А.А. Локшин
Е.А. Иванова

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СМЕСЬ

МАКС Пресс

МОСКВА – 2015

А.А. Локшин, Е.А. Иванова

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СМЕСЬ

Пособие

2-е издание, исправленное и дополненное

МАКС ПРЕСС

МОСКВА – 2015

УДК 51
ББК 22.1
Л73

Локшин А.А., Иванова Е.А.

Л73 **Математическая смесь:** Пособие. – М.: МАКС Пресс, 2015. – 2-е изд., испр. и доп. – 112 с.: ил.
ISBN 978-5-317-04878-5

Пособие адресовано школьным учителям, а также студентам педвузов и педагогических колледжей, изучающим математику. Рассмотрены вопросы моделирования при решении текстовых задач, а также избранные авторами темы из комбинаторики, логики, алгебры, геометрии и теории чисел. По сравнению с первым изданием, вышедшим в 2014 году, книжка существенно расширена: добавлены новые разделы, посвященные математическим играм, а также методу «диагональной индукции». Кроме того, исправлены замеченные неточности и опечатки.

УДК 51
ББК 22.1

ISBN 978-5-317-04878-5

Учебное издание

ЛОКШИН Александр Александрович
ИВАНОВА Елена Алексеевна

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СМЕСЬ

Пособие

2-е издание, исправленное и дополненное

Подготовка оригинал-макета:
Издательство «МАКС Пресс»
Главный редактор: *Е.М. Бугачева*
Компьютерная верстка: *Н.С. Давыдова*

В книге использованы рисунки А.А. Локшина

Подписано в печать 09.12.2014 г.
Формат 60x90 1/16. Усл.печ.л. 7,0. Тираж 50 экз. Заказ 288.

Издательство ООО «МАКС Пресс»
Лицензия ИД N 00510 от 01.12.99 г.

119992, ГСП-2, Москва, Ленинские горы,
МГУ им. М.В. Ломоносова, 2-й учебный корпус, 527 к.
Тел.8(495) 939-3890/91.
Тел./Факс 8(495) 939-3891.

СОДЕРЖАНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книжке рассмотрены некоторые вопросы из теории множеств, логики, комбинаторики и элементарной геометрии, недостаточно освещенные в имеющейся литературе и представляющие, на взгляд авторов, интерес для студентов techинститутов (в особенности, для студентов факультетов начальных классов), школьников-старшеклассников и учителей математики.

Авторы

1. ПАРАДОКС МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ[1]

Метод математической индукции является, как известно, могучим инструментом, позволяющим доказывать многие математические утверждения, не поддающиеся иным методам. Соль метода в том, что он позволяет, так сказать, «опереться на недоказанное».

В простейшем случае действие метода выглядит так. Пусть имеется некоторое утверждение $A(n)$, зависящее от натурального номера n ($n = 1,2,\ldots$). Тогда если $A(1)$ истинно и если при каждом натуральном n из истинности $A(n)$ следует истинность $A(n+1)$, то $A(n)$ истинно при всех натуральных n.

Приведенная выше распространенная формулировка метода математической индукции может быть кратко записана, с использованием общепринятых математических терминов, в следующем виде:

$$\frac{\begin{array}{c}A(1)\\(\forall n \in N)\,A(n) \to A(n+1)\end{array}}{(\forall n \in N)\,A(n)}. \qquad (1.1)$$

Здесь формулы над чертой – так называемые *посылки*, истинность которых мы должны предварительно установить, формула под чертой – *вывод*, истинность которого обеспечивается истинностью посылок; N обозначает множество натуральных чисел.

Парадокс, однако, заключается в том, что, «применяя математическую индукцию», мы пользуемся не методом (1.1), а другими соображениями.

Действительно, посмотрим, как фактически проводится доказательство «по индукции». Вначале устанавливается **База индукции** – доказывается справедливость $A(1)$, и пока мы, как будто, действуем в согласии со схемой (1.1). Однако наши следующие действия представляют собой мыслительные операции, в корне отличные от второй строчки в схеме (1.1). Фактически, мы рассуждаем так:

«Предположим, что $A(n)$ истинно при *некотором произвольном* n **(Предположение индукции)**. Докажем, что тогда $A(n+1)$ тоже истинно **(Шаг индукции)**».

---

[1] См. [1].

Без слова «некоторый» здесь обойтись невозможно, так как в противном случае наше предположение звучало бы так:

«Предположим, что $A(n)$ истинно при произвольном n», т.е. мы предположили бы то, что требуется доказать! Без слова «произвольный», очевидно, тоже невозможно обойтись. В итоге вместо (1.1) мы пользуемся на самом деле следующей (вполне общепринятой) схемой:

$$\frac{A\,(1) \qquad A(n)\ \text{истинно при некотором произвольном}\ n \to A(n+1)\ \text{истинно}}{(\forall n \in N)\,A(n)} \qquad (1.2)$$

Замечание 1. Заметим, что понятие «некоторый произвольный» не удается выразить с помощью математических кванторов $\forall$ (для любого) и $\exists$ (существует).

Замечание 2. В следующем параграфе мы постараемся прояснить возникающую здесь ситуацию. Заодно мы увидим, что в схеме (1.2) пропущен, но используется «по умолчанию» еще один этап – *обобщение* и, по сути, объединим схемы (1.1) и (1.2).

О ПРОИЗВОЛЬНОМ ВЫБОРЕ, ОБОБЩЕНИИ И ПОНИМАНИИ

Существует ли на самом деле «произвольный выбор»?

Возможно ли раз и навсегда избавиться в проводимых доказательствах от «произвольного выбора», заменив его «случайным выбором» (или выбором, основанным на аксиоме выбора) и использованием общих свойств элементов множества, откуда выбираются упомянутые элементы?

Посмотрим, так ли это. Напомним вначале, что такое содержательная аксиоматическая теория. Это такая математическая теория, в которой логические выводы из аксиом делаются на основе общепринятой логики, восходящей к Аристотелю. Приведем теперь две аксиомы, используемые в содержательной аксиоматической теории вещественных чисел:

Аксиома № 1.

$$(\forall x, y \in R)\, x + y = y + x \qquad (1.3)$$

(здесь R обозначает множество вещественных чисел).

Аксиома № 2.

$$\left(\forall x, y, z \in R\right)(x + y) + z = x + (y + z). \qquad (1.4)$$

Теперь рассмотрим следующее несложное утверждение.

Теорема.

$$\left(\forall x, y, z \in R\right)(x + y) + z = (z + x) + y. \qquad (1.5)$$

Мы приведем два различных доказательства этой теоремы, сравнивая которые, попытаемся разобраться в том, что такое «произвольный выбор».

Доказательство № 1. (Пользуемся понятием «произвольно выбранного элемента».) Из аксиом (1.3) и (1.4), понимая их содержание, последовательно заключаем, что для *произвольно взятых x, y, z*:

$$(x + y) + z = z + (x + y) = (z + x) + y.$$

Так как *x, y, z* были взяты *произвольными*, заключаем, что отсюда следует утверждение теоремы.

Подчеркнем, что несмотря на то, что операция «произвольного выбора» так и не была определена, доказательство № 1 воспринимается как полностью *понятное.*

Доказательство № 2 (См. дискуссию в [26], сообщение Vladimir'a iz Chikago). Понятием «произвольного выбора» не пользуемся. Рассуждаем так: берем три случайно выбранных числа из множества *R* (например, числа 1, 2 и 3), пользуемся *только свойствами, указанными в аксиомах* и получаем соотношение

$$(1 + 2) + 3 = (3 + 1) + 2. \qquad (1.6)$$

Понимаем, что полученный результат имеет **общий** характер, т.е. для всех остальных троек чисел должны иметь место **аналогичные** соотношения и тем самым верна доказываемая теорема.

Замечание 1. Итак, выбор «произвольных элементов из *R*» (см. доказательство № 1) отсутствует в доказательстве № 2, которое состоит из последовательных операций:

а) случайный выбор элементов из *R*;

б) использование аксиом (1.3) и (1.4) (т.е. только общих свойств всех элементов из *R*);

в) использование **неформально осознаваемой операции обобщения** (включающей в себя – в данной задаче – охват мысленным взором одновременных однотипных действий со всеми элементами из R). Этот мысленный охват оказывается возможен потому, что действие, о котором идет речь, ранее было применено к конкретным элементам (в доказательстве № 2 – к числам 1, 2 и 3) и тем самым была «проторена дорога» нашему воображению.

При этом понимание смысла всех действий, производимых в процессе доказательства, сохраняется.

Замечание 2. По-видимому, для устранения неопределенности термина «выбор произвольного элемента» этот термин можно понимать в духе пунктов а) – в) Замечания 1. (При этом встречавшийся нам в предыдущем параграфе термин «выбор некоторого произвольного элемента» естественным образом может быть истолкован в духе пунктов а) – б) Замечания 1.)

Замечание 3. Похоже, что мы имеем дело с закономерностью: *без ущерба для понимания математического содержания достаточно богатой теории обойтись без неформально осознаваемой операции обобщения невозможно.*

Замечание 4. В методе математической индукции упомянутое неформально осознаваемое обобщение, очевидно, присутствует в неявном виде. Нетрудно видеть, что метод индукции – если без пропусков следовать за пониманием – состоит из двух умозаключений, первое из которых имеет вид

$$\frac{A(n)\ \text{истинно при некотором произвольном}\ n \to A(n+1)\ \text{истинно}}{(\forall n \in N)A(n) \to A(n+1)},$$

а второе – совпадает с (1.1).

2. ОТКУДА МЫ ЗНАЕМ, ЧТО ТАКОЕ ТОЧКА?

Обсудим теперь один из интереснейших вопросов, лежащих на стыке математики и психологии. Выше мы уже обсуждали операцию *выбора произвольного элемента.* Эта не имеющая формального определения операция кажется совершенно естественной и доступной нашему пониманию. Пытаясь разобраться в природе этой операции, мы выяснили, что она – по своим результатам – эквивалентна *случайному выбору* и последующему *неформальному обобщению*.

Но не будем останавливаться на достигнутом. Зададим себе вопрос:

– Отчего неформальное обобщение, о котором шла речь выше, правомерно?

Ответ, доступный нашему пониманию, будет примерно таким:

– Это нетрудно объяснить. Достаточно рассмотреть произвольно взятый элемент…

Мы очевидным образом столкнулись с порочным кругом. «Произвольный выбор» объяснили при помощи «неформального обобщения», а правомерность «неформального обобщения» обосновали при помощи «произвольного выбора».

Похоже, что представление о возможности осуществить «произвольный выбор» является для человека врожденным. (Естественно предположить, что тем самым врожденной должна оказаться и способность к неформальному обобщению.) К такому выводу нас подталкивают следующие обстоятельства.

Процитируем вначале учебник по высшей геометрии [3, с. 205]: ***«…точки, прямые и плоскости как образы нашего геометрического воображения не поддаются математическому описанию».***

– Как же так? – может воскликнуть читатель, искушенный в математике. – А как же аксиомы Гильберта или аксиомы Клейна? Наконец, аксиомы Евклида? Разве они не определяют, что такое точка, прямая и плоскость?

– Конечно, определяют, – ответим мы. – Но только в некоем абстрактном пространстве, а не в пространстве наших зрительных образов. То есть определяют, но не то, что нужно…

Иными словами, с помощью логики, опираясь на информацию, поступающую от органов чувств, сформировать зрительный образ *точки*, по-видимому, невозможно.

Но откуда же тогда взялся этот мысленный зрительный образ?

Процитируем в этой связи статью Александра Маркова («Элементы», 21.06.10):

«Ключевую роль в пространственном мышлении у млекопитающих играют три группы нейронов: “клетки места”, “клетки направления” и “клетки координатной сетки”. Две команды исследователей независимо друг от друга обнаружили, что у маленьких крысят, впервые в жизни отправившихся на прогулку, уже есть нормально работающие клетки первых двух типов, и только клетки третьего типа появляются немного позже. По-видимому, это означает, что восприятие пространства у млекопитающих в значительной мере является врожденным».

Любопытно сравнить результаты этих опытов с методикой обучения младших школьников понятию «точка» (сообщено авторам Н.Ю. Лукановой):

Если просто нарисовать на листе бумаги точку фломастером или ручкой, то у ребенка может создаться впечатление, что точка – это небольшая клякса, поэтому добавляют: «*Точка не имеет толщины*, *точка – это место*». Замечательно, что дети легко понимают, что именно имеется в виду.

Приведем теперь еще одну цитату из вышеупомянутой статьи А. Маркова:

«…известно, что основные нейрологические механизмы пространственного восприятия у людей и крыс примерно одинаковы, поэтому результаты этих исследований почти наверняка приложимы к людям».

Однако, если допустить, что представление о точке является для человека врожденным, то, похоже, приходится признать, что врожденным является и (неявное) представление об осуществимости «произвольного выбора». Действительно, в этом случае врожденным должно быть и представление об окружающем пространстве как о континууме, состоящем из точек. Но что значит добраться из точки A в точку B по пути AB? Это значит, что какова бы ни была *произвольно взятая* точка на этом пути, в ней придется побывать…

Замечание 1. Попробуем выяснить, как обстоят дела с обычным (количественным) натуральным числом – неужели и оно опирается на понятие «произвольный выбор»? На наш взгляд, ответ на этот вопрос, как ни странно, положителен. Действительно, чтобы определить, например, (количественное) число «пять», нам нужно мысленно соединить тоненькими ниточками пальцы руки с рассматриваемым набором предметов, устанавливая таким способом взаимно-однозначное соответствие между пальцами и этими предметами. Но эта процедура невозможна без представления о том, что ни одна мысленно проведенная нить не должна рваться и мы, путешествуя взглядом вдоль нее, должны побывать в *произвольно взятой точке* этой нити.

Замечание 2. Способность к «произвольному выбору» очевидным образом необходима для распознавания образов (например, если нужно узнать объект, когда он повернут на произвольный угол). Предположение о том, что эта способность является для человека врожденной, а не приобретается с опытом, получила недавно еще одно косвенное подтверждение в серии опытов над новорожденными цыплятами – цыплята продемонстрировали врожденное умение распознавать образы; *см.* http://elementy.ru/news/432084, а также Justin N. Wood. Newborn chickens generate invariant object representations at the onset of visual object experience // *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America*. 2013. *110*(34). doi:10.1073/pnas.1308246110.

Замечание 3. То, что понятие «длина» не является для человека врожденным и формируется у ребенка постепенно, общеизвестно. Интересно, как обстоит с этим дело у медуз и осьминогов?

3. ТЕКСТОВЫЕ ЗАДАЧИ: КАКОЙ МЕТОД ПРЕДПОЧЕСТЬ?

Цель этого параграфа – разобраться в том, при решении *какого именно* класса текстовых задач алгебраический метод должен в начальной школе уступать место арифметическому методу.

С точки зрения педагога арифметический метод хорош тем, что он одновременно активизирует и наглядно-образное мышление ученика, и его логику. Алгебраический метод обычно быстрее ведет к цели, но в значительно меньшей степени нацелен на развитие мышления в широком смысле этого слова.

Решая задачу арифметическим способом, младший школьник, как правило, оперирует именованными числами, что соответствует наиболее развитому у него типу мышления – наглядно-образному.

В то же время решение задач алгебраическим способом минимизирует нагрузку на наглядно-образное мышление ребенка, решение текстовой задачи в основном сводится к оперированию символами. Научить ребенка такому оперированию, безусловно, важно. Однако, здесь имеются «подводные камни». Дело в том, что *при решении некоторых задач, у детей происходит утрата понимания смысла производимых ими математических действий, и задача перестает выполнять свою развивающую функцию, превращается в рутинный «пример».* Рассмотрим в этой связи две задачи, предлагавшиеся третьеклассникам, обучавшимся по системе Л.Г. Петерсон.

Задача А. Мышка и птичка (игрушечные) вместе стоят 10 рублей. 5 мышек и 6 птичек стоят 56 рублей. Сколько стоят мышка и птичка по отдельности?

Решение 1 (арифметическое).

1) Сколько комплектов игрушек (мышка плюс птичка) можно составить из 5 мышек и 6 птичек? – 5 комплектов.

2) Сколько стоят эти 5 комплектов игрушек? $5 \cdot 10 = 50$ (руб.).

3) Сколько птичек останется без мышек? – Одна.

4) Сколько стоит 1 птичка? $56 - 50 = 6$ (руб.)

5) Сколько стоит одна мышка? $10 - 6 = 4$ (руб.)

Ответ: мышка стоит 4 рубля, птичка стоит 6 рублей.

Решение 2 (алгебраическое). Пусть x – цена мышки, y – цена птички. Тогда система из двух уравнений, соответствующая задаче A, должна была бы содержать именованные величины и иметь вид

$$x + y = 10 \text{ (руб.)}, \quad 5x + 6y = 56 \text{ (руб.)}$$

Фактически же, математические преобразования обычно проводят над системой, в которой имена величин опускаются; в данном случае – над системой

$$x + y = 10, \quad 5x + 6y = 56. \qquad (3.1)$$

Умножая первое уравнение системы (3.1) на 5 и вычитая его из второго, получаем $y = 6$, а затем из первого уравнения находим $x = 4$. Теперь в ответе имена величин вспоминают:

Ответ: мышка стоит 4 рубля, птичка стоит 6 рублей.

Заметим, что действия при решении алгебраической системы (3.1), в сущности, те же, что и при решении этой задачи арифметическим способом. Как показывает наш опыт, дети в состоянии объяснить смысл каждого преобразования в процессе решения системы (3.1) на языке наглядных образов. В результате решение, полученное алгебраическим способом, способствует закреплению и упорядочению знаний, служит связующим звеном между наглядно-образным и абстрактным (символьным) мышлением. Рассмотрим теперь другую известную задачу (см., например [5]).

Задача Б. Десять мышек и птичек (птички и мышки настоящие, не игрушечные) съели 56 зерен. Каждая мышка съела 5 зерен, а каждая птичка – 6 зерен. Сколько было мышек и сколько птичек?

Решение (алгебраическое). Пусть x – число мышек, y – число птичек. Составляем соответствующую задаче Б систему уравнений, содержащих именованные величины:
$x + y = 10$ (животных), $5x + 6y = 56$ (зерен). Опуская имена величин, приходим к системе

$$x+y = 10, \quad 5x + 6y = 56. \tag{3.2}$$

Решая ее, получаем: $x = 4$, $y = 6$.

Ответ: 4 мышки, 6 птичек.

Система (3.2) формально совпадает с системой (3.1) и решается тем же способом, что и система (3.1). Однако, как показывает наш опыт, дети, решив сначала задачу А алгебраическим способом и дав своему решению правильное истолкование на языке наглядных образов, затруднялись объяснить смысл аналогичных преобразований системы (3.2). Некоторые говорили так: «Нужно взять пять комплектов животных и вычесть их из 56 зерен…» *Причина затруднений, очевидно, была в том, что уравнения системы* (3.2)*, в отличие от системы* (3.1)*, содержат величины разных наименований.*

На наш взгляд, на начальном этапе обучения область применения алгебраического метода должна быть ограничена текстовыми задачами, решение которых не приводит к системам, содержащим величины разных наименований.

4. МЫСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИ РЕШЕНИИ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

Моделирование «в отрезках», используемое в системе Л.Г. Петерсон, существенно облегчает детям понимание текстовых задач, в значительной степени устраняет случайное манипулирование числовыми данными.

В то же время, у некоторых детей складывается представление о том, что моделирование в отрезках есть универсальный метод, пригодный для решения «всех задач».

Мы ограничимся здесь рассмотрением текстовых задач для начальной школы, не включающим в себя задачи «на движение».

Эти задачи, как правило, сводятся к системе двух уравнений с двумя неизвестными.

Задача 1. В первый день портной сшил несколько костюмов, а во второй день сшил их в три раза больше. Сколько костюмов сшил портной в первый день, если за два дня он сшил их 16?

Решение. Пусть x – количество костюмов, сшитых в первый день, у – количество костюмов, сшитых во второй день. В результате имеем систему из двух уравнений специального вида:

$$y = 3x, \tag{4.1}$$

$$x + y = 16. \tag{4.2}$$

Совершенно очевидно, что алгебраическая процедура решения этой системы в точности соответствует процедуре решения при моделировании «в отрезках» (см. рис. 4.1).

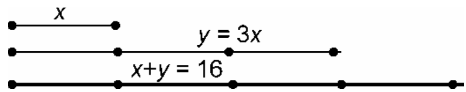


Рис. 4.1

Однако, *научить ребенка мыслить – это, в сущности, научить его строить разнообразные модели.* Наш педагогический опыт показывает, что желательно познакомить детей с задачами, для которых модели «в отрезках» не работают и которые, тем не менее, могут быть решены с помощью несложных и наглядных рассуждений. (Что касается алгебраического подхода к решению текстовых задач, то он, позволяя быстро получить ответ при помощи стандартных операций с символами, не способствует развитию образного и логического мышления.)

Задача 2 (см., например, [5]). Когда на каждую елку село по одному соловью, то один соловей остался без елки. А когда соловьи расселись на елках парами, то одна елка осталась без соловьев. Сколько было елок и сколько было соловьев?

Решение алгебраическое. Пусть x – количество соловьев, y – количество елок. В результате имеем систему из двух уравнений:

$$x = y + 1, \tag{4.3}$$

$$x = (y - 1)\cdot 2. \tag{4.4}$$

Подставляя x из (4.3) в (4.4), получаем

$$y + 1 = 2y - 2, \tag{4.4а}$$

откуда $y = 3$, $x = 4$.

Попробуем теперь решить эту же задачу при помощи «моделирования в отрезках». Соотношение (4.3), конечно, может быть изображено графически; однако, после того как масштаб на рисунке, изображающем соотношение (4.3), выбран, соотношение (4.4) изобразить «в отрезках» уже не удается. (Точно так же без *предварительных алгебраических преобразований* не удается изобразить «в отрезках» и равенство (4.4а).)

Решение арифметическое (основанное на мысленном моделировании).

1. Представим себе ряд из нескольких елок. На каждой сидит по соловью. Один соловей – «лишний», он висит в воздухе рядом с последней елкой – для него не хватило елки.

2. Пересадим «лишнего» соловья на первую елку, на ней теперь два соловья.

3. Пересадим теперь соловья с последней елки на вторую елку. На второй елке теперь тоже два соловья. А на последней елке – ни одного!

4. Никакие елки, кроме первой, второй и последней уже не нужны. Трех елок хватило, чтобы выполнить все условия задачи.

Ответ: три елки, четыре соловья.

В заключение приведем еще одну задачу, также не допускающую моделирование «в отрезках», но легко решаемую при помощи мысленного моделирования.

Задача 3. В школьном саду посадили клены по 16 штук в каждом ряду и столько же лип по 20 штук в каждом ряду, причем рядов получилось на 2 меньше. Во сколько рядов посажены клены?

Решение алгебраическое. Пусть x – количество рядов из кленов, y – количество рядов из лип. Тогда имеем систему:

$$y = x - 2, \tag{4.5}$$

$$16x = 20y. \tag{4.6}$$

Подставляя выражение для y из (4.5) в (4.6), получаем

$$16x = 20(x - 2), \text{ откуда } x = 10.$$

Нетрудно видеть, однако, что (непосредственно, без предварительных алгебраических преобразований) при помощи моделирования «в отрезках» система (4.5), (4.6) не решается.

Решение арифметическое (основанное на мысленном моделировании). Будем пересаживать липы так, чтобы они были посажены такими же рядами, как клены. Для этого выкопаем 4 липы из первого ряда и посадим их в новый ряд за последним рядом лип. Чтобы заполнить первый новый ряд, нужно выкопать по 4 липы из первых четырех старых рядов. Чтобы заполнить второй новый ряд нужно выкопать по 4 липы из следующих четырех старых рядов. Поэтому, посадив липы так же как клены, мы образуем 4 + 4 + 2 рядов.

Ответ: клены были посажены в 10 рядов.

Итак, мы видим, что достаточно обширный класс задач, не поддающийся решению при помощи моделирования «в отрезках», может быть решен арифметическим способом при помощи мысленного моделирования. Этот класс задач, безусловно, должен предшествовать в курсе математики задачам, которые рассчитаны на решение алгебраическим способом.

Замечание. В заключение попробуем охарактеризовать задачи, которые могут быть решены при помощи моделирования «в отрезках».

Прежде всего, это задачи, которые сводятся к системе из двух уравнений с диагональной матрицей (коэффициенты системы предполагаются целочисленными). Иными словами – это системы относительно неизвестных x, y вида

$$x = p, \tag{4.7}$$
$$mx + ny = q. \tag{4.8}$$

Системы вида

$$x = ay, \tag{4.9}$$
$$bx + cy = d, \tag{4.10}$$

(где a, b, c, d – целочисленные коэффициенты) также непосредственно, т.е. без предварительного применения алгебраических преобразований, поддаются решению при помощи моделирования «в отрезках». Обе системы (4.7), (4.8) и (4.9), (4.10) характеризуются тем, что *отрезок, изображающий одно из неизвестных (x или y) может быть выбран с самого начала произвольным образом*.

5. УСОХШИЕ ПРОЦЕНТЫ

В этом параграфе мы разберем еще одну известную текстовую задачу – «на проценты». Алгебраическое решение этой задачи, как правило, вызывает у учеников недоумение и воспринимается ими в известной мере формально.

Задача. В магазин привезли 100 килограммов ягод, влажность которых составляла 99%. Через некоторое время ягоды немного подсохли, и их влажность стала равна 97%. Сколько стали весить ягоды, привезенные в магазин?

Решение. Обозначим через x вес сухого вещества ягод. Имеем из условия:

$$x = 100 - 100 \cdot 0{,}99 = 1 \text{ (кг)}. \tag{5.1}$$

После усушки вес сухого вещества ягод, очевидно, не изменился, поэтому, обозначая через y (общий) вес ягод после усушки, очевидно, приходим ко второму уравнению:

$$\frac{y-x}{y}=0{,}97. \qquad (5.2)$$

Разрешая систему (5.1), (5.2) относительно y, неожиданно получаем:

$$y=33\frac{1}{3}(\text{кг}).$$

Ответ: После усушки ягоды стали весить $y=33\frac{1}{3}$ кг.

Итак, усохнув всего-навсего на 2%, ягоды стали почему-то весить втрое меньше…

Продвинутые ученики, понимают, конечно, в чем тут дело, но остальным полученный ответ кажется очень странным и даже неверным.

Тем самым возникает чисто педагогическая проблема – как изложить решение этой задачи, чтобы ее ответ сделался не странным, а, напротив, очевидным?

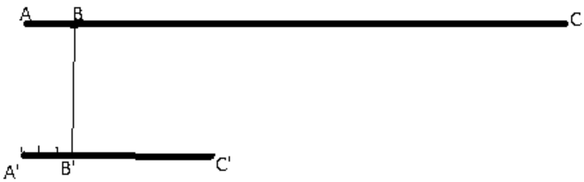


Рис. 5.1

Как показывает опыт, делу может помочь простейшая геометрическая модель (которую, впрочем, редко используют[1]); см. рис. 5.1, где условно принято:

$AC = 100$ (кг), $\qquad A'C' = y$ (кг),

$AB = A'B' = 1$ (кг),

$AB = 1\%\ AC, \qquad A'B' = 3\%\ A'C'.$

Глядя на этот рисунок, даже слабые ученики воспринимают тот факт, что *если отрезок AB составляет сотую долю известно-*

[1] В свое время аналогичная модель обсуждалась с И. Христовой.

го отрезка АС, а отрезок, составляющий сотую долю от $A'C'$, в три раза короче, чем АВ, то:

$A'C' = \frac{1}{3}AC,$ и тем самым $A'C' = \frac{100}{3} = 33\frac{1}{3}$ (кг).

В результате обращения к простейшей геометрической модели, задача оказывается не формально «пройденной», а действительно понятой учениками.

6. ПРАВИЛО ПРОИЗВЕДЕНИЯ В КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧЕ О МАРШРУТАХ

Хорошо известно следующее правило комбинаторики – так называемое *правило произведения.* Если нужно выбрать упорядоченную пару элементов (a,b) и первый элемент пары можно выбрать k способами, а *после того как первый элемент выбран,* второй элемент можно выбрать m способами, то упорядоченную пару, состоящую из этих двух элементов, можно выбрать $k{\cdot}m$ способами.

Доказывается это очень просто. Будем изображать возможный выбор первого элемента пары (a,b) в виде ствола дерева (см. рис. 6.1), а возможный выбор второго элемента пары – в виде ветки, растущей из верхнего конца ствола (см. рис. 6.2).

Тогда выбору упорядоченной пары вида (a,b) будет соответствовать маршрут от «подножия» одного из k деревьев до верхушки ствола и затем по одной из m веток до самого верха. Нетрудно видеть, что всего таких маршрутов будет

$$m + m + \ldots + m = m{\cdot}k \tag{6.1}$$

(слева в (6.1) k слагаемых). Маршруты мы считаем различными, если они не совпадают хотя бы в одной из своих частей.

Возможна ситуация, когда, например, $b_{11} = b_{21}$, но в этом случае нам приходится сравнивать маршруты (a_1,b_{11}) и (a_2,b_{21}), а они различны, ибо $a_1 \neq a_2$ по предположению.

Правило произведения легко обобщается на случай, когда требуется сосчитать число возможных *способов выбрать упорядоченную тройку элементов или, более общо, упорядоченный набор из n* элементов.

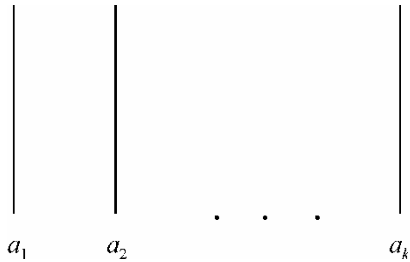


Рис. 6.1

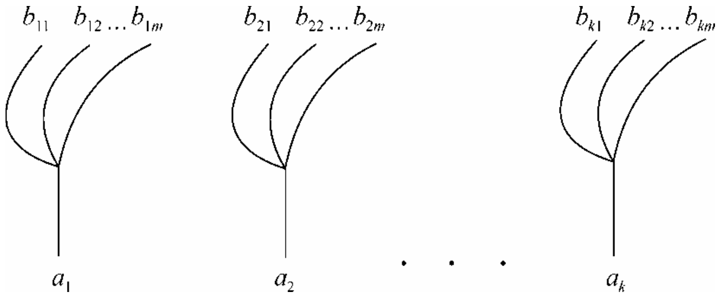


Рис. 6.2

Применим теперь правило произведения к решению простейшей задачи. Пусть города A и B связаны сетью дорог, как показано на рис. 6.3.

Ехать из A в B можно только по направлениям, указанным стрелками (так что мы, по существу, имеем дело с ориентированным графом). Спрашивается, сколькими способами можно доехать из A в B? Нетрудно видеть, что выбор первого участка маршрута (до развилки) можно осуществить пятью способами, после чего выбрать второй участок пути всегда (т.е. при любом выборе первого участка) можно тремя способами. Таким образом, применимо правило произведения, и общее количество способов, которыми можно добраться из A в B, равно $5 \cdot 3 = 15$.

Поставим теперь следующий вопрос: а сколькими способами можно вернуться из B в A? (Разрешается ехать только против направления стрелок на рис. 6.3).

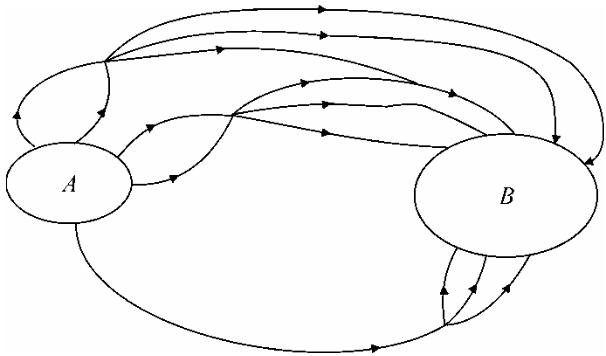


Рис. 6.3

Из рис. 6.3 очевидно, что правило произведения «в обратную сторону» не работает. Тем не менее, понятно, что каждому маршруту из A в B соответствует в точности один маршрут из B в A (мы увидим этот маршрут, если «прокрутим киноленту» в обратном направлении). Значит, вернуться из B в A можно по-прежнему 15-ю способами.

Любопытно, что в задачах о маршрутах возникает ситуация, в которой подсчет числа вариантов по-прежнему можно проводить по правилу произведения, но выбор «упорядоченной пары элементов» уже не столь очевиден, как раньше.

А именно, пусть на этот раз города A и B связаны сетью дорог, изображенной на рис. 6.4.

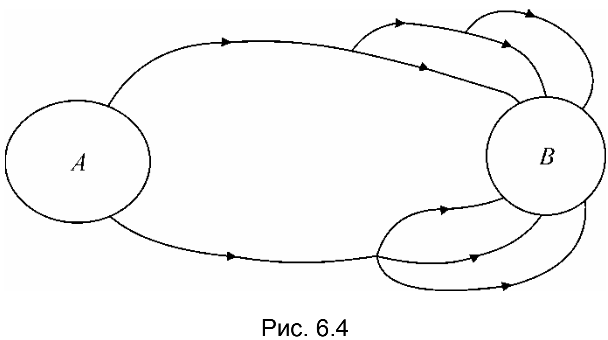


Рис. 6.4

Понятно, что в качестве упорядоченной пары (a, b) здесь следует брать пару: *(малый начальный участок маршрута, малый конечный участок маршрута).*

Выбор такой пары, очевидно, полностью определяет сам маршрут из A в B, и общее количество маршрутов из A в B вычисляется по правилу произведения и равно $2 \cdot 3 = 6$. Число маршрутов из B в A тем самым также равно шести.

Возможны еще более любопытные конфигурации дорог между A и B, к которым по-прежнему применимо правило произведения для подсчета числа возможных маршрутов из A в B (и, соответственно, из B в A). Пример такой конфигурации приведен на рис. 6.5.

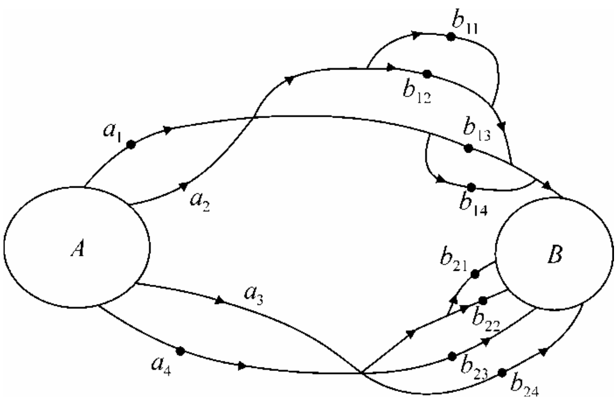


Рис. 6.5

В ситуации, изображенной на рис. 6.5, маршрут из A в B лучше всего задавать упорядоченной парой точек вида (a, b), которую удается подобрать так, что она однозначно определяет выбранный маршрут. Нетрудно видеть, что после того как выбрана первая точка упорядоченной пары (т.е. выбрана точка a_1, a_2,a_3 или a_4) выбор второй точки осуществляется одним из четырех способов. Поэтому в полном соответствии с правилом произведения число различных маршрутов из A в B на рис. 6.5 равно $4 \cdot 4 = 16$.

Рассмотрим еще один пример, когда маршрут из A в B определяется выбором *упорядоченной тройки* точек вида (a, b, c), расположенных на сети дорог (см. рис. 6.6).

Первая координата упомянутой упорядоченной тройки точек может быть выбрана двумя способами (a_1 или a_2). После того как этот выбор сделан, вторая координата рассматриваемой упорядоченной тройки точек может быть выбрана тремя способами (b_1, b_2 или b_3). Наконец, после того как выбраны первая и вторая координаты упорядоченной тройки (a, b, c), третья координата тоже может быть выбрана одним из трех способов. Итак, по правилу произведения, число маршрутов из A в B на рис. 6.6 равно $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$.

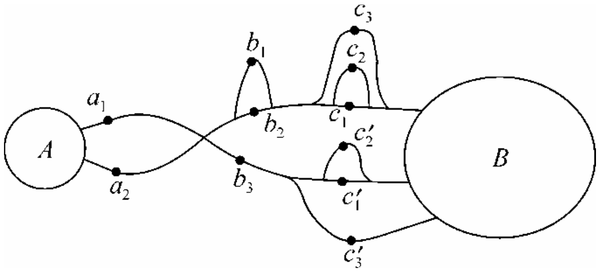


Рис. 6.6

Удобно ввести символ $П_3(A, B)$ для характеристики маршрутов, связывающих «города» A и B на рис. 6.6. Здесь буква П указывает на то, что общее число маршрутов *при движении из A в B* может быть вычислено с помощью правила произведения, индекс «3» указывает на (минимальное) количество точек, с помощью которых мы однозначно задаем маршрут.

Предположим теперь, что города A и B связывают две непересекающиеся системы дорог, относящиеся, например, к классам $П_3(A, B)$ и $П_2(B, A)$ соответственно. Тогда количество маршрутов из A в B, относящихся к первой системе, согласно правилу произведения вычисляется по формуле $k \cdot m \cdot n$, где k, m, n – количества способов выбрать первую, вторую и третью точки, задающие каждый маршрут из A в B. Аналогично, количество маршрутов второй системы вычисляется по формуле $k' \cdot m'$, где k' и m' – количества способов выбрать соответственно первую и вторую точки, задающие маршруты второй системы (при движении из B в A). Поскольку число маршрутов, принадлежащих любой системе, в конечном итоге не зависит от того, в какую сторону направлено движение, заключаем, что в нашей задаче общее число маршрутов из A в B (и тем самым из B в A) будет равно $k \cdot m \cdot n + k' \cdot m'$.

(Заметим, что прямой подсчет числа маршрутов в задачах такого рода может быть весьма трудоемким делом.)

Дальнейшие обобщения предложенного подхода очевидны: рассмотренные системы маршрутов типа $\Pi_k(A, B)$ можно использовать как «строительные блоки» для конструирования более сложных систем.

Замечание. В дальнейшем мы увидим, что правило произведения может успешно применяться в задачах совершенно иного сорта.

7. ОБ ОДНОМ КОМБИНАТОРНОМ СООТНОШЕНИИ

Опыт преподавания комбинаторики говорит о том, что наглядные геометрические соображения (если, конечно, ими удается воспользоваться) значительно облегчают усвоение материала. Например, важнейший закон комбинаторики – правило произведения – обычно иллюстрируют при помощи «деревьев»[1]. Эта же иллюстрация служит заодно вполне надежным доказательством упомянутого правила.

В этом параграфе приводится геометрическая иллюстрация (также являющаяся одновременно доказательством) другого известного комбинаторного закона – рекуррентного соотношения для числа сочетаний из n элементов по k элементов(C_n^k):

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}. \tag{7.1}$$

Рассмотрим прямоугольник размера $m \times k$, составленный из единичных квадратов (см. рис. 7.1). Нас будет интересовать число маршрутов из нижнего левого угла A в правый верхний угол B (*двигаться можно только вверх или вправо по сторонам единичных квадратов*). Это число мы обозначим через $N(m, k)$.

Заметим теперь, что попасть в точку B можно только одним из двух способов: либо из точки C, либо из точки D, следовательно,

$$N(m,k) = N(m-1,k) + N(m,k-1) \tag{7.2}$$

[1] См. предыдущий параграф.

(справедливость этого соотношения геометрически очевидна; при этом существенно то обстоятельство, что двигаться из точки A можно только либо вверх, либо вправо).

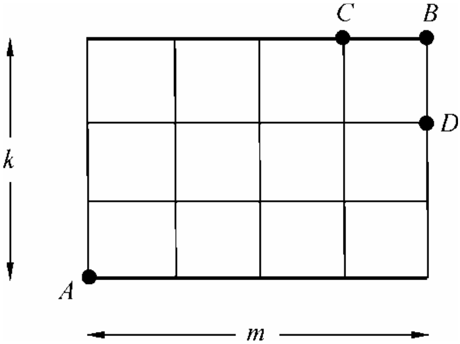


Рис. 7.1

Покажем теперь, что геометрически очевидное соотношение (7.2) это и есть, в сущности, другая (причем более симметричная!) форма записи комбинаторного равенства (7.1).

Действительно, длина любого маршрута из A в B равна в точности $m + k$. Пронумеруем теперь шаги произвольно взятого маршрута. Очевидно, что каждый маршрут полностью характеризуется номерами шагов, направленных вверх (этих шагов всего должно быть k штук). Тем самым каждый маршрут однозначно соответствует выбору k чисел из множества $\{1,2,\ldots, m+k\}$.

Следовательно,

$$N(m,k) = C_{m+k}^{k},$$

и мы можем переписать (2) в виде

$$C_{m+k}^{k} = C_{m+k-1}^{k} + C_{m+k-1}^{k-1}.$$

Полагая здесь $n = m + k$, приходим к искомому равенству (7.1).

8. ЧЕМУ РАВЕН НУЛЬ-ФАКТОРИАЛ?

Объясняя студентам – будущим педагогам начальных классов – начала комбинаторики, неизбежно приходится вводить функцию $n!$ («эн-факториал»). С педагогической точки зрения здесь имеется одно довольно узкое место.

Мы полагаем по определению, что

$$n! = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 \text{ при } n \geq 1, \tag{8.1}$$

а при n = 0 считаем опять же по определению, что

$$0! = 1. \tag{8.2}$$

Соотношение (8.1) обычно не вызывает никаких затруднений – здесь все ясно: мы имеем дело с произведением всех натуральных чисел от n до 1. Но откуда берется соотношение (8.2)? Если не дать разумного, адекватного объяснения, четко указав то место, где действительно используется соглашение (8.2), то весь материал, связанный с биномиальными коэффициентами, будет воспринят отчасти на веру.

И тут у преподавателя, знакомого, естественно, с Гамма-функцией Эйлера, появляется искушение объяснить происхождение формулы (8.2) следующим образом.

При $n > 1$, очевидно, имеем

$$n! = (n-1)! \cdot n. \tag{8.3}$$

Мы хотим сохранить это же самое соотношение при n = 1. Подставляя в (8.3) $n = 1$, получаем

$$1! = 0!\cdot 1, \tag{8.4}$$

откуда и следует (8.2).

Однако соотношение (8.4) нигде в курсе комбинаторики не используется, и в результате остается непонятным, нельзя ли было положить 0! равным какому-нибудь другому числу, отличному от 1.

Выход из положения здесь, на наш взгляд, такой. Соображения (8.3), (8.4) можно (но не обязательно) рассказывать студентам в качестве дополнительного материала, но не стоит давать их непосредственно после формулы (8.2) для ее «оправдания».

Вместо этого, чтобы оправдать соглашение (8.2), на наш взгляд, следует сказать, что для того чтобы формулы, которые вскоре появятся, имели единообразный вид при всех n ≥ 0 (а не только при n ≥ 1) нужно, чтобы выражение

$$\frac{n!}{0!\,n!} \tag{8.5}$$

равнялось 1. (Действительно, как известно, каждое выражение вида $\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ при $0 < k < n$ представляет собой число сочетаний из n элементов по k элементов, т.е. число способов выбрать какие-нибудь k элементов из n данных элементов. При $k = 0$, очевидно, существует только один такой способ – не брать ни одного элемента.)

Поэтому неизбежно принятие соглашения (8.2). В результате мы избегаем неприятного порочного круга в задаче: *«Сколькими способами можно выбрать 0 элементов из n элементов?»*

(Имеется в виду следующий порочный круг: *«Число этих способов равно числу сочетаний из n элементов по 0 элементов, т.е. равно выражению* (8.5). *Подставляя в* (8.5) *определение* (8.2) *для 0!, получаем в ответе 1»*).

9. ЗАДАЧА О СОСТАВЛЕНИИ БУКЕТА

Среди комбинаторных задач имеется серия таких, к которым правило произведения на первый взгляд неприменимо, и оттого эти задачи кажутся начинающему сложными. Однако при помощи простого рассуждения задачи этой серии могут быть переформулированы и затем решены именно с помощью вышеупомянутого правила произведения.

В качестве примера разберем одну из таких задач; прием, которым мы воспользуемся, заслуживает, на наш взгляд, специального рассмотрения на занятиях, посвященных комбинаторике.

Задача 1. Имеется 5 одуванчиков и 19 репейников. Сколькими способами можно составить из них букет, состоящий из трёх одуванчиков и семи репейников?

Решение. Букет, очевидно, представляет собой неупорядоченное множество, элементы которого выбираются из двух других **непересекающихся** неупорядоченных множеств – множества одуванчиков:

$$\text{ОД} = \{\text{ОД}_1, \text{ОД}_2, ..., \text{ОД}_5\} \tag{9.1}$$

и множества репейников:

$$\text{Р} = \{\text{Р}_1, \text{Р}_2, ..., \text{Р}_{19}\}. \tag{9.2}$$

Существенно, однако, то, что *каждому букету Б можно взаимно-однозначным образом сопоставить упорядоченную пару*

$$Б \leftrightarrow (\{\text{три одуванчика}\}; \{\text{семь репейников}\}). \qquad (9.3)$$

Это оказывается возможным только потому, что множества (9.1) и (9.2) не пересекаются!

Здесь, как это обычно принято, мы обозначаем неупорядоченные множества, перечисляя их элементы в *фигурных* скобках, а элементы упорядоченных множеств перечисляем в *круглых* скобках. Таким образом, элементами упорядоченной пары

$$(\{\text{три одуванчика}\}; \{\text{семь репейников}\}) \qquad (9.4)$$

являются два неупорядоченных множества.

Теперь в силу взаимной однозначности соответствия (9.3) заключаем, что численность множества Б (т.е. искомое число различных букетов заданного состава) равна численности множества упорядоченных пар вида (9.4). Применяя правило произведения для нахождения этой численности, получаем ответ.

Ответ: искомое число способов равно $C_5^3 \cdot C_{19}^7$; здесь C_n^k – число сочетаний из n элементов по k элементов.

Соображения вида (9.3) обычно считаются само собой разумеющимися и, как правило, опускаются в разделах, посвященных комбинаторике. Однако, на наш взгляд, проведенное рассуждение заслуживает большего внимания и, быть может, даже специального названия – например, «*обобщенного правила произведения*».

Разобранную выше задачу можно слегка видоизменить, причем изложенный выше прием снова продемонстрирует свою полезность.

Задача 2. Имеется 5 одуванчиков и 19 репейников. Сколькими способами можно составить из них букет, состоящий из десяти цветков и содержащий не менее трех одуванчиков?

Ответ: $C_5^3 \cdot C_{19}^7 + C_5^4 \cdot C_{19}^6 + C_5^5 \cdot C_{19}^5$.

10. О НЕКОТОРЫХ ТРУДНОСТЯХ В ПРЕПОДАВАНИИ ЛОГИКИ

Каждый педагог, ведущий начальный курс логики, сталкивается с необходимостью иллюстрировать логические законы на примерах, взятых из естественного языка. Здесь, однако, преподавателя логики подстерегают трудности, связанные с тем, что язык логики и естественный язык – неизоморфны.

Пример 1. Попробуем проиллюстрировать закон де Моргана

$$\neg (A \wedge B) = \neg A \vee \neg B. \qquad (10.1)$$

(Здесь символы $\neg$, $\wedge$ и $\vee$ обозначают соответственно *отрицание*, *конъюнкцию* и *дизъюнкцию* высказываний.)

Рассмотрим высказывание:

«Я не буду поступать в МГУ и в МПГУ». (10.2)

По вышеприведенному закону де Моргана высказывание (10.2), казалось бы, следует понимать так:

«Я не буду поступать в МГУ <u>или</u> я не буду поступать в МПГУ», т.е.

«Я не буду поступать хотя бы в одно из этих учебных заведений». (10.3)

Однако, в естественном языке фраза (10.2) имеет вполне определенный смысл, не совпадающий с (10.3). А именно, смысл (10.2) таков:

«Я не буду поступать в МГУ <u>и</u> я не буду поступать в МПГУ». (10.2а)

Таким образом, использовать примеры вида (10.2) для иллюстрации упомянутого выше закона де Моргана – нельзя.

Еще более интересная ситуация возникает, когда мы имеем дело с высказываниями, содержащими кванторы общности $\forall$ и существования $\exists$.

Пример 2. Рассмотрим, например, следующий закон отрицания высказываний с квантором общности

$$\neg(\forall x)P(x) = (\exists x)\neg P(x) \qquad (10.4)$$

заметим при этом, что «утверждение»

$$«\neg(\forall x)P(x) = (\forall x)\neg P(x)» \qquad (10.4а)$$

является *грубой ошибкой*.

Попробуем теперь проиллюстрировать закон (10.4), отрицая высказывание:

«Каждый сумеет решить эту задачу». (10.5)

В соответствии с законом (10.4), правильно построенное отрицание имеет вид:

«Найдется человек, который не сумеет решить эту задачу». (10.6)

Однако, вопреки тому, что (10.4а) является грубой ошибкой, высказывание:

«Каждый – не сумеет решить эту задачу» (10.6а)

является вполне допустимым в естественном языке отрицанием высказывания (10.5).

Приведенные выше примеры говорят о том, что иллюстрации к законам логики, взятые из естественного языка, следует подбирать с осторожностью, а сам факт отсутствия изоморфизма между языком логики и естественным языком – следует подчеркнуть в самом начале вводного курса логики.

11. НЕСУЩЕСТВУЮЩИЕ ОБЪЕКТЫ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ЛОГИКА

Выше мы уже говорили о том, что в преподавании начального курса логики имеются своеобразные трудности, связанные с отсутствием изоморфизма между естественным языком и языком, на котором написаны логические формулы.

Сейчас эта тема будет продолжена в несколько ином направлении.

Как хорошо известно, в математике не существует запрета на введение (временных) обозначений для несуществующих объектов. Например, если требуется решить в целых числах уравнение

$$31x + 572= 1000,$$

то через x обозначают искомое (несуществующее) целочисленное решение, и лишь затем убеждаются, что такого решения нет.

Строго говоря, здесь следовало бы рассуждать от противного; однако, даже рассуждая со всей строгостью от противного, мы по-прежнему вынуждены вводить обозначение x для несуществующего объекта.

Здесь мы коснемся этого же вопроса применительно к преподаванию темы «Высказывания» в курсе логики. Разбирая эту тему, преподаватель неизбежно сталкивается с несуществующими объектами, которые ведут себя довольно парадоксальным образом.

Рассмотрим, например, высказывание:

Все Деды-Морозы делают подарки детям. (11.1)

Это высказывание, в соответствии с общепринятыми законами логики, приходится считать **истинным**. Действительно, его отрицание, построенное стандартным образом, выглядит так:

Существует Дед-Мороз, который не делает подарков детям. (11.2)

(Поскольку Дед-Мороз не существует, высказывание (11.2) – ложно, и, значит, высказывание (11.1) истинно.) В высказывании (11.1) мы имеем дело с (пустым) множеством, состоящим из всех Дедов-Морозов; ситуация радикально меняется, если мы имеем дело не с множеством, а с «единичным объектом», которого на самом деле не существует.

Действительно, рассмотрим теперь такое высказывание:

Подарок Ване принес Дед-Мороз. (11.1a)

Однако (11.1a), в отличие от (11.1), очевидно, **ложно**! Дело в том, что (11.1a), в сущности, следует рассматривать не как простое, а как составное высказывание:

Дед-Мороз существует и он принес подарок Ване. (11.1b)

Итак, здесь мы вновь столкнулись с неизоморфностью естественного языка и языка формальной логики, о чем, без сомнения, следует помнить преподавателю.

12. ИМПЛИКАЦИЯ И ВРЕМЯ

Теперь мы обсудим некоторые довольно любопытные вопросы, касающиеся взаимодействия хода логических рассуждений с ходом времени.

Общеизвестно, что никакое минимально содержательное рассуждение в естественном языке не может обойтись без слов «если…, то…» В логике аналогом этого союза является операция *импликация*.

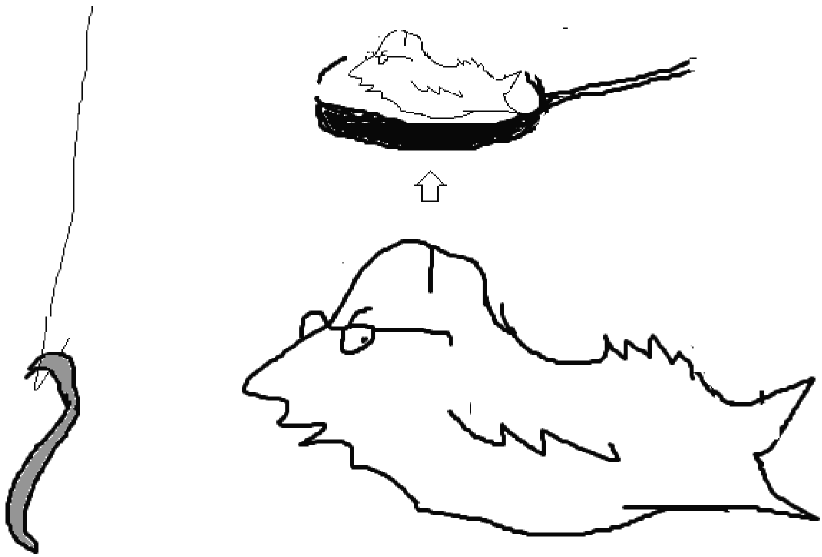


Рис. 12.1. Импликация

Напомним, однако, что в отличие от естественной речи, где союз «если …, то…» применяется к парам высказываний, связанным по смыслу, имитирующая этот союз импликация применима к любой паре высказываний, независимо от того, связаны эти высказывания по смыслу или нет.

В частности, в силу введенного в формальной логике определения, условились считать истинными не только такие высказывания как *«Если данное число делится на 9, то оно делится на 3»,*но и высказывания вида: *«Если дважды два – четыре, то Волга впадает в Каспийское море»,* а также высказывания, составленные из таких пар, в которых первое из двух утверждений (посылка) ложно: *«Если дважды два – пять, то Волга впадает в Каспийское море»; «Если дважды два – пять, то Волга впадает в Аральское море».*

Может показаться, что импликация (обычно обозначаемая стрелкой →) представляет собой безобидное непосредственное обобщение союза «если…, то…». Но тогда логические законы, справедливые для операции →, казалось бы, не должны приводить к противоречию, если пользоваться ими в естественной речи.

Одним из таких законов является *закон контрапозиции*, утверждающий, что при любых истинностных значениях высказываний А и В высказывания $А \to В$ и (не В) $\to$ (не А) равносильны (т.е. одновременно истинны или одновременно ложны).

Рассмотрим теперь общеизвестную истинную импликацию

«Если ветер дует, то деревья качаются». (12.1)

Тогда высказыванием, противоположным к обратному (по отношению к (12.1)), очевидно, будет

«Если деревья не качаются, то ветер не дует». (12.1а)

В полном соответствии с законом контрапозиции это высказывание также оказывается истинным.

Посмотрим теперь, что будет, если мы переформулируем оба утверждения (12.1) и (12.1а) в прошедшем времени. Тогда наши утверждения примут соответственно вид

«Если ветер дул, то деревья качались»; (12.2)

«Если деревья не качались, то ветер не дул». (12.2а)

Вновь оба утверждения оказались истинными (и закон контрапозиции по-прежнему не нарушен).

Сформулируем теперь наши высказывания в будущем времени. Казалось бы, ничто не предвещает «краха» закона контрапозиции. Однако, мы получаем следующий довольно странный результат:

«Если ветер будет дуть, то деревья будут качаться»; (12.3)

«Если деревья не будут качаться, то ветер не будет дуть». (12.3а)

Неужели закон контрапозиции неверен?

Объяснение кажущегося парадокса состоит в следующем. В естественном языке мирно сосуществуют два различных по смыслу союза «если…, то…». Первый из них, который мы назовем *логическим следованием*, фактически утверждает:

«Если А, то одновременно с А имеет место и В».

Второй из упомянутых союзов, который мы назовем *причинным следованием*, в развернутом виде утверждает нечто иное:

«*Если с некоторого момента А, то вскоре после этого имеет место и В».*

Операция →, с которой мы имели дело всюду выше, представляла собой обобщение именно логического следования. Закон контрапозиции, справедливость которого установлена в формальной логике для операции →, вне всякого сомнения, верен и для этого первого смыслового значения союза «если…, то…». При этом использование будущего времени при формулировке высказываний А и В никак не влияет на справедливость закона контрапозиции для операции логического следования. Например, одновременно истинны высказывания:

«Если число, которое ты задумаешь, будет делиться на 9, то оно будет делиться и на 3» и *«Если число, которое ты задумаешь, не будет делиться на 3, то оно не будет делиться и на 9».*

Отличие этой пары высказываний от (12.3), (12.3а) очевидно!

Мы предоставляем читателю возможность самостоятельно разобраться в том, почему к парам высказываний (12.1), (12.1а) и (12.2), (12.2а) закон контрапозиции оказался применим, а также в том, как следует видоизменить этот закон, чтобы он стал применим и к высказываниям в будущем времени, содержащим операцию причинного следования.

Эффект, аналогичный кажущемуся нарушению закона контрапозиции, возникает и для логического союза «тогда и только тогда, когда…». Например, высказывание

«На улице станет светло тогда и только тогда, когда взойдет солнце», (12.4)

очевидно, истинно и имеет, на первый взгляд, структуру $A \leftrightarrow B$. Однако, попытка поменять А и В местами немедленно приводит к абсурду:

«Солнце взойдет тогда и только тогда, когда на улице станет светло». (12.4а)

Любопытно, что высказывания, аналогичные (12.4а), но сформулированные в прошедшем и настоящем времени, попрежнему абсурдны (в отличие от (12.1а) и (12.2а)).

13. ТРИ ЗАДАЧИ

13.1. *Василиса выходит замуж*

Однажды Василиса Премудрая решила выйти замуж. К ней тут же посватались Кощей Бессмертный и Иванушка Дурачок. «Вот вам две задачи, – сказала Василиса, – вы уж как-нибудь разберитесь между собой, кто какую задачу будет решать. А замуж я выйду за того, кто быстрее справится со своей задачей».

А задачи были такие:

1) распилить березовый куб на четыре кубика;
2) распилить железный кубище на восемь кубов.

Пока Иванушка Дурачок чесал затылок, Кощей быстро схватил березовый куб и помчался его распиливать. «Так нечестно!» – закричал Иванушка, но было уже поздно.

За кого же вышла в результате замуж Василиса Премудрая? Какая у нее теперь фамилия?

Рис. 13.1

13.2. *Лабиринт**

Имеется замкнутый лабиринт без выхода и входа, разделенный на одинаковые узкие прямоугольные отсеки. В каждом торце каждого отсека имеются: либо одна дверь, ведущая в соседний отсек, либо две двери, ведущие соответственно в два соседних отсека. В каждом отсеке имеется также лампочка; в некоторых (заранее неизвестно, в каких) отсеках лампочки включены. В одном из отсеков находится человек, который может перемещаться по лабиринту. Никак отмечать свое посещение какого-либо отсека, кроме как при помощи включения/выключения лампочки, он не может. Может ли человек , перемещаясь из отсека в отсек, составить план лабиринта?

13.3. *Телефоны*

На каждом из двух берегов реки имеется по n телефонов. Каждый телефон соединен проводами с какими-то двумя другими телефонами на противоположном берегу.

а) Доказать, что всегда можно так перерезать некоторые провода, что каждый телефон (на обоих берегах) будет соединен в точности с одним телефоном на противоположном берегу.

б) Верно ли утверждение из п. а) в случае, когда некоторые телефоны соединены в точности с тремя телефонами на противоположном берегу, а все остальные – в точности с двумя?

14. ПОЧЕМУ ДЕЛЕНИЕ НЕ ДИСТРИБУТИВНО СЛЕВА?

Выпускники школ обычно прекрасно справляются с «раскрытием скобок» в выражениях, где нужно воспользоваться дистрибутивностью умножения относительно сложения и вычитания:

$$(a \pm b)\cdot c = a\cdot c \pm b\cdot c, \qquad (14.1)$$

$$c\cdot(a \pm b) = c\cdot a \pm c\cdot b \qquad (14.2)$$

* Эта задача – обобщение известной задачи о кольцевом поезде.

и правильно раскрывают скобки в выражениях вида

$$(a \pm b):c = a:c \pm b:c \qquad (14.3)$$

(пользуясь дистрибутивностью *справа* деления относительно сложения и вычитания).

Неприятность, однако, заключается в том, что многие ученики, по аналогии с парой соотношений (14.1), (14.2), «раскрывают скобки» и в формулах вида $c: (a \pm b)$, приравнивая это выражение $c:a \pm c:b$ (что, естественно, является грубой ошибкой). Доказать, что, вообще говоря,

$$c: (a \pm b) \neq c:a \pm c:b \qquad (14.4)$$

очень легко с помощью контрпримера:

$$20: (4+1) = 4, \text{ в то время как } 20:4 + 20:1 = 25.$$

Преподаватель, ограничиваясь подобным контрпримером, предлагает ученикам просто-напросто *запомнить*, что для умножения имеет место двусторонняя дистрибутивность относительно сложения и вычитания, а для деления – справедлива только дистрибутивность справа. Однако запомненное, но не понятое сведение, как показывает наш педагогический опыт, учениками к концу обучения в школе забывается.

Однако причина отличия пары (14.1), (14.2) от (14.3), (14.4) очень проста и заключается в том, что умножение вещественных чисел коммутативно, а деление – нет. Действительно, из (14.1) сразу же вытекает соотношение (14.2) в силу коммутативности умножения; в то же время из (14.3) вывести аналогичное равенство невозможно в силу некоммутативности деления. На наш взгляд, сообщать ученикам это простое соображение совершенно необходимо.

15. ОБОБЩЕННАЯ ДИАГРАММА ЭЙЛЕРА

Как хорошо известно, если имеются одно, два или три свойства (которые обозначим (a), (b), (c)), характеризующие элементы некоторого множества М, то классы, на которые разбиваются элементы множества М, удобно геометрически представлять на диаграмме Эйлера. Если же число свойств, по которым идет классификация элементов множества М, больше трех, то пользоваться диаграммой Эйлера неудобно. В общем случае, когда рассматриваются *n* свойств, справедлива следующая теорема (см. [4]): **максимальное число различных классов, на которые при помощи *n* свойств может быть разбито множество М, равно 2^n.** Этот факт доказывается в [4] из комбинаторных соображений.

Заметим, однако, что если с самого начала использовать не диаграмму Эйлера, а предлагаемую ниже ее модификацию, то сформулированная теорема может быть доказана на рисунке. Рассмотрим вначале случай трех свойств; «места» для элементов множества М, обладающих свойством (*a*), будем условно обводить кружком, «места» для элементов, обладающих свойством (*b*) – квадратом; «места» для элементов со свойством (*c*) – треугольником.

Вначале отметим в большом прямоугольнике, изображающем множество М, место для элементов со свойством (*a*) – для этого, очевидно, достаточно нарисовать *один кружок*. Тем самым элементы из М, в принципе, могут быть разбиты на два класса – на элементы со свойством (*a*) и на элементы без этого свойства (любой из этих классов может быть пуст). Далее, отметим на рисунке места, где в принципе могут располагаться элементы со свойством (*b*): для этого, очевидно, придется нарисовать *два квадрата:* один внутри кружка и еще один вне кружка. Теперь будем отмечать места для элементов со свойством (*c*): нам, очевидно, придется нарисовать *четыре треугольника* (см. рис. 15.1). Каждый раз, добавляя возможные места для элементов со следующим новым свойством, мы рисуем в точности столько новых символов, сколько было построено различных возможных классов на предыдущем шаге. Иными словами, на каждом новом шаге число различных возможных классов, отвечающих нашему разбиению, *удваивается.* Поскольку для одного-единственного свойства (*a*) возможных классов было 2, мы, очевидно, получили наглядное геометрическое доказательство сформулированной выше теоремы.

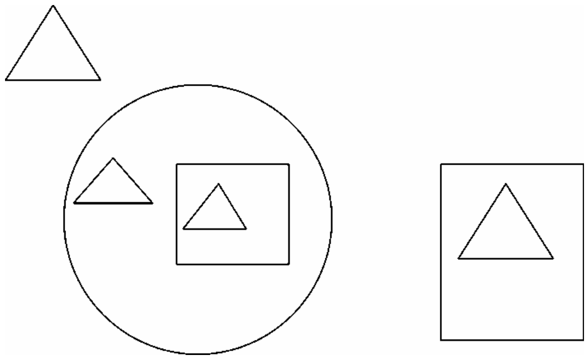


Рис. 15.1

В заключение параграфа приведем задачу, иллюстрирующую связь между классическими диаграммами Эйлера и предложенным их вариантом.

Задача. На острове Буяне расположена пиратская база, где в круглых и прямоугольных башнях содержатся 113 пленников. Круглых башен 7, прямоугольных 10. Три круглые башни – внутри трех прямоугольных, четыре прямоугольные башни – внутри четырех круглых. Семьдесят семь пленников содержатся в круглых башнях, восемьдесят восемь – в прямоугольных. Однажды все 113 пленников сбежали – им удалось перелезть через стены башен. Скольким пленникам пришлось перелезать через две стены?

Пояснение. Башни стоят либо поодиночке, либо парами – одна внутри другой.

16. ЗМЕЙ ГОРЫНЫЧ И ТРАНЗИТИВНОСТЬ

Пусть М – некоторое множество (для определенности – конечное). *Отношением* на множестве М называют закон, который сопоставляет некоторым элементам из М какие-нибудь (другие или те же самые) элементы этого множества.

Таким образом, отношение на множестве – это чрезвычайно общее понятие. Здесь мы напомним лишь некоторые свойства отношений, которые понадобятся для решения приводимой ниже задачи про Змея Горыныча.

Но прежде рассмотрим следующее.

Пример. Пусть M_{10} – это множество из 10 человек, а Q – отношение, заданное на M_{10} следующим образом:

Q: «человек ***a*** – брат человека ***b***».

Тот факт, что «человек ***a*** – брат человека ***b***» мы будем коротко записывать в виде: ***a***Q***b***.

В общем случае, если элемент ***a*** некоторого множества M находится в отношении P с элементом ***b*** этого же множества, мы будем использовать аналогичное обозначение ***a***P***b.***

Изобразим теперь элементы нашего множества M в виде точек на плоскости, обозначив их соответственно ***a,b,c,d,…***(разные буквы обозначают разные элементы).

При этом, если, например, имеет место соотношение ***a***P***b***, из точки ***a*** проведем стрелку к точке ***b*** и с другими точками поступим аналогичным образом. Рисунок, который у нас получится, называется *графом отношения* P.

Упражнение. Как объяснить, что на рис. 16.1, где изображен граф отношения Q, заданного на множестве $M_{10,}$ некоторые стрелки заострены с двух сторон, а некоторые – только с одной?

Определение 1. Скажем, что отношение P (заданное на некотором множестве M) *асимметрично*, если ни для какой пары различных элементов ***a,b*** из множества M не может одновременно быть ***a***P***b*** и ***b***P***a***.

На графе асимметричного отношения, очевидно, никакие стрелки не могут быть заострены с двух сторон.

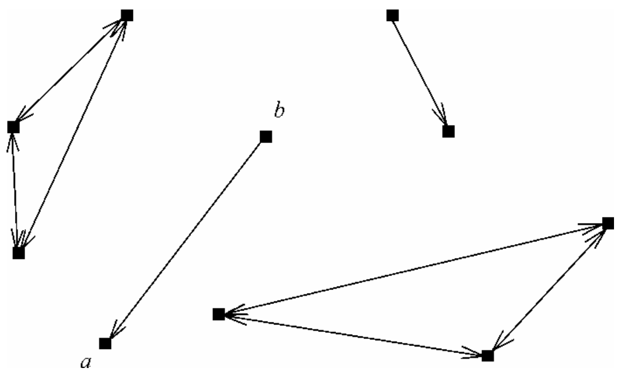


Рис. 16.1

Определение 2. Скажем, что отношение P, заданное на множестве M, *транзитивно*, если для любых трех (не обязательно различных) элементов ***a,b,c*** из M одновременная справедливость ***a***P***b*** и ***b***P***c*** влечет за собой справедливость ***a***P***c***.

На графе транзитивного отношения, таким образом, одновременно с составным путем (вдоль стрелок), идущим из ***a*** в ***c*** через ***b,*** существует стрелка, непосредственно идущая из ***a*** в ***c***.

Определение 3. Отношение P, заданное на множестве M, называется *связным*, если для любых двух различных элементов ***a*, *b*** из M справедливо хотя бы одно из двух соотношений: ***a***P***b***, ***b***P***a.***

Определение 4. Отношение P задает на множестве M *линейный порядок*, если оно асимметрично, транзитивно и связно.

Пример. Пусть множество M состоит из n человек. Очевидно, что линейно упорядочить множество M – это поставить людей, составляющих данное множество, в очередь друг за другом. Заметим, что в силу правила произведения из n людей можно образовать $n!$ различных очередей.

Преподавая тему «Отношения на множестве», авторы столкнулись с некоторым дефицитом интересных, но несложных задач. Предлагаемая ниже задача (встречающаяся в учебниках по теории графов) представляет собой попытку компенсировать упомянутый дефицит.

Задача 1 (см., например, [25])**.** В стране Карабасии имеется N ($N \geq 3$) городов, причем каждый город соединен с каждым дорогой с односторонним движением (направление движения показано стрелкой на специальных дорожных указателях). Однажды ночью в Карабасию прилетел Змей Горыныч и переставил указатели так, что на следующее утро ни один из жителей Карабасии, выехавший из своего города, не смог потом вернуться домой. Как это удалось сделать Змею Горынычу?

Решение. На первый взгляд, задача кажется трудной. Однако решение ее очень простое. Нужно перенумеровать числами от 1 до N все города Карабасии и установить дорожные указатели так, чтобы каждая стрелка указывала направление от города с меньшим номером к городу с большим номером. Тогда, выехав из произвольно взятого города, в него будет невозможно вернуться. (При этом из города с номером N невозможно будет выехать.)

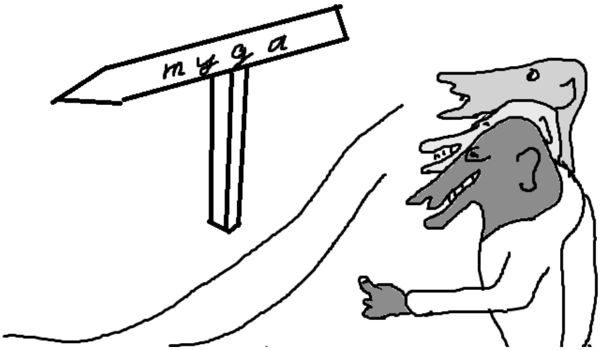


Рис. 16.2

Замечание. Очевидно, что каждую расстановку указателей на дорогах Карабасии можно рассматривать как граф некоторого отношения, заданного на множестве городов этой сказочной страны. Расстановка указателей, о которой говорится в приведенном выше решении, очевидно, задает *транзитивное* отношение на множестве городов Карабасии. Так как между любыми двумя карабасскими городами имеется дорога, это отношение будет *связным*; это отношение будет *асимметричным*, поскольку движение на дорогах Карабасии одностороннее. Таким образом, мы имеем дело с отношением *линейного порядка*, заданным на множестве городов Карабасии**.**

Замечание. Расстановку указателей, сделанную Змеем Горынычем в Карабасии, будем в дальнейшем для краткости называть «*расстановкой Горыныча*». Расстановку дорожных указателей, при которой стрелки указывают направление от города с меньшим номером к городу с большим номером, будем назвать «*N-расстановкой*».

Задача 2. В Карабасии по-прежнему N городов ($N \geq 3$) и каждый город соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Верно ли, что если из каждого города в Карабасии можно выехать, то найдутся хотя бы три города, в которые можно будет вернуться?

Решение. Начнем пролагать наш маршрут, выехав из произвольно взятого города Карабасии (этот город мы обозначим $Г_1$) и будем нумеровать все встретившиеся нам города по мере нашего продвижения. Попав в следующий город $Г_2$, мы в силу условий задачи можем продолжить наш путь, который приведет нас еще в какой-то город $Г_3$ (очевидно, не совпадающий с $Г_1$). И так далее. В результате у нас образуется бесконечная последовательность посещенных нами городов:

$$Г_1, Г_2, \ldots \tag{16.1}$$

Так как общее количество городов в Карабасии конечно, то рано или поздно элементы последовательности (16.1) начнут повторяться. Иными словами, выехав из некоторого города $Г_k$ и посетив затем какое-то количество городов, мы снова оказываемся в городе $Г_k$. Количество городов, посещенных нами прежде, чем мы вернемся в $Г_k$, не может быть меньше двух (так как движение в Карабасии одностороннее). Итак, мы нашли по крайней мере три города, выехав из которых, можно вернуться обратно.

Задача 3. Пусть выполнены условия задачи 1. Сколькими способами Змей Горыныч может осуществить свое намерение?

Решение. Предположим, что Змей Горыныч произвел» расстановку Горыныча». Покажем, что в этом случае все города Карабасии можно перенумеровать так, что каждая дорога будет вести из города с меньшим номером в город с большим номером (т.е. дорожные указатели будут образовывать» N-расстановку»). Действительно, в силу результата задачи 2 найдется город, из которого невозможно выехать. (Нетрудно видеть, что такой город может быть только один!) Дадим этому городу номер N. Теперь мысленно удалим из Карабасии город N вместе со всеми N–1 дорогами, входящими в город N (очевидно, что дорог, исходящих из города N, нет). В оставшейся части Карабасии по-прежнему каждый из N–1 городов соединен с каждым и по-прежнему каждый выехавший из своего города житель не может вернуться обратно. Следовательно, в оставшейся части Карабасии должен найтись единственный город, из которого стало невозможно выехать. Дадим этому городу номер N–1. Продолжая процесс, очевидно, получим такую нумерацию всех городов Карабасии, что дорожные указатели будут образовывать «N-расстановку».

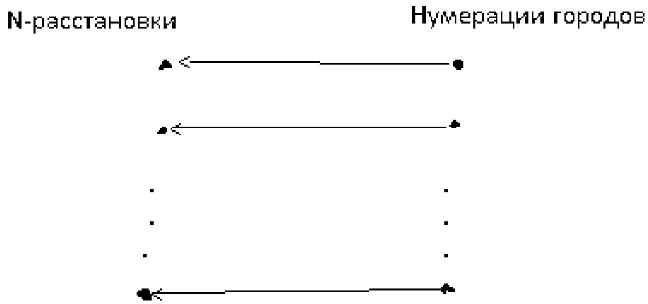


Рис. 16.3

Итак, с одной стороны, каждой нумерации городов Карабасии соответствует единственная «N-расстановка» дорожных указателей, причем, как мы знаем из задачи 1, эта расстановка одновременно является «расстановкой Горыныча». Разным нумерациям городов, очевидно, будут соответствовать разные «N-расстановки» (и, тем самым – разные «расстановки Горыныча»); см. рис 16.3. С другой стороны, как мы только что выяснили, *каждая* «расстановка Горыныча» является «N-расстановкой» для некоторой нумерации городов Карабасии. Это означает, что между нумерациями городов и «расстановками Горыныча» можно установить взаимно-однозначное соответствие. Поэтому существует в точности $N!$ различных «расстановок Горыныча».

Задача 4. В Карабасии по-прежнему N городов ($N \geq 3$) и каждый город соединен с каждым дорогой с односторонним движением. Верно ли, что если в каждый город Карабасии можно въехать, то найдутся хотя бы три города, из которых можно выехать, а потом вернуться обратно?

Указание. Поменять направления на дорожных указателях на противоположные и воспользоваться задачей 2.

17. ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ НА 9 и 11 И МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ФОКУСЫ [7]

Расскажем теперь о трех математических фокусах, основанных на признаке делимости на 9 и его обобщениях. Критерий делимости на 9 звучит так:

Сумма нескольких натуральных чисел (записанных в десятичной системе счисления) делится на 9 тогда и только тогда, когда делится на 9 общая сумма цифр всех слагаемых. Напомним также вариант этого критерия: *натуральное число дает при делении на 9 такой же остаток, как и сумма его цифр.* Данные математические факты лежат в основе нескольких популярных фокусов.

Пример 1. Прежде всего, это знаменитый и широко распространенный в Интернете «Угадыватель мыслей». Мы не будем вдаваться в детали этого великолепного фокуса, отсылая читателя непосредственно в Интернет. (Указание на то, что в основе этого фокуса лежит признак делимости на 9, уже является подсказкой).

Пример 2. Рассмотрим задачу, известную с давних пор, и приведенную, в частности, в [8].

В примере на сложение

$$\text{ЯВЬ} + \text{СОН} + \text{МРАК} = \ldots \qquad (17.1)$$

зритель – человек из публики – заменяет буквы цифрами (от 0 до 9), причем разные буквы – разными цифрами. В остальном замена букв цифрами произвольна. Далее, зритель сообщает фокуснику все цифры суммы (в произвольном порядке!), за исключением какой-то одной цифры. Если какая-то цифра суммы повторяется несколько раз, то столько же раз она и говорится. После этого отгадчик мгновенно называет недостающую цифру.

Вот объяснение этого нехитрого фокуса. Присмотримся: в (17.1) все 10 букв разные. Поэтому они обязательно будут заменены всеми десятью цифрами, каждая из которых будет участвовать в числовой записи примера ровно один раз. Сумма цифр $0 + 1 + 2 + \ldots + 9$ равна 45 и делится на 9. Следовательно, сумма трех чисел («ответ») в примере (17.1) также делится на 9. Но отсюда, в свою очередь, следует, что и сумма цифр «ответа» делится на 9. Теперь единственная неназванная цифра очевидным образом восстанавливается. Пусть, например, из четырех цифр «ответа» названы три цифры: 1, 3, 9. Их сумма 13; ближайшее большее число, делящееся на 9, – это 18. Значит, недостающая неназванная цифра – это 5.

Следует сказать, что фокусник-отгадчик не может, не имея дополнительной информации, различить недостающую цифру 0 от недостающей цифры 9. Так бывает, когда сумма названных цифр кратна 9.

Например, 123+456+7890 = 8469. Если зритель называет цифры 8, 4 и 6 (сумма которых равна 18), то фокусник, опираясь только на вышеизложенные соображения, не может определить, будет ли неназванная цифра нулем или девяткой.

Невзирая на этот мелкий дефект, фокус у студентов и школьников всегда пользуется неизменным успехом.

Задача. Существует ли такое распределение цифр в (17.1), когда ответ записывается при помощи цифр 8, 4, 6 и 0?

***Пример* 3.** Третий математический фокус основан на следующей модификации критерия делимости на 9 (см., например, [9]). А именно, алгебраическая сумма нескольких натуральных чисел делится на 9 тогда и только тогда, когда делится на 9 алгебраическая сумма взятых в скобки сумм соответствующих цифр.

Рассмотрим буквенный пример:

$$\text{АПЕЛЬСИН} - \text{СПАНИЕЛЬ} = \ldots \tag{17.2}$$

Как и в предыдущем примере, загадывающий заменяет буквы цифрами (разные буквы заменяются разными цифрами, одинаковые – одинаковыми), причем так, чтобы разность (17.2) была положительной. Затем он сообщает отгадчику в произвольном порядке все цифры разности (17.2) (именуемой в дальнейшем «ответ»), кроме какой-то одной цифры. Если какая-то цифра суммы повторяется несколько раз, то столько же раз она и говорится. Фокусник легко вычисляет эту цифру, руководствуясь следующими соображениями. Слова «апельсин» и «спаниель» содержат в точности одни и те же наборы букв (то есть одно является *анаграммой* другого)! Поэтому после замены букв цифрами по указанному правилу разность (17.2) будет делиться на 9. Здесь используется модификация критерия делимости на 9. Наконец, согласно критерию делимости на 9 заключаем, что сумма цифр «ответа» также должна делиться на 9. Теперь недостающая цифра «ответа» восстанавливается.

Замечание. Как и в предыдущем примере, если неназванная цифра – ноль или девять, то различить их отгадчику не удается.

Например, 7654321 – 1234567 = 6419754. Если зритель называет цифры 6, 4, 1, 7, 5, 4, то отгадчик (он же фокусник), опираясь лишь на приведенные выше рассуждения, снова не может определить, будет ли неназванная цифра нулем или девяткой.

Задача. Существует ли такое распределение цифр в (17.2), когда ответ записывается при помощи цифр 6, 4, 1, 7, 5, 4 и 0?

Итак, возможность нахождения *одной* неназванной цифры в примерах такого рода действительно существует. Оказывается, что, незначительно изменив постановку задачи, можно в похожих примерах восстанавливать не одну, а две цифры.

Пример 4. Рассмотрим буквенное выражение:

$$\text{КОТ УЧЕН НО} - \text{ОН НЕЧУТОК} = \ldots \qquad (17.3)$$

Здесь также требуется заменить буквы цифрами; при этом пробелы между словами, стоящими перед знаком «минус» (КОТ, УЧЕН, НО), а также между словами, расположенными после знака «минус» (ОН, НЕЧУТОК) – игнорируются. Таким образом, после замены букв цифрами выражение (17.3) превратится в разность двух девятизначных чисел. Заранее оговаривается, что эта разность (именуемая в дальнейшем «ответ») должна быть положительной. Теперь загадывающий называет отгадчику *по порядку* (справа налево) все цифры «ответа», за исключением *каких-либо двух соседних* цифр, например, первой и второй (считая справа налево).

Это, однако, не все; чтобы восстановить неназванные две цифры отгадчику нужно еще знать, сколько раз в процессе вычитания в примере (17.3) «занимали» единицу в старшем разряде. Получив ответ на этот вопрос, отгадчик (владеющий техникой устного счета) легко называет две утаенные цифры.

Объяснение примера 4. Заметим, прежде всего, что (17.3) (в отличие от (17.2)) представляет собой *палиндром*, причем каждая половина этого палиндрома содержит *нечетное число* (девять) букв. Действуя, как в предыдущем примере, мы сразу можем сказать, что сумма всех цифр «ответа» делится на 9. Однако, зная, сколько раз в процессе вычитания «занимали» единицу в старшем разряде, можно сказать больше. Пусть единицу «занимали» Q раз; обозначим неназванные цифры соответственно через x и y. Нетрудно видеть, что тогда справедливо равенство:

$$x + y + \textit{сумма названных цифр} = 9Q. \qquad (17.4)$$

Действительно, каждый раз, занимая при вычитании единицу в старшем разряде, мы добавляем в сумму цифр разности число 10 и одновременно с этим уменьшаем сумму цифр разности на единицу.

Вспомним теперь критерий делимости на 11: *Натуральное число, записанное в десятичной системе, делится на 11 тогда и только тогда, когда его знакочередующаяся сумма цифр делится на 11.* Нам, однако, потребуется не сам этот критерий, а его очевидное обобщение на случай *алгебраической суммы* нескольких натуральных чисел. Это обобщение звучит следующим образом. Алгебраическая сумма нескольких натуральных чисел делится на 11 тогда и только тогда, когда делится на 11 алгебраическая сумма заключенных в скобки знакочередующихся сумм цифр соответствующих чисел. (Все упомянутые знакочередующиеся суммы цифр должны начинаться с цифры разряда единиц.) В результате получаем второе уравнение:

$$x - y + \textit{знакочередующаяся сумма названных цифр} = 11z. \qquad (17.5)$$

Нетрудно показать, что целочисленное решение системы (17.4), (17.5) относительно $x, y, z,$ удовлетворяющее условию $0 \le x,\ y \le 9,$ единственно. Покажем, например, что цифра x определяется из системы (17.4), (17.5) однозначно. Действительно, складывая уравнения (4) и (5) и деля результат пополам, легко получаем, что

$$x = \frac{9Q + 11z}{2} - \textit{известное целое число}, \qquad (17.6)$$

где *известное целое число* – это сумма всех тех названных цифр, которые расположены на нечетных местах (при движении от младших разрядов к старшим). Однако в (17.6) имеется только *один* неизвестный параметр (а именно z), от которого может зависеть искомая цифра x. Теперь из соображений четности ясно, что цифра x определяется с помощью (17.6) единственным образом.

Рассмотрим числовой пример, положив в (17.3): К=7, О=6, Т=5, У=4, Ч=3, Е=2, Н=1. Тогда (17.3) принимает вид:

$$765432116 - 611234567 = 154197549,$$

(две младшие цифры разности не называются; таким образом, мы с самого начала знаем, что $x = 9$, $y = 4$). Нетрудно видеть также, что в процессе вычисления разности единицу в старшем разряде мы занимали 5 раз; таким образом, $Q = 5$.

Теперь уравнения (17.4) и (17.5) примут соответственно вид:

$x + y + 5 + 7 + 9 + 1 + 4 + 5 + 1 = 45$,

$x - y + 5 - 7 + 9 - 1 + 4 - 5 + 1 = 11z$, откуда

$$x + y = 13, \tag{17.7}$$

$x - y = 11z - 6$.

Складывая два последних уравнения и деля результат пополам, получаем:

$$x = (11z + 7)/2;$$

очевидно, что при целочисленном параметре z существует единственное целочисленное значение $x = 9$, удовлетворяющее этому соотношению и принадлежащее числовому промежутку от 0 до 9. Отсюда в силу (17.7) однозначно восстанавливается значение $y = 4$.

В заключение – еще один пример, основанный на упомянутом в начале статьи варианте критерия делимости на 9.

Пример 5. Рассмотрим буквенное выражение:

$$\text{МОХ} + \text{ГРИБ} + \text{ТИШЬ} = \ldots \tag{17.8}$$

Загадывающий заменяет буквы в (17.8) цифрами и называет (в произвольном порядке) все цифры суммы. Отгадчик мгновенно называет цифру, которой была заменена буква И.

Указание. Сумма цифр = 45 + И.

18. АЛЬПИНИСТ НА УТЕСЕ

В этом параграфе мы рассмотрим модификацию одной известной задачи про альпиниста, которому необходимо спуститься с высокого утеса абсолютно безопасным способом (несмотря на то, что имеющаяся у него веревка значительно короче, чем высота утеса). В классической постановке высота утеса – 100 метров, длина веревки – 75 метров, а посередине утеса (на высоте 50 метров) растет деревце, к которому можно привязать веревку. В такой постановке сами числовые данные представляют собой подсказку, облегчающую решение задачи.

Здесь мы несколько изменим условие этой задачи, увеличив высоту утеса на 10 метров и передвинув деревце вверх (на 20 метров), а длину веревки оставим неизменной. А именно, рассматривается

Задача. Альпинист стоит на вершине вертикального утеса, высота которого $H = 110$ м. У альпиниста имеется веревка, длина которой $a = 75$ м, и нож, которым он может резать веревку на части. На высоте $h = 70$ м растет маленькое деревце, на котором альпинист может временно закрепиться и к которому можно привязать веревку. Кроме того, предполагается, что альпинист может надежно закрепить конец веревки на вершине утеса. Каким образом следует действовать альпинисту, чтобы безопасно спуститься с вершины?

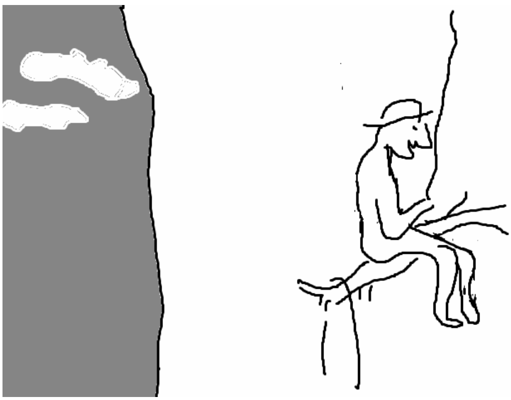


Рис. 18.1

Решение. Вначале задача может показаться нерешаемой. Ключом к решению оказывается следующее соображение. Альпинист может разрезать веревку на два куска – длины c и $a - c$ соответственно, затем первый кусок закрепить одним концом на вершине, а на другом его конце сделать петлю. Сквозь эту петлю альпинисту нужно пропустить второй кусок веревки так, чтобы этот второй кусок веревки сложился пополам. В результате альпинист сможет спуститься вниз (считая от вершины утеса) на

$$c + \frac{a-c}{2} = \frac{a+c}{2} \text{ метров.} \tag{18.1}$$

Если альпинист при этом сумеет достичь деревца, растущего на утесе, то затем он может вытащить продетый в петлю кусок веревки длины $a - c$ и спуститься еще на $a - c$ метров вниз. В результате альпинист спустится на

$$\frac{a+c}{2} + (a-c) = \frac{3a-c}{2} \text{ метров.} \qquad (18.2)$$

Попробуем выяснить теперь, чему должно быть равно c.

В силу (18.1) для того, чтобы альпинист мог добраться до деревца, c, очевидно, должно удовлетворять неравенству

$$H - h \le \frac{a+c}{2}.$$

Заметим теперь, что в интересах альпиниста (при условии выполнения предыдущего неравенства) выбрать наименьшее возможное c. Действительно, чем меньше c, тем длиннее второй кусок веревки, необходимый альпинисту, чтобы продолжать спускаться вниз. Поэтому c в итоге определяется из равенства

$$H - h = \frac{a+c}{2}, \qquad (18.3)$$

откуда

$$c = 2(H-h) - a. \qquad (18.4)$$

Подставляя выражение для c из (18.4) в (18.2), окончательно получаем выражение для расстояния, на которое может спуститься альпинист с вершины утеса, равное:

$$2a - (H - h) = 150 - (110 - 70) = 110 \text{ м.}$$

Итак, альпинисту удается спуститься с вершины утеса. Задача решена.

19. ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ НА РАЗБИЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР

Здесь мы рассмотрим довольно необычный класс плоских фигур, допускающих разбиение на две, три, четыре …, n одинаковых фигур, но *не допускающих такого разбиения на* n+1 *одинаковых фигур.* При этом натуральное число n может быть взято любым.

Очевидно, что каждый параллелограмм может быть разрезан на любое натуральное число m одинаковых маленьких параллелограммов, и никакого ограничения на m для параллелограмма не существует.

Аналогично, «параллелограмм $ABCD$ с криволинейными боковыми сторонами» может быть разрезан на любое число m маленьких «параллелограммов с криволинейными боковыми сторонами», и снова никакого ограничения на натуральное m в такой задаче не существует. (У фигуры $ABCD$ верхнее и нижнее основания равны и параллельны друг другу, а криволинейные боковые стороны получаются одна из другой при помощи параллельного переноса).

Точно так же могут быть разбиты на любое число одинаковых частей круг, а также сектор круга, сектор кругового кольца и фигуры, получающиеся из этих секторов заменой прямолинейных участков границы на криволинейные. (Каждый из двух таких криволинейных участков получается из другого в результате поворота вокруг центра соответствующего круга.)

Таким образом, перечисленные выше безгранично-делимые фигуры не входят в тот класс плоских фигур, который нас интересует.

Однако, интересующие нас фигуры мы можем конструировать из безгранично-делимых, так сказать, искусственно, добавляя к ним многократные искажения повторяющейся формы, количество которых рассчитано заранее. Например, из круга мы можем вырезать правильный 2520-угольник. А поскольку

$$2520 = 2^3 \times 3^2 \times 5 \times 7,$$

правильный 2520-угольник, очевидно, может быть разрезан на две, три, четыре,…, десять одинаковых частей, но на одиннадцать одинаковых частей его разрезать, по-видимому, не удается. Впрочем, строгого доказательства последнего утверждения у авторов нет, и мы ссылаемся здесь на «геометрическую очевидность».

Надо сказать, что само существование какого-то иного класса фигур с интересующими нас свойствами кажется на первый взгляд проблематичным. Однако, как мы сейчас увидим, такие фигуры действительно существуют. Они были обнаружены совершенно случайно во время дискуссии авторов с проф. А.С. Добротворским и М.Е. Смирновой.

На рис. 19.1 показаны – в качестве примера – разбиения фигуры *ABCD* на две, три и шесть одинаковых частей, а на рис. 19.2 – разбиение этой же фигуры на четыре одинаковые части. Читателю предоставляется возможность догадаться, как разбить фигуру *ABCD* на 5 одинаковых частей. Разбиение на 7 частей уже невозможно (это, так сказать, геометрически очевидно), однако строгое доказательство этого факта авторам неизвестно.

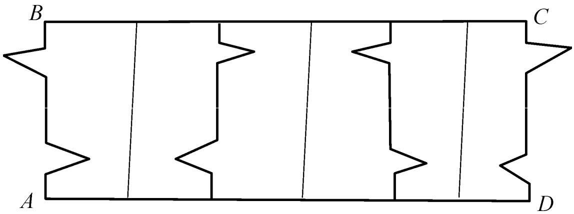


Рис. 19.1

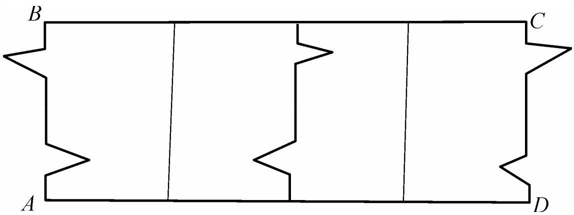


Рис. 19.2

Замечание. Обозначим через h глубину впадины на боковой стороне фигуры *ABCD*, а через L – длину основания *AD* этой фигуры. Рассмотрим теперь отдельно два случая.

А) Разбиение производится на нечетное число n одинаковых частей. Тогда предельное значение для нечетного числа n одинаковых частей, на которые можно разбить фигуру *ABCD,* определяется неравенством:

$$2h < \frac{L}{n}, \textit{ если } n \textit{ нечетно} \text{ (см. рис. 19.1).}$$

Б) Разбиение производится на четное число n одинаковых частей. Тогда предельное значение для четного числа n одинаковых частей, на которые можно разбить фигуру *ABCD,* определяется из неравенства:

$$h < \frac{L}{n}, \textit{ если } n \textit{ четно} \text{ (см. рис. 19.2).}$$

20. «НЕРЕШАЕМОЕ» КВАДРАТНОЕ УРАВНЕНИЕ

Про квадратные уравнения известно, казалось бы, все.

Для уравнения

$$ax^2 + bx + c = 0 \qquad (20.1)$$

нет такого вопроса, на который не давала бы ответ формула, которую знает каждый прилежный ученик восьмого класса:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}. \qquad (20.2)$$

Тем не менее, вот задача, которую «невозможно решить». А именно, требуется найти (не приближенно, а точно!) оба корня уравнения

$$(x + 0{,}123456789)^2 + (x - 0{,}876543211)^2 = 1. \qquad (20.3)$$

Прежде всего, заметим, что «вручную» приводить это уравнение к виду (20.1) крайне неудобно, а на стандартном калькуляторе сделать это невозможно без потери точности из-за переполнения. Но даже если мы аккуратно проделаем все вычисления и получим запись вида (20.1), то получить точный ответ (т.е. выписать все десятичные знаки обоих корней) с помощью формулы (20.2) нам вряд ли удастся!

Однако это тот редкий случай, когда приводить квадратное уравнение к стандартному виду (20.1) не полезно, а вредно. Все дело в том, что корни уравнения (20.3) уже фактически присутствуют в записи самого этого уравнения. А именно,

$$x_1 = -\,0{,}123456789; \;\; x_2 = 0{,}876543211. \qquad (20.4)$$

Действительно, нетрудно видеть, что

$$0{,}876543211 - (-0{,}123456789) = 1,$$

что, собственно говоря, и лежит в основе предложенного читателю математического трюка.

Совершенно аналогично, для уравнения более общего вида

$$\left(x - d\right)^2 + \left(x - (k + d)\right)^2 = k^2 \qquad (20.5)$$

его корнями будут

$$x_1 = d; \quad x_2 = k + d.$$

Ясно, что при вещественных k и d в (20.5) корни этого уравнения будут также вещественны. Нетрудно показать также, что каждое уравнение вида (20.1) с вещественными коэффициентами и неотрицательным дискриминантом может быть приведено к виду (20.5).

Замечание. Задача (20.3) допускает довольно любопытную модификацию. А именно, снова требуется *точно* решить еще более «страшное» уравнение:

$$(x+0{,}123456789)^2+(x-0{,}876543211)^2+(x-0{,}376543211)^2=5/4. \quad (20.6)$$

На первый взгляд, само существование у (20.6) точных (т.е. представимых конечной десятичной дробью) решений кажется невероятным. Однако, корнями этого уравнения являются по-прежнему x_1 и x_2 из (20.4), а причина, по которой это уравнение легко решается, проясняется, если рассмотреть уравнение более общего вида:

$$(x-a)^2+(x-b)^2+\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{5}{4}(a-b)^2. \quad (20.7)$$

Действительно, корнями (20.7) являются, очевидно, a и b.

Задача. Решить точно (!) уравнение

$$(x-0{,}123456789)^2+(x-1{,}123456789)^2+(x-7{,}123456789)^2 = 50. \quad (20.8)$$

21. НЕОБЫЧНОЕ УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

Та же идея, которая позволила нам без вычислений мгновенно определить корни уравнения (20.5), позволяет записать на декартовой плоскости Oxy уравнение окружности в довольно непривычной форме. (При этом мы опираемся на известную из курса школьной геометрии теорему о том, что угол, вписанный в окружность и опирающийся на ее диаметр, – прямой, а также на теорему Пифагора.) А именно, обозначим через $r = r(x,y)$ вектор, начало которого расположено в начале координат, а конец – в переменной точке с координатами (x,y). Аналогично, пусть $r_i = r_i(x_i,y_i)$ – вектора с началом в начале координат, оканчивающиеся в фиксированных точках (x_i,y_i); $i = 1, 2$.

Тогда – в силу двух упомянутых выше теорем – уравнение

$$|r-r_1|^2+|r-r_2|^2=|r_1-r_2|^2 \quad (21.1)$$

оказывается уравнением окружности радиуса $\frac{|r_1 - r_2|}{2}$ с центром в точке, являющейся концом вектора $\frac{r_1 + r_2}{2}$. (Напомним, что модуль вектора – это корень квадратный из суммы квадратов его координат, а сложение и вычитание векторов производится покоординатно.)

Замечание. Если все перечисленные выше вектора считать расположенными не на плоскости, а в трехмерном пространстве:

$$r = r(x, y, z), \qquad r_i = r_i(x_i, y_i, z_i),$$

то (21.1) оказывается уравнением не окружности, а сферы, радиус которой по-прежнему равен $\frac{|r_1 - r_2|}{2}$, а центр по-прежнему расположен в точке, являющейся концом полусуммы векторов r_1 и r_2.

22. ПРИНЦИП НЕПРЕРЫВНОСТИ В КОМБИНАТОРИКЕ

Под принципом непрерывности в математике обычно понимают следующее. Пусть есть какое-нибудь равенство, левая и правая части которого состоят из нескольких выражений, зависящих от переменной x и имеющих предел при $x \to a$ (но, возможно, не определенных при $x = a$). Тогда для пределов этих выражений рассматриваемое равенство по-прежнему имеет место. Например, в равенстве

$$\left(4 + \frac{x^2}{x}\right) + \left(2 + \frac{2x^2}{x}\right) = \left(6 + \frac{3x^2}{x}\right) \qquad (22.1)$$

все три выражения, заключенные в скобки, не определены при $x = 0$. Однако все они имеют предел при $x \to 0$, и для соответствующих предельных значений равенство по-прежнему имеет место:

$$4 + 2 = 6. \qquad (22.2)$$

Математики говорят об этом так: «*равенство* (22.2) *получается из* (22.1) *переходом к пределу при* $x \to 0$» или так: «*равенст-*

во (22.2*) может быть получено из* (22.1) *из соображений непрерывности*».

Таким образом, для применения «соображений непрерывности», прежде всего, нужно, чтобы рассматриваемые выражения зависели от переменной, принимающей *бесконечное количество* значений.

Однако в комбинаторных задачах мы всегда имеем дело с *конечными* совокупностями объектов. Каким же образом принцип непрерывности может быть задействован в комбинаторике?

Оказывается, что в качестве переменной величины, по которой осуществляется предельный переход, в комбинаторике может выступать *время.*

Задача 1 (см. [12]). Из карточной колоды, содержащей 36 карт, выбирается неупорядоченная пятерка карт. Требуется ответить на вопрос: *какова доля пятерок карт, содержащих в точности двух королей, среди всевозможных неупорядоченных пятерок карт?*

Решение. Число способов выбрать неупорядоченную пару королей из четырех имеющихся в колоде королей, очевидно, равно $C_4^2 = 6$. Кроме того, нужно (одновременно) выбрать еще неупорядоченную тройку не-королей из 32 карт (ибо 32 =36 – 4). Сделать это можно $C_{32}^3 = \dfrac{32\times 31\times 30}{3!}$ способами.

Поэтому общее число способов выбрать упорядоченную пару ({два короля}, {три не-короля}), равно произведению $C_4^2 C_{32}^3 = 32\times 31\times 30$. (Это число, как мы знаем, равно числу способов выбрать неупорядоченную пятерку карт, содержащую в точности двух королей.)

Далее, число способов выбрать неупорядоченную пятерку карт из нашей колоды равно $C_{36}^5 = \dfrac{36\times 35\times 34\times 33\times 32}{5!}$. Следовательно, доля способов выбрать неупорядоченную пятерку карт, содержащую в точности двух королей, равна

$$\frac{C_4^2 C_{32}^3}{C_{36}^5} = \frac{5!\times 32\times 31\times 30}{36\times 35\times 34\times 33\times 32}, \qquad (22.3)$$

что приблизительно равно 0, 0789406.

Замечание. Каждая неупорядоченная пятерка карт может быть охарактеризована как *одновременный выбор пятерки карт.*

Задача 2 (см. [12]). Из карточной колоды, содержащей 36 карт, выбираются по очереди пять карт. Требуется ответить на вопрос: *какова доля упорядоченных пятерок карт, содержащих в точности двух королей, среди всевозможных упорядоченных пятерок карт?*

Решение. Вначале сосчитаем количество упорядоченных пятерок карт, содержащих в точности двух королей. Места для королей могут быть выбраны C_5^2 способами; на первое из этих двух мест король может быть выбран 4 способами, а на второе из упомянутых мест 3 способами. Итого, $C_5^2 \times 4 \times 3$ способов расстановки двух королей. На оставшиеся три свободных места расположить не-королей можно $32 \times 31 \times 30$ способами. Итак, число способов выбрать упорядоченную пятерку карт, содержащую двух королей, равно произведению $C_5^2 \times 4 \times 3 \times 32 \times 31 \times 30$.

Далее, число всевозможных способов выбрать упорядоченную пятерку карт из колоды равно $36 \times 35 \times 34 \times 33 \times 32$. Следовательно, доля упорядоченных пятерок, содержащих двух королей, среди всевозможных упорядоченных пятерок карт равна

$$\frac{C_5^2 \times 4 \times 3 \times 32 \times 31 \times 30}{36 \times 35 \times 34 \times 33 \times 32}, \tag{22.4}$$

что, как нетрудно проверить, совпадает с (22.3).

В чем же причина совпадений результатов (22.3) и (22.4)?

Объяснение математическое. Из каждой неупорядоченной пятерки карт можно понаделать 5! различных упорядоченных пятерок карт(и все упорядоченные пятерки карт могут быть получены таким способом). В результате в левой части равенства (22.3) числитель и знаменатель отношения $\dfrac{C_4^2 C_{32}^3}{C_{36}^5}$ умножатся на 5!, и ответ не изменится.

Объяснение физическое. В обеих задачах доля пятерок карт с двумя королями – это вероятность вытащить (вслепую) из колоды карт в точности двух королей, если разрешается брать пять карт. Заметим теперь, что во второй задаче эта вероятность никак не зависит от интервалов времени между последовательными выборами карт. Следовательно, упомянутые интервалы времени можно считать сколь угодно малыми. Теперь из физических соображений (по сути – из соображений непрерывности!) ясно, что, полагая эти интервалы равными нулю, мы не повлияем на вероятность того или иного исхода опыта.

23. СТРАННОЕ ОТРАЖЕНИЕ

В физике есть раздел, который называется «геометрическая оптика». Там, в частности, предполагается, что:

а) свет распространяется по прямой линии;

б) угол падения светового луча равен углу отражения.

Оба эти закона на самом деле приближенные, но описывают действительность неплохо. Таким образом, задачи из физического раздела «геометрическая оптика» – это просто-напросто некий класс задач по геометрии. И решение геометрических задач из этого класса можно проверить, поставив соответствующий физический опыт. Одну такую задачу мы здесь разберем (см. по этому поводу также [13]).

Нарисуем на плоскости две прямые m и n, пересекающиеся под (острым) углом φ в точке O (см. рис. 23.1). Пусть A – точка, расположенная внутри угла MON, равного φ. Обозначим через A' точку, симметричную точке A относительно прямой m, а через A'' – точку, симметричную точке A' относительно прямой n. Из рис. 23.1 очевидно, что луч OA'' повернут относительно луча OA на угол, равный 2 φ (направление поворота, переводяшего луч OA в OA'' совпадает с направлением кратчайшего поворота от m к n).

Таким образом,

$$\angle AOA'' = 2\varphi. \qquad (23.1)$$

Действительно,

$$\angle AOA'' = \angle A'OA'' - \angle AOA' = 2\angle NOA' - 2\angle MOA' =$$
$$= 2(\angle NOA' - \angle OA') = 2\varphi.$$

Здесь существенно, что равенство (23.1) *справедливо независимо от положения точки A внутри угла MON.* (*Совершенно аналогично,* (23.1) *не зависит от одновременного поворота пары прямых m и n вокруг точки O на любой угол в любую сторону.*)

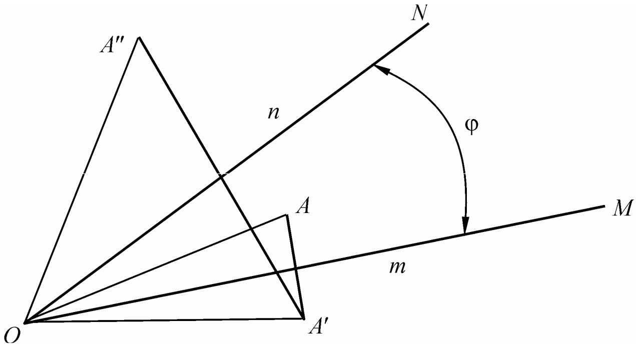


Рис. 23.1

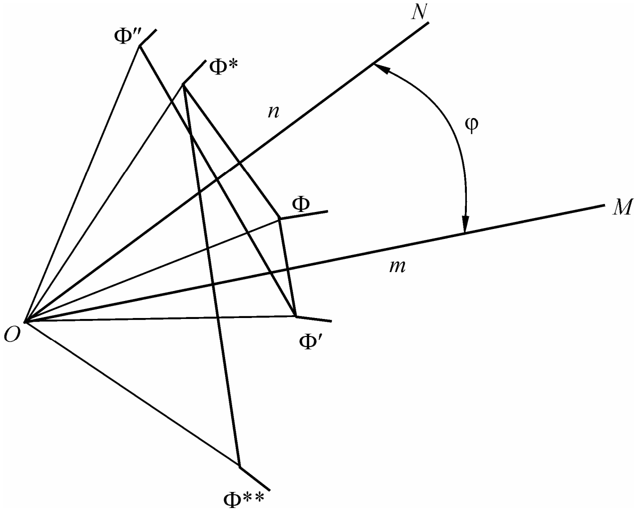


Рис. 23.2

Таким образом, любая плоская фигура Φ, расположенная внутри угла *MON*, «отразившись» сначала в прямой *m,* а затем – в прямой *n*, окажется повернутой на угол, равный 2φ, с центром поворота в точке *O*; см. рис. 23.2. (Как и выше, направление поворота фигуры Φ совпадет с направлением кратчайшего поворота от *m* к *n*.)

Обозначим через Ф″ образ фигуры Ф, получившийся в результате описанного выше двукратного отражения фигуры Ф в прямых m и n.

Заметим, далее, что у фигуры Ф имеется, кроме Ф″, еще одно двукратное отражение в прямых m и n, которое обозначим через Ф**. (Фигура Ф** получается из Ф точно так же, как и Ф″, разница лишь в том, что прямые m и n меняются ролями. При этом Ф**, как и Ф″, получается из Ф поворотом с центром в O на угол, равный 2φ, но в противоположную сторону.)

Повернем теперь как единое целое пару прямых m и n вокруг точки O на произвольный угол, но так, чтобы *неподвижная* фигура Ф оставалась по-прежнему внутри *повернутого* угла MON.

В силу (23.1) результат двукратного отражения фигуры Ф в *повернутых* прямых m и n не изменит своего положения на плоскости – это по-прежнему фигуры Ф″ и Ф**, оставшиеся *неподвижными* (вместе с фигурой Ф).

Проверить справедливость этого чисто геометрического утверждения можно в простом физическом опыте, встав перед трюмо. Вместо того, чтобы вращать трюмо, не меняя раствора углов между его створками, наблюдатель может сам начать перемещаться по окружности с соответствующим центром. Результат будет аналогичный – взаимное расположение наблюдателя (которого для упрощения обозначений обозначим через Ф) и его двукратных отражений Ф″ и Ф** меняться не будет, и все трое, сохраняя дистанцию, будут перемещаться по одной и той же окружности. Заметим, наконец, что если раствор угла между зеркалами, в которых отражается наблюдатель Ф, равен сорока пяти градусам, то отражения Ф″ и Ф** будут, очевидно, смотреть в противоположные стороны.

Замечание. Кроме Ф″ и Ф**, у наблюдателя Ф, очевидно, имеются и другие отражения четного порядка – четвертого, шестого и т.д. Все они обладают свойствами, аналогичными свойствам отражений второго порядка, а именно – остаются неподвижными при повороте угла MON вокруг точки O.

24. СТРОГОСТЬ ИЛИ ЗДРАВЫЙ СМЫСЛ?

В этом параграфе мы обсудим один довольно тонкий момент, с которым сталкивается преподаватель логики, объясняя этот предмет студентам-гуманитариям. Внезапно выясняется, что в некоторых ситуациях знание законов логики не помогает, а скорее мешает логично мыслить.

Чтобы не быть голословными, рассмотрим в качестве примера такое **умозаключение:**

Если незнакомец выйдет из дома без шляпы, то он простудится.

Если он выйдет в новом костюме, то получит повышение по службе.

Незнакомец выйдет из дома либо без шляпы, либо в новом костюме.

Незнакомец простудится или получит служебное повышение.

(24.1)

Требуется доказать, что вывод (высказывание под чертой) будет обязательно истинным, если истинны все посылки (высказывания над чертой).

Прежде всего, заметим, что без всякого знакомства с формальной логикой это *очевидно*. Наша задача состоит в том, чтобы эту очевидность перевести на строгий язык логики.

Для этого введем обозначения:

A: «Незнакомец выйдет из дома без шляпы»,

B: «Незнакомец простудится»,

C: «Незнакомец выйдет из дома в новом костюме»,

D: «Незнакомец получит служебное повышение».

Тогда наша логическая задача перепишется в виде

$$[(A \to B) \wedge (C \to D) \wedge (\text{либо } A, \text{ либо } C)] \to (B \vee D). \qquad (24.2)$$

В (24.2) присутствуют четыре высказывательные переменные: A, B, C, D, каждая из которых может принимать два значения: И (истина) и Л (ложь). Это означает, что существует 16 вариантов различных распределений истинностных значений для переменных A, B, C, D. Таким образом, проверять *тавтологичность* высказывания (24.2) (т.е. его истинность при любых предположениях относительно истинности входящих в него высказывательных переменных) придется, заполняя весьма внушительную таблицу из 16 строк. Если мы сумеем доказать, что (24.2) – тавтология, то отсюда автоматически будет следовать правильность исходного умозаключения (24.1).

К счастью, вместо того, чтобы рисовать упомянутую выше 16-строчную таблицу, можно воспользоваться рассуждением, которое полностью эквивалентно заполнению этой таблицы, но выглядит короче.

Итак,

Доказательство № 1.

Введем обозначения

[левая часть]: $[(A\to B)\wedge(C\to D)\wedge$(либо A, либо C)$]$,

[правая часть]: $(B\vee D)$,

тогда (24.2), очевидно, перепишется в виде

[левая часть] → [правая часть].

Теперь начинаем рассуждать. Предположим противное, а именно, что (24.2) не является тавтологией. Тогда должно существовать такое распределение истинностных значений среди переменных A, B, C, D, что [правая часть] = Л, а [левая часть] = И. Однако, [правая часть] = Л лишь в случае, когда B = Л, D = Л. Теперь, чтобы импликации, входящие в [левую часть], принимали значение «истина», необходимо, чтобы было A = Л, C = Л. Однако в этом случае высказывание (либо A, либо C) ложно, в итоге [левая часть] = Л, и мы получили желаемое противоречие.

У проведенного доказательства есть, однако, один недостаток: оно лишено наглядности. В итоге получается, что очевидное объясняется через неочевидное. Всему виной трудная для восприятия операция импликации. Существует, однако, способ перевода «логической очевидности» исходного умозаключения (24.1) в «геометрическую очевидность».

Доказательство № 2.

«Расширим» умозаключение (24.2), приняв, что незнакомец – это переменная величина, пробегающая некоторое множество X (и будем этого незнакомца теперь обозначать через x). А именно, рассмотрим вместо (24.2) умозаключение следующего вида:

$$[(\forall x\in X)\ (\mathrm{A}(x)\rightarrow \mathrm{B}(x))]\wedge[(\forall x\in X)\ (\mathrm{C}(x)\rightarrow \mathrm{D}(x))]\wedge[(\forall x\in X)\ (\text{либо } \mathrm{A}(x), \text{ либо } \mathrm{C}(x))]\rightarrow[(\forall x\in X)\ \mathrm{B}(x)\vee \mathrm{D}(x)]. \qquad (24.3)$$

Нетрудно видеть, что если «расширенное» умозаключение (24.3) *тавтологично, то и умозаключение* (24.2) – *тавтология*. (Действительно, достаточно в (24.3) положить, что X состоит из единственного элемента.)

Заметим, далее, что если некоторое умозаключение содержит предикаты и кванторы, то принято говорить не о тавтологичности этого умозаключения, а о том, что это умозаключение обладает *правильной формой.*

«Расширенное» умозаключение (24.3) можно переписать также в классической форме, аналогичной (24.1):

$$\begin{array}{l} (\forall x\in X)\ \mathrm{A}(x)\rightarrow \mathrm{B}(x) \\ (\forall x\in X)\ \mathrm{C}(x)\rightarrow \mathrm{D}(x) \\ (\forall x\in X) \text{ либо } \mathrm{A}(x), \text{ либо } \mathrm{C}(x) \\ \hline (\forall x\in X)\ \mathrm{B}(x)\vee \mathrm{D}(x) \end{array} \qquad (24.4)$$

Обозначим теперь через $\mathrm{A_И}$, $\mathrm{B_И}$, $\mathrm{C_И}$, $\mathrm{D_И}$ *множества истинности* соответствующих предикатов, т.е. совокупности тех x, при каждом из которых соответствующий предикат обращается в истинное высказывание. Тогда на языке множеств (24.4) перепишется в следующем виде, где мы, наконец, избавились от символа импликации:

$$\begin{array}{l} \mathrm{A_И}\subseteq \mathrm{B_И} \\ \mathrm{C_И}\subseteq \mathrm{D_И} \\ \mathrm{A_И}\cap \mathrm{C_И} = \varnothing,\ \mathrm{A_И}\cup \mathrm{C_И} = X \\ \hline \mathrm{B_И}\cup \mathrm{D_И} = \mathrm{X} \end{array} \qquad (24.5)$$

Однако, правильность формы умозаключения (24.5) *мгновенно проверяется* на рисунке (см. рис. 24.1), где множество X символически изображено в виде прямоугольника. (Множества $\mathrm{B_И}$ и $\mathrm{D_И}$ не показаны на рисунке; из посылок в (24.5) понятно, что $\mathrm{B_И}$ и $\mathrm{D_И}$ могут налегать друг на друга.)

Замечание 1. Схему (24.5) можно было бы сразу построить, исходя непосредственно из (24.1) и минуя промежуточные выкладки. Впрочем, эти выкладки позволили нам проследить связь между двумя предложенными доказательствами.

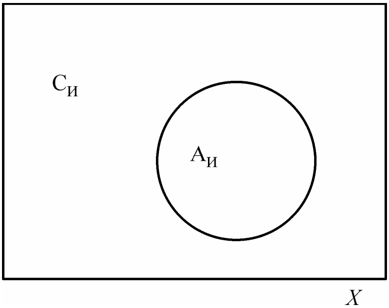


Рис. 24.1

Замечание 2. Предложенный прием построения «расширенного» умозаключения, очевидно, может оказаться полезным и в случае, когда нужно доказать, что исходное умозаключение не есть тавтология.

25. О ТЕОРЕТИКО-МНОЖЕСТВЕННЫХ ТОЖДЕСТВАХ

Сейчас мы увидим, что, доказывая теоретико-множественные тождества, можно обойтись не только без диаграмм Эйлера, но даже без каких-либо рассуждений.

Прежде всего, заметим, что *для теории множеств достаточно трех операций*: объединения $\cup$, пересечения $\cap$ и операции дополнения, которую мы будем обозначать при помощи волны ~.

Замечание 1. Множества, в отличие от высказываний и предикатов, мы будем здесь обозначать полужирным шрифтом.

Замечание 2. Разность множеств **A\B**, как известно, представима в виде ~**B**∩**A**.

Заметим, далее, что *для логики высказываний тоже достаточно трех операций*: дизъюнкции $\vee$ («или»), конъюнкции $\wedge$ («и») и отрицания $\neg$ («неверно, что»).

Замечание 3. Что касается операций импликации $\to$ и эквиваленции $\leftrightarrow$, то они, как известно, выражаются следующим образом через вышеперечисленные три логические операции:

$A \to B = \neg A \vee B$,

$A \leftrightarrow B = (\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$.

Теперь мы можем составить «таблицу перевода» с языка множеств на язык логики высказываний:

Язык множеств	**Язык логики высказываний**
A, B, C, … – множества (множества-переменные)	A, B, C,… – высказывания (высказывательные переменные)
X (универсальное множество)	И (истина)
$\varnothing$ (пустое множество)	Л (ложь)
A$\cup$**B** (объединение множеств)	A$\vee$B (дизъюнкция высказываний)
A$\cap$**B** (пересечение множеств)	A$\wedge$B (конъюнкция высказываний)
~A (дополнение множества)	$\neg$A (отрицание высказывания)

Смысл этой таблицы прояснится из приводимого ниже Утверждения.

Высказывательные переменные, как мы знаем, могут принимать только два значения: И и Л. Множества-переменные, в отличие от высказывательных переменных, могут быть самыми разнообразными и, соответственно, принимать не только два значения **X** и $\varnothing$.

Тем не менее, справедливо следующее

Утверждение [14]. *Между теоретико-множественными тождествами и логическими тождествами (равносильностями) для высказываний может быть установлено взаимно-однозначное соответствие. Для установления такого соответствия достаточно воспользоваться приведенной выше таблицей.*

Доказательство.

А) Пусть

f(**A**, **B**, **C**,…) ≡ g(**A**, **B**, **C**,…) (25.1)

– произвольно взятое теоретико-множественное тождество, справедливое при любых подмножествах **A**, **B**, **C**,… универсального множества **X**. (Левая и правая части (25.1) образованы при помощи операций $\cup$, $\cap$, ~.) Разрешим теперь принимать множествампеременным **A**, **B**, **C**,… *только два* значения: **X** и $\varnothing$. Итак, мы получили возможность рассматривать (25.1) как тождество в двухэлементной алгебре Буля. (Определение алгебры Буля см., например, в Википедии [15].)

Заметим теперь, что алгебра логики высказываний – другая реализация все той же двухэлементной алгебры Буля. Это, в свою очередь, означает, что если мы заменим в (25.1) множества-переменные **A**, **B**, **C**,… на высказывательные переменные A, B, C,…, а операции $\cup$, $\cap$, ~ соответственно на $\vee$, $\wedge$, $\neg$, то тождество сохранится (в логике высказываний вместо термина «тождество» принято использовать термин «равносильность»). Результат такого преобразования соотношения (25.1) мы запишем в виде

$$\mathrm{F}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C},\ldots) \equiv \mathrm{G}(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \mathrm{C},\ldots). \qquad (25.2)$$

Итак, каждому теоретико-множественному тождеству сопоставлено единственное тождество (равносильность) логики высказываний.

Б) Обратно, пусть (25.2) – какое-либо тождество логики высказываний. Очевидно, что, заменив в (25.2) высказывания A, B, C,… *произвольными* предикатами A(x), B(x), C(x),…, зависящими от переменной $x \in \mathbf{X}$, мы преобразуем (25.2) в верное тождество логики предикатов:

$$\mathrm{F}(\mathrm{A}(x), \mathrm{B}(x), \mathrm{C}(x),\ldots) \equiv \mathrm{G}(\mathrm{A}(x), \mathrm{B}(x), \mathrm{C}(x),\ldots), \qquad (25.3)$$

из которого, очевидно, следует, что

$$\{x \in \mathbf{X} | \mathrm{F}(\mathrm{A}(x),\mathrm{B}(x),\mathrm{C}(x),\ldots)=\text{И}\} \equiv \{x \in \mathbf{X} | \mathrm{G}(\mathrm{A}(x),\mathrm{B}(x),\mathrm{C}(x),\ldots)=\text{И}\}. \quad (25.4)$$

Положив теперь в (25.4)

A(x) = «$x \in \mathbf{A}$», B(x) = «$x \in \mathbf{B}$», C(x) = «$x \in \mathbf{C}$», …,

очевидно, получим тождество для множеств (25.1). Тем самым наше утверждение доказано.

Следствие (см. [22]). Из проведенного доказательства следует, что теоретико-множественные тождества для *произвольных* множеств **A**, **B**, **C**,… (являющихся подмножествами универсального множества **X**) – это те же самые тождества, которые справедливы, когда множествам **A**, **B**, **C**,… дозволено принимать только два значения **X** и **∅.** *Поэтому, если необходимо проверить справедливость какого-либо теоретико-множественного тождества вида* (25.1), *то достаточно по очереди перебрать все случаи, когда множества-переменные* **A**, **B**, **C**,*… принимают одно из двух значений* **X** *и* **∅.** *(С этой целью следует построить таблицу, содержащую* 2^n *строк, где n – число множеств-переменных.)*

Замечание. Помимо теоретико-множественных тождеств, определенный интерес представляют также нестрогие включения вида

$$p(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots) \subseteq q(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots), \qquad (25.5)$$

справедливые при произвольных **A**, **B**, **C**, … (левая и правая части (25.5) образованы из множеств-переменных **A**, **B**, **C**, … при помощи операций $\cup$, $\cap$, ~); с подобными включениями множеств мы уже имели дело в предыдущем параграфе. Заметим, однако, что (25.5) эквивалентно теоретико-множественному тождеству:

$$\sim p(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots) \cup q(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots) \equiv \mathbf{X},$$

так что специального рассмотрения таких включений не требуется.

В заключение подведем итог двух последних параграфов. Итак, мы выяснили, что:

1) правильность умозаключений, не содержащих предикатов и кванторов, можно проверять с помощью диаграмм Эйлера (вместо того, чтобы строить таблицы истинности);

2) справедливость теоретико-множественных тождеств можно, напротив, проверять по таблицам, вместо того, чтобы строить диаграммы Эйлера.

26. КОЕ-ЧТО О ДВОИЧНОЙ СИСТЕМЕ

1. Алгоритм перевода числа из десятичной записи в p-ичную хорошо известен. Пусть, например, требуется записать в семеричной системе десятичное число a = 108. Сначала делим 108 с остатком на 7 и получаем:

$$108 = 15\times7 + 3. \qquad (26.1)$$

Здесь остаток от деления, т.е. число 3, – это и есть последняя (младшая) цифра в записи нашего числа *a* в семеричной системе. Теперь возьмем в предыдущей формуле неполное частное 15 и снова применим деление на 7 с остатком. Имеем:

$$15 = 2\times7 + 1.$$

Подставляя это выражение в (26.1), получаем:

$$108 = (2\times7 + 1)\times7 +3,$$

откуда

$$108 = 2\times7^2 + 1\times7 + 3.$$

Итак, семеричная запись нашего числа имеет вид $213_{(7)}$, т.е.

$$108 = 213_{(7)}. \qquad (26.2)$$

Итак, упомянутый алгоритм несложен и, казалось бы, не может быть упрощен или улучшен. Подчеркнем, что в этом алгоритме цифры *p*-ичной записи появляются по очереди, начиная от самого младшего разряда (разряда единиц) и заканчивая цифрой самого старшего разряда. Иными словами, *p*-ичная запись числа *a* постепенно пишется *справа налево.* Существует, однако, совершенно иной способ, при котором *p*-ичная запись постепенно пишется *слева направо.*

2. Лучше всего преимущества этого второго способа удается продемонстрировать при переходе от десятичной записи к двоичной. Дело в том, что в двоичной системе кроме нуля (а нуль – это, в сущности, не столько цифра, сколько значок пропуска разряда) имеется только одна цифра – единица. Попробуем записать теперь число 108 в двоичной системе. Конечно, можно было бы воспользоваться тем же алгоритмом, что и в. п. 1, но это было бы нерационально.

Вместо этого мы поступим следующим образом. Начнем выписывать последовательные степени двойки:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64. \qquad (26.3)$$

(Здесь мы остановились, так как следующая степень двойки, 128, уже больше, чем наше число *a* =108.)

Теперь начинаем последовательно «набирать» 108 из степеней (26.3), начиная со старших степеней и двигаясь в сторону младших.

Имеем:

$64 < 108$,

$64 + 32 = 96 < 108$,

64 + 32 +16 – больше, чем 108, поэтому берем из ряда степеней (26.3) в качестве следующего слагаемого 8 (вместо 16):

$64 + 32 + 8 = 104 < 108$,

$$64 + 32 + 8 + 4 = 108. \qquad (26.4)$$

Итак, цель достигнута. Поскольку

$$64 = 2^6,\ \ 32 = 2^5,\ \ 8 = 2^3,\ \ 4 = 2^2,$$

из (26.4) получаем искомую двоичную запись числа 108:

$$108 = 1101100_{(2)}. \qquad (26.5)$$

3. Утверждение. *Описанный в п. 2 прием всегда срабатывает при переходе от десятичной записи к двоичной.*

Это утверждение вовсе не очевидно и требует специального доказательства. Проведем его методом математической индукции.

Доказательство.

База индукции. Пусть $a = 1$. В этом случае сделанное утверждение очевидно.

Предположение индукции. Выберем произвольное фиксированное M и предположим, что сделанное утверждение верно для всех натуральных a, не превосходящих M.

Шаг индукции. Докажем, опираясь на предположение индукции, что тогда наше утверждение верно при $a = M + 1$.

Пусть d – наивысшая степень двойки такая, что

$$2^d \le M + 1; \qquad (26.6)$$

таким образом,

$$2^{d+1} > M + 1. \qquad (26.7)$$

Рассмотрим разность

$$Q = (M + 1) - 2^d$$

(не ограничивая общности, мы всегда можем считать, что $Q > 0$). Очевидно, что

$$Q < M + 1, \qquad (26.8)$$

поэтому в силу предположения индукции натуральное число Q может быть представлено в виде суммы степеней двойки именно при помощи алгоритма, рассмотренного выше в п. 2. Однако этого еше недостаточно для наших целей. Необходимо показать, что в двоичное разложение числа Q могут входить только степени двойки с показателями строго меньшими, чем d. Прежде всего, степени двойки с показателями $>d$ в разложение для Q не могут входить в силу (26.7) и (26.8).

Далее, покажем, что 2^d также не может входить в упомянутое разложение. Действительно, предположим противное, а именно, что

$$Q = 2^d + \ldots,$$

т.е.

$$(M + 1) - 2^d = 2^d + \ldots,$$

откуда

$$M + 1 = 2\times2^d + \ldots,$$

что, очевидно, противоречит условию (26.7). Тем самым наше утверждение доказано.

ИСТОРИЧЕСКОЕ НЕДОРАЗУМЕНИЕ

С двоичной системой связано одно интересное историческое недоразумение. Дело в том, что древние египтяне не подозревали о существовании позиционной системы счисления и, тем не менее, пользовались ею.

В непозиционной системе значение цифры не зависит от занимаемого ею места. Например, в римской системе X – это десять, а XX – двадцать.

В непозиционной системе легко складывать и вычитать, а умножать и делить, вообще говоря, трудно. И такая система является, конечно, тормозом для развития математики.

Так вот, в Древнем Египте в течение примерно трех тысячелетий существовала весьма архаичная непозиционная система счисления [23]. Удивительно, однако, то, что древние египтяне фактически пользовались двоичной позиционной системой, не замечая этого!

Дело в том, что в Древнем Египте не была известна операция умножения, а вместо нее использовалась операция удвоения. Например, если надо было умножить 17 на 19, то сначала 17 удваивали, затем получившийся результат опять удваивали, и так далее. После чего из полученных последовательных удвоений «набирали» требуемый результат. Вот как это выглядело.

Таблица 26.1

Левый столбец	**Правый столбец**	**Дополнительный столбец**
17	′1	1
34	′2	1
68	4	0
136	8	0
272	′16	1

В *правом* столбце отмечали штрихом числа (степени двойки!) которые в сумме дадут нужный множитель 19, а затем складывали соответствующие числа из *левого* столбца. Результат, очевидно, получался верный:

$$17 \times 19 = 323 = 272 + 34 + 17 = 17 \times (16+2+1).$$

Заметим теперь, что штрихи и пустые места (т.е. отсутствие штрихов) перед числами в правом столбце табл. 26.1 представляют собой готовую позиционную двоичную запись числа 19 (расположенную, впрочем, по вертикали). Читать эту запись нужно снизу вверх. В третьем, дополнительном столбце этой таблицы мы, для удобства читателя, обозначили присутствие штрихов единицами, а их отсутствие – нулями. Таким образом, в третьем столбце содержится готовая двоичная запись числа 19: $19 = 10011_{(2)}$.

27. О КВАДРАТНЫХ УРАВНЕНИЯХ С ПАРАМЕТРАМИ

Коэффициенты всех встречающихся ниже квадратных уравнений предполагаются вещественными. (Материал этого параграфа был опубликован в [16].)

Рассмотрим вначале одну несложную, но довольно поучительную задачу.

Задача № 1. Даны два квадратных уравнения:

$$x^2 + px + q = 0; \tag{27.1}$$

$$qx^2 + px + 1 = 0, \tag{27.2}$$

где $q \neq 1$. Требуется доказать, что если у этих двух уравнений есть общий корень, то этот корень равен ± 1.

Первое решение. Это решение основано на своеобразной симметрии между уравнениями (27.1) и (27.2). Действительно, заменяя в (27.1) x на $1/x$, замечаем, что уравнение (27.1) превратилось в (27.2). Поэтому, если x_1 и x_2 – корни уравнения (27.1), то тогда $1/x_1$ и $1/x_2$ – корни уравнения (27.2). Предположим, что у (27.1) и (27.2) есть общий корень. Тогда априори возможны два случая.

а) *Первый случай:* $x_1 = \dfrac{1}{x_1}$.

В этом случае, очевидно, $x_1 = \pm 1$, что мы и хотели бы установить.

б) *Второй случай:* $x_1 = \dfrac{1}{x_2}$.

Однако из последнего соотношения следует, что $x_1 x_2 = 1$, в то время как из уравнения (27.1) вытекает, что должно быть $x_1 x_2 = q$. Поскольку по условию задачи $q \neq 1$, получаем, что второй случай на самом деле невозможен.

Тем самым требуемое утверждение доказано.

Второе решение. Предыдущее решение было основано на соображении очень специального вида, которым удается воспользоваться в очень ограниченном классе задач. Сейчас мы решим нашу задачу, опираясь на следующий, значительно более общий принцип: *если у двух уравнений* $F(x) = 0$, $G(x) = 0$ *есть общий корень* x_0, *то* x_0 *является также корнем линейной комбинации этих уравнений*:

$$a(x)F(x) + b(x)G(x) = 0.$$

Применим это соображение к нашей задаче. Наша ближайшая цель – построить возможно более просто решаемую комбинацию уравнений (27.1) и (27.2). Для этого поступим следующим образом. Умножим (27.1) на q и вычтем из получившегося соотношения уравнение (27.2). В результате, очевидно, придем к уравнению первого порядка:

$$p(q-1)x + q^2 - 1 = 0,$$

решение которого дается формулой

$$x = \frac{q+1}{p}. \tag{27.3}$$

Итак, если общее решение уравнений (27.1) и (27.2) существует, то оно дается формулой (27.3).

Этого, однако, для нас недостаточно. Попробуем теперь применить аналогичную процедуру к исходным уравнениям (27.1), (27.2) и получить какое-то иное легко решаемое уравнение в качестве следствия. С этой целью умножим (27.2) на q и вычтем получившееся соотношение из (27.1). В результате получим уравнение второго порядка без свободного члена:

$$(q^2 - 1)x^2 + p(q - 1)x = 0,$$

откуда

$$x = -\frac{p}{q+1} \tag{27.4}$$

(решение $x = 0$ нас не интересует, так как у исходной пары уравнений, очевидно, не может быть общего корня $x = 0$).

Таким образом, общее решение исходной пары уравнений (27.1), (27.2) обязательно имеет вид (27.4). Однако при условии $q \neq 1$ у исходной пары уравнений *не может быть двух разных общих корней* (доказательство этого факта мы предоставляем читателю). Поэтому (27.3) и (27.4) – это два выражения для одного и того же корня. Перемножая соотношения (27.3) и (27.4), снова получаем требуемый результат.

Задача № 2 (см. [17]). Даны два квадратных уравнения:

$$x^2 + px + q = 0; \tag{27.5}$$

$$px^2 + qx + 1 = 0. \tag{27.6}$$

Требуется доказать, что если у этих уравнений есть общий вещественный корень, то он равен единице.

Решение. Любопытно, что если мы попробуем буквально скопировать второе решение задачи № 1 (то есть составить две линейные комбинации уравнений (27.5), (27.6): одну, сводящуюся к уравнению 1-го порядка, а другую – к уравнению 2-го порядка со свободным членом, равным нулю), то зайдем в тупик. Оказывается, чтобы решить эту задачу, нужно воспользоваться своеобразным сходством уравнений (27.5) и (27.6) и только затем, с учетом этого сходства, строить соответствующую комбинацию этих уравнений.

Итак, умножим уравнение (27.5) на x, получим кубическое (!) уравнение

$$x^3 + px^2 + qx = 0;$$

теперь становится ясно, о каком сходстве уравнений (27.5) и (27.6) шла речь выше. Вычитая (27.6) из этого кубического уравнения, очевидно, получаем

$$x^3 - 1 = 0,$$

откуда и следует требуемое утверждение.

Замечание. Нетрудно проверить, что у уравнения (27.5) имеется корень $x = 1$ в том и только том случае, когда

$$q = -(p + 1). \tag{27.7}$$

Поэтому полученный результат можно переформулировать следующим образом:

Теорема. *Уравнения* (27.5) *и* (27.6) *имеют общий вещественный корень тогда и только тогда, кода выполнено условие* (27.7). *Этот общий вещественный корень обязательно равен единице.*

Замечание. Нетрудно показать, что если левые части уравнений (27.5) и (27.6) не совпадают друг с другом тождественно, то уравнения (27.5) и (27.6) не могут иметь общих не вещественных корней.

Задача № 3. Даны два квадратных уравнения:

$$x^2 + px + q = 0; \tag{27.8}$$

$$a^2x^2 + apx + q = 0, \tag{27.9}$$

где $a \neq 1$ и 0; $q \neq 0$. Требуется доказать, что если у этих двух уравнений есть общий корень, то

$$p = -\left[\left(\frac{q}{a}\right)^{1/2} + (qa)^{1/2}\right]. \tag{27.10}$$

Решение. Прежде всего, заметим, что при замене x на x/a уравнение (27.9) переходит в (27.8). Поэтому если x_1 и x_2 – корни уравнения (27.9), то x_1/a и x_2/a – корни уравнения (27.8). Предположим, что у (27.8) и (27.9) есть общий корень. Тогда априори возможны два случая.

а) *Первый случай:* $x_1 = x_1/a$. Однако в силу предположения о том, что $q \neq 0$, имеем $x_1 \neq 0$. Поэтому рассматриваемый случай на самом деле невозможен (ибо $a \neq 1$).

б) *Второй случай:*

$$x_1 = x_2/a. \tag{27.11}$$

Однако $x_1 x_2 = q$; подставляя сюда выражение для x_1 из предыдущего равенства, легко получаем:

$$x_2 = (aq)^{1/2}. \tag{27.12}$$

Теперь из (27.11), (27.12) имеем:

$$x_1 = \left(\frac{q}{a}\right)^{1/2}. \tag{27.13}$$

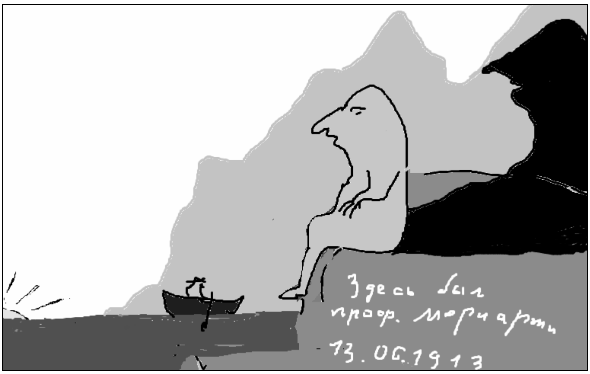
Из двух последних равенств и соотношения $p = -(x_1 + x_2)$ следует требуемое утверждение.

28. ПРОФЕССОР МОРИАРТИ НА ОТДЫХЕ

Протягивая Шерлоку Холмсу свою фотографию, сделанную ранним утром на одном из красивейших островов Тихого океана, Мориарти добавил:

– Что касается преступления, совершенного 13 июня 1913 года, то у меня имеется железное алиби. Достаточно взглянуть на это фото…

– Это грубая фальшивка, профессор, – заметил Холмс. – Любой мало-мальски сообразительный ученик 5-го класса сразу же вас разоблачит!



Что же так не понравилось Холмсу на предложенной ему фотографии?

29. ЧАСТОКОЛ ИЗ ЕДИНИЦ

Оказывается, справедливо следующее

Утверждение. *Любое натуральное число n можно умножить на подходящим образом подобранный натуральный множитель Q(n) и в качестве произведения получить 111…111000…000 (несколько единиц, за которыми может стоять некоторое количество нулей). Подчеркнем, что речь идет о записи числа nQ(n) в десятичной системе.*

На первый взгляд, это утверждение кажется очень трудным. Попытка решить в целых числах уравнение

$$nQ(n) = 111\ldots111000\ldots000 \qquad (29.1)$$

методом подбора представляется вообще безнадежной.

Однако эта задача легко поддается решению, если воспользоваться аппаратом бесконечных периодических десятичных дробей. (Наше изложение до некоторой степени будет следовать книге [13, с. 324]).

Пример 1.

Разберем в качестве примера случай $n = 7$.

Наш первый шаг – рассмотреть обыкновенную дробь $\frac{1}{n} = \frac{1}{7}$ и затем представить ее в виде бесконечной периодической десятичной дроби. Имеем (здесь удобно воспользоваться калькулятором!):

$$\frac{1}{7} = 0{,}142857142857142857\ldots = 0{,}(142857). \qquad (29.2)$$

Умножим теперь равенство (29.2) на 10 в степени, равной длине периода десятичной дроби из правой части этого равенства. Получим:

$$\frac{1}{7} \times 10^6 = 142857{,}(142857). \qquad (29.3)$$

Вычитая теперь (29.2) из (29.3), имеем:

$$\frac{1}{7} \times (10^6 - 1) = 142857,$$

откуда

$$\frac{1}{7} = \frac{142857}{999999}. \qquad (29.4)$$

Заметим теперь, что числитель дроби в правой части последнего равенства делится на 9 (это сразу следует из признака делимости на 9). Однако для нас важно (поскольку мы хотим на частном примере обсудить особенности общего случая) уметь доказывать этот факт, не обращаясь к признаку делимости на 9 (и, тем более, не производя непосредственно деления). Заметим с этой целью, что знаменатель дроби из левой части (29.4) не делится на 9 (а также на 3). Отсюда и вытекает возможность сокращения числителя и знаменателя дроби из правой части (29.4) на 9.

В результате имеем:

$$\frac{1}{7} = \frac{15873}{111111},$$

откуда

$$7 \times 15873 = 111111,$$

что и требовалось получить.

Более интересен случай, когда число n, для которого мы ищем подходящий множитель, само делится на 3 или на 9. В этом случае наш подход нужно слегка видоизменить.

Пример 2.

Пусть теперь $n = 18$. Имеем, действуя поначалу, как в предыдущем примере: $\frac{1}{n} = \frac{1}{18}$.

Представим $\frac{1}{18}$ в виде периодической десятичной дроби (опять на помощь может придти калькулятор):

$$\frac{1}{18} = 0{,}0555555555555\ldots = 0{,}0(5). \qquad (29.5)$$

Проделаем теперь с равенством (29.5) не одну, а две манипуляции. Во-первых, умножим это равенство на 10 в степени, равной длине непериодической части десятичной дроби 0,0(5), то есть на 10 в первой степени:

$$\frac{1}{18} \times 10 = 0{,}(5). \qquad (29.6)$$

А во-вторых, умножим (29.6) на 10 в степени, равной девятикратной длине периода десятичной дроби (29.5), т.е. на 10^9:

$$\frac{1}{18} \times 10 \times 10^9 = 555555555{,}(5). \qquad (29.7)$$

Вычитая (29.6) из (29.7), получаем:

$$\frac{1}{18}\times 10\times (10^9-1) = 555555555,$$

откуда

$$\frac{10}{18}=\frac{555555555}{999999999}\,. \tag{29.8}$$

Итак, мы почти у цели. Осталось только сократить на 9 числитель и знаменатель дроби в правой части (29.8). Однако числитель упомянутой дроби обязательно разделится на 9 в силу своего построения – это «девятикратный» (записанный 9 раз подряд) период десятичной дроби (29.5).

Поскольку $555555555 = 9\times 61728395$,
окончательно имеем из (29.8):

$$18\times 61728395 = 1111111110,$$

что и требовалось установить.

Следствие 1. Для любого простого p, отличного от 2 и 5, найдется такое натуральное $m = m(p)$, что число 111…1 (единица повторена m раз) делится на p.

Следствие 2. Пусть p – любое простое число, отличное от 3. Тогда сумма цифр периода в десятичном разложении дроби $1/p$ делится на 9.

Замечание. Дальнейшие результаты см. в [20].

30. О ПЕРИОДАХ ДЕСЯТИЧНЫХ ДРОБЕЙ

В этом параграфе мы разберем одну любопытную задачу о периодах десятичных разложений обыкновенных дробей. При этом мы будем опираться на известный результат о том, что если знаменатель обыкновенной дроби c/d не содержит множителей 2 и 5, то в десятичном разложении этой дроби период начинается сразу после запятой [13, 20].

Итак, мы собираемся доказать следующее

Утверждение (см. [20]). *Пусть p – простое число. Тогда наименьший период десятичного разложения обыкновенной дроби $1/p$ является делителем натурального числа $p - 1$.*

Приведем вначале несколько примеров, подтверждающих наше утверждение:

$1/7 = 0,(142857)$; длина периода равна 6 ($7 - 1 = 6$);

$1/41 = 0,(02439)$; длина периода равна 5 ($41 - 1$ делится на 5);

$1/53 = 0,(0188679245283)$; длина периода равна 13 ($53 - 1$ делится на 13).

Замечание. Не ограничивая общности, мы будем считать в дальнейшем, что $p > 5$. Действительно, для дробей 1/2, 1/3 и 1/5 наше утверждение, очевидно, верно, так как длины соответствующих периодов равны 1:

$$\frac{1}{2} = 0,50000\ldots = 0,5(0);$$

$$\frac{1}{3} = 0,33333\ldots = 0,(3);$$

$$\frac{1}{5} = 0,20000\ldots = 0,2(0).$$

Лемма (см. [20]). *Пусть p – простое ($p>5$), $q \in \{1; 2;...; p-1\}$. Тогда наименьшие периоды десятичных разложений обыкновенных дробей q/p и $1/p$ совпадают.*

Доказательство леммы. Действительно, обозначим через S наименьший период десятичного разложения дроби q/p, а через T – наименьший период десятичного разложения дроби $1/p$. Тогда, очевидно, будем иметь по формуле для суммы геометрической прогрессии:

$$\frac{q}{p} = 0,(S) = S\times(10^{-m} + 10^{-2m} + 10^{-3m} + \ldots) = \frac{S}{10^m - 1} \qquad (30.1)$$

(здесь m – длина периода S); и, аналогично,

$$\frac{1}{p} = 0,(T) = T\times(10^{-n} + 10^{-2n} + 10^{-3n} + \ldots) = \frac{T}{10^n - 1}, \qquad (30.2)$$

(где n – длина периода T).

Далее, так как q и p взаимно просты, то, как известно, должны существовать такие целые A и B, что

$$Ap + Bq = 1. \qquad (30.3)$$

Имеем теперь из (30.2) и (30.3):

$$\frac{1}{p}=\frac{Ap+Bq}{p}=A+\frac{Bq}{p}. \qquad (30.4)$$

Таким образом, дробь Bq/p имеет наименьший период той же длины n, что и дробь 1/p. Имеем теперь в силу (30.1)

$$\frac{Bq}{p}=\frac{BS}{10^m-1},$$

откуда, выделяя целую часть дроби и пользуясь равенством

$$\frac{1}{10^m-1}=10^{-m}+10^{-2m}+10^{-3m}+\ldots,$$

легко получаем, что *m является одним из периодов дроби Bq/p.* Следовательно, *n* является делителем *m*.

Теперь осталось доказать, что, наоборот, *m* является делителем *n*. Для этого умножим (30.2) на *q*. Рассуждая аналогично предыдущему, легко получаем, что *n* – один из периодов десятичного разложения дроби *q/p*. Поскольку в силу (30.1) *m* – наименьший период разложения этой дроби, приходим к выводу, что *m* – делитель *n*. Отсюда и вытекает требуемое равенство $m = n$.

Доказательство утверждения. В отличие от [20] наше доказательство не будет опираться на малую теорему Ферма. Пусть *p* – произвольное простое число, большее 5. Тогда каждая обыкновенная дробь вида *q/p,* где $1 \le q < p$, будет представима в виде бесконечной периодической десятичной дроби с ненулевым периодом. (В процедуре деления уголком, переводящей такую дробь в десятичную запись, могут возникать только ненулевые остатки от деления на *p*.) Всего существует $p - 1$ ненулевых остатков, которые могут в принципе возникать при делении на *p*, а именно:

$$\{1;\, 2;\ldots;\, p-1\}. \qquad (30.5)$$

Однако при переводе конкретной дроби *q/p* в десятичную запись в общем случае могут участвовать не все остатки (30.5), а только некоторые. При этом длина периода десятичного представления конкретной дроби *q/p*, очевидно, в точности равна количеству *m* остатков, участвующих в процедуре деления уголком. Если *r* – ненулевой остаток от деления на *p*, не участвующий в процедуре перевода дроби q/p в десятичную запись, то рассмотрим дробь r/p. В силу доказанной леммы длина периода десятичной записи дроби r/p также будет равна m; тем самым будет равно m и количество ненулевых остатков от деления на p, участвующих в переводе r/p в десятичную запись. Однако множества остатков, участвующих в переводе в десятичные записи дробей q/p и r/p, очевидно, не могут пересекаться. Итак, у нас уже имеется $2m$ ненулевых остатков, которые участвуют в переводах в десятичную запись дробей со знаменателем p. Если не все возможные остатки (30.5) при этом исчерпаны, продолжим процесс. В результате, очевидно, получим, что $p - 1$ кратно m. Тем самым наше утверждение доказано.

Замечание 1. *Пусть по-прежнему p – простое число, большее пяти, и пусть $q \in \{1; 2; ...; p-1\}$. Тогда если*

$$1/p = 0,(T), \tag{30.6}$$

то

$$q/p = 0,(qT). \tag{30.7}$$

Действительно, из (30.6) имеем:

$$\frac{1}{p} = \frac{T}{10^n} + \frac{T}{10^{2n}} + \frac{T}{10^{3n}} + ...,$$

где n – длина периода T. Следовательно,

$$\frac{q}{p} = \frac{qT}{10^n} + \frac{qT}{10^{2n}} + \frac{qT}{10^{3n}} + ...$$

Однако число qT не может быть более, чем n-значным, поскольку $q/p < 1$. Следовательно, qT и есть период длины n десятичного разложения дроби q/p.

С дальнейшими интересными результатами читатель может познакомиться по работе [20].

Замечание 2. Пусть, как и выше, p – простое число, большее пяти. Если длина периода T в десятичном разложении (30.6) в точности равна $p - 1$, то такое разложение мы будем называть *полнопериодным.* Как мы видели выше, полнопериодным является разложение дроби 1/7. Известны и другие полнопериодные разложения, например, для $p = 17$ и для $p = 29$ (см. в этой связи [21], где приведены также интересные фокусы, основанные на полнопериодных разложениях).

Как отмечено в [21], если T является полным периодом десятичного разложения дроби вида $1/p$, то для каждого $q \in \{1; 2;...; p-1\}$ имеет место равенство:

$$qT = T_i, \tag{30.8}$$

где T_i – некоторая циклическая перестановка цифр, образующих период T. Таким образом, в рассматриваемом полнопериодном случае

$$\frac{q}{p} = 0,(qT) = 0,(T_i). \tag{30.9}$$

(Чтобы убедиться в справедливости (30.8), достаточно разобрать пример с $p = 7$, вычисляя десятичное разложение дроби 1/7 при помощи деления уголком.) В частности, отсюда следует, что

$$1 - \frac{q}{p} = \frac{p-q}{p} = 0,\big((p - qT)\big) = 0,(T_j), \tag{30.10}$$

где T_j – еще одна циклическая перестановка цифр периода T.

Учитывая, что

$$1 = 0,9999999\ldots,$$

имеем из (30.9) и (30.10):

$$0,9999999\ldots - 0,(T_i) = 0,(T_j),$$

откуда, очевидно, следует равенство

$$999\ldots9 - T_i = T_j. \tag{30.11}$$

(В (30.11) количество девяток в записи 999…9 равно длине периода T.) Например, для $p = 7$ имеем:

$$\begin{gathered} 999999 - \boldsymbol{142}857 = 857\boldsymbol{142}; \\ 999999 - \boldsymbol{428}571 = 571\boldsymbol{428}; \\ 999999 - \boldsymbol{285}714 = 714\boldsymbol{285}; \\ 999999 - \boldsymbol{857}142 = 142\boldsymbol{857}; \\ 999999 - \boldsymbol{571}428 = 428\boldsymbol{571}; \\ 999999 - \boldsymbol{714}285 = 285\boldsymbol{714}. \end{gathered} \tag{30.12}$$

Аналогично, полный период дроби 1/17 равен 0588235294117647, и мы имеем:

$$9999999999999999 - \boldsymbol{05882352}94117647 = 94117647\boldsymbol{05882352}. \tag{30.13}$$

Еще один пример. Полный период дроби 1/29 равен 0344827586206896551724137931, откуда имеем:

$$9999999999999999999999999999 - \mathbf{\mathit{03448275862068}}96551724137931 = 96551724137931\mathbf{\mathit{03448275862068}}. \quad (30.14)$$

Задача. Верно ли, что для полных периодов вычисление разностей вида (30.12)–(30.14) всегда сводится к перестановке двух полупериодов?

31. ЗАГАДКА МОРИАРТИ

– Вот вы и попались, профессор, – сказал Холмс, защелкивая наручники на запястьях своего заклятого врага, – мой дедуктивный метод, как всегда, не подвел меня!

– Глупости, – отозвался Мориарти, – я попался случайно! А ваш хваленый метод не стоит и ломаного гроша.

– И вы можете мне это доказать? – осведомился Холмс, сохраняя присущую ему невозмутимость невзирая на нанесенное ему оскорбление.

– Да, но при одном условии: если ваш так называемый дедуктивный метод окажется бесполезен при ответе на один совершенно элементарный, можно сказать, детский вопрос – вы отпустите меня!

– Слово джентльмена!

– Итак, – начал Мориарти, – согласны ли вы, дражайший Холмс, с таким утверждением: *если мы расположим все четные и нечетные числа в их естественном порядке, то между любыми двумя различными четными числами всегда найдется, по крайней мере, одно нечетное?*

– Конечно, – ответил Холмс, раскуривая сигару. Прославленный сыщик заметил, как при его ответе нехорошо блеснули глаза его собеседника, но не придал этому зловещему обстоятельству должного значения.

– Тогда, – продолжал Мориарти, – согласитесь ли вы, любезнейший Холмс, еще с одним утверждением: *если мы, как и раньше, расположим все четные и нечетные числа в общепринятом порядке, то между любыми двумя нечетными числами обязательно найдется хотя бы одно четное число?*

– Естественно, – сказал Холмс, пуская кольцо дыма по направлению к камину и приготовившись услышать кое-что поинтереснее.– И что же дальше?

– А дальше, дорогой Холмс, вам придется меня отпустить, – ехидно заметил Мориарти и объяснил в двух словах ошеломленному сыщику его ошибку.

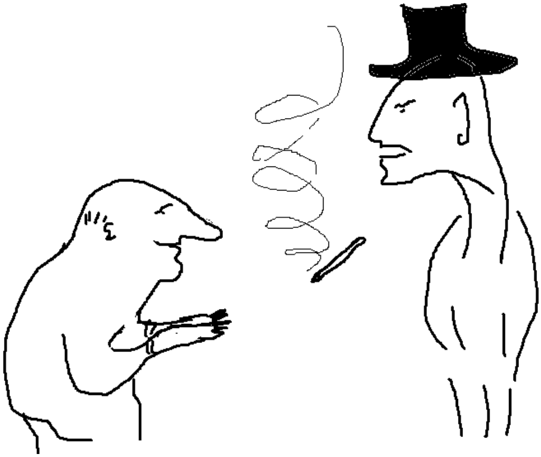


Рис. 31.1

А что же все-таки сказал проф. Мориарти Холмсу?

32. ДИХОТОМИЯ В ЛОГИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Рассмотрим вначале такую хорошо известную задачу.

Задача первая. *Нам загадали число x, меньшее 88. Мы можем задавать вопросы, на которые нам будут отвечать только «да» или «нет». За какое наименьшее число вопросов мы сможем наверняка узнать загаданное число?*

Решение № 1. Алгоритм угадывания более-менее понятен. Сначала нужно спросить:

– Верно ли, что $x > 44$?

Если неверно, то спросить:

– Верно ли, что $x > 22$?

И так далее. Этот процесс называется в математике «дихотомия» – разделение пополам. За семь вопросов мы наверняка узнаем загаданное число. (Когда в процессе такого разделения пополам нам будут встречаться нечетные числа, мы будем прибавлять к ним единицу и делить пополам получившееся четное число.)

Замечание. Можно доказать, что, задав меньшее число вопросов, нашу задачу, вообще говоря, решить нельзя. Попробуем объяснить это «на пальцах». Действительно, если, например, делить числовой интервал, в котором ведутся поиски числа x, не на две, а на три приблизительно равные части, то за два вопроса мы сумеем уменьшить интервал наших поисков в три раза (примерно). А при дихотомическом процессе за два вопроса интервал поисков уменьшается в четыре раза (опять же, примерно).

Итак, кажется интуитивно ясным, что предложенный метод неулучшаем.

Заметим, однако, что, действуя описанным выше образом, мы не узнаем загаданного числа, *пока не зададим все семь вопросов...*

Решение № 2. Но можно действовать иначе. Попросим загадывающего переписать число x в двоичной системе (двузначное десятичное число при переводе в двоичную систему будет записываться не более чем семью знаками); затем последовательно за семь вопросов мы сможем узнать все двоичные цифры загаданного числа.

Надо сказать, что, задавая вопросы типа: «является ли такая-то по счету двоичная цифра числа x нулем?», мы тоже устраиваем дихотомию, но организуем ее по другому принципу, чем в предыдущем решении.

Замечание. Выигрыш от применения двоичной записи заключается в следующем. Примерно в одной трети случаев мы сможем определить загаданное число, задав не 7, а только 6 вопросов! Для этого нужно узнавать цифры двоичной записи числа x, двигаясь в направлении от младших разрядов к старшим. Действительно, если из ответа на шестой вопрос будет следовать, что коэффициент при 2^5 равен 1, то седьмой вопрос не нужен, так как коэффициент при 2^6 автоматически оказывается равным нулю (поскольку $2^5 + 2^6 = 96 > 88$).

Замечание. Преимущество подхода, основанного на применении двоичной записи, сохраняется и в случае, кода мы пытаемся угадать натуральное число x из какого-либо интервала вида $x_1 < x < x_2$ (где x_1 и x_2 – тоже натуральные числа). В этом случае нужно задавать вопросы про цифры двоичной записи разности $x - x_1$.

Рассмотрим теперь еще одну задачу, принадлежащую на этот раз к известной серии задач о лжецах и правдолюбах. Нас будет интересовать в данном случае возможность применения дихотомической процедуры в не вполне стандартных условиях.

Задача вторая (см. также учебник В.В. Афанасьева [24, с. 188], где приведена похожая задача, решенная автором учебника за три вопроса).

Некий путешественник оказался в одном из двух городов, А или В, жители которых постоянно ездят друг к другу в гости. При этом коренные жители города А всегда говорят правду, а коренные жители города В через день на все вопросы отвечают правдиво, а через день – лгут. Может ли путешественник, задав всего два вопроса (предусматривающие ответы «да» или «нет»), определить, в каком городе он сам находится и с жителем какого города он разговаривает?

Решение. Будем обозначать жителя города А через ***a***, а жителя города В через ***b***. Таким образом, наш путешественник должен каким-то образом узнать, какая из *четырех* априори возможных ситуаций имеет место: А***a***, А***b***, В***a***, В***b***. Очевидно (и именно это утверждает теория информации), что лучшее, что может предпринять путешественник, – это устроить дихотомическую процедуру. Тогда за два вопроса он сумеет определить и город, и типаж собеседника. Но существует ли в условиях задачи такая дихотомическая процедура? Оказывается, что да, существует. Вот два вопроса, ответы на которые позволят путешественнику определить все, что ему требуется:

«*Вчера ты ответил бы “да” на вопрос: “Ты житель этого города?”*?» (32.1)

«*Вчера ты ответил бы “да” на вопрос:* “$2 \times 2 = 4$*?*”?» (32.2)

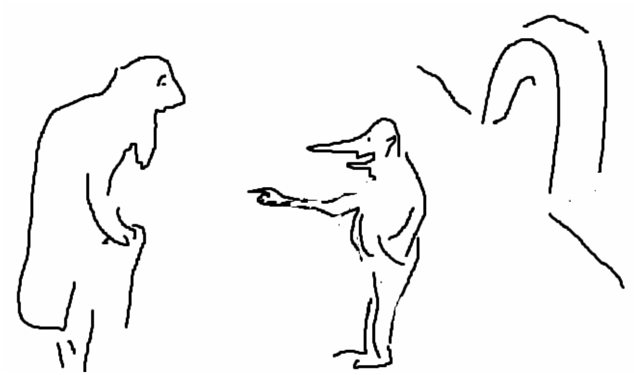


Рис. 32.1

Замечание. Любопытно, что логическая операция «*высказывание о высказывании*», на использовании которой основано множество занимательных логических задач (и которой мы только что воспользовались), не входит в основной список логических операций, изучаемых в курсе логики.

Замечание. Введем обозначения:

$Q(x)$ = «Вчера ты ответил бы “да” на вопрос x?»

P = «Ты – житель этого города?»

R = «Дважды два равно четырем?»

Тогда вопросы (32.1) и (32.2) из решения предыдущей задачи, очевидно, перепишутся в виде:

$$Q(P);\ Q(R).$$

Вопрос о том, реализуема ли дихотомическая процедура в *любых* задачах о лжецах и правдолюбах, нетривиален и требует более четкой постановки, ограничивающей круг этих задач. Рассмотрим в качестве примера еще одну задачу.

Задача третья (см. также [24, с. 190 и с. 314]). *Некий путешественник оказался в одном из двух городов, A или B, жители которых постоянно ездят друг к другу в гости. При этом коренные жители города A два дня подряд говорят правду, а на третий день лгут; что касается коренных жителей города B, то они через день отвечают на вопросы правдиво, а через день – лгут. Может ли путешественник, задав всего два вопроса (предусматривающие ответы «да» или «нет»), определить, в каком* *городе он сам находится и с жителем какого города он разговаривает?*

Решение. Путешественнику достаточно задать всего два вопроса, чтобы определить город, в котором он находится, и типаж собеседника. Вот эти вопросы:

$$Q(Q(Q(Q(Q(P)))));$$
$$Q(Q(Q(Q(Q(R))))).$$

Задача четвертая (аналогичная задача имеется в [24]). Допустим, что нам загадали целое число x, принадлежащее числовому отрезку от 0 до 127. Требуется отгадать это число, задав возможно меньшее число вопросов (предусматривающих ответы «да/нет»), при дополнительном условии, что отвечающий может один-единственный раз солгать.

Решение. Прежде всего, заметим, что число x может быть однозначно представлено в виде

$$x = a_0 + a_1 2 + a_2 2^2 + \ldots + a_6 2^6, \qquad (32.3)$$

где коэффициенты a_i могут быть равны 0 или 1. Итак, задав ***семь*** вопросов (о семи коэффициентах a_i) мы могли бы окончательно узнать загаданное нам число, если бы мы были уверены, что отвечающий ни разу не солгал. Заметим теперь, что, каков бы ни был предъявленный нам (возможно, содержащий ошибку) набор из *семи* коэффициентов ($a_0, a_1, a_2, \ldots, a_6$), перед нами раскрываются *восемь* возможностей:

(1) ошибка в коэффициенте a_0;

(2) ошибка в коэффициенте a_1;

....

(7) ошибка в коэффициенте a_6;

(8) все коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_6$ – верные.

При этом мы все еще не знаем, осталась ли у отвечающего возможность солгать или он ее уже израсходовал. Поэтому ***дважды*** задаем вопрос:

«*Правда ли, что все коэффициенты $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_6$ – верные*?» (32.4)

Если мы получим на этот (дважды заданный) вопрос хотя бы один ответ «да», то, очевидно, что имеет место ситуация (8), и мы определили загаданное число за 7 + 2 = 9 вопросов.

Если же дважды прозвучит ответ «нет», то имеет место один из случаев (1) – (7). Применяя дихотомическую процедуру, за ***три*** дополнительных вопроса определяем все семь коэффициентов в двоичном разложении (32.3). Таким образом, в этом случае нам потребуется 7 + 2 + 3 = 12 вопросов. Итак, для решения поставленной задачи в любом случае достаточно двенадцати вопросов.

Попробуем, однако, обойтись меньшим числом вопросов. Для этого заменим двукратный вопрос (32.4) на следующий ***однократно*** задаваемый вопрос:

«Так же ли верно, что ты ни разу не лгал, отвечая на вопросы о коэффициентах $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_6,$ как то, что ты сейчас не солжешь?» (32.5)

Возможны следующие три ситуации:

а) Отвечающий раньше не лгал и сейчас не лжет. Его ответ в этом случае: «да».

б) Отвечающий раньше лгал, а сейчас говорит правду. Его ответ в этом случае: «нет».

в) Отвечающий раньше не лгал, а сейчас лжет. Его ответ в этом случае: «да».

Итак, по ответу на однократно заданный вопрос (32.5) мы сразу же узнаем, лгал или нет отвечающий в ответ на один из предыдущих семи вопросов.

В итоге нам для определения загаданного числа будет достаточно 7 +1+3 = 11 вопросов. По-видимому, этот результат улучшить уже нельзя.

Замечание. Как мы уже отмечали выше, дихотомическая процедура(если она возможна) является наилучшим способом поиска недостающей информации при ответах «да/нет». Однако в некоторых задачах (похожих на вышеприведенные) дихотомическая процедура не является оптимальной. В частности, так обстоит дело в задаче о поиске фальшивой монеты среди настоящих при помощи взвешивания на чашечных весах. Дело в том, что процедура взвешивания дает нам не два варианта возможных ответов (как при ответах «да/нет»), а три: а) весы уравновешены; б) перевешивает левая чашка весов; в) перевешивает правая чашка весов. В соответствии с этим оптимальная стратегия поиска фальшивой монеты (которая, допустим, легче настоящих), состоит в разделении всей исследуемой совокупности монет не на две, а на три части. Дальнейшие подробности см. в [24].

Задача пятая. а) Известно, что среди четырех монет одинакового достоинства – одна фальшивая, отличающаяся от настоящих по весу. Заранее неизвестно, однако, фальшивая монета тяжелее или легче настоящих. Требуется изобрести весы, на которых за одно (!) взвешивание можно определить фальшивую монету.

б) Та же задача, когда всех монет N штук.

Решение. а) Нужно воспользоваться «трехчашечными» весами, изображенными на рис. 32.2. (Углы между соседними плечами трехчашечных весов равны 120°.)

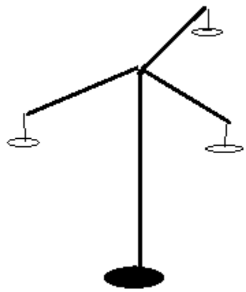


Рис. 32.2. «Трехчашечные» весы

б) Здесь все зависит от четности общего числа монет. При $N = 2k + 1$ нужны N-чашечные весы, на которые укладываются все монеты (по одной на каждую чашку). При $N = 2k$ нужны $(N - 1)$-чашечные весы, на которые нужно уложить $N - 1$ монету.)

Замечание. С дальнейшими интересными результатами можно познакомиться в [28]–[30].

33. ОБЕЗЬЯНА, НЕБОСКРЕБ И ОРЕХИ

В этом параграфе мы рассмотрим одну любопытную задачу, в которой дихотомическая процедура оказывается не только не оптимальной, но вообще непригодной для поиска недостающей информации. Задача эта, принадлежащая математическому фольклору, в несколько иной формулировке рассматривалась в [28]. В отличие от [28], мы приведем здесь ее полное решение. Итак, вот классическая формулировка:

Задача № 1. *Обезьяне, живущей в 100-этажном небоскребе, дают два кокосовых ореха. Цель обезьяны – определить, начиная с какого этажа брошенные вниз орехи будут раскалываться. (Если орех не раскололся, обезьяна может за ним спуститься и использовать орех снова. Расколовшийся орех использовать вторично нельзя.) Каково наименьшее число попыток, за которое обезьяна может наверняка определить номер искомого этажа?*

Нам, однако, будет удобнее рассматривать эту задачу в измененной постановке:

Задача № 2. *Обезьяне, живущей в небоскребе, дают два кокосовых ореха. Каким может быть наибольшее количество этажей в небоскребе, если известно, что обезьяна, используя подходящую стратегию, может за 14 попыток наверняка определить этаж, начиная с которого орехи раскалываются?*

Нам будет удобно ввести следующее

Определение. Если за заранее заданное число попыток обезьяна может, используя некоторую подходящую стратегию, наверняка определить в данном небоскребе этаж, начиная с которого раскалываются орехи, то мы будем говорить, что такой небоскреб *допускает абсолютно надежное обследование*.

Решение задачи № 2.

1) Прежде всего, заметим, что при правильной стратегии обезьяна не должна бросать первый орех ни с какого этажа, расположенного выше четырнадцатого. Действительно, если (первый) орех, брошенный вниз, например, с 17-го этажа, расколется, то за оставшиеся 14 – 1 = 13 попыток с помощью одного оставшегося ореха определить искомый этаж, вообще говоря, нельзя.

2) Заметим теперь, что в случае, когда раскалывается (первый) орех, брошенный с 14-го этажа, обезьяна может с помощью второго ореха определить искомый этаж за оставшиеся 14 – 1 = 13 попыток. Действительно, обезьяне достаточно начать сбрасывать орех поочередно с 1-го этажа, со 2-го, и т.д.

3) Так как нас интересует максимальная высота («этажность») небоскреба, в котором можно за 14 попыток наверняка определить номер искомого этажа, то первый орех обезьяне следует сбрасывать именно с 14 этажа. Действительно, если сброшенный, например, с 9-го этажа, (первый) орех не раскалывается, обезьяне придется в дальнейшем обследовать на 14 – 9 = 5 этажей больше, чем в случае, когда первый орех был сброшен с 14 этажа.

4) Дальнейшие рассуждения фактически повторяют рассуждения из предыдущих пунктов. Если первый орех, сброшенный с 14-го этажа, не раскололся, то истрачена одна попытка, и теперь бросать первый орех следует 27-го этажа (27 = 14 +13). Если первый орех, сброшенный с 27-го этажа, не раскололся, то истрачено две попытки, и в следующий раз этот орех следует бросать с 39-го этажа (39 = 14+13+12). И так далее. В результате максимальная высота небоскреба, доступного для абсолютно надежного обследования за 14 попыток, составляет

$$14+ 13+12+\ldots +1 = 14\times15/2 = 105 \text{ этажей.}$$

Замечание 1. Точно так же, максимальная высота небоскреба, доступного для абсолютно надежного обследования за 13 попыток, составляет

$$13+12+\ldots+1 = 13\times14/2 = 91 \text{ этаж.}$$

Тем самым, мы получаем ответ на задачу № 1: наименьшее число попыток, за которое обезьяна сможет наверняка определить номер искомого этажа в 100-этажном небоскребе, равно 14.

Замечание 2. Вернемся теперь к задаче № 2 и постараемся обобщить полученные результаты. Обозначим через n число попыток, которые разрешено сделать обезьяне, а через N – соответствующее максимальное количество этажей в небоскребе, доступном для абсолютно надежного обследования. Тогда из предыдущего, очевидно, следует, что величины n и N связаны соотношением:

$$N = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad (33.1)$$

откуда

$$n^2 + n - 2N = 0. \qquad (33.2)$$

Следовательно,

$$n = \frac{-1 + (1 + 8N)^{1/2}}{2} \qquad (33.3)$$

(мы по очевидным соображениям выбрали положительный корень квадратного уравнения (33.2)). Если теперь нам, как в задаче № 1, задано число этажей N в небоскребе и требуется определить наименьшее число попыток n, за которое обезьяна сможет наверняка найти искомый этаж, то:

а) в случае, когда выражение справа в (33.3) не является целым числом, вместо (33.3) следует, очевидно, воспользоваться соотношением:

$$n = \left[\frac{-1 + (1 + 8N)^{1/2}}{2} \right] + 1, \qquad (33.4)$$

где квадратные скобки обозначают целую часть числа;

б) если же выражение справа в (33.3) – целое число, то искомый ответ дает непосредственно формула (33.3).

Задача № 3 (в более общей постановке эта задача приведена в [28]). *Обезьяне, живущей в небоскребе, дают три кокосовых ореха. Каким может быть наибольшее количество этажей в небоскребе, если известно, что обезьяна, используя подходящую стратегию, может за 15 попыток наверняка определить этаж, начиная с которого орехи раскалываются?*

Решение. Наши рассуждения будут аналогичны рассуждениям, проведенным при решении задачи № 2. Очевидно, что бросать (первый) орех ни с какого этажа, расположенного выше 106-го, нельзя. Действительно, если бросить первый орех, например, со 125-го этажа и этот орех разобьется, то останется 14 попыток, два ореха и 124 этажа, которые, как мы уже знаем из решения предыдущей задачи, абсолютно надежно обследовать, вообще говоря, не удастся. Повторяя рассуждение из пунктов 2) и 3) решения предыдущей задачи, получаем, что при оптимальной стратегии бросать первый орех следует именно со 106-го этажа. Если этот орех разбился, то дальнейшие действия очевидны (см. решение задачи № 2). Если же первый орех не разбился, то у нас остается 14 попыток. Следовательно, во второй раз первый орех нужно бросать с этажа, номер которого вычисляется по формуле (см. замечание 1):

$$(105+1) + (91+1) = 106 + 92 = 198.$$

И так далее. В результате, максимальное количество этажей небоскреба, доступного для абсолютно надежного обследования, оказывается равным

$$\left(\frac{14\times 15}{2}+1\right)+\left(\frac{13\times 14}{2}+1\right)+\ldots+\left(\frac{1\times 2}{2}+1\right). \qquad (33.5)$$

Замечание 3. В общем случае снова обозначим через n число попыток, которые разрешено сделать обезьяне (располагающей теперь тремя орехами), а через M – соответствующую максимальную этажность небоскреба, в котором обезьяна может наверняка определить искомый этаж. Тогда по аналогии с (33.5) имеем:

$$\begin{aligned} M &= \left[\frac{(n-1)n}{2}+1\right]+\left[\frac{(n-2)(n-1)}{2}+1\right]+\ldots+\left[\frac{1\times 2}{2}+1\right]+1= \\ &= \frac{1}{2}\left[1\times 2+2\times 3+\ldots+(n-1)n\right]+n=\frac{n(n^2+5)}{6}. \end{aligned} \qquad (33.6)$$

(Соотношение (33.6) нетрудно доказать по индукции.) В частности, из этой формулы следует, что при $n = 15$ величина M (т.е. сумма (33.5)) равна 575.

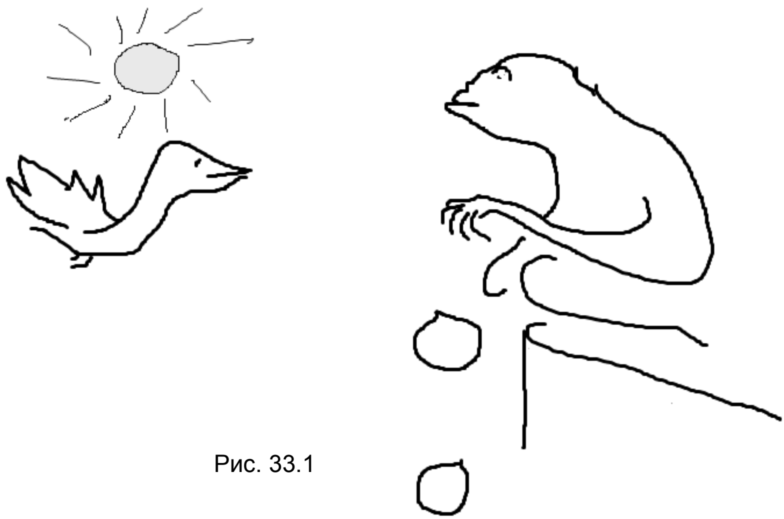


Рис. 33.1

Замечание 4. Из (33.6) следует также, что:

$M = 469$	при $n = 14$;
$M = 377$	при $n = 13$;
$M = 298$	при $n = 12$;
$M = 231$	при $n = 11$;
$M = 175$	при $n = 10$;
$M = 129$	при $n = 9$;
$M = 92$	при $n = 8$;
$M = 63$	при $n = 7$;
$M = 41$	при $n = 6$;
$M = 25$	при $n = 5$;
$M = 21$	при $n = 4$;
$M = 7$	при $n = 3$;
$M = 3$	при $n = 2$;
$M = 1$	при $n = 1$.

34. МАГИЧЕСКИЙ КВАДРАТ И СТРАТЕГИЯ ШЕНЯ

В этом параграфе мы рассмотрим одну красивую идею, связывающую магический квадрат с игрой в крестики-нолики. Идея эта, по-видимому, принадлежит А. Шеню [29, с. 19–20].

Напомним, прежде всего, что *магическим квадратом* n*-го порядка* называется квадратная таблица размера $n \times n$, заполненная числами 1, 2, … n^2, причем так, что сумма этих чисел вдоль каждой строки, каждого столбца и каждой из двух диагоналей одна и та же. Рассмотрим магический квадрат третьего порядка (см. рис. 34.1).

2	9	4
7	5	3
6	1	8

Рис. 34.1

Можно показать, что все остальные магические квадраты размера 3×3, заполненные девятью различными ненулевыми цифрами, получаются из квадрата, изображенного на рис. 34.1, при помощи отражений относительно горизонтальной и/или вертикальной средней линии, а также относительно диагоналей этого квадрата. (Заметим, что суперпозиция отражения относительно какой-либо средней линии квадрата и отражения относительно диагонали квадрата представляет собой поворот на 90 градусов с центром в центре квадрата.)

А. Шень в [29] предложил следующую игру:

*На столе выложены карточки с номерами от 1 до 9. Двое играющих по очереди берут карточки; выигрывает тот, кто первым соберет **три** карточки с общей суммой 15.*

Как заметил А. Шень, если расположить эти карточки в виде магического квадрата (см. рис. 34.1), предложенная им игра сведется к обычной игре в крестики-нолики! Дело здесь в том, что существует в точности восемь различных комбинаций из трех ненулевых цифр, которые в сумме дают 15, и все эти комбинации представлены на рис. 34.1. (Общеизвестно, что при правильной игре в крестики-нолики на квадрате 3×3 неизбежна ничья.)

Ниже предлагается следующая модификация игры Шеня.

*На столе выложены десять карточек с написанными на них номерами: 1, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 7, 9 (номер «три» встречается дважды). Двое играющих по очереди берут карточки; выигрывает тот, кто сможет составить из каких-либо **трех** своих карточек набор с общей суммой 15 за меньшее число ходов.*

Пример. *Таблица 34.1*

Ходы 1-го игрока	5	8	4	7	9
Ходы 2-го игрока	3	2	6	3	1

Как видно из табл. 34.1, результат проведенной игры – ничья (ни один из игроков не может из своих пяти карточек выбрать три с общей суммой 15).

Задача. Проводится модифицированная игра Шеня. Каким будет ее итог, если оба игрока действуют оптимально?

35. ПЕРЕПРАВЫ И СИММЕТРИЯ

Задачи о переправах имеют давнюю историю. Наиболее знаменитая из этой серии задач – это задача о том, как крестьянину переправить с одного берега реки на другой волка, козу и капусту. (Волка без присмотра нельзя оставлять с козой, а козу – с капустой; в лодку крестьянин может взять с собой либо волка, либо козу, либо капусту.)

Решение этой задачи представляет собой простой, но все же нетривиальный алгоритм, который мы здесь не приводим ввиду его общеизвестности.

В последние годы появились новые задачи о переправах, требующие намного большей изобретательности. Одну из таких задач мы здесь разберем; она интересна тем, что для ее решения удается привлечь соображения, связанные с симметрией (что, вообще говоря, не характерно для задач о переправах).

Задача эта реализована в виде головоломки on-line:
http://online-igra.com.ua/IQ-challenge-animal-cross_YHjFE4i
http://www.willinggames.com/kids-games/kids-595.html

Здесь мы приведем **усиленную** (по сравнению с упомянутой выше головоломкой on-line) формулировку рассматриваемой задачи.

Задача. *На другой берег реки хотят переправиться шесть пар зверей: Мамонт с мамонтенком, Лев с львенком и Тигр с тигренком. Лодка вмещает только двоих, грести умеют Лев, Тигр и, кроме того, мамонтенок. Ни одного маленького звереныша нельзя оставлять без его собственного родителя в компании взрослого зверя другой породы. Как организовать переправу?*

Решение. Будем обозначать зверей соответствующими начальными буквами, заглавными для взрослых зверей и строчными для зверят.

Тогда начальное положение, описанное в условии задачи можно условно изобразить так:

Левый берег Правый берег

1) М, м; Л, л; Т, т; <лодка> |||

Нетрудно заметить, что вначале нужно переправить на другой берег львенка или тигренка (безразлично, кого – львенок и тигренок входят в условие задачи симметрично). Итак, пусть, для определенности, мамонтенок везет львенка:

2) М; Л; Т, т ||| м; л; <лодка>

После чего мамонтенок, естественно, возвращается (надо же вернуть лодку для перевозки остальных зверей!):

3) М, м; Л; Т, т <лодка> ||| л

Следующие две переправы также очевидны – мамонтенок должен перевезти тигренка и затем вернуться обратно:

4) М; Л ; Т ||| м; л; т; <лодка>

5) М, м; Л; Т; <лодка> ||| л; т

Далее, единственный естественным образом напрашивающийся шаг – это переезд Льва и Тигра к своим детенышам:

6) М, м ||| Л, л; Т, т ;<лодка>

Теперь, наконец, задача становится трудной. Единственная возможность как-то изменить ситуацию, не допуская повторения ходов – это перевести Льва и львенка (или Тигра с тигренком) обратно, но при этом мы как будто не приближаемся к цели, а удаляемся от нее! Итак,

7) М, м; Л, л; <лодка> ||| Т, т

Что же делать дальше? Снова единственная возможность избежать повторения ходов – это перевести Мамонта с мамонтенком на правый берег. Но не тупик ли это? Ситуация

-7) Л, л ||| М, м; Т, т; <лодка>

на первый взгляд не внушает оптимизма – рещение, вроде бы, не просматривается… (И это легко объяснить – до окончательного решения задачи еще шесть ходов.) И тут на помощь приходит математика!

Действительно, Лев с львенком и Тигр с тигренком входят в нашу задачу равноправно. Поэтому расположения 7) и -7) можно считать симметричными относительно реки. Но это значит, что, повторяя (в обратном порядке) предыдущие ходы с заменой Л, л на Т, т, мы придем к расположению зверей, симметричному по отношению к расположению 1) относительно реки, т.е. решим задачу.

Действительно, вот эти ходы:

-6) Л, л; Т, т; <лодка> ||| М, м

-5) л; т ||| М, м; Л; Т; <лодка>

-4) м; л; т;<лодка> ||| М; Л; Т
-3) л ||| М, м; Л; Т, т; <лодка>
-2) м; л; <лодка> ||| М; Л; Т, т
-1) ||| М, м; Л, л; Т, т; <лодка>

Задача решена.

Замечание. Начиная с хода -3) можно было бы заканчивать переправу зверей по-другому. За львенком мог бы поехать не мамонтенок, а Лев.

36. «ДИАГОНАЛЬНАЯ» ИНДУКЦИЯ

Этот параграф посвящен доказательству следующей теоремы.

Теорема. При каждом натуральном n справедливо утверждение:

$$n^{n+1} + (n+1)^{2n-1} \text{ делится нацело на } (n^2+n+1) \qquad (36.1)$$

Замечание. Трудно сказать, может ли утверждение (36.1) быть доказано по индукции «лобовым» способом. Однако (36.1) очень просто выводится в качестве побочного результата из несложной задачи на делимость полиномов.

Лемма. Пусть a – вещественный параметр. Тогда справедливы соотношения:

$$a^{n+1} + (a+1)^{2n-1} = (a^2+a+1)P_{m(n)}(a), \qquad (36.2)$$

$$(a+1)^{n+1} + (-1)^n a^{2n-1} = (a^2+a+1)Q_{m(n)}(a), \qquad (36.3)$$

(в (36.2) и (36.3) n = 1, 2, 3, …);

$$a^n(a+1)^{n+3} + (-1)^n = (a^2+a+1)R_{2n+1}(a), \qquad (36.4)$$

$$a^{n+3}(a+1)^n + (-1)^{n+1} = (a^2+a+1)S_{2n+1}(a), \qquad (36.5)$$

$$(a+1)^n + (-1)^{n+1}a^{2n+3} = (a^2+a+1)T_{2n+1}(a), \qquad (36.6)$$

$$a^n + (a+1)^{2n+3} = (a^2+a+1)U_{2n+1}(a) \qquad (36.7)$$

(в (36.4)–(36.7) n = 0, 1, 2, 3, …).

Здесь P, Q, R, S, T, U – целочисленные полиномы по a (т.е. полиномы с целочисленными коэффициентами), степени которых указаны в нижнем индексе; при этом $m(n) = \max\{n-1, 2n-3\}$.

Доказательство леммы. Сосредоточимся вначале на доказательстве утверждения (36.2) леммы. Будем рассуждать по индукции. При $n=1$ утверждение (36.2), очевидно, верно. Предположим, что (36.2) справедливо при n, равном некоторому произвольно выбранному натуральному k, т.е.

$$a^{k+1} + (a+1)^{2k-1} = (a^2 + a + 1)P_{m(k)}(a),$$

и докажем, что тогда (36.2) будет справедливо при $n = k + 1$.

Действительно, полагая в левой части (36.2) $n = k + 1$, проведем тождественные преобразования с учетом сделанного предположения:

$$a^{k+2} + (a+1)^{2k+1} = \left[a^{k+1} + (a+1)^{2k-1}\right]a - a(a+1)^{2k-1} + (a+1)^{2k+1} =$$

$$= (a^2 + a + 1)aP_{m(k)}(a) + (a+1)^{2k-1}\left[-a + (a+1)^2\right] =$$

$$= (a^2 + a + 1)\left[aP_{m(k)}(a) + (a+1)^{2k-1}\right],$$

что и требовалось установить. Утверждение (36.2) леммы доказано.

Для доказательства (36.3) достаточно сделать в (36.2) замену

$$a \to -1 - a, \tag{36.8}$$

затем для доказательства соотношения (36.4) нужно сделать в (36.3) замену

$$a \to 1/a. \tag{36.9}$$

Применяя к каждому новому получающемуся соотношению по очереди преобразование (36.8) или (36.9) переменной a, получаем остальные соотношения (36.5), (36.6) и (36.7).

Лемма доказана.

Замечание. Соотношение (36.7) получается из (36.6) в результате замены (36.8). Если теперь (соблюдая очередность производимых замен) применить замену (36.9) к соотношению (36.7), то получим исходное соотношение (36.2). Тем самым, продолжать процесс после получения соотношения (36.7) не имеет смысла – мы будем получать уже полученные ранее результаты.

Замечание. Мы могли бы, отправляясь от (36.2), чередовать замены (36.8) и (36.9) в другом порядке. Сначала применить к (36.2) замену (36.9), затем к получившемуся соотношению – замену (36.8) и так далее. В результате мы пришли бы все к тому же набору соотношений (36.2)–(36.7), расположенных в другом порядке.

Замечание. Нетрудно видеть также, что каждое из преобразований (36.8), (36.9), будучи применено дважды, превращается в тождественное преобразование переменной *a*.

Следствие из леммы. Полагая, например, $a=3$, получаем из (36.2)–(36.7), что:

$3^{n+1}+4^{2n-1}$ делится на 13 при $n = 1, 2, 3,\ldots$;

$4^{n+1}+(-1)^n 3^{2n-1}$ делится на 13 при $n = 1, 2, 3,\ldots$;

$3^n 4^{n+3}+(-1)^n$ делится на 13 при $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$;

$3^{n+3}4^n+(-1)^{n+1}$ делится на 13 при $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$;

$4^n+(-1)^{n+1}3^{2n+3}$ делится на 13 при $n = 0, 1, 2, 3,\ldots$;

3^n+4^{2n+3} делится на 13 при $n = 0, 1, 2, 3,\ldots$.

Точно так же, выбирая, например, натуральный параметр *a* в пределах от 3 до 7, мы можем с помощью вышеприведенной леммы легко получить 30 однотипных (но различных!) задач на применение метода полной математической индукции. Результат, который может оказаться полезным при проведении контрольных работ.

Перейдем теперь к вопросу, сформулированному в начале параграфа.

Доказательство теоремы. Полагая в (36.2) $a = n$, немедленно получаем (36.1). Теорема доказана.

37. БУКЕТЫ И НОД

Задача 1(см. [9]). В Тридевятом царстве королю на день рождения подарили 323 белых пиона и 221 красный пион. Король повелел понаделать из всех этих цветов *максимально* возможное количество букетов – причем так, чтобы а) все букеты были совершенно одинаковы и б) все цветы были использованы. (В случае невыполнения хотя бы одного из своих требований король обещал отрубить садовнику голову.) Из скольких цветков должен был состоять каждый букет?

Решение. Здесь мы имеем дело с той довольно часто встречающейся ситуацией, когда задачу проще решать в общем виде, чем в частной постановке (т.е. с заданными в условии конкретными числами). Будем поэтому временно считать, что белых пионов A штук, а красных пионов B штук.

Обозначим, далее, через x количество букетов, через a – количество белых пионов в одном букете, через b – количество красных пионов в одном букете. Нетрудно видеть, что тогда должны выполняться соотношения:

$$ax = A,\ bx = B, \qquad (37.1)$$

так что число x оказывается общим делителем чисел A и B. Однако по условию задачи количество букетов должно быть максимально возможным. Следовательно, x – наибольший общий делитель чисел A и B:

$$x = \text{НОД}\,(A, B). \qquad (37.2)$$

Отсюда очевидным образом следует, что в каждом букете

$$\frac{A+B}{\text{НОД}(A,B)} \qquad (37.3)$$

цветков. Поскольку $323 = 17\times 19, 221 = 17\times 13$, сразу же получаем, что НОД (323; 221) = 17, откуда вытекает, что в условиях задачи количество цветков в одном букете равно

$$(323 + 221):17 = 19 + 13 = 32.$$

Ответ: в каждом букете должно быть по 32 пиона.

Наиболее интригующим в решении задачи 1 выглядит равенство (37.2), так как его геометрическая интерпретация сразу не очевидна. Рассмотрим теперь еще одну задачу, связанную с предыдущей; ее мы сразу сформулируем «в общем виде».

Задача 2. В Тридевятом царстве королю на день рождения принесли A белых пионов и B красных. Король повелел понаделать из них *минимально* возможное количество букетов, соблюдая следующие условия: а) во всех букетах должно быть одно и то же количество пионов; б) в каждом букете пионы должны быть одного цвета; в) все пионы должны быть использованы. (В случае невыполнения хотя бы одного из своих пожеланий король обещал отрубить садовнику голову). Из скольких пионов должен был состоять каждый букет?

Решение.Так как количество букетов должно быть минимальным, количество цветков в каждом букете, очевидно, должно быть максимально возможным (при выполнении условий задачи). Обозначим это число (количество цветков в каждом букете) через y. Далее, из условий задачи следует, что yдолжно целое число раз укладываться как в A, так и в B. Иными словами, должны выполняться равенства (аналогичные равенствам (37.1)):

$$ky = A,\ py = B,$$

где k и p – целые числа. Итак, y – общий делитель чисел A и B. Однако, как мы заметили выше, число y должно быть максимально возможным; следовательно,

$$y = \text{НОД}\ (A, B). \qquad (37.4)$$

Ответ: искомое число пионов в одном букете дается формулой (37.4).

Замечание. Итак, налицо формальное совпадение выражений (37.2) и (37.4) в двух, казалось бы, разных задачах. Как объяснить это совпадение?

Мы объясним, в чем тут дело, на конкретном простом примере. Пусть $A = 6$, В = 9 так что НОД(A, B) = 3. Будем обозначать белые пионы нулями, а красные – единицами:

$$000;\ 000;\ 111;\ 111;\ 111 \qquad (37.5)$$

(при помощи точки с запятой мы отделяем трехэлементные однородные «букеты» друг от друга). Геометрически очевидно, что три – это наибольшая численность группы объектов, одновременно укладывающейся целое число раз в группу численности 6 и в группу численности 9. Таким образом, соотношение (37.4) допускает простую геометрическую интерпретацию.

Перейдем теперь к геометрической интерпретации соотношения (37.2). Для этого расположим трехэлементные группы «пионов» из (37.5) вертикально:

$$\begin{array}{c} 00111 \\ 00111 \\ 00111 \end{array} \qquad (37.6)$$

и образуем новые *«букеты одинакового состава»*из горизонтальных строк. Опять же геометрически очевидно, что *количество новых «букетов одинакового состава» из* (37.6) *неизбежно* *оказывается равным числу элементов в прежних «однородных букетах одинаковой численности» из* (37.5). Тем самым связь между соотношениями (37.2) и (37.4) установлена. (Похожее рассуждение имеется также в [4].)

38. ОБМАНЧИВОЕ СХОДСТВО

В учебниках по математике в теме «Делимость» довольно часто встречается следующая задача.

Задача № 1 (см., например, [9]). *Доказать, что среди любых ста натуральных чисел (не обязательно различных) всегда можно выбрать пятнадцать таких, которые дают одинаковые остатки при делении на семь.*

Решение. Как известно, при делении на натуральное число n в принципе возможны следующие остатки: 0, 1, 2, …, n-1. Таким образом, различных остатков оказывается всего n штук. Соответственно, при делении на 7 в принципе возможны остатки: 0, 1, 2,…,6 (всего 7 штук). Будем теперь рассуждать от противного (и заодно оценим силу этого метода!). Предположим, что существуют такие сто не обязательно различных натуральных чисел, из которых невозможно выбрать 15 чисел, дающих одинаковые остатки при делении на 7. Обозначим эту сотню чисел через А. Но тогда для каждого из семи в принципе возможных остатков найдется в наборе А не более 14 чисел, дающих этот остаток при делении на 7. Однако отсюда следует, что численность набора А не может превосходить $14\times7 = 98$, что противоречит условию. Тем самым требуемое утверждение доказано.

Та же самая идея эксплуатируется в следующей задаче.

Задача 1а. *Доказать, что среди произвольно взятых ста натуральных чисел (не обязательно различных) всегда найдутся: а) семь чисел, сумма которых делится на 7; б) четырнадцать чисел, сумма которых делится на 7.*

Решение. Как мы знаем из решения предыдущей задачи, среди произвольно взятой сотни натуральных чисел всегда можно найти пятнадцать чисел, дающих одинаковые остатки при делении на 7. Выберем среди этих пятнадцати чисел произвольные семь (произвольные четырнадцать); их сумма, очевидно, будет делиться на 7 (соответственно, на 14). Задача решена.

Приведем теперь одну любопытную задачу, которая давалась на математических олимпиадах в пятидесятые годы прошлого столетия. Внешне эта задача похожа на предыдущую, однако сходство это обманчиво.

Задача 2. *Доказать, что среди произвольно взятых ста целых неотрицательных чисел (не обязательно различных) всегда можно выбрать несколько таких, что их сумма будет делиться на 100. (Если среди упомянутых ста чисел имеется число z, делящееся на 100, то разрешается выбирать именно это число z в качестве «суммы», состоящей из одного слагаемого.)*

Первое, что приходит в голову, – это действовать в духе решения задачи 1а. Однако произвольно взятые сто чисел вовсе не обязаны давать один и тот же остаток при делении на 100. Итак, желание действовать, опираясь на соображения, приведшие к успеху в предыдущей задаче, ведет в тупик. Заметим теперь, что в предыдущей задаче строение числа 100 (его представление в виде произведения простых множителей) для нас не играло никакой роли, число 100 можно было заменить на 99, и утверждение задачи 1а осталось бы в силе. Может быть, теперь имеет смысл обратить внимание на строение числа 100?

Оказывается, что именно этот путь ведет нас к успеху. Нам придется воспользоваться тем фактом, что $100 = 10\times10$, $10 = 2\times5$.

Утверждение 1. *Пусть a и b – два произвольно взятых (возможно, совпадающих) натуральных числа. Тогда верно по крайней мере одно из двух положений:*

а) среди чисел a и b найдется четное;

б) сумма этих чисел четная.

Доказательство очевидно.

Утверждение 2. *Пусть a, b, c, d, e – пять произвольно взятых (не обязательно различных) натуральных чисел. Тогда среди них можно выбрать несколько чисел, сумма которых делится на 5. (Если среди упомянутых пяти чисел имеется число z, делящееся на 5, то разрешается выбирать именно это число z в качестве «суммы», состоящей из одного слагаемого.)*

Доказательство. Очевидно, что, не ограничивая общности, можно считать числа *a, b, c, d, e* принадлежащими множеству $\{0, 1, 2, 3, 4\}$. Теперь доказательство утверждения сводится к перебору не слишком большого числа вариантов. Действительно, если в набор *a, b, c, d, e* входит ноль, то именно этот ноль мы и выбираем, и доказывать нечего. Таким образом, нас будут интересовать лишь варианты, когда числа *a, b, c, d, e* принадлежат множеству$\{1, 2, 3, 4\}$. Непосредственный перебор вариантов доказывает справедливость сделанного утверждения.

Утверждение 3. *Среди произвольно взятых десяти целых неотрицательных чисел (не обязательно различных) всегда можно выбрать несколько таких, что их сумма будет делиться на 10. (Если среди упомянутых десяти чисел имеется число z, делящееся на 10, то разрешается выбирать именно это число z в качестве «суммы», состоящей из одного слагаемого.)*

Доказательство. Рассмотрим десять произвольно взятых целых неотрицательных чисел и распределим их (опять же, произвольным образом) по двум наборам А и Б, по пять чисел в каждый набор. В силу утверждения 2 из совокупности А можно выбрать несколько чисел, сумма которых делится на 5; обозначим эту сумму через v. Точно так же, из совокупности Б можно выбрать несколько чисел, сумма которых тоже делится на 5; обозначим эту сумму через w. Далее, в силу утверждения 1 по крайней мере одна из трех сумм: v, w, v+w будет четной, и, следовательно, будет делиться на 10. Утверждение доказано.

Решение задачи 2. Рассмотрим набор А, состоящий из ста произвольно взятых целых неотрицательных чисел, и распределим эти числа (произвольным образом) по десяти совокупностям, отправив по десять чисел в каждую совокупность. Совокупности эти обозначим соответственно A_1, A_2, … A_{10} . Как следует из утверждения 3, *в каждой из этих совокупностей* можно найти несколько чисел, сумма которых делится на 10. Обозначим упомянутые суммы через $10w_1$, $10w_2$, …,$10w_{10}$. Вновь в силу утверждения 3 среди чисел w_1, w_2, …, w_{10} можно найти несколько, в сумме делящихся на 10. Пусть, например, $w_1 + w_2$ делится на 10. Тогда выражение $10w_1 + 10w_2 = 10 \times (w_1 + w_2)$, представляющее собой сумму нескольких чисел из исходного набора А, очевидно, будет делиться на 100. Задача решена.

Похоже, что справедливо следующее утверждение, обобщающее задачу 2.

Гипотеза. *Среди произвольно взятых n целых неотрицательных чисел (не обязательно различных) всегда можно выбрать несколько таких, что их сумма будет делиться на n. (Если среди упомянутых n чисел имеется число z, делящееся на n, то разрешается выбирать именно это число z в качестве «суммы», состоящей из одного слагаемого.)*

Ответы к задачам из пп. 28 и 31

1. Ответ к задаче из п. 28: *на рассвете (когда Солнце показалось по крайней мере на четверть своего диаметра) тень профессора Мориарти, сидящего у кромки воды, не могла быть выше самого Мориарти.*

2. Ответ к задаче из п. 31: *например, между 31-м января и 1-м февраля нет ни одного четного числа.*

СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$\forall$ – квантор общности ($\forall x$ – «для всех x»);

$\exists$ – квантор существования ($\exists x$ – «найдется x»);

$\vee$ – дизъюнкция высказываний (A$\vee$B – «A или B», в смысле «хотя бы одно из двух»);

$\wedge$ – конъюнкция высказываний (A$\wedge$B – «A и B»);

$\neg$ – отрицание высказывания ($\neg$A – «не A», «неверно, что A»);

$\to$ – импликация высказываний (A$\to$B – «если A, то B»);

$\leftrightarrow$ – эквиваленция высказываний (A$\leftrightarrow$B – «A тогда и только тогда, когда B»);

C_n^k – число сочетаний из n элементов по k элементов, т.е. число различных k-элементных подмножеств n-элементного множества;

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванова Е.А., Локшин А.А.* О парадоксе математической индукции // Актуальные проблемы современной науки, 2008, № 2, с. 194–195.

2. *Локшин А.А.* Свободная воля и математика // Знание-Сила, 2010, № 3, с. 86–90.

3. *Ефимов Н.В*. Высшая геометрия. – М.: Наука, 1978.

4. *Мерзон А.Е., Добротворский А.С., Чекин А.Л.* Пособие по математике для студентов факультетов начальных классов. – М., 1998.

5. *Козлова Е.Г.* Сказки и подсказки. Задачи для математического кружка. – М.: МЦНМО, 2004.

6. *Энгелер Э.* Метаматематика элементарной математики. – М.: Мир, 1987.

7. *Локшин А.А., Иванова Е.А*. Признаки делимости и математические фокусы // Математика для школьников, 2012, № 6, с. 49–52.

8. *Кордемский Б.А., Ахадов А.А*. Удивительный мир чисел. – М., 1996.

9. *Добротворский А.С. и др*. Задачник по математике для факультетов начальных классов. – М., МГПИ, 1983.

10. http://zagadki.pp.ru/zagadki-golovolomki/fokus-s-telefonnoj-knigoj.html #comments

11. *Иэн Стюарт*. Истина и красота. – М.: Астрель, 2010, с. 19–42.

12. *Румшиский Л.З.* Элементы теории вероятностей. – М.: Наука, 1976.

13. *Виленкин Н.Я. и др*. Математика. Пособие для студентов пединститутов. – М.: Просвещение, 1977.

14. *Локшин А.А., Сагомонян Е.А*. Логика и множества. – М.: Вузовская книга, 2002.

15. *Кордемский Б.А.* Математические завлекалки. – М., 2005.

16. *Локшин А.А., Иванова Е.А*. О квадратных уравнениях с параметрами // Математика для школьников, 2013, № 3, с. 25–27.

17. *Макарычев Ю.Н., Миндюк Н.Г., Нешков К.И*. Алгебра. 8 класс. Учебник для школ и классов с углубленным изучением математики. – М.: Мнемозина, 2004.

18. *Спивак А.В.* Тысяча и одна задача по математике. – М.: Просвещение, 2012.

19. *Харт-Дэвис А*. Удивительные математические головоломки. – М.: Астрель, 2003.

20. http://ega-math.narod.ru/Quant/Fracti.htm

21. *Кордемский Б.А.* Математическая смекалка. – СПб.: 1994, с. 264–270.

22. *Игошин В.И.* Математическая логика и теория алгоритмов. – М., 2010, с. 192.

23. *Ван дер Варден Б.Л.* Пробуждающаяся наука. – М., 2009.

24. *Афанасьев В.В.* Теория вероятностей. – М., 2007.

25. http://acadclasses.narod.ru/math/lecture13.htm

26. http://club.berkovich-zametki.com/?p=5892

27. *Успенский В.А.* Апология математики. – СПб., 2009.

28. *Журавлев В., Самовол П*. Быстрее быстрого, или Можно ли обогнать бинарный алгоритм / Квант, 2013, № 2, с. 7–15.

29. *Шень А.* Игры и стратегии с точки зрения математики. – М.: Издательство МЦНМО, 2008.

30. http://elementy.ru/problems/698