уравнениях Эйлера — Лагранжа

Лагранжиан нерелятивистской частицы в формуле (4.1) содержит член, соответствующий кинетической энергии, пропорциональный

$$\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2,$$

и член, соответствующий потенциальной энергии,

$$-V(\phi).$$

Можно предположить, что обобщение для случая теории поля будет выглядеть похожим образом, но член для кинетической энергии будет включать как пространственные, так и временные производные:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] - V(\phi).$$

Однако в этой догадке есть кое-что очевидно ошибочное: пространство и время входят в уравнение совершенно одинаковым образом. Даже в теории относительности время не полностью симметрично пространству, да и ежедневный опыт говорит нам, что они различаются. Теория относительности дает нам намек,

который состоит в том, что в выражение для собственного времени пространство и время входят с разными знаками:

$$d\tau^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2.$$

Позже мы увидим, что производные $\frac{\partial\phi}{\partial X^\mu}$ образуют компоненты 4-вектора и что выражение

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 = \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2$$

задает лоренц-инвариантную величину. Это подсказывает нам заменить сумму квадратов (или производных) разностью квадратов. Впоследствии, вернувшись к рассмотрению лоренц-инвариантности, мы увидим, почему это имеет смысл. Итак, примем модифицированный лагранжиан

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)^2 \right] - V(\phi) \quad (4.7)$$

за прототип для нашей теории поля. Позже мы построим другие теории на основе лагранжианов, подобных этому.

Функция $V(\phi)$ называется *потенциалом поля*. Она аналогична потенциальной энергии частицы. Точнее, это плотность энергии (энергия на единицу объема) в каждой точке пространства, которая зависит от значения поля в этой точке. Функция $V(\phi)$ зависит от контекста, и по крайней мере в одном важном случае выводится из эксперимента. Этот случай мы обсудим в разделе 4.5.1. Пока же будем считать, что $V(\phi)$ может быть любого вида функцией ϕ .

Возьмем этот лагранжиан и выведем из него шаг за шагом уравнения движения. Будем при этом строго руководствоваться уравнением Эйлера — Лагранжа (4.5). Позволим индексу μ в этом уравнении принимать значения 0, 1, 2 и 3. Каждое из этих

значений индекса порождает отдельный член в результирующем дифференциальном уравнении поля. Вот как это получается.

Шаг 1. Начнем с того, что положим индекс μ равным нулю. Другими словами, X^μ вначале принимает значение X^0 , что соответствует временной координате. Беря производную \mathcal{L} по $\frac{\partial\phi}{\partial t}$, получаем простой результат:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)} = \frac{\partial\phi}{\partial t}.$$

Согласно (4.5), мы теперь должны взять еще одну производную:

$$\frac{\partial}{\partial X^0} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)} = \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}.$$

Этот член, $\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}$, аналогичен ускорению частицы.

Шаг 2. Далее, положим индекс μ равным 1. Теперь X^μ превращается в X^1 , то есть просто в координату x . Беря производную \mathcal{L} по $\frac{\partial\phi}{\partial x}$, получаем

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)} = -\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

и

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)} = \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial\phi}{\partial x} \right) = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}.$$

Полагая μ равным 2 и 3, получаем аналогичные результаты для координат y и z соответственно.

Шаг 3. Перепишем уравнение (4.5), используя результаты предыдущих двух шагов:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (4.8)$$

Как обычно, если мы хотим использовать общепринятые единицы измерения, необходимо восстановить множитель c . Это легко сделать, после чего уравнение движения приобретает вид

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \frac{\partial V}{\partial \phi} = 0. \quad (4.9)$$

4.3.4. Волны и волновые уравнения

Из всех явлений, описываемых классической теорией поля, наиболее часто встречающимся и легким для понимания является распространение волн. Звуковые волны, световые волны, волны на воде, волны на вибрирующей гитарной струне — все они описываются сходными уравнениями, которые, что неудивительно, называются волновыми. Эта связь между теорией поля и волновым движением — одна из наиболее важных в физике. Пора ее рассмотреть.

Уравнение (4.9) является обобщением ньютоновского уравнения движения (4.3):

$$\frac{d^2 \phi}{dt^2} = - \frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}$$

на случай полей. Член $\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi}$ соответствует некой силе, действующей на поле и удаляющей его от состояния естественного невозмущенного движения. Для частицы невозмущенным движением является равномерное прямолинейное. Для полей невозмущенному движению соответствует распространение волны наподобие звуковой или электромагнитной. Чтобы убедиться в этом, внесем в (4.9) два упрощения. Во-первых, избавимся от силового члена, положив $V(\phi) = 0$. Во-вторых, вместо того чтобы рассматривать три измерения пространства, ограничимся

одним пространственным направлением x . Уравнение (4.9) теперь принимает значительно более простой вид (1+1)-мерного волнового уравнения:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0. \quad (4.10)$$

Я покажу вам целое семейство решений этого уравнения. Рассмотрим любую функцию комбинации $(x + ct)$. Мы будем обозначать такую функцию $F(x + ct)$. Теперь рассмотрим ее производные по x и t . Легко видеть, что эти производные удовлетворяют условию

$$\frac{\partial F(x + ct)}{\partial t} = c \frac{\partial F(x + ct)}{\partial x}.$$

Применив то же самое правило во второй раз, получим

$$\frac{\partial^2 F(x + ct)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 F(x + ct)}{\partial x^2},$$

или

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 F(x + ct)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 F(x + ct)}{\partial x^2} = 0. \quad (4.11)$$

Уравнение (4.11) — не что иное, как волновое уравнение (4.10) для функции F . Мы нашли большой класс решений волнового уравнения. Таким решением является любая функция комбинации $(x + ct)$.

Каковы свойства функции вида $F(x + ct)$? В момент времени $t = 0$ это просто функция $F(x)$. С течением времени эта функция меняется, но несложным образом: она как целое сдвигается влево (в отрицательном направлении по x) со скоростью c . Возьмем конкретный пример, в котором F (которую мы теперь отождествляем с ϕ) — это синусоидальная функция с волновым числом k :

$$\phi(t, x) = \sin k(x + ct).$$

Это движущаяся влево со скоростью c синусоидальная волна. Существуют также косинусоидальные решения, волновые пакеты (цуги волн) и импульсы. Если они как целое движутся влево со скоростью c , все они будут решениями волнового уравнения (4.10).

А как же волны, движущиеся вправо? Описываются ли и они уравнением (4.10)? Ответ: да, описываются. Все, что нам надо в этом случае сделать, чтобы изменить $F(x + ct)$ на волну, бегущую вправо, — это заменить $x + ct$ на $x - ct$. Предлагаю вам самим показать, что любая функция вида $F(x - ct)$ соответствует волне, движущейся как целое вправо, и что она также удовлетворяет уравнению (4.10).

4.4. Релятивистские поля

При построении нашей теории частиц, в дополнение к принципу стационарности действия мы использовали еще два принципа. Во-первых, действие всегда является интегралом. Для частиц это интеграл вдоль траектории. Мы уже имели дело с этим вопросом в теории поля, когда переопределяли действие как интеграл по пространству-времени. Во-вторых, необходимо, чтобы действие было инвариантом; оно должно конструироваться из других величин таким образом, чтобы выражение имело в точности одну и ту же форму во всех системах отсчета.

Как мы смогли добиться этого в случае частицы? Мы строили действие, нарезая ее траекторию на множество небольших отрезков, вычисляя действие на каждом из них и затем суммируя все эти малые составляющие действия. Затем мы переходили в этом процессе к пределу, когда длина каждого отрезка стремилась к нулю, а сумма представляла собой интеграл. Ключевой момент здесь вот какой: когда мы определяли действие для одного из отрезков, мы выбирали значение, которое было инвариантом, — собственное время вдоль траектории. Так как все наблюдатели

согласны относительно значения собственного времени для каждого малого отрезка, они согласятся также и со значением, которое получается в качестве их суммы. В результате уравнения движения, которые выводятся из принципа стационарности действия, имеют строго одну и ту же форму во всех системах отсчета. Законы механики частиц инвариантны. В разделе 4.3.3 я уже намекал, как сделать то же самое для полей, но сначала нам надо серьезно рассмотреть лоренц-инвариантность в теории поля.

Нам понадобится понять, как формировать инвариантные величины из полей и затем использовать эти величины для построения интегралов действия, которые также будут инвариантами. Чтобы сделать это, нам необходимо ясно представлять себе поведение полей при преобразованиях.

4.4.1. Поведение полей при преобразованиях

Вернемся к Арту, стоящему на железнодорожной платформе, и Ленни, проезжающему мимо него в поезде. Оба они видят одно и то же событие — Арт обозначает его (t, x, y, z) , а Ленни — (t', x', y', z') . Имеющиеся у них специальные детекторы регистрируют численные значения некоторого поля ϕ . Простейший возможный вид поля — это такой, для которого они оба получают в точности один и тот же результат своего измерения. Если мы назовем значение поля, которое измеряет Арт, $\phi(t, x, y, z)$, а значение, измеренное Ленни, $\phi'(t', x', y', z')$, тогда простейшим законом преобразования будет

$$\phi'(t', x', y', z') = \phi(t, x, y, z). \quad (4.12)$$

Другими словами, в любой конкретной точке пространства-времени Арт и Ленни (а с ними и все остальные) согласятся, что поле имеет значение ϕ .

Поле с таким свойством называется *скалярным полем*. Идея скалярного поля проиллюстрирована на рис. 4.3. Важно пони-

мать, что координаты (t', x') и (t, x) относятся к одной и той же точке в пространстве-времени. Это со всей ясностью показано на рис. 4.3. Нештрихованные координаты представляют пространственно-временное положение точки в системе отсчета Арта. Штрихованные оси соответствуют пространственно-временным положениям в системе Ленни. Обозначением поля $\phi(t, x)$ пользуется Арт; Ленни называет то же самое поле $\phi'(t', x')$, так как он находится в штрихованной системе. Но это одно и то же поле с одним и тем же значением в одной и той же точке пространства-времени. Значение скалярного поля в точке пространства-времени инвариантно.

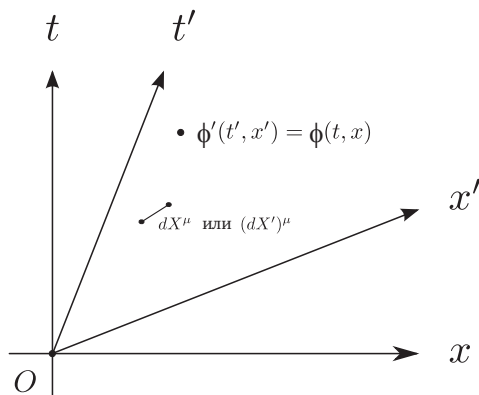


Рис. 4.3. Преобразования. Поля ϕ и ϕ' относятся к одной и той же точке в пространстве-времени. Оба они имеют в этой точке одно и то же значение. Смещения dX^μ и $(dX')^\mu$ относятся к одному и тому же пространственно-временному интервалу, но штрихованные компоненты отличаются от нештрихованных. Они связаны преобразованием Лоренца

Не все поля являются скалярными. Вот пример из обычной нерелятивистской физики: скорость ветра. Это вектор с тремя компонентами. Наблюдатели, оси координат которых ориентированы по-разному, не согласятся принять одни и те же значения этих компонент. Арт и Ленни уж точно не договорятся. В системе

Арта воздух может быть спокойным, а когда Ленни высунется из окна своего вагона, он заметит, что его обдувает сильный ветер.

Перейдем теперь к 4-векторным полям. Хороший пример такого поля я только что привел: скорость ветра. Вот как мы можем определить это поле в системе Арта. В пространственно-временной точке (t, x, y, z) Арт измеряет локальные компоненты скорости молекул воздуха dX^i/dt и наносит их на график. В результате у него получается 3-вектор поля с компонентами

$$V^x(t, x, y, z), \quad V^y(t, x, y, z), \quad V^z(t, x, y, z).$$

Но вы могли уже догадаться, что в релятивистской теории мы должны представлять скорости молекул в релятивистской форме: не как $V^i = dX^i/dt$, а как $U^\mu = dX^\mu/d\tau$. Фиксируя распределение релятивистских скоростей ветра

$$U^\mu(t, x, y, z)$$

или

$$U^\mu(X^0, X^1, X^2, X^3),$$

мы получаем 4-векторное поле.

Получив от Арта описание релятивистской скорости ветра, можно спросить: а каковы ее компоненты в системе отсчета Ленни? Так как 4-скорость является 4-вектором, ответ на этот вопрос вытекает из преобразований Лоренца, которые мы написали ранее в (2.15):

$$(U')^0 = \frac{U^0 - vU^1}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$(U')^1 = \frac{U^1 - vU^0}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$(U')^2 = U^2,$$

$$(U')^3 = U^3. \quad (4.13)$$

Я не включил в уравнение (4.13) зависимость от координат, так как это сделало бы его слишком запутанным, но общее правило простое: величины U в правой части являются функциями (t, x, y, z) , а U^0 в правой части — функциями (t', x', y', z') , но оба комплекта координат относятся к одной и той же пространственно-временной точке.

Рассмотрим еще один комплект из четырех величин, который назовем пространственно-временным градиентом скалярного поля ϕ . Его компоненты — это производные ϕ . Мы будем использовать сокращенную форму записи $\partial_\mu \phi$, определяемую формулой

$$\partial_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial X^\mu}. \quad (4.14)$$

Например,

$$\partial_1 \phi = \frac{\partial \phi}{\partial X^1}.$$

В несколько измененной форме можно записать

$$\partial_t \phi = \frac{\partial \phi}{\partial t},$$

$$\partial_x \phi = \frac{\partial \phi}{\partial x},$$

$$\partial_y \phi = \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

$$\partial_z \phi = \frac{\partial \phi}{\partial z}.$$

Мы могли бы предположить, что ϕ_μ является 4-вектором, и преобразовать эту величину тем же способом, что и U^μ ; это было бы ошибкой, хотя и не слишком большой.

4.4.2. Математическая интерлюдия: ковариантные компоненты

Сейчас я хочу сделать паузу, чтобы остановиться на некоторых математических деталях преобразований одних координат в другие. Представим себе, что имеется пространство, описываемое двумя наборами координат, X^μ и $(X')^\mu$. Это могут быть пространственно-временные координаты, которыми пользуются Арт и Ленни, но не обязательно они. Рассмотрим также бесконечно малый интервал dX^μ или $d(X')^\mu$. Из обычного анализа функций многих переменных вытекает следующее соотношение между этими двумя наборами дифференциалов:

$$d(X')^\mu = \sum_{\nu} \frac{\partial (X')^\mu}{\partial X^\nu} dX^\nu. \quad (4.15)$$

Эйнштейн многие уравнения записывал в этой форме. Через некоторое время он заметил одну повторяющуюся закономерность: когда бы ему ни встречался повторяющийся индекс в отдельно взятом выражении — таким повторяющимся индексом является, например, ν в правой части этого уравнения, — по нему всегда выполнялось суммирование. В одной из своих статей по общей теории относительности, через несколько страниц после начала, Эйнштейн, по-видимому, устал писать знак суммы и просто заявил, что начиная с этого места, если у некоторого выражения имеется повторяющийся индекс, это будет предполагать суммирование. Данное соглашение получило известность как *правило суммирования Эйнштейна*. Сейчас оно стало настолько общепринятым, что ни одному физика даже не приходит в голову на него ссылаться. Я тоже устал от \sum_{ν} , так что с этих пор мы тоже будем пользоваться умным эйнштейновским правилом, и уравнение (4.15) приобретает форму

$$d(X')^\mu = \frac{\partial (X')^\mu}{\partial X^\nu} dX^\nu. \quad (4.16)$$

Если уравнения, связывающие X и X' , линейны, какими они обычно бывали в соответствии с преобразованиями Лоренца, то частные производные $\frac{\partial(X')^\mu}{\partial X^\nu}$ являются постоянными коэффициентами. Возьмем в качестве примера преобразования Лоренца

$$\begin{aligned}(X')^0 &= \frac{X^0 - vX^1}{\sqrt{1-v^2}}, \\ (X')^1 &= \frac{X^1 - vX^0}{\sqrt{1-v^2}}.\end{aligned}\tag{4.17}$$

Вот список четырех постоянных коэффициентов, которые получились бы из уравнения (4.16):

$$\begin{aligned}\frac{\partial(X')^1}{\partial X^1} &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \\ \frac{\partial(X')^1}{\partial X^0} &= \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}, \\ \frac{\partial(X')^0}{\partial X^1} &= \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}, \\ \frac{\partial(X')^0}{\partial X^0} &= \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.\end{aligned}\tag{4.18}$$

Подставив их в (4.16), получим ожидаемый результат:

$$\begin{aligned}d(X')^0 &= \frac{dX^0}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{v dX^1}{\sqrt{1-v^2}}, \\ d(X')^1 &= \frac{dX^1}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{v dX^0}{\sqrt{1-v^2}}.\end{aligned}$$

Это, разумеется, вполне обычное преобразование Лоренца для компонент 4-вектора.

Попробуем обобщить это упражнение и вывести из него общее правило преобразования 4-векторов. Возвращаясь к уравнению (4.16), заменим компоненты 4-вектора $d(X')^\mu$ и dX^ν на $(A')^\mu$ и A^ν , которые представляют компоненты *любого* 4-вектора A в системах отсчета, связанных преобразованием координат. Тогда (4.16) можно обобщить так:

$$(A')^\mu = \frac{\partial(X')^\mu}{\partial X^\nu} A^\nu, \quad (4.19)$$

где ν — индекс суммирования. Формула (4.19) представляет собой общее правило преобразования компонентов 4-вектора. Для важного частного случая преобразований Лоренца оно приобретает вид

$$\begin{aligned} (A')^0 &= \frac{A^0}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{vA^1}{\sqrt{1-v^2}}, \\ (A')^1 &= \frac{A^1}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{vA^0}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Истинная причина моих действий заключалась не в том, чтобы объяснить, как преобразуется dX^μ или A^μ , а в том, чтобы обеспечить математическую базу для преобразования $\partial_\mu \phi$. Эти математические объекты — всего их четыре — также образуют набор компонент 4-вектора, хотя и несколько отличающегося по типу от dX^μ . Они, очевидно, относятся к системе координат X , но могут быть преобразованы к системе X' .

Основное правило преобразования выводится в математическом анализе: это обобщение на случай многих переменных правила дифференцирования сложной функции или так называемого цепного правила для производных. Напомню о том, что такое обычное цепное правило. Пусть $\phi(x)$ — функция координат X , и пусть штрихованные координаты X' тоже являются функцией X . Тогда производная ϕ по X' , согласно цепному правилу, будет

$$\frac{\partial \phi}{\partial X'} = \frac{\partial X}{\partial X'} \frac{\partial \phi}{\partial X}.$$

Обобщение на случай многих переменных включает в себя поле ϕ , зависящее от нескольких независимых координат X^μ и от второго набора координат $(X')^\nu$. Обобщенное цепное правило дает

$$\frac{\partial \phi}{\partial (X')^\nu} = \sum_\mu \frac{\partial X^\mu}{\partial (X')^\nu} \frac{\partial \phi}{\partial X^\mu}$$

или, если воспользоваться правилом суммирования и сокращенной формой записи из формулы (4.14),

$$\partial'_\nu \phi = \frac{\partial X^\mu}{\partial (X')^\nu} \partial_\mu \phi. \quad (4.21)$$

Сделаем еще более сильное обобщение и заменим $\partial_\mu \phi$ на A_μ , так (4.21) превратится в

$$A'_\nu = \frac{\partial X^\mu}{\partial (X')^\nu} A_\mu. \quad (4.22)$$

Теперь сравним (4.19) и (4.22). Для удобства сравнения я выпишу их еще раз — сначала (4.19), а потом (4.22):

$$(A')^\mu = \frac{\partial (X')^\mu}{\partial X^\nu} A^\nu,$$

$$A'_\nu = \frac{\partial X^\mu}{\partial (X')^\nu} A_\mu.$$

Между ними заметны два различия. Первое заключается в том, что в уравнении (4.19) греческие индексы при A являются верхними, в то время как в (4.22) они нижние. Это выглядит несущественным, но на деле важно. Второе отличие в коэффициентах: в уравнении (4.19) они являются производными X' по X , а в (4.22) — производными X по X' .

Очевидно, что существует два различных вида 4-векторов, которые преобразуются по-разному: одни с верхними, а другие с нижними индексами. Они называются *контравариантными* (с верхними индексами) и *ковариантными* (с нижними индексами) *компонентами*. Но так как я их вечно путаю, я просто называю их верхними и нижними 4-векторами. Итак, 4-вектор dX^μ — это контравариантный, или верхний, 4-вектор, а пространственно-временной градиент $\partial_\mu\phi$ — ковариантный, или нижний, 4-вектор.

Вернемся к преобразованиям Лоренца. В (4.18) я уже записал коэффициенты для преобразования верхних 4-векторов. Приведем их здесь еще раз:

$$\frac{\partial(X')^1}{\partial X^1} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$\frac{\partial(X')^1}{\partial X^0} = \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$\frac{\partial(X')^0}{\partial X^1} = \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$\frac{\partial(X')^0}{\partial X^0} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Можно составить аналогичный список коэффициентов в уравнении (4.22) для нижних 4-векторов. На это не понадобится много времени: мы можем получить их, просто меняя местами штрихованные и нештрихованные координаты, что для преобразований Лоренца попросту означает поменять местами движущуюся и неподвижную системы отсчета. Это совсем уж нетрудно, так как для этого требуется только изменить знак скорости (не забывайте, что если Ленни движется в системе отсчета Арта со скоростью v , то Арт движется в системе отсчета Ленни со скоростью $-v$). Все, что нам необходимо сделать — это поменять

местами штрихованные и нештрихованные координаты с одно-временной заменой знака v на противоположный.

$$\frac{\partial X^1}{\partial (X')^1} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$\frac{\partial X^1}{\partial (X')^0} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$\frac{\partial X^0}{\partial (X')^1} = \frac{v}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$\frac{\partial X^0}{\partial (X')^0} = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Итак, вот правила преобразования компонентов ковариантных (нижних) 4-векторов:

$$\begin{aligned} (A')_0 &= \frac{A_0}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{vA_1}{\sqrt{1-v^2}}, \\ (A')_1 &= \frac{A_1}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{vA_0}{\sqrt{1-v^2}}. \end{aligned} \quad (4.23)$$

Мы уже видели такие примеры, как смещение от начала координат X^μ . Дифференциальное смещение между соседними точками dX^μ также является 4-вектором. При умножении 4-вектора на скаляр (то есть на инвариант) в результате тоже получится 4-вектор — ведь инварианты полностью пассивны по отношению к преобразованиям. Мы уже видели, что собственное время $d\tau$ инвариантно, а следовательно, и величина $dX^\mu/d\tau$, которую мы называем 4-скоростью, тоже является 4-вектором:

$$U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau}.$$

Что мы в действительности имеем в виду, когда говорим, что U^μ является 4-вектором? Мы подразумеваем под этим, что по-

ведение этой величины в других системах отсчета определяется преобразованиями Лоренца. Вспомним вид преобразований Лоренца для координат в двух системах отсчета, относительная скорость которых вдоль оси x равна v :

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}},$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}},$$

$$y' = y,$$

$$z' = z.$$

Если комплект из четырех величин (состоящий из одной временной и трех пространственных компонент) преобразуется таким образом, мы называем его 4-вектором. Как вы знаете, дифференциальные смещения также обладают этим свойством:

$$dt' = \frac{dt - vdx}{\sqrt{1 - v^2}},$$

$$dx' = \frac{dx - vdt}{\sqrt{1 - v^2}},$$

$$dy' = dy,$$

$$dz' = dz.$$

В табл. 4.1 суммированы свойства скаляров и 4-векторов в отношении преобразований координат. Мы пользуемся немного абстрактным обозначением A^μ для произвольного 4-вектора. A^0 — временная компонента, а каждая из остальных компонент соответствует некоторому направлению в пространстве.

Примером поля с такими свойствами может быть жидкость, заполняющая все пространство-время. Каждая точка этой жидкости обладает 4-скоростью и обычной 3-скоростью. Мы

обозначим 4-скорость $U^\mu(t, x)$. Если жидкость течет, ее скорость может быть различной в различных точках. 4-скорость такой жидкости может также рассматриваться как поле. Так как это 4-скорость, она автоматически является 4-вектором и преобразуется точно так же, как наш прототип 4-вектора A^μ . Значения компонент U в вашей системе отсчета и в моей будут различаться; они будут связаны уравнениями из табл. 4.1. Существует множество других примеров 4-векторов — мы не станем их здесь перечислять.

Таблица 4.1. Преобразование полей. Греческий индекс μ пробегает значения 0, 1, 2, 3, что соответствует t, x, y, z в обычном $(3 + 1)$ -мерном пространстве-времени. В нерелятивистской физике обычное евклидово расстояние также считается скаляром

Поле	Преобразование	Примеры
Скаляры:	Неизменное значение	Температура
	$\phi'(t', x') = \phi(t, x)$	Собственное время
Векторы:	Преобразования Лоренца	Перемещение: $X^\mu; dX^\mu$
		Любой 4-вектор: A^μ
	$(A')^0 = \frac{A^0 - vA^1}{\sqrt{1 - v^2}}$	
	$(A')^1 = \frac{A^1 - vA^0}{\sqrt{1 - v^2}}$	
	$(A')^2 = A^2$	
	$(A')^3 = A^3$	

Взяв все четыре компоненты 4-вектора, вы можете образовать из них скаляр. Мы уже проделывали это, когда конструировали скаляр $(d\tau)^2$ из 4-вектора dX^μ :

$$(d\tau)^2 = (dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2.$$

Этой же процедуре мы можем следовать для *любого* 4-вектора. Если A^μ — 4-вектор, то величина

$$(A^0)^2 - (A^x)^2 - (A^y)^2 - (A^z)^2$$

является скаляром в точности по тем же причинам. Если известно, что компоненты A^μ преобразуются так же, как t и x , то разность квадратов временной и пространственной компонент не изменится в ходе преобразований Лоренца. Это можно показать при помощи тех же алгебраических выкладок, которые мы проделали в случае с $(d\tau)^2$.

Итак, мы знаем, как образовать скаляр из 4-вектора. Теперь выполним обратное действие, то есть сконструируем 4-вектор из скаляра. Это можно сделать, продифференцировав скаляр по каждой из четырех компонент пространства и времени. Все вместе эти четыре производных образуют 4-вектор. Если у нас есть скаляр ϕ , то величины

$$\frac{\partial \phi}{\partial X^\mu} = \left(\frac{\partial \phi}{\partial X^0}, \frac{\partial \phi}{\partial X^1}, \frac{\partial \phi}{\partial X^2}, \frac{\partial \phi}{\partial X^3} \right)$$

являются компонентами ковариантного, или нижнего, 4-вектора.

4.4.3. Построение релятивистского лагранжиана

Теперь у нас есть полный набор инструментов для построения лагранжианов. Мы знаем, как проводить преобразования и как конструировать скаляры из векторов и других объектов. Как мы построим лагранжиан? Очень просто. Сам лагранжиан — то, что мы суммируем по всем малым участкам с целью получения интеграла действия — должен иметь одно и то же значение во всех системах координат. Другими словами, он должен быть скаляром! Этого вполне достаточно. Берем поле ϕ и рассматриваем все возможные скаляры, которые можно из него образовать. Эти скаляры и будут строительным материалом для нашего лагранжиана.

Рассмотрим несколько примеров. Конечно, в этих примерах сама величина ϕ является скаляром, но скаляром будет и любая функция от ϕ . Если все согласны относительно значения ϕ , то согласие также будет и относительно значений ϕ^2 , $4\phi^3$, $\sin \phi$ и т. д. Любая функция ϕ , например потенциальная энергия $V(\phi)$, является скаляром и, следовательно, кандидатом на включение в лагранжиан. В сущности, мы уже видели множество лагранжианов, в состав которых входит $V(\phi)$.

А какие еще ингредиенты мы могли бы взять? Разумеется, нам нужно включить и производные поля. Без них наша теория поля будет тривиальной и неинтересной. Придется только постараться объединить производные так, чтобы получился скаляр. Но это же просто! Сначала построим из производных 4-вектор

$$\frac{\partial \phi}{\partial X^\mu}.$$

Затем воспользуемся компонентами этого 4-вектора, чтобы сконструировать из них скаляр:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2.$$

Это нетривиальное выражение мы и можем вставить в лагранжиан. Что еще можно взять? Можно, конечно, умножить на числовую постоянную, то есть на любую функцию любого скаляра. Перемножение двух инвариантов дает третий инвариант. Например, выражение

$$\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2 \right] F(\phi)$$

было бы вполне законным лагранжианом. Оно, пожалуй, чересчур сложное, и мы не будем здесь с ним возиться, но это настоящий лоренц-инвариантный лагранжиан. Мы могли бы

выдумать что-нибудь еще более уродливое, например, возвести выражение в квадратных скобках в какую-нибудь степень. Затем мы стали бы возводить производные в более высокие степени. И все эти безобразные выражения тоже были бы вполне законными лагранжианами.

А что, если брать производные высших *порядков*? В принципе, их можно использовать, если превратить в скаляры. Но это вывело бы нас за пределы классической механики, в которой можно пользоваться только функциями координат и их первых производных. Высшие *степени* первых производных приемлемы, но производные высших порядков — нет.

4.4.4. Пользуемся нашим лагранжианом

Несмотря на ограничения, налагаемые классической механикой и требованиями лоренц-инвариантности, мы все еще располагаем огромной свободой в выборе лагранжиана, с которым мы могли бы двигаться дальше. Рассмотрим поближе вот такой вариант:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] - \frac{\mu^2}{2} \phi^2. \quad (4.24)$$

Это, в сущности, то же самое, что и лагранжиан в уравнении (4.7), и теперь вы видите, почему я выбрал именно его для нашего нерелятивистского примера. Новый множитель $\frac{1}{c^2}$ в первом члене нужен просто для того, чтобы вернуться к обычным единицам измерения. Я также заменил общую функцию потенциала $V(\phi)$ явным выражением $-\frac{\mu^2}{2}\phi^2$. Множитель $\frac{1}{2}$ — это лишь условность и не несет никакого физического смысла: это тот же коэффициент $\frac{1}{2}$, который появляется в выражении $\frac{1}{2}mv^2$ для кинетической энергии. Мы вполне могли бы написать mv^2 , и тогда наши массы отличались бы от ньютоновских в два раза.

В лекции 1 мы выяснили, что в общем виде преобразования Лоренца эквивалентны сочетанию пространственных вращений с простыми преобразованиями Лоренца вдоль оси x . Мы показали, что уравнение (4.24) инвариантно относительно простого преобразования Лоренца. Инвариантно ли оно и относительно пространственных вращений? Ответ на этот вопрос положительный, так как пространственная часть (4.24) является суммой квадратов компонентов пространственного вектора. Она ведет себя так же, как и выражение $x^2 + y^2 + z^2$, и, следовательно, инвариантна относительно вращения. Так как лагранжиан в уравнении (4.24) инвариантен не только относительно преобразований Лоренца вдоль оси x , но и относительно пространственных вращений, он инвариантен по отношению к преобразованиям Лоренца в общем виде.

Уравнение (4.24) задает одну из простейших теорий поля.¹ Как и из уравнения (4.7), из него вытекает волновое уравнение. Следуя схеме, какую мы построили в том примере, нетрудно показать, что волновое уравнение, выводимое из (4.24), выглядит так:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \mu^2 \phi = 0. \quad (4.25)$$

Это волновое уравнение особенно простое, потому что оно линейное: поле и его производные появляются в нем только в первой степени. В нем нет членов вроде ϕ^2 или «производной от ϕ , умноженной на ϕ ». Можно получить еще более простой вариант, если положить μ равным нулю:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0. \quad (4.26)$$

¹ Мы могли бы сделать это выражение еще проще, отказавшись от последнего члена $-\frac{\mu^2}{2}\phi^2$.

4.4.5. Классическая теория поля: итоги

Итак, теперь у нас есть процедура построения классической теории поля. Нашим первым примером было скалярное поле, но тот же процесс можно было применить и к векторному или даже к тензорному полю. Начните с самого поля. Далее, найдите все скаляры, которые можно построить, используя само поле и его производные. Перечислив или описав все эти скаляры, стройте лагранжиан из функций этих скаляров, например, как их сумму с коэффициентами. После этого примените уравнения Эйлера — Лагранжа. Это позволит записать уравнения движения, или уравнения поля, описывающие распространение волн, или что-нибудь еще, что должна описывать теория поля. Следующим шагом будет исследование получившегося волнового уравнения.

Классические поля должны быть непрерывными. Поле, которое не является непрерывным, имело бы бесконечные производные, а следовательно, и бесконечное действие. Такое поле обладало бы и бесконечной энергией. Об энергии мы поговорим в следующей лекции.

4.5. Поля и частицы: дегустация

Прежде чем закруглиться, я хочу еще сказать кое-что о связи между частицами и полями.¹ Если бы я выводил правила электродинамики, а не простого скалярного поля, я мог бы рассказать вам, как заряженные частицы взаимодействуют с электромагнитным полем. Мы еще до этого не добрались. Но как может частица взаимодействовать со скалярным полем ϕ ? Как присутствие скалярного поля могло бы повлиять на движение частицы?

¹ Я имею в виду не квантовомеханические взаимосвязи между частицами и полями, а взаимодействие между обычными классическими частицами и классическими полями.

Представим себе лагранжиан частицы, движущейся в присутствии заранее заданного поля. Пусть кто-то решил уравнения движения и мы знаем, что это поле $\phi(t, x)$ является некой конкретной функцией времени и пространства. Теперь представим себе частицу, движущуюся в этом поле. Эта частица может быть определенным образом сопряжена с полем, аналогично тому как заряженная частица связана с электромагнитным полем. Как движется эта частица? Чтобы ответить на этот вопрос, вернемся к рассмотрению механики частиц в присутствии поля. Мы уже записали лагранжиан частицы, он имел вид $-m d\tau$, так как $d\tau$ — это почти единственный возможный инвариант. Интеграл действия был равен:

$$\text{Действие} = -m \int d\tau. \quad (4.27)$$

Для получения правильных нерелятивистских результатов для малых скоростей нам требуется знак «минус», и чтобы параметр m вел себя как нерелятивистская масса. Используя соотношение $d\tau^2 = dt^2 - dx^2$, перепишем этот интеграл в виде

$$\text{Действие} = -m \int \sqrt{dt^2 - dx^2},$$

где dx^2 обозначает все три направления пространства. Затем вынесем за скобки dt^2 , и наш интеграл действия приобретет форму:

$$\text{Действие} = -m \int dt \sqrt{1 - \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}.$$

Заметив, что dx/dt — то же самое, что скорость, можно переписать его в виде

$$\text{Действие} = -m \int dt \sqrt{1 - v^2}.$$

Теперь разложим лагранжиан $-m\sqrt{1-v^2}$ в степенной ряд и найдем, что получившееся выражение полностью совпадает со знакомым нам классическим лагранжианом при малых скоростях. Но этот новый лагранжиан — релятивистский.

Что можно сделать с этим лагранжианом, чтобы позволить частице быть сопряженной с полем? Чтобы поле могло воздействовать на частицу, оно само по себе должно появляться где-то в лагранжиане. Надо ввести его туда лоренц-инвариантным способом. Другими словами, надо сконструировать из поля скаляр. Как мы уже видели, это можно сделать многими способами, но мы попробуем использовать один из наиболее простых вариантов действия:

$$\text{Действие} = -\int [m + \phi(t, x)] d\tau,$$

или

$$\text{Действие} = -\int [m + \phi(t, x)] \sqrt{1 - v^2} dt, \quad (4.28)$$

что соответствует лагранжиану

$$\mathcal{L} = -[m + \phi(t, x)] \sqrt{1 - v^2}. \quad (4.29)$$

Это одна из самых простых возможностей, но есть и много других. Например, в предыдущем лагранжиане вы могли бы заменить $\phi(t, x)$ его квадратом или любой другой функцией $\phi(t, x)$. Мы пока что будем пользоваться этим простым лагранжианом и соответствующим ему интегралом действия (4.28).

Уравнение (4.29) — один из возможных лагранжианов для частицы, движущейся в заранее заданном поле. Мы можем спросить: как частица движется в этом поле? Этот вопрос похож на вопросы о движении частицы в электрическом или магнитном поле. Вы записываете лагранжиан частицы в этом поле и не беспокоитесь о том, каким образом поле там появилось. Просто записываете лагранжиан, а потом переходите к уравнениям Эйлера — Лагранжа. Мы разберем некоторые подробности на этом примере, но прежде чем сделать это, я хочу указать на одну интересную особенность уравнения (4.29).

4.5.1. Тайное поле

Допустим по некоторой причине, что поле $\phi(t, x)$ предпочитает принимать некоторое конкретное постоянное ненулевое значение. Оно как бы «любит» застревать именно на нем. В этом случае $\phi(t, x)$ будет постоянным или примерно постоянным, несмотря на свою формальную зависимость от t и x . Движение частицы в этом случае будет выглядеть в точности так же, как и движение частицы с массой $m + \phi$. Повторю это еще раз: частица с массой m будет вести себя так, как если бы ее масса была бы $m + \phi$. Это простейший пример скалярного поля, которое вызывает сдвиг массы частицы.

В начале этой лекции я упомянул о том, что в природе существует поле, очень напоминающее то, которое мы рассматриваем, и попросил вас угадать, что это за поле. Угадали? Поле, о котором мы говорим, имеет сильное сходство с полем Хиггса. В нашем примере сдвиг величины скалярного поля ведет к сдвигу масс частиц. Наш пример не вполне точно соответствует механизму Хиггса, но тут есть тесная связь. Если исходная масса частицы нулевая и частица сопряжена с полем Хиггса, это сопряжение может привести к тому, что эффективная масса частицы станет ненулевой. Этот сдвиг значений массы и есть примерно то, что имеют в виду, когда говорят, что поле Хиггса наделяет частицы массой. Поле Хиггса входит в уравнения так, *как будто* оно является частью массы.

4.5.2. Некоторые подробности

Мы завершим эту лекцию кратким анализом уравнений Эйлера — Лагранжа для нашего примера скалярного поля. Мы не будем доводить выкладки до конца, так как после нескольких первых шагов они приобретают совершенно неэстетичный вид. Мы просто хотим, чтобы вы, так сказать, продегустировали этот процесс. Для простоты будем действовать так, будто в пространстве есть только одно направление, а частица движется лишь

в направлении оси x . Я повторю здесь наш лагранжиан (4.29) для удобства, заменив в нем переменную v на \dot{x} :

$$\mathcal{L} = -[m + \phi(t, x)]\sqrt{1 - \dot{x}^2}.$$

Первым шагом в применении уравнений Лагранжа будет вычисление частной производной \mathcal{L} по \dot{x} . Вспомним, что при взятии частной производной по некоторой переменной мы временно принимаем все остальные переменные за постоянные. В этом случае мы рассматриваем выражение в квадратных скобках как постоянное, потому что оно в явном виде никак не зависит от \dot{x} . С другой стороны, выражение $\sqrt{1 - \dot{x}^2}$ как раз явно зависит от \dot{x} . Возьмем частную производную от этого выражения:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{[m + \phi(t, x)]\dot{x}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2}}. \quad (4.30)$$

Это уравнение нам знакомо. Мы получили почти точно такой же результат в лекции 3, когда выполняли похожие вычисления, отыскивая импульс релятивистской частицы. Единственное отличие здесь в том, что в квадратных скобках присутствует дополнительный член $\phi(t, x)$. Это обстоятельство подтверждает нашу идею о том, что выражение $[m + \phi(t, x)]$ ведет себя как *масса, зависящая от положения*.

Следующим шагом в работе с уравнениями Эйлера — Лагранжа является дифференцирование уравнения (4.30) по времени. Мы просто отметим эту операцию символически, написав

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} = \frac{d}{dt} \frac{[m + \phi(t, x)]\dot{x}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2}}.$$

Это левая часть уравнения Эйлера — Лагранжа. Посмотрим теперь на его правую часть:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x}.$$

Так как мы дифференцируем по x , то должны спросить, зависит ли \mathcal{L} в явном виде от x . Зависит: ведь $\phi(t, x)$ зависит от x , а ϕ называется *единственным* местом, где появляется x . В результате частная производная равна

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \sqrt{1 - \dot{x}^2},$$

и, следовательно, уравнение Эйлера — Лагранжа приобретает вид

$$\frac{d}{dt} \frac{[m + \phi(t, x)]\dot{x}}{\sqrt{1 - \dot{x}^2}} = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \sqrt{1 - \dot{x}^2}.$$

Это и есть уравнение движения, то есть дифференциальное уравнение, которое описывает движение поля. Если вы попытаетесь взять производную левой части по времени, то увидите, что это довольно трудно. Мы на этом остановимся, но вам, возможно, захочется подумать о том, как инкорпорировать в это уравнение скорость света c и как ведет себя поле в нерелятивистском пределе низких скоростей. Мы поговорим об этом в следующей лекции.

ЛЕКЦИЯ 5

Частицы и поля

9 ноября 2016 года, на следующий день после президентских выборов, Арт сидит, мрачно уставившись в свою кружку пива. Ленни гипнотизирует свой стакан молока. Никто — даже Вольфганг Паули — не в состоянии разрядить молчание какой-нибудь шуткой. Вдруг воздвигается мощная фигура Джона Уилера. Он высоко поднимает руку, чтобы все в баре заметили его. Среди общего молчания Джон говорит:

«Леди и джентльмены, в этот час ужасной неопределенности я хочу напомнить вам об одной несомненной вещи. ПРОСТРАНСТВО-ВРЕМЯ ДИКТУЕТ МАТЕРИИ, КАК ЕЙ ДВИГАТЬСЯ; МАТЕРИЯ ДИКТУЕТ ПРОСТРАНСТВУ-ВРЕМЕНИ, КАК ЕМУ ИСКРИВЛЯТЬСЯ».

«Браво!»

В кабачке «У Германа» раздаются возгласы одобрения. Становится немного веселее. Паули поднимает свой бокал:

«За Уилера! Думаю, он попал не в бровь, а в глаз. Дайте-ка я выскажу это в более общем виде: ПОЛЯ ДИКТУЮТ ЗАРЯДАМ, КАК ИМ ДВИГАТЬСЯ; ЗАРЯДЫ ДИКТУЮТ ПОЛЯМ, КАК ИМ МЕНЯТЬСЯ».

В квантовой механике поля и частицы — одно и то же. Но наша главная тема — классическая теория поля, где поля — это поля,

а частицы — это частицы. Я не скажу «и вместе им не сойтись»,¹ потому что они все же сойдутся, и, по правде сказать, это случится очень скоро. Но они — не одно и то же. Главный вопрос этой лекции такой:

Если поле воздействует на частицу, например, создавая действующую на нее силу, должна ли и частица воздействовать на поле?

Если A воздействует на B , почему B непременно должно воздействовать на A ? Мы увидим, что двусторонняя природа взаимодействий, то, что часто называют «действие и противодействие», встроена в лагранжев принцип действия. Возьмем простой пример. Пусть у нас есть две координаты (x и y) и принцип действия.² В общем случае лагранжиан будет зависеть от x и y , а также от \dot{x} и \dot{y} . Одна из возможностей заключается в том, что лагранжиан равен просто сумме двух членов: лагранжиана для x и \dot{x} плюс отдельного лагранжиана для y и \dot{y} :

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_x(x, \dot{x}) + \mathcal{L}_y(y, \dot{y}), \quad (5.1)$$

где я пометил лагранжианы в правой части нижними индексами, показывая, что они могут различаться. Посмотрим на уравнение Эйлера — Лагранжа (которое является уравнением движения) для x :

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0.$$

Так как $\mathcal{L}_y(y, \dot{y})$ не зависит ни от x , ни от \dot{x} , члены \mathcal{L}_y исключаются, и уравнение Эйлера — Лагранжа для координаты x приобретает вид

¹ Аллюзия на знаменитые строчки Киплинга «Запад есть Запад, Восток есть Восток, и вместе им не сойтись». — *Примеч. пер.*

² Конечно, их могло бы быть и намного больше, чем две, и они не обязательно должны быть ортогональными декартовыми координатами.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_x}{\partial \dot{x}} - \frac{\partial \mathcal{L}_x}{\partial x} = 0.$$

Переменная y и ее производная по времени здесь вообще не появляются. Похожим образом уравнения движения для переменной y не будут содержать никаких упоминаний x или \dot{x} . В результате получается, что x не оказывает никакого воздействия на y , а y никак не влияет на x . Возьмем еще один пример:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}(\dot{y})^2 - V_x(x) - V_y(y),$$

где V_x и V_y — функции потенциальной энергии. Координаты x и y и в таком лагранжиане полностью изолированы друг от друга. Лагранжиан представляет собой сумму членов, которые содержат только x или только y , то есть, как и в предыдущем примере, координаты x и y не оказывают никакого воздействия друг на друга.

Но допустим, нам известно, что y *влияет* на x . Что эта информация говорит нам о лагранжиане? Она говорит, что лагранжиан должен усложниться; что в нем должны появиться члены, которые каким-то образом влияют и на x , и на y . Чтобы записать такой лагранжиан, нам необходимо ввести некоторый добавочный ингредиент, в который входят как x , так и y , причем в такой форме, чтобы их нельзя было разделить. Например, мы могли бы просто добавить член xy :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\dot{x})^2 + \frac{1}{2}(\dot{y})^2 - V_x(x) - V_y(y) + xy.$$

Это гарантирует, что уравнение движения для x будет содержать y , и наоборот. Если x и y появятся в лагранжиане, будучи связанными таким образом, то не останется возможности для того, чтобы одна из этих величин влияла на другую, без того чтобы та в свою очередь воздействовала на первую. Так уж устроен мир. И по этой причине A должно действовать на B , если B действует на A .

В предшествующей лекции мы рассматривали простое поле и спрашивали, как оно воздействует на частицу. После краткого знакомства с этим примером мы зададим противоположный вопрос: а как частица воздействует на поле? Это очень близкий аналог электромагнитных взаимодействий, где электрическое и магнитное поля влияют на движение заряженных частиц, а заряженные частицы порождают и меняют электромагнитное поле. Простое присутствие заряженной частицы создает кулоновское поле. Эти обоюдные взаимодействия не являются независимыми: они порождаются одним и тем же лагранжианом.

5.1. Поле воздействует на частицу (обзор)

Начнем с задания поля

$$\phi(t, x),$$

зависящего от t и от x . На время допустим, что ϕ — некоторая известная функция. Она может быть или не быть волной. Мы пока что не собираемся выяснять подробности динамики ϕ ; сначала посмотрим на лагранжиан частицы. Из предыдущих лекций (см., например, уравнение (3.24)) мы знаем, что этот лагранжиан выглядит так:

$$\mathcal{L}_{\text{частицы}} = -m\sqrt{1 - \dot{x}^2}.$$

Для ясности я обозначил его $\mathcal{L}_{\text{частицы}}$. Если не считать множителя $-m$, действие $\mathcal{L}_{\text{частицы}}$ состоит из суммы всех собственных времен вдоль каждого малого отрезка пути. В пределе, когда отрезки становятся все меньше и меньше, эта сумма становится интегралом

$$\int \mathcal{L}_{\text{частицы}} dt = \int -m\sqrt{1 - \dot{x}^2} dt$$

по временной координате t . Это то же самое, что взятый с коэффициентом $-m$ интеграл собственного времени $d\tau$ от одного конца траектории до другого. Этот лагранжиан не содержит ничего, что

заставляло бы поле воздействовать на частицу. Внесем в него несложную модификацию: прибавим к m значение поля $\phi(t, x)$:

$$\int \mathcal{L}_{\text{частицы}} dt = \int -[m + \phi(t, x)]\sqrt{1 - \dot{x}^2} dt.$$

Теперь можно вывести уравнения Эйлера — Лагранжа и выяснить, как $\phi(t, x)$ влияет на движение частицы. Вместо того чтобы выводить полные релятивистские уравнения движения, мы рассмотрим нерелятивистский предел, где частица движется очень медленно. Это предел, в котором скорость света обращается в бесконечность — когда c много больше любой другой скорости в рамках задачи. Чтобы увидеть, как это работает, удобно будет восстановить в наших уравнениях постоянную c . Запишем модифицированный интеграл действия:

$$\int \mathcal{L}_{\text{частицы}} dt = \int -[mc^2 + g\phi(t, x)]\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} dt$$

и выполним проверку размерностей. Лагранжиан имеет размерность энергии, как и $-mc^2$. Я умножил $\phi(t, x)$ на константу g , называемую *постоянной взаимодействия*. Ею измеряется сила, с которой поле воздействует на движение частицы, и мы можем выбрать ее размерность так, чтобы произведение g и $\phi(t, x)$ имело размерность энергии. Пока g может быть любым — его значение нам неизвестно. Оба члена в квадратных скобках — просто числа.

Теперь развернем выражение для квадратного корня, используя приближенную формулу

$$(1 - \varepsilon)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{\varepsilon}{2},$$

где ε — малое число. Заменив квадратный корень возведением в степень $\frac{1}{2}$ и приняв, что ε — это $\frac{\dot{x}^2}{c^2}$, получаем:

$$\sqrt{1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}} = \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)^{\frac{1}{2}} \approx 1 - \frac{\dot{x}^2}{2c^2}.$$

Члены более высоких порядков гораздо меньше, так как они содержат более высокие степени отношения $\frac{\dot{x}^2}{c^2}$. Теперь можно использовать это приближенное выражение для замены квадратного корня в интеграле действия, что дает

$$\int \mathcal{L}_{\text{частицы}} dt = \int -[mc^2 + g\phi(t, x)] \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right) dt. \quad (5.2)$$

Найдем в этом интеграле самые большие члены — члены, наиболее важные, когда скорость света велика. Первый член, mc^2 , — это просто число. При дифференцировании лагранжиана его голос — совещательный, то есть он не оказывает никакого влияния на уравнения движения. Мы будем его игнорировать. В следующем члене,

$$(mc^2) \left(\frac{\dot{x}^2}{2c^2} \right) = \frac{m\dot{x}^2}{2},$$

скорость света сокращается. Следовательно, этот член сохраняется в пределе, в котором скорость света устремляется в бесконечность. Это наша старая подруга — нерелятивистская кинетическая энергия. Член

$$g\phi(t, x) \left(\frac{\dot{x}^2}{2c^2} \right)$$

при увеличении c обращается в нуль, так как c^2 находится в знаменателе; мы его проигнорируем. Наконец, член $g\phi(t, x)$ вообще не содержит скорости света. Следовательно, он тоже уцелеет, и мы оставляем его в лагранжиане, который теперь принимает такой вид:

$$\mathcal{L}_{\text{частицы}} = \frac{m\dot{x}^2}{2} - g\phi(t, x). \quad (5.3)$$

Все это применимо к случаю, когда частица движется медленно. Теперь можно сравнить это выражение с прежним нерелятивистским лагранжианом «кинетическая минус потенциальная энергия»:

$$T - V.$$

В первом члене уравнения (5.3) мы уже распознали кинетическую энергию, а теперь можем отождествить $g\phi(t, x)$ с потенциальной энергией частицы в этом поле. Постоянная g обозначает силу связи между частицей и полем. В электромагнетизме, например, мерой связи поля с частицей является электрический заряд. Чем он больше, тем больше сила, действующая на частицу в данном поле. Мы еще вернемся к этой идее.

5.2. Частица воздействует на поле

Как частица влияет на поле? Важно понимать, что существует только одно — «полное» действие. В полном действии содержатся и действие для поля, и действие для частицы. Я подчеркиваю это снова и снова: то, что мы рассматриваем, представляет собой объединенную систему, которая состоит из а) поля и б) частицы, движущейся в этом поле.

Рисунок 5.1 иллюстрирует физическую проблему, которую мы пытаемся решить. На нем изображена область пространства-времени, представленная в виде куба.¹ Ось времени направлена вверх, а ось x — вправо. В области имеется частица, которая движется из одной точки пространства-времени в другую. Две точки на графике изображают начало и конец ее траектории. Кроме того, в области имеется поле $\phi(t, x)$. Очень жаль, что я так и не придумал хорошего способа нарисовать это поле, не загромождая

¹ Конечно, с недостаточным числом измерений.

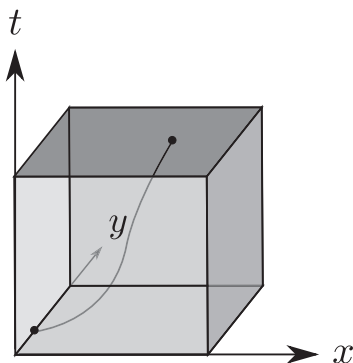


Рис. 5.1. Частица, движущаяся через область пространства-времени, заполненную «красной кашей» — скалярным полем $\phi(t, x)$

диаграммы, ведь оно имеет столь же ясный физический смысл, как и сама частица; оно является частью системы.¹

Чтобы разобраться в том, как ведет себя система «поле — частица», нам необходимо знать ее лагранжиан и минимизировать действие. В принципе это нетрудно: мы просто будем менять параметры задачи, пока не найдем такой их набор, который и даст в результате наименьшее возможное действие. Мы будем произвольно варьировать поле и траекторию частицы между ее крайними точками, до тех пор пока не найдется наименьшее из всех возможных значений интеграла действия. Этот процесс даст нам *и* траекторию, *и* поле, которые будут удовлетворять принципу наименьшего действия.

Запишем выражение для полного действия, учитывающее как поле, так и частицу. Прежде всего, нам потребуется действие для поля:

¹ На видео Леонард изображает поле цветным маркером, заполняя область на диаграмме «красной кашей». Наша иллюстрация черно-белая, поэтому придется довольствоваться «воображаемой красной кашей». Попробуйте представить себе самое противное блюдо из вашей студенческой столовой. — А. Ф.

$$\text{Действие}_{\text{поля}} = \int \mathcal{L}_{\text{поля}} d^4x,$$

где символ $\mathcal{L}_{\text{поля}}$ обозначает «лагранжиан для поля». Этот интеграл действия берется по всей пространственно-временной области t, x, y , и z . Символ d^4x — сокращенное обозначение для $dt dx dy dz$. В этом примере мы будем основываться на лагранжиане поля (4.7), которым мы пользовались в лекции 4, точнее, на его упрощенном варианте, в котором есть только одно пространственное измерение x и нет потенциальной функции $V(\phi)$.¹ Этот лагранжиан

$$\mathcal{L}_{\text{поля}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2$$

приводит к следующему интегралу действия:

$$\text{Действие}_{\text{поля}} = \int \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 dx. \quad (5.4)$$

Это действие для поля.² Частица в нем никак не учитывается. Теперь включим в рассмотрение действие для частицы уравнение (5.2), из которого исключена скорость света:

$$\text{Действие}_{\text{частицы}} = \int \mathcal{L}_{\text{частицы}} dt,$$

или

$$\text{Действие}_{\text{частицы}} = \int -[m + g\phi(t, x)] \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{2} \right) dt. \quad (5.5)$$

Хотя выражение Действие_{частицы} — это действие для частицы, оно зависит и от поля. Это важно: когда мы изменяем параметры поля, действие изменяется. По сути, неверно думать, что

¹ Или, что эквивалентно, $V(\phi) = 0$.

² Чтобы не загромождать изложение, я пользуюсь только одной пространственной координатой.

Действие_{частицы} — это действие только и исключительно для частицы: член

$$g\phi(t, x) \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{2} \right)$$

отражает взаимодействие частицы с полем. Он диктует частице, как ей двигаться в поле, но он также диктует и полю, как ему меняться в присутствии частицы. С этого момента я буду называть этот член $\mathcal{L}_{\text{взаимодействия}}$ и больше не буду считать, что он относится только к частице.

Рассмотрим простой частный случай, когда частица покоится при $x = 0$. Разумно предполагать, что существует некое решение, при котором частица покоится. Классическим частицам свойственно иногда находиться в состоянии покоя. На рис. 5.2 показана пространственно-временная траектория покоящейся частицы — это просто вертикальная линия.

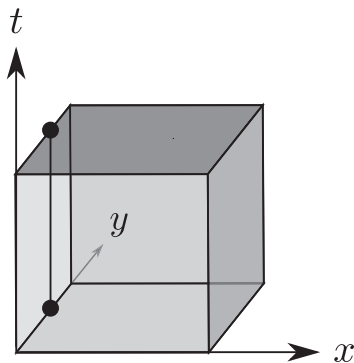


Рис. 5.2. Частица в состоянии покоя, погруженная в «воображаемую красную кашу» (на бумаге она выглядит серой)

Как следует модифицировать уравнение (5.5), чтобы показать, что частица покоится? Мы просто положим ее скорость \dot{x} равной нулю. Упрощенный интеграл действия тогда выглядит так

$$\int \mathcal{L}_{\text{взаимодействия}} dt = \int [-g\phi(t, x)] dt.$$

Поскольку частица находится в фиксированном положении $x = 0$, мы можем заменить $\phi(t, x)$ на $\phi(t, 0)$ и записать:

$$\begin{aligned} \int \mathcal{L}_{\text{взаимодействия}} dt &= \int [-m + g\phi(t, 0)] dt, \\ \text{Действие}_{\text{взаимодействия}} &= \int -g\phi(t, 0) dt. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Рассмотрим теперь более пристально $\mathcal{L}_{\text{взаимодействия}}$. Отметим, что этот член зависит только от значения поля в начале координат. В более общем случае он зависит от значения поля в той точке, где находится частица. Тем не менее, когда мы варьируем параметры поля, $\phi(t, 0)$ будет изменяться, влияя на действие. Как мы увидим, это повлияет и на уравнение движения для поля.

Действие для поля обычно записывается как интеграл по пространству и времени, но уравнение (5.6) — это интеграл только по времени. В этом нет ничего страшного, но удобно переписать его так, чтобы он стал интегралом по пространству и времени. Мы воспользуемся приемом, основанным на идее *функции источника*. Пусть $\rho(x)$ — некая фиксированная функция пространства (но пока что не времени). Подсказка: $\rho(x)$ чем-то похожа на плотность заряда. Забудем о частице и заменим ее членом в лагранжиане, который я по-прежнему буду называть $\mathcal{L}_{\text{взаимодействия}}$:

$$\mathcal{L}_{\text{взаимодействия}} = -g\rho(x)\phi(t, x). \quad (5.7)$$

Соответствующий член в выражении для действия поля:

$$\text{Действие}_{\text{взаимодействия}} = -\int d^4x g\rho(x)\phi(t, x). \quad (5.8)$$

Это выражение довольно сильно отличается от действия в (5.2). Чтобы сделать их одинаковыми, мы воспользуемся приемом, изобретенным Дираком, — дельта-функцией $\delta(x)$. Дельта-функция — это функция пространственных координат, обладающая

необычным свойством: она равна нулю везде, кроме точки $x = 0$. Ее интеграл тем не менее имеет ненулевое значение:

$$\int \delta(x) dx = 1. \quad (5.9)$$

Представим себе график дельта-функции. Она равна нулю везде, кроме ближайшей окрестности $x = 0$. Но в этой окрестности она так велика, что общая площадь под графиком равна 1. График функции получается очень высоким и узким — настолько узким, что можно считать ее ограниченной одним только началом координат, но в то же время настолько высоким, что у него конечная площадь.

Ни одна функция так себя не ведет, но функция Дирака — не обычная функция. Это скорее математический инструмент. Когда под интегралом он умножается на другую функцию $F(x)$, то дает значение F в начале координат. Вот математическое определение этого инструмента:

$$\int F(x) \delta(x) dx = F(0), \quad (5.10)$$

где $F(x)$ — «произвольная» функция.¹ Если у вас есть функция $F(x)$ и вы интегрируете ее таким образом, дельта-функция извлекает значение $F(x)$ в точке $x = 0$, а все остальные значения отфильтровывает. Это аналог дельта-символа Кронекера, но оперирует она с непрерывными функциями. Вы можете визуализировать $\delta(x)$ как функцию, которая равна нулю повсюду, кроме тех случаев, когда значение x очень близко к нулю. А когда x близко к нулю, $\delta(x)$ дает очень высокий пик. Для нашей текущей задачи нам понадобится трехмерная дельта-функция, которую мы назовем $\delta^3(x, y, z)$. Определим $\delta^3(x, y, z)$ как произведение трех одномерных дельта-функций:

$$\delta^3(x, y, z) = \delta(x) \delta(y) \delta(z).$$

¹ $F(x)$ не вполне произвольна. Однако она представляет широкий класс функций, и в рамках наших задач мы можем считать, что она произвольна.

Как и везде, мы будем часто пользоваться сокращением $\delta^3(x)$, где x представляет все три измерения пространства. Где $\delta^3(x, y, z)$ отлична от нуля? Там, где все три сомножителя в правой части ненулевые. А это происходит только в одной точке: $x = 0, y = 0, z = 0$. В этой точке пространства значение функции огромно.

Трюк с записью члена взаимодействия в виде интеграла становится очевидным. Мы просто заменяем частицу функцией источника ρ , в качестве которой мы выбрали дельта-функцию,

$$\rho(x) = \delta^3(x). \quad (5.11)$$

Тогда действие в уравнении (5.8) принимает вид

$$\text{Действие}_{\text{взаимодействия}} = \int -g\phi(t, x)\delta^3(x)d^4x. \quad (5.12)$$

Суть в том, что при интегрировании по пространственным координатам в соответствии со свойствами дельта-функции мы должны просто вычислить $g\phi(x)$ в начале координат. В результате мы получаем то, что уже видели раньше:

$$\text{Действие}_{\text{взаимодействия}} = -g \int \phi(t, 0)dt. \quad (5.13)$$

Теперь объединим действие поля с членом взаимодействия. Мы сделаем это простейшим возможным образом — сложив их. Объединение членов действия в уравнениях (5.4) и (5.12) дает

$$\text{Действие}_{\text{полное}} = \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - g\rho(x)\phi(t, x) \right] d^4(x)$$

или, если заменить функцию источника дельта-функцией,

$$\text{Действие}_{\text{полное}} = \int \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - g\delta^3(x)\phi(t, x) \right] d^4(x).$$

Готово! Мы выразили полное действие как интеграл по пространству и времени. Выражение в больших квадратных скобках — лагранжиан. Как и всякий добротно составленный лагранжиан поля, он содержит действие для поля (представленное здесь в виде частных производных) и член с дельта-функцией, который представляет воздействие частицы на поле. Эта конкретная дельта-функция представляет частный случай, когда частица находится в состоянии покоя. Но мы вполне можем этот скучный случай оживить и заставить частицу двигаться. Это можно сделать, заставив дельта-функцию перемещаться с места на место в зависимости от времени. Но сейчас это неважно. Вместо этого лучше выведем уравнения движения из лагранжиана

$$\mathcal{L}_{\text{полное}} = \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - g\rho(x)\phi(t, x) \right]. \quad (5.14)$$

5.2.1. Уравнения движения

Для удобства я повторю здесь уравнение Эйлера — Лагранжа (4.5):

$$\sum_{\mu} \frac{\partial}{\partial X^{\mu}} \frac{\delta \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial X^{\mu}} \right)} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0. \quad (5.15)$$

Это уравнение говорит нам, что делать с $\mathcal{L}_{\text{полное}}$, чтобы получить уравнения движения. Индекс μ пробегает значения 0, 1, 2 и 3. Сначала он принимает значение 0, что соответствует временной компоненте. Следовательно, нашим первым шагом будет отыскание производной:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{полное}}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)}.$$

Выполним эту процедуру шаг за шагом. Прежде всего, какова частная производная $\mathcal{L}_{\text{полное}}$ относительно $\frac{\partial\phi}{\partial t}$? В $\mathcal{L}_{\text{полное}}$ есть лишь один член, который содержит $\frac{\partial\phi}{\partial t}$. Непосредственное дифференцирование дает

$$\frac{\partial\mathcal{L}_{\text{полное}}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)} = \frac{\partial\phi}{\partial t}.$$

Применяя $\frac{\partial}{\partial t}$ к обеим частям, получаем:

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)} = \frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}.$$

Это первый член в уравнении движения. Он очень похож на ускорение. Мы начали с члена кинетической энергии, который пропорционален $\dot{\phi}^2$. Теперь, когда мы вычислили производную, мы получили нечто похожее на ускорение ϕ .

Далее, мы присвоим μ значение 1 и вычислим первую пространственную компоненту. Пространственные члены имеют точно такую же форму, как и временная компонента, за исключением знака «минус». Итак, первые два члена уравнения движения таковы:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}.$$

Так как y - и z -компоненты имеют тот же вид, что и x -компонента, мы их тоже добавим:

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$

Если бы дело тем и ограничивалось, я приравнял бы это выражение нулю, и мы получили бы старое доброе волновое уравнение для ϕ . Однако лагранжиан зависит от ϕ иначе, что объясняется членом взаимодействия. Полное уравнение движения таково:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{\partial \mathcal{L}_{\text{полное}}}{\partial \phi},$$

и мы видим, что его последний член равен

$$\frac{\partial \mathcal{L}_{\text{полное}}}{\partial \phi} = -g\rho(x).$$

Добавив этот последний элемент в уравнение движения, получаем:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -g\rho(x). \quad (5.16)$$

Таким образом, мы видим, что функция источника появляется в уравнении поля для ϕ как добавка к волновому уравнению. Без члена, соответствующего источнику, мы получаем прекрасное решение $\phi = 0$, но при наличии этого члена оно неверно. Функция источника — это в буквальном смысле источник поля, который не позволяет реализоваться тривиальному решению $\phi = 0$.

В реальной ситуации, где источником является покоящаяся частица, $\rho(x)$ можно заменить дельта-функцией:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -g\delta^3(x). \quad (5.17)$$

Представим себе на минуту, что мы ищем статическое решение уравнения (5.16). В конце концов, частица находится в состоянии покоя, и может существовать такое решение, в котором само поле не меняется со временем. Кажется правдоподобным, что покоящаяся частица может создать поле, которое тоже покоится — поле, которое не меняется со временем. Тогда можно поискать решение, в котором ϕ не зависит от времени. Это значит, что член $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$ в уравнении (5.16) обратится в нуль. Теперь можно, изменив знаки остальных членов, записать:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = +g\delta^3(x).$$

Возможно, вы узнали тут уравнение Пуассона. Оно, помимо прочего, описывает электростатический потенциал точечной частицы. Его часто записывают, полагая значение $\nabla^2 \phi$ равным источнику (плотности заряда) в правой части.¹ В нашем примере плотность заряда — это просто дельта-функция. Другими словами, это высокий и острый пик,

$$\nabla^2 \phi = g\delta^3(x). \quad (5.18)$$

Наш нынешний пример, разумеется, не соответствует ни электрическому, ни магнитному полю. В электродинамике поля векторные, а мы рассматриваем скалярное. Но сходство все равно поразительное.

Третий член лагранжиана (5.14) связывает всё воедино. Он диктует частице двигаться так, как если бы существовала потенциальная энергия $-g\phi(t, x)$. Другими словами, он соответствует приложенной к частице силе. Тот же член, когда он используется в уравнении движения поля ϕ , показывает нам, что у поля ϕ есть источник.

Эти факты не являются независимыми. То, что поле воздействует на частицу, говорит о том, что и частица воздействует на поле. Для частицы, покоящейся в статическом поле, уравнение (5.18) дает точное описание этого воздействия. Параметр g определяет, насколько сильно частица влияет на поле. Тот же параметр сообщает нам и о том, с какой силой поле действует на частицу. Получается чудесная история: поля и частицы влияют друг на друга через общий член в лагранжиане.

¹ Обозначение $\nabla^2 \phi$ — это сокращенная запись для $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$. См. приложение Б, где приведена краткая справка о $\vec{\nabla}$ и других векторных обозначениях. Можно также обратиться к лекции 11 в *Книге I* серии «*Теоретический минимум*». Есть и множество других справочных руководств.

5.2.2. Зависимость от времени

Что произойдет, если мы позволим частице двигаться, а полю — меняться со временем? Ограничимся опять одним пространственным измерением. Уравнение (5.18) приобретет вид

$$\nabla^2 \phi = g\delta(x).$$

В одном измерении левая часть этого уравнения — это просто вторая производная ϕ . Допустим, я захотел поместить частицу в какое-то другое место — не в начало координат, а, например, в точку $x = a$. Все, что я должен для этого сделать, — это заменить x в предыдущем уравнении на $x - a$, и уравнение тут же примет вид

$$\nabla^2 \phi = g\delta(x - a).$$

Пик дельта-функции $\delta(x - a)$ расположен там, где x равен a . Пусть теперь частица движется, и ее положение — функция времени $a(t)$. Мы можем записать это так:

$$\nabla^2 \phi = g\delta(x - a(t)).$$

Эта формула означает, что у поля есть источник и этот источник движется. В любое заданное время источник находится в положении $a(t)$. Таким способом описывается движущаяся частица. Но все-таки есть еще одна маленькая загвоздка. Если частица движется, то нельзя рассчитывать, что поле не будет зависеть от времени. При движении частицы поле должно меняться со временем. Помните $\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}$, член в уравнении движения (5.16), который мы положили равным нулю? Для поля, зависящего от времени, нам придется восстановить этот член:

$$-\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \nabla^2 \phi = g\delta(x - a(t)).$$

Если правая сторона этого выражения зависит от времени, то не существует такого решения, в котором само ϕ не зависело бы

от времени. Единственный способ восстановить соответствие — восстановить член, содержащий время.

Любая движущаяся частица, например частица, которая ускоряется или колеблется, порождает зависимость поля от времени. Вы, вероятно, знаете, в чем это выражается, — частица начнет излучать волны. Но в данный момент мы не собираемся решать волновые уравнения. Вместо этого мы потратим некоторое время на разговор о системе обозначений в теории относительности.

5.3. Верхние и нижние индексы

Обозначения — гораздо более важная вещь, чем думает большинство людей. Они становятся частью нашего языка и меняют — в лучшую или в худшую сторону — наш способ мышления. Если вы относитесь к этим рассуждениям скептически, попробуйте-ка в следующий раз, когда будете подсчитывать свои налоги, перейти на римские цифры.

Система математических обозначений, которую мы сейчас введем, сделает наши уравнения простыми и красивыми. Она спасет нас от необходимости писать выражения вроде

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}$$

каждый чертов раз, когда потребуется записать уравнение.¹ В прошлой лекции мы потратили некоторое время на стандартные обозначения релятивистских векторов, 4-векторов и скаляров. Сейчас мы кратко повторим этот материал, а потом объясним новую систему компактных обозначений.

Символ X^μ обозначает четыре координаты пространства-времени, которые можно записать в виде

¹ Слово «чертов» заменяет ваше любимое ругательство.

$$X^\mu = (t, x, y, z),$$

где индекс μ пробегает четыре значения от 0 до 3. Сейчас я хочу обратить ваше внимание на то, где я ставлю этот индекс. Здесь я размещаю его сверху. Пока это не имеет никакого значения, но вскоре станет важно.

Величина X^μ , если она обозначает перемещение от начала координат, является 4-вектором. Называя ее 4-вектором, мы указываем на ее поведение относительно преобразований Лоренца; любой набор четырех величин, который преобразуется таким же образом, как t и x — это 4-вектор.

В вашей системе отсчета три пространственные компоненты 4-вектора могут равняться нулю. Находясь в своей системе, вы сказали бы, что это перемещение (задаваемое этим вектором. — *Ред.*) чисто времениподобное. Но это утверждение не инвариантно. В моей системе не все пространственные компоненты равнялись бы нулю, и я сказал бы, что этот объект все же движется в пространстве. Однако если в вашей системе равны нулю *все четыре* компоненты перемещения 4-вектора, тогда они будут нулевыми и в моей, и в любой другой системе отсчета. Утверждение, что все четыре компоненты 4-вектора равны нулю, инвариантно.

Разности 4-векторов тоже являются 4-векторами, так же как и дифференциальные перемещения, такие как

$$dX^\mu.$$

Отталкиваясь от 4-вектора, можно образовать скаляр, числовую величину, которая остается неизменной во всех системах отсчета. Например, можно сконструировать из перемещения собственное время $d\tau^2$. Вы уже видели, как это делается. Величина

$$(d\tau)^2 = dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

и ее «двойник»

$$(ds)^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

имеют одно и то же значение во всех системах отсчета. Они скалярные и имеют лишь одну компоненту. Если скаляр равен нулю в одной системе отсчета, он нулевой во всех остальных. На самом деле это и есть определение скаляра: значение, которое одинаково во всех системах.

Схема, которой мы следовали, комбинируя компоненты dX^μ , для того чтобы образовать пространственно-временной интервал ds^2 (и собственное время $d\tau$), очень общая. Мы можем применить ее к *любому* 4-вектору A^μ , и результат всегда будет скаляром. Мы будем пользоваться этой схемой снова и снова, и совсем не хочется выписывать длинное выражение

$$-(A^t)^2 + (A^x)^2 + (A^y)^2 + (A^z)^2$$

каждый раз, когда оно понадобится. Чтобы этого не делать и упростить запись, введем новую систему обозначений. В ней важнейшую роль будет играть матрица, называемая метрикой. В специальной теории относительности метрику часто обозначают буквой η (греческая буква «эта») с индексами μ и ν . Это простая матрица, очень похожая на единичную. Три ее диагональных элемента равны 1, так же как и у единичной матрицы. Однако четвертый диагональный элемент равен -1 . Он соответствует времени. Вот как выглядит вся матрица в целом:

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В этой системе обозначений 4-вектор представляется матрицей-столбцом. Например, 4-вектор A^ν записывается как

$$A^\nu = \begin{pmatrix} A^t \\ A^x \\ A^y \\ A^z \end{pmatrix}.$$

Возьмем матрицу $\eta_{\mu\nu}$ и умножим на вектор A^ν , где ν пробегает значения от 0 до 3. Используя знак суммирования, можно записать это в виде

$$\sum_{\nu} \eta_{\mu\nu} A^\nu = \eta_{\mu 0} A^0 + \eta_{\mu 1} A^1 + \eta_{\mu 2} A^2 + \eta_{\mu 3} A^3.$$

Это новый вид объекта, который мы будем обозначать A_μ с *нижним* индексом,

$$A_\mu = \sum_{\nu} \eta_{\mu\nu} A^\nu.$$

Давайте разберемся, что собой представляет этот новый объект, « A -с-нижним-индексом». Это не исходный 4-вектор A^ν . Если бы метрика η была единичной матрицей, то умножение ее на вектор дало бы в точности тот же вектор. Но она не единичная. Наличие -1 на диагонали означает, что при умножении $\sum_{\nu} \eta_{\mu\nu} A^\nu$ первая компонента, A^t , меняет знак на противоположный, а все остальные остаются как были. Сразу можем записать, что

$$A^\nu = \begin{pmatrix} -A^t \\ A^x \\ A^y \\ A^z \end{pmatrix}.$$

Другими словами, когда я произвожу эту операцию, я просто меняю знак временной компоненты. В общей теории относительности у метрики более глубокий геометрический смысл. Но для наших целей это просто удобная форма записи.¹

¹ Могло бы показаться, что лучше записать A_ν как матрицу-строку. Однако правило суммирования, описываемое в следующем разделе, сводит к минимуму необходимость записывать наши матрицы в компонентной форме.

5.4. Эйнштейновское правило суммирования

Если нужда — мать изобретательности, то лень — ее отец. Эйнштейновское правило суммирования родилось от этого счастливого брака. Мы ввели это правило в разделе 4.4.2, а сейчас рассмотрим его немного подробнее.

Всякий раз, когда вы видите в каком-то члене один и тот же индекс и в нижней, и в верхней позиции, надо автоматически выполнять суммирование по этому индексу. За счет этого подразумеваемого суммирования знак суммы не нужен. Например, член

$$A^\mu A_\mu \quad (5.19)$$

означает

$$A^0 A_0 + A^1 A_1 + A^2 A_2 + A^3 A_3,$$

так как один и тот же индекс μ появляется как сверху, так и снизу в одном и том же члене. Напротив, член

$$A_\nu A^\mu$$

не подразумевает суммирования, так как верхний и нижний индексы разные. Подобным же образом

$$A_\nu A_\nu$$

не подразумевает суммирования, хоть индекс ν и повторяется, поскольку оба индекса нижние.

Возможно, вы помните, что в некоторых уравнениях, которые рассматривались в разделе 3.4.3, использовался символ $(\dot{X}^i)^2$, обозначавший сумму квадратов пространственных компонент. При помощи верхних и нижних индексов вкупе с правилом сум-

мирования мы могли бы тогда записать это в более элегантной и точной форме:

$$\dot{X}^i \dot{X}_i.$$

Операция (опускания индекса. — *Red.*), задействованная в выражении (5.19), меняет знак временной компоненты. Следует предупредить, что некоторые авторы используют иное соглашение о расстановке знаков: $(+1, -1, -1, -1)$. Я предпочитаю правило $(-1, 1, 1, 1)$, обычно применяемое в общей теории относительности.

Индекс, который, подобно ν , инициирует применение правила суммирования, не имеет какого-либо конкретного значения. Он называется индексом суммирования, или немым индексом; это просто обозначение суммирования. В отличие от него, индекс, по которому суммирование *не* производится, называется *свободным*. Выражение

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu \quad (5.20)$$

зависит от μ (свободного индекса), но не зависит от индекса суммирования ν . Если мы подставим вместо ν другую греческую букву, выражение будет иметь тот же самый смысл. Надо также отметить, что термины *верхний индекс* и *нижний индекс* имеют формальные названия: верхний называется *контравариантным*, а нижний — *ковариантным*. Я часто пользуюсь более простыми выражениями *верхний* и *нижний*, но вам надо помнить также и формальные названия. Если есть A с верхним (контравариантным) или A с нижним (ковариантным) индексом, то для преобразования одного в другой используется матрица η . Преобразование одного вида индекса в другой называется соответственно *подъемом* или *опусканием* индекса.

Упражнение 5.1. Покажите, что $A^\nu A_\nu$ имеет тот же смысл, что и $A^\mu A_\mu$.

Упражнение 5.2. Запишите выражение, которое аннулирует действие представленного уравнения (5.20). Другими словами, как выполняется обратная операция?

Посмотрим еще раз на выражение (5.19)

$$A^\mu A_\mu.$$

В нем производится суммирование, поскольку оно содержит повторяющийся индекс — один верхний и один нижний. Раньше мы записывали его в развернутом виде, используя индексы от 0 до 3. Можно записать то же самое с использованием обозначений t, x, y и z :

$$A^\mu A_\mu = A^t A_t + A^x A_x + A^y A_y + A^z A_z.$$

Для трех пространственных компонент ковариантная и контравариантная версии в точности совпадают. Первая пространственная компонента — это просто $(A^x)^2$, и неважно, поставите вы индекс наверху или внизу. То же самое справедливо и для компонент по y и z . Но временная компонента превращается в $-(A^t)^2$:

$$A^\mu A_\mu = -(A^t)^2 + (A^x)^2 + (A^y)^2 + (A^z)^2.$$

Временная компонента имеет знак «минус», так как операция понижения или подъема индекса меняет ее знак. Контравариантная и ковариантная временные компоненты имеют противоположные знаки, и A^t , умноженное на A_t , дает $-(A^t)^2$. С другой стороны, контравариантные и ковариантные пространственные компоненты имеют *одинаковые* знаки.

Величина $A^\mu A_\mu$ — именно то, что мы называем скаляром. Это разность квадратов временной и пространственной компонент. Если A^μ — это перемещение, как в случае X^μ , тогда эта величина — то же, что и τ^2 , с той лишь разницей, что имеет знак «минус»;

иными словами, это $-\tau^2$. Но какой бы знак эта сумма ни имела, она очевидно скалярная.

Этот процесс называется *сверткой* индексов, и он имеет весьма общее значение. Если A^μ — 4-вектор, то $A^\mu A_\mu$ — скаляр. Можно взять любой 4-вектор и получить скаляр путем свертки по индексам. Выражение $A^\mu A_\mu$ можно записать немного иначе, используя (5.20) и заменив A_μ на $\eta_{\mu\nu} A^\nu$. Другими словами, мы можем записать

$$A^\mu A_\mu = A^\mu \eta_{\mu\nu} A^\nu. \quad (5.21)$$

В правой части мы используем метрику η и суммируем по μ и ν . Обе части уравнения (5.21) представляют один и тот же скаляр. Теперь рассмотрим пример с двумя *различными* 4-векторами, A и B . Возьмем выражение

$$A^\mu B_\mu.$$

Скаляр ли это? Выглядит, конечно, как скаляр. Индексов у него нет, потому что по всем индексам выполнено суммирование.

Для доказательства скалярности мы воспользуемся тем, что суммы и разности скаляров тоже являются скалярами. Если у нас есть две скалярные величины, то по определению мы с вами придем к соглашению об их значениях, даже если находимся в разных системах отсчета. Но если мы согласны относительно их значений, мы должны согласиться и относительно того, чему равны их сумма и разность. Следовательно, сумма двух скаляров — скаляр, и разность двух скаляров — тоже скаляр. Если помнить об этом, доказательство тривиально. Начнем с двух 4-векторов A^μ и B^μ и запишем:

$$(A + B)^\mu (A + B)_\mu.$$

Это выражение должно быть скаляром. Почему? Потому что и A^μ , и B^μ являются 4-векторами, и их сумма $(A + B)^\mu$ — тоже 4-вектор. Если вы проведете операцию свертки любого 4-вектора с самим

собой, в результате получится скаляр. Теперь модифицируем это исходное выражение, вычтя из него $(A - B)^\mu(A - B)_\mu$. Получится

$$(A + B)^\mu(A + B)_\mu - (A - B)^\mu(A - B)_\mu. \quad (5.22)$$

Это модифицированное выражение по-прежнему является скаляром, так как это разность двух скаляров. Если раскрыть скобки, члены $A^\mu A_\mu$ сократятся, так же как и члены $B^\mu B_\mu$. Останутся только члены $A^\mu B_\mu$ и $A_\mu B^\mu$. В результате получим

$$2[A^\mu B_\mu + A_\mu B^\mu]. \quad (5.23)$$

В качестве упражнения докажите теперь, что

$$A^\mu B_\mu = A_\mu B^\mu.$$

Не имеет никакого значения, если вы поменяете местами верхние и нижние индексы; результат останется тем же. Следовательно, выражение сводится к

$$(A + B)^\mu(A + B)_\mu - (A - B)^\mu(A - B)_\mu = 4[A^\mu B_\mu].$$

Поскольку известно, что исходное выражение (5.22) — скаляр, результирующее выражение $A^\mu B_\mu$ тоже должно быть скаляром.

Возможно, вы заметили, что выражение $A^\mu B_\mu$ очень напоминает обычное скалярное произведение двух пространственных векторов. Вы можете рассматривать $A^\mu B_\mu$ как версию скалярного произведения в смысле Лоренца или Минковского. Единственным заметным отличием будет изменение знака временной компоненты, определяемой метрикой η .

5.5. Обозначения в случае скалярного поля

Теперь введем некоторые обозначения, используемые при работе со скалярным полем $\phi(x)$. В этом разделе x представ-

ляет все четыре компоненты пространства-времени, включая время. Прежде чем начать, мне нужно сформулировать одну теорему. Доказать ее нетрудно, и я оставляю это в качестве упражнения.

Допустим, у нас имеется известный 4-вектор A_μ . Когда мы называем A_μ 4-вектором, это не просто констатация, что у него четыре компоненты. Это утверждение, что преобразования Лоренца трансформируют A_μ некоторым определенным образом. Допустим также, что у нас есть еще другая величина B^μ , и мы не знаем, является ли B^μ 4-вектором. Однако нам сказано, что выражение

$$A_\mu B^\mu$$

является скаляром. При этих условиях можно доказать, что B^μ должен быть 4-вектором. С учетом данного факта рассмотрим изменение значения $\phi(x)$ между двумя соседними точками. Если $\phi(x)$ — скаляр, то мы с вами согласимся относительно его значения в каждой из этих двух соседних точек. Следовательно, мы будем согласны и относительно разности его значений в этих точках: если $\phi(x)$ — скаляр, то изменение значения $\phi(x)$ между двумя соседними точками — тоже скаляр.

Что, если эти две соседние точки разделены бесконечно малым интервалом? Как мы выразим разность $\phi(x)$ между этими соседними точками? Ответ вытекает из основ математического анализа: продифференцируем $\phi(x)$ по каждой координате и умножим полученную производную на дифференциал соответствующей координаты:

$$d\phi(x) = \frac{\partial \phi(x)}{\partial X^\mu} dX^\mu. \quad (5.24)$$

В соответствии с правилом суммирования правая часть данного уравнения — это производная $\phi(x)$ по t , умноженная на dt , плюс производная от $\phi(x)$ по x , умноженная на dx , и так далее. Получается малое изменение $\phi(x)$ при переходе от одной точки к другой.

Мы уже знаем, что и $\phi(x)$, и $d\phi(x)$ — скаляры. Очевидно, что сам dX^μ — 4-вектор. По сути, это основной прототип 4-вектора. Таким образом, мы знаем, что левая часть уравнения (5.24) — скаляр, и что dX^μ в правой части — 4-вектор. Что это нам говорит о частной производной в правой части? В соответствии с нашей теоремой она должна быть 4-вектором. Это выполняется для набора четырех величин:

$$\frac{\partial\phi(x)}{\partial X^\mu} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right).$$

Чтобы уравнение (5.24) имело бы смысл как произведение, величина $\frac{\partial\phi(x)}{\partial X^\mu}$ должна соответствовать *ковариантному вектору*, так как дифференциал dX^μ контравариантен. Мы убедились, что производные скаляра $\phi(x)$ по координатам — это ковариантные компоненты A_μ 4-вектора. Это стоит подчеркнуть: производные скаляра по X^μ образуют ковариантный вектор. Иногда для краткости они записываются при помощи обозначения $\partial_\mu\phi$, которое мы теперь определим как

$$\partial_\mu\phi = \frac{\partial\phi(x)}{\partial X^\mu}.$$

Символ $\partial_\mu\phi$ имеет нижний индекс, что указывает на ковариантность его компонент. А существует ли контравариантная версия этого символа? Конечно! Она имеет почти такое же значение, с той лишь оговоркой, что ее временная компонента имеет обратный знак. Запишем это в явном виде:

$$\partial_\mu\phi \Leftrightarrow \left(\frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right),$$

$$\partial^\mu\phi \Leftrightarrow \left(-\frac{\partial\phi}{\partial t}, \frac{\partial\phi}{\partial x}, \frac{\partial\phi}{\partial y}, \frac{\partial\phi}{\partial z} \right).$$

5.6. Новый скаляр

Теперь у нас есть все необходимые инструменты для конструирования нового скаляра:

$$\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi.$$

Если записать это уравнение в развернутом виде с использованием правила суммирования, получится

$$\partial^\mu \phi \partial_\mu \phi = -\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2.$$

Что это означает? Это напоминает лагранжиан поля, который мы записывали выше. Уравнение (4.7) содержит то же выражение с обратными знаками.¹ В нашей новой системе обозначений лагранжиан выглядит так:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi.$$

Теперь легко заметить, что лагранжиан этого скалярного поля сам является скаляром. Как мы уже объясняли, наличие скалярного лагранжиана критически важно, так как инвариантность лагранжиана приводит к инвариантным по форме уравнениям движения. Самая суть теории поля заключается именно в конструировании инвариантных лагранжианов. До сих пор нашими главными ингредиентами были скаляры и 4-векторы. Дальше нам понадобится конструировать скалярные лагранжианы и из других объектов, таких как спиноры и тензоры. Система обозначений, которую мы здесь разработали, сильно облегчит нам эту задачу.

¹ В уравнении (4.7) также содержится член потенциальной энергии $-V(\phi)$, который мы пока игнорируем.

5.7. Преобразование ковариантных компонент

Знакомые нам формулы преобразований Лоренца в том виде применимы к контравариантным компонентам. Для ковариантных компонент эти уравнения немного отличаются. Посмотрим, как они выглядят. Вот знакомые контравариантные преобразования для t и x :

$$(A')^t = \frac{A^t - vA^x}{\sqrt{1-v^2}},$$

$$(A')^x = \frac{A^x - vA^t}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Для ковариантных компонент все выглядит так же, за исключением временной компоненты. Другими словами, мы можем заменить A^x на A_x и $(A')^x$ на $(A')_x$. Однако ковариантная временная компонента A_t — это *отрицательная* контравариантная временная компонента. Поэтому нам придется заменить A^t на $-(A)_t$ и $(A')^t$ на $-(A')_t$. Выполнив эти подстановки в первом уравнении, мы получим

$$-(A')_t = \frac{-A_t - vA_x}{\sqrt{1-v^2}},$$

или

$$(A')_t = \frac{A_t + vA_x}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Применяя тот же подход ко второму уравнению, получаем

$$(A')_x = \frac{A_x + vA_t}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Эти формулы выглядят очень похожи на контравариантные версии, с той разницей, что знак перед v изменился на противоположный.

5.8. Математическая интерлюдия: применение экспоненциальных функций к решению волновых уравнений

При наличии известного лагранжиана уравнения Эйлера — Лагранжа задают шаблон, по которому выводятся уравнения движения. Сами по себе уравнения движения являются дифференциальными. Для некоторых целей вполне достаточно просто знания формы этих уравнений. Однако иногда нам хотелось бы уметь их решать.

Поиск решений дифференциальных уравнений — огромная тема. Тем не менее, если отбросить подробности и оставить голую суть, основной подход заключается в следующем:

1. Предложить (ладно, *попробовать угадать*) функцию, которая могла бы удовлетворить данному дифференциальному уравнению.
2. Подставить эту функцию в решаемое дифференциальное уравнение. Если она подходит, дело сделано. Если нет, вернуться к шагу 1.

Вместо того чтобы истощать мозг поисками решения, мы просто предложим одно, которое часто срабатывает. Оказывается, экспоненциальные функции вида

$$\phi(x) = e^{i(kx - \omega t)}$$

являются основными строительными блоками для волновых уравнений. Вас может озадачить предложение использовать в качестве решения комплексную функцию, в то время как наши задачи предполагают, что ϕ является скалярным полем с действительными значениями. Чтобы понять, какой в этом смысл, вспомним, что

$$e^{i(kx - \omega t)} = \cos(kx - \omega t) + i \sin(kx - \omega t), \quad (5.25)$$

где $kx - \omega t$ — действительная функция. Формула (5.25) подчеркивает тот факт, что комплексная функция является суммой действительной функции и другой действительной функции, взятой с множителем i . Коль скоро получено решение в виде $e^{i(kx - \omega t)}$, эти две действительные функции можно рассматривать как два решения, игнорируя мнимую единицу i . Это легко увидеть, если приравнять комплексную функцию нулю. В этом случае ее действительная и мнимая части должны по отдельности равняться нулю, и обе эти части являются решениями.¹ В уравнении (5.25)

$$\cos(kx - \omega t)$$

является действительной частью, а

$$\sin(kx - \omega t)$$

— мнимой.

Если уж мы в конечном итоге выделяем в качестве наших решений действительные функции, зачем вообще заморачиваться с функциями комплексными? Причина в том, что с производными экспоненциальных функций очень легко работать.

5.9. Волны

Рассмотрим волновое уравнение и решим его. У нас уже есть лагранжиан для ϕ :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right].$$

Однако я хочу его немного расширить, добавив к нему еще один член. Этот добавочный член $-\frac{1}{2}\mu^2\phi^2$ тоже скаляр. Это простая

¹ Сбивает с толку то, что мнимая часть комплексной функции является действительной функцией, которая умножается на i .

функция ϕ , которая не содержит никаких производных. Параметр μ^2 — константа. Наш модифицированный лагранжиан поля будет таким:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 - \mu^2 \phi^2 \right]. \quad (5.26)$$

Этот лагранжиан служит теоретикополевым аналогом гармонического осциллятора. Если бы мы обсуждали гармонический осциллятор и обозначили бы координату осциллятора ϕ , его кинетическая энергия равнялась бы

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2}.$$

Потенциальная энергия осциллятора была бы равна $\frac{1}{2} \mu^2 \phi^2$, где μ^2 соответствует коэффициенту жесткости. Лагранжиан был бы равен

$$\frac{\dot{\phi}^2}{2} - \frac{\mu^2 \phi^2}{2}.$$

Этот лагранжиан представлял бы добрый старый гармонический осциллятор. Он похож на наш лагранжиан поля (5.26). Единственное отличие в том, что у лагранжиана поля есть некоторые пространственные производные. Выведем уравнения движения, которые соответствуют уравнению (5.26), а затем решим их. Начнем с временной компоненты. Согласно уравнениям Эйлера — Лагранжа, следует вычислить для (5.26)

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)}.$$

Легко видеть, что в результате получается

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}.$$

Это аналог члена ускорения для гармонического осциллятора. Дополнительные члены получаются за счет производных от пространственных компонент (5.26). С учетом этих добавочных членов левая часть уравнения движения принимает вид

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.$$

Чтобы найти правую часть, вычислим $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}$, в результате чего получим

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = -\mu^2 \phi.$$

Объединяя результаты для левой и правой частей уравнений Эйлера — Лагранжа, получаем уравнение движения для ϕ :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\mu^2 \phi.$$

Теперь перенесем все в левую часть:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} + \mu^2 \phi = 0. \quad (5.27)$$

Мы получили прекрасное простое уравнение. Узнаете его? Это уравнение Клейна — Гордона, которое предшествовало уравнению Шрёдингера и было попыткой описать квантовомеханическую частицу. Оно похоже на уравнение Шрёдингера.¹ Ошибкой Клейна и Гордона было то, что они пытались сделать свое уравнение релятивистским. Если бы не это, они получили бы уравнение Шрёдингера и прославились. Но они написали релятивистское уравнение и прославились гораздо меньше. Связь уравнения Клейна — Гордона с квантовой механикой для нас сейчас не важна. Что нам нужно, так это решить его.

¹ В уравнение Шрёдингера входит только первая производная по времени, и оно содержит мнимую единицу i .

Решений у него много, и все они строятся из плоских волн. Работая с осциллирующими системами, полезно сделать вид, что координаты комплексные. Тогда в конце вычислений мы берем действительные части и игнорируем мнимую единицу i . Эту идею мы объясняли выше в «Математической интерлюдии».

Нас интересуют решения, которые осциллируют со временем и имеют составляющую вида

$$e^{-i\omega t}.$$

Эта функция колеблется с частотой ω . Но нас интересуют решения, которые осциллируют также и в пространстве, то есть имеют вид e^{ikx} . В трех измерениях мы можем записать это так:

$$e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)},$$

где три коэффициента, k_x , k_y и k_z , называются волновыми числами.¹ Произведение этих двух функций

$$\phi = e^{-i\omega t} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} \quad (5.28)$$

является функцией, которая осциллирует u в пространстве, u во времени. Мы будем искать решения в этой форме.

Оказывается, есть остроумный способ выразить правую часть уравнения (5.28) — записать ее как

$$e^{-i\omega t} e^{i(k_x x + k_y y + k_z z)} = e^{i(k_\mu X^\mu)}. \quad (5.29)$$

Откуда взялось это выражение? Если представить k как 4-вектор с компонентами $(-\omega, k_x, k_y, k_z)$, то выражение $k_\mu X^\mu$ в правой части — это просто $-\omega t + k_x x + k_y y + k_z z$.² Такая запись выглядит

¹ Можно представлять их как три компоненты волнового вектора, где $\vec{k} \cdot \vec{x} = k_x x + k_y y + k_z z$.

² Оказывается, $(-\omega, k_x, k_y, k_z)$ — это и правда 4-вектор, но мы этого не доказали.

элегантно, но мы пока будем придерживаться первоначальной формы.

Посмотрим, что произойдет, если попытаться подставить предложенное нами решение (5.28) в уравнение движения (5.27). Будем брать различные производные ϕ . Уравнение (5.27) диктует нам, какие именно производные брать. Начнем с того, что возьмем вторую производную от ϕ по времени. Дважды дифференцируя (5.28) по времени, получим

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\omega^2 \phi,$$

а дважды дифференцируя по x —

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = -k_x^2 \phi.$$

Аналогичные результаты дает дифференцирование по y и z . Пока что уравнение Клейна — Гордона породило члены

$$(-\omega^2 + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)\phi,$$

основанные на предложенном нами решении. Но мы еще не закончили. Уравнение (5.27) содержит также член $+\mu^2\phi$. Его надо добавить к остальным членам. В результате имеем

$$(-\omega^2 + k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \mu^2)\phi = 0.$$

Теперь решение найти легко. Просто приравняем множитель в скобках нулю и получим

$$\omega = \pm \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 + \mu^2}. \quad (5.30)$$

Это выражение позволяет выразить частоту через волновые числа. Уравнению удовлетворяют либо $+\omega$, либо $-\omega$. Заметим также, что каждый член под знаком квадратного корня сам является квадратом. Поэтому если некоторое конкретное значение,

скажем, k_x , является частью решения, то такое же по модулю отрицательное значение тоже будет решением.

Отметим параллель между этими решениями и формулой для энергии (3.43) из лекции 3:

$$E = \pm \sqrt{P^2 + m^2}.$$

Формула (5.30) в классической теории поля представляет собой версию уравнения, описывающего квантово-механическую частицу с массой μ , энергией ω и импульсом k .¹ Мы будем возвращаться к нему снова и снова.

¹ Эти уравнения должны также содержать некоторые планковские постоянные, о которых я умолчал.

Интерлюдия: чокнутые единицы

Ленни: Эй, Арт, привет, хочешь, поболтаем о единицах измерения?

Арт: Электромагнитных, что ли? Ой-вей. Уж лучше я прокопаю кротовые норы.¹ Может, не надо?

Ленни: Тогда выбирай: единицы или рыть нору до ужина.

Арт: Ладно, Ленни, ты выиграл — единицы.

Когда я только начал изучать физику, мне не давала покоя мысль: почему в этой науке все основные численные константы — так называемые фундаментальные постоянные — либо очень большие, либо очень маленькие? Гравитационная постоянная Ньютона равна $6,7 \times 10^{-11}$, число Авогадро $6,02 \times 10^{23}$, скорость света 3×10^8 , постоянная Планка $6,6 \times 10^{-34}$, размер атома 10^{-10} . Вот в математике все было нормально: $\pi \approx 3,14159$, $e \approx 2,718$. Эти естественные математические постоянные не были ни большими, ни маленькими, и хотя в них была своя абстрактная странность, я мог вывести их значения из тех математических фактов, которые были мне известны. Понятно, почему в биологии могут

¹ Кротовые норы (wormholes), или «червоточины», — введенный Дж. А. Уилером термин, обозначающий гипотетические «туннели» в пространстве-времени, согласующиеся с ОТО топологические особенности пространственно-временного континуума. — *Примеч. пер.*

встречаться неприятные числа — это вообще мутный предмет, — но физика? Откуда такое уродство в фундаментальных законах природы?

И.1. Единицы и масштаб

Ответ оказался неожиданным: численные значения так называемых фундаментальных констант на самом деле в большей степени имеют отношение именно к биологии, а не к физике.¹ К примеру, возьмем размеры атома, около 10^{-10} метров. Но почему мы пользуемся метрами? Откуда вообще взялся метр и почему он настолько больше атома?

Когда начинаешь задавать такие вопросы, ответ постепенно приходит сам собой. Метр — это единица, удобная для измерения длины в обычных человеческих масштабах. Похоже, метр появился как единица измерения длины каната или размера куска ткани и был просто расстоянием от кончика носа человека (предположительно, короля) до кончиков пальцев его же вытянутой руки.

Но тогда появляется другой вопрос: почему человеческая рука настолько больше — в 10^{10} раз — радиуса атома? Ответ ясен: чтобы создать разумное существо, которое способно даже измерить длину каната, требуется очень много атомов. То есть малость атома по сравнению с человеком — это и правда не физика, а биология. Ты не заснул, Арт?

Теперь скорость света: почему она так велика? И здесь ответ, возможно, в большей степени относится к жизни, чем к физике. Во Вселенной, конечно, есть места, где предметы — даже большие

¹ Если вы прочли нашу предыдущую книгу по квантовой механике, вы уже знакомы с этими рассуждениями. Интересно, что масштабы, которые определяют наш выбор единиц измерения, ограничивают и нашу способность непосредственно воспринимать квантовые эффекты с помощью органов чувств.

предметы огромной массы — движутся друг относительно друга со скоростью, близкой к скорости света. Только недавно были открыты две черные дыры, обращающиеся одна вокруг другой со скоростью, составляющей значительную часть скорости света. Они врезались друг в друга, но так уж бывает — двигаться слишком быстро небезопасно. По сути, оказаться в среде, полной объектов, проносящихся мимо почти со скоростью света, было бы смертельно для наших нежных мягких тел. Так что опять же тот факт, что по масштабам обычного человеческого опыта свет движется очень быстро, относится, по крайней мере частично, к биологии. Мы можем жить только там, где предметы с большой массой двигаются медленно.

Число Авогадро? Опять-таки разумные существа должны быть большими в молекулярном масштабе, и объекты, с которыми нам легко обращаться, такие как мензурки и пробирки, тоже большие. В колбу должно помещаться большое число молекул газа или жидкости — снова для удобства наших больших и мягких тел.

Существуют ли единицы, более приспособленные для отражения фундаментальных физических принципов? Конечно да, но давайте сначала вспомним о том, что написано во всех учебниках. Есть три фундаментальных единицы: длины, массы и времени. Если бы, например, мы решили измерять длину в единицах радиуса водородного атома, а не в длинах человеческой руки, из уравнений атомной физики и химии исчезли бы слишком большие или слишком малые константы.

Однако в радиусе атома нет ничего универсального. Физики-ядерщики все равно бы жаловались на то, что размеры протона или тем более кварка по сравнению с радиусом атома страшно малы! Кажется, почему бы тогда не принять за стандарт радиус кварка? Но тогда стали бы жаловаться теоретики квантовой гравитации: «Слушайте, в этой шкале наши уравнения все равно выглядят безобразно: ведь планковская длина в ваших дурацких ядерных единицах составляет 10^{-19} . Да и потом, планковская длина, уж конечно, гораздо фундаментальнее, чем размер какого-то кварка».

И.2. Планковские единицы

Итак, в книгах написано, что есть три основные единицы: длины, массы и времени. А существует ли самая естественная система единиц? Или, иначе говоря, можно ли найти три явления столь фундаментальных и столь универсальных, что мы можем взять их для определения самой фундаментальной системы единиц? Думаю, можно, — и так же думал Планк в 1900 году. Его идея заключалась в том, чтобы выбрать совершенно универсальные аспекты физики, то есть в равной мере применимые ко всем физическим системам. Если опустить некоторые незначительные исторические детали, вот как рассуждал Планк.

Первый универсальный факт заключается в том, что существует предел скорости, которому подчиняется весь материальный мир. Никакой объект — вообще *никакой*, будь то фотон или шар для боулинга, — не может превысить скорость света. Это придает скорости света универсальность, которой не обладает скорость звука или какая-либо иная скорость. Планк предложил выбрать наши самые фундаментальные единицы так, чтобы скорость света равнялась единице, $c = 1$.

Затем он перешел к другому универсальному свойству мира — гравитации. Универсальный закон тяготения Ньютона гласит: *любой объект во Вселенной притягивает любой другой объект с силой, равной гравитационной постоянной Ньютона, умноженной на произведение масс этих объектов и деленной на квадрат расстояния между ними*. Из этого закона нет исключений; ничто не может избежать действия гравитации. И снова Планк отметил в тяготении нечто универсальное, не свойственное другим силам. Он заключил, что наиболее фундаментальная система единиц должна быть определена так, чтобы постоянная тяготения Ньютона равнялась единице: $G = 1$.

И наконец, третье универсальное свойство природы, которое, правда, Планк в 1900 году не мог полностью оценить, это прин-

цип неопределенности Гейзенберга. Если опустить длинные объяснения, то, по сути, он заключается в том, что все объекты в природе подчиняются одному и тому же ограничению точности, с которой они могут быть измерены: *произведение неопределенности положения на неопределенность импульса объекта не может быть меньше, чем постоянная Планка, деленная на 2*:

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (\text{И.1})$$

Опять-таки это — универсальное свойство, приложимое к любому объекту, неважно, большому или маленькому: людям, атомам, кваркам — к чему угодно. Планк сделал вывод, что фундаментальная система единиц должна быть такой, чтобы его «собственная» константа — постоянная Планка \hbar — равнялась 1. Этих требований оказалось достаточно для построения трех основных единиц: длины, массы и времени. Сегодня эта система единиц и называется планковской.

Так почему же все физики не пользуются планковскими единицами? Нет сомнений, что в этой системе фундаментальные законы физики можно было бы выразить в самой простой форме. На самом деле многие физики-теоретики и правда используют единицы Планка. Но для обычных целей они крайне неудобны. Представьте, что было бы, если бы мы применяли планковскую систему единиц в повседневной жизни. Дорожный знак на автомагистрали тогда выглядел бы так:

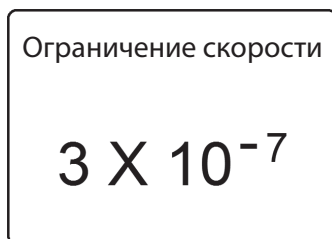


Рис. И.1. Дорожный знак в планковских единицах

Расстояние до ближайшего съезда было бы, к примеру, 10^{38} , а на вопрос о времени до закрытия кафе вы получали бы ответ: $8,6 \times 10^{46}$. Для физика еще большим неудобством было бы то, что обычные лабораторные единицы выражались бы непомерно огромными или, наоборот, маленькими числами. Из соображений удобства мы и живем с единицами, приспособленными к нашим биологическим ограничениям. (Что все равно не объясняет того невероятного факта, что в нашей стране, в Америке, мы все еще пользуемся в качестве мер дюймами, футами, ярдами, слагами,¹ пинтами, квартами и чайными ложками.)

1.3. Электромагнитные единицы

Арт: Окей, Ленни, я тебя понял. А как насчет электромагнитных единиц измерения? Они, похоже, какие-то особенно противные. Что, например, это за штука во всех уравнениях, ϵ_0 , которая в учебниках называется диэлектрической постоянной вакуума?² Почему вообще вакуум имеет какую-то диэлектрическую постоянную и почему она равна $8,85 \times 10^{-12}$? Как-то это чудно.

Арт прав: электромагнитные единицы — вот настоящая головная боль. И он прав в том, что нет никакого смысла рассматривать вакуум как диэлектрик — во всяком случае, в классической физике. Этот язык — пережиток старой теории эфира.

Настоящий вопрос: для чего понадобилось вводить новую единицу для электрического заряда — так называемый кулон? История интересная и действительно основанная на некоторых физических фактах, но, вероятно, не на тех, которые вы могли

¹ Слаг — масса, которой сила в 1 фунт сообщает ускорение в 1 фут/с: 14,6 кг. — *Примеч. пер.*

² Еще ее называют диэлектрической проницаемостью вакуума. (Сейчас установился русскоязычный термин «электрическая постоянная» — *Примеч. ред.*)

бы себе представить. Начну с того, что расскажу вам, как бы я сам попытался все это устроить и почему бы это у меня не получилось.

Я бы сделал вот что: сначала попытался бы точно измерить силу, действующую между двумя электрическими зарядами, скажем, натерев как следует два пенопластовых шарика кошачьим мехом, пока они основательно не наэлектризуются. Допустим, я бы обнаружил, что сила подчиняется закону Кулона:

$$F = \frac{q_1 q_2}{r^2}. \quad (\text{И.2})$$

Затем я бы объявил, что единица заряда, для которой $q = 1$, определяется тем, что два таких единичных заряда, разнесенные на 1 метр, действуют друг на друга с силой в 1 ньютон. (Ньютон — это единица силы, необходимая, чтобы придать массе в 1 килограмм ускорение 1 метр в секунду за секунду.) При таком подходе не было бы необходимости создавать новую независимую единицу заряда, и закон Кулона выглядел бы просто — так, как я и записал выше.

Может, если бы я оказался особенно умным и обладал бы некоторым даром предвидения, я добавил бы в знаменатель закона Кулона множитель 4π :

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi r^2}. \quad (\text{И.3})$$

Но это просто деталь.

Теперь о том, почему у меня ничего бы не вышло или, по крайней мере, почему мне не удалось бы добиться хорошей точности. Потому, что с зарядами работать трудно: ими трудно управлять. Нанести приличное количество заряда на пенопластовый шарик трудно, потому что электроны отталкиваются друг от друга и стремятся соскочить с шарика. Поэтому исторически была применена другая стратегия.



Рис. И.2. Параллельные провода. Ток не течет, потому что цепь разомкнута

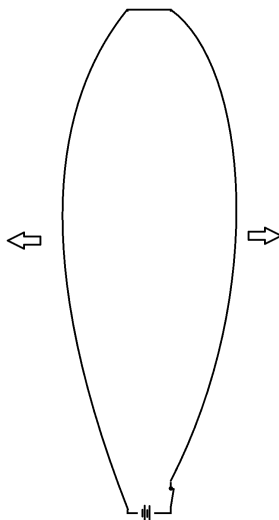


Рис. И.3. Параллельные провода, по которым в противоположных направлениях течет ток. Цепь замкнута

В отличие от зарядов, работать с электрическими токами в проводниках легко. Ток — это движущийся заряд, но так как отрицательные заряды движущихся электронов в проводнике связаны с положительными зарядами атомных ядер, ими легко управлять. Поэтому вместо того чтобы измерять силу взаимодействия между двумя статическими зарядами, мы измерим силу, действующую между двумя токонесущими проводами. Рисунки И.2 и И.3 иллюстрируют принцип работы такого устройства. Мы начнем с того, что построим электрическую цепь из батареи, выключателя и двух длинных параллельных проводов, разделенных известным расстоянием. Для простоты это расстояние можно сделать равным 1 метру, хотя на практике мы, наверное, захотим сделать его гораздо меньше.

Теперь замкнем контакт и пустим ток. Провода будут отталкиваться друг от друга по причинам, которые будут объяснены

в этой книге позже. Мы увидим, что провода в ответ на действие силы выгибаются в разные стороны друг от друга. И, по сути, мы можем воспользоваться степенью этого изгиба для измерения силы (на единицу длины). Это позволит нам определить единицу электрического тока, называемую *ампером*.

Один ампер — это сила тока, необходимая, чтобы заставить параллельные провода, разделенные расстоянием в 1 метр, отталкиваться друг от друга с силой в 1 ньютон на метр длины.

Отметим, что таким образом мы определили единицу тока, а не электрического заряда. Ток измеряется количеством заряда, проходящего через каждую точку цепи за единицу времени. Например, это количество заряда, проходящего через батарею за 1 секунду.

Арт: Но погоди, Ленни. Разве этот способ не позволяет нам определить и единицу заряда? Разве мы не можем сказать, что наша единица заряда — назовем этот заряд одним кулоном — это количество заряда, которое проходит через батарею за одну секунду, при условии что ток равен одному амперу?

Ленни: Отлично! Это именно так и есть. Повторю еще раз: кулон — это по определению количество заряда, проходящее в цепи за одну секунду, когда ток равен одному амперу, то есть когда сила, действующая между проводами, составляет один ньютон на метр длины (в предположении, что провода разнесены на один метр).

Недостаток такого подхода в том, что определение кулона оказывается косвенным. А достоинство — в том, что этот эксперимент так прост, что даже я выполнял его в лаборатории. Проблема, однако, в том, что единица заряда, определенная таким образом — не та единица, которую мы получили бы, измеряя силу, действующую между статическими зарядами.

А как же их сравнить? Чтобы ответить на этот вопрос, мы могли бы попытаться набрать два ведерка зарядов, каждое с кулон, и измерить силу, действующую между ними. Даже если бы это было возможно, это было бы опасно: кулон — это заряд огромной величины. Ведерко взорвалось бы, и заряд просто разлетелся бы в разные стороны. Возникает вопрос, почему для производства скромной силы в 1 ньютон нужно, чтобы по проводам прошел такой огромный заряд?

Арт: А почему между проводами вообще возникает сила? Хоть по ним и текут электроны, общий заряд провода нулевой. Непонятно, откуда берется какая-то сила.

Ленни: Да, ты прав, полный заряд равен нулю. Эта сила не электростатическая. Она возникает благодаря магнитному полю, порожденному движением зарядов. Положительно заряженные атомные ядра покоятся и не возбуждают магнитного поля, а движущиеся электроны возбуждают.

Арт: Ладно, но ты все равно не сказал мне, почему для того, чтобы породить силу взаимодействия между двумя проводами всего в один ньютон, требуется такое колоссальное количество движущихся зарядов. Может, я чего-то не учитываю?

Ленни: Только одного: заряды движутся очень медленно.

Да, электроны в обычных токонесущих проводах действительно движутся очень медленно. То есть скачет электрон туда-сюда очень быстро, но, как пьяный моряк, никак не может понять, куда ему идти, и шатается в разные стороны. В среднем электрону требуется примерно час, чтобы пройти по проводу расстояние в 1 метр. Это и правда не впечатляет, но вопрос в том, с чем эту скорость сравнивать? Электроны движутся очень медленно по сравнению с естественной физической единицей скорости —

скоростью света. В конечном счете, именно поэтому для производства сколько-нибудь заметной силы и требуется, чтобы по проводам прошло огромное количество заряда.

Теперь, когда мы знаем, что стандартная единица заряда, кулон, — это ошеломляюще большое количество заряда, вернемся к закону Кулона. Между двумя зарядами размером в один кулон возникает гигантская сила. Чтобы это учесть, нам придется ввести в закон огромную постоянную. Вместо

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi r^2}$$

мы запишем

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (\text{И.4})$$

где ϵ_0 — очень малая величина, $8,85 \times 10^{-12}$.

Арт: Итак, в конечном счете выяснилось, что эта странная диэлектрическая постоянная вакуума не имеет никакого отношения к диэлектрикам. Она связана с тем, что поток электронов в металлических проводах похож на медленно текущую вязкую патоку. А почему бы нам просто не избавиться от ϵ_0 и положить эту постоянную равной 1?

Ленни: Отличная идея, Арт. Давай отныне так и делать. Но только не забудь, что мы будем работать с зарядами величиной около одной трехсоттысячной доли кулона. Забудешь о переводном коэффициенте — взлетишь на воздух!

ЛЕКЦИЯ 6

Сила Лоренца¹

Арт: Ленни, что это там за представительный джентльмен с бородой и в очках в проволочной оправе?

Ленни: А, голландский дядюшка? Серьезный тип, всем читает наставления. Это Хендрик. Хочешь, познакомлю?

Арт: Конечно. Он что, твой друг?

Ленни: Арт, да здесь все мои друзья. Пошли, я тебя представлю.

Арт Фридман, познакомься. Это мой друг Хендрик Лоренц.

Бедняга Арт этого совсем не ожидал.

Арт: Лоренц? Ты сказал Лоренц? О господи! Так вы...? Это он? Вы что, правда? Да неужели вы и правда тот самый...

Величественный, как всегда, ХЛ с достоинством кланяется.

Лоренц: Хендрик Антон Лоренц, к вашим услугам.

Немного позже, все еще ошеломленный, Арт шепотом спрашивает: Ленни, это правда и есть тот самый Лоренц? Который открыл преобразования Лоренца?

Ленни: Конечно, он их открыл, и еще много чего. Принеси-ка мне салфетку и карандаш, я тебе расскажу про закон его силы.

¹ Так как эти диалоги происходят в альтернативной Вселенной, Арт сейчас еще раз впервые встретится с Лоренцем.

Мало какие из фундаментальных сил природы — а их ведь много — были известны до 1930-х годов. Большинство из них таится глубоко в микроскопическом квантовом мире и стало доступно наблюдению только с развитием современной физики элементарных частиц. Большая часть фундаментальных сил относятся к тем, которые физики называют *близкодействующими*. Это значит, что они возникают только между объектами, разделенными очень малыми расстояниями. Близкодействующие силы так быстро ослабевают с ростом расстояния между объектами, что они по большей части незаметны в обычном мире. Примером служит так называемое сильное взаимодействие между нуклонами (протонами и нейтронами). Это могучая сила, роль которой — удерживать эти частицы вместе в атомных ядрах. Но как ни могуча эта сила, в обычных условиях мы ее не замечаем. Причина в том, что ее действие экспоненциально падает, когда нуклоны разделены расстоянием, превышающим примерно 10^{-15} метров. Замечаем мы только *дальнодействующие* силы, которые с расстоянием ослабевают медленно.

Древним из всех сил природы известны были только три — электрическая, магнитная и гравитационная. Рассказывали, что Фалес Милетский (600 г. до н. э.) заставлял двигаться птичьи перья, натерев янтарь кошачьим мехом. Примерно тогда же он описал магнетит, естественный магнитный минерал. Аристотель, ученый довольно поздней Античности, задумывался о природе тяготения, пусть его теория и оказалась совершенно неверной. Других видов сил до 1930-х годов не знали.

Для всех этих легко наблюдаемых сил характерно было то, что они *дальнодействующие*. Дальнодействующие силы медленно уменьшаются с расстоянием; их действие между объектами можно заметить, когда те отделены друг от друга.

Самой заметной, самой очевидной из этих трех сил является, конечно, сила гравитации, которая, как это ни странно, гораздо слабее силы электромагнитной. Причина этой странности инте-

ресна и заслуживает небольшого отступления. История восходит к универсальному ньютонову закону гравитационного притяжения: все притягивается ко всему. Каждая элементарная частица вашего тела притягивается каждой частицей Земли. Частиц огромное число, и все они притягивают друг друга, результатом чего и является значительное и доминирующее в мире гравитационное притяжение. Но между индивидуальными частицами это притяжение слишком мало, чтобы его можно было измерить. Электрические силы, действующие между заряженными частицами, на много порядков сильнее, чем гравитационные. Но, в отличие от тяготения, электрическая сила может быть как притягивающей (между разноименными зарядами), так и отталкивающей (между зарядами одноименными). И мы, и Земля — все состоит из одинакового количества положительных зарядов (протонов) и отрицательных (электронов), а в результате эти силы друг друга нейтрализуют. Если представить, что мы каким-то образом избавились от всех электронов и в наших телах, и в Земле, то электрические силы отталкивания легко победили бы гравитационное притяжение и вышвырнули нас с земной поверхности. Да что там, и мы, и вся Земля тут же разлетелись бы на мелкие кусочки.

Но как бы то ни было, гравитация не является предметом этих лекций, а единственная остающаяся дальнедействующая сила — электромагнитная. Электрическая и магнитная силы тесно связаны друг с другом; в каком-то смысле это одно и то же, а связаны они именно в рамках теории относительности. Как мы увидим, сила, являющаяся электрической в одной системе отсчета, становится магнитной в другой, и наоборот. Иначе говоря, электрическая и магнитная силы переходят друг в друга по правилам преобразования Лоренца. Оставшаяся часть наших лекций и будет посвящена электромагнитным силам и тому, как они сводятся к единому явлению в рамках теории относительности. Вернемся к якобы принадлежащему Паули (на самом деле нет) парафразу знаменитой формулы Джона Уилера о материи

и пространстве-времени (которая ему действительно принадлежит):

Поля диктуют зарядам, как им двигаться; заряды диктуют полям, как им меняться.

Начнем с его первой половины — поля диктуют зарядам, как им двигаться. Или, говоря более прозаически, поля определяют силы, действующие на заряженные частицы.

Возьмем пример, который вам, возможно, знаком, а если еще нет, то вы с ним скоро познакомитесь. Это электрическое поле \vec{E} . В отличие от скалярного поля, которое мы обсуждали в последней лекции, электрическое поле векторное — точнее говоря, это 3-вектор. У него три компоненты и некоторое направление в пространстве. Оно определяет электрическую силу, действующую на заряженную частицу, в соответствии с формулой

$$F = e\vec{E}.$$

В этой формуле символ e обозначает электрический заряд частицы. Он может быть положительным, и в этом случае сила имеет то же направление, что и электрическое поле; он может быть отрицательным, и в этом случае сила и поле направлены в противоположные стороны; наконец, как в случае нейтрального атома, сила может быть нулевой.

Магнитные силы были впервые открыты по их действию на магниты или куски магнетита, магнитной железной руды, но они действуют и на электрически заряженные частицы, если эти частицы находятся в движении. Соответствующая формула содержит магнитное поле \vec{B} (тоже 3-вектор), электрический заряд e и скорость частицы \vec{v} . Впоследствии мы выведем эту формулу из принципа действия, но, забегаая вперед, скажем сразу, что сила, действующая на заряженную частицу в магнитном поле, равна

$$F = e\vec{v} \times \vec{B}.$$

Символ \times обозначает обычное в векторной алгебре векторное произведение, с которым, я полагаю, вы уже встречались раньше.¹ Одно интересное свойство магнитных сил заключается в том, что они не действуют, когда частица находится в покое, и растут, когда ее скорость возрастает. Если присутствуют оба поля, электрическое и магнитное, то полная действующая сила равна сумме

$$\mathbf{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}). \quad (6.1)$$

Это выражение для *силы Лоренца*, которая получила название в честь открывателя формулы (6.1).

Мы уже обсуждали скалярные поля и их взаимодействие с частицами и показали, что тот же лагранжиан (с тем же действием), который диктует полю, как ему влиять на частицу, диктует и частице, как ей влиять на поле. Забегая вперед, скажем, что мы продадем то же самое для заряженных частиц в электромагнитном поле. Но прежде чем мы этим займемся, я хочу сделать краткий обзор нашей системы обозначений и расширить ее, включив в нее объекты нового вида — *тензоры*. Тензоры являются обобщением векторов и скаляров и включают их в качестве частных случаев. Как мы увидим, электрическое и магнитное поля не являются отдельными сущностями, но объединяются в одно целое, образуя релятивистский тензор.

6.1. Расширяем обозначения

Наши основные строительные элементы — это 4-векторы с верхними и нижними индексами. В контексте специальной теории относительности разница между этими двумя видами индексов невелика. Единственное отличие касается временной компоненты 4-вектора (компоненты с нулевым индексом). Для за-

¹ См. краткий обзор векторных операций в приложении Б.

данного 4-вектора временная компонента с верхним индексом имеет знак, противоположный знаку временной компоненты с нижним индексом:

$$A^0 = -A_0.$$

Введение специальных обозначений с единственной целью отслеживания изменений знака временных компонент может показаться чрезмерным. Однако это простое соотношение является частным случаем значительно более широкого класса *геометрических* соотношений, основанных на метрическом тензоре. Когда мы будем изучать общую теорию относительности, соотношения между верхними и нижними индексами станут гораздо интереснее. А пока что верхние и нижние индексы просто обеспечивают удобную, элегантную и компактную систему записи уравнений.

6.1.1. 4-векторы: сводка результатов

Для быстрой справки приведем краткую сводку идей, изложенных в лекции 5.

У 4-векторов имеется три пространственных компоненты и одна временная. Греческие индексы, такие как μ , относятся к любой из этих компонент или ко всем сразу и могут принимать значения (0, 1, 2, 3). Первой из них (компонентой с индексом нуль) является компонента времени. Компоненты 1, 2 и 3 соответствуют направлениям x , y и z в пространстве. Например, A^0 представляет временную компоненту 4-вектора A . A^2 соответствует его пространственной компоненте в направлении y . Когда рассматриваются только три пространственные компоненты 4-вектора, их обозначают латинскими индексами, такими как m или p . Латинские индексы могут принимать значения (1, 2, 3), но не нуль. В виде формулы это можно записать так:

$$A^\mu \rightarrow A^0, A^m.$$

До сих пор я помечал 4-векторы верхними, или *контравариантными*, индексами. Принято считать, что контравариантный индекс — это то, чем помечаются сами координаты, например X^μ , или смещение по координате, например dX^μ . Величины, которые преобразуются так же, как координаты или смещения, несут верхние индексы.

Ковариантная составляющая A_μ записывается с нижним индексом, A_μ . Она описывает *тот же* 4-вектор в других обозначениях. Чтобы перейти от контравариантных обозначений к ковариантным, мы пользуемся метрикой 4×4

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Формула

$$A_\mu = \eta_{\mu\nu} A^\nu \quad (6.2)$$

превращает верхний индекс в нижний. Повторяющийся индекс ν в правой части — это индекс суммирования. Поэтому уравнение (6.2) является сокращенной записью выражения

$$A_\mu = \eta_{\mu 0} A^0 + \eta_{\mu 1} A^1 + \eta_{\mu 2} A^2 + \eta_{\mu 3} A^3.$$

Ковариантные и контравариантные компоненты любого 4-вектора A полностью идентичны — кроме временных компонент. Временные компоненты с верхними и нижними индексами имеют противоположные знаки. Уравнение (6.2) эквивалентно двум уравнениям:

$$A_0 = -A^0,$$

$$A_m = A^m.$$

Уравнение 6.2 дает этот результат за счет присутствия -1 в верхней левой позиции $\eta_{\mu\nu}$.

6.1.2. Образование скаляров

Для любых двух 4-векторов A и B можно образовать произведение $A_\nu B^\nu$ из верхних компонент одного и нижних компонент другого.¹ В результате получается скаляр, то есть величина, имеющая одно и то же значение во всех системах отсчета:

$$A_\nu B^\nu = \text{скаляр}.$$

Повторяющийся индекс ν обозначает суммирование по всем четырем значениям. В развернутой форме это выглядит так:

$$A_0 B^0 + A_1 B^1 + A_2 B^2 + A_3 B^3 = \text{скаляр}.$$

6.1.3. Производные

Координаты и смещения по ним служат прототипами контравариантных (с верхним индексом, или «верхних») компонент. Аналогично производные являются прототипами ковариантных («нижних») компонент. Символ ∂_μ обозначает

$$\frac{\partial}{\partial X^\mu}.$$

В лекции 5 объяснялось, почему эти четыре производные являются ковариантными компонентами 4-вектора. Можно также записать их в контравариантной форме. Подведем итоги:

Ковариантные компоненты:

$$\partial_\mu \Rightarrow \left(\frac{\partial}{\partial X^0}, \frac{\partial}{\partial X^1}, \frac{\partial}{\partial X^2}, \frac{\partial}{\partial X^3} \right).$$

¹ A и B вполне могут быть одним и тем же вектором.

Контравариантные компоненты:

$$\partial^\mu \Rightarrow \left(-\frac{\partial}{\partial X^0}, \frac{\partial}{\partial X^1}, \frac{\partial}{\partial X^2}, \frac{\partial}{\partial X^3} \right).$$

Как обычно, единственным различием между ними остается знак временной компоненты.

Символ ∂_μ сам по себе не обозначает никакой величины; он должен действовать на некоторый объект. Когда это происходит, к объекту добавляется новый индекс μ . Например, если ∂_μ действует на скаляр, он создает новый объект с *ковариантным* индексом μ . Взяв в качестве конкретного примера скалярное поле ϕ , можно записать:

$$\partial_\mu \phi = \frac{\partial \phi}{\partial X^\mu}.$$

В правой части этого выражения — набор производных, который образует ковариантный вектор:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial X^0}, \frac{\partial \phi}{\partial X^1}, \frac{\partial \phi}{\partial X^2}, \frac{\partial \phi}{\partial X^3} \right).$$

Кроме того, символ ∂_μ дает нам новый способ построить скаляр из вектора. Допустим, у нас есть 4-вектор $B^\mu(t, x)$, который зависит от времени и положения. Другими словами, B — это 4-вектор поля. Если B — дифференцируемая величина, имеет смысл рассмотреть выражение

$$\partial_\mu B^\mu(t, x).$$

По правилу суммирования это выражение требует, чтобы мы продифференцировали B^μ по каждой из четырех компонент пространства-времени и сложили результаты:

$$\partial_\mu B^\mu(t, x) = \frac{\partial B^0}{\partial X^0}, \frac{\partial B^1}{\partial X^1}, \frac{\partial B^2}{\partial X^2}, \frac{\partial B^3}{\partial X^3}.$$

В итоге получается скаляр.

Процесс суммирования, который здесь проиллюстрирован, носит весьма общий характер и называется *сверткой по индексу*. Свертка по индексу означает, что мы находим в одном и том же члене идентичные верхние и нижние индексы и затем выполняем суммирование.

6.1.4. Обобщенные преобразования Лоренца

В лекции 1 мы ввели обобщенные преобразования Лоренца. Сейчас мы вернемся к этой идее и добавим некоторые детали.

Преобразования Лоренца при движении вдоль осей y или z работают точно так же, как и при движении вдоль оси x . Это естественно — ведь направление x ничем не выделено по сравнению с любым другим направлением. В лекции 1 мы выяснили, что есть и другой класс преобразований — вращения пространства, — которые тоже рассматриваются как часть семейства преобразований Лоренца. Вращения пространства никак не влияют на временные компоненты.

Приняв это широкое определение лоренц-инвариантности, можно представить преобразования Лоренца вдоль оси y просто как поворот преобразований Лоренца вдоль оси x . Комбинируя вращения с «обычными» преобразованиями Лоренца вдоль осей (бустами), можно построить преобразования Лоренца для любого направления и поворота вокруг любой оси. Это общий набор преобразований, при которых физические законы остаются неизменными. Доказывать этот результат нам сейчас не нужно. Важно то, что физические законы инвариантны не только относительно простых преобразований Лоренца, но и относительно более широкой категории преобразований, в которую входят вращения пространства.

Как теперь уложить преобразования Лоренца в нашу новую основанную на индексах систему обозначений? Рассмотрим преобразование контравариантного вектора

$$A^\mu.$$

По определению, этот вектор преобразуется таким же образом, как и контравариантный вектор смещения X^μ . Например, уравнение преобразования временной компоненты A^0 — это

$$(A')^0 = \frac{A^0 - vA^1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Это знакомое нам преобразование Лоренца вдоль оси x , с той лишь разницей, что я обозначил временную компоненту A^0 , а x -компоненту A^1 . Мы всегда можем записать эти преобразования в матричной форме, представляя компоненты вектора в виде столбцов. Например, я могу представить компоненты 4-вектора A^μ в своей системе отсчета в виде

$$(A')^\mu.$$

Чтобы выразить эти компоненты в виде функций компонент в вашей системе отсчета, мы определим матрицу L_ν^μ с верхним индексом μ и нижним ν ,

$$(A')^\mu = L_\nu^\mu A^\nu. \quad (6.3)$$

L_ν^μ является матрицей, так как имеет два индекса; это матрица размерности 4×4 , которая перемножается с 4-вектором A^ν .¹

Проверим корректность построения формулы (6.3). В ее левой части имеется свободный индекс μ , который может принимать любое значение из набора (0, 1, 2, 3). В правой части два индекса — μ и ν . Индекс суммирования ν не является явной переменной нашего уравнения. Единственным свободным индексом в правой

¹ Это уравнение немного противоречит нашим соглашениям об обозначениях. Мы договаривались, что греческие индексы будут пробегать значения от 0 до 3. Однако стандартные матричные обозначения требуют, чтобы значения индекса менялись от 1 до 4. Мы будем придерживаться соглашения, принятого для 4-векторов (от 0 до 3). Это не приведет к каким-либо ошибкам, если соблюдать порядок координат (t, x, y, z) .

части является μ . Другими словами, в каждой из частей нашего уравнения имеется свободный контравариантный индекс μ . Следовательно, уравнение построено правильно: у него одно и то же число свободных индексов в правой и левой частях и их контравариантные буквы совпадают.

Уравнение (6.4) дает нам пример возможного практического использования L_v^μ . Мы заполнили матрицу элементами, соответствующими преобразованиям Лоренца вдоль оси x .¹

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Что означает это уравнение? Если следовать правилам умножения матриц, то (6.4) эквивалентно системе четырех простых уравнений. Первое из них определяет значение t' , первого элемента вектора в левой части. Мы положим t' равным скалярному произведению первой строки матрицы на столбец в правой части. Другими словами, уравнение для t' приобретает вид

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{vx}{\sqrt{1-v^2}} + 0y + 0z,$$

или просто

$$t' = \frac{t}{\sqrt{1-v^2}} - \frac{vx}{\sqrt{1-v^2}}.$$

¹ Мы могли бы обозначить компоненты вектора-столбца не буквами (t, x, y, z), а (A^0, A^1, A^3, A^3); то же самое можно было бы сделать и для вектора со штрихованными компонентами. Это просто разные обозначения одних и тех же величин.

Выполнив ту же процедуру для второй строки L_v^μ , получаем уравнение для x' :

$$x' = \frac{-vt}{\sqrt{1-v^2}} + \frac{x}{\sqrt{1-v^2}}.$$

А третья и четвертая строки дают уравнения

$$y' = y,$$

$$z' = z.$$

В этих уравнениях нетрудно узнать стандартные преобразования Лоренца для перемещения вдоль оси x . Если бы мы хотели вместо этого выполнить преобразования вдоль оси y , мы просто переставили бы соответствующим образом элементы матрицы. Я предоставлю вам проделать это самостоятельно.

Теперь рассмотрим другую операцию: вращение в плоскости (y, z) , где переменные t и x вообще не играют никакой роли. Вращение тоже можно представить в виде матрицы, но ее элементы будут отличаться от нашего первого примера. Начать с того, что верхний левый квадрант будет выглядеть как единичная матрица 2×2 . Это гарантирует нам, что t и x никак не будут затронуты преобразованием. А как же нижний правый квадрант? Наверно, вы уже знаете ответ. Чтобы повернуть координаты на угол θ , в число элементов матрицы следует ввести синусы и косинусы θ :

$$\begin{pmatrix} t' \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

В соответствии с правилами умножения матриц, уравнение (6.5) эквивалентно четырём уравнениям:

$$\begin{aligned}
 t' &= t, \\
 x' &= x, \\
 y' &= y \cos(\theta) + z \sin(\theta), \\
 z' &= -y \sin(\theta) + z \cos(\theta).
 \end{aligned}
 \tag{6.6}$$

Подобным же образом мы можем записать матрицы вращений в плоскостях (x, y) или (x, z) , перенося соответствующие элементы в нужные ячейки матрицы.

Определив набор матриц преобразования для простых прямолинейных движений и пространственных поворотов, мы сможем, перемножая эти матрицы, выполнять и более сложные преобразования. Таким образом, для любого сложного преобразования мы сможем сформировать свою единую матрицу. Основными строительными кирпичиками для ее построения и будут приведенные здесь матрицы простых преобразований и их аналоги для координат y и z .

6.1.5. Ковариантные преобразования

До сих пор мы разбирались, как преобразовать 4-вектор с *контравариантным* (верхним) индексом. А как выполнить преобразование 4-вектора с ковариантным (нижним) индексом?

Пусть имеется 4-вектор с ковариантными компонентами. Вы знаете, как выглядят эти компоненты в вашей системе отсчета, и хотите выяснить, какими они будут в моей.

Нужно определить новую матрицу M_μ^ν , такую, что

$$(A')_\mu = M_\mu^\nu A_\nu. \tag{6.7}$$

Этой новой матрице необходимо иметь нижний индекс μ , потому что результирующий 4-вектор в левой части имеет нижний индекс μ .

Не забывайте, что M представляет то же самое преобразование Лоренца, что и наша контравариантная матрица преобразования L ; эти две матрицы описывают одно и то же физическое преобразование координатных систем. Следовательно, M и L должны быть связаны. Их связь задается простой матричной формулой:

$$M = \eta L \eta.$$

Я предлагаю вам доказать это самостоятельно. Мы не собираемся слишком часто использовать матрицу M , но полезно знать, как именно связаны L и M для данного преобразования Лоренца.

Оказывается, что матрица η обратна себе самой, точно так же как обратна самой себе единичная матрица:

$$\eta^{-1} = \eta.$$

Объясняется это тем, что каждый диагональный элемент обратен самому себе: единица обратна единице, так же как (-1) обратна (-1) .

Упражнение 6.1. Дано уравнение преобразования (6.3) для контравариантных компонент 4-вектора A^ν , где L_ν^μ — матрица преобразования Лоренца. Покажите, что преобразования Лоренца для ковариантных компонент A_μ — это

$$(A')_\mu = M_\mu^\nu A_\nu,$$

где

$$M = \eta L \eta.$$

6.2. Тензоры

Тензор — это математический объект, который обобщает идеи скаляра и вектора; по сути, скаляры и векторы являются частными случаями тензоров. Мы будем очень активно пользоваться тензорами.

6.2.1. Тензоры 2-го ранга

Для первого знакомства с тензорами проще всего представлять их себе как «нечто с индексами». Важная характеристика тензора — это его *ранг*, то есть количество индексов. Например, скаляр — это тензор нулевого ранга (у него нет индексов), а 4-вектор — тензор первого ранга. Тензор второго ранга имеет два индекса.

Возьмем простой пример. Рассмотрим два 4-вектора, A и B . Как мы уже видели, при помощи свертки мы можем образовать их произведение $A_\mu B^\mu$, значение которого будет скаляром. Теперь, однако, рассмотрим более общий вид произведения: произведение, *результат* которого имеет два индекса, μ и ν . Начнем с контравариантной версии. Перемножим A^μ и B^ν для каждого μ и ν :

$$A^\mu B^\nu.$$

Сколько компонент имеет этот объект? Каждый индекс может принимать четыре различных значения, так что $A^\mu B^\nu$ может иметь $4 \times 4 = 16$ различных значений. Можно их перечислить: $A^0 B^0, A^0 B^1, A^0 B^2, A^0 B^3, A^1 B^0$ и так далее. Символ $A^\mu B^\nu$, таким образом, обозначает комплект из шестнадцати различных чисел. Это просто множество чисел, которые получаются при умножении μ -компонент A на ν -компонент B . Этот объект и есть тензор второго ранга. В общем случае я буду пользоваться для тензоров обозначением T :

$$T^{\mu\nu} = A^\mu B^\nu.$$

Не все тензоры конструируются таким способом из двух векторов, но два вектора всегда определяют тензор. Как преобразуется $T^{\mu\nu}$? Если известно, как преобразуется A и как преобразуется B (а они преобразуются одним и тем же способом), то можно немедленно вычислить преобразованные компоненты $A^\mu B^\nu$:

$$(T')^{\mu\nu} = (A')^\mu (B')^\nu.$$

Но мы ведь уже знаем, как преобразуются A и B — в соответствии с уравнением (6.3). Подставляя (6.3) в правую часть как A' , так и B' , получаем:

$$(T')^{\mu\nu} = L_{\sigma}^{\mu} A^{\sigma} L_{\tau}^{\nu} B^{\tau}.$$

Здесь требуется кое-что пояснить. Повторяющийся индекс в уравнении (6.3) назывался ν . Однако в предыдущем уравнении мы заменили ν на σ для множителя A и на τ для множителя B . Не забывайте, что это индексы суммирования: не имеет никакого значения, как мы их называем, если только мы обращаемся с ними правильно. Чтобы избежать путаницы, мы хотим, чтобы индексы суммирования отличались от других индексов и друг от друга.

Каждый из четырех символов в правой части обозначает число. Следовательно, мы вправе изменить их порядок. Сгруппируем элементы матрицы:

$$(T')^{\mu\nu} = L_{\sigma}^{\mu} L_{\tau}^{\nu} A^{\sigma} B^{\tau}. \quad (6.8)$$

Отметим, что теперь можно идентифицировать $A^{\sigma} B^{\tau}$ в правой части с *непреобразованным* элементом тензора $T^{\sigma\tau}$ и переписать наше уравнение так:

$$(T')^{\mu\nu} = L_{\sigma}^{\mu} L_{\tau}^{\nu} T^{\sigma\tau}. \quad (6.9)$$

Уравнение (6.9) дает нам новое правило преобразования, относящееся к новому виду объектов с двумя индексами. $T^{\mu\nu}$ преобразуется в результате воздействия матрицы преобразований Лоренца на каждый из индексов.

6.2.2. Тензоры высшего ранга

Мы можем придумать и более сложные виды тензоров — например, с тремя индексами:

$$T^{\mu\nu\lambda}.$$

Как их преобразовывать? Можно представлять их как произведение трех 4-векторов с индексами μ , ν и λ . Формула преобразования выводится прямо из этого представления:

$$(T')^{\mu\nu\lambda} = L_{\sigma}^{\mu} L_{\tau}^{\nu} L_{\kappa}^{\lambda} T^{\sigma\tau\kappa}. \quad (6.10)$$

Здесь по одной матрице преобразования для каждого индекса. Эту схему можно обобщить на любое число индексов.

В начале этого раздела я говорил, что тензор — это нечто с кучей индексов. Это правда, но это еще не все: не всякий объект с кучей индексов может считаться тензором. Для этого объект с индексами должен преобразовываться так, как в приведенных нами примерах. Формула этого преобразования может быть модифицирована для различного числа индексов или с учетом ковариантных индексов, но общая его схема должна оставаться именно такой.

Хотя тензоры определяются свойствами этих преобразований, не каждый тензор конструируется из произведения двух 4-векторов. Пусть, например, у нас есть еще два 4-вектора, C и D . Можно взять произведение $A^{\mu}B^{\nu}$ и сложить с произведением $C^{\mu}D^{\nu}$:

$$A^{\mu}B^{\nu} + C^{\mu}D^{\nu}.$$

При сложении тензоров снова получаются тензоры, и записанное выражение действительно является тензором. Но он, вообще говоря, не может быть записан в виде произведения двух 4-векторов. Его принадлежность к тензорам определяется его поведением при преобразованиях, а не тем, может ли он быть сконструирован из пары 4-векторов.

6.2.3. Инвариантность тензорных уравнений

Тензорные обозначения элегантны и компактны. Но их истинная сила в том, что тензорные уравнения инвариантны по отношению к изменению системы отсчета. Если два тензора

равны в одной системе, они равны и во всех остальных. Это легко доказать, но не забывайте, что для равенства двух тензоров должны быть равны *все* их соответствующие компоненты. Если каждая компонента тензора равна соответствующей компоненте некоторого другого тензора, то, конечно, перед нами один и тот же тензор.

Это можно выразить и так: если все компоненты тензора равны нулю в некоторой системе отсчета, они равны нулю во всех других системах. Если *одна* из компонент равна нулю в одной системе, в другой она вполне может быть и ненулевой. Но если *все* компоненты нулевые, они обязаны быть нулевыми во всех других системах.

6.2.4. Поднятие и опускание индексов

Я уже объяснял, как преобразовывать тензор, все индексы которого верхние (контравариантные компоненты). Я мог бы записать правила преобразования тензоров со смешанными верхними и нижними индексами. Но лучше я просто скажу: если известно, как преобразуется тензор, то из этого знания можно сразу же вывести, как преобразуются другие его разновидности. Под *разновидностями* я имею в виду различные версии одного и того же тензора — той же геометрической величины, — у которых некоторые верхние индексы оказались внизу, и наоборот. Рассмотрим, например, тензор

$$T^{\mu}_{\nu} = A^{\mu}B_{\nu}.$$

У этого тензора один индекс верхний, а один нижний. Как же его преобразовать? *Да легко!* Вам незачем об этом беспокоиться, потому что вы уже знаете, как преобразуется $T^{\mu\sigma}$ (оба индекса наверху), а еще вы знаете, как поднимать и опускать индексы при помощи матрицы η . Вспомним, что

$$T^{\mu}_{\nu} = T^{\mu\sigma}\eta_{\sigma\nu}.$$

Опустить индекс у тензора можно точно так же, как мы опускали индекс у 4-вектора: просто умножив его на матрицу η , как показано выше, с использованием правила суммирования. В результате получится объект T^μ_ν .

Но есть еще более простой способ это понять. Пусть дан тензор, все индексы которого верхние. Как стащить некоторые из них вниз? Очень просто. Если индекс, который вы опускаете, — временной, умножайте на (-1) . Если он пространственный, вообще ни на что не умножайте. Именно это и делает матрица η . Например, компонента тензора T^{00} в точности равна T_{00} , потому что я опустил *два* временных индекса,

$$T^{00} = T_{00}.$$

Опускание двух временных индексов означает умножение компонент на (-1) дважды. Это то же самое, что связь между

$$A^0 B^0$$

и

$$A_0 B_0.$$

Возникает два знака «минус»: при переходе от A^0 к A_0 и от B^0 к B_0 . Каждое опускание индекса вводит «минус», и поэтому первое произведение равно второму. Но как сравнить

$$A^0 B^1$$

с

$$A_0 B_1?$$

B^1 и B_1 тождественны, так как индекс 1 относится к пространственной компоненте. Но у A^0 и A_0 знаки противоположные, так как 0 — это временная компонента. Та же связь существует между компонентами тензора T^{01} и T_{01} :

$$T^{01} = -T_{01},$$

так как индекс опускается только у временной компоненты. Всякий раз, когда вы опускаете или поднимаете индекс временной компоненты, вы меняете знак. Только и всего.

6.2.5. Симметричные и антисимметричные тензоры

В общем случае, компонента тензора

$$T^{\mu\nu}$$

— это не то же самое, что

$$T^{\nu\mu},$$

где индексы μ и ν поменялись местами. Порядок индексов имеет значение. Чтобы проиллюстрировать это утверждение, рассмотрим произведение двух 4-векторов A и B . Должно быть ясно, что

$$A^\mu B^\nu \neq A^\nu B^\mu.$$

Например, если мы возьмем конкретные значения компонент 0 и 1, мы увидим, что

$$A^0 B^1 \neq A^1 B^0.$$

Это очевидным образом не всегда одно и то же: A и B являются двумя различными 4-векторами и не существует никакой внутренней причины, по которой любые из компонент A^0, A^1, B^0 или B^1 были как-то связаны друг с другом.

Но хотя *в общем случае* тензоры не инвариантны к изменению порядка индексов, существуют особые ситуации, в которых они все же инвариантны. Тензоры, обладающие этим особым свойством, называются *симметричными*. Это свойство симметричного тензора можно записать так:

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}.$$

Сейчас я построю такой тензор. Если A и B — 4-векторы, то

$$A^\mu B^\nu + A^\nu B^\mu$$

— симметричный тензор. Если поменять местами индексы μ и ν , значение этого выражения не изменится. Попробуем это сделать. Когда вы переписываете первый член, он становится равным исходному второму члену; когда вы переписываете второй — он становится равным исходному первому. Сумма переписанных членов, таким образом, равна сумме исходных. И если взять любой тензор второго ранга, можно построить симметричный тензор именно так, как мы это сейчас сделали.

Симметричные тензоры занимают особое место в общей теории относительности. В специальной теории относительности они не так важны, но все же часто используются. Но важнее здесь *антисимметричные* тензоры, которые обладают свойством

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}.$$

Другими словами, когда вы меняете местами индексы, каждая компонента сохраняет свое абсолютное значение, но меняет знак. Чтобы построить антисимметричный тензор из двух 4-векторов, можно записать

$$A^\mu B^\nu - A^\nu B^\mu.$$

Это почти тот же прием, которым мы сконструировали симметричный тензор, с той лишь разницей, что теперь мы поставили между двумя членами знак минус, а не плюс. В результате получился тензор, компоненты которого меняют знак при обмене местами μ и ν . Попробуйте это сделать сами.

У антисимметричных тензоров меньше независимых компонент, чем у симметричных. Причина в том, что их диагональные компоненты должны быть нулевыми.¹ Если $F^{\mu\nu}$ — антисимметричный

¹ Диагональные компоненты — это компоненты с двумя равными друг другу индексами, например A^{00} , A^{11} , A^{22} и A^{33} .

тензор, каждая его диагональная компонента должна быть равна самой себе с обратным знаком, а единственный случай, когда это возможно, — равенство данной компоненты нулю. Например,

$$F^{00} = -F^{00} = 0.$$

Эти два индекса равны (что и должно быть, если они являются диагональными компонентами), а нуль — единственное число, которое равно самому себе с обратным знаком. Если представить себе тензор второго ранга как матрицу (двумерный массив), то у матрицы, представляющей антисимметричный тензор, все диагональные члены равны нулю.

6.2.6. Антисимметричный тензор

Я уже упоминал о том, что электрическое и магнитное поля соединяются, образуя тензор. Точнее, они образуют антисимметричный тензор. В дальнейшем мы обоснуем тензорную природу полей \vec{E} и \vec{B} , но пока просто используем этот факт в качестве иллюстрации.

Названия элементов антисимметричного тензора обычно намекают на их физическое содержание, но сейчас они произвольны. Все диагональные элементы равны нулю. Обозначим наш тензор $F^{\mu\nu}$. Для удобства выпишем нижние (ковариантные) компоненты $F_{\mu\nu}$:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ +E_1 & 0 & +B_3 & -B_2 \\ +E_2 & -B_3 & 0 & +B_1 \\ E_3 & +B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.11)$$

Этот тензор играет ключевую роль в электромагнетизме, где \vec{E} обозначает электрическое поле, а \vec{B} — магнитное. Мы убедимся в том, что электрическое и магнитное поля объединяются и образуют антисимметричный тензор. Поля \vec{E} и \vec{B} не являются

независимыми друг от друга. В том же смысле, в котором x может смешиваться с t в рамках преобразований Лоренца, \vec{E} может смешиваться с \vec{B} . В том, что вам представляется чисто электрическим полем, я могу увидеть некоторую магнитную составляющую. Мы еще не показали этого, но скоро покажем. Именно это я имел в виду, когда говорил, что электрическая и магнитная силы преобразуются друг в друга.

6.3. Электромагнитные поля

Ну что ж, займемся, наконец, физикой! Мы могли бы начать с изучения уравнений Максвелла, уравнений движения, которые управляют электромагнитными полями. Но мы сделаем это позже, в лекции 8. Пока же мы рассмотрим движение заряженной частицы в электромагнитном поле. Уравнение, задающее это движение, описывает так называемую силу Лоренца. Позже мы выведем выражение для нее из принципа действия, объединенного с релятивистскими идеями. Нерелятивистская (для низких скоростей) формула для силы Лоренца такова:

$$m\vec{a} = e \left[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right], \quad (6.12)$$

где e — заряд частицы, а остальные буквы в правой части — обычные 3-векторы.¹ Левая часть — это произведение массы на ускорение; следовательно, правая часть должна быть силой. В силу вносят вклад две составляющие — электрическая и магнитная. Оба этих члена пропорциональны электрическому заряду e .

В первом члене электрический заряд частицы e умножается на электрическое поле \vec{E} . Второй член — магнитная сила, и здесь заряд умножается на векторное произведение скорости частицы

¹ В уравнение (6.12) скорость света часто включают в явном виде. Вы иногда будете встречать его записанным через \vec{v}/c , а не просто через \vec{v} . Здесь мы используем систему единиц, в которой скорость света равна 1.

\vec{v} и окружающего магнитного поля \vec{B} . Если вы не знаете, что такое векторное произведение, пожалуйста, ликвидируйте этот пробел в ваших знаниях. В приложении Б содержится краткое определение; можно также обратиться и к *Книге I* этой серии, «*Классическая механика*» (лекция 11). Есть и множество других справочных пособий.

Большую часть работы мы выполним при помощи обычных 3-векторов.¹ Затем мы распространим наши результаты на 4-векторы и выведем полную релятивистскую формулу силы Лоренца. В итоге выяснится, что два члена в правой части уравнения (6.12) в действительности являются частями одного и того же выражения, записанного в лоренц-инвариантной форме.

6.3.1. Интеграл действия и векторный потенциал

В лекции 4 я показывал, как построить лоренц-инвариантное действие (4.28) для частицы, движущейся в скалярном поле. Давайте вкратце припомним эту процедуру. Мы начали с действия для свободной частицы (4.27),

$$\text{действие для свободной частицы} = -\int m d\tau,$$

и добавили к нему член, представляющий воздействие на частицу со стороны поля:

$$\text{новый член} = -\int \phi(t, x) d\tau.$$

У нас получилась отличная теория частицы, взаимодействующей со скалярным полем, но она не годится для частицы в электромагнитном поле. Чем бы можно было заменить это взаимодействие, чтобы получить в итоге формулу силы Лоренца? Нашей целью в оставшейся части лекции будет вывод формулы силы Лоренца (6.12) из инвариантного принципа действия.

¹ Но скоро мы введем в игру 4-векторный потенциал A_μ .

Как изменить рассматриваемый лагранжиан, чтобы он стал описывать влияние электромагнитного поля? Тут нас ждет небольшой сюрприз. Можно было бы ожидать, что корректная процедура состоит в построении лагранжиана, содержащего координаты частицы и компоненты ее скорости, который бы зависел от полей \vec{E} и \vec{B} примерно так, как действия для частицы зависят от присутствия скалярного поля. Затем, если бы все прошло хорошо, уравнение движения Эйлера — Лагранжа содержало бы силу, выражаемую формулой для силы Лоренца. Однако неожиданно обнаруживается, что это невозможно. Чтобы как-то продвинуться, нам придется ввести еще одно поле, называемое векторным потенциалом. В некотором смысле электрическое и магнитное поля являются величинами производными, сконструированными из более фундаментального векторного потенциала, который сам является 4-вектором и обозначается $A_\mu(t, x)$. Почему это 4-вектор? Откуда он взялся? Все, что я могу сейчас сделать, это попросить вас немного подождать — увидите, результат будет этого стоить.

Как использовать $A_\mu(t, x)$ для построения выражения для действия частицы в электромагнитном поле? Поле $A_\mu(t, x)$ является 4-вектором с нижним индексом. Естественно взять малый отрезок траектории, 4-вектор dX^μ , и объединить его с $A_\mu(t, x)$, чтобы получить бесконечно малую скалярную величину, связанную с этим отрезком. Для каждого отрезка траектории вычисляем

$$dX^\mu A_\mu(t, x).$$

Затем сложим эти величины, то есть проинтегрируем от одного конца траектории до другого, от точки a до точки b :

$$\int_a^b dX^\mu A_\mu(t, x).$$

Так как выражение $dX^\mu A_\mu(t, x)$ является скаляром, все наблюдатели придут к согласию относительно его значения на каждом малом отрезке. А если мы складываем величины, о значениях которых мы все пришли к единому мнению, то и после сложения

ния у нас не будет сомнений в результате и мы получим один и тот же ответ для величины действия. Следуя общепринятым соглашениям, я умножу это действие на постоянную e :

$$e \int_a^b dX^\mu A_\mu(t, x).$$

Вы, конечно, уже догадались, что e — это электрический заряд. Это второй член в выражении для действия в случае частицы, движущейся в электромагнитном поле. Соберем теперь обе части интеграла действия воедино:

$$\text{Действие} = \int_a^b -m\sqrt{1-\dot{x}^2} dt + e \int_a^b dX^\mu A_\mu(t, x). \quad (6.13)$$

6.3.2. Лагранжиан

Оба члена в уравнении (6.13) были выведены из лоренц-инвариантных построений: первый пропорционален собственному времени вдоль траектории, а второй построен из инварианта $dX^\mu A_\mu$. Что бы ни вытекало из так определенного действия, результат обязан быть лоренц-инвариантным, даже если это кажется неочевидным.

Первый член — наш старый друг, лагранжиан свободной частицы

$$-m\sqrt{1-\dot{x}^2}.$$

Второй член — это нечто новое. Будем надеяться, что он и позволит вывести формулу для силы Лоренца, хотя сейчас в нем это не просматривается. В его нынешней форме этот член

$$e \int_a^b dX^\mu A_\mu(t, x)$$

не похож на лагранжиан, так как интеграл не берется по временной координате dt . Этому горю легко помочь: просто умножим и разделим его на dt , чтобы переписать его в виде

$$e \int_a^b \frac{dX^\mu}{dt} A_\mu(t, x) dt. \quad (6.14)$$

В этой форме наш новый член является интегралом лагранжиана. Обозначая подынтегральное выражение \mathcal{L}_{int} , где int означает «взаимодействие» (interaction), получаем лагранжиан:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = e \frac{dX^\mu}{dt} A_\mu(t, x) \quad (6.15)$$

Отметим теперь, что величины

$$\frac{dX^\mu}{dt}$$

бывают двух разных типов. Первый из них

$$\frac{dX^0}{dt}.$$

Вспомнив, что X^0 и t — одно и то же, можно записать

$$\frac{dX^0}{dt} = 1.$$

Другой тип появляется, когда индекс μ принимает одно из значений (1, 2, 3), то есть соответствует одному из трех направлений в пространстве. В этом случае мы идентифицируем

$$\frac{dX^p}{dt}$$

(с латинским индексом p) как компоненты обычной скорости:

$$\frac{dX^p}{dt} = v_p.$$

Объединяя эти два выражения, запишем лагранжиан взаимодействия в виде

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = e \dot{X}^p A_p(t, x) + e A_0(t, x), \quad (6.16)$$

где повторяющийся латинский индекс p означает суммирование от $p = 1$ до $p = 3$. Так как \dot{X}^p — это компоненты скорости v_p , то

выражение $\dot{X}^p A_p(t, x)$ — не что иное, как скалярное произведение скорости и пространственной части векторного потенциала. Следовательно, можно записать уравнение (6.16) в более знакомой нам форме

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = e\vec{v} \cdot \vec{A} + eA_0.$$

Объединяя все эти результаты, можно теперь представить интеграл действия для заряженной частицы как

$$\text{Действие} = \int_a^b -m\sqrt{1-\dot{x}^2} dt + e \int_a^b [A_0(t, x) + \dot{X}^p A_p(t, x)] dt. \quad (6.17)$$

Или в более привычных обозначениях:

$$\text{Действие} = \int_a^b -m\sqrt{1-v^2} dt + e \int_a^b (A_0(t, x) + \vec{v} \cdot \vec{A}(t, x)) dt.$$

Теперь, когда полное действие выражается как интеграл по временной координате dt , мы легко определим лагранжиан как

$$\mathcal{L} = -m\sqrt{1-\dot{x}^2} + eA_0(t, x) + e\dot{X}^p A_p(t, x). \quad (6.18)$$

Точно так же, как это было в случае скалярных полей, я сейчас представлю, что A_p — известная нам функция t и x и что мы просто исследуем движение частицы в этом известном поле. Что можно сделать с уравнением (6.18)? Конечно же, записать для него уравнения Эйлера — Лагранжа!

6.3.3. Уравнения Эйлера — Лагранжа

Для удобства выпишем здесь еще раз уравнения Эйлера — Лагранжа для движения частицы:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^p}. \quad (6.19)$$

Как вы помните, это краткая форма записи трех уравнений, по одному для каждого значения p .¹ Наша цель — записать уравнения Эйлера — Лагранжа на основе уравнения (6.18) и показать, что они выглядят как формула для силы Лоренца. Для этого надо подставить \mathcal{L} из (6.18) в (6.19). Выкладки здесь получаются немного длиннее, чем в случае скалярного поля, но я помогу пройти через все их этапы. Начнем с оценки величины

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^p},$$

известной также под названием *канонического импульса*. Первый член в уравнении (6.18) должен вносить в нее какой-то вклад, так как он содержит \dot{x} . На самом деле мы уже брали эту производную еще в лекции 3, и результатом было уравнение (3.30). Правда, в нем переменные называются иначе и записано оно для обычных единиц измерения. В релятивистских единицах правая часть уравнения (3.30) превращается в

$$m \frac{\dot{X}^p}{\sqrt{1 - \dot{x}^2}}.$$

Это производная *первого* члена \mathcal{L} (6.18) по p -й компоненте скорости. Второй член \mathcal{L} не содержит \dot{x} в явном виде, и поэтому его частная производная по \dot{x} равна нулю. Однако в третьем члене содержится \dot{X}^p , и его частная производная равна

$$eA_p(t, x).$$

Объединяя эти члены, мы получаем канонический импульс:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^p} = m \frac{\dot{X}_p}{\sqrt{1 - \dot{x}^2}} + eA_p(t, x). \quad (6.20)$$

¹ Когда в знаменателе производной появляется верхний индекс, к результату дифференцирования добавляется нижний индекс. Каждый раз, когда в выражении встречается латинский индекс, мы можем поднимать или опускать его по нашему желанию, так как латинские индексы соответствуют пространственным компонентам.

Мы украдкой ввели в обозначения небольшое изменение: в уравнении (6.20) записали \dot{X}_p вместо \dot{X}^p . Но это ничего не меняет, поскольку индексы пространственных компонент, такие как p , можно по желанию поднимать или опускать без изменения их значения. В данном случае нижний индекс согласуется с левой частью уравнения и в последующих преобразованиях его удобно писать именно в этой позиции. Теперь, руководствуясь уравнением (6.19), возьмем производную по времени:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{X}^p} = \frac{d}{dt} \left[m \frac{\dot{X}_p}{\sqrt{1 - \dot{x}^2}} + e A_p(t, x) \right].$$

Это полная форма левой части уравнения Эйлера — Лагранжа. А как обстоят дела с правой? Она равна

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^p}.$$

Как \mathcal{L} зависит от X_p ? Второй член, $e A_0(t, x)$, явно зависит от X_p . Его производная равна

$$e \frac{\partial A_0}{\partial X^p}.$$

Остался только еще один член, который надо учесть: $e \dot{X}^p A_p(t, x)$. Он смешанный в том смысле, что зависит и от скорости, и от положения. Но в левой части уравнения Эйлера — Лагранжа мы уже учли зависимость от скорости. Теперь для правой части мы возьмем частную производную по X^p :

$$e \dot{X}^n \frac{\partial A_n}{\partial X^p}.$$

Теперь мы можем полностью записать и правую часть уравнения Эйлера — Лагранжа:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial X^p} = e \frac{\partial A_0}{\partial X^p} + e \dot{X}^p \frac{\partial A_n}{\partial X^p}.$$

И, приравнивая ее к левой части, получаем в результате:

$$\frac{d}{dt} \left[m \frac{\dot{X}_p}{\sqrt{1 - \dot{x}^2}} + e A_p(t, x) \right] = e \frac{\partial A_0}{\partial X^p} + e \dot{X}^n \frac{\partial A_n}{\partial X^p}. \quad (6.21)$$

Что-то знакомое, не так ли? Первый член в левой части напоминает массу, умноженную на ускорение, с той разницей, что в знаменателе стоит квадратный корень. При малых скоростях этот квадратный корень очень близок к 1, и тогда этот член становится «массой на ускорение». О втором члене, $\frac{d}{dt} e A_p(t, x)$, мы подробнее поговорим позже.

Возможно, вы не узнали первый член в правой части уравнения (6.21), а ведь многим из вас он наверняка знаком. Однако чтобы увидеть это, нам придется использовать другие обозначения. Исторически временная компонента векторного потенциала $A_0(t, x)$ обозначалась $-\phi(t, x)$ и называлась электростатическим потенциалом. Поэтому можно записать:

$$e \frac{\partial A_0}{\partial X^p} = -e \frac{\partial \phi}{\partial X^p}$$

и соответствующий член в (6.21) равен просто «минус электрический заряд на градиент электростатического потенциала». В элементарных изложениях электромагнетизма электрическое поле — это отрицательный градиент ϕ .

Посмотрим еще раз на структуру уравнения (6.21). В левой части имеется свободный (по которому нет суммирования) ковариантный индекс p . Свободный ковариантный индекс p есть и в правой части, как и индекс суммирования n . Это уравнение Эйлера — Лагранжа для компонент положения X^1 , X^2 и X^3 . Пока это еще не выглядит решением нашей задачи. Но скоро мы его получим.

Нашим следующим шагом будет получение производных по времени в левой части. С первым членом все ясно: мы просто вынесем m за знак производной и получим

$$m \frac{d}{dt} \frac{\dot{X}_p}{\sqrt{1-\dot{x}^2}}.$$

А как продифференцировать по времени второй член, $eA_p(t, x)$? Это немного труднее. Конечно, $A_p(t, x)$ может явно зависеть от времени. Но если даже это и не так, нельзя считать, что это константа, так как *положение* частицы не постоянно — оно меняется со временем, ведь частица движется. Даже если $A_p(t, x)$ не зависит от времени в явном виде, значение этого выражения изменяется во времени по мере движения частицы. В результате производная порождает два члена. Первый — это производная A_p по времени t в явном виде,

$$e \frac{\partial A_p(t, x)}{\partial t},$$

где постоянная e просто присутствует и ни на что не влияет. Второй член учитывает тот факт, что $A_p(t, x)$ также зависит от времени *неявно*. Этот член равен изменению $A_p(t, x)$ при изменении X^n , умноженному на \dot{X}^n . Объединяя эти два члена, получаем

$$e \frac{\partial A_p(t, x)}{\partial t} + e \frac{\partial A_p(t, x)}{\partial X^n} \dot{X}^n.$$

После объединения всех трех членов производной по времени левая часть (6.21) выглядит так:

$$m \frac{d}{dt} \frac{\dot{X}_p}{\sqrt{1-\dot{x}^2}} + e \frac{\partial A_p(t, x)}{\partial t} + e \frac{\partial A_p(t, x)}{\partial X^n} \dot{X}^n$$

и все уравнение можно переписать в виде

$$m \frac{d}{dt} \frac{\dot{X}_p}{\sqrt{1-\dot{x}^2}} + e \frac{\partial A_p}{\partial t} + e \frac{\partial A_p}{\partial X^n} \dot{X}^n = e \frac{\partial A_0}{\partial X^p} + e \dot{X}^n \frac{\partial A_n}{\partial X^p}. \quad (6.22)$$

Чтобы сделать выражение не таким громоздким, я пишу A_p вместо $A_p(t, x)$. Просто не забывайте, что каждая компонента A

зависит от всех четырех пространственно-временных координат. Это уравнение выглядит полностью согласованным: в обеих частях присутствует индекс суммирования n и ковариантный свободный индекс p .¹

Здесь есть над чем подумать. Давайте передохнем и поглядим, что нам удалось получить. Первый член в уравнении (6.22) — это релятивистское обобщение «массы на ускорение». Мы оставим этот член в левой части. После перенесения остальных членов в правую часть получится вот что:

$$m \frac{d}{dt} \frac{\dot{X}_p}{\sqrt{1-\dot{x}^2}} = -e \frac{\partial A_p}{\partial t} - e \frac{\partial A_p}{\partial X^n} \dot{X}^n + e \frac{\partial A_0}{\partial X^p} + e \dot{X}^n \frac{\partial A_n}{\partial X^p}. \quad (6.23)$$

Если левая часть — это релятивистское обобщение «массы на ускорение», то правая часть может быть только одним: релятивистской силой, действующей на частицу.

В правой части есть члены двух видов: пропорциональные скорости (так как содержат \dot{X}^n в качестве множителя) и остальные. Группируя их по этому признаку, в правой части мы получаем:

$$m \frac{d}{dt} \frac{\dot{X}_p}{\sqrt{1-\dot{x}^2}} = e \left(\frac{\partial A_0}{\partial X^p} - \frac{\partial A_p}{\partial t} \right) + e \dot{X}^n \left(\frac{\partial A_n}{\partial X^p} - \frac{\partial A_p}{\partial X^n} \right). \quad (6.24)$$

Арт: Черт, голова разболелась. Ничего не понимаю. Ты же вроде сказал, мы будем выводить формулу для силы Лоренца. Ну, знаешь, вот это:

$$\vec{F} = e\vec{E} + e\vec{v} \times \vec{B}.$$

А в (6.24) общего с этим разве что электрический заряд e .

Ленни: Потерпи, Арт, мы почти у цели.

¹ Но было бы вполне нормально, если бы индексы суммирования левой и правой частей уравнения были разными.

Взгляните на левую часть (6.24). Допустим, что скорость мала, так что можно не обращать внимания на квадратный корень в знаменателе. Тогда левая часть — просто «масса на ускорение», то, что Ньютон назвал бы силой. Значит, мы-таки получили нашу силу \vec{F} .

В правой части у нас два члена, один из которых содержит скорость \dot{X}^n — я мог бы обозначить ее как v_n . Второй член от скорости не зависит.

Арт: Похоже, Ленни, показался свет в конце туннеля! А член без скорости случайно не $e\vec{E}$?

Ленни: Давай, Арт, горячо! Понатужься еще чуть-чуть: а член со скоростью?

Арт: Елки-палки! Это же... Точно! Это $e\vec{v} \times \vec{B}$.

Арт совершенно прав. Рассмотрим член, не зависящий от скорости, а именно

$$e \left(\frac{\partial A_0}{\partial X^p} - \frac{\partial A_p}{\partial t} \right).$$

Если определить компоненту E_p электрического поля как

$$E_p = \left(\frac{\partial A_0}{\partial X^p} - \frac{\partial A_p}{\partial t} \right), \quad (6.25)$$

то получится первый член силы Лоренца, $e\vec{E}$.

Член, зависящий от скорости, получить немного труднее, если только вы не эксперт по векторным произведениям; в последнем случае вам будет нетрудно заметить, что это $e\vec{v} \times \vec{B}$ в покомпонентном виде. Если же вы в этом деле не мастер, ниже приводится подробный вывод.¹

¹ В преодолении оставшейся части этого раздела вам должна помочь сводка 3-векторных операторов, приведенная в приложении Б.

Вначале рассмотрим z -компоненту произведения $\vec{v} \times \vec{B}$:

$$(\vec{v} \times \vec{B})_z = v_x B_y - v_y B_x. \quad (6.26)$$

Мы хотим сравнить ее с z -компонентой выражения

$$\dot{X}^n \left(\frac{\partial A_n}{\partial X^p} - \frac{\partial A_p}{\partial X^n} \right), \quad (6.27)$$

которая получается, когда индекс p соответствует направлению z . Индекс n — это индекс суммирования, то есть надо подставить вместо него значения $(1, 2, 3)$ или эквивалентные им (x, y, z) , а затем просуммировать результаты. Короткого пути здесь нет; просто подставим все эти значения и получим

$$v_x \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + v_y \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right). \quad (6.28)$$

Упражнение 6.2. Выражение (6.28) получено отождествлением индекса p с направлением z в пространстве с последующим суммированием по $n = 1, 2, 3$.

Почему (6.28) не содержит v_z ?

Теперь все, что осталось сделать, — это связать выражение (6.28) с правой частью уравнения (6.26). Этого можно добиться, выполнив отождествления

$$B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}$$

и

$$B_x = - \left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \right).$$

Знак «минус» во втором уравнении появляется благодаря присутствию такого же знака во втором члене (6.26). Для остальных компонент можно сделать в точности то же самое. Тогда мы получим, что

$$\begin{aligned} B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\ B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\ B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Существует краткий способ записи для этих уравнений, с которым вы должны быть уже знакомы¹. В этой нотации (6.29) сводится к тому, что \vec{B} — это ротор векторного поля \vec{A} :

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (6.30)$$

Как следует интерпретировать уравнения (6.25) и (6.30)? Один из возможных способов — сказать, что векторный потенциал является фундаментальной характеристикой, задающей электромагнитное поле, а уравнения (6.25) и (6.30) определяют производные объекты, которые мы называем электрическим и магнитным полями. На это вам могут возразить, что реальные физические величины, непосредственно измеряемые в лаборатории, — это именно E и B , а векторный потенциал — это просто математический прием, придуманный для их описания. Обе интерпретации хороши: как говорится, что в лоб, что по лбу. Но как бы вы ни философствовали о том, что первично, A или (E, B) , экспериментальный факт заключается в том, что заряженные частицы движутся в соответствии с формулой Лоренца. По сути, (6.24) можно записать в полностью релятивистски инвариантном виде:

¹ Эта система тоже описана в приложении Б.

$$m \frac{d}{dt} \frac{\dot{X}_p}{\sqrt{1-\dot{x}^2}} = e(\vec{E} \times \vec{v} \times \vec{B})_p. \quad (6.31)$$

6.3.4. Лоренц-инвариантные уравнения

Уравнение (6.31) — это лоренц-инвариантная форма уравнения движения заряженной частицы: его левая часть представляет собой релятивистскую форму произведения массы на ускорение, а правая — выражение для силы Лоренца. Мы знаем, что это уравнение лоренц-инвариантно — это вытекает из нашего определения лагранжиана. Однако оно не *заведомо* инвариантно: его инвариантность не вытекает с очевидностью из структуры уравнения. Когда физик говорит, что уравнение заведомо инвариантно относительно преобразований Лоренца, он имеет в виду, что оно записано в четырехмерной форме с верхними и нижними индексами, согласованными надлежащим образом. Другими словами, оно записано как тензорное уравнение, обе части которого преобразуются одинаково. Сделать это и будет нашей целью в оставшейся части этой лекции.

Вернемся к предыдущей форме уравнений Эйлера — Лагранжа (6.24), которые я повторю здесь для удобства изложения:

$$m \frac{d}{dt} \frac{\dot{X}_p}{\sqrt{1-\dot{x}^2}} = e \left(\frac{\partial A_0}{\partial X^p} - \frac{\partial A_p}{\partial t} \right) + e \dot{X}^n \left(\frac{\partial A_n}{\partial X^p} - \frac{\partial A_p}{\partial X^n} \right).$$

В лекциях 2 и 3 (см. (2.16) и (3.9)) мы нашли, что величины

$$\frac{\dot{X}^p}{\sqrt{1-\dot{x}^2}}$$

являются пространственными компонентами 4-вектора скорости. Другими словами,

$$\frac{\dot{X}^p}{\sqrt{1-\dot{x}^2}} = \frac{dX^p}{d\tau}.$$

Так как p — латинский индекс, мы можем также записать:

$$\frac{\dot{X}_p}{\sqrt{1-\dot{x}^2}} = \frac{dX_p}{d\tau}. \quad (6.32)$$

Следовательно (пренебрегая пока множителем m), левую часть уравнения (6.24) можно записать как

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{dX^p}{d\tau} \right).$$

Это не компоненты 4-вектора. Однако они могут принять форму 4-вектора, если домножить их на $dt/d\tau$:

$$\frac{d}{d\tau} \cdot \frac{d}{dt} \frac{dX^p}{d\tau} = \frac{d^2 X^p}{d\tau^2}.$$

Это *пространственные* компоненты 4-вектора — релятивистского ускорения. Полный 4-вектор

$$\frac{d^2 X^\mu}{d\tau^2}$$

имеет четыре компоненты. Поэтому давайте умножим обе части (6.24) на $dt/d\tau$. Заменяем t на X^0 и напишем $dX^0/d\tau$ вместо $dt/d\tau$. В результате получится

$$m \frac{d^2 X_p}{d\tau^2} = e \frac{dX^0}{d\tau} \left(\frac{\partial A_0}{\partial X^p} - \frac{\partial A_p}{\partial X^0} \right) + e \frac{dX^n}{d\tau} \left(\frac{\partial A_n}{\partial X^p} - \frac{\partial A_p}{\partial X^n} \right).$$

Учитывая наши правила, касающиеся значений индексов, можно попробовать переписать правую часть этого уравнения в виде одного члена, заменив латинские индексы греческими, принимающими значения от 0 до 4:

$$m \frac{d^2 X_p}{d\tau^2} = e \frac{dX^\nu}{d\tau} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} \right).$$

Однако тут возникает одно препятствие. То, что в обеих частях уравнения есть свободный нижний индекс, — это хорошо. Но в левой части это латинский свободный индекс p , в то время как в правой части — греческий свободный индекс μ . Индексы можно, конечно, переименовать, но мы не можем согласовать латинский свободный индекс в одной части с греческим свободным индексом в другой, потому что эти индексы принимают разные наборы значений. Чтобы записать это уравнение правильно, нам необходимо в левой части заменить X_p на X_μ . Правильно составленное уравнение выглядит так:

$$m \frac{d^2 X_\mu}{d\tau^2} = e \frac{dX^\nu}{d\tau} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} \right). \quad (6.33)$$

Если поставить индекс μ на место пространственного индекса p , то (6.33) просто совпадет с (6.24). Фактически (6.33) является *заведомо инвариантным* уравнением движения заряженной частицы. Оно заведомо инвариантно потому, что все объекты в этих уравнениях являются 4-векторами и все повторяющиеся индексы правильно свернуты.

Здесь есть одна важная тонкость: мы начали с уравнения (6.24), которое представляет только три уравнения для пространственных компонент, помеченных индексом p . И когда мы позволяем индексу μ пробегать по всем четырем направлениям пространства Минковского, то (6.33) дает нам одно лишнее уравнение для временной компоненты.

Но является ли это новое уравнение (нулевое уравнение) верным? Убедившись с самого начала, что действие является скаляром, мы тем самым гарантировали, что наши уравнения движения будут лоренц-инвариантными. Если уравнения лоренц-инвариантны и все три пространственные компоненты определенного 4-вектора равны трем пространственным компонентам некоторого другого 4-вектора, то мы *автоматически* заключаем, что их нулевые (временные) компоненты тоже должны

быть согласованы. Так как мы построили лоренц-инвариантную теорию, в которой все три пространственных уравнения верны, временное уравнение тоже должно быть верным.

Эта логика распространяется на всю современную физику. Позаботьтесь о том, чтобы ваш лагранжиан учитывал особенности симметрии вашей задачи. Если эта симметрия — симметрия Лоренца, позаботьтесь о том, чтобы ваш лагранжиан был лоренц-инвариантным. И тогда это гарантирует, что уравнения движения тоже будут лоренц-инвариантны.

6.3.5. Уравнения с 4-скоростью

Давайте повозимся с уравнением (6.33) и приведем его к несколько иному виду, который позже нам очень пригодится. Вспомним, что 4-вектор U^μ , определяемый как

$$U^\mu = \frac{dX^\mu}{d\tau},$$

называется 4-скоростью. Подстановка этого выражения в (6.33) — с опусканием индекса μ в левой части — дает

$$m \frac{dU_\mu}{d\tau} = e \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} \right) U^\nu. \quad (6.34)$$

Производная

$$\frac{dU_\mu}{d\tau},$$

которая появляется в левой части, называется 4-ускорением. Пространственная часть этого уравнения, выраженная через U , выглядит так:

$$m \frac{dU_p}{d\tau} = e \left(\frac{\partial A_0}{\partial X^p} - \frac{\partial A_p}{\partial X^0} \right) U^0 + e \left(\frac{\partial A_n}{\partial X^p} - \frac{\partial A_p}{\partial X^n} \right) U^n. \quad (6.35)$$

6.3.6. Связь A_μ с \vec{E} и \vec{B}

Подытожим связь между векторным потенциалом A_μ и знаковыми нам электрическим и магнитным полями \vec{E} и \vec{B} .

Исторически \vec{E} и \vec{B} были открыты в экспериментах с зарядами и электрическими токами (электрические токи — это просто движущиеся заряды). Кульминацией этих открытий стало выведение формулы для силы Лоренца. Но, как ни старайтесь, в терминах \vec{E} невозможно выразить динамику заряженных частиц на основе принципа действия. Для этого принципиально использование векторного потенциала. Если записать уравнения Эйлера — Лагранжа и сравнить их с формулой для силы Лоренца, получатся следующие уравнения, связывающие поля \vec{E} и \vec{B} с A_μ :

$$\begin{aligned}
 E_x &= \frac{\partial A_0}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial t}, \\
 E_y &= \frac{\partial A_0}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial t}, \\
 E_z &= \frac{\partial A_0}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial t}, \\
 B_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\
 B_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\
 B_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.
 \end{aligned} \tag{6.36}$$

Эти уравнения обладают определенной симметрией, которая настойчиво подталкивает к тому, чтобы записать их в тензорной форме. Мы сделаем это в следующей лекции.

6.3.7. Значение U^μ

В конце этой лекции один студент поднял руку. Он отметил, что мы потратили много времени и сил, продираясь сквозь математические дебри, чтобы добраться до уравнения (6.34). Но нельзя ли вернуться на Землю и обсудить смысл релятивистской 4-скорости U^μ ? В частности, как быть с нулевым уравнением — уравнением для временной компоненты релятивистского ускорения?

Конечно, давайте сделаем это. Начнем с пространственных компонент, представленных в уравнении (6.35). В левой части стоит просто релятивистское обобщение «массы на ускорение», ma из ньютоновского закона $F = ma$. Если частица движется медленно, это и есть ma . Но это уравнение работает и в случае, если частица движется быстро. Его правая часть представляет собой релятивистскую версию силы Лоренца: первый член — это электрическая сила, а второй — магнитная сила, действующая на движущийся заряд. Нулевое уравнение — вот что нуждается в объяснении. Запишем его как

$$m \frac{dU_0}{d\tau} = e \left(\frac{\partial A_n}{\partial X^0} - \frac{\partial A_0}{\partial X^n} \right) \frac{\partial X^n}{d\tau}. \quad (6.37)$$

Отметим, что мы опустили первый член в правой части (где $\mu = 0$), так как

$$\left(\frac{\partial A_0}{\partial X^0} - \frac{\partial A_0}{\partial X^0} \right) = 0.$$

Начнем с левой части уравнения (6.37). Это нечто нам незнакомое: временная компонента релятивистского ускорения. Чтобы дать ей интерпретацию, вспомним (см. (3.36) и (3.37)), что релятивистская кинетическая энергия — это просто

$$mU^0 = \frac{m}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Используя обычные единицы, чтобы скорость света вошла в уравнение в явном виде, мы получаем

$$mU^0 = \frac{mc^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}.$$

Для полной ясности напомним, что mU_0 — это кинетическая энергия со знаком «минус», так как опускание временного индекса меняет знак. Следовательно, если не считать знака «минус», левая часть уравнения (6.37) дает скорость изменения кинетической энергии. А это — работа, произведенная за единицу времени силами, которые действуют на частицу.

Далее рассмотрим правую часть (6.37). Она имеет вид

$$-e\vec{E} \cdot \vec{v}.$$

Пользуясь тем, что $e\vec{E}$ — электрическая сила, действующая на частицу, можно выразить правую часть уравнения как

$$-\vec{F} \cdot \vec{v}.$$

Из элементарной механики известно, что скалярное произведение силы на скорость есть работа (за единицу времени) силы над движущейся частицей. Таким образом, мы видим, что нулевое уравнение — это просто уравнение баланса энергии, отражающее тот факт, что изменение кинетической энергии равно работе, произведенной над системой.

Что произошло с магнитной силой? Как это вышло, что нам не пришлось включить ее в вычисление работы? Один из ответов — вы, вероятно, слышали его еще в средней школе — такой:

Магнитные силы не производят работы.

Этому есть простое объяснение: магнитная сила всегда перпендикулярна скорости, а значит, не дает никакого вклада в $\vec{F} \cdot \vec{v}$.

6.4. Интерлюдия: тензор поля

Первый вопрос, возникающий у современного физика по поводу любой новой величины: как она преобразуется? В частности, как на нее действуют преобразования Лоренца? Обычный ответ такой: новая величина — к чему бы она ни относилась — это тензор, у которого столько-то верхних и столько-то нижних индексов. Электрическое и магнитное поля не составляют исключения.

Арт: Ленни, слушай, у меня большая проблема. У электрического поля три пространственных компоненты и ни одной временной. Как же, черт побери, оно может быть хоть каким-то четырехмерным тензором? И с магнитным полем то же самое.

Ленни: Арт, ты забываешь: $3 + 3 = 6$.

Арт: Ты хочешь сказать, что есть вид тензоров с шестью компонентами? Я не догоняю: у 4-вектора четыре компоненты, а у тензора с двумя индексами $4 \times 4 = 16$ компонент. В чем здесь трюк?

Ответ на вопрос Арта заключается в том, что, хоть и правда, что у тензоров с двумя индексами шестнадцать компонент, у антисимметричных тензоров только шесть *независимых* компонент. Давайте освежим в памяти понятие антисимметричного тензора.

Допустим, имеется два 4-вектора C и B . Есть два способа соединить их в двухиндексный тензор: $C_\mu B_\nu$ и $B_\mu C_\nu$. Складывая и вычитая эти два тензора, можно построить симметричный и антисимметричный тензоры,

$$S_{\mu\nu} = C_\mu B_\nu + B_\mu C_\nu$$

и

$$A_{\mu\nu} = C_\mu B_\nu - B_\mu C_\nu.$$

В частности, давайте сосчитаем количество независимых компонент антисимметричного тензора. Прежде всего, все диагональные элементы исчезают. Это значит, что из шестнадцати компонент остается только двенадцать.

Но есть ведь и дополнительные ограничения: внедиагональные элементы должны составлять равные и противоположные пары. Например, $A_{02} = -A_{20}$. Независимость сохраняет всего половина из наших двенадцати элементов, так что и правда выходит шесть. Да, Арт, есть тензоры, у которых только шесть независимых компонент.

Теперь посмотрим на уравнения (6.36). Правые части везде имеют вид

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} \quad (6.38)$$

или, что эквивалентно,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (6.39)$$

$F_{\mu\nu}$, очевидно, является тензором, и более того, антисимметричным. У него шесть независимых компонент, и они в точности воспроизводят компоненты \vec{E} и \vec{B} . Сравнивая с (6.36), можно составить список положительных компонент:

$$\begin{aligned} F_{10} &= E_x & F_{12} &= B_z, \\ F_{20} &= E_y & F_{23} &= B_x, \\ F_{30} &= E_z & F_{31} &= B_y. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Чтобы заполнить оставшиеся места другими компонентами, можно воспользоваться антисимметричностью тензора. Теперь вы видите, откуда взялось уравнение (6.11). Я запишу его здесь еще раз вместе со всеми его верхними и нижними версиями.

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & +B_z & -B_y \\ +E_y & -B_z & 0 & +B_x \\ +E_z & +B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.41)$$

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & +E_x & +E_y & +E_z \\ -E_x & 0 & +B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & +B_x \\ -E_z & +B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.42)$$

$$F_{\nu}^{\mu} = \begin{pmatrix} 0 & +E_x & +E_y & +E_z \\ +E_x & 0 & +B_z & -B_y \\ +E_y & -B_z & 0 & +B_x \\ +E_z & +B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.43)$$

$$F_{\mu}^{\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ -E_x & 0 & +B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & +B_x \\ -E_z & +B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (6.44)$$

Можно представить себе, что строки этих матриц нумеруются индексом μ , принимающим значения $(0, 1, 2, 3)$ и пробегающим вдоль левого края матриц сверху вниз. Аналогично столбцы обозначены пронумерованы индексом ν с теми же (невывисанными) значениями, пробегающими вдоль верхней строки слева направо.

Взгляните на верхнюю строку $F_{\mu\nu}$. Можно представить себе эти элементы как $F_{0\nu}$, потому что для каждого из них $\mu = 0$, в то время как ν принимает все возможные для него значения. Это компоненты электрического поля. Мы представляем себе их как «смешанные» временные и пространственные компоненты, так как один из их индексов — временной, а другой — простран-

ственный. То же самое по тем же причинам справедливо и для крайнего левого столбца.

Теперь посмотрим на подматрицу 3×3 , из которой *исключены* верхняя строка и крайний слева столбец. Эта подматрица состоит из компонент магнитного поля.

Чего же мы добились, составив из электрического и магнитного полей единый тензор? Очень многого. Мы теперь знаем, как ответить на следующий вопрос: пусть Ленни, находясь в системе отсчета своего движущегося поезда, наблюдает некоторое электрическое и магнитное поле. Какое электрическое и магнитное поле видит Арт в системе отсчета вокзала? В системе Ленни заряд, покоящийся в поезде, имел бы знакомое нам электрическое поле (кулоновское). С точки зрения Арта этот заряд движется, и чтобы вычислить поле, которое видит Арт, теперь достаточно подвергнуть тензор поля преобразованию Лоренца. Мы разовьем эту идею в разделе 8.1.1.

ЛЕКЦИЯ 7

Фундаментальные принципы и калибровочная инвариантность

Арт: Почему все физики помешаны на фундаментальных принципах вроде наименьшего действия, близкодействия, лоренц-инвариантности, и... как ее там?

Ленни: Калибровочной инвариантности. Принципы помогают нам оценивать новые теории. Теория, в которой они нарушаются, скорее всего, неверная. Но, правда, иногда мы бываем вынуждены пересмотреть вопрос о том, что считать фундаментальным.

Арт: Ладно, возьмем для примера движущийся железнодорожный вагон: он лоренц-инвариантный. Он идет по рельсам, значит, производит все необходимое действие (но и не более того). И он останавливается на каждой станции, значит, он пригородный — вот тебе и близкодействие.

Ленни: Фу!

Арт: И калибровочно инвариантный; если у него будет не тот калибр, он слетит с рельсов!

Ленни: Похоже, это ты слетел с рельсов. Давай-ка немного притормозим.

Допустим, физик-теоретик хочет построить теорию, чтобы объяснить какое-то только что открытое явление. От новой теории ждут, что она будет следовать определенным правилам или фундаментальным принципам. Есть четыре принципа, которым, по-видимому, удовлетворяют все законы физики. Вот они:

- Принцип действия.
- Близкодействие.
- Лоренц-инвариантность.
- Калибровочная инвариантность.

Этими принципами пронизана вся физика. Им соответствуют все известные теории, будь то общая теория относительности, квантовая электродинамика, стандартная модель элементарных частиц или теория Янга — Миллса. Первые три принципа вам, должно быть, знакомы, но калибровочная инвариантность — нечто новое; мы с ней раньше не встречались. Главная цель этой лекции — познакомить вас с этой новой идеей. Мы начнем с того, что дадим краткое изложение сути всех четырех фундаментальных принципов.

7.1. Сводка фундаментальных принципов

Принцип действия

Первое правило заключается в том, что физические явления описываются принципом действия. Нам неизвестно никаких исключений из этого правила. Достаточно сказать, что сохранение энергии выводится из принципа действия. То же самое относится к сохранению импульса и к связи между законами сохранения и симметриями в целом. Если вы просто запишете уравнения движения, они могут выглядеть вполне разумно. Но если они не выводятся из принципа действия, мы не сможем гарантировать, что для этих уравнений будут соблюдаться законы сохранения

энергии и импульса. В частности, закон сохранения энергии является следствием принципа действия, наряду с предположением, что все в мире инвариантно относительно изменения времени на фиксированную величину — преобразования, которое мы называем *сдвигом во времени*.

Итак, вот наш первый принцип: ищите такое действие, чтобы результирующие уравнения движения описывали открытые в лаборатории явления. Мы уже познакомились с двумя видами действия. Это действие для движения частиц:

$$\text{Действие}_{\text{движения}} = \int dt \mathcal{L}(X, \dot{X}),$$

где \mathcal{L} обозначает лагранжиан, и действие в теориях поля — это

$$\text{Действие}_{\text{поля}} = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \phi_\mu).$$

В теориях поля \mathcal{L} обозначает *плотность лагранжиана*. Слово *плотность* указывает на то, что величина интегрируется как по пространству, так и по времени. Мы уже видели, как уравнения Эйлера — Лагранжа описывают оба эти случая.

Близкодействие

Идея близкодействия означает, что события, происходящие в одном месте, воздействуют на условия только в непосредственно прилегающих областях пространства и времени. Если вы повлияете на систему в некоторой точке времени и пространства, то *прямое* воздействие на систему будет происходить только в непосредственной окрестности этой точки. Например, если вы ударите по скрипичной струне в точке у ее конца, это воздействие сразу ощутит только ближайшая соседняя точка. Конечно, эта соседняя точка воздействует на точку, соседнюю с ней, и так далее по цепочке. Со временем воздействие передастся по всей длине струны. Но краткосрочный эффект локализован.

Как гарантировать, что наша теория удовлетворяет принципу близкодействия? Это вновь обеспечивается благодаря действию. Пусть, например, мы имеем дело с частицей. В этом случае действие — это интеграл по времени (dt) вдоль ее траектории. Чтобы обеспечить соответствие принципу близкодействия, подынтегральное выражение — лагранжиан \mathcal{L} — должно зависеть только от координат системы. Для частицы это компоненты ее положения и их первые производные по времени. Через производные по времени в игру включаются соседние временные точки. Ведь в конечном счете производные — это и есть то, что обеспечивает связь между близкими соседями. Производные высших порядков, однако, исключаются, потому что они «менее локальны», чем первые производные.¹ Теория поля описывает поле в объеме пространства и времени (рис. 4.2 и 5.1). Действие — интеграл не только по времени, но и по пространству (d^4x). В этом случае принцип близкодействия требует, чтобы лагранжиан зависел от поля ϕ и от его частных производных по X^μ , которые мы можем обозначить ϕ_μ . Этого достаточно, чтобы гарантировать, что объект прямо воздействует только на своих ближайших соседей.

Попробуйте представить себе мир, в котором, ткнув в одно место, получаешь мгновенный эффект в каком-то другом. В таком мире лагранжиан зависел бы не только от ближайших соседних точек, влияние которых определяется производными его составляющих, но и — более сложным образом — от других объектов, которые допускают «действие на расстоянии». Принцип близкодействия подобного не допускает.

Здесь стоит упомянуть о квантовой механике. Она выходит за рамки этой книги. Тем не менее многие читатели могут задумываться над вопросом о том, как принцип близкодействия работает в квантовой механике и совместим ли он

¹ Они также исключаются по результатам большого числа теоретических и экспериментальных работ.

с нею вообще. Дадим настолько ясный ответ, насколько это возможно: *да*.

Примером нарушения принципа близкодействия в квантовой механике часто ошибочно считают квантовую запутанность. Но запутанность — не то же, что дальное действие. В нашей предыдущей книге «*Квантовая механика*» это объясняется во всех подробностях. Запутанность не означает, что вы можете посылать мгновенные сигналы из одного места в другое. Принцип близкодействия фундаментален.

Лоренц-инвариантность

Теория должна быть лоренц-инвариантной. Другими словами, уравнения движения должны быть одними и теми же во всех системах отсчета. Мы уже видели, как это работает. Если сделать лагранжиан скалярным, это гарантирует, что наша теория лоренц-инвариантна:

$$\mathcal{L} = \text{Скаляр}.$$

Лоренц-инвариантность включает в себя инвариантность и относительно поворотов в пространстве.¹

Калибровочная инвариантность

Это последнее требование немного загадочное, и чтобы в полной мере его понять, нужно некоторое время. Если кратко, то калибровочная инвариантность относится к изменениям, которым можно подвергнуть векторный потенциал, не меняя физической стороны вопроса. Остаток этой лекции мы посвятим ей.

¹ В общей теории относительности (в этой книге она не рассматривается) требуется инвариантность относительно произвольных преобразований координат, частным случаем которых являются преобразования Лоренца. Но и здесь принцип инвариантности сохраняется. Только вместо того чтобы лагранжиан \mathcal{L} был скаляром, в общей теории относительности он должен быть скалярной плотностью.

7.2. Калибровочная инвариантность

Инвариантность, называемая еще *симметрией*, — это изменение в системе, которое не влияет на действие или уравнения движения. Рассмотрим несколько известных примеров.

7.2.1. Примеры симметрии

Уравнение $F = m\vec{a}$, возможно, самое известное уравнение движения. Его вид остается полностью неизменным при переносе начала координат из одной точки в другую. То же самое происходит и при поворотах системы координат. Этот закон движения инвариантен относительно сдвигов и поворотов.

В качестве еще одного примера рассмотрим нашу основную теорию поля из лекции 4. Лагранжиан (4.7) для этой теории выглядел так:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)^2 \right] - V(\phi),$$

что можно также записать в виде

$$-\frac{1}{2} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi] - V(\phi).$$

Будем пока рассматривать упрощенную версию, где функция $V(\phi)$ приравнена нулю, а все пространственные координаты сведены к единственной переменной x :

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right].$$

Вот выведенные нами из этого лагранжиана уравнения движения (4.10), приведенные здесь в немного упрощенном виде:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} = 0. \quad (7.1)$$

Я пренебрег множителем $\frac{1}{c^2}$ в первом члене, поскольку он не важен в нашем примере. Это уравнение обладает многими видами инвариантности, в том числе и лоренц-инвариантностью. Чтобы открыть новую инвариантность, мы попытаемся найти в этом уравнении то, что можно изменить, не меняя при этом его содержания или смысла. Допустим, мы добавили константу к основному полю:

$$\phi \rightarrow \phi + c.$$

Другими словами, возьмем поле ϕ , которое уже является решением уравнения движения, и просто добавим к нему постоянную. Удовлетворяет ли по-прежнему полученный результат уравнению движения? Разумеется да, потому что производные постоянной равны нулю. Если мы знаем, что ϕ удовлетворяет уравнению движения, то $(\phi + c)$ тоже ему удовлетворяет:

$$\frac{\partial^2(\phi + c)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2(\phi + c)}{\partial x^2} = 0.$$

Это можно видеть и из лагранжиана

$$-\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi,$$

в котором я вновь для простоты опустил множитель $\frac{1}{2}$. Что произойдет с этим лагранжианом (а следовательно, и с действием), если мы добавим к ϕ постоянную? Ничего! Производная постоянной равна нулю. Если у нас есть некоторое определенное действие и конфигурация поля, которая минимизирует это действие, то добавление к полю постоянной не вызовет никаких изменений; действие по-прежнему останется минимальным. Другими словами, добавление постоянной к такому полю является симметрией, или инвариантностью. Это несколько иной вид инвариантности в сравнении с теми, что встречались нам раньше, но это все равно инвариантность.

Вспомним теперь о немного более сложной версии этой теории, где член $V(\phi)$ не равен нулю. В лекции 4 мы рассматривали случай

$$V(\phi) = \frac{\mu^2}{2} \phi^2,$$

для которого производная по ϕ равна

$$\frac{\partial V(\phi)}{\partial \phi} = \mu^2 \phi.$$

С этими изменениями лагранжиан приобретает вид

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 \right] - \frac{\mu^2}{2} \phi^2, \quad (7.2)$$

а уравнения движения

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \mu^2 \phi = 0. \quad (7.3)$$

Что произойдет с уравнением (7.3), если добавить к ϕ постоянную? Если ϕ — решение уравнения, будет ли решением и $(\phi + c)$? Нет, не будет. В первых двух членах ничего не изменилось. Но добавление постоянной к ϕ явным образом изменяет третий член. А как обстоят дела с лагранжианом (7.2)? Добавление постоянной к ϕ никак не влияет на члены в квадратных скобках. Но оно влияет на самый правый член: ϕ^2 — не то же самое, что $(\phi + c)^2$. С учетом дополнительного члена в лагранжиане

$$-\frac{\mu^2}{2} \phi^2$$

мы должны заключить, что добавление к ϕ постоянной — это не инвариантность.

7.2.2. Новый тип инвариантности

Вернемся к интегралу действия

$$e \int_a^b A_\mu dX^\mu,$$

введенному в лекции 6. Попробуем модифицировать A_μ , добавив четырехмерный градиент скаляра S :

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \frac{\partial S}{\partial X^\mu}.$$

Эта сумма имеет смысл, так как оба слагаемых ковариантны по индексу μ . Но изменит ли эта модификация уравнения движения? Изменится ли траектория движения частицы? Произойдут ли какие-то изменения в динамике частицы? Данная модификация довольно очевидным образом меняет действие:

$$\text{Действие}_{\text{исходное}} = e \int_a^b A_\mu dX^\mu \quad (7.4)$$

превращается в

$$\text{Действие}_{\text{модификация}} = e \int_a^b A_\mu dX^\mu + e \int_a^b \frac{\partial S}{\partial X^\mu} dX^\mu. \quad (7.5)$$

Что представляет собой новый интеграл, стоящий справа в (7.5)? На рис. 7.1 траектория частицы, как обычно, разбита на малые отрезки. Рассмотрим изменение S вдоль одного из таких отрезков. Математический анализ сразу говорит нам, что

$$\frac{\partial S}{\partial X^\mu} dX^\mu$$

есть изменение S при движении от одного конца нашего малого отрезка до другого. Если сложить (или проинтегрировать) эти изменения по всем отрезкам, получится изменение S на пути от начальной точки траектории до конечной. Другими словами,

этот интеграл равен разности значений S в конечной точке b и в начальной точке a рассматриваемой траектории:

$$\int_a^b \frac{\partial S}{\partial X^\mu} dX^\mu = S(b) - S(a).$$

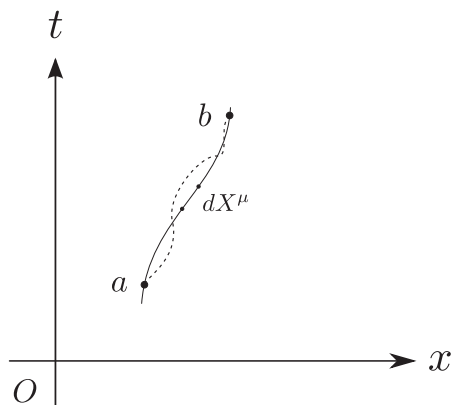


Рис. 7.1. Пространственно-временная траектория. Сплошная линия — траектория стационарного действия. Пунктирная линия — варьируемая траектория с фиксированными конечными точками

Сама по себе величина S есть *произвольная скалярная функция*, которую я только что ввел. Изменит ли динамику частицы этот новый член векторного потенциала?¹

Изменения, внесенные нами в действие, зависят только от начальной и конечной точек траектории. Однако, согласно принципу действия, искать минимум действия следует, изгибая траекторию, *при условии что ее концевые точки остаются фиксированными*. Поскольку концевые точки не меняются, член $S(b) - S(a)$ остается одинаковым для всех траекторий, включая и траекторию со стационарным действием. Следовательно, если найти траекторию стационарного действия, она останется тако-

¹ Подсказка: *нет!*

вой и после внесения этих изменений в векторный потенциал. Добавление четырехмерного градиента скаляра не оказывает влияния на движение частицы, потому что оно влияет только на действие в концевых точках. На самом деле добавление любой производной к действию, как правило, ничего не меняет. Нам даже безразлично, чем именно является S : наши рассуждения приложимы к любой скалярной функции.

В этом и заключается концепция калибровочной инвариантности. Векторный потенциал может определенным образом измениться, не оказывая при этом никакого влияния на поведение заряженной частицы. Добавление $\frac{\partial S}{\partial X^\mu}$ к векторному потенциалу называется *калибровочным преобразованием*. Слово «калибровочный» (*gauge*) — исторический артефакт, который имеет весьма слабое отношение к самой концепции.

7.2.3. Уравнения движения

Итак, вот в чем суть калибровочной инвариантности:

Выберите по своему вкусу любую скалярную функцию, сложите ее градиент с векторным потенциалом, и вы увидите, что уравнения движения останутся в точности теми же, что и были.

Есть ли в этом уверенность? Для проверки вернемся к уравнениям движения: формуле для силы Лоренца (6.33):

$$m \frac{d^2 X_\mu}{d\tau^2} = e \frac{dX^\nu}{d\tau} \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} \right).$$

Ее можно переписать в виде

$$m \frac{d^2 X_\mu}{d\tau^2} = e F_{\mu\nu} U^\nu,$$

где

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu}, \quad (7.6)$$

а 4-скорость U^ν

$$U^\nu = \frac{dX^\nu}{d\tau}.$$

Уравнения движения не содержат в явном виде векторного потенциала. Они содержат тензор поля $F_{\mu\nu}$, элементами которого являются компоненты электрического и магнитного полей. Любое изменение векторного потенциала, не оказывающее воздействия на $F_{\mu\nu}$, не будет влиять и на движение частицы. Наша задача — убедиться в том, что тензор $F_{\mu\nu}$ калибровочно инвариантен. Посмотрим, что произойдет, когда мы прибавим градиент скаляра к векторным потенциалам (7.6):

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial \left(A_\nu + \frac{\partial S}{\partial X^\nu} \right)}{\partial X^\mu} - \frac{\partial \left(A_\mu + \frac{\partial S}{\partial X^\mu} \right)}{\partial X^\nu}. \quad (7.7)$$

Это выглядит громоздко, но легко упрощается. Ведь производная суммы равна сумме производных, и поэтому можно записать:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} + \frac{\partial \left(\frac{\partial S}{\partial X^\nu} \right)}{\partial X^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} - \frac{\partial \left(\frac{\partial S}{\partial X^\mu} \right)}{\partial X^\nu}$$

или

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} + \frac{\partial^2 S}{\partial X^\mu \partial X^\nu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu} - \frac{\partial^2 S}{\partial X^\nu \partial X^\mu}. \quad (7.8)$$

Но, как известно, порядок взятия частных производных не имеет значения. Другими словами,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial X^\nu \partial X^\mu} = \frac{\partial^2 S}{\partial X^\mu \partial X^\nu}.$$

Следовательно, две вторые производные в уравнении (7.8) равны и взаимно сокращаются.¹ В результате получаем:

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu}, \quad (7.9)$$

что в точности воспроизводит уравнение (7.6). Круг замкнулся. Добавление градиента скаляра к 4-векторному потенциалу не оказывает никакого влияния ни на действие, ни на уравнения движения.

7.2.4. Резюме

Если наша цель в том, чтобы записать уравнения движения для частиц и электромагнитных полей, почему тогда нас беспокоит добавление чего-то к векторному потенциалу, тем более если его можно менять, не оказывая при этом влияния на электрические и магнитные поля?

Ответ заключается в том, что не существует способа записать принцип действия для движения частицы без использования векторного потенциала. При этом значение векторного потенциала в данной точке не имеет физического смысла и не может быть измерено; если вы измените его, добавив к нему градиент скаляра, с физической точки зрения ничего не изменится.

Некоторые инвариантности имеют очевидный физический смысл. Нетрудно представить себе в рамках одной задачи две физические системы отсчета — вашу и мою — и переход между ними. Калибровочная инвариантность иная. Она не имеет от-

¹ Это свойство вторых частных производных выполняется для интересных нас функций. Однако существуют и функции, которые этим свойством не обладают.

ношения к преобразованиям координат. Суть ее — *избыточность описания*. Калибровочная инвариантность означает, что существует много описаний, эквивалентных друг другу. Новый момент здесь в том, что эти описания включают в себя функцию положения. Например, когда мы осуществляем поворот координат, мы не делаем это по-разному в разных точках. В обычной физике такой тип вращения не определял бы инвариантности. Мы совершили бы один-единственный поворот координат на некоторый конкретный угол, который не является функцией положения. Напротив, калибровочное преобразование включает целую функцию — произвольную функцию положения. Калибровочная инвариантность присуща всем известным фундаментальным физическим теориям. Электродинамика, Стандартная модель, теория Янга — Миллса, теория тяготения — каждой из них свойственна своя калибровочная инвариантность.

У вас могло возникнуть впечатление, что калибровочная инвариантность — это просто интересное математическое свойство, не имеющее практического значения. Это впечатление ошибочно. Калибровочная инвариантность позволяет предложить различные, но математически эквивалентные описания физической задачи. Добавление чего-то к векторному потенциалу иногда может упростить решение задачи. Например, мы можем выбрать такую функцию S , которая сделает любую из компонент A_μ равной нулю. Как правило, конкретная функция S выбирается с таким расчетом, чтобы проиллюстрировать или прояснить какой-либо аспект теории. Но за счет этого другое свойство теории может, наоборот, сделаться менее ясным. Рассматривая теорию для всех возможных вариантов выбора функции S , можно выявить все ее свойства.

ЛЕКЦИЯ 8

Уравнения Максвелла

В кабачке «У Германа» у Максвелла есть свой собственный постоянный столик. Здесь он и сидит в одиночестве и о чем-то ожесточенно спорит сам с собой.

Арт: Глянь-ка, похоже, у нашего друга Максвелла кризис идентичности.

Ленни: Это не совсем кризис. Просто он так решает проблему равенства различных точек зрения для своей прекрасной теории электромагнетизма.

Арт: И как далеко ему удалось таким способом продвинуться? Равенство — вещь хорошая, однако...

Ленни: Он примерно на полпути. Вот тут-то и начинается настоящее действие.

Как известно большинству читателей, тома «Теоретического минимума» основаны на моем одноименном курсе лекций в Стэнфордском университете. По самой природе лекционных курсов информация в них не всегда идеально упорядочена. Я часто начинаю одну лекцию с обзора предыдущей или с восполнения какого-то пропущенного материала. Так случилось и с этой лекцией 8, посвященной уравнениям Максвелла. Она началась не с самих уравнений Максвелла, а с поведения электрического и магнитного полей при преобразованиях — вопроса, к которому я только прикоснулся в конце лекции 7.

Недавно у меня был повод взглянуть на первую статью Эйнштейна по теории относительности.¹ Настоятельно советую вам изучить эту работу самостоятельно. Особенно великолепен первый раздел. В нем с исключительной ясностью излагается логика и мотивация автора. И мне хотелось бы кратко обсудить его, потому что он глубоко связан с поведением тензора электромагнитного поля при преобразованиях.

8.1. Пример Эйнштейна

Эйнштейн рассматривает в качестве примера магнит и электрический проводник — кусок проволоки. Электрический ток — это не что иное, как группа движущихся заряженных частиц. Эйнштейновскую постановку вопроса можно свести к задаче о заряженной частице, которая движется по проводу, находящемуся в поле магнита. Существенно то, что провод движется в системе отсчета, где магнит покоится.

На рис. 8.1 эта задача схематически представлена в «лабораторных» координатах, где магнит покоится. Провод ориентирован вдоль оси y и движется вдоль оси x . Находящийся в проводе электрон движется вдоль оси провода. В схему входит также постоянный магнит (на рисунке не показан), создающий однородное магнитное поле с единственной компонентой B_z , направленной перпендикулярно плоскости страницы. Других электрических или магнитных полей нет.

Что происходит с электроном? На него действует сила Лоренца, равная произведению его заряда e на векторное произведение скорости v и магнитного поля B_z . Значит, эта сила будет перпендикулярна как v , так и B_z . С учетом правила правой руки и отрицательного заряда электрона мы заключаем, что сила Ло-

¹ *К электродинамике движущихся тел*, А. Эйнштейн, 30 июня 1905 г.

ренца будет направлена вверх. В результате по проводу потечет ток. Сила Лоренца толкает электроны вверх, но из-за неудачно установленного Бенджамином Франклином конвенционального правила (заряд электрона считается отрицательным!) ток все-таки направлен вниз.

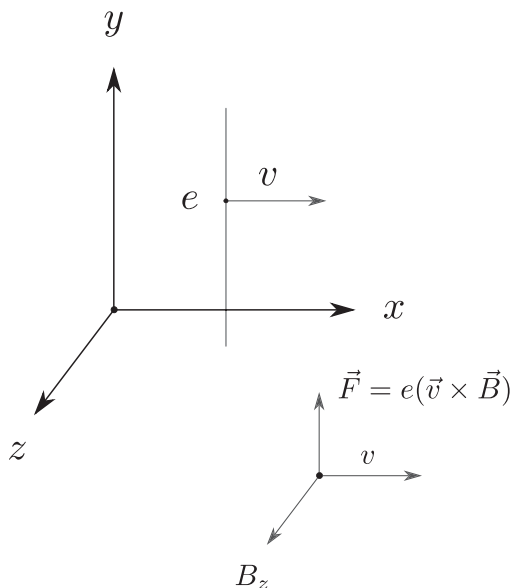


Рис. 8.1. Пример Эйнштейна в системе отсчета с движущимся зарядом. Лаборатория и магнит покоятся. Заряд e движется вправо со скоростью v . Постоянное магнитное поле имеет лишь одну компоненту B_z .
Электрическое поле отсутствует

Так описывает ситуацию лабораторный наблюдатель: движение заряда в магнитном поле порождает электрический ток. Небольшая схема в правом нижнем углу рис. 8.1 иллюстрирует действующую на электрон силу Лоренца:

$$\vec{F} = e(\vec{v} \times \vec{B}).$$

Теперь посмотрим на ту же физическую ситуацию в системе отсчета электрона. В этой штрихованной системе электрон покоится, а магнит движется влево со скоростью v (рис. 8.2). Так как электрон покоится, действующая на него сила должна порождаться электрическим полем. Это озадачивает, ведь исходная задача содержала только магнитное поле. Единственно возможный вывод заключается в том, что движущийся магнит должен создавать электрическое поле. И в этом суть аргументации Эйнштейна: поле движущегося магнита должно содержать электрическую компоненту.

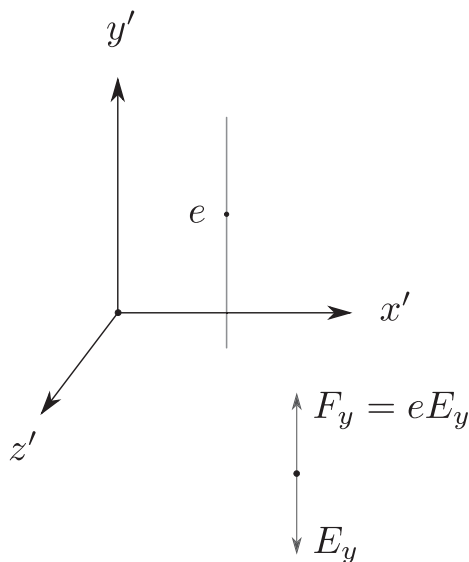


Рис. 8.2. Пример Эйнштейна в системе отсчета с движущимся магнитом. Заряд e покоится. Магнит и лаборатория движутся влево со скоростью v . У постоянного электрического поля имеется единственная компонента E_y . Сила, действующая на электрон, противоположна по направлению E_y , так как заряд электрона отрицательный

А что происходит, когда вы двигаете магнит мимо провода? Движущееся магнитное поле порождает то, что Эйнштейн и его

современники называли электродвижущей силой (ЭДС), которая, в сущности, и есть электрическое поле. Если мы возьмем магнит, поле которого торчит из плоскости страницы, и будем двигать его влево, то в результате возникнет направленное вниз электрическое поле E_y . Оно будет действовать на покоящийся электрон с направленной вверх силой eE_y .¹ Другими словами, электрическое поле E_y в штрихованной системе отсчета действует так же, как сила Лоренца в нештрихованной. Из этого простого мысленного эксперимента Эйнштейн сделал вывод: магнитные поля преобразуются в электрические в соответствии с преобразованиями Лоренца. Как же это предсказание согласуется со свойствами преобразований \vec{E} и \vec{B} , когда они рассматриваются как компоненты антисимметричного тензора $F_{\mu\nu}$?

8.1.1. Преобразование тензора поля

Тензор $F_{\mu\nu}$ имеет следующие компоненты:

$$F_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ +E_x & 0 & +B_z & -B_y \\ +E_y & -B_z & 0 & +B_x \\ +E_z & +B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Мы хотим посмотреть, как эти компоненты преобразуются, когда мы переходим из одной системы отсчета в другую. Как вышеприведенный тензор поля, заданный в одной системе отсчета, будет выглядеть для наблюдателя, движущегося в положительном направлении вдоль оси x ? Какими окажутся новые компоненты тензора поля в движущейся системе?

Для решения этой задачи надо вспомнить правила преобразования тензоров с двумя индексами. Вернемся к более простому

¹ Опять-таки сила, действующая на электрон, противоположна направлению электрического поля, так как электрон несет отрицательный заряд.

тензору — 4-вектору и, в частности, к 4-вектору X^μ . 4-векторы — это тензоры, у которых есть лишь один индекс. Мы знаем, что 4-векторы подчиняются преобразованиям Лоренца:

$$t' = \frac{t - vx}{\sqrt{1 - v^2}},$$

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - v^2}},$$

$$y' = y,$$

$$z' = z.$$

Как мы видели в лекции 6 (см., например, (6.3)), эти уравнения можно представить матричным выражением, используя эйнштейновское правило суммирования. Мы ввели тогда матрицу L^μ_ν , задающую простое преобразование Лоренца вдоль оси x . Пользуясь этими обозначениями, мы записали это преобразование в следующем виде:

$$(X')^\mu = L^\mu_\nu X^\nu,$$

где ν — индекс суммирования. Это просто сокращенная запись приведенной выше системы из четырех уравнений преобразований Лоренца. Уравнение (6.4) показывает, как все это выглядит в матричной форме. Вот немного модифицированная версия того же уравнения, в которой (t, x, y, z) заменены на (X^0, X^1, X^2, X^3) :

$$\begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} & \frac{1}{\sqrt{1-v^2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X^0 \\ X^1 \\ X^2 \\ X^3 \end{pmatrix}. \quad (8.1)$$

Как преобразуется тензор с двумя индексами? В этом примере я буду использовать версию тензора поля с верхними индексами:

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & +E_x & +E_y & +E_z \\ -E_x & 0 & +B_z & -B_y \\ -E_y & -B_z & 0 & +B_x \\ -E_z & +B_y & -B_x & 0 \end{pmatrix}.$$

Я выбрал эту версию (6.42) для удобства, поскольку у нас уже есть правила преобразования выражений с верхними индексами. Данная форма преобразований Лоренца, которую мы повсеместно здесь используем, выведена именно для преобразования выражений с верхними индексами. Как преобразовать выражение с *двумя* верхними индексами? Да почти так же, как и с одним. Там, где правило преобразования выражения с одним индексом дает

$$(X')^\mu = L^\mu_\sigma X^\sigma$$

с индексом суммирования σ , правило преобразования для двух индексов таково:

$$(F')^{\mu\nu} = L^\mu_\sigma L^\nu_\tau F^{\sigma\tau}, \quad (8.2)$$

с двумя индексами суммирования, σ и τ . Другими словами, мы просто выполняем одноиндексное преобразование дважды. Каждый индекс исходного объекта $F^{\sigma\tau}$ становится индексом суммирования в уравнении преобразования. И каждый индекс (σ и τ) преобразуется в точности так же, как если бы он был *единственным* подлежащим преобразованию индексом.

Если бы у вас был объект с большим числом индексов — а их может быть сколько угодно, — правило осталось бы неизменным: каждый индекс преобразуется одним и тем же способом. Таково правило преобразования тензоров. Теперь испытаем его на примере $F^{\mu\nu}$ и посмотрим, сможем ли мы обнаружить присутствие электрического поля вдоль оси y . Другими словами, попытаемся вычислить y -компоненту электрического поля $(E)_y$ в штрихованной системе отсчета:

$$(E')^y = (F')^{0y}.$$

Что мы знаем об исходном нештрихованном тензоре поля $F^{\mu\nu}$ в применении к эйнштейновскому примеру? Нам известно, что он представляет чисто магнитное поле вдоль *нештрихованной* оси z . Следовательно, у $F^{\sigma\tau}$ есть лишь одна ненулевая компонента, F^{xy} , соответствующий B^z .¹ Следуя той же схеме, что и в уравнении (8.2), можно записать:

$$(E')^y = (F')^{0y} = L_x^0 L_y^y F^{xy}. \quad (8.3)$$

Отметим, что индексы сочетаются друг с другом так же, как и в (8.2), хотя нас интересует лишь одна компонента в левой части. Суммирование справа сокращается от одного-единственного члена. Обращаясь к матрице (8.1), определяем конкретные элементы L , чтобы подставить их в уравнения преобразования (8.3). В частности, мы видим, что

$$L_x^0 = \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}}$$

и

$$L_y^y = 1.$$

Подстановка в (8.3) приводит к

$$(E')^y = (F')^{0y} = \frac{-v}{\sqrt{1-v^2}} (1) F^{xy},$$

или к

$$(E')^y = (F')^{0y} = \frac{-v F^{xy}}{\sqrt{1-v^2}}.$$

Но F^{xy} — то же самое, что B^z в исходной системе отсчета, и теперь можно записать:

¹ Антисимметричная компонента $F^{yx} = -F^{xy}$ также ненулевая, хоть это не добавляет никакой новой информации.

$$(E')^y = (F')^{0y} = \frac{-vB^z}{\sqrt{1-v^2}}. \quad (8.4)$$

Таким образом, как и утверждал Эйнштейн, чисто магнитное поле, рассматриваемое в движущейся системе отсчета, будет обладать электрической компонентой.

Упражнение 8.1. Рассмотрим покоящийся электрический заряд в отсутствие каких-либо дополнительных электрических и магнитных полей. Выразите x -компоненту электрического поля для наблюдателя, движущегося в отрицательном направлении вдоль оси x со скоростью v через компоненты покоящейся системы (E_x, E_y, E_z) . Чему равны y - и z -компоненты? Определите соответствующие компоненты магнитного поля.

Упражнение 8.2. Арт сидит на платформе. Мимо проносится поезд. Чему равна наблюдаемая Артом x -компонента E , выраженная через компоненты поля Ленни? Чему равны y - и z -компоненты? Каковы компоненты магнитного поля, наблюдаемого Артом?

8.1.2. Пример Эйнштейна: сводка

Итак, мы начали с того, что задали лабораторную систему отсчета с нулевым электрическим полем, магнитным полем, ориентированным только в положительном направлении оси z , и электроном, движущимся со скоростью v в положительном направлении оси x . Затем мы стали искать значения электрического и магнитного полей в системе отсчета электрона. Мы обнаружили две вещи:

- 1) в новой системе отсчета на электрон не действует магнитная сила, так как электрон находится в состоянии покоя;

- 2) однако в новой системе отсчета существует y -компонента электрического поля, которая воздействует на электрон с некоторой силой.

Сила, действующая на (движущийся) электрон со стороны магнитного поля в лабораторной системе, в движущейся системе (системе покоя электрона) возникает благодаря электрическому полю. В этом и заключается суть примера Эйнштейна. Теперь мы можем перейти к уравнениям Максвелла.

Упражнение 8.3. В примере Эйнштейна найдите все компоненты электрического и магнитного полей в системе неподвижного электрона.

8.2. Введение в уравнения Максвелла

Вспомним приписываемое Паули (совершенно безосновательно) изречение:

Поля диктуют зарядам, как им двигаться; заряды диктуют полям, как им меняться.

В лекции 6 мы потратили кучу времени на первую часть этой цитаты: мы описывали способы, которыми поля определяют движение зарядов. Теперь пришла очередь зарядов определять изменение полей. И если поля управляют частицами по формуле для силы Лоренца, то заряды управляют полями согласно уравнениям Максвелла.

Моя философия преподавания электродинамики несколько нетрадиционна, так что позвольте, я ее поясню. Большинство курсов придерживаются исторической перспективы и начинают изложение с ряда законов, открытых в конце XVIII — начале XIX в. Вы, наверно, слышали о них: это закон Кулона, закон

Ампера и закон Фарадея. Эти законы иногда преподаются без использования математического анализа, что, по моему мнению, является серьезной ошибкой. Без математики физика всегда сложнее. Затем посредством несколько мучительной процедуры из этих законов складываются уравнения Максвелла. Мой же педагогический подход, который я применяю даже с младшекурсниками, в корне иной. Я сразу беру быка за рога и ввожу уравнения Максвелла с самого начала. Мы берем каждое уравнение, анализируем его смысл, а затем выводим законы Кулона, Ампера и Фарадея. Конечно, на студентов это сначала действует как ледяной душ, но зато за неделю-две они понимают то, на что при историческом подходе ушли бы месяцы.

Сколько же всего уравнений Максвелла? Вообще-то их восемь, но векторные обозначения позволяют сократить это число до четырех: двух 3-векторных уравнений (каждое с тремя компонентами) и двух скалярных.

Четыре из этих уравнений представляют собой равенства, вытекающие из определений электрического и магнитного полей через векторный потенциал. В частности, непосредственно из определений (с учетом некоторых векторных равенств) следует, что

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} &= \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \\E_n &= -(\partial_0 A_n - \partial_n A_0), \\ \vec{B} &= \vec{\nabla} \times \vec{A}.\end{aligned}$$

Необходимости обращаться к принципу действия при этом не возникает. В этом смысле данное подмножество уравнений Максвелла мы получаем «даром».

8.2.1. Векторные тождества

Тождество — это математическое равенство, которое следует из определения. Многие тождества тривиальны, но встречаются и интересные, которые часто оказываются вовсе не очевидными.

На протяжении истории люди накопили множество тождеств, включающих векторные операции. Нам пока понадобятся всего два из них. Сводку основных векторных операций вы можете найти в приложении Б.

Два тождества

Перейдем теперь к нашим двум тождествам. Согласно первому из них, дивергенция ротора всегда равна нулю. В виде формулы это записывается так:

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = 0$$

и верно для любого векторного поля \vec{A} . Это равенство легко доказать «в лоб»: просто распишите левую часть покомпонентно, пользуясь определениями дивергенции и ротора (приложение Б). Многие члены сократятся: например, в один из них может войти производная некоторой функции сначала по x , а затем по y , а в другой член те же производные входят в обратном порядке с обратным знаком. Члены такого вида взаимно сокращаются.

Согласно второму нашему тождеству, ротор любого градиента равен нулю. В виде формулы:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} S) = 0,$$

где S — скаляр, а $\vec{\nabla} S$ — вектор. Не забывайте, что эти два утверждения относятся не к какому-то конкретному полю вроде векторного потенциала. Они верны для *любоx* полей S и \vec{A} , лишь бы только эти поля были дифференцируемы. Этих двух тождеств достаточно, чтобы вывести половину уравнений Максвелла.

8.2.2. Магнитное поле

Из уравнения (6.30) мы видели, что магнитное поле \vec{B} является ротором векторного потенциала:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}.$$

Следовательно, дивергенция магнитного поля есть дивергенция ротора

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{A}).$$

Согласно нашему первому векторному тождеству, правая часть этого выражения равна нулю. Другими словами,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (8.5)$$

Это одно из уравнений Максвелла. Оно говорит, что магнитных зарядов существовать не может. Если бы мы встретили конфигурацию, в которой векторы магнитного поля расходились бы из одной точки — магнитный монополю, — это уравнение оказалось бы ошибочным.

8.2.3. Электрическое поле

Из векторных тождеств мы можем вывести еще одно уравнение Максвелла — векторное уравнение, содержащее электрическое поле. Вернемся к определению электрического поля:

$$E_n = - \left(\frac{\partial A_n}{\partial t} - \frac{\partial A_0}{\partial X^n} \right). \quad (8.6)$$

Заметим, что второй член — это просто n -я компонента градиента A_0 . С трехмерной точки зрения (только для пространства) временную компоненту, то есть A_0 , можно считать скаляром.¹ А вектор, компоненты которого являются производными A_0 , можно считать градиентом A_0 . Таким образом, у электрического поля два члена: один — производная по времени пространственной компоненты \vec{A} , второй — градиент временной компоненты. Можно переписать (8.6) как векторное уравнение:

¹ С точки зрения четырехмерных векторных пространств эта величина скаляром не является.

$$\vec{E} = - \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla} A_0 \right). \quad (8.7)$$

Теперь рассмотрим ротор \vec{E} :

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} A_0. \quad (8.8)$$

Второй член в правой части — ротор градиента, и согласно нашему второму векторному тождеству, он должен равняться нулю. Первый член можно переписать так:

$$- \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}).$$

Почему это возможно? Потому, что нам разрешается менять местами производные. Когда берется производная для получения ротора, пространственные и временные производные можно менять местами и за счет этого делать временные производные внешними. Поэтому ротор временной производной \vec{A} есть временная производная ротора и в результате (8.8) упрощается до

$$- \vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} (\vec{\nabla} \times \vec{A}).$$

Но мы уже знаем (см. (6.30)), что ротор \vec{A} — это магнитное поле \vec{B} . Поэтому мы можем записать и второе уравнение Максвелла:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = - \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \quad (8.9)$$

или

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0. \quad (8.10)$$

Это векторное уравнение включает в себя три уравнения, по одному для каждой пространственной компоненты. Уравне-

ния (8.5) и (8.10) — это так называемые *однородные* уравнения Максвелла.

Хотя однородные уравнения Максвелла и были выведены как тождества, они тем не менее имеют важный физический смысл. Уравнение (8.5),

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0, \quad (8.11)$$

отражает тот важный факт, что в природе не существует магнитных зарядов — если только это действительно факт. Попросту говоря, это означает, что, в отличие от силовых линий электрических полей, линии магнитного потока нигде не кончаются. Значит ли это, что существование магнитных монополей — магнитных аналогов электрически заряженных частиц — невозможно? Сейчас я не буду отвечать на этот вопрос, но в конце книги мы рассмотрим некоторые подробности этой темы.

Что сказать об уравнении (8.10)? Следует ли что-нибудь и из него? Конечно да! Уравнение (8.10) представляет собой одну из математических формулировок закона Фарадея, которому подчиняется работа всех электромеханических устройств: моторов и генераторов. В конце этой лекции мы еще вернемся, кроме всего прочего, и к закону Фарадея.

8.2.4. Еще два уравнения Максвелла

Есть еще два уравнения Максвелла,¹ и они на сей раз не являются математическими тождествами — это означает, что их нельзя просто вывести из определений \vec{E} и \vec{B} . Нашей конечной целью будет вывести их из принципа действия, но изначально они были открыты как эмпирические законы, суммирующие результаты экспериментов с зарядами, электрическими токами и магнитами. Эти два дополнительных уравнения напоминают (8.5) и (8.10),

¹ Если записать их в компонентной форме, то их будет четыре.

но электрическое и магнитное поля меняются в них ролями. Первое — одиночное уравнение

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho. \quad (8.12)$$

Оно похоже на (8.5) с той лишь разницей, что его правая часть не равна нулю. Величина ρ — это плотность электрического заряда, то есть заряд в единице объема в каждой точке пространства. Уравнение отражает тот факт, что электрические заряды окружены электрическими полями и переносят их вместе с собой, куда бы они ни перемещались. Как мы вскоре увидим, это уравнение тесно связано с законом Кулона.

Таблица 8.1. Уравнения Максвелла и их вывод из векторного потенциала

Вывод	Уравнение
Из векторных тождеств (однородные уравнения)	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0$
Из принципа действия (неоднородные уравнения)	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$ $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \vec{j}$

Второе уравнение — на самом деле их три — похоже на (8.10):

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \vec{j}. \quad (8.13)$$

И вновь, если не считать взаимозамены электрического и магнитного полей и изменения знака, наиболее важным различием между (8.10) и (8.13) будет то, что правая часть (8.13) не равна нулю. Величина \vec{j} представляет собой плотность тока, то есть потока зарядов — например, потока электронов в проводнике.

Смысл уравнения (8.13) заключается в том, что электрические токи тоже окружены полями. Это уравнение также связано с эмпирическим законом — законом Ампера, которым определяется магнитное поле, порождаемое текущим в проводнике током.

Сводка всех четырех уравнений Максвелла дана в табл. 8.1. Первые два уравнения мы вывели, применяя векторные тождества к векторному потенциалу. Два последних уравнения также основаны на векторном потенциале, но они содержат динамическую информацию, и для их вывода необходимо использовать принцип действия. Мы сделаем это на следующей лекции.

Вторая группа уравнений очень напоминает первую, но \vec{E} и \vec{B} в ней почти полностью поменялись ролями. Я сказал «*почти*», так как в структуре этих групп все же есть небольшие, но важные различия. Начнем с того, что немного отличаются знаки. Кроме того, уравнения второй группы *неоднородны*; в их правые части входят величины, называемые *плотностью заряда* ρ и *плотностью тока* \vec{j} , которых в первой группе нет. Мы еще поговорим о ρ и \vec{j} в следующем разделе. Плотность заряда ρ , как и следовало ожидать, есть количество заряда в единице объема; в трехмерном пространстве это скаляр. Плотность тока — 3-вектор. Мы сейчас увидим, что на языке 4-векторов все выглядит немного сложнее. Мы узнаем, что ρ вместе и три компоненты \vec{j} представляют собой компоненты 4-вектора.¹

8.2.5. Плотность заряда и плотность тока

Что же такое плотность заряда и плотность тока? Я попытался проиллюстрировать это на рис. 8.3 и 8.4, но столкнулся с одной проблемой: не знаю, как изобразить четыре измерения пространства-времени на двумерной странице. Так что, когда займетесь

¹ Следовательно, в четырехмерном пространстве-времени ρ скаляром не является. Эта величина преобразуется как временная компонента 4-вектора.

интерпретацией этих рисунков, не забывайте об этом. Здесь требуется некоторая способность к абстрактному мышлению.

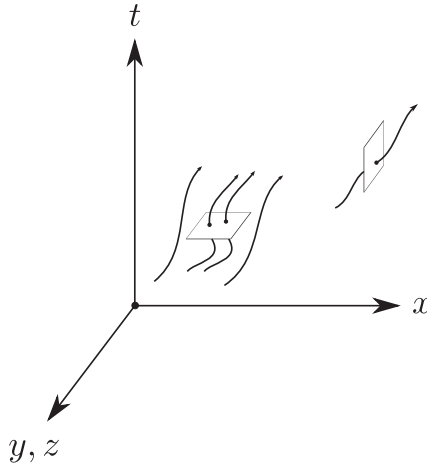


Рис. 8.3. Плотности заряда и тока в пространстве-времени. Ось y, z представляет одновременно два измерения пространства. Искривленные стрелки изображают мировые линии заряженных частиц. Горизонтальное окно иллюстрирует плотность заряда; вертикальное — x -компоненту плотности тока

Плотность заряда — это именно то, что означают данные слова. Вы берете малую область трехмерного пространства и делите общее количество заряда в этой области на ее объем. Плотность заряда есть предел этого частного при стремлении объема области к нулю.

Опишем теперь эту идею с позиции четырехмерного пространства-времени. На рис. 8.3 сделана попытка отобразить все четыре пространственно-временных измерения. Как обычно, вертикальная ось представляет время, а ось x направлена вправо. Пространственная ось, торчащая перпендикулярно странице, обозначена буквами y, z и представляет одновременно оба эти измерения. Именно на это я намекал, когда говорил,

что вам понадобится способность к абстрактному мышлению: возможно, эта часть диаграммы далека от совершенства, но идею передает. Рассмотрим малую ячейку пространства, показанную на рисунке в виде горизонтального квадрата. О ней следует сказать две важных вещи. Во-первых, она ориентирована перпендикулярно оси времени. Во-вторых, она вообще не является квадратом: ее «ребра», параллельные оси y, z , на самом деле являются площадками. Таким образом, этот «квадрат» представляет собой трехмерный объемный элемент, другими словами, куб.

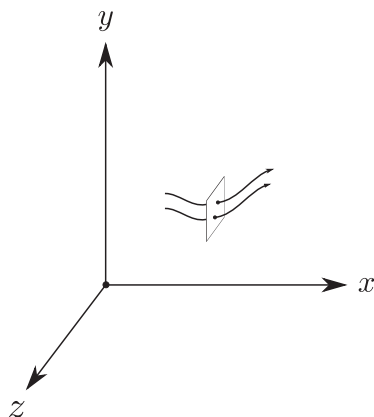


Рис. 8.4. Плотность тока в пространстве. Ось времени не показана. Искривленные стрелки не являются мировыми линиями, а показывают траектории только в пространстве

Искривленные стрелки — это мировые линии заряженных частиц. Мы можем представить себе пространство и время заполненными этими мировыми линиями, которые образуют как бы текучую жидкую среду. Рассмотрим мировые линии, проходящие сквозь наш маленький кубик. Не забудьте, что этот куб, перпендикулярный оси времени, представляет некоторый единичный момент времени. Это значит, что частицы, которые «проходят

сквозь» куб, являются попросту частицами, находящимися *внутри* этого куба в этот момент. Мы просуммировали все их заряды, чтобы получить полный заряд, прошедший сквозь этот малый объем пространства.¹ Плотность заряда ρ есть предельное значение этого полного заряда в элементе объема, деленное на объем этого элемента:

$$\rho = \frac{\Delta Q}{\Delta V}.$$

Поговорим теперь о плотности тока. Один из способов представить себе эту величину — поставить наш маленький квадратик «на ребро». Такой вертикально ориентированный «квадрат» показан в правой части рис. 8.3. Эта диаграмма потребует еще более абстрактного мышления. Наш квадрат все еще репрезентирует трехмерный куб в пространстве-времени. Но этот куб не является чисто пространственным, так как одно его ребро параллельно оси t , то есть одним из трех его измерений является время. Ребро, параллельное осям y, z , указывает нам на то, что остальные два измерения пространственные. Этот квадратик перпендикулярен оси x . Как и прежде, ребра, параллельные осям y, z , на деле соответствуют двумерным квадратам в плоскости y, z . Давайте перерисуем этот малый квадратик на рис. 8.4 в виде чисто пространственной диаграммы, на которой есть только оси x, y и z . На этой новой диаграмме квадрат действительно является квадратом, так как оси времени на ней нет. Это просто малое окошко, перпендикулярное оси x . Какое количество заряда проходит сквозь это окошко за единицу времени? Окно имеет площадь, то есть на деле мы спрашиваем, какое количество заряда протекает сквозь него на единицу

¹ В этом контексте выражение «*проходить сквозь*» имеет особый смысл. Данный элемент объема существует в один определенный момент времени. Частицы существовали в прошлом, а потом будут существовать в будущем. Но в момент, представленный нашим элементом объема, они находятся *внутри* него.

площади и в единицу времени.¹ Это и есть то, что мы понимаем под плотностью тока. Так как наше окно перпендикулярно оси x , оно позволяет определить плотность тока в направлении x . Подобные же компоненты плотности тока существуют и в направлениях y и z .

Плотность тока \vec{j} — 3-вектор

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{\Delta Q}{\Delta A_x \Delta t}, \\ j_y &= \frac{\Delta Q}{\Delta A_y \Delta t}, \\ j_z &= \frac{\Delta Q}{\Delta A_z \Delta t}. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Величины ΔA_x , ΔA_y и ΔA_z представляют элементы площади, перпендикулярные осям x , y и z , соответственно. Другими словами (см. рис. 8.6), значения ΔA в (8.14) таковы:

$$\begin{aligned} \Delta A_x &= \Delta y \Delta z, \\ \Delta A_y &= \Delta z \Delta x, \\ \Delta A_z &= \Delta x \Delta y, \end{aligned}$$

и, следовательно, (8.14) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} j_x &= \frac{\Delta Q}{\Delta y \Delta z \Delta t}, \\ j_y &= \frac{\Delta Q}{\Delta z \Delta x \Delta t}, \\ j_z &= \frac{\Delta Q}{\Delta x \Delta y \Delta t}. \end{aligned} \quad (8.15)$$

¹ Это точная аналогия поворота прямоугольника плотности заряда «на ребро» на рис. 8.3.

Саму величину ρ можно представлять себе как поток заряда по оси времени, x -компоненту или \vec{j} — как поток в направлении оси x , и так далее. Пространственный объем можно представить как некое «окно», перпендикулярное оси t . Вскоре мы узнаем, что величины (ρ, j_x, j_y, j_z) , в сущности, являются контравариантными компонентами 4-вектора. Они входят в другие два уравнения Максвелла, уравнения, которые мы выведем из принципа действия в следующей лекции.

8.2.6. Сохранение заряда

Что по сути означает сохранение заряда? В частности то, что общее количество заряда никогда не меняется; если оно равно Q , то

$$\frac{dQ}{dt} = 0. \quad (8.16)$$

Но это не все. Представим себе, что заряд Q смог каким-то образом внезапно исчезнуть из нашей лаборатории на Земле и мгновенно появиться на Луне (рис. 8.5). Физик, находящийся на Земле, заключил бы, что Q не сохраняется. Принцип сохранения заряда означает нечто большее, чем просто «общее количество заряда Q не изменяется». В действительности его смысл в том, что когда Q уменьшается (или увеличивается) в стенах лаборатории, он на ту же величину увеличивается (или уменьшается) за ее стенами. И даже более того, изменение Q сопровождается появлением потока Q *сквозь* стены. Когда мы говорим о *сохранении*, на деле мы подразумеваем *локальное сохранение*. Эта важная идея приложима и к другим сохраняющимся величинам, не только к заряду.

Чтобы выразить идею локального сохранения математически, нам необходимо ввести обозначения для потока или течения через границу. Термины «*поток*», «*течение*» и «*ток*» по отношению к некоторой физической величине синонимичны и вы-

ражают количество чего-либо, протекающее через малый элемент площади в пересчете на элемент площади и единицу времени. Изменения величины Q в некоторой области пространства должны компенсироваться потоком Q через границы области.

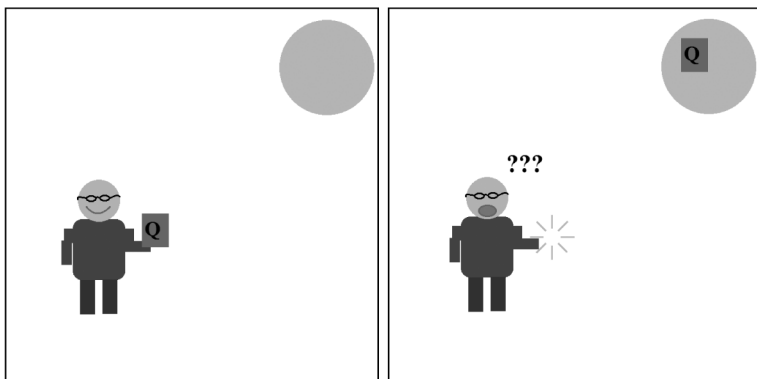


Рис. 8.5. Локальное сохранение заряда. Ситуация, изображенная на этом рисунке, в реальности невозможна: заряд не может исчезнуть в одном месте и мгновенно появиться в другом, удаленном от первого на большое расстояние

На рис. 8.6 показан трехмерный элемент объема, в котором содержится заряд Q . Стенки этого бокса можно считать малыми окнами. Любое изменение величины заряда внутри бокса должно сопровождаться появлением тока через его границы. Из соображений удобства примем объем бокса равным единице в некоторой системе единиц, превратив его таким образом в единичный объем. Подобным же образом мы можем приписать ребрам бокса $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ единичную длину.

Какова производная заряда внутри бокса по времени? Так как бокс имеет единичный объем, заряд внутри него равен плотности заряда ρ . Следовательно, производная заряда по времени есть просто временная производная ρ : $\frac{\partial \rho}{\partial t}$. Принцип локального

сохранения заряда требует, чтобы величина $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ равнялась количеству заряда, втекающего в бокс через его границы. Допустим, например, что заряд Q возрастает. Это значит, что в бокс должен втекать некоторый заряд.

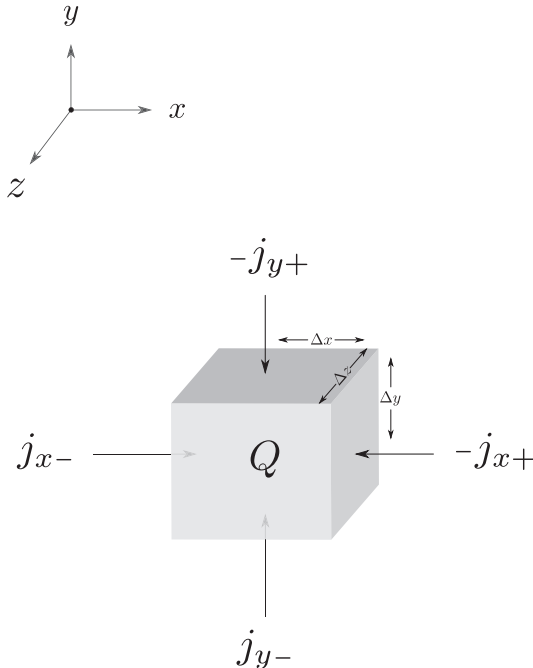


Рис. 8.6. Локальное сохранение заряда. Для удобства примем, что $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 1$ в некоторых малых единицах длины. Элемент объема тогда составляет $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z = 1$

Чистый приток заряда в бокс должен равняться сумме зарядов, входящих в бокс через каждое из шести окон (шести граней куба). Рассмотрим заряд, который поступает через окно, выходящее направо и обозначенное на диаграмме $-j_{x+}$. Подстрочный индекс $x+$ обозначает x -составляющую тока, который входит

в бокс через обращенное вправо (или +) окно. Эти обозначения выглядят запутанными, но вы сейчас увидите, зачем они нам нужны. Заряд, поступающий через это окно, пропорционален j_x , x -составляющей плотности тока.

Плотность тока j_x определяется так, чтобы поток был направлен от меньших к большим значениям x . Именно поэтому заряд, поступающий в обращенное вправо окно за единицу времени, в действительности равен отрицательному j_x , а стрелка, указывающая влево, обозначена $-j_{x+}$. Подобным же образом мы используем подстрочный индекс $x-$ для левой, или минусовой, грани. Аналогичные соглашения принимаются и для направлений y и z . Чтобы не перегружать рисунок, мы не рисовали стрелки для $-j_{z+}$ и j_{z-} .

Теперь посмотрим внимательнее на оба тока (j_{x-} и $-j_{x+}$), текущие на рис. 8.6 в направлении x . Какое количество заряда втекает в бокс справа? Из уравнения (8.15) ясно, что количество заряда, поступающее в бокс справа за время Δt , равно

$$\Delta Q_{\text{справа}} = -(j_{x-})\Delta y\Delta z\Delta t.$$

Аналогично количество заряда, поступающее слева, равно

$$\Delta Q_{\text{слева}} = (j_{x+})\Delta y\Delta z\Delta t.$$

Эти количества заряда, вообще говоря, не равны друг другу — ведь друг другу не равны несущие их токи, протекающие в двух немного отстоящих друг от друга точках на оси x . Сумма этих двух количеств заряда есть общее увеличение заряда, содержащегося в боксе, созданное токами, текущими в положительном или отрицательном направлении x . В формульном виде

$$\Delta Q_{\text{полное}} = -(j_{x-})\Delta y\Delta z\Delta t + (j_{x+})\Delta y\Delta z\Delta t,$$

или

$$\Delta Q_{\text{полное}} = -(j_{x-} - j_{x+})\Delta y\Delta z\Delta t. \quad (8.17)$$

Член в скобках равен изменению тока на малом промежутке Δx и тесно связан с производной j_x по x . По сути, это

$$-(j_{x-} - j_{x+}) = -\frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta x.$$

Подставляя это снова в (8.17), получаем

$$\Delta Q_{\text{полное}} = -\frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta x \Delta y \Delta z \Delta t. \quad (8.18)$$

Ясно, что $\Delta x \Delta y \Delta z$ — объем бокса. Деля обе части уравнения на объем, имеем

$$\frac{\Delta Q_{\text{полное}}}{\Delta x \Delta y \Delta z} = -\frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta t. \quad (8.19)$$

Левая часть уравнения (8.19) есть изменение заряда в единице объема. Другими словами, это изменение плотности заряда ρ , и мы можем написать:

$$\Delta \rho_{\text{полное}} = -\frac{\partial j_x}{\partial x} \Delta t. \quad (8.20)$$

Разделив это на Δt и перейдя к пределу при стремлении всех малых величин к нулю, находим:

$$\frac{\partial \rho_{\text{полное}}}{\partial t} = -\frac{\partial j_x}{\partial x}. \quad (8.21)$$

Однако уравнение (8.21) на самом деле неверно: оно учитывает только заряд, входящий в бокс или выходящий из него через две стенки, перпендикулярные оси x . Иначе говоря, подстрочный индекс «полное» в этом уравнении некорректен: в нем учтена плотность тока только в одном этом направлении. Чтобы получить полную картину, мы должны провести тот же анализ в направлениях y и z и затем сложить плотность тока всех трех направлений. В результате получим:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = - \left(\frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} \right). \quad (8.22)$$

Правая часть этого выражения есть дивергенция \vec{j} . В векторной записи уравнение (8.22) приобретает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$$

или

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (8.23)$$

Это уравнение представляет собой локальное выражение принципа сохранения заряда в терминах окрестностей. Из него следует, что количество заряда внутри любой малой области изменяется только благодаря потоку заряда через стенки этой области. Уравнение (8.23) столь важно, что имеет специальное название: *уравнение непрерывности*. Мне это название не нравится — слово «*непрерывность*» создает впечатление, что распределение заряда должно быть непрерывным, а это не так. Я предпочитаю называть его уравнением *локального сохранения*, так как оно описывает сильную форму сохранения, которая запрещает заряду исчезать в одном месте и появляться в другом, если только между этими точками не происходит перетекание заряда (не течет ток).

Мы могли бы добавить это новое уравнение к системе уравнений Максвелла, но, по сути, в этом нет необходимости. Уравнение (8.23) является следствием уравнений Максвелла. Доказать это нетрудно и я предлагаю вам самостоятельно выполнить это забавное упражнение.

Упражнение 8.4. Воспользуйтесь второй группой уравнений Максвелла из табл. 8.1, а также двумя векторными тождествами из раздела 8.2.1 и выведите уравнение непрерывности.

8.2.7. Уравнения Максвелла: тензорная форма

Итак, мы представили все четыре уравнения Максвелла в 3-векторной форме (табл. 8.1). Мы пока еще не вывели вторую группу этих уравнений из принципа действия, но сделаем это в лекции 10. Но прежде чем приступить к этому, я хотел бы показать вам, как записать первую группу уравнений (совместно с уравнением непрерывности) в тензорных обозначениях с верхними и нижними индексами. Это покажет нам, что уравнения инвариантны относительно преобразований Лоренца. В этом разделе мы снова переключимся на 4-векторные обозначения, которые подчиняются правилам обращения с индексами. Например, я буду обозначать пространственные компоненты плотности тока (J^x, J^y, J^z) или (J^1, J^2, J^3) .

Начнем с уравнения непрерывности (8.23), которое можно переписать так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial J^x}{\partial x} + \frac{\partial J^y}{\partial y} + \frac{\partial J^z}{\partial z} = 0.$$

Теперь определим ρ как временную компоненту J :

$$\rho = J^0.$$

Другими словами, возьмем компоненты (J^x, J^y, J^z) и объединим их с ρ в единый комплекс из четырех чисел. Будем называть этот новый объект J^μ :

$$J^\mu = (\rho, J^x, J^y, J^z).$$

Используя эти обозначения, можно переписать уравнение непрерывности в следующей форме:

$$\frac{\partial J^\mu}{\partial X^\mu} = 0. \quad (8.24)$$

Отметим два момента, которыми сопровождается взятие производной по X^μ . Во-первых, добавляется ковариантный индекс. Во-вторых, так как новый ковариантный индекс совпадает с контравариантным индексом в J^μ , запускается правило суммирования. Записанное в таком виде, уравнение непрерывности представляет собой 4-мерное скалярное уравнение. Нетрудно доказать, что компоненты J^μ действительно преобразуются как компоненты 4-вектора. Сделаем это.

Начнем с того, что лоренц-инвариантность электрического заряда — хорошо установленный экспериментальный факт. Если мы измерим заряд Q в одной системе отсчета, он будет иметь то же значение Q в любой другой. Вернемся теперь к малому заряду ρ в нашем малом боксе единичного объема. Допустим, что этот бокс и заключенный в нем заряд движутся вправо со скоростью v в лабораторной системе.¹ Каковы четыре компоненты плотности тока в *покоящейся системе бокса*? Очевидно, они равны

$$(J')^\mu = (\rho, 0, 0, 0),$$

так как заряд в этой системе отсчета покоится. Каковы компоненты J^μ в лабораторной системе? Мы утверждаем, что они равны

$$J^\mu = \left(\frac{\rho}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{\rho v}{\sqrt{1-v^2}}, 0, 0 \right),$$

или, что эквивалентно,

$$J^\mu = \rho \left(\frac{1}{\sqrt{1-v^2}}, \frac{v}{\sqrt{1-v^2}}, 0, 0 \right). \quad (8.25)$$

Чтобы показать это, вспомним, что плотность заряда определяется двумя факторами: количеством заряда и размерами области, содержащей этот заряд. Мы уже знаем, что количество заряда одно

¹ Как обычно, у движущейся системы координаты штрихованные, у лабораторной — нештрихованные.

и то же в обеих системах. Что можно сказать об объеме содержащего заряд пространства, то есть нашего бокса? В лабораторной системе отсчета движущийся бокс испытывает стандартное лоренцево сокращение $\sqrt{1-v^2}$, и так как бокс сокращается только в направлении x , его объем уменьшается во столько же раз. Но плотность и объем обратно пропорциональны друг другу, так что уменьшение объема вызовет пропорциональный рост плотности. Это обстоятельство объясняет, почему все компоненты правой части (8.25) записаны корректно. Заметим, наконец, что эти компоненты являются в действительности компонентами 4-скорости, которая представляет собой 4-вектор. Другими словами, J^μ есть произведение инвариантной скалярной величины ρ на 4-вектор. Следовательно, и сама величина J^μ должна также быть 4-вектором.

8.2.8. Тождество Бьянки

Посмотрим, что нам в итоге известно. \vec{E} и \vec{B} образуют антисимметричный тензор $F_{\mu\nu}$ с двумя индексами. 3-вектор плотности тока \vec{j} и ρ составляют 4-вектор, то есть тензор с одним индексом. Еще у нас есть первая группа уравнений Максвелла из табл. 8.1:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad (8.26)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0. \quad (8.27)$$

Эти уравнения вытекают из определений \vec{B} и \vec{E} через векторный потенциал. Каждое из них представляет собой частные производные, действующие на компоненты $F_{\mu\nu}$, приравненные нулю. Иначе говоря, они имеют вид

$$\partial F = 0.$$

Я употребляю здесь символ ∂ в широком смысле, означающем некоторую комбинацию частных производных. Формулы (8.26) и (8.27) в действительности представляют четыре уравнения: одно соответствует (8.26), так как оно приравнивает два скаляра,

и три — формуле (8.27), которая приравнивает два 3-вектора. Как нам записать эти уравнения в лоренц-инвариантной форме? Самый простой способ сделать это — сразу написать ответ, а потом объяснить, почему он правильный. Вот он:

$$\partial_\sigma F_{\nu\tau} + \partial_\nu F_{\tau\sigma} + \partial_\tau F_{\sigma\nu} = 0. \quad (8.28)$$

Уравнение (8.28) называется тождеством Бьянки.¹ Индексы σ , ν и τ могут принимать любое из четырех значений (0, 1, 2, 3) или (t, x, y, z) . Причем какие бы из этих значений мы ни присвоили индексам σ , ν и τ , уравнение (8.28) все равно дает ноль.

Давайте убедимся в том, что тождество Бьянки эквивалентно двум однородным уравнениям Максвелла. Сначала рассмотрим случай, когда все три индекса σ , ν и τ представляют пространственные компоненты. В частности, допустим, что мы сделали следующий выбор:

$$\sigma = y,$$

$$\nu = x,$$

$$\tau = z.$$

Подстановка этих значений индексов в (8.28) после несложных алгебраических преобразований (помните, что $F_{\mu\nu}$ антисимметричен) дает

$$\partial_x F_{yz} + \partial_y F_{zx} + \partial_z F_{xy} = 0.$$

Но чисто пространственные компоненты F , такие как F_{yx} , соответствуют компонентам магнитного поля. Вспомним, что, согласно (6.41),

$$F_{yz} = B_x,$$

$$F_{zx} = B_y,$$

$$F_{xy} = B_z.$$

¹ Вообще-то это частный случай тождества Бьянки.

Подставляя эти значения, получаем:

$$\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z = 0.$$

Левая часть этого выражения — просто дивергенция \vec{B} , поэтому оно эквивалентно уравнению (8.26). Оказывается, что при другом назначении x, y и z греческим индексам результат получится тот же самый. Попробуйте сделать это самостоятельно.

Что произойдет, если одним из индексов обозначить временную компоненту? Например, если мы попробуем такие значения:

$$\sigma = y,$$

$$\nu = x,$$

$$\tau = t,$$

то получим

$$\partial_y E_{xt} + \partial_x E_{ty} + \partial_t F_{yx} = 0.$$

Два из этих трех слагаемых имеют смешанные пространственные и временные компоненты — одной ногой они стоят во времени, другой — в пространстве. Это означает, что они являются компонентами электрического поля. Вспомним, что, согласно (6.41),

$$F_{xt} = E_x,$$

$$F_{ty} = -E_y,$$

$$F_{yx} = -B_z.$$

Подстановка приводит к результату

$$\partial_y E_x - \partial_x E_y - \partial_t B_z = 0.$$

Если поменять знак (умножить на -1), получится

$$\partial_x E_y - \partial_y E_x + \partial_t B_z = 0.$$

Это просто z -компонента уравнения (8.27), в соответствии с которым ротор \vec{E} плюс производная \vec{B} по времени дает ноль. Если попробовать взять другие комбинации с одной временной и двумя пространственными компонентами, то получатся x - и y -компоненты (8.27).

Сколькими способами можно приписать различные значения индексам σ , ν и τ ? Индексов три, и каждому из них можно приписать одно из четырех значений t , x , y и z . Это означает, что у нас есть $4 \times 4 \times 4 = 64$ различных способа это сделать. Как же могло получиться, что шестьдесят четыре уравнения, вытекающих из тождества Бьянки, эквивалентны четырем однородным уравнениям Максвелла? Дело просто-напросто в том, что среди уравнений, вытекающих из тождества Бьянки, много избыточных. Например, любой вариант распределения индексов, в котором два индекса равны, даст тривиальное уравнение $0 = 0$. Избыточны и многие распределения индексов сами по себе: они дают одни и те же уравнения. Каждое нетривиальное уравнение эквивалентно либо (8.26), либо одной из компонент (8.27). Есть и другой способ проверить тождество Бьянки. Не забывайте, что тензор $F_{\mu\nu}$ определяется как

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$

или, что эквивалентно,

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu}.$$

Сделав соответствующие подстановки в (8.28), можно переписать это как

$$\partial_\sigma \left(\frac{\partial A_\tau}{\partial X^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\tau} \right) + \partial_\nu \left(\frac{\partial A_\sigma}{\partial X^\tau} - \frac{\partial A_\tau}{\partial X^\sigma} \right) + \partial_\tau \left(\frac{\partial A_\nu}{\partial X^\sigma} - \frac{\partial A_\sigma}{\partial X^\nu} \right) = 0.$$

Если раскрыть скобки у этих производных, то обнаружится, что члены попарно сокращаются друг с другом, и результат оказывается нулевым. Уравнение (8.28) полностью лоренц-инвариантно. Вы можете убедиться в этом, посмотрев, как оно преобразуется.

ЛЕКЦИЯ 9

Физические следствия уравнений Максвелла¹

Арт: Ленни, это не Фарадей ли там сидит у окошка?

Ленни: Думаю, он. Видишь, его столик не завален всякими дурацкими уравнениями. Результаты Фарадея — а их множество — получают прямо в лаборатории.

Арт: Ну а я люблю уравнения, даже трудные. Но мне тоже иногда думается: а может, нам только кажется, что они нам так уж нужны? Глянь только, как лихо Фарадей обходится безо всяких уравнений!

В эту минуту Фарадей замечает в другом углу комнаты Максвелла. Они по-приятельски машут друг другу.

9.1. Математическая интерлюдия

Фундаментальная теорема математического анализа устанавливает связь производных и интегралов. Напомню вам ее содер-

¹ Каким-то образом вышло, что эта важная лекция не вошла в видеокурс. А ведь в ней содержится ключевой момент: показано, что общего в подходе Ленни и в традиционном подходе к нашему предмету. В результате получилось, что лекция 10 в книге соответствует видеолекции 9, а лекция 11 в книге — лекции 10 видеокурса.

жение. Пусть у нас есть функция $F(x)$ и ее производная dF/dx . Фундаментальная теорема формулируется просто:

$$\int_a^b \frac{dF}{dx} dx = F(b) - F(a). \quad (9.1)$$

Обратите внимание на форму уравнения (9.1): его левая часть содержит интеграл, подынтегральное выражение которого является производной $F(x)$. Интеграл берется по промежутку от a до b . В правую часть входят значения F на границах промежутка. Уравнение (9.1) — простейший случай гораздо более общего типа отношений, двумя знаменитыми примерами которого являются *теорема Гаусса* и *теорема Стокса*. Эти теоремы очень важны для электромагнитной теории, поэтому я их здесь сформулирую и объясню. Я не стану приводить доказательств — вы без труда найдете их в разных источниках, в том числе и в интернете.

9.1.1. Теорема Гаусса

Рассмотрим вместо одномерного интервала $a < x < b$ область в трехмерном пространстве, например внутренность сферы или куба. Однако эта область не обязана иметь правильную форму — это может быть любой «пузырь» в пространстве. Мы и будем называть эту область *пузырем*.

У пузыря есть граница или поверхность, которую мы обозначим S . В каждой точке поверхности можно построить единичный вектор \hat{n} , направленный вовне пузыря. Все это проиллюстрировано на рис. 9.1. Если сравнивать с ее одномерным аналогом (9.1), пузырь соответствует интервалу между a и b , а граничная поверхность S — точкам a и b .

Вместо простой функции F и ее производной dF/dx мы будем рассматривать вектор поля $\vec{V}(x, y, z)$ и его дивергенцию $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$. По аналогии с (9.1), теорема Гаусса устанавливает связь между интегралом $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ по объему V трехмерного пузыря и значениями

вектора поля на двумерной границе S пузыря. Сейчас мы запишем и объясним это отношение:

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d^3x = \int_S \vec{V} \cdot \hat{n} dS. \quad (9.2)$$

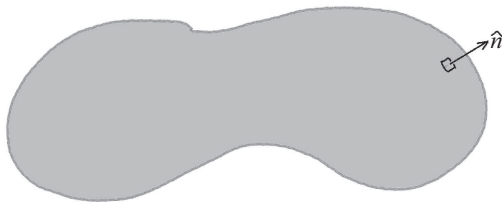


Рис. 9.1. Иллюстрация к теореме Гаусса. \hat{n} — направленный вовне единичный нормальный вектор

Проанализируем эту формулу. В ее левой части — интеграл по объему внутренней области пузыря. Его подынтегральное выражение — скалярная функция, определяемая как дивергенция $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$.

В правой части уравнения также стоит интеграл, взятый по внешней поверхности S пузыря. Мы можем представлять его как сумму всех малых элементов поверхности, из которых состоит S . Каждому малому элементу поверхности сопоставлен направленный наружу единичный вектор \hat{n} , и подынтегральное выражение в поверхностном интеграле есть скалярное произведение \vec{V} и \hat{n} . Другим способом это можно сформулировать так: подынтегральное выражение представляет собой нормальный (перпендикулярный к S) компонент \vec{V} .

Важным частным случаем является сферически симметричное векторное поле \vec{V} . У него два свойства: во-первых, это поле повсюду имеет радиальное направление. Вдобавок сферическая симметрия означает, что абсолютная величина \vec{V} определяется только расстоянием от начала координат и не зависит от углового положения. Если определить единичный вектор \hat{r} , направленный

в каждой точке пространства в сторону от начала координат, тогда сферически симметричное поле будет описываться формулой

$$\vec{V} = V(r)\hat{r},$$

где $V(r)$ — некоторая функция расстояния от начала отсчета. Рассмотрим сферу радиуса r с центром в начале координат:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Термин «сфера» относится к этой двумерной оболочке. Объем, заключенный внутри оболочки, называется *шаром*. Теперь применим теорему Гаусса, интегрируя $\vec{\nabla} \cdot \vec{V}$ по шару. Левая часть (9.2) превращается в объемный интеграл,

$$\int_B \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d^3x,$$

где B теперь означает «шар». Правая часть — интеграл по *границе* шара, другими словами, по сфере. Поскольку поле сферически симметрично, $V(r)$ на сферической границе постоянно, что упрощает вычисления. Интеграл

$$\int_S \vec{V} \cdot \hat{n} dS$$

приобретает вид

$$\int_S V(r) \hat{r} \cdot \hat{r} dS$$

или

$$V(r) \int_S dS.$$

Однако интеграл от dS по поверхности сферы есть просто площадь этой сферы, $4\pi r^2$. В конечном счете для сферически симметричного поля \vec{V} теорема Гаусса принимает вид

$$\int_B \vec{\nabla} \cdot \vec{V} d^3x = 4\pi r^2 V(r). \quad (9.3)$$

9.1.2. Теорема Стокса

Теорема Стокса также связывает интеграл по области с интегралом по ее границе. На этот раз область представляет собой не трехмерный объем, а двумерную поверхность S , ограниченную кривой C . Представьте себе замкнутую кривую в пространстве, образованную тонкой проволокой. Двумерная поверхность похожа на мыльную пленку, натянутую на эту проволоку. На рис. 9.2 такая изогнутая поверхность изображена в виде заштрихованной области, ограниченной кривой линией.

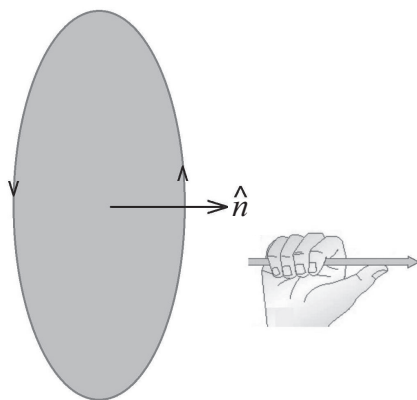


Рис. 9.2. Теорема Стокса и правило правой руки. Серая поверхность не обязательно плоская. Она может выгибаться влево или вправо наподобие мыльного пузыря

Здесь также важно придать поверхности ориентацию, снабдив ее единичным нормальным вектором \hat{n} . Представим себе в каждой точке поверхности вектор \hat{n} , который помогает отличать одну сторону поверхности от другой.

Левая часть уравнения, выражающего теорему Стокса, — это интеграл по заштрихованной поверхности. В этот интеграл входит ротор \vec{V} , точнее, его подынтегральное выражение есть

компонента $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ в направлении \hat{n} . Мы запишем этот интеграл в виде

$$\int_s (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \hat{n} dS.$$

Рассмотрим этот интеграл внимательно. Представим, что поверхность S разделена на бесконечно малые элементы dS . В каждой точке мы построим ротор $\vec{\nabla} \times \vec{V}$ и возьмем его скалярное произведение с единичным нормальным вектором \hat{n} в этой точке. Умножим результат на элемент площади dS и просуммируем по всем точкам, определив таким образом поверхностный интеграл $\int_s (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \hat{n} dS$. Это левая часть теоремы Стокса.

В правую часть входит интеграл по криволинейной границе S . Нам необходимо определить ориентацию вдоль этой кривой, и здесь нам пригодится так называемое правило правой руки. Это математическое правило никак не связано с физиологией человека. Тем не менее его проще всего объяснить при помощи вашей правой руки. Направьте большой палец по направлению вектора \hat{n} . Тогда остальные ваши пальцы изогнутся вдоль граничной кривой C в определенном направлении. Оно и задает ориентацию для кривой C . Это называется правилом правой руки.

Кривую можно представлять себе как совокупность бесконечно малых векторов $d\vec{l}$, каждый из которых направлен вдоль кривой в направлении, определяемом правилом правой руки. Тогда теорема Стокса связывает контурный интеграл

$$\oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l}$$

по кривой C с интегралом по поверхности

$$\int_s (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \hat{n} dS.$$

Другими словами, теорема Стокса заключается в том, что

$$\int_s (\vec{\nabla} \times \vec{V}) \cdot \hat{n} dS = \oint_C \vec{V} \cdot d\vec{l}. \quad (9.4)$$

9.1.3. Безымянная теорема

В дальнейшем нам понадобится теорема, у которой, насколько мне известно, нет никакого названия. Существует много безымянных теорем — например, знаменитая:

$$1 + 1 = 2. \quad (9.5)$$

Безымянных теорем, конечно, гораздо больше, чем теорем с названиями, и сейчас вы познакомитесь с одной из них. Прежде всего, нам понадобятся обозначения. Пусть $F(x, y, z)$ — скалярная функция в пространстве. Градиент F — это поле $\vec{\nabla}F$ с тремя компонентами

$$\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Теперь рассмотрим дивергенцию $\vec{\nabla}F$. Назовем ее $\vec{\nabla}\vec{\nabla}F$, или проще, $\nabla^2 F$. Вот она в развернутом виде:

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}. \quad (9.6)$$

Символ ∇^2 называется лапласианом в честь французского математика Пьера-Симона Лапласа.¹ Лапласиан — это сумма вторых производных по x , y и z .

В формулировке новой теоремы участвует векторное поле \vec{V} . Также в ней используется векторная версия лапласиана, описанная в приложении Б. Начнем с построения ротора $\vec{\nabla} \times \vec{V}$, который *тоже* является векторным полем. А раз это так, мы можем взять ротор *и от него*:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}).$$

¹ Оператор Лапласа также обозначают буквой «дельта»: $\Delta = \nabla^2$. — *Примеч. ред.*

Какого типа величиной является этот двойной ротор? Взятие ротора от любого векторного поля дает другое векторное поле, и потому $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V})$ — тоже векторное поле. Теперь я сформулирую безымянную теорему:¹

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{V}) - \vec{\nabla}^2 \vec{V}. \quad (9.7)$$

В словесной формулировке: ротор ротора \vec{V} равен градиенту дивергенции \vec{V} минус лапласиан \vec{V} . Повторю еще раз, прибегнув к помощи скобок:

Ротор (ротора \vec{V}) равен градиенту (дивергенции \vec{V}) минус лапласиан \vec{V} .

Как доказать теорему (9.7)? Самым скучным из всех возможных способов: выписать все члены выражения в явном виде и сравнить левую часть с правой. Сделайте это сами в качестве упражнения.

Позже по ходу нашей лекции мы воспользуемся нашей безымянной теоремой. К счастью, нам понадобится только ее частный случай, когда дивергенция \vec{V} равна нулю. В этом случае формула (9.7) приобретает более простой вид:

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{V}) = -\vec{\nabla}^2 \vec{V}. \quad (9.8)$$

9.2. Законы электродинамики

Арт: Ох-хо! Гаусс, Стокс, дивергенция, ротор — Ленни, Ленни, у меня башка сейчас взорвется!

Ленни: Вот и здорово, Арт! Мы получим отличную демонстрацию теоремы Гаусса. Опишем твое серое вещество при помощи плотности ρ и тока \vec{j} . Когда твоя башка взорвется, закон сохранения

¹ Один из наших рецензентов предложил назвать ее «теоремой двойного креста».

серого вещества будет описываться уравнением непрерывности, так? Арт? Эй, Арт? Ты в порядке?

9.2.1. Сохранение электрического заряда

Закон локального сохранения электрического заряда — центральное положение электродинамики. В лекции 8 я объяснил суть этого закона: плотность заряда и ток удовлетворяют уравнению непрерывности (8.23):

$$\dot{\rho} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{j}.$$

Уравнение непрерывности — локальное уравнение, которое выполняется в каждой точке пространства и времени. Его смысл далеко выходит за пределы утверждения «полный заряд никогда не меняется». Он подразумевает, что если заряд изменяется — скажем, в этой комнате, где я читаю вам лекцию, — это может произойти, только если он пройдет через стены комнаты. Разовьем это утверждение.

Возьмем уравнение непрерывности и проинтегрируем его по пространственному пузырю V , ограниченному поверхностью S . Левая часть примет вид

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho d^3x = \frac{dQ}{dt},$$

где Q — количество заряда в области V . Другими словами, левая часть этого выражения представляет собой скорость изменения количества заряда внутри V . Правая часть равна

$$-\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d^3x.$$

Здесь-то нам и понадобится теорема Гаусса. В соответствии с ней

$$\int_V \vec{\nabla} \cdot \vec{j} d^3x = \int_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS.$$

Вспомним, что $\vec{j} \cdot \hat{n}$ — это скорость, с которой заряд пересекает поверхность: количество заряда за единицу времени на единицу площади. Когда эта величина интегрируется, мы получаем полное количество заряда, пересекающее граничную поверхность за единицу времени. Уравнение непрерывности в интегральной форме принимает вид

$$\frac{dQ}{dt} = - \int_S \vec{j} \cdot \hat{n} dS, \quad (9.9)$$

и в соответствии с ним изменение заряда внутри V происходит за счет потока заряда через поверхность S . Если заряд внутри V уменьшается, значит, он должен вытекать через границу V .

9.2.2. От уравнений Максвелла к законам электродинамики

Максвелл не выводил свои уравнения из принципов относительности, наименьшего действия и калибровочной инвариантности. Они были получены на основе экспериментальных результатов. Максвеллу посчастливилось: ему не пришлось ставить эти эксперименты самому. К этому приложили руки многие другие «отцы-основатели» — Франклин, Кулон, Эрстед, Ампер, Фарадей и другие. К моменту, когда Максвелл принялся за дело, основные принципы электродинамики были уже сформулированы, главным образом, Фарадеем. Большая часть курсов электричества и магнетизма следуют историческому пути от «отцов-основателей» к Максвеллу. Но, как это часто бывает, исторический ход событий далек от ясности и логичности. В этой лекции я собираюсь пройти вспять, от Максвелла к Кулону, Фарадею, Амперу и Эрстеду, а затем вновь вернуться к увенчавшему их труды великому достижению Максвелла.

Во времена Максвелла в теории электромагнетизма появилось несколько констант — и этих констант было больше необходимо-

го числа. Две постоянные известны как ϵ_0 и μ_0 . В уравнениях большей части появляется лишь их произведение $\epsilon_0\mu_0$, которое фактически представляет собой не что иное, как постоянную $1/c^2$, с тем же самым c , которое мы встречаем в уравнении Эйнштейна $E = mc^2$. Но, конечно, во времена «отцов-основателей» никому не приходило в голову, что эти константы могут иметь что-то общее со скоростью света. Это были просто постоянные, выводимые из экспериментов с зарядами, токами и силами. Поэтому давайте пока забудем о том, что c — скорость света, и будем просто считать эту величину константой в максвелловских обобщениях экспериментальных законов, выведенных его предшественниками. Вот уравнения из табл. 8.1, модифицированные так, чтобы в них входили соответствующие множители c .¹

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= \rho, \\ c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= \vec{j}.\end{aligned}\tag{9.10}$$

9.2.3. Закон Кулона

Закон Кулона — электромагнитный аналог ньютоновского закона тяготения. Он гласит, что между любыми двумя частицами действует сила, пропорциональная произведению их электрических зарядов и обратно пропорциональная квадрату расстояния между ними. С закона Кулона обычно начинается любой курс электродинамики, а мы, приближаясь уже к концу нашей *Книги III*, о нем почти не упоминали. Поэтому мы его сейчас выведем, вместо того чтобы постулировать, как это делается обычно.

¹ При использовании широко распространенной системы единиц СИ вместо ρ и \vec{j} вы встретите ρ/ϵ_0 и \vec{j}/ϵ_0 .

Представим себе точечный заряд Q в начале координат: $x = y = z = 0$. Плотность заряда сосредоточена в точке, и ее можно описать ее трехмерной дельта-функцией

$$\rho = Q\delta^3(x). \quad (9.11)$$

В лекции 5 мы использовали дельта-функцию для представления точечного заряда. Как и тогда, символ $\delta^3(x)$ будет сокращением для $\delta(x)\delta(y)\delta(z)$. Специфическое свойство дельта-функции состоит в том, что при интегрировании ρ по пространству мы получаем полный заряд Q .

Взглянем теперь на третье уравнение Максвелла из системы (9.10):

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho.$$

Что произойдет с левой частью этого уравнения, если проинтегрировать его по сфере радиуса r ? Поскольку задача симметрична, мы вправе считать поле точечного заряда сферически симметричным и, следовательно, воспользоваться уравнением (9.3). После подстановки \vec{E} левая часть (9.3) приобретает вид

$$\int \vec{\nabla} \cdot \vec{E} d^3x.$$

Однако, задействовав третье уравнение Максвелла $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$, можно переписать это как

$$\int \rho d^3x,$$

что, конечно, есть заряд Q . Правая часть (9.3) — это

$$4\pi r^2 E(r),$$

где $E(r)$ — электрическое поле на расстоянии r от заряда. Таким образом, (9.3) превращается в

$$Q = 4\pi r^2 E(r).$$

Или, выражая это немного иначе, радиальное электрическое поле, порождаемое точечным зарядом Q , расположенным в начале координат, описывается выражением

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2}. \quad (9.12)$$

Рассмотрим теперь второй заряд q на расстоянии r от Q . Согласно формуле для силы Лоренца (6.1), поле заряда Q действует на заряд q с силой $q\vec{E}$, равной

$$F = \frac{qQ}{4\pi r^2}. \quad (9.13)$$

Это, разумеется, и есть закон Кулона, определяющий величину силы, действующей между двумя зарядами. Мы вывели его, а не постулировали.

9.2.4. Закон Фарадея

Рассмотрим работу по перемещению заряженной частицы из точки a в точку b в электрическом поле. Работа, совершаемая при перемещении частицы на бесконечно малое расстояние $d\vec{l}$, равна

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l},$$

где F — сила, действующая на частицу. При перемещении частицы из точки a в точку b сила F производит работу

$$\int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l}.$$

Если сила вызывается действием электрического поля, работа равна

$$W = q \int_a^b \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (9.14)$$

В общем случае работа зависит не только от положения начальной и конечной точек, но и от пути, вдоль которого перемещается

частица. Выполненная работа может оказаться ненулевой, даже если путь представляет собой замкнутую пространственную кривую, которая начинается и заканчивается в одной и той же точке a . Это можно описать контурным интегралом вдоль замкнутой кривой в пространстве:

$$W = q \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (9.15)$$

Но можем ли мы в действительности произвести работу над частицей, перемещая ее по замкнутому пути — например, по замкнутому в петлю проводнику? При определенных обстоятельствах это возможно. Интеграл $\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}$ называется электродвижущей силой (ЭДС) в замкнутой цепи.

Проанализируем эту ЭДС, используя теорему Стокса (9.4). В применении к электрическому полю она дает

$$\int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dS = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{l}. \quad (9.16)$$

На этом основании можно выразить ЭДС для замкнутой цепи следующим образом:

$$\text{ЭДС} = \int (\vec{\nabla} \times \vec{E}) \cdot \hat{n} dS, \quad (9.17)$$

где интеграл берется по любой поверхности, границей которой является замкнутая кривая C .

Здесь наступает момент, когда на сцену выходят уравнения Максвелла. Вспомним второе уравнение системы (9.10):

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Если магнитное поле не меняется со временем, то ротор электрического поля равен нулю и (см. (9.17)) ЭДС для замкнутой цепи тоже равна нулю. В ситуациях, когда поля не меняются со временем, на перемещение заряда вдоль замкнутого пути работа не затрачивается. Эта ситуация часто обсуждается на элементарном уровне.

Но иногда магнитные поля все же изменяются со временем — например, если просто помахнуть магнитом в воздухе. Применяя второе уравнение Максвелла к (9.17), получаем:

$$\mathcal{E}ДС = - \int \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot \hat{n} \, dS,$$

или

$$\mathcal{E}ДС = - \frac{d}{dt} \int \vec{B} \cdot \hat{n} \, dS.$$

Таким образом, ЭДС равняется скорости изменения определенной величины: $\int \vec{B} \cdot \hat{n} dS$, взятой с обратным знаком. Этот интеграл магнитного поля по поверхности, ограниченной замкнутым проводником, называется магнитным потоком через петлю и обозначается Φ . Тогда наше уравнение для ЭДС можно кратко переписать так:

$$\mathcal{E}ДС = - \frac{d\Phi}{dt}. \quad (9.18)$$

ЭДС представляет собой силу, действующую на заряженную частицу (единичный заряд) в замкнутом контуре. Если контур — электрический проводник, то под воздействием ЭДС в цепи пойдет ток.

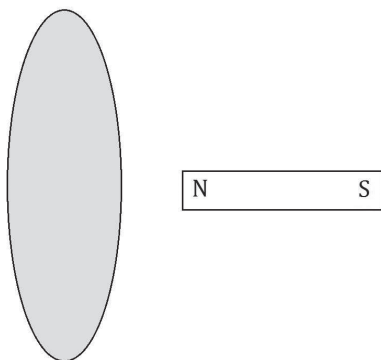


Рис. 9.3. Закон Фарадея

Тот замечательный факт, что ЭДС в цепи может возникать вследствие изменения потока через контур, был открыт Майклом Фарадеем и называется законом Фарадея. На рис. 9.3 замкнутый контур изображен рядом с магнитным бруском. Попеременно поднося магнит к контуру и отодвигая его, можно изменять поток через контур и тем самым порождать в нем ЭДС. Электрическое поле, создающее ЭДС, заставляет ток течь по проводнику. Отодвинем магнит от контура — ток потечет в одном направлении. Пододвинем магнит ближе — направление тока изменится на противоположное. Именно так Фарадей и открыл свой эффект.

9.2.5. Закон Ампера

А как обстоят дела с другими уравнениями Максвелла? Можно ли и в них распознать какие-нибудь основные законы электромагнетизма? Попробуем обратиться к четвертому уравнению Максвелла из системы (9.10):

$$c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}.$$

Будем пока считать, что с течением времени ничего не меняется: ток \vec{j} постоянен и все поля статичны. В этом случае уравнение упрощается:

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} = \frac{\vec{j}}{c^2}. \quad (9.19)$$

Одним из следствий этого уравнения является то, что магнитное поле будет оставаться очень малым, если только через контур не потечет очень большой ток. В обычных лабораторных единицах множитель $1/c^2$ очень мал. Этот факт играл важную роль в интерлюдии «Чокнутые единицы» после лекции 5.

Рассмотрим ток, идущий по очень длинной и тонкой проволоке, — настолько длинной, что можно считать ее бесконечной. Ориентируем оси нашей системы координат так, чтобы провод

лежал вдоль оси x и ток шел вправо. Так как проволока очень тонкая, по измерениям y и z ток можно представить его дельта-функцией:

$$\begin{aligned} j_x &= j\delta(y)\delta(z), \\ j_y &= 0, \\ j_z &= 0. \end{aligned} \tag{9.20}$$

Представим теперь окружность радиуса r , охватывающую проводник, как показано на рис. 9.4. На этот раз окружность является воображаемым математическим объектом, а не физическим проводником. Мы снова воспользуемся теоремой Стокса, а как именно, должно быть ясно из рисунка. Проинтегрируем уравнение (9.19) по дискообразной заштрихованной области на рис. 9.4. Левая часть уравнения — интеграл от $\vec{\nabla} \times \vec{B}$, который по теореме Стокса равен контурному интегралу B по окружности. Правая часть есть просто величина тока j , текущего в проводнике с коэффициентом $1/c^2$.

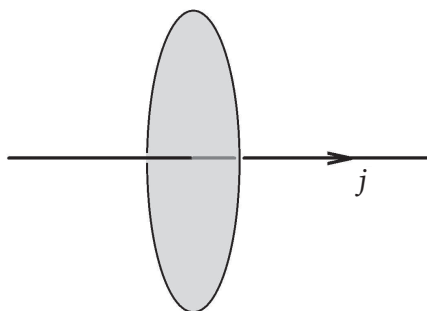


Рис. 9.4. Закон Ампера

Таким образом,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \frac{j}{c^2}. \tag{9.21}$$

Отсюда следует, что ток, протекающий по проводнику, порождает вокруг проводника магнитное поле. При этом поле направлено по касательной к окружности, перпендикулярной оси x , а не вдоль оси x и не от проводника.

Так как \vec{B} параллельно $d\vec{l}$ в каждой точке контура, интеграл от магнитного поля есть просто произведение длины окружности на значения поля на расстоянии r от проводника, то есть

$$2\pi r B(r) = \frac{j}{c^2}.$$

Решая это уравнение относительно $B(r)$, находим, что магнитное поле, порожденное токонесущим проводом на расстоянии r от проводника, равно

$$B(r) = \frac{j}{2\pi r c^2}. \quad (9.22)$$

На первый взгляд может показаться, что множитель $1/c^2$ невообразимо мал — настолько, что при обычных значениях тока никаких магнитных полей регистрироваться не должно. И действительно, в обычной метрической системе единиц

$$\frac{1}{c^2} \approx 10^{-17}.$$

Но малость этого числа компенсируется гигантским количеством электронов, движущихся по проводнику, когда в нем создается ЭДС.

Уравнение (9.22) носит название закона Эрстеда в честь датского физика Ганса Христиана Эрстеда. Он заметил, что электрический ток в проводнике заставляет намагниченную стрелку компаса устанавливаться в направлении, перпендикулярном проводнику по касательной к описанной вокруг него окружности. Вскоре после этого французский физик Андре-Мари Ампер обобщил закон Эрстеда для более широкого класса электрических токов.

Законы Эрстеда и Ампера вместе с законом Фарадея заложили основание для исследований, которые и привели Максвелла к его уравнениям.

9.2.6. Закон Максвелла

Под законом Максвелла я подразумеваю открытие, сделанное Джеймсом Клерком Максвеллом в 1862 г.: свет состоит из электромагнитных волн — волнообразных колебаний электрического и магнитного полей. Это открытие было чисто математическим, а не основанным на лабораторном эксперименте. Оно состояло в том, что уравнения Максвелла имеют решения в виде волн, распространяющихся с определенной скоростью, которую Максвелл вычислил. К тому времени скорость света была уже почти двести лет как измерена экспериментально, и Максвелл просто заметил, что она совпадает с полученной им скоростью электромагнитных волн. В конце этой лекции я и собираюсь показать, как из уравнений Максвелла следует, что электрическое и магнитное поля удовлетворяют волновому уравнению.

Мы рассмотрим уравнения Максвелла в областях пространства, где нет источников поля, то есть нет ни токов, ни плотности заряда:

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0, \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{E} &= 0, \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0, \\ c^2 \nabla \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} &= 0.\end{aligned}\tag{9.23}$$

Наша цель — показать, что электрическое и магнитное поля удовлетворяют тому же типу волнового уравнения, которое мы

исследовали в лекции 4. Возьмем упрощенное волновое уравнение (4.26) и перенесем все пространственные производные в правую часть:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2}.$$

С помощью лапласиана удобно сократить всю правую часть этого уравнения и переписать его следующим образом:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \nabla^2 \phi. \quad (9.24)$$

Как я объяснял в лекции 4, это уравнение описывает волны, движущиеся со скоростью c .

Давайте теперь попробуем представить себя на месте Максвелла. У него были его уравнения (9.23), но они совсем не похожи на (9.24). В сущности, у него не было никакой ясной причины связывать константу c с какой-либо скоростью, не говоря уж о скорости света. Подозреваю, что он задавал себе такой вопрос:

У меня есть связанные друг с другом уравнения для \vec{E} и \vec{B} . Нет ли какого-нибудь способа упростить их, избавившись от одной из этих величин (либо от \vec{E} , либо от \vec{B}), чтобы получить уравнения только для другой?

Меня, разумеется, там не было, но что у Максвелла такой вопрос возник, представить нетрудно. Посмотрим, не можем ли мы ему помочь. Возьмем последнее уравнение из системы (9.23) и продифференцируем обе части по времени. Получится

$$c^2 \vec{\nabla} \times \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0.$$

Теперь воспользуемся вторым уравнением Максвелла и заменим $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ на $-\vec{\nabla} \times \vec{E}$, в результате чего получится уравнение для электрического поля:

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{E}) = 0.$$

Это уже начинает больше походить на волновое уравнение, но мы еще не закончили. Нашим последним шагом станет использование безымянной теоремы (9.7). К счастью, все, что нам нужно, — это ее упрощенное следствие (9.8). Дело в том, что второе уравнение Максвелла $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ — это именно то условие, которое позволяет воспользоваться этим упрощением. В результате мы получаем то, чего добивались:

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{\nabla}^2 \vec{E}. \quad (9.25)$$

Каждая компонента электрического поля удовлетворяет волновому уравнению.

Ленни: Меня там не было, Арт, но я отлично представляю себе, в какой восторг пришел Максвелл! Я так и слышу, как он говорит сам себе:

«Что такое эти волны? Из формы уравнения следует, что скорость волны — это та самая забавная постоянная c , которая повсюду появляется в моих уравнениях. Если я не ошибаюсь, в метрических единицах она равна примерно 3×10^8 . Йессс! 3×10^8 метров в секунду! Скорость света!»

Вот так и вышло, что Джеймс Клерк Максвелл открыл электромагнитную природу света.

ЛЕКЦИЯ 10

От Лагранжа к Максвеллу

Арт: Меня все-таки беспокоит Максвелл. Уж слишком долго он о чем-то разговаривает сам с собой.

Ленни: Не волнуйся, Арт, похоже, он близок к решению. [Ленни показывает на входную дверь.] К тому же, глянь, вот ему и подмога.

В кабачок входят два джентльмена. Один из них пожилой и почти слепой, но ступает уверенно. Они усаживаются по обе стороны от Максвелла, и тот сразу же их узнаёт.

Максвелл: Эйлер! Лагранж! Я так надеялся, что вы придете! И как вовремя! Просто идеально!

В этой лекции мы сделаем две вещи. Во-первых, продолжим лекцию 9 и подробно рассмотрим плоские электромагнитные волны. А во-вторых, сформулируем принцип действия для электромагнитного поля и выведем два уравнения Максвелла, которые не являются тождествами. Чтобы напомнить, куда мы движемся и докуда дошли, я привожу в табл. 10.1 полную систему уравнений Максвелла.

Таблица 10.1. Уравнения Максвелла в 3-векторной и 4-векторной форме. Верхняя группа уравнений выводится из тождеств; нижняя — из принципа действия

Форма	Уравнение
3-вектор	$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ $\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = 0$
4-вектор	$\partial_\mu F_{\nu\sigma} + \partial_\nu F_{\sigma\mu} + \partial_\sigma F_{\mu\nu} = 0$
3-вектор	$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$ $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \vec{j}$
4-вектор	$\partial_\nu F^{\mu\nu} = J^\mu$

10.1. Электромагнитные волны

В лекциях 4 и 5 мы обсудили волны и волновые уравнения, а в лекции 9 увидели, как Максвелл вывел волновое уравнение для компонент электрического и магнитного полей.

Начнем с уравнений Максвелла (9.23) в отсутствие источников поля. Для удобства я перепишу их здесь еще раз:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0,$$

$$c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0.$$

Теперь рассмотрим волну, движущуюся вдоль оси z ; длина этой волны

$$\lambda = \frac{2\pi}{k},$$

где k — так называемое волновое число. Длину волны можно выбрать любую. В общем виде функция, описывающая плоскую волну, имеет вид:

$$\text{Значение поля} = C \sin(kz - \omega t),$$

где C — произвольная постоянная. В применении к электрическому полю ее компоненты имеют форму

$$E_x(t, z) = \mathcal{E}_x \sin(kz - \omega t), \quad (10.1)$$

$$E_y(t, z) = \mathcal{E}_y \sin(kz - \omega t), \quad (10.2)$$

$$E_z(t, z) = \mathcal{E}_z \sin(kz - \omega t), \quad (10.3)$$

где \mathcal{E}_x , \mathcal{E}_y и \mathcal{E}_z — числовые константы. Их можно рассматривать как компоненты постоянного вектора, задающего направление *поляризации* волны.

Мы предполагаем, что волна распространяется вдоль оси z . Разумеется, это не обязательное условие: волна может распространяться в любом направлении. Но мы всегда вольны сориентировать систему отсчета так, чтобы волна двигалась именно вдоль z .

Остается еще одна степень свободы — возможность добавить зависимость от косинуса. Но это просто означает сдвиг волны по оси z . Смещая начало отсчета, можно избавиться и от этой зависимости.

Теперь используем уравнение $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$. Так как z — единственная пространственная координата, от которой зависят компоненты электрического поля, это уравнение принимает особенно простой вид:

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0. \quad (10.4)$$

В сочетании с (10.3) находим, что

$$\mathcal{E}_z = 0.$$

Другими словами, компонента электрического поля в направлении распространения волны должна быть нулевой. Волны с таким свойством называются *поперечными*.

Наконец, мы всегда можем ориентировать оси x и y так, чтобы вектор поляризации $\vec{\mathcal{E}}$ был направлен вдоль оси x . Тогда электрическое поле приобретает вид:

$$\begin{aligned} E_z &= 0, \\ E_y &= 0, \\ E_x &= \mathcal{E}_x \sin(kz - \omega t). \end{aligned} \quad (10.5)$$

Далее рассмотрим магнитное поле. Мы могли бы попробовать позволить магнитному полю распространяться в направлении, отличном от направления электрического, но это вошло бы в противоречие с уравнениями Максвелла, в которые входят как электрическое, так и магнитное поле. Так что магнитное поле тоже должно распространяться вдоль оси z и будет иметь вид:

$$B_x(t, z) = \mathcal{B}_x \sin(kz - \omega t), \quad (10.6)$$

$$B_y(t, z) = \mathcal{B}_y \sin(kz - \omega t), \quad (10.7)$$

$$B_z(t, z) = \mathcal{B}_z \sin(kz - \omega t). \quad (10.8)$$

В силу тех же аргументов, что использовались в случае электрического поля, из уравнения $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ вытекает, что z -компонента магнитного поля равна нулю. Следовательно, магнитное поле тоже должно лежать в плоскости (x, y) , хотя и не обязательно в том же направлении, что и электрическое. На самом деле

оно перпендикулярно электрическому полю и, следовательно, должно быть направлено вдоль оси y . Чтобы подтвердить это, воспользуемся уравнением Максвелла

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0.$$

В покомпонентной форме получаем:

$$\begin{aligned}\dot{B}_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}, \\ \dot{B}_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}, \\ \dot{B}_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}.\end{aligned}\tag{10.9}$$

Теперь, помня о том, что E_z и E_y равны нулю и что поля меняются только вдоль оси z , мы убеждаемся, что изменяться со временем может только y -компонента магнитного поля. Из того, что мы обсуждаем волновые колебания, следует, что только y -компонента \vec{B} может быть ненулевой.

Из уравнений (10.9) следует еще один факт. Если подставить в них $E_x = \mathcal{E}_x \sin(kz - \omega t)$ и $B_y = \mathcal{B}_y \sin(kz - \omega t)$, то получим следующее ограничение на \mathcal{B}_y :

$$\mathcal{B}_y = -\frac{k}{\omega} \mathcal{E}_x.\tag{10.10}$$

Осталось еще одно уравнение Максвелла, которым мы не пользовались, а именно

$$c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = 0.$$

Если взять x -компоненту этого последнего уравнения и воспользоваться тем, что мы уже знаем, то уравнение редуцируется до

$$\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}.$$

Подставляя выражения для E_x и B_y , получаем простое соотношение между частотой ω и волновым числом k :

$$\omega = ck.$$

Описывающая волну функция $\sin(kz - \omega t)$ превращается в

$$\sin k(z - ct). \quad (10.11)$$

А это как раз и есть волна, распространяющаяся вдоль оси z со скоростью c . Итак, подытожим свойства электромагнитных плоских волн:

- Они распространяются вдоль одной оси со скоростью света.
- Электромагнитные волны поперечны; это означает, что поля лежат в плоскости, перпендикулярной оси распространения.
- Электрическое и магнитное поля перпендикулярны друг другу.
- Соотношение электрического и магнитного полей равно

$$\frac{B_y}{E_x} = \frac{1}{c}.$$

В релятивистских единицах ($c = 1$) величины электрического и магнитного полей равны.

Напомню об одном свойстве световых волн, с которым вы, вероятно, знакомы, особенно если носите хорошие солнечные очки. Свет поляризован. Фактически все электромагнитные волны поляризованы. Направление поляризации совпадает с направлением электрического поля, так что в нашем примере мы сказали бы, что волна поляризована в направлении оси x . Свойства плоских электромагнитных волн проиллюстрированы на рис. 10.1.

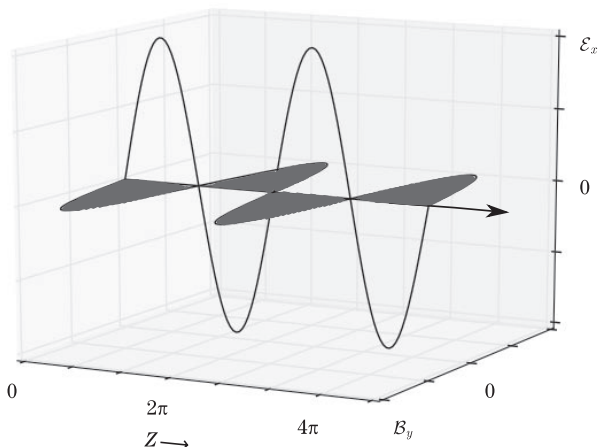


Рис. 10.1. Плоская электромагнитная волна, распространяющаяся вправо и вверх из плоскости страницы (в положительном направлении оси z). Поля \vec{E} и \vec{B} перпендикулярны друг другу и направлению распространения. Поле \vec{B} затенено

10.2. Лагранжева формулировка электродинамики

Я уже столько раз об этом говорил, что рискую всем надоест. И все-таки еще раз. Фундаментальные идеи сохранения энергии и импульса, связь между законами сохранения и законами симметрии получаются в виде логического следствия *только*, если вы исходите из принципа наименьшего действия. Можно писать какие угодно дифференциальные уравнения, и они могут быть математически непротиворечивы. И все равно вы не получите никакого сохранения энергии — *у вас просто не будет никакой энергии, которая могла бы сохраняться*, — если только эти уравнения не выводятся из лагранжиана и принципа действия. И так как мы склонны глубоко верить в сохранение энергии, нам следует поискать лагранжеву формулировку для уравнений Максвелла через лагранжиан.

Давайте еще раз проанализируем наши фундаментальные принципы и попытаемся придумать подходящий лагранжиан. Не забудем, что два уравнения

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0,$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

являются математическими тождествами, вытекающими из определений \vec{E} и \vec{B} (через векторный потенциал). В том чтобы выводить их из принципа действия, не больше смысла, чем выводить их из правила $1 + 1 = 2$.

Наша цель — вывести второй комплект уравнений. В 3-векторной записи эти уравнения выглядят так:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho, \quad (10.12)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{j}. \quad (10.13)$$

Мы выяснили, что плотность заряда ρ — это временная компонента 4-вектора тока J^ν :

$$\rho = J^0.$$

Подобным же образом три компоненты \vec{j} соответствуют трем пространственным компонентам J^ν :

$$\vec{j} = (J^1, J^2, J^3)$$

или

$$\vec{j} = J^m.$$

Все эти соотношения объединяются в ковариантной форме в рамках одного уравнения:

$$\partial^\mu F^{\mu\nu} = -J^\nu. \quad (10.14)$$

Временная компонента этого уравнения эквивалентна уравнению (10.12), а три пространственные компоненты, объединяясь, дают нам уравнение (10.13). Как нам вывести эти уравнения из лагранжиана? Прежде чем пытаться это сделать, мы должны угадать правильный лагранжиан. Фундаментальные принципы помогут сузить область наших поисков.

Мы уже обсуждали необходимость использования принципа действия. Мы также видели, что математически принцип действия работает для полей и для частиц немного по-разному. Здесь мы сосредоточимся на полях, так как уравнения Максвелла — полевые. Посмотрим теперь, что нам могут дать остальные принципы.

10.2.1. Локальность

Что бы ни происходило в некоторый момент времени и в некоторой точке пространства, это можно связать только с происходящим в соседние моменты времени в соседних точках пространства. Как можно это обеспечить? Позаботимся о том, чтобы плотность лагранжиана внутри интеграла действия зависела только от самих полей и их первых производных по координатам X^μ .

В общем случае плотность лагранжиана зависит от каждого поля, описываемого теорией; их может быть несколько, но я просто обозначу единой переменной ϕ все существующие поля.¹ Лагранжиан также зависит от производных ϕ по пространственным координатам и времени. Мы уже привыкли к записи $\partial_\mu \phi$ и будем использовать ее наряду с еще более сокращенной нотацией $\phi_{,\mu}$, обозначающей то же самое:

$$\frac{\partial \phi}{\partial X^\mu} = \partial_\mu \phi = \phi_{,\mu}.$$

¹ В электромагнетизме поля оказываются компонентами векторного потенциала. Впрочем, не будем забегать вперед.

Эти обозначения стандартны. Запятая в символе $\phi_{,\mu}$ означает *производную*, а μ значит, что производная берется *по* X^μ . Принцип локальности требует, чтобы плотность лагранжиана зависела только от ϕ и $\phi_{,\mu}$. Другими словами, интеграл действия должен иметь вид

$$\text{Действие} = \int d^4x \mathcal{L}(\phi, \phi_{,\mu}).$$

Символ $\phi_{,\mu}$ не означает одной *конкретной* производной. Это общий символ, относящийся к производным по всем компонентам, временным и пространственным. Требуя, чтобы интеграл действия принял эту форму, мы тем самым гарантируем, что результирующие уравнения движения будут дифференциальными уравнениями, связывающими локальные величины.

10.2.2. Лоренц-инвариантность

Требование лоренц-инвариантности простое: плотность лагранжиана должна быть скаляром. Она должна иметь одно и то же значение во всех системах отсчета. Мы могли бы просто ограничиться этим пунктом и перейти к следующему принципу. Однако мне бы хотелось дать некоторый контекст, кратко рассмотрев наши прежние результаты для скалярных полей. Уравнения Максвелла основаны на векторных, а не на скалярных полях, и сейчас хороший момент для сравнения.

Лагранжиан для случая скалярного поля ϕ может содержать саму переменную ϕ или любую ее функцию. Обозначим эту функцию $U(\phi)$. Лагранжиан может содержать и производные.¹ С другой стороны, некоторых вещей он содержать не может: например, отдельно взятой величины $\partial_x \phi$. Это было бы полной бессмыслицей, ведь $\partial_x \phi$ — не скаляр, а x -компонента вектора. Однако хотя просто вставлять в лагранжиан произвольные

¹ Не будет слишком большой смелостью сказать, что он *должен* их содержать. Без производных лагранжиан был бы неинтересен.

компоненты вектора, их можно аккуратно комбинировать, образуя скаляры. Величина

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = \phi_{,\mu} \phi^{,\mu}$$

— это настоящий скаляр, и она вполне может появиться в лагранжиане. Так как μ — индекс суммирования, можно представить эту величину в развернутой форме как

$$\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi = -(\partial_t \phi)^2 + (\partial_x \phi)^2 + (\partial_y \phi)^2 + (\partial_z \phi)^2,$$

или в записи с запятыми:

$$\phi_{,\mu} \phi^{,\mu} = -(\partial_t \phi)^2 + (\partial_x \phi)^2 + (\partial_y \phi)^2 + (\partial_z \phi)^2.$$

В лекции 4 мы пользовались членами такого же вида, чтобы записать простой лагранжиан (4.7). В нашей новой нотации можно представить этот лагранжиан как

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - U(\phi),$$

или

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \phi_{,\mu} \phi^{,\mu} - U(\phi). \quad (10.15)$$

Основываясь на этом лагранжиане, мы использовали уравнения Эйлера — Лагранжа, чтобы вывести уравнения движения. В данном примере было только одно поле, но их может быть и несколько. В общем случае можно было бы сложить лагранжианы для нескольких полей или даже скомбинировать их каким-то более сложным образом.

Для каждого независимого поля — хотя в нашем примере поле только одно — мы начинаем с того, что берем частную производную лагранжиана по $\phi_{,\mu}$, которая равна

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}}.$$

Затем мы дифференцируем этот член по X^μ и получаем

$$\frac{\partial}{\partial X^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}}.$$

Это левая часть уравнения Эйлера — Лагранжа. Правая его часть — это просто производная \mathcal{L} по ϕ . Полностью уравнение выглядит так:

$$\frac{\partial}{\partial X^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\mu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}. \quad (10.16)$$

Это уравнение Эйлера — Лагранжа для полей. Это аналог уравнений Лагранжа для движения частицы. Как вы помните, уравнение движения частицы — это

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q}.$$

Для вывода этого уравнения движения мы выразили лагранжиан (10.15), пользуясь уравнением Эйлера — Лагранжа (10.16). Мы занимались этим в разделе 4.3.3 и нашли уравнение движения:

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = -\frac{\partial U}{\partial \phi},$$

которое представляет собой простое волновое уравнение.

Отталкиваясь от векторного потенциала, мы применим ту же самую процедуру, чтобы получить уравнения Максвелла. Это труднее, так как здесь надо будет следить за бóльшим числом индексов, но в конечном счете думаю, вы согласитесь, что это очень красиво. Впрочем, прежде чем приступить к делу, надо освежить в памяти еще один принцип — принцип калибровочной инвариантности. Это неперемнное требование электродинамики.

10.2.3. Калибровочная инвариантность

Чтобы обеспечить калибровочную инвариантность лагранжиана, мы строим его из величин, которые сами по себе калибровочно инвариантны. Очевидно, таковыми являются компоненты $F_{\mu\nu}$ — составляющие электрического и магнитного полей. Эти поля не меняются, когда вы добавляете к A_μ производную скаляра. Другими словами, они не меняются при подстановке

$$A_\mu \Rightarrow A_\mu + \frac{\partial S}{\partial X^\mu}.$$

Следовательно, любой лагранжиан, сконструированный из компонент F , будет калибровочно инвариантным.

Как мы видели на примере скалярного поля, есть и такие величины, использовать которые нам нельзя. Например, недопустимо включать в лагранжиан $A_\mu A^\mu$. Это может казаться контринтуитивным, ведь, в конце концов, $A_\mu A^\mu$ — это идеальный лоренц-инвариантный скаляр.¹ Однако эта величина калибровочно неинвариантна. Если прибавить к A градиент скаляра, значение $A_\mu A^\mu$, конечно, изменится, так что эта величина нам не годится — частью лагранжиана она быть не может.

10.2.4. Лагранжиан в отсутствие источников

Будем строить наш лагранжиан в два этапа. Сначала рассмотрим случай, когда имеется электромагнитное поле, но нет ни зарядов, ни токов, иначе говоря, когда 4-вектор тока равен нулю:

$$J^\mu = 0.$$

¹ Помните, что индексы μ в этом выражении не означают производных. Они просто представляют компоненты A . Для обозначения дифференцирования мы использовали бы запятую.

Затем мы модифицируем наш лагранжиан, чтобы охватить им также ненулевые векторы тока.

Компоненты $F_{\mu\nu}$ можно использовать любым способом, не беспокоясь о нарушении калибровочной инвариантности. Однако лоренц-инвариантность требует большей осмотрительности: компоненты следует комбинировать таким образом, чтобы при свертке по индексам они давали скаляр.

Рассмотрим некий произвольный тензор $T_{\mu\nu}$ с двумя индексами. Из него легко построить скаляр, подняв один индекс, а затем произведя свертку. Другими словами, можно записать выражение

$$T_{\mu}^{\mu}$$

с суммированием по индексу μ . Это обычная техника построения скаляров из тензоров. Что произойдет, если мы сделаем это с $F_{\mu\nu}$? Нетрудно убедиться, что в результате мы получим

$$F_{\mu}^{\mu} = 0,$$

поскольку все диагональные компоненты (компоненты с одинаковыми индексами) равны нулю. Другими словами,

$$F_{00} = 0,$$

$$F_{11} = 0,$$

$$F_{22} = 0,$$

$$F_{33} = 0.$$

Выражение F_{μ}^{μ} требует сложить все эти четыре члена, и в результате, конечно, получится нуль. Для лагранжиана это плохой выбор. На самом деле, как выясняется, любой член, линейный относительно $F_{\mu\nu}$, был бы неудачным вариантом. Если линейные члены не годятся, можно попробовать что-нибудь нелинейное. Самый простой нелинейный член — квадратичный:

$$F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}.$$

Это выражение нетривиально. Оно определенно *не* равно нулю. Попробуем понять, что оно означает. Прежде всего, рассмотрим смешанные пространственно-временные компоненты

$$F_{0n}F^{0n}.$$

Это компоненты, в которых μ равно нулю и, следовательно, представляет время. Латинский индекс n представляет пространственные компоненты v . Что представляет все выражение в целом? Оно почти идентично квадрату электрического поля. Как мы уже видели раньше, смешанные компоненты $F_{\mu\nu}$ являются компонентами электрического поля. Причина того, что $F_{0n}F^{0n}$ не является *в точности* квадратом электрического поля, в том, что поднятие одной временной компоненты ведет к перемене знака. Так как каждый член содержит один верхний временной индекс и один нижний временной индекс, в результате получаем квадрат \vec{E} со знаком *минус*:

$$F_{0n}F^{0n} = -E^2.$$

Секундное размышление показывает, что этот член появляется при суммировании дважды, поскольку можно поменять ролями μ и ν . Другими словами, нам надо также рассматривать члены вида

$$F_{n0}F^{n0} = -E^2.$$

Эти члены тоже дают $-E^2$, так как тензор $F_{\mu\nu}$ антисимметричен. В этой второй форме первый индекс представляет пространственные компоненты, в то время как второй — временные. Общий итог всех этих умножений и сложений: $-2E^2$. Другими словами,

$$F_{0n}F^{0n} + F_{n0}F^{n0} = -2E^2.$$

Можно было бы подумать, что антисимметричность $F_{\mu\nu}$ приводит к взаимоуничтожению этих двух групп членов. Однако

этого не происходит, поскольку каждая из компонент возведена в квадрат.

Теперь надо учесть пространственно-пространственные компоненты $F_{\mu\nu}$. Это члены, у которых ни один из индексов не равен нулю. Вот, например, один из таких членов:

$$F_{12}F^{12}.$$

Поднятие и опускание пространственных индексов не приводит ни к чему; знак не меняется. В терминах электрического и магнитного полей F_{12} есть то же, что и B_3 (или B_z), — z -компонента магнитного поля. Следовательно, $F_{12}F^{12}$ — то же, что $(B_z)^2$. Если учесть антисимметричную составляющую $F_{21}F^{21}$, то получится, что член $(B_z)^2$ входит в эту сумму дважды.

Теперь мы учли все члены суммы $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$ за исключением диагональных, у которых оба индекса равны друг другу. Но мы уже знаем, что эти компоненты равны нулю, так что дело сделано. Объединяя пространственно-пространственные члены с пространственно-временными, получаем в результате

$$F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = -2E^2 + 2B^2,$$

или

$$-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = 2(E^2 - B^2).$$

Традиционно это уравнение записывают в немного иной форме. Когда я говорю *традиционно*, я подразумеваю, что, если бы нам вздумалось этой традицией пренебречь, ничего бы не изменилось: уравнения движения были бы теми же самыми. Традиционных соглашений два: одно заключается в том, что член E^2 положителен, а B^2 отрицателен. Второе соглашение — умножение на коэффициент $\frac{1}{4}$. В результате этот лагранжиан обычно записывают так:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (10.17)$$

или так

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (E^2 - B^2). \quad (10.18)$$

Множитель $\frac{1}{4}$ не имеет никакого физического смысла. Его единственное назначение — совместимость с давно устоявшейся привычкой.

10.3. Вывод уравнений Максвелла

Уравнение (10.18) лоренц-инвариантно, локально и обладает калибровочной инвариантностью. Это не только самый простой из возможных лагранжианов, но еще и лагранжиан, подходящий для электродинамики. В этом разделе мы увидим, как он порождает уравнения Максвелла. Это немного хлопотная процедура, но не такая сложная, как можно было бы ожидать. Мы будем двигаться вперед маленькими простыми шагами. Для начала мы проигнорируем все члены J^μ и разберемся с тем, что происходит в пустом пространстве. Затем вернем J^μ обратно.

Итак, еще раз: вот уравнения Эйлера — Лагранжа для полей:

$$\frac{\partial}{\partial X^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\nu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi}. \quad (10.19)$$

Для каждого поля мы записываем отдельное уравнение этого вида. Что это за поля? Это компоненты векторного потенциала

$$A_0, A_1, A_2, A_3$$

или

$$A_t, A_x, A_y, A_z.$$

Это четыре различных независимых поля. Что можно сказать об их производных? Чтобы помочь делу, мы развернем наши сокращенные обозначения с запятыми в форме 4-векторов.¹ В этой записи символ $A_{\mu,\nu}$, или « A с нижним индексом μ запятая ν » означает производную A_μ по X^ν . Другими словами, мы определяем $A_{\mu,\nu}$ как

$$A_{\mu,\nu} \equiv \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu}.$$

В левой части запятая в подстрочном индексе существенна: она предписывает взять определенную производную. Без нее символ $A_{\mu\nu}$ вообще был бы не производной, а просто компонентой некоторого тензора с двумя индексами. А как в этой нотации выглядит тензор поля? Мы знаем, что тензор поля определяется как

$$F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial X^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial X^\nu}.$$

Это легко перевести в нотацию с запятыми:

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu}. \quad (10.20)$$

Зачем тратить столько усилий на компактную запись для частных производных? Думаю, вы оцените эту технику на протяжении следующих нескольких параграфов. Конечно, эта запись экономит много места, но дело не только в этом: она делает с первого же взгляда ясной симметрию наших уравнений. И, что еще важнее, она демонстрирует простоту решения нашей задачи через уравнения Эйлера — Лагранжа.

Мы будем считать четыре компоненты A_μ за самостоятельные независимые поля. Для каждого из них имеется уравнение поля. Чтобы преобразовать лагранжиан (10.17) в компактную нотацию, мы просто подставим $F_{\mu\nu}$ из (10.20):

¹ До сих пор мы пользовались записью с запятыми только для производных скаляра.

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}(A_{\nu,\mu} - A_{\mu,\nu})(A^{\nu,\mu} - A^{\mu,\nu}). \quad (10.21)$$

Это наш лагранжиан. Если хотите, можете расписать его во всех подробностях через производные. Компоненты A_μ и A_ν соответствуют ϕ в (10.19). Для каждой компоненты A имеется уравнение Эйлера — Лагранжа. Для начала поработаем с одной компонентой A_x . Прежде всего, необходимо вычислить частную производную \mathcal{L} по $A_{x,\mu}$, то есть

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{x,\mu}}.$$

Разобьем это вычисление на малые шаги.

Нам необходимо вычислить производную \mathcal{L} по конкретным производным конкретных компонент A . Чтобы понять, что это значит, рассмотрим случай производной от \mathcal{L} по $A_{x,y}$. Согласно (10.21), \mathcal{L} — это сумма по всем четырем значениям μ и ν . Мы могли бы выписать в развернутом виде все шестнадцать членов этого выражения и затем поискать среди них члены, содержащие $A_{x,y}$. Если бы мы сделали это, то увидели, что $A_{x,y}$ появляется только в двух членах, которые имеют вид

$$(A_{x,y} - A_{y,x})(A^{x,y} - A^{y,x}).$$

Мы временно игнорируем коэффициент $-\frac{1}{4}$. Так как и x , и y — пространственные индексы, опускание любого из них не будет иметь никаких последствий и мы можем переписать этот член в более простом виде:

$$(A_{x,y} - A_{y,x})(A_{x,y} - A_{y,x})$$

Проводя дальнейшие упрощения и восстанавливая числовой множитель, получаем:

$$-\frac{1}{2}(A_{x,y} - A_{y,x})^2.$$

Почему я записал $\frac{1}{2}$ вместо $\frac{1}{4}$? Потому что в разложении два члена этого вида: один появляется, когда $\mu = x$ и $\nu = y$, а другой, когда $\mu = y$ и $\nu = x$.

На данном этапе уже не должно быть загадки в том, как дифференцировать \mathcal{L} по $A_{x,y}$. Так как остальные члены не содержат $A_{x,y}$, при дифференцировании они все обращаются в нуль, и их можно игнорировать. Другими словами, теперь можно записать:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{x,y}} = \frac{\partial}{\partial A_{x,y}} \left[-\frac{1}{2}(A_{x,y} - A_{y,x})^2 \right].$$

Взять эту производную нетрудно, как только мы вспомним, что $A_{x,y}$ и $A_{y,x}$ — два разных объекта. Нас интересует только зависимость от $A_{x,y}$, и поэтому при взятии этой частной производной мы будем считать $A_{y,x}$ константой. В результате получаем

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{x,y}} = -(A_{x,y} - A_{y,x}),$$

где в правой части можно распознать элемент тензора поля, а именно $-F_{yx}$. Общий итог всей этой работы:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{x,y}} = -F_{yx} = -F^{yx},$$

или, с учетом антисимметричности F ,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{x,y}} = F^{xy} = F^{xy}.$$

Самая правая часть этого уравнения, F^{xy} , достается нам даром, так как для пространственных компонент верхние индексы эквивалентны нижним.

Нам потребовалось много времени, чтобы добраться до этой точки, но результат получился довольно простым. Прodelав то же самое упражнение для всех остальных компонент, обнаружите, что каждая из них следует той же схеме. Общая формула такова:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu, \nu}} = F^{\mu \nu}. \quad (10.22).$$

Следующим шагом, согласно (10.19), должно быть дифференцирование уравнения (10.22) по X^ν . Выполнив это с обеими частями (10.22), получаем:

$$\frac{\partial}{\partial X^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu, \nu}} = \frac{\partial F^{\mu \nu}}{\partial X^\nu}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial X^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu, \nu}} = \partial_\nu F^{\mu \nu}. \quad (10.23)$$

Но постойте! Правая часть (10.23) есть не что иное, как левая часть последнего уравнения Максвелла из табл. 10.1!

Неужели это так просто? Но подождем радоваться, пока не выпишем правую часть уравнения Эйлера — Лагранжа. Это значит, что надо взять производную \mathcal{L} по самим полям, другими словами, взять производную \mathcal{L} по непродифференцированным компонентам A , таким как A_x . Но непродифференцированные компоненты A даже не появляются в \mathcal{L} , и, следовательно, в результате мы получим нуль. Ну вот теперь — действительно всё! Правая часть уравнения Эйлера — Лагранжа равна нулю, и уравнение движения для пустого пространства (без зарядов или токов) идеально соответствует уравнению Максвелла:

$$\frac{\partial}{\partial X^\nu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\mu, \nu}} = \frac{\partial F^{\mu \nu}}{\partial X^\nu} = 0.$$

10.4. Лагранжиан с ненулевой плотностью тока

Как мы можем модифицировать лагранжиан, чтобы в него вошла плотность тока J^μ ?¹ Для этого нам надо прибавить к \mathcal{L} что-то, содержащее все компоненты J^μ . У плотности тока J^μ четыре компоненты: временная ρ и три пространственных \vec{j} . Пространственная компонента с номером m — это заряд, пересекающий за единицу времени единичную площадку малого окошка, ориентация которого задается осью m . В виде формулы это записывается так:

$$J^\mu = \rho, j^m.$$

Если рассмотреть небольшую кубическую ячейку в пространстве, заряд внутри нее равен произведению ρ на объем ячейки: $\rho \, dx \, dy \, dz$. Скорость изменения заряда внутри ячейки — производная от этой величины по времени. Из принципа локального сохранения заряда следует, что этот заряд может измениться только в результате прохождения некоторого количества заряда через стенки ячейки. Из этого принципа в лекции 8 мы вывели уравнение непрерывности:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0. \quad (10.24)$$

Символ $\vec{\nabla} \cdot \vec{j}$ (дивергенция \vec{j}) определяется как

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{j} = \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z}.$$

¹ Уравнение (10.17) есть лагранжиан, выраженный через $F_{\mu\nu}$. Уравнение (10.21) — тот же лагранжиан, выраженный через векторный потенциал.

Первый член в правой части (частная производная j_x по x) — это разность скоростей, с которыми заряд течет через два x -ориентированных окна ячейки. Остальные два члена соответствуют скоростям течения через y - и z -ориентированные окна. Сумма этих трех членов и есть общая скорость, с которой заряд течет через все границы бокса. В релятивистской нотации уравнение непрерывности (10.24) приобретает вид

$$\partial_\mu J^\mu = 0. \quad (10.25)$$

Но каким образом это поможет нам вывести уравнения Максвелла? Вот каким: опираясь на уравнение непрерывности, можно сконструировать калибровочно-инвариантный скаляр, в который входят и J^μ , и A_μ . Этот новый скаляр, $J^\mu A_\mu$, возможно, является простейшей из всех возможных комбинаций этих двух величин. Он не *выглядит* калибровочно-инвариантным, но мы убедимся, что он таковым является. Рассмотрим каждую из этих величин как функцию положения в пространстве. Для представления всех трех пространственных компонент будем при этом пользоваться единственной переменной x .

Подумаем теперь, какое влияние оказал бы этот новый скаляр при его добавлении к лагранжиану. В действии появился бы дополнительный член:

$$\text{Действие}_J = - \int d^4x J^\mu(x) A_\mu(x).$$

Знак «минус» ставится по традиции, восходящей к Бенджамину Франклину. $J^\mu(x) A_\mu(x)$ — скаляр, так как является сверткой 4-вектора с другим 4-вектором. В него входят как плотность тока, так и векторный потенциал. Как убедиться, что это выражение калибровочно инвариантно? Легко: просто выполним калибровочное преобразование и увидим, что происходит с действием. Выполнение калибровочного преобразования означает, что мы прибавляем к A_μ градиент некоторого скаляра. Вот подвергнутый калибровочному преобразованию интеграл действия:

$$\text{Действие}_J = -\int d^4x J^\mu(x) \left(A_\mu(x) + \frac{\partial S}{\partial X^\mu} \right).$$

Что нас действительно при этом интересует, так это *изменение* действия вследствие появления дополнительного члена. Оно равно:

$$\text{Изменение действия} = -\int d^4x J^\mu(x) \frac{\partial S}{\partial X^\mu}.$$

Это не очень-то похоже на ноль. А если это не ноль, то действие не является калибровочно-инвариантным. И все-таки это ноль, и вот почему.

Стоит напомнить, что d^4x — это сокращенная запись $dt dx dy dz$. Запишем в развернутом виде суммирование по μ . Левую часть я здесь не буду переписывать, так как она нам не нужна. Развернутая запись интеграла выглядит так:

$$-\int d^4x \left(J^0 \frac{\partial S}{\partial X^0} + J^1 \frac{\partial S}{\partial X^1} + J^2 \frac{\partial S}{\partial X^2} + J^3 \frac{\partial S}{\partial X^3} \right). \quad (10.26)$$

Сделаем теперь одно принципиально важное допущение: если отойти достаточно далеко, никакого тока там не будет. Все токи в нашей задаче текут в обширной лаборатории, так что на большом расстоянии все компоненты J обращаются в ноль. Если нам встретится ситуация, в которой на бесконечности существует ненулевой ток, нам придется рассматривать такую ситуацию как особый случай. Но в любом обычном эксперименте принято считать лабораторию изолированной и опечатанной, так что вне никаких токов не существует.

Рассмотрим один из членов нашего развернутого интеграла, а именно, член

$$-\int J^1 \frac{\partial S}{\partial X^1} d^4x,$$

который мы сейчас запишем как

$$-\int J^1 \frac{\partial S}{\partial x} d^4x.$$

Если вы читали предыдущие тома нашего курса, то уже знаете, что сейчас произойдет. Мы применим важный метод, называемый интегрированием по частям. Так как мы пока рассматриваем только x -компоненту, можно считать этот член интегралом по x и игнорировать часть $dy dz dt$ в d^4x . Чтобы проинтегрировать по частям, мы перенесем производную на другой множитель и одновременно изменим знак всего выражения.¹ Другими словами, мы перепишем наш интеграл в виде

$$\int \frac{\partial J^1}{\partial x} S d^4x.$$

Что произойдет, если мы сделаем то же самое со следующим членом уравнения (10.26)? Этот член равен

$$J^2 \frac{\partial S}{\partial X^2}.$$

Так как этот член имеет ту же математическую форму, что и член J^1 , мы получим аналогичный результат. По сути, этой схеме удовлетворяют все четыре члена в (10.26), и можно, воспользовавшись этим, применить удобное правило суммирования. Уравнение (10.26) можно переписать в виде

$$\int \frac{\partial J^\mu}{\partial X^\mu} S d^4x$$

или

¹ В общем случае при интегрировании по частям появляется еще дополнительный член, называемый *граничным членом*. Но предположение о том, что J на больших расстояниях обращается в нуль, позволяет нам проигнорировать этот член.

$$\int \partial_\mu J^\mu S d^4x.$$

Не кажется ли вам знакомой сумма $\partial_\mu J^\mu$ в этом интеграле? Да, конечно! Это же левая часть уравнения непрерывности (10.25). Если уравнение непрерывности верно, то этот член и, по сути, весь интеграл в целом должен равняться нулю. Если ток удовлетворяет уравнению непрерывности — и *только* в этом случае, — добавление в лагранжиан странного вида члена

$$\text{Изменение лагранжиана} = J^\mu(x) A_\mu(x) \quad (10.27)$$

не нарушит калибровочной инвариантности.

Как влияет этот новый член на уравнения движения? Бросим беглый взгляд назад, на вывод наших уравнений для пустого пространства. Мы начали с уравнения Эйлера — Лагранжа

$$\frac{\partial}{\partial X^\mu} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\nu,\mu}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu}.$$

Затем мы подробно рассмотрели в этом уравнении каждую компоненту поля A и в результате получили в левой части

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial X^\nu}.$$

А правая часть, конечно, равнялась нулю. Этот результат основывается на исходном лагранжиане для пустого пространства (10.17).

Новый член (10.27) содержит саму величину A , но не содержит никаких ее производных. Следовательно, он никак не влияет на левую часть уравнения Эйлера — Лагранжа. А что можно сказать о его правой части? Когда мы дифференцируем уравнение (10.27) по A_μ , мы получаем просто J^μ . Уравнение движения приобретает вид

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial X^\nu} = J^\mu. \quad (10.28)$$

Это и есть уравнения Максвелла, которые мы искали — те четыре из них, разумеется, которые образуют вторую группу уравнений Максвелла:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho$$

$$c^2 \vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{\partial}{\partial t} \vec{E} = \vec{j}.$$

Подведем итоги. Мы убедились, что уравнения Максвелла в самом деле вытекают из принципа действия или Лагранжева формализма. Более того, найденный лагранжиан калибровочно инвариантен, но только если 4-вектор тока удовлетворяет уравнению непрерывности. Что случилось бы, если бы ток не удовлетворял принципу непрерывности? Ответ: уравнения просто оказались бы не согласованными. Мы увидим это, если продифференцируем обе части (10.28):

$$\frac{\partial^2 F^{\mu\nu}}{\partial X^\mu \partial X^\nu} = \frac{\partial j^\mu}{\partial X^\mu}.$$

Правая часть — то же выражение, которое появляется в уравнении непрерывности. Левая автоматически обращается в нуль из-за антисимметричности $F^{\mu\nu}$. Если уравнение непрерывности не удовлетворяется, приравнивание этих частей дает противоречие.

ЛЕКЦИЯ 11

Поля и классическая механика

Арт: Ленни, ты мне надоел. Твердишь без конца о том, как наши уравнения должны вытекать из принципа действия. Допустим, ты меня убедил в том, что принцип действия — элегантная идея, но, знаешь, есть поговорка: «Элегантность для портных».¹ Нет, честно, не понимаю, зачем нам это нужно.

Ленни: Арт, не ворчи. Причина есть, не сомневайся. Спорим, если я дам тебе составить твои собственные уравнения, энергия у тебя не будет сохраняться. А мир без сохранения энергии был бы довольно-таки странным миром. В нем солнце могло бы вдруг исчезнуть или машины поехать — сами по себе, ни с того ни с сего.

Арт: Ладно, я понял: лагранжианы ведут к законам сохранения. Я это помню еще из классической механики. Теорема Нётер, верно? Но мы почти не вспоминали о сохранении энергии и импульса. А что, у электромагнитных полей и правда есть импульс?

Ленни: Угу. И Эмми может это доказать.

11.1. Энергия и импульс поля

Ясно, что электромагнитные поля обладают энергией. Постоите несколько минут на солнце; тепло, которое вы чувствуете, — это энергия солнечного света, поглощаемая вашей кожей. Она, эта

¹ Выражение Альберта Эйнштейна. — Примеч. пер.

энергия, заставляет молекулы двигаться быстрее, а это и есть тепло. Энергия — сохраняющаяся величина, а переносят ее электромагнитные волны.

Электромагнитные поля переносят и импульс, хотя это не так легко зарегистрировать. Когда солнечный свет поглощается вашей кожей, вам передается некоторый импульс, и в результате на ваше тело действует сила светового давления. К счастью, эта сила очень мала, и выходя на солнце, вы не почувствуете никакого толчка. Но она есть. Будущие космические путешественники, возможно, захотят использовать давление солнечного (или даже звездного) света на поверхность огромного паруса, чтобы придать ускорение своему космическому кораблю (рис. 11.1). Но независимо от того, найдется ли этому эффекту практическое применение, он вполне реален. Свет переносит импульс, который при поглощении проявляется как действие силы.¹

Энергия и импульс — ключевые концепции, которые связывают теорию поля с классической механикой. Мы начнем с того, что задумаемся о смысле, который мы в действительности вкладываем в слова «энергия» и «импульс».



Рис. 11.1. Солнечный парус. Световые волны переносят импульс. Они оказывают давление на материальные объекты и придают им ускорение

¹ Описание экспериментального космического аппарата IKAROS, основанного на этой идее: <https://en.wikipedia.org/wiki/IKAROS>.

В этой лекции я буду исходить из того, что вы уже знакомы с концепциями классической механики, изложенными в *Книге I* нашего «*Теоретического минимума*».

11.2. Три вида импульса

Мы встречались с тремя различными концепциями импульса. Это не три подхода к описанию одной и той же физической величины, а три способа представления трех различных величин — величин, которые, вообще говоря, имеют различные численные значения. Первая и самая простая из этих концепций — механический импульс.

11.2.1. Механический импульс

В нерелятивистской физике механический импульс, обозначаемый \vec{p} , есть просто произведение массы на скорость. Точнее, это полная масса системы, умноженная на скорость ее центра масс. Это векторная величина с тремя пространственными компонентами p_x , p_y и p_z . Для единичной частицы эти компоненты равны

$$\begin{aligned} p_x &= m\dot{x}, \\ p_y &= m\dot{y}, \\ p_z &= m\dot{z}. \end{aligned} \quad (11.1)$$

Для ансамбля частиц, пронумерованных индексом i , x -компонента механического импульса такова:

$$p_x = \sum_i m_i \dot{x}_i, \quad (11.2)$$

и аналогично для компонент y и z . Релятивистские частицы также обладают механическим импульсом:

$$p_x = \frac{m\dot{x}}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (11.3)$$

11.2.2. Канонический импульс

Канонический импульс — абстрактная величина, относимая к степени свободы любого вида. Для любой координаты, которая появляется в лагранжиане,¹ существует канонический импульс. Представим себе, что лагранжиан зависит от набора абстрактных координат q_i . Эти координаты могут быть пространственными координатами частиц или углом поворота колеса. Они могут даже быть полями, представляющими степени свободы в теории поля. Каждая координата обладает *сопряженным с ней каноническим импульсом*, который часто обозначается символом Π_i и определяется как производная лагранжиана по \dot{q}_i :

$$\Pi_i = \frac{\partial L(q_i, \dot{q}_i)}{\partial \dot{q}_i}.$$

Если координата q_i называется x и лагранжиан оказывается равным

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x),$$

где $V(x)$ — функция потенциальной энергии, то канонический импульс есть то же самое, что и механический.

Но даже если рассматриваемая координата представляет положение частицы, канонический импульс может не совпадать с механическим. На самом деле мы уже видели такой пример в лекции 6. В разделах 6.3.2 и 6.3.3 описывалось движение заряженных частиц в электромагнитном поле. Лагранжиан, полученный из уравнения (6.18), имеет вид

$$L = -m\sqrt{1 - \dot{x}^2} + eA_0(x) + e\dot{X}^p A_p(x),$$

и мы видим, что скорость появляется более чем в одном члене. Канонический импульс (6.20) равен

¹ Здесь я буду обозначать лагранжиан символом L вместо \mathcal{L} .

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}_p} = m \frac{\dot{X}_p}{\sqrt{1 - \dot{x}^2}} + eA_p(x).$$

Мы можем обозначить эту величину P_p . Первый член в правой части — то же, что и (релятивистский) механический импульс. Но второй член не имеет никакого отношения к механическому импульсу. В него входит векторный потенциал — это нечто новое. Развивая классическую механику в Гамильтоновом формализме, мы всегда используем канонический импульс.

Во многих случаях координаты, описывающие систему, не имеют никакого отношения к положениям частиц. Теория поля описывается набором полей в каждой точке пространства. Например, в одной простой теории поля плотность лагранжиана имеет вид:

$$L = \frac{1}{2} \{ (\partial_t \phi)^2 - (\partial_x \phi)^2 \}.$$

Канонический импульс, сопряженный в этой теории с $\phi(x)$, равен

$$P(x) = \frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}. \quad (11:4)$$

Этот «импульс поля» только отдаленно связан с обычным понятием механического импульса.

11.2.3. Нётер-импульс¹

Нётеровский импульс связан с симметриями. Допустим, что система описывается набором координат или степеней свободы q_i . Теперь допустим, что мы изменяем конфигурацию системы, чуть сдвинув координаты. Это можно записать в виде

$$q_i \rightarrow q_i + \delta_i. \quad (11.5)$$

¹ Я пользуюсь термином «нётеровский импульс», потому что не знаю стандартного термина для этой величины.

Малые сдвиги δ_i могут зависеть от координат. Существует хороший общий способ описания этой ситуации:

$$\delta_i = \varepsilon f_i(q), \quad (11.6)$$

где ε — бесконечно малая постоянная и $f_i(q)$ — функции координат.

Простейший пример — параллельный перенос системы в пространстве. Система частиц (пронумерованных индексом n) может быть параллельно (то есть с сохранением однородности) перенесена вдоль оси x на величину ε . Это можно выразить формулами

$$\delta X_n = \varepsilon,$$

$$\delta Y_n = 0,$$

$$\delta Z_n = 0.$$

Каждая частица сдвигается вдоль оси x на величину ε , сохраняя при этом прежние значения y и z . Если потенциальная энергия системы зависит только от расстояний между частицами, то значение лагранжиана при таком смещении системы не изменится. В таком случае мы говорим, что здесь имеется трансляционная симметрия (симметрия относительно смещения).

Другой пример — поворот вокруг начала координат в двух измерениях. Частица с координатами X, Y сдвинется в положение $X + \delta X, Y + \delta Y$, где

$$\delta X = -\varepsilon Y,$$

$$\delta Y = \varepsilon X. \quad (11.7)$$

Вы можете убедиться в том, что это движение соответствует повороту частицы вокруг начала отсчета на угол ε . Если лагранжиан при этом не меняется, то мы говорим, что система обладает инвариантностью относительно вращения.

Преобразование координат, которое не меняет значения лагранжиана, называется операцией симметрии.¹ Согласно теореме Нётер, если лагранжиан не изменяется при операции симметрии, то существует сохраняющаяся величина, которую я обозначу Q .² Эта величина и есть третья концепция импульса. Она может быть или не быть равна механическому или каноническому импульсу. Давайте вспомним, что она собой представляет.

Смещение координат можно выразить следующими уравнениями:

$$q'_i = q_i + \delta q_i = q_i + \varepsilon f_i(q), \quad (11.8)$$

где δq_i — бесконечно малое изменение координат q_i , и функция $f_i(q)$ зависит от всех q , а не только от q_i . Если уравнение (11.8) представляет операцию симметрии, то согласно теореме Нётер величина

$$Q = \sum_i \Pi_i f_i(q) \quad (11.9)$$

сохраняется. Q — это сумма по всем координатам; свой вклад вносит каждый из канонических импульсов Π_i .

Рассмотрим простой пример, в котором q будет положением единичной частицы на оси x . При параллельном переносе координат x изменяется на малую величину, не зависящую от x . В этом случае δq (или δx) — просто постоянная; это величина сдвига. Соответствующее значение f попросту равно единице.

¹ В этом контексте мы говорим об активном преобразовании, что означает, что мы сдвигаем всю лабораторию в целом, со всеми существующими в ней полями и зарядами, в другое положение в пространстве. Это преобразование отличается от пассивного преобразования, при котором происходит просто переобозначение координат.

² Я рассказываю о теореме Нётер в *Книге I* нашей серии («Классическая механика»). Подробнее о вкладе Нётер см. https://ru.wikipedia.org/wiki/Нётер_Эмми.

Сохраняющаяся величина Q содержит лишь один член, который мы можем записать как

$$Q = Pf(q). \quad (11.10)$$

Так как $f(q) = 1$, мы видим, что Q — это просто канонический импульс системы. В случае простой нерелятивистской частицы это самый обычный импульс.

11.3. Энергия

Импульс и энергия — близкие родственники, ведь они являются пространственной и временной компонентами 4-вектора. Неудивительно, что закон сохранения импульса в теории относительности означает сохранение всех четырех компонент.

Вспомним понятие энергии в классической механике. Оно становится важным, когда лагранжиан инвариантен к сдвигу временной координаты t . Сдвиг временной координаты играет ту же роль для энергии, какую играет для импульса сдвиг пространственных координат. Сдвиг временной координаты означает, что « t » превращается в « t плюс константа». Инвариантность лагранжиана к параллельному переносу по времени означает, что ответ на вопрос об исходе эксперимента не зависит от времени начала этого эксперимента.

Если дан лагранжиан $L(q_i, \dot{q}_i)$, являющийся функцией q_i и \dot{q}_i , то существует величина, называемая гамильтонианом и определяемая как

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L. \quad (11.11)$$

Гамильтониан — это энергия, и в изолированной системе он сохраняется. Вернемся к нашему простому примеру, где q — это положение по оси x отдельной частицы, а лагранжиан равен

$$L = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - V(x). \quad (11.12)$$

Чему равен гамильтониан для этой системы? Канонический импульс есть производная лагранжиана по скорости. В этом примере скорость \dot{x} появляется только в первом члене, и канонический импульс p_i есть

$$p_i = m\dot{x}.$$

Умножаем p_i на \dot{q}_i — здесь \dot{q}_i превращается в \dot{x} — получается $m\dot{x}^2$. Затем вычитаем лагранжиан и получаем:

$$H = m\dot{x}^2 - \left[\frac{1}{2} m\dot{x}^2 - V(x) \right]$$

или

$$H = \frac{1}{2} m\dot{x}^2 + V(x).$$

В этой формуле мы легко узнаем сумму кинетической и потенциальной энергий. Неужели это всегда так просто?

В простом лагранжиане (11.12) есть один член, зависящий от \dot{x}^2 , и еще один, вообще не содержащий \dot{x} . В любом лагранжиане, удобно разбитом на такие составляющие, легко отождествить кинетическую энергию с членами, зависящими от \dot{x}^2 , а потенциальную — с остальными членами. Когда лагранжиан принимает этот простой вид — квадраты скоростей минус все, что от скорости не зависит, — вы тут же можете безо всяких дополнительных усилий считать с него гамильтониан: просто измените знаки членов, не содержащих скоростей.

Если уравнения Лагранжа применить ко всей правой части (11.11), то гамильтониан сохраняется; он не меняется со временем.¹ Будет лагранжиан иметь эту простую форму или нет, общая энергия системы определяется как ее гамильтониан.

¹ Полное объяснение вы найдете в *Книге I* нашего «Теоретического минимума».

11.4. Теория поля

Теория поля — частный случай обычной классической механики. Тесная связь между ними несколько затуманивается, когда мы пытаемся записать всё в релятивистской форме. Лучше всего начать с того, чтобы отказаться от идеи сделать все уравнения явным образом инвариантными относительно преобразований Лоренца. Вместо этого мы выберем конкретную систему отсчета с конкретной временной координатой и будем работать в ней. Впоследствии мы займемся вопросом перехода от одной системы отсчета к другой.

В классической механике у нас есть ось времени и набор координат $q_i(t)$. Мы также исходим из принципа стационарного действия, причем действие определяется как интеграл по времени от лагранжиана:

$$\text{Действие} = \int L(q_i, \dot{q}_i) dt.$$

Сам лагранжиан зависит от всех координат и их производных по времени. И это всё что нам нужно: ось времени, набор зависящих от времени координат, интеграл действия и принцип стационарного действия.

11.4.1. Лагранжиан для полей

В теории поля у нас тоже есть ось времени и координаты, или степени свободы, зависящие от времени. Но что это за координаты?

В случае одиночного поля мы можем рассматривать переменную поля ϕ как *набор* координат. Это кажется странным, но не забудем, что переменная поля ϕ зависит не только от времени, но и от положения. Именно *природа* этой зависимости от положения и отличает эту переменную от переменных q_i , которые характеризуют частицу в классической механике.

Представим себе гипотетически, что ϕ зависит от положения дискретно, а не непрерывно. Рисунок 11.2 схематически иллюстрирует эту идею. Каждая вертикальная линия представляет одну степень свободы: ϕ_1, ϕ_2 , и так далее; обозначим их коллективно как ϕ_i . Такое соглашение об обозначениях подобно обозначению координат q_i в классической механике. Мы делаем это, чтобы подчеркнуть две идеи:

- 1) каждая переменная ϕ_i является отдельной и независимой степенью свободы;
- 2) текущий индекс i — просто метка, идентифицирующая определенную степень свободы.

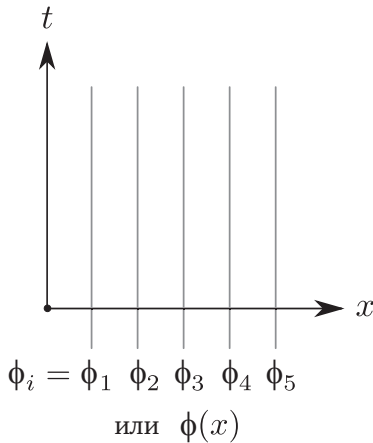


Рис. 11.2. Элементы теории поля. Если мы будем представлять себе переменную ϕ дискретной, то сможем рассматривать ϕ_i аналогично q_i в классической механике. Подстрочные индексы i являются метками независимых степеней свободы

На практике переменная поля ϕ не помечается дискретным индексом i , а обозначается непрерывной переменной x , и мы используем запись $\phi(t, x)$. Однако мы будем продолжать думать об x как о *метке* для независимой степени свободы, а не как

о координате системы. Переменная поля $\phi(t, x)$ представляет независимую степень свободы для каждого значения x .

Это можно представить еще нагляднее с помощью физической модели. На рис. 11.3 показан размещенный на одной линии набор масс, соединенных пружинами. Эти массы могут двигаться только в горизонтальном направлении. Движение каждой из масс представляет собой отдельную степень свободы q_i , помеченную дискретным индексом i . По мере того как мы будем заполнять тот же объем пространства все большим и большим числом малых масс и пружин, система все больше будет напоминать непрерывное распределение массы. И в пределе мы перейдем к обозначению степеней свободы непрерывной переменной x , а не дискретным набором индексов i . Эта схема работает для классических полей, так как они непрерывны.

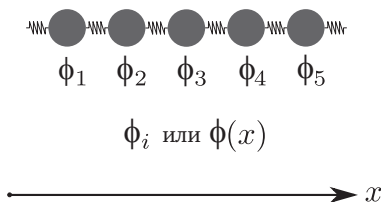


Рис. 11.3. Аналог поля. Представим себе ряд дискретных степеней свободы, таких как эти массы, соединенные пружинами. Мы обозначаем каждую степень свободы подстрочным индексом ϕ_i . Теперь представим, что массы уменьшаются и размещаются всё плотнее. В пределе мы получим бесконечное количество малых масс, расположенных на бесконечно малых расстояниях друг от друга. В этом пределе распределение массы становится непрерывным (так же, как в случае поля), а не дискретным, и более разумно обозначать степени свободы $\phi(x)$, а не ϕ_i

А что можно сказать о производных? Как мы и ожидали, лагранжианы поля зависят от временных производных $\dot{\phi}$ переменных поля. Но они также зависят и от пространственных производных ϕ . Другими словами, они зависят от таких величин, как

$$\frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Это отличается от классической механики частиц, где единственными производными лагранжиана являются производные по времени, такие как \dot{q}_i . Лагранжиан в теории поля, как правило, зависит от таких объектов, как

$$\phi(t, x),$$

$$\dot{\phi}(t, x)$$

и

$$\frac{\partial \phi(t, x)}{\partial x}.$$

Но что такое производная ϕ по x ? Она определяется как

$$\frac{\phi(x + \varepsilon) - \phi(x)}{\varepsilon}$$

для некоторого малого значения ε . В этом смысле пространственные производные являются функциями самих ϕ ; самое же важное то, что пространственные производные не содержат $\dot{\phi}$. Зависимость лагранжиана от пространственных производных отражает его зависимость от самих ϕ . В этом случае он зависит от двух соседних значений ϕ в одно и то же время.

11.4.2. Действие для полей

Задумаемся о том, что мы понимаем под действием. В классической механике действие — это всегда интеграл по времени:

$$\text{Действие} = \int dt L \left(\phi, \dot{\phi}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right).$$

Однако для полей сам лагранжиан является интегралом по пространству. Мы это уже видели в предыдущих примерах. Если

отделить временную часть интеграла от пространственной, то можем записать действие в виде:

$$\text{Действие} = \int dt L\left(\phi, \dot{\phi}, \frac{\partial \phi}{\partial x}\right) = \int dt \int d^3x \mathcal{L}\left(\phi, \dot{\phi}, \frac{\partial \phi}{\partial x}\right). \quad (11.13)$$

Я использую символ L для лагранжиана, а символ \mathcal{L} — для *плотности* лагранжиана. Интеграл \mathcal{L} по пространству — то же самое, что и L . Смысл такой записи в том, чтобы избежать смешения временных производных с пространственными.

11.4.3. Гамильтониан для полей

Энергия поля — часть универсальной сохраняющейся энергии, которая ассоциируется с параллельным переносом во времени. Для понимания энергии поля необходимо сконструировать гамильтониан. А для этого требуется идентифицировать обобщенные координаты (q), соответствующие им скорости и канонические импульсы (\dot{q} и p) и сам лагранжиан. Мы уже видели, что координаты — это $\phi(t, x)$. Соответствующие им скорости — это просто $\dot{\phi}(t, x)$. Это не пространственные скорости, но величины, показывающие, насколько быстро изменяется поле в конкретной точке пространства. Канонический импульс, сопряженный с ϕ , есть производная лагранжиана по $\dot{\phi}$. Это можно записать так:

$$\Pi_{\phi}(x) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}}(x),$$

где $\Pi_{\phi}(x)$ — канонический импульс, сопряженный с ϕ . Обе части этого уравнения — функции положения. Если в задаче участвует много полей — например, ϕ_1, ϕ_2, ϕ_3 , — с каждым из них будет ассоциирован различный импульс $\Pi(x)$. Когда все эти предварительные приготовления будут закончены, мы будем готовы записать гамильтониан. Гамильтониан, определяемый уравнением (11.11), есть сумма по i :

$$H = \sum_i p_i \dot{q}_i - L.$$

Но что в рамках этой задачи представляет собой i ? Это метка степени свободы. Так как поля непрерывны, их степени свободы вместо i обозначаются действительной переменной x , и сумма по i превращается в интеграл по x . Если заменить p_i на $\Pi_\phi(x)$, а \dot{q} на $\dot{\phi}(x)$, то получится следующее соответствие:

$$\sum_i p_i \dot{q}_i \Rightarrow \int d^3x \Pi_\phi(x) \dot{\phi}(x).$$

Чтобы превратить этот интеграл в гамильтониан, нужно вычесть общий лагранжиан L . Но, как мы знаем из (11.13), этот лагранжиан равен

$$L = \int d^3x \mathcal{L} \left(\phi, \dot{\phi}, \frac{\partial \phi}{\partial x} \right).$$

Это тоже пространственный интеграл. Следовательно, мы можем внести оба члена гамильтониана под общий интеграл, и гамильтониан будет равен

$$H = \int d^3x \left[\Pi_\phi(x) \dot{\phi}(x) - \mathcal{L} \right].$$

Это интересное уравнение: оно выражает энергию как интеграл по пространству. Следовательно, подынтегральное выражение — это *плотность энергии*. Это характерная черта всех теорий поля: сохраняющиеся величины, такие как энергия и импульс, являются пространственными интегралами плотности.

Вернемся к лагранжиану (4.7), который мы уже использовали во множестве случаев. Здесь мы рассматриваем его как плотность лагранжиана и ограничимся упрощенной версией всего с одним пространственным измерением:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - V(\phi). \quad (11.14)$$

Первый член — кинетическая энергия.¹ Что такое Π_ϕ ? Это производная \mathcal{L} по $\dot{\phi}$, или просто $\dot{\phi}$. То есть

$$\Pi_\phi = \dot{\phi},$$

и гамильтониан (энергия) равен:

$$H = \int dx [\Pi_\phi \dot{\phi} - \mathcal{L}].$$

Заменяя Π_ϕ на $\dot{\phi}$, получаем:

$$H = \int dx [(\dot{\phi})^2 - \mathcal{L}].$$

Подстановка выражения для \mathcal{L} дает

$$H = \int dx \left[(\dot{\phi})^2 - \left\{ \frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 - V(\phi) \right\} \right]$$

или

$$H = \int dx \left[\frac{1}{2}(\dot{\phi})^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi) \right]. \quad (11.15)$$

В (11.14) для плотности лагранжиана член кинетической энергии содержит производную по времени $\dot{\phi}$ ². Другие два члена, содержащие $V(\phi)$ и пространственную производную ϕ , играют роль потенциальной энергии — той части энергии, которая не содержит производных по времени.² Гамильтониан в этом при-

¹ Если вернуться к нашему анализу теории относительности, то распознаем первые два члена в правой части как скаляры и объединим их в один член, такой как $\frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$. Это прекрасное релятивистское выражение, но мы не станем использовать эту форму прямо сейчас. Вместо этого мы проследим за временными и пространственными производными по отдельности.

² Иногда $V(\phi)$ называют потенциальной энергией поля, но точнее в этом случае говорить о потенциальной энергии как о комбинации обоих членов. Потенциальная энергия должна включать любые члены, которые не содержат производных по времени.

мере — это кинетическая энергия *плюс* потенциальная энергия и представляет полную энергию системы. В отличие от него лагранжиан — это кинетическая энергия *минус* потенциальная.

Отложим на минутку $V(\phi)$ и рассмотрим те слагаемые, которые содержат временные и пространственные производные. Оба этих члена положительные (или нулевые), так как являются квадратами. В лагранжиане есть как положительные, так и отрицательные члены, и в целом он не обязательно положителен. Однако энергия включает только неотрицательные слагаемые. Конечно, эти члены могут быть и нулевыми. Но единственной возможностью реализовать это является постоянство ϕ : если ϕ постоянна, ее производные должны быть нулевыми. Поэтому нет ничего удивительного в том, что энергия обычно не становится отрицательной.

Что можно сказать о $V(\phi)$? Этот член может быть положительным или отрицательным. Но если он ограничен снизу, легко можем устроить, чтобы он был положительным, прибавив к нему постоянную. Прибавление постоянной к $V(\phi)$ ничего не меняет в уравнениях движения. Однако если $V(\phi)$ не ограничена снизу, теория становится неустойчивой и все ее построения могут рухнуть во мгновение ока, а такая теория никому не нужна. Поэтому мы можем предположить, что $V(\phi)$ и, следовательно, полная энергия, равна нулю или положительна.

11.4.4. Следствие конечности энергии

Если x является просто меткой и $\phi(t, x)$ — независимая степень свободы для каждого значения x , что может помешать ϕ произвольно меняться от одной точки к другой? Существует ли для $\phi(t, x)$ какое-либо ограничение, требующее, чтобы эта величина изменялась плавно? Допустим гипотетически, что верно обратное, а именно, что значения ϕ могут совершать резкие скачки между соседними точками на рис. 11.2. В этом случае градиент (пространственная производная) будет принимать огромные

значения, по мере того как интервал между точками будет уменьшаться.¹

Это означает, что при уменьшении интервала между точками плотность энергии устремилась бы к бесконечности. Если мы интересуемся конфигурациями, в которых энергия не устремляется к бесконечности, эти производные должны быть конечными. А конечность производных требует, чтобы функция $\phi(t, x)$ была гладкой. Таким образом, именно эти производные накладывают ограничения на то, насколько сильно ϕ может меняться от точки к точке.

11.4.5. Электромагнитные поля через калибровочную инвариантность

Как можно применить эти соображения об энергии и импульсе к электромагнитному полю? Мы могли бы, конечно, использовать лагранжев формализм, который уже рассматривался выше. Поля представляют собой четыре компоненты векторного потенциала A_μ . Тензор поля $F^{\mu\nu}$ выражается через пространственные и временные производные этих компонент. Затем мы возводим компоненты $F^{\mu\nu}$ в квадрат и складываем их, чтобы получить лагранжиан. Тем самым вместо одного поля мы получили бы четыре.²

Но существует удобная возможность упрощения, основанная на калибровочной инвариантности. Это упрощение не только облегчит нам работу, но и позволит проиллюстрировать некоторые важные идеи касательно калибровочной инвариантности.

¹ Вспомним, что такое производная. Это изменение ϕ между двумя соседними точками, деленное на малый интервал между ними. При заданном изменении ϕ чем меньше расстояние между точками, тем больше производная.

² Мы будем по преимуществу придерживаться релятивистских единиц ($c = 1$). В отдельных случаях, когда важно видеть относительный масштаб единиц, мы будем восстанавливать в формулах скорость света.

Вспомним, что векторный потенциал не является однозначно определенной величиной; при разумном подходе его можно изменить, не влияя на физическую сторону дела. Это похоже на свободу выбора системы координат — можно воспользоваться этой свободой для упрощения формы уравнений. В данном случае использование калибровочной инвариантности позволит нам работать только с тремя компонентами векторного потенциала, а не со всеми четырьмя.

Если вы помните, калибровочное преобразование состоит в прибавлении градиента *произвольного* скаляра S к векторному потенциалу A_μ . Оно сводится к замене

$$A_\mu \Rightarrow A_\mu + \frac{\partial S}{\partial X^\mu}.$$

Свободу выбора S можно использовать так, чтобы упростить A_μ . Выберем S так, чтобы временная компонента A_0 обратилась в ноль. Все, что нас при этом заботит, — производная S по времени, так как A_0 является временной компонентой A_μ . Другими словами, мы выберем величину S так, чтобы

$$A_0 + \frac{\partial S}{\partial t} = 0$$

или

$$\frac{\partial S}{\partial t} = -A_0.$$

Возможно ли это? Ответ — да. Напомним, что $\frac{\partial S}{\partial t}$ есть производная по времени при фиксированном положении в пространстве. Если попасть в эту фиксированную точку пространства, всегда можно выбрать S так, чтобы производная этой величины по времени была некоторой наперед заданной функцией $-A_0$. Если сделать это, новый векторный потенциал

$$(A')_\mu = A_\mu + \frac{\partial S}{\partial t}$$

будет иметь нулевую временную компоненту. Такая процедура и называется *калибровкой векторного потенциала*. Различные варианты калибровки имеют свои названия: калибровка Лоренца, радиационная калибровка, кулоновская калибровка. Калибровка с $A_0 = 0$ имеет элегантное название «калибровка $A_0 = 0$ ». Можно было бы выбрать другую калибровку; ни одна из них не повлияла бы на физическую сторону вопроса, но для наших целей особенно удобна калибровка $A_0 = 0$. Основываясь на этом нашем выборе, запишем

$$A_0 = 0.$$

Этим мы полностью исключаем временную компоненту векторного потенциала. Все, что у нас остается, — пространственные компоненты,

$$A_m = (x).$$

Какими же будут электрическое и магнитное поля при такой калибровке? Электрическое поле выражается через векторный потенциал как (8.7):

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + \vec{\nabla} A_0.$$

Но при равенстве нулю A_0 второй член исчезает, и можно записать более простое уравнение:

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}. \quad (11.16)$$

Электрическое поле есть просто производная по времени от векторного потенциала. А магнитное? Оно зависит только от пространственных компонент векторного потенциала, на которые выбранная нами калибровка не оказывает никакого влияния. Следовательно, по-прежнему верно, что

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (11.17)$$

Это упрощает дело, так как теперь мы можем полностью проигнорировать временную компоненту A_μ . Степени свободы при выборе калибровки $A_0 = 0$ являются просто пространственные компоненты векторного потенциала.

Рассмотрим форму лагранжиана в случае калибровки $A_0 = 0$. Согласно (10.17), лагранжиан выражается через компоненты тензора поля как

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}. \quad (11.18)$$

Но, как мы уже видели в (10.18), эта величина оказывается половиной разности квадратов электрического и магнитного полей:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (E^2 - B^2). \quad (11.19)$$

Первый член (11.19) равен

$$\frac{1}{2} E^2.$$

Но из (11.16) мы знаем, что это равно

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2.$$

С такой подстановкой уравнение (11.19) начинает напоминать (11.14), согласно которому

$$\mathcal{L} = \frac{\dot{\phi}^2}{2} - \frac{(\partial_x \phi)^2}{2} - V(\phi).$$

Обратите внимание, что $\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2$ — это не один, а три члена: в него входят квадраты производных по времени A_x , A_y и A_z . Это сумма членов точно такого же вида, как и $\frac{\phi^2}{2}$ в (11.14) — по

одному члену для каждой компоненты векторного потенциала. Развернутая форма этого выражения такова:

$$\frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_z}{\partial t} \right)^2 \right].$$

Второй член в (11.19) есть квадрат ротора A . Полная плотность лагранжиана равна

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2 \quad (11.20)$$

или

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial A_x}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_y}{\partial t} \right)^2 + \left(\frac{\partial A_z}{\partial t} \right)^2 \right] - \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{A})^2. \quad (11.21)$$

Сходство с (11.14) теперь только усилилось: квадраты временных производных минус квадраты пространственных.

Каков канонический импульс, сопряженный с конкретной компонентой векторного потенциала? По определению, это

$$\Pi_A = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t A)},$$

что равно просто

$$\Pi_A = \frac{\partial A}{\partial t}.$$

Или, в покомпонентной записи,

$$\Pi_x = \frac{\partial A_x}{\partial t},$$

$$\Pi_y = \frac{\partial A_y}{\partial t},$$

$$\Pi_z = \frac{\partial A_z}{\partial t}.$$

Но верно и то, что производная A по времени есть электрическое поле со знаком минус. Получается, мы обнаружили кое-что интересное: канонические импульсы оказываются равны компонентам электрического поля со знаком минус. Другими словами,

$$\Pi_x = \frac{\partial A_x}{\partial t} = -E_x,$$

$$\Pi_y = \frac{\partial A_y}{\partial t} = -E_y,$$

$$\Pi_z = \frac{\partial A_z}{\partial t} = -E_z.$$

Таким образом, физический смысл канонического импульса, сопряженного с векторным потенциалом, — это электрическое поле, взятое с обратным знаком.

Что такое гамильтониан?

Теперь, когда известен лагранжиан, можем записать и гамильтониан. Мы могли бы выполнить процедуру его формального построения, но в данном случае в этом нет необходимости. Дело в том, что наш лагранжиан имеет форму разности двух членов: кинетической энергии, которая зависит от временных производных, и потенциальной, которая производных по времени не содержит. Когда лагранжиан имеет такую форму — кинетическая энергия минус потенциальная, — мы *знаем* ответ: гамильтониан есть кинетическая энергия *плюс* потенциальная. Таким образом, энергия электромагнитного поля равна

$$H = \frac{1}{2}(E^2 + B^2). \quad (11.22)$$

Напомним еще раз: лагранжиан не обязан быть положительным. В частности, если имеется магнитное поле без электрического, лагранжиан отрицателен. Но энергия, $\frac{1}{2}(E^2 + B^2)$, положительна. Что это говорит нам о плоской электромагнитной волне, распро-

страняющейся вдоль оси? В примере, который мы рассматривали в лекции 10, у нее была E -составляющая в одном направлении и B -составляющая в перпендикулярном направлении. Поле B имеет ту же величину, что и поле E , и находится с ним в одной фазе, но поляризовано в перпендикулярном направлении. Это означает, что у электрического и магнитного полей энергия одинакова. У электромагнитной волны, движущейся по оси z , имеется как электрическая, так и магнитная энергия, и оказывается, что их вклад в общую энергию одинаков.

Плотность импульса

Какое количество импульса переносит электромагнитная волна? Вернемся к нётеровской концепции импульса, изложенной в разделе 11.2.3. Первый шаг в использовании теоремы Нётер — идентифицировать симметрию. С сохранением импульса ассоциирована симметрия относительно параллельного переноса в пространстве.

Например, можно осуществить параллельный перенос системы вдоль оси x на малое расстояние ε (см. рис. 11.4). Каждое поле $\phi(x)$ меняется на $\phi(x - \varepsilon)$. Соответственно, изменение $\phi(x)$ равно

$$\delta\phi = \phi(x - \varepsilon) - \phi(x),$$

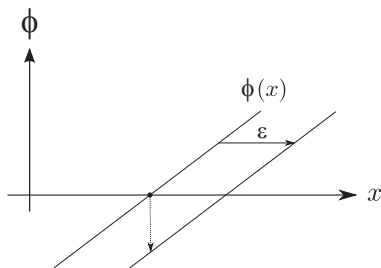


Рис. 11.4. Сдвиг Нётер. Возьмем конфигурацию поля $\phi(x)$ и сдвинем ее вправо (в сторону больших x) на бесконечно малую величину ε . Изменение ϕ в некоторой точке равно $-\varepsilon d\phi$

что (если ε бесконечно мало) превращается в

$$\delta\phi = -\varepsilon \frac{\partial\phi}{\partial x}.$$

В случае электромагнетизма поля являются пространственными компонентами векторного потенциала. Изменения этих полей при выполнении параллельного переноса равны

$$\begin{aligned}\delta A_x &= -\varepsilon \frac{\partial A_x}{\partial x}, \\ \delta A_y &= -\varepsilon \frac{\partial A_y}{\partial x}, \\ \delta A_z &= -\varepsilon \frac{\partial A_z}{\partial x}.\end{aligned}\tag{11.23}$$

Вспомним теперь уравнение (11.9), в соответствии с которым сохраняющаяся величина, ассоциированная с этой симметрией, имеет вид

$$Q = \sum_i \Pi_i f_i(q).$$

В этом случае канонические импульсы равны электрическому полю, взятому с обратным знаком:

$$\Pi \rightarrow -E,$$

а f_i — это просто выражения, на которые умножается ε в (11.23).

$$f_i \rightarrow -\frac{\partial A_i}{\partial x}.$$

Таким образом, x -компонента импульса, переносимая электромагнитным полем, дается выражением

$$P_x = \int dx E_m \frac{\partial A_m}{\partial x}.$$

Все то же самое можно, конечно, проделать для направлений y и z , чтобы получить в результате все три компоненты импульса:

$$P_n = \int dx E_m \frac{\partial A_m}{\partial X^n}. \quad (11.24)$$

Очевидно, как и в случае с энергией, импульс электромагнитного поля есть интеграл по пространству.¹ Следовательно, подынтегральное выражение в (11.24) можно рассматривать как плотность импульса:

$$(\text{Плотность импульса})_n = E_m \frac{\partial A_m}{\partial X^n}.$$

Между этой плотностью импульса и плотностью энергии в (11.22) наблюдается интересный контраст. Плотность энергии прямо выражается через электрическое и магнитное поля, а плотность импульса все еще содержит векторный потенциал. Это вызывает беспокойство: электрическое и магнитное поля калибровочно инвариантны, а векторный потенциал — нет. Можно было бы подумать, что такие величины, как плотность энергии и плотность импульса, должны быть подобны друг другу и зависеть только от E и B . Но имеется простой прием, который возвращает плотность импульса к калибровочной инвариантности. Величина

$$\frac{\partial A_m}{\partial X^n}$$

есть часть выражения для магнитного поля. По сути, мы можем превратить ее в компоненту магнитного поля, прибавив к ней член

$$-\frac{\partial A_n}{\partial X^m}.$$

¹ Так как каждый из этих интегралов относится только к какой-то одной пространственной компоненте, мы пишем dx вместо d^3x . Более точной записью для подынтегрального выражения в (11.24) могло бы быть $dX^n E_m \frac{\partial A_m}{\partial X^n}$. Мы решили остановиться на более простой форме, в которой dx понимается как ссылка на соответствующую пространственную компоненту.

Если мы по-тихому внесем это изменение, то сможем переписать интеграл как

$$P_n = \int dx E_m \left(\frac{\partial A_m}{\partial X^n} - \frac{\partial A_n}{\partial X^m} \right).$$

Но сойдет ли это нам с рук? Как изменились бы P_n при введении этого дополнительного члена? Чтобы разобраться, присмотримся внимательнее к тому, что хотим добавить:

$$-\int dx E_m \frac{\partial A_n}{\partial X^m}.$$

Проинтегрируем этот член по частям. Как мы уже видели, всегда, когда мы берем интеграл, подынтегральная часть которого равна произведению производной на что-то еще, мы можем сдвинуть производную на некоторый другой член ценой появления знака минус.¹

$$-\int dx E_m \frac{\partial A_n}{\partial X^m} = \int dx \frac{\partial E_m}{\partial X^m} A_n.$$

Но благодаря индексу суммирования m член $\frac{\partial E_m}{\partial X^m}$ есть просто дивергенция электрического поля. Из уравнений Максвелла для пустого пространства мы знаем, что $\vec{\nabla} \cdot \vec{E}$ равно нулю. Это означает, что дополнительный интеграл ничего не меняет и, следовательно, что P_n можно выразить через электрическое и магнитное поля:

$$P_n = \int dx E_m \left(\frac{\partial A_m}{\partial X^n} - \frac{\partial A_n}{\partial X^m} \right). \quad (11.25)$$

Несложными алгебраическими выкладками можно показать, что это подынтегральное выражение в действительности равно

¹ Мы предполагаем, что поля обращаются в нуль на определенном расстоянии, и, следовательно, здесь нет никаких граничных членов.

вектору $\vec{E} \times \vec{B}$. А это значит, что $\vec{E} \times \vec{B}$ есть плотность импульса. Отбрасывая подстрочные индексы и возвращаясь к традиционной векторной записи, мы превращаем уравнение (11.25) в

$$\vec{P} = \int \vec{E} \times \vec{B} d^3x.$$

Здесь \vec{P} — вектор, а его направление соответствует направлению импульса. Плотность импульса $\vec{E} \times \vec{B}$ называется *вектором Пойнтинга*, который часто обозначается символом \vec{S} .

Вектор Пойнтинга кое-что говорит нам о том, как распространяется волна. Вернемся к рис. 10.1 и посмотрим на первые два полуцикла распространяющейся волны. В первом полуцикле вектор \vec{E} направлен вверх, а \vec{B} торчит из страницы. Следуя правилу правой руки, находим, что векторное произведение $\vec{E} \times \vec{B}$ направлено вправо вдоль оси z . Это направление, в котором распространяется импульс (и сама волна). А второй полуцикл? Так как направление обоих векторов поля обращено, вектор Пойнтинга все еще «смотрит» вправо. Мы еще поговорим об этом векторе позже.

Отметим, как важно то, что \vec{E} и \vec{B} перпендикулярны друг другу: импульс (вектор Пойнтинга) является следствием этого обстоятельства. Все это восходит к замечательной теореме Эмми Нётер о связи между сохранением импульса и инвариантностью относительно пространственного параллельного переноса. С этих позиций классическую механику, теорию поля и электромагнетизм можно рассматривать как части единого целого, основанного на принципе наименьшего действия.

11.5. Энергия и импульс в четырех измерениях

Мы знаем, что энергия и импульс сохраняются. В четырехмерном пространстве-времени эта идея выражается локальным принципом сохранения. Идеи, которые мы излагаем здесь, вдохновлены

предшествующим анализом плотности заряда и тока и опираются на полученные при этом результаты.

11.5.1. Локально сохраняющиеся величины

В разделе 8.2.6 мы исследовали понятие локального сохранения заряда: если заряд внутри некоторой области увеличивается или уменьшается, это должно происходить только за счет пересечения зарядами границ области. Сохранение заряда локально в любой разумной релятивистской теории, и отсюда появляются понятия плотности заряда и тока, ρ и \vec{j} . Совместно эти две величины образуют 4-вектор

$$\rho, \vec{j} \Rightarrow J^\mu.$$

Плотность заряда здесь служит временной компонентой, а плотность тока (или поток) — пространственной.

Эту же концепцию можно применить и к другим сохраняющимся величинам. Если не ограничиваться зарядами и обобщить эти соображения, то для каждого закона сохранения можно ввести четыре величины, которые будут представлять плотность и поток *любой* сохраняющейся величины. В частности, эту идею можно применить и к сохраняющейся величине, называемой энергией.

В лекции 3 мы узнали, что энергия частицы есть временная компонента 4-вектора. Пространственные компоненты этого 4-вектора — ее релятивистские импульсы. Можно записать:

$$E, \vec{p} \Rightarrow P^\mu.$$

В теории поля эти величины становятся плотностями, и плотность энергии можно рассматривать как временную компоненту четырехмерного тока. Мы уже выводили выражение для плотности энергии: плотность энергии электромагнитного

поля задается уравнением (11.22). Временно обозначим эту величину T^0 .

$$T^0 = \frac{1}{2}(E^2 + B^2). \quad (11.26)$$

Мы хотим найти поток энергии, аналогичный электрическому току J^m . Как и J^m , поток энергии имеет три компоненты. Обозначим их T^m . Если мы определим T^m правильно, эти компоненты должны удовлетворять уравнению непрерывности

$$\frac{\partial T^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{T} = 0.$$

Наша стратегия отыскания потока энергии T^m проста: продифференцируем T^0 по времени и посмотрим, окажется результат этого дифференцирования дивергенцией или чем-то еще. Взятие производных по времени от (11.26) дает

$$\partial_t T^0 = \partial_t \left[\frac{1}{2}(E^2 + B^2) \right]$$

или

$$\partial_t T^0 = \vec{E} \cdot \dot{\vec{E}} + \vec{B} \cdot \dot{\vec{B}}, \quad (11.27)$$

где $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{B}}$ — производные по времени. На первый взгляд, правая часть (11.27) не очень-то похожа на дивергенцию чего бы то ни было, так как в нее входят временные, а не пространственные производные. Трюк заключается в использовании уравнений Максвелла

$$\begin{aligned} \dot{\vec{E}} &= \vec{\nabla} \times \vec{B}, \\ \dot{\vec{B}} &= -\vec{\nabla} \times \vec{E} \end{aligned} \quad (11.28)$$

для замены $\dot{\vec{E}}$ и $\dot{\vec{B}}$. Подставляя это в (11.27), получаем уже нечто более обнадеживающее:

$$\partial_t T^0 = -[\vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})]. \quad (11.29)$$

В этой формуле правая часть содержит пространственные производные и, следовательно, имеет некоторый шанс оказаться дивергенцией. И в самом деле, с использованием векторного тождества

$$\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{B})$$

уравнение (11.29) принимает вид

$$\partial_t T^0 = -\vec{\nabla} \cdot (\vec{E} \times \vec{B}). \quad (11.30)$$

Та-дам!!! Если мы определим поток энергии как

$$\vec{T} = \vec{E} \times \vec{B}, \quad (11.31)$$

то уравнение непрерывности для энергии можно записать как

$$\frac{\partial T^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{T} = 0. \quad (11.32)$$

В релятивистской нотации это превращается в

$$\partial_\mu T^\mu = 0. \quad (11.33)$$

Вектор $\vec{E} \times \vec{B}$, представляющий поток энергии, должен быть нам знаком — это вектор Пойнтинга, названный в честь Джона Генри Пойнтинга, который открыл его в 1884 году, вероятно, следуя той же логике, что и мы. Мы уже встречали этот вектор в разделе 11.4.5 под именем «плотность импульса». У вектора Пойнтинга две интерпретации: можно рассматривать его либо как поток энергии, либо как плотность импульса.

Подведем итоги. Энергия сохраняется локально. Как и в случае с зарядом, изменение энергии внутри некоторой области всегда сопровождается потоком энергии через границы этой области. Энергия не может внезапно исчезнуть из нашей лаборатории и заново возникнуть, скажем, на Луне.

11.5.2. Энергия, импульс и лоренцева симметрия

Энергия и импульс не лоренц-инвариантны. В этом нетрудно убедиться. Представьте покоящийся объект массой m в вашей покоящейся системе отсчета. Энергия объекта вычисляется по хорошо известной формуле

$$E = mc^2,$$

или, в релятивистских единицах,

$$E = m.$$

Так как объект покоится, у него нет импульса.¹ Посмотрим теперь, однако, на тот же самый объект из другой системы отсчета, в которой он движется вдоль оси x . Его энергия выросла, и теперь у него есть импульс.

Если энергия и импульс поля не инвариантны, как они изменяются преобразованиями Лоренца? Ответ: они образуют 4-вектор, точно так же как они это делают в случае частиц. Обозначим компоненты этого 4-вектора P^μ . Временная компонента — это энергия, а три пространственных компоненты — обычные импульсы вдоль осей x , y и z . Все эти четыре компоненты сохраняются:

$$\frac{dP^\mu}{dt} = 0. \quad (11.34)$$

При этом подразумевается, что каждая из компонент имеет плотность и что полное значение каждой компоненты есть интеграл этой плотности. В случае энергии мы обозначали плотность символом T^0 . Но теперь мы собираемся изменить обозначения, добавив второй индекс и назвав плотность энергии T^{00} .

¹ В этих двух уравнениях символ E обозначает энергию, а не электрическое поле.

Уверен, что вы уже догадались: двойной индекс означает, что мы строим новый тензор. У каждого индекса есть свое конкретное значение. Первый индекс говорит нам, к какой из четырех величин относится наш элемент.¹ Энергия — временная компонента 4-импульса, и, следовательно, первый индекс для времени равен 0. Выразимся яснее: то, что первый индекс имеет значение 0, показывает, что мы говорим об энергии. Значение индекса 1 указывает на x -компоненту импульса. Значения 2 и 3 указывают на y - и z -компоненты импульса соответственно.

Второй индекс показывает, говорим мы о плотности или о потоке. Значение 0 указывает на плотность, значение 1 относится к потоку в направлении x . Значения 2 и 3 соответствуют потокам в направлениях y и z соответственно.

Например, T^{00} — это плотность энергии; мы получаем полную энергию, интегрируя T^{00} по пространству:

$$P^0 = \int T^{00} d^3x. \quad (11.35)$$

Теперь рассмотрим x -компоненту импульса. В этом случае первый индекс есть x (или 1); тем самым он показывает, что сохраняющаяся величина есть x -компонента импульса. Вторым индексом снова вносит различие между плотностью и потоком (током). Таким образом, например,

$$P^1 = \int T^{10} d^3x$$

или в более общем виде:

$$P^m = \int T^{m0} d^3x. \quad (11.36)$$

Что можно сказать о *потоке* импульса? У каждой из компонент свой собственный поток. Например, можно рассмотреть поток

¹ Роли первого и второго индексов здесь могут быть обратными по отношению к тому, что говорилось в видео. Так как тензор симметричен, ни к каким различиям это не ведет.

x -импульса, текущий в направлении y .¹ Его можно обозначить T^{xy} . Подобным же образом T^{zx} есть поток z -импульса, текущий в направлении x .

Для понимания $T^{\mu\nu}$ применяется следующий прием: мы на время убираем второй индекс. Первый индекс говорит нам, какую именно величину мы рассматриваем: P^0 , P^x , P^y или P^z . Затем, как только мы это выяснили, убираем первый индекс и смотрим на второй. На этот раз мы определяем, говорим ли мы о плотности или о компоненте потока.

Теперь мы можем записать уравнение непрерывности для компоненты импульса P^m в виде

$$\frac{\partial T^{m0}}{\partial t} + \frac{\partial T^{mn}}{\partial X^n} = 0$$

или

$$\frac{\partial T^{mv}}{\partial X^v} = 0. \quad (11.37)$$

Таких уравнений три, по одному для каждой компоненты импульса (то есть по одному для каждого значения m). Но если добавить к этим трем уравнениям четвертое, выражающее сохранение энергии (заменив m на μ), все четыре уравнения можно записать в унифицированной релятивистской форме:

$$\frac{\partial T^{\mu\nu}}{\partial X^\nu} = 0. \quad (11.38)$$

¹ Термин *поток* может кого-то сбить с толку. Возможно, яснее было бы назвать эту величину изменением (x -компоненты импульса) в направлении y . Идея изменения импульса нам должна быть знакома: по сути, это сила. Но так как мы говорим о *плотности* импульса, лучше представлять себе эти пространственно-пространственные компоненты $T^{\mu\nu}$ как напряжения. Отрицательные значения этих пространственно-пространственных компонент образуют полноценный 3×3 -тензор, известный как *тензор напряжений*.

К этому всему, вообще-то, надо привыкнуть, поэтому сейчас подходящий момент, чтобы остановиться и еще раз рассмотреть весь ход рассуждений от начала до конца. Когда вы будете готовы продолжать, мы выведем выражения для импульсов и их потоков через значения полей E и B .

11.5.3. Тензор энергии-импульса

Есть множество способов выразить $T^{\mu\nu}$ через электрическое и магнитное поля. Некоторые из этих способов выглядят более интуитивными, чем другие. Мы будем использовать аргументацию, которая может показаться несколько менее интуитивной и более формальной, но она является обычной для современной теоретической физики и к тому же очень сильной. Я говорю об аргументации, основанной на симметрии или инвариантности. Аргументация, апеллирующая к инвариантности, начинается с составления списка различных присущих системе видов симметрии. Затем ставится вопрос, как именно интересующая нас величина преобразуется относительно этих видов симметрии.

Самые важные виды симметрии в электродинамике — калибровочная инвариантность и лоренц-инвариантность. Начнем с калибровочной инвариантности. Как преобразуются компоненты $T^{\mu\nu}$ в результате калибровочного преобразования? Ответ прост: никак. Плотности и потоки энергии и импульса — физические величины, которые не должны зависеть от выбора калибровки. Это значит, что они должны зависеть только от наблюдаемых калибровочно-инвариантных полей \vec{E} и \vec{B} и не должны дополнительно зависеть от потенциала A_μ .

С лоренц-инвариантностью дела обстоят интереснее. К какому виду объектов относится $T^{\mu\nu}$ и как изменяются его компоненты при переходе от одной системы отсчета к другой? Ясно, что $T^{\mu\nu}$ — не скаляр, так как у него есть компоненты, обозначенные μ и ν . Он не может быть и 4-вектором, так как у него два индекса

и шестнадцать компонент. Ответ ясен: $T^{\mu\nu}$ — это тензор, тензор второго ранга, ведь у него два индекса.

Теперь можно назвать $T^{\mu\nu}$ его настоящим именем: *тензор энергии-импульса*.¹ Так как это очень важный объект, и не только для электродинамики, но и для всех теорий поля, я повторю еще раз: $T^{\mu\nu}$ — это тензор *энергии-импульса*. Его компоненты — плотности и потоки энергии и импульса.

Мы можем построить $T^{\mu\nu}$, комбинируя компоненты тензора поля $F^{\mu\nu}$. Вообще говоря, таким способом мы могли бы построить много тензоров, но мы уже точно знаем, что такое T^{00} . Это плотность энергии:

$$T^{00} = \frac{1}{2}(E^2 + B^2). \quad (11.39)$$

Отсюда ясно, что $T^{\mu\nu}$ состоит из квадратов компонент тензора поля; другими словами, он образован из произведений двух компонент $F^{\mu\nu}$.

В таком случае возникает вопрос: сколькими различными способами можно сформировать тензор из произведения двух копий $F^{\mu\nu}$? К счастью, этих способов не слишком много — фактически всего два. Любой тензор, квадратично построенный из $F^{\mu\nu}$, должен быть суммой двух членов вида

$$T^{\mu\nu} = a F^{\mu\sigma} F_{\sigma}^{\nu} + b \eta^{\mu\nu} F^{\sigma\tau} F_{\sigma\tau}, \quad (11.40)$$

где a и b — числовые постоянные, которые мы вскоре вычислим.

Сделаем небольшую передышку, чтобы внимательнее рассмотреть уравнение (11.40). Первое, что следует заметить, — мы воспользовались эйнштейновским правилом суммирования. В первом члене суммирование происходит по индексу σ , а во втором — по σ и τ .

¹ Некоторые авторы называют его тензором *напряжений энергии*.

Второе, что следует заметить, — вид метрического тензора $\eta^{\mu\nu}$. Метрический тензор диагонален и имеет компоненты $\eta^{00} = -1$, $\eta^{11} = \eta^{22} = \eta^{33} = +1$. Остается единственный вопрос: как определить числовые постоянные a и b .

Здесь хитрость заключается в том, что мы уже знаем одну из компонент: T^{00} — плотность энергии. Все, что надо сделать, — воспользоваться уравнением (11.40) для определения T^{00} и затем подставить эту величину в уравнение (11.39). Вот что при этом получается:

$$aE^2 - b(2B^2 - 2E^2) = \frac{1}{2}(E^2 + B^2). \quad (11.41)$$

Сравнивая две части этого уравнения, находим, что $a = 1$ и $b = -1/4$. С этими значениями a и b уравнение (11.40) приобретает вид:

$$T^{\mu\nu} = F^{\mu\sigma} F_{\sigma}^{\nu} - \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F^{\sigma\tau} F_{\sigma\tau}. \quad (11.42)$$

Это уравнение позволяет вычислить все остальные компоненты тензора энергии-импульса.

Кроме компоненты T^{00} , которая задается уравнением (11.39), наиболее интересны T^{0n} и T^{n0} , где n — пространственный индекс. T^{0n} — компоненты потока (или «тока») энергии, и если мы их найдем, то увидим, что они (как и ожидалось) являются компонентами вектора Пойнтинга.

Посмотрим теперь на T^{n0} . Здесь мы можем воспользоваться одним интересным свойством уравнения (11.40). Внимательный анализ должен убедить вас в симметричности $T^{\mu\nu}$, то есть в том, что

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}.$$

Таким образом, T^{n0} — то же, что и T^{0n} ; и то и другое представляет собой вектор Пойнтинга. Но T^{n0} означает не то же самое,

что T^{0n} , T^{01} — это поток энергии в направлении x , а T^{10} — нечто совершенно иное, а именно плотность x -компоненты импульса. Полезно визуализировать $T^{\mu\nu}$ следующим образом:

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(E^2 + B^2) & S_x & S_y & S_z \\ S_x & -\sigma_{xx} & -\sigma_{xy} & -\sigma_{xz} \\ S_y & -\sigma_{yx} & -\sigma_{yy} & -\sigma_{yz} \\ S_z & -\sigma_{zx} & -\sigma_{zy} & -\sigma_{zz} \end{pmatrix},$$

где (S_x, S_y, S_z) — компоненты вектора Пойнтинга. В такой форме записи хорошо видно, как смешанные пространственно-временные компоненты (верхняя строка и крайний левый столбец) отличаются от пространственно-пространственных (подматрица 3×3 справа внизу). Как мы уже отмечали, σ_{mn} — компоненты тензора, называемого *электромагнитным тензором напряжений*, который мы подробно не обсуждали.

Упражнение 11.1. Покажите, что T^{0n} — вектор Пойнтинга.

Упражнение 11.2. Вычислите T^{11} и T^{12} через компоненты поля (E_x, E_y, E_z) и (B_x, B_y, B_z) .

Допустим, мы восстановили коэффициенты, содержащие скорость света c , которую мы ранее положили равной 1. Самым простым способом сделать это является анализ размерностей. Мы нашли бы, что поток энергии и плотность импульса отличаются на множитель c^2 . Корректный размерностный анализ показывает, что плотность импульса равна $\vec{E} \times \vec{B}$ без какого-либо множителя, содержащего c . Очевидно, мы сделали открытие, и оно подтверждается экспериментально:

Для электромагнитной волны плотность импульса равна потоку энергии, деленному на квадрат скорости света. Обе эти величины пропорциональны вектору Пойнтинга.

Теперь мы видим, почему с одной стороны солнечный свет греет нас, когда мы его поглощаем, но с другой стороны с ним связана столь малая сила. Причина в том, что плотность энергии в c^2 раз больше плотности импульса, а c^2 — очень большое число. В качестве упражнения вы можете вычислить силу, действующую на солнечный парус площадью в миллион квадратных метров на расстоянии от Солнца, равном радиусу земной орбиты. Результат получится очень малый, примерно 8 ньютонов, или около 800 граммов. С другой стороны, если бы тот же парус поглощал (а не отражал) падающий на него солнечный свет, поглощенная мощность составляла бы около миллиона киловатт.

Плотность и ток электрических зарядов играют центральную роль в электродинамике. Они появляются в уравнениях Максвелла как источники электромагнитных полей. Можно было бы спросить, играет ли подобную роль тензор энергии-импульса? Для электродинамики ответ на этот вопрос отрицательный: $T^{\mu\nu}$ прямо не появляется в уравнениях для \vec{E} и \vec{B} . Только в теории гравитации энергия и импульс начинают играть достойную роль в качестве источников, но не электромагнитных полей. Тензор энергии-импульса появляется в общей теории относительности в качестве источника гравитационного поля. Но это уже другая история.

11.6. До свидания!

Классическая теория поля — одно из великих достижений физики XIX и XX столетий. На основе принципа действия и специальной теории относительности она связывает воедино электромагнетизм и классическую механику. Она определяет

принципиальные рамки для изучения *любого* поля — например, гравитационного — с классической точки зрения. Она является ключевой предпосылкой для исследований в области квантовой теории поля и общей теории относительности (тема нашей следующей книги). Надеемся, что нам удалось изложить предмет не только понятно, но и интересно. Мы в восторге от того, что вы прошли весь этот путь до конца.

Один мудрец сказал:

Не считая собак, книги — лучшие друзья человека. А считая собак, нельзя сосредоточиться на чтении.¹

Если вам случится делать обзор нашей книги — считая собак или не считая их, — пожалуйста, хотя бы вскользь упомяните в своем обзоре Граучо. Для нас это будет убедительным подтверждением того, что вы действительно прочли нашу книгу.

Как мог бы сказать наш друг Герман, «время вышло»! Увидимся в общей теории относительности.

¹ Реприза известного американского стендап-комика Граучо Маркса в оригинале звучит так: «Outside of a dog, a book is a man's best friend. Inside of a dog it's too dark to read». — *Примеч. пер.*



Фермер Ленни пляшет с феноменами среди своих полей ф.
Арт аккомпанирует им на Фиделе (Farmer Lenny, out standing in his
field. A pair o'ducks dances to Art's fiddle)¹

¹ В оригинале игра слов. Слова «out standing» — инверсия «standing out» (стоять где-то) — звучат как «outstanding» (выдающийся). Слова «pair 'o ducks» (пара утят) звучат как «paradox» (парадокс). — *Примеч. ред.*

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Магнитные монополи: Ленни дурачит Арта

Ленни: Эй, Арт, смотри, чего покажу. Вот, гляди-ка!

Арт: Ух ты! Ленни, да ты же нашел магнитный монополь! Но постой-ка! Ты же мне вроде говорил, что монополей не бывает? Давай колись: ты просто решил меня разыграть, верно? Но я, кажется, догадался, что это. Ведь это соленоид? Ха-ха, вот это трюк.

Ленни: Вот и нет, Арт, это не трюк. Это и правда монополь. Никаких же проводов не торчит.

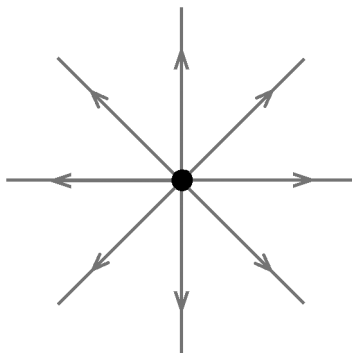


Рис. А.1. Электрический монополь.
Это просто положительный заряд

Что собой представлял бы магнитный монополь, если бы такие объекты существовали? Ну, во-первых, что означает сам термин «*монополь*»? Монополь — это просто изолированный заряд. Термин *электрический монополь*, если бы им широко пользовались, значил бы просто электрически заряженную частицу вместе с ее кулоновским электрическим полем. В соответствии с соглашением (см. рис. А.1), электрическое поле положительного заряда, например протона, считается направленным наружу, а поле отрицательного заряда, например электрона, — внутрь. Мы говорим, что заряд является источником электрического поля.

Магнитный монополь был бы в точности таким же, как электрический, с тем лишь отличием, что его окружало бы магнитное поле. Магнитные монополи тоже были бы двух типов: те, у которых поле направлено наружу, и те, у которых оно направлено внутрь.

Старинный мореплаватель, заполучивший магнитный монополь, называл бы его северным или южным в зависимости от того, притягивается он к северному или южному полюсу Земли. С математической точки зрения лучше было бы называть эти два типа магнитных монополей положительными и отрицательными, в зависимости от того, направлено их магнитное поле наружу или внутрь. Если бы такие объекты существовали в природе, мы бы называли их источниками магнитного поля.

Электрическое и магнитное поля математически подобны, но обладают одним принципиальным отличием. У электрических полей действительно есть источники — электрические заряды. Однако, согласно стандартной теории электромагнетизма, магнитные поля источниками не имеют. Математически это выражено в двух уравнениях Максвелла:

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad (\text{A.1})$$

и

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0. \quad (\text{A.2})$$

Первое уравнение говорит нам, что электрический заряд — источник электрического поля. Если мы решим его для случая точечного источника, мы получим для электрического монополя доброе старое кулоновское поле.

Второе уравнение говорит нам, что у магнитного поля источников нет. Поэтому таких объектов, как магнитные монополи, не существует. И тем не менее, несмотря на этот неотразимый аргумент, магнитные монополи не только возможны, но и являются почти неотъемлемым элементом современных теорий элементарных частиц. Как это может быть?

Один из возможных ответов мы получим, если просто изменим второе уравнение, поставив в правой его части источник магнитного поля. Обозначив плотность магнитного заряда σ , мы можем заменить уравнение (A.2) на

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = \sigma. \quad (\text{A.3})$$

Решение этого уравнения для точечного магнитного источника дало бы кулоновское магнитное поле, которое было бы точным аналогом кулоновского электрического поля:

$$B = \frac{\mu}{4\pi r^2}. \quad (\text{A.4})$$

Постоянная μ была бы магнитным зарядом магнитного монополя. По аналогии с электростатическими силами следовало бы ожидать, что между двумя магнитными монополями должны возникать кулоновские магнитные силы; единственным различием было бы то, что вместо произведения электрических зарядов эти силы определялись бы произведением магнитных зарядов.

Но все не так просто. На деле у нас нет достаточных оснований оперировать уравнением $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$. Ведь фундаментом электромагнетизма являются не уравнения Максвелла, а принцип действия, принцип калибровочной инвариантности и векторный потен-

циал. Магнитное поле — производное понятие, определяемое уравнением

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}. \quad (\text{A.5})$$

Здесь, пожалуй, было бы уместно вернуться к лекции 8 и заново пересмотреть аргументы, которые привели нас к уравнению (A.5). Какое отношение имеет это уравнение к магнитным монополям? Ответ на этот вопрос дается математическим тождеством, которым мы уже несколько раз пользовались: *дивергенция ротора всегда равна нулю*.

Другими словами, любое векторное поле, такое как \vec{B} , которое определяется как ротор другого поля — в данном случае векторного потенциала \vec{A} , — автоматически обладает нулевой дивергенцией. Таким образом, уравнение $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ оказывается неизбежным следствием самого определения \vec{B} .

Тем не менее большинство физиков-теоретиков твердо убеждены, что монополи могут существовать и, вероятно, существуют. Это убеждение восходит еще к Полю Дираку, который в 1931 году объяснил, как можно было бы «подделать» монополь. На самом деле эта подделка оказалась бы столь правдоподобной, что ее невозможно было бы отличить от настоящего монополя.

Возьмем для начала обычный магнитный брусок (рис. A.2), а лучше электромагнит или соленоид. Соленоид (рис. A.3) — это цилиндр, на который намотан провод с электрическим током. Ток создает магнитное поле, которое похоже на поле магнитного бруска. У соленоида то преимущество, что, изменяя текущий по проволоке ток, можно регулировать силу магнита.

У каждого магнита, в том числе и у соленоида, есть северный и южный полюса, которые можно назвать положительным и отрицательным. Магнитное поле выходит из положительного полюса и возвращается обратно в магнит через отрицательный. Если проигнорировать ту часть магнита, которая находится между полюсами, у нас получится что-то очень похожее на пару магнитных

монополей: один положительный, другой отрицательный. Но, конечно же, сам соленоид игнорировать нельзя. Магнитное поле не кончается на полюсах; оно проходит сквозь соленоид, так что линии поля ничем не ограничиваются, а образуют непрерывные петли. Дивергенция магнитного поля равна нулю, хотя все и выглядит так, как будто мы располагаем парой источников.

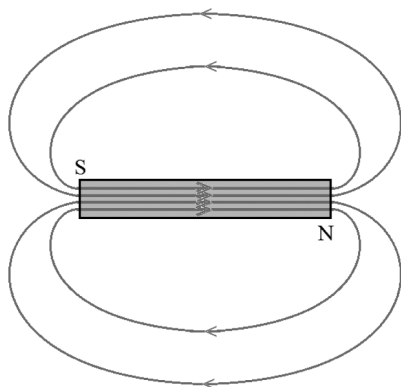


Рис. А.2. Магнитный брусок с северным и южным полюсами

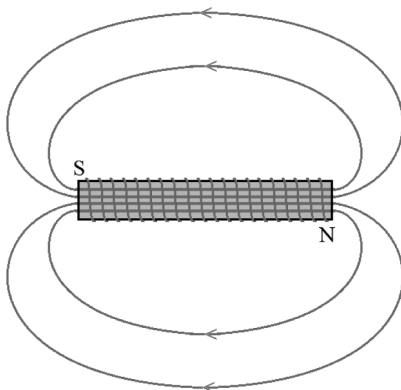


Рис. А.3. Соленоид, или электромагнит. Магнитное поле генерируется током, проходящим через проводник, навитый на цилиндрический сердечник

Теперь давайте вытянем магнитный брусок или соленоид — сделаем его очень длинным и тонким. При этом отнесем южный (отрицательный) полюс на очень большое расстояние — такое большое, что можно считать его бесконечным.

Оставшийся у нас северный полюс выглядит как изолированный положительный магнитный заряд (рис. А.4). Если бы у нас было несколько таких псевдомонополей, их взаимодействие практически не отличалось бы от реальных монополей: они действовали бы друг на друга кулоновскими магнитными силами. Но, разумеется, с псевдомонолем непременно связан длинный соленоид, и магнитный поток проходит через него.

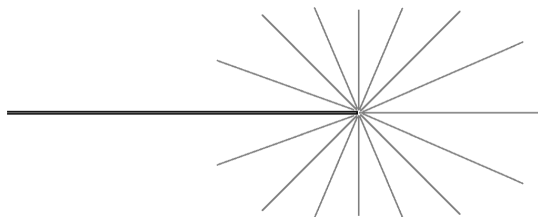


Рис. А.4. Вытянутый соленоид

Мы могли бы пойти еще дальше и представить себе гибкий соленоид (назовем его «струной Дирака») — такой как на рис. А.5. Поскольку поток идет сквозь струну и выходит из другого полюса, требование уравнения Максвелла $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$ соблюдается.

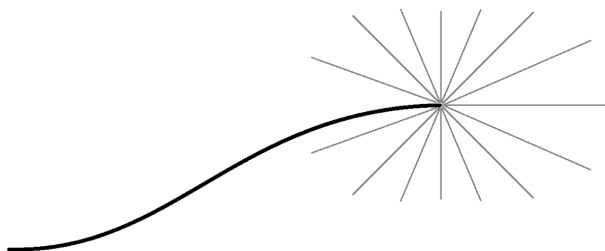


Рис. А.5. Струна Дирака: тонкий и гибкий соленоид

Наконец, мы можем сделать гибкую струну такой тонкой, что она станет невидимой (рис. А.6). Можно подумать, что такой соленоид будет легко обнаружить, и поддельность нашего монополя немедленно раскроется. Но представьте, что струна так тонка, что для любой заряженной частицы, движущейся в ее окрестности, шансом столкнуться с ней и испытать действие магнитного поля внутри струны можно пренебречь. Если бы струна была настолько тонкой, она проходила бы между атомами любого вещества, не взаимодействуя с ними.

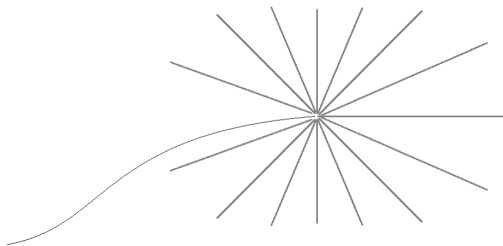


Рис. А.6. Ограниченный случай струны Дирака.

Струна может оказаться такой тонкой, что станет ненаблюдаемой

Конечно, практически невозможно делать такие тонкие соленоиды, чтобы они проходили сквозь любое вещество, но это же мысленный эксперимент, и он важен. Он показывает, что магнитные монополи, или по крайней мере их убедительные симуляции, математически возможны. Более того, меняя в соленоиде ток, можно придать монополям на концах соленоида любой магнитный заряд.

Если бы физика была классической, а не квантовомеханической, этот аргумент был бы корректен и могли бы существовать монополи с любым магнитным зарядом. Но Дирак понимал, что квантовая механика вносит в эти рассуждения новый тонкий элемент. С квантовомеханической точки зрения бесконечно тонкий соленоид в общем случае не был бы необнаружимым. Весьма тонким образом он бы воздействовал на движение за-

ряженных частиц, даже если бы они не приближались к струне. Чтобы объяснить, почему это так, мы должны немного углубиться в квантовую механику, но я постараюсь сделать это попроще.

Представим себе, что наш тонкий соленоид очень длинный, растянутый на всю длину пространства, и что мы находимся где-то поблизости от струны, но далеко от любого из ее концов. Мы хотим определить, какому воздействию подвергнется атом, ядро которого находится вблизи соленоида, а электроны обращаются вокруг соленоида. В классических рамках никакого воздействия не будет, так как электроны не движутся в магнитном поле.

Вместо реального атома, который несколько сложноват, мы рассмотрим упрощенную модель — кольцо радиуса r , по которому скользит электрон (рис. А.7). Если соленоид проходит через центр кольца, электрон будет обращаться вокруг соленоида (если у электрона имеется какой-либо угловой момент). Для начала представим себе, что в соленоиде нет тока, и поэтому магнитное поле, пронизывающее струну, нулевое.¹ Пусть скорость электрона в кольце равна v . Его импульс p и угловой момент L равны соответственно

$$p = mv, \quad (\text{A.6})$$

$$L = mvr. \quad (\text{A.7})$$

Наконец, энергия электрона ε равна

$$\varepsilon = \frac{1}{2}mv^2, \quad (\text{A.8})$$

что мы можем выразить как функцию момента импульса (углового момента) L :

$$\varepsilon = \frac{L^2}{2mr^2}. \quad (\text{A.9})$$

¹ Здесь-то нам и пригодится переменность поля соленоида.

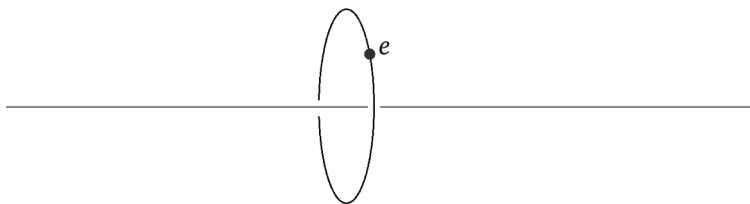


Рис. А.7. Кольцо, окружающее тонкий струнообразный соленоид. Заряженный электрон скользит по кольцу. Изменяя ток в соленоиде, мы можем изменять и магнитное поле, пронизывающее струну

Теперь перейдем к квантовой механике. Все, что для этого требуется, — один основной факт, открытый Нильсом Бором в 1913 году. Именно Бор первым осознал, что момент импульса существует в виде дискретных квантов. Это верно и для атома, и для электрона, движущегося по кольцу. Условие квантования Бора состояло в том, что орбитальный момент импульса электрона должен быть целым кратным постоянной Планка \hbar . Обозначив L орбитальный момент импульса, Бор написал:

$$L = n\hbar, \quad (\text{A.10})$$

где n может быть любым целым числом — положительным, отрицательным или нулевым, но не может принимать дробных значений. Из этого следует, что уровни энергии электрона, движущегося по кольцу, дискретны и принимают значения

$$\varepsilon_n = n^2 \frac{\hbar^2}{2mr^2}. \quad (\text{A.11})$$

До сих пор мы не предполагали наличия магнитного поля, пронизывающего струну. Но в действительности нас интересует именно воздействие на электрон струны, по которой течет магнитный поток ϕ . Поэтому давайте включим ток и создадим текущий сквозь струну магнитный поток. Вначале он равен нулю, но спустя интервал времени Δt достигает своего окончательного значения ϕ .

Кто-то, возможно, подумает, что включение магнитного поля не окажет никакого влияния на электрон, так как электрон находится совсем не там, где магнитное поле. Но это неверно. Вспомним закон Фарадея: переменное магнитное поле создает поле электрическое. В действительности это просто уравнение Максвелла:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (\text{A.12})$$

Согласно этому уравнению, растущий магнитный поток индуцирует электрическое поле, которое окружает струну и создает силу, действующую на электрон. Эта сила создает крутящий момент и ускоряет угловое движение электрона, меняя тем самым его момент импульса (рис. А.8).

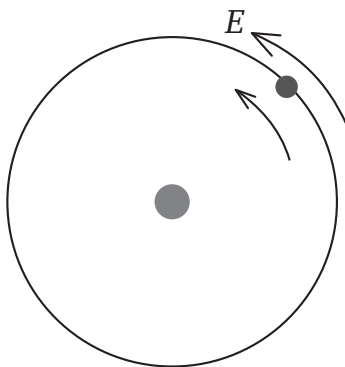


Рис. А.8. Еще один взгляд на соленоид, кольцо и заряд

Если поток через струну равен $\phi(t)$, то согласно уравнению (9.18) ЭДС равна:

$$\text{ЭДС} = -\frac{\partial \phi}{\partial t}.$$

Так как ЭДС соответствует энергии, необходимой, чтобы однократно провести единичный заряд по всей цепи, электрическое

поле в кольце имеет противоположный знак и «размазано» по всей длине кольца. Другими словами,

$$E = \frac{\dot{\phi}}{2\pi r}, \quad (\text{A.13})$$

и крутящий момент (сила, умноженная на r) есть

$$T = \frac{q\dot{\phi}}{2\pi}. \quad (\text{A.14})$$

Упражнение А.1. Выведите уравнение (A.13), опираясь на (9.18). Подсказка: вывод подчиняется той же логике, что и вывод (9.22) в разделе 9.2.5.

Крутящий момент меняет момент импульса точно так же, как сила изменяет импульс. Фактически изменение момента импульса за счет крутящего момента T за время Δt есть

$$\Delta L = T\Delta t, \quad (\text{A.15})$$

или, воспользовавшись (A.14),

$$\Delta L = \frac{q\dot{\phi}}{2\pi} \Delta t. \quad (\text{A.16})$$

Последний шаг в вычислении величины, на которую изменится момент импульса, заключается в учете того, что произведение $\dot{\phi}\Delta t$ есть просто окончательное значение потока ϕ .¹ Таким образом, в конце процесса наращивания потока момент импульса электрона изменился на величину

$$\Delta L = \frac{q\phi}{2\pi}. \quad (\text{A.17})$$

¹ Технически это *изменение* потока за период времени Δt , но, по нашему предположению, начальное значение потока равно нулю. Следовательно, эти две величины, по сути, являются одной и той же.

К этому времени поток через соленоид больше не меняется, и, следовательно, никакого электрического поля больше нет. Но изменились две вещи. Во-первых, теперь через соленоид течет магнитный поток ϕ . Во-вторых, момент импульса электрона изменился на $\frac{q\phi}{2\pi}$. Другими словами, новое значение L равно

$$L = n\hbar + \frac{q\phi}{2\pi}, \quad (\text{A.18})$$

что не обязательно будет целым кратным \hbar . Это обстоятельство, в свою очередь, сдвигает набор возможных энергетических уровней электрона, вне зависимости от того, находится ли последний на кольце или в атоме. Изменение возможных энергий атома легко наблюдаемо по спектральным линиям его излучения. Но это происходит только для электронов, обращающихся по орбите вокруг струны. Вследствие этого мы можем локализовать такую струну, двигая атом вокруг нее и измеряя его уровни энергии. Это сразу лишило бы силы трюк, при помощи которого Ленни дурачит Арта своим фальшивым монополем.

Но здесь есть и исключение. Вернемся к уравнению (A.18) и предположим, что сдвиг углового момента случайно оказался равным целому кратному n' постоянной Планка. Другими словами, допустим, что

$$\frac{q\phi}{2\pi} = n'\hbar. \quad (\text{A.19})$$

В этом случае возможные значения углового момента (и уровней энергии) ничем не отличались бы от тех, какими они были при нулевом потоке, а именно от некоторого целого кратного постоянной Планка. Арт не смог бы сказать, существует струна или нет, исходя из ее воздействия на атомы или на что-либо еще. Это происходит только при некоторых квантованных значениях потока:

$$\phi = \frac{2\pi n\hbar}{q}. \quad (\text{A.20})$$

Теперь вернемся к одному из концов струны, скажем, к положительному. Магнитный поток, проходящий по струне, распространяется от него во все стороны, имитируя поле монополя (рис. А.6). Заряд монополя μ — это величина потока, вытекающего из конца струны; иначе говоря, это ϕ . Если эта величина квантуется в соответствии с (А.20), то струна будет невидима даже в квантовомеханическом смысле.

Если подытожить все сказанное, получается, что Ленни и правда может одурачить Арта своим фальшивым магнитным монополем, но только в том случае, если заряд монополя связан с зарядом электрона q соотношением

$$\mu q = 2\pi\hbar n. \quad (\text{А.21})$$

Дело, конечно, не в том, можно ли надуть кого-то фальшивым монополем. Независимо от целей и намерений реальные монополи могут существовать, но только если их заряды удовлетворяют условию (А.21). Приведенная аргументация может показаться несколько натянутой, но современная квантовая теория поля убедила физиков в ее правильности.

Тогда, впрочем, появляется другой вопрос: почему же магнитные монополи никогда не наблюдались? Почему они не так распространены, как электроны? Ответ, предлагаемый квантовой теорией поля, заключается в том, что монополи очень тяжелые. Они настолько массивны, что не могут появляться вследствие столкновений частиц, даже тех, которые происходят в самых мощных ускорителях. Если современные оценки верны, никакой ускоритель из тех, которые мы надеемся когда-нибудь построить, не обеспечит столкновениям энергию, достаточную, чтобы их продуктом стал магнитный монополь. Но если так, как они могут влиять на экспериментальную физику?

Дирак заметил и кое-что еще: глубокие последствия, которые имеет для Вселенной существование в ней одного-единственного монополя, или даже просто сама возможность такого

существования. Допустим, что в природе существует электрически заряженная частица, заряд которой не является целым кратным заряду электрона. Назовем электрический заряд новой частицы Q . Монополь, удовлетворяющий уравнению (А.21), где q — заряд электрона, может и не удовлетворять этому уравнению, если q заменить на Q . В этом случае Арт мог бы выявить «липовый» монополь Ленни при помощи эксперимента с этой новой частицей. Поэтому Дирак утверждал, что существование во Вселенной хоть одного магнитного монополя, или даже просто возможность его существования, требует, чтобы все частицы во Вселенной имели электрический заряд, равный целому кратному единой основной единицы заряда — заряду электрона. Если бы была зарегистрирована частица с зарядом, равным $\sqrt{2}$, или кратным любому другому иррациональному числу, это значило бы, что монополей не существует.

Верно ли, что в природе каждый заряд есть целое кратное заряду электрона? Да, насколько нам известно, это так. Существуют электрически нейтральные частицы вроде нейтрона и нейтрино, для которых это целое равно нулю; протоны и позитроны с зарядом, равным положительному заряду электрона, и многие другие. До сих пор все открытые частицы, в том числе и их объединения, такие как ядра, ионы, экзотические частицы вроде бозона Хиггса и все остальные, обладают зарядом, равным целому кратному заряду электрона.¹

¹ Вы могли бы сказать, что кварки противоречат этому утверждению, однако в действительности это не так. Верно, что кварки несут заряд $\pm\frac{1}{3}$ или $\pm\frac{2}{3}$ заряда электрона, однако они всегда появляются в сочетаниях, заряд которых кратен заряду электрона.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Обзор 3-векторных операторов

В этом приложении собраны сведения о часто встречающихся векторных операторах: градиенте, дивергенции, роторе и лапласиане. Мы исходим из предположения, что вы уже знакомы с ними, и ограничимся их обсуждением в трехмерных декартовых координатах. Так как все эти операторы используют символ $\vec{\nabla}$, мы начнем именно с него.

Б.1. Оператор

В декартовых координатах символ $\vec{\nabla}$ (произносится «набла») определяется как

$$\vec{\nabla} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}, \quad (\text{Б.1})$$

где $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$ и $\hat{\mathbf{k}}$ — единичные векторы в направлениях x , y и z соответственно. В математических выражениях мы работаем с компонентами этого оператора (такими как $\frac{\partial}{\partial x}$) алгебраически, как если бы они были числовыми величинами.

Б.2. Градиент

Градиент скалярной величины S , обозначаемый $\vec{\nabla} S$, определяется как

$$\vec{\nabla} S = \frac{\partial S}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial S}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial S}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}.$$

В нашей сокращенной записи его компоненты равны

$$(\vec{\nabla} S)_x = \partial_x S,$$

$$(\vec{\nabla} S)_y = \partial_y S,$$

$$(\vec{\nabla} S)_z = \partial_z S,$$

где символы производной служат сокращением для

$$\partial_x S = \frac{\partial S}{\partial x},$$

$$\partial_y S = \frac{\partial S}{\partial y},$$

$$\partial_z S = \frac{\partial S}{\partial z}.$$

Градиент есть вектор, ориентированный в направлении максимального изменения скаляра. Его величина есть скорость изменения скаляра в этом направлении.

Б.3. Дивергенция

Дивергенция \vec{A} , записываемая как $\vec{\nabla} \cdot \vec{A}$, есть скалярная величина, вычисляемая как

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \partial_x \bar{A}_x + \partial_y \bar{A}_y + \partial_z \bar{A}_z$$

или

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = \frac{\partial \bar{A}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{A}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{A}_z}{\partial z}.$$

Дивергенция поля в конкретной точке указывает на тенденцию поля распространяться в разные стороны от этой точки. Поло-

жительная дивергенция означает, что поле расходится наружу от точки; отрицательная — напротив, что поле имеет тенденцию сходиться к данной точке.

Б.4. Ротор

Ротор указывает на тенденцию векторного поля закручиваться или циркулировать. Если ротор в некоторой точке равен нулю, поле в ней неврещающееся, или безвихревое. Ротор \vec{A} , записываемый как $\vec{\nabla} \times \vec{A}$, сам является векторным полем. Он определяется как

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y) \hat{\mathbf{i}} + (\partial_z A_x - \partial_x A_z) \hat{\mathbf{j}} + (\partial_x A_y - \partial_y A_x) \hat{\mathbf{k}}.$$

Его x , y и z -компоненты:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_x = \partial_y A_z - \partial_z A_y,$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_y = \partial_z A_x - \partial_x A_z,$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = \partial_x A_y - \partial_y A_x$$

или

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}.$$

Для удобства перепишем предыдущие уравнения, используя числовые индексы:

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_1 = \frac{\partial A_3}{\partial X^2} - \frac{\partial A_2}{\partial X^3},$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_2 = \frac{\partial A_1}{\partial X^3} - \frac{\partial A_3}{\partial X^1},$$

$$(\vec{\nabla} \times \vec{A})_3 = \frac{\partial A_2}{\partial X^1} - \frac{\partial A_1}{\partial X^2}.$$

Оператор ротора имеет ту же алгебраическую форму, что и векторное произведение, которое мы для справки здесь воспроизводим. Компоненты $\vec{U} \times \vec{V}$:

$$(\vec{U} \times \vec{V})_x = U_y V_z - U_z V_y,$$

$$(\vec{U} \times \vec{V})_y = U_z V_x - U_x V_z,$$

$$(\vec{U} \times \vec{V})_z = U_x V_y - U_y V_x.$$

В записи с числовыми индексами получается:

$$(\vec{U} \times \vec{V})_1 = U_2 V_3 - U_3 V_2,$$

$$(\vec{U} \times \vec{V})_2 = U_3 V_1 - U_1 V_3,$$

$$(\vec{U} \times \vec{V})_3 = U_1 V_2 - U_2 V_1.$$

Б.5. Лапласиан

Лапласиан есть дивергенция градиента. Эта операция применяется к дважды дифференцируемой скалярной функции S и в результате дает скаляр. Символически лапласиан определяется как

$$\nabla^2 = \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla}.$$

Возвращаясь к уравнению (Б.1), можно превратить это в

$$\nabla^2 = \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}} \right),$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

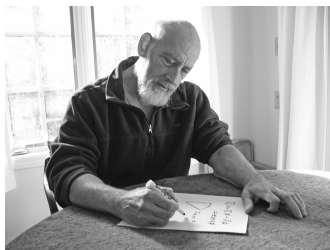
Если применить ∇^2 к скалярной функции S , то получится

$$\nabla^2 S = \frac{\partial^2 S}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 S}{\partial z^2}.$$

Значение $\nabla^2 S$ в некоторой точке дает информацию о том, каково значение S в этой точке по сравнению со средним значением S по окружающим соседним точкам. Если в точке p $\nabla^2 S > 0$, то значение S в этой точке меньше, чем среднее значение S по всем окрестным точкам.

Мы обычно записываем оператор ∇^2 без стрелки сверху, так как этот оператор действует на скаляр и результатом операции является другой скаляр. Существует и векторная версия оператора Лапласа, записываемая со стрелкой; компоненты этого оператора равны

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = (\nabla^2 A_x, \nabla^2 A_y, \nabla^2 A_z).$$



Леонард Сасскинд — профессор теоретической физики в Стэнфордском университете (эту позицию ранее занимал Феликс Блох), автор многих книг, в том числе *«Квантовая механика»* (в соавторстве с Артом Фридманом) и *«Теоретический минимум»* (в соавторстве с Джорджем Грабовски). Живет в Пало Альто, Калифорния.



Арт Фридман — консультант по обработке данных, автор книги *«Квантовая механика»* (в соавторстве с Леонардом Сасскиндом). Вечный студент-физик. Живет в Мэрфизе, Калифорния.

Алфавитный указатель

3-вектор 106, 113, 153, 225, 300,
304, 313, 339

4-вектор 96, 97, 98, 104, 125, 153,
159, 160, 162, 163, 164, 192, 193,
194, 198, 200, 201, 208, 228, 230,
232, 235, 237, 247, 260, 262, 313,
339, 393, 396

4-скорость 97, 98, 99, 104, 105, 153,
162, 281

А

ампер 219

Ампер 326, 334

антисимметричный тензор 243,
244, 313

атом 131, 132, 212, 413, 417

Б

безмассовые частицы 128

близкодействие 270

Бор 414

В

векторное поле 135, 319, 323, 324,
409

векторный потенциал 246, 258,
263, 274, 280, 294, 383, 390, 409

вектор Пойнтинга 392, 395, 401,
402

верхние индексы 95, 228, 240

волновое уравнение 149, 166, 187,
205, 336, 337, 339

волновое число 340

волны 148, 150, 191, 336, 337, 338,
339, 340, 341, 342, 343, 388, 392,
403

временная компонента 106, 161,
187, 197, 203, 227, 241, 253, 264,
300, 383, 393, 397

временная координата 26, 27, 95

временная производная 297, 306,
316, 383

Г

Галилей 33

гамильтониан 123, 125, 380, 387

гармонический осциллятор 206

гравитационная постоянная 211

гравитационное притяжение 224

греческие индексы 158, 232

Д

дальнодействие 274

действие 113, 114, 115, 144, 183,
272, 273

дельта-функция 184, 186, 189

диагональные компоненты 243

дивергенция 295, 296, 310, 315,
319, 324, 391, 422, 423

Дирак 18, 412, 418

Е

единичная матрица 193, 194, 234, 236

З

закон Ампера 294

закон Кулона 217, 293, 329

закон силы Лоренца 246, 248, 251, 255, 259, 263, 293

закон Эрстеда 334

замедление времени 17

заряд 179, 218, 219, 220, 225, 245, 248, 253, 255, 264, 269, 285, 287, 288, 292, 299, 303, 305, 306, 307, 308, 309, 312, 325, 326, 328, 329, 393, 406, 407, 408, 411, 412, 415, 418, 419

И

инвариант 75, 79, 80, 98, 107, 164, 168

инвариантность 76, 77, 116, 151, 259, 271, 274, 275, 276, 282, 283, 312, 382, 399

индекс суммирования 157, 228, 253, 255, 257, 289

интеграл действия 115, 118, 138, 142, 168, 177, 180, 181, 182, 250

ИСО 28, 29, 33, 35

К

калибровка Лоренца 384

калибровочная инвариантность 270, 271, 274, 283, 399

канонический импульс 251, 386

квантовая механика 5, 21, 412

кинетическая энергия 99, 137, 381, 387

классическая механика 21

классическая теория поля 5, 14, 173

ковариантные компоненты 201

ковариантный вектор 201, 230

ковариантный индекс 253, 312

контравариантные компоненты 228, 240

контравариантный индекс 228, 233

конус Минковского 77, 78

кулон 216, 219, 220, 221

Кулон 326

кулоновская калибровка 384

кулоновское поле 176, 408

Л

лагранжиан 115, 118, 119, 123, 124, 137, 142, 143, 146, 163, 164, 165, 166, 167, 168, 169, 171, 175, 176, 180, 181, 186, 187, 202, 205, 206, 226, 247, 248, 249, 250, 262, 273, 274, 277, 347, 359, 368, 381, 382, 385, 387

лапласиан 324, 423

латинские индексы 251, 260

Лоренц 54, 84, 85

лоренцево сокращение 313

М

магнит 285, 286, 287, 332, 409

магнитное поле 225, 246, 269, 285, 286, 287, 291, 292, 295, 297, 300, 330, 332, 334, 341, 387, 407, 409, 413, 414, 415

магнитный монополь 296, 406,
407, 418

Майкельсон 19, 22

Максвелл 18, 19, 326, 335, 337,
338, 339

масса 100, 115, 122, 127, 130, 132,
168, 170, 171, 216, 245, 256

мерные рейки 30, 58

Минковский 24, 48, 76, 77, 81

мировая линия 40, 47, 89

момент импульса 414, 416

Морли 19, 22, 83

Н

наблюдатель 33, 40, 42, 88, 117,
286

начало отсчета 25, 26, 41, 42, 44,
340

нейтрино 130, 419

Нётер 371, 388, 392

нётеровский импульс 369

нижние индексы 96, 191, 199, 227,
231

Ньютон 19, 29, 33, 39, 47, 90, 106,
107, 217, 256

О

общая теория относительности 17,
21, 271

одновременность 17, 34, 35, 39, 47

опыт Майкельсона — Морли 85

относительное движение 57, 59

П

парадокс близнецов 17

Планк 18, 214, 215

плотность заряда 183, 189, 300,
301, 312, 325

плотность импульса 390, 392, 395,
402, 403

плотность тока 299, 300, 304, 393

позитроний 131

поле Хиггса 170

потенциальная энергия 137

поток 221, 305, 308, 332, 393, 395,
397, 398, 402, 411, 414, 415, 417,
418

правило правой руки 321, 322

правило суммирования Эйнштейна 155

преобразования Лоренца 53, 54,
55, 56, 57, 59, 74, 84, 88, 89, 96,
120, 125, 153, 156, 166, 200,
222, 224, 231, 234, 236, 266,
274, 289

принцип действия 113, 135, 140,
174, 282, 300, 338, 408

принцип наименьшего действия
101, 135, 140, 392

принцип неопределенности Гейзенберга 215

производные 118, 144, 145, 146,
149, 154, 156, 164, 165, 166, 167,
201, 206, 207, 209, 229, 258, 273,
276, 295, 297, 316, 336, 381, 382,
394, 395

пространственно-временная диаграмма 45

пространственно-временная траектория 182

пространственно-временное расстояние 73

пространственно-временной интервал 80, 92, 94, 95, 102, 193

пространственно-временные компоненты 402

пространственноподобные интервалы 101

пространственные компоненты 97, 107, 192, 197, 251, 260, 268, 311, 314, 384, 385, 398

пространство-время 49, 134, 135, 136, 161

пространство Минковского 73

Пуанкаре 54

Р

равномерное движение 59, 148

расстояние 36, 38, 68, 69, 72, 73, 77, 80, 81, 82, 95, 102, 162, 218, 220, 306, 329, 382, 388, 411

релятивистские единицы 37, 42, 45

релятивистский импульс 122

С

световая секунда 38

световой импульс 36, 77

световой конус 76, 77, 81

световой луч 30, 31, 32, 33, 36, 38, 93

световой сигнал 36, 41, 82, 83

свободный индекс 232, 255, 261

сила Лоренца 285, 286, 288

симметричный тензор 243

симметрия 50, 55, 262, 319, 388, 396

система координат 25, 26

система отсчета 19, 26, 39

скалярное произведение 199, 250, 265, 319, 322

скорость света 22, 29, 33, 34, 36, 37, 38, 42, 45, 47, 51, 55, 56, 58, 111, 129, 130, 172, 177, 178, 211, 214, 245, 265, 327, 335, 382, 402

собственное время 76, 80, 92, 94, 95, 98, 116, 150, 160, 192, 193

события 27, 37, 41, 49, 54, 81, 82, 83, 103, 104, 272

соленоид 406, 409, 410, 411, 412, 413, 414, 415, 417

солнечный парус 403

сохранение заряда 305, 306, 307, 393

сохранение энергии 398

специальная теория относительности 5, 21

степени свободы 134

Т

тензорное уравнение 259

тензор поля 266, 269, 281, 288

тензоры 202, 226, 237, 239, 242, 243, 266, 267, 289

тензор энергии-импульса 400, 403

теорема Гаусса 318, 320, 325

теорема Стокса 318, 322

теория поля 14, 17, 21, 133, 136, 164, 167, 403, 418

теория Янга — Миллса 271

тождество Бьянки 314, 316

У

угловой момент 413, 415, 416, 417

универсальное время 29, 33

уравнение Клейна — Гордона 207, 209

уравнение непрерывности 310,
311, 312, 325, 395, 398

уравнение Пуассона 189

уравнение Шрёдингера 207

уравнение Эйлера — Лагранжа
138, 144, 145, 172, 174, 186, 253

уравнения движения 138, 143, 146,
148, 151, 167, 175, 177, 178, 186,
187, 204, 206, 207, 259, 261, 262,
271, 272, 274, 275, 276, 277, 278,
280, 282

уравнения Максвелла 19, 54, 83,
84, 293, 294, 298, 305, 311, 330,
335, 338, 408

ускорение 100, 139, 187, 216, 217,
245, 253, 255, 256, 259, 260, 264

Ф

Фалес Милетский 223

Фарадей 18, 317, 326, 332

фотон 132, 214

Франклин 326

функция источника 188

Ч

часы 26, 27, 30, 34, 35, 36, 41, 45, 58

число Авогадро 211

Э

ЭДС 288, 330, 331, 332, 334, 415

Эйнштейн 20, 29, 33, 35, 50, 51, 53,
58, 77, 83, 84, 85, 100, 120, 155,
285, 287, 292

электрические силы 224

электрический заряд 419

электрический монополь 407

электрический ток 19, 286, 334

электрическое поле 19, 225, 244,
245, 253, 269, 287, 288, 296, 328,
329, 341, 384, 387, 396, 407, 415,
416

электродинамика 271

электромагнетизм 392

электромагнитное поле 176, 258

электрон 112, 127, 220, 285, 286,
287, 288, 292, 293, 413, 414, 415

электростатический потенциал
189

энергия 99, 119, 123, 125, 126, 127,
128, 130, 131, 132, 137, 143, 146,
164, 178, 179, 189, 206, 264, 265,
380, 381, 382, 387, 392, 393, 396,
403, 413

Эрстед 326

Л. Сасскинд, А. Фридман

Теоретический минимум. Специальная теория относительности и классическая теория поля

Перевел с английского *К. Л. Масленников*, ученый секретарь
по международным связям ГАО РАН, кандидат физ.-мат. наук,
старший научный сотрудник Пулковской обсерватории РАН

Заведующая редакцией	<i>Ю. Сергиенко</i>
Ведущий редактор	<i>К. Тульцева</i>
Научный редактор	<i>А. Сергеев</i>
Художественный редактор	<i>В. Мостипан</i>
Корректоры	<i>М. Молчанова, Г. Шкатова</i>
Верстка	<i>Л. Егорова</i>

Изготовлено в России. Изготовитель: ООО «Прогресс книга».

Место нахождения и фактический адрес: 194044, Россия, г. Санкт-Петербург,
Б. Сампсониевский пр., д. 29А, пом. 52. Тел.: +78127037373.

Дата изготовления: 12.2020. Наименование: книжная продукция. Срок годности: не ограничен.

Налоговая льгота — общероссийский классификатор продукции ОК 034-2014, 58.11.12 —

Книги печатные профессиональные, технические и научные.

Импортер в Беларусь: ООО «ПИТЕР М», 220020, РБ, г. Минск, ул. Тимирязева, д. 121/3, к. 214,
тел./факс: 208 80 01.

Подписано в печать 11.12.20. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Усл. п. л. 27,000.

Тираж 2000. Заказ 0000.



Роджер Пенроуз

МОДА, ВЕРА, ФАНТАЗИЯ И НОВАЯ ФИЗИКА ВСЕЛЕННОЙ

Можно ли говорить о моде, вере или фантазии в фундаментальной науке?

Вселенной не интересна человеческая мода. Науку невозможно трактовать как веру, ведь научные постулаты постоянно подвергаются строгой экспериментальной проверке и отбрасываются, как только догма начинает конфликтовать с объективной реальностью. А фантазия вообще пренебрегает и фактами, и логикой. Тем не менее великий Роджер Пенроуз не желает полностью отвергать эти феномены, ведь научная мода может оказаться двигателем прогресса, вера появляется, когда теория подтверждается реальными экспериментами, а без полета фантазии не постичь все странности нашей Вселенной.

В главе «Мода» вы узнаете о теории струн — самой модной теории последних десятилетий. «Вера» посвящена догматам, на которых стоит квантовая механика. А «Фантазия» касается ни много ни мало — теорий происхождения известной нам Вселенной.

КУПИТЬ