УНИВЕРСИТЕТЫ РОССИИ

Л. С. Капкаева

# ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ: ЧАСТНАЯ МЕТОДИКА

## Часть 1

2-е издание

СООТВЕТСТВУЕТ ПРОГРАММАМ ВЕДУЩИХ НАУЧНО-ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ШКОЛ

ЮРАЙТ
издательство
biblio-online.ru

Л. С. Капкаева

# ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ: ЧАСТНАЯ МЕТОДИКА

## Часть 1

УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ДЛЯ ВУЗОВ

2-е издание, исправленное и дополненное



**Москва • Юрайт • 2017**

УДК 372.851(075.8)
ББК 74.262.21я73
К20

***Автор:***

**Капкаева Лидия Семеновна** — профессор, доктор педагогических наук, профессор кафедры математики и методики обучения математике физико-математического факультета Мордовского государственного педагогического института имени М. Е. Евсевьева.

**Капкаева, Л. С.**

К20 Теория и методика обучения математике: частная методика. В 2 ч. Часть 1 : учеб. пособие для вузов / Л. С. Капкаева. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 264 с. — (Серия : Университеты России).

ISBN 978-5-534-04940-4 (ч. 1)
ISBN 978-5-534-04942-8

Учебное пособие содержит методики преподавания отдельных разделов математики. Представлены различные возможные подходы к изложению основных разделов школьного курса математики, дан их сравнительный анализ. Помимо методических рекомендаций приведены математическое содержание основных дидактических единиц, примеры применения методических схем, приемов, методов решения задач. К каждой лекции даны вопросы и задания для самостоятельной работы, а также список рекомендуемой литературы для более глубокого и всестороннего изучения рассматриваемых вопросов.

Учебное пособие состоит из двух частей. В первой части рассмотрены основные вопросы частной методики обучения математике в 5—9 классах общеобразовательной школы. Вторая часть представляет собой курс лекций по частной методике обучения математике в старших классах.

Соответствует актуальным требованиям Федерального государственного образовательного стандарта высшего образования.

*Учебное пособие предназначено студентам высших учебных заведений, аспирантам и преподавателям, а также всем интересующимся.*

УДК 372.851(075.8)
ББК 74.262.21я73



ISBN 978-5-534-04940-4
ISBN 978-5-534-04942-8

# Оглавление

*Математика – это то, посредством чего люди управляют природой и собой.*

А. Н. Колмогоров

*Кто хочет ограничиться настоящим, без знания прошлого, тот никогда его не поймет...*

Г. В. Лейбниц

# ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебное пособие охватывает второй раздел программы курса «Теория и методика обучения математике», изучаемого в педагогических вузах, который имеет специальное название «Частная методика обучения математике». В пособии получили свое дальнейшее развитие и конкретизацию при раскрытии методики обучения основным разделам школьного курса математики идеи и положения, составляющие основу современной общей методики обучения математике. К ним относятся:

- деятельностный подход в обучении;
- личностно-ориентированный подход;
- технологический подход;
- положения о гуманизации и гуманитаризации математического образования;
- положение об использовании эвристик в обучении математике. И др.

Пособие написано с учетом федеральных государственных образовательных стандартов высшего образования (ФГОС ВО) и программы по математике для общеобразовательных учреждений. Оно адресовано студентам математических и физико-математических специальностей педагогических вузов.

Учитывая творческую свободу учителя, в лекциях представлены различные возможные подходы к изложению основных разделов школьного курса математики, которые нашли отражение в учебниках и учебных пособиях по математике для средней школы, дан их сравнительный анализ.

Последовательность лекций соответствует структуре курса математики основной школы (5 – 9 классы). Методика преподавания конкретных разделов курса математики раскрывается по содержательно-методическим линиям, в их число входят: числовые системы, тождественные преобразования, уравнения и неравенства, функции, логическое строение геометрии, геометрические фигуры и их построение, векторы и координаты. К каждой лекции приведены вопросы и задания для самостоятельной работы, а также список рекомендуемой литературы для более глубокого и всестороннего изучения рассматриваемых вопросов.

Учитывая необходимость гуманитаризации математического образования, в частности, использования исторического подхода в обучении, к большинству лекций приведены исторические справки по соответствующим темам, в списке литературы рекомендованы статьи и книги о жизни и деятельности ученых-математиков, информационные сайты интернет.

При разработке лекций автор опирался на многолетний опыт работы со студентами. Распространенная ошибка будущих учителей при ответах на зачетах или экзаменах по методике обучения математике заключается в том, что говоря о методике изучения того или иного математического факта, они часто не знают точное содержание самого этого факта (понятия, теоремы, правила и т. п.). Поэтому в каждой лекции представлены не только методические рекомендации по изучению конкретного материала, но и математическое содержание основных дидактических единиц (понятий, теорем и их доказательств, правил, алгоритмов и т. п.). Приведены также примеры применения предлагаемых методических схем, приемов, методов решения задач.

При изложении лекций по методике обучения алгебре большое внимание уделяется интеграции алгебраического и геометрического методов. С этих позиций рассмотрено формирование некоторых понятий, решение уравнений и неравенств, текстовых задач (лекции IV – VI).

В ходе лекций имеющиеся таблицы, схемы, рисунки, примеры решения отдельных задач рекомендуется представлять на экране с помощью мультимедийного проектора.

Предлагаемое учебное пособие в силу его содержательных и структурных особенностей может использоваться студентами педагогических вузов как непосредственно на занятиях, так и для самостоятельной работы. Оно будет полезно также для работающих учителей и сотрудников института повышения квалификации работников образования.

При подготовке лекций автор опирался на основные учебные пособия по данной дисциплине: Г. И. Саранцев «Методика обучения математике в средней школе» (М., 2002) и А. Я. Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев и др.«Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика», сост. В. И. Мишин (М., 1987).

Анализ учебного материала проводился как по ранее изданным школьным учебникам и учебным пособиям, так и по учебникам, входящим в федеральный перечень учебников, рекомендованных Министерством образования и науки Российской Федерации к использованию в образовательном процессе в общеобразовательных учреждениях.

В результате изучения разделов, изложенных в учебном пособии, обучающиеся должны:

***знать***

- предмет, цели и задачи каждого раздела школьного курса математики;
- основные линии школьного курса математики (числовую, линию тождественных преобразований, линию уравнений и неравенств, функциональную, геометрическую), их структуру, содержание и роль в современном школьном курсе математики;



- методические подходы к изучению основных дидактических единиц школьного курса математики;
- этапы формирования математического понятия, работы с теоремой, решения математической задачи в условиях деятельностного подхода к обучению математике;
- историю возникновения и развития основных понятий, утверждений и методов, представленных в современном школьном курсе математики;

***уметь***

- анализировать и интерпретировать содержание математических понятий, теорем, задач, представленных в школьном курсе математики;
- конструировать методику введения понятий, изучения теорем, решения задач в условиях деятельностного подхода к обучению математике;
- проводить сравнительный анализ разных методических схем обучения отдельных компонентов содержания школьного курса математики, выявлять преимущества и недостатки каждой из них;
- разрабатывать с позиций системно-деятельностного подхода фрагменты уроков математики и осуществлять их на практике;
- разрабатывать презентации к изучению отдельных тем школьного курса математики;
- применять полученные теоретические знания на практике;

***владеть***

- спецификой разработки методики обучения математике в условиях деятельностного подхода;
- современной технологией формирования математических понятий, обучения доказательству теорем, решению задач;
- навыками разрешения проблем, возникающих в ходе обучения основным линиям школьного курса математики;
- навыками работы с учебной и научной литературой с целью поиска необходимой информации.

Лекция 1

# УЧЕНИЕ О ЧИСЛЕ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1. Цели, содержание и структура курса математики 5-6-х классов.
2. Значение и место учения о числе в курсе математики общеобразовательной школы.
3. Различные пути расширения понятия числа.
4. Методика изучения натуральных чисел.
5. Основные вопросы методики изучения дробей.
6. Методика изучения положительных и отрицательных чисел.

## 1. Цели, содержание и структура курса математики 5-6 классов

Вы приступаете к изучению второй части курса «Методика обучения математике», которая называется ***частной***, иногда говорят ***специальной*** методикой. В курсе математики для 5-11 классов с учетом возрастных особенностей учащихся и сложившихся традиций выделяются т р и  с т у п е н и обучения: 5-6, 7-9, 10-11 классы. В этих ступенях выделяют ***основную школу (5-9 кл.)*** и ***старшую школу (10-11 кл.)***.

Прежде чем говорить о методике обучения математике в 5-6 классах, нам необходимо знать, чему учили детей в начальной школе. Поэтому остановимся на основных особенностях курса математики начальных классов.

Данный курс представляет собой органическую составную часть всего современного школьного курса математики. Он изучается как единый предмет «математика», содержащий синтез сведений из арифметики, алгебры, геометрии. Дадим краткое их содержание.

*Арифметика:* натуральные числа и нуль, принцип десятичной нумерации, операции с натуральными числами и их применение к решению практических задач.

*Алгебра:* элементы буквенной символики и пропедевтика учения об уравнениях и неравенствах.

*Геометрия:* простейшие понятия о геометрических фигурах и их построении, представление об измерении основных величин.

Одной из важнейших задач изучения арифметического материала в начальной школе была и остается задача обучения школьников сознательному и



прочному владению техникой устных и письменных вычислений, прежде всего выработка навыка в применении табличных способов умножения.

Сведения из алгебры применяются и для обобщения знаний по арифметике, и для подготовки к последующему изучению материала.

Аналогично и сведения из геометрии способствуют, с одной стороны, формированию простейших пространственных представлений, накоплению некоторого запаса фактов, на которые можно будет опереться в 5 – 6 классах, а с другой стороны – изучению арифметики, давая возможность глубокой и разнообразной интерпретации арифметического материала.

При переходе из начальной школы в основную (5-6-кл.) сначала изучается также один предмет математического цикла «математика».

*Целью изучения* курса математики в 5-6 классах является систематическое развитие понятия числа, выработка умений выполнять устно и письменно арифметические действия над числами, переводить практические задачи на язык математики, подготовка учащихся к изучению систематических курсов алгебры и геометрии. Курс строится на *индуктивной основе* с привлечением элементов дедуктивных рассуждений. Теоретический материал курса излагается на наглядно-интуитивном уровне, математические методы и законы формулируются в виде правил.

В ходе изучения курса математики 5-6-х классов учащиеся развивают навыки вычислений с натуральными числами, овладевают навыками действий с обыкновенными и десятичными дробями, положительными и отрицательными числами, получают начальные представления об использовании букв для записи выражений и свойств, учатся составлять по условию текстовой задачи несложные линейные уравнения и решать их, продолжают знакомство с геометрическими понятиями, приобретают навыки построения геометрических фигур и измерения геометрических величин.

Таковы в общих чертах структура и содержание курса математики 5-6 классов.

## 2. Значение и место учения о числе в курсе математики общеобразовательной школы

В содержании школьного предмета математики выделяется несколько сквозных идейных линий: *числовая, функциональная, формально-оперативная, содержательно-прикладная, вычислительно-графическая, алгоритмическая и др.* На разных этапах обучения не все они одинаково реализуются, но все они значимы.

В курсе математики 5-6 классов они реализуются на числовом, алгебраическом и геометрическом материале.

Распределение учебного материала осуществляется таким образом, что при изучении числовых множеств систематически используется геометрический и алгебраический материал. Так, например, изучение многих вопросов о числе проводится с использованием геометрической интерпретации: при сравнении чисел, введении понятия модуля числа, сложения положительных и отрицательных чисел используются активно координатный луч и координатная прямая, при изучении свойств и законов действий – буквенная символика и т. д. Такая организация учебного материала способствует лучшему раскрытию содержания изучаемых знаний и взаимосвязей между ними.

Понятие числа является стержневым понятием школьного курса математики и служит также фундаментом, на котором строится изучение функций, тождественных преобразований, уравнении и т. п. Оно относится к основным понятиям математики. Это значит, что нельзя ответить на вопрос «Что такое число?», используя ранее введенные понятия и отношения между ними. По мере продвижения учащихся от 5 до 11 класса это понятие обогащается, расширяется в зависимости от роста сознания учащихся.

Нельзя ставить перед учащимися вопросы: «Что такое число?» или «Что называется числом?» Учащиеся должны получить представление о числе как об объекте арифметических операций. Объяснение учения о числе необходимо строить таким образом, чтобы была ясна связь понятий равенства, суммы и произведения, с одной стороны, и понятия числа, с другой. Нет понятия равенства, суммы, произведения без понятия числа, но нет также понятия числа без понятия равенства, суммы, произведения. Об этих четырех понятиях нельзя в школе говорить порознь. Они имеют смысл лишь в отношениях друг к другу. Числа обладают свойствами, которые мы выражаем в понятиях их равенства, суммы и произведения. Эволюция числа неразрывно связана с эволюцией понятия равенства, суммы и произведения. Развитие этих понятий и есть эволюция понятия числа. Мы меняем условия равенства, суммы и произведения и получаем новые числа. Первично не число, а понятия равенства, суммы, произведения. Однако число не вторично.

Таким образом, для того чтобы новые числа были равноправными, необходимо введение определения:

I. 1) Понятия равенства; 2) Понятия «больше», «меньше».

II. Понятия суммы;

III. Понятия произведения.

Надо показать также, что новые числа подчиняются всем законам арифметических действий установленных раньше чисел. В теоретических курсах понятия I - III вводятся путем определений, в школьном курсе математики необходимо показать целесообразность вводимых определений путем рассмотрения конкретных примеров.

Учение о числе пронизывает весь курс школьной математики, начиная с пятого и кончая одиннадцатым классом, и распределяется по годам обучения следующим образом:

**5 класс**

Натуральные числа: чтение и запись натуральных чисел; сравнение натуральных чисел; округление натуральных чисел; действия: сложение, вычитание, умножение, деление; законы арифметических действий.

Число нуль, операции с нулем; числовой луч. Десятичные дроби: понятие обыкновенной дроби; сравнение обыкновенных дробей с равными знаменателями; правильные и неправильные дроби; сложение и вычитание дробей с равными знаменателями; изображение десятичных дробей на числовом луче; десятичные дроби как частный случай обыкновенных дробей; действия с десятичными дробями. Понятие процента, решение задач на проценты.

**6 класс**

Делимость натуральных чисел: делители и кратные числа; признаки делимости чисел; простые числа. Обыкновенные дроби: обыкновенная дробь как частное от деления; основное свойство дроби, сокращение дробей; операции с обыкновенными дробями, десятичные приближения обыкновенных дробей.

Положительные и отрицательные числа: числовая ось, противоположные числа, сравнение чисел, сложение, вычитание, умножение и деление рациональных чисел.

**7 класс**

Продолжается изучение действий с рациональными числами. Понятие степени с натуральным показателем.

**8 класс**

Простейшие вычисления на микрокалькуляторе; выполнение арифметических действий; понятие рационального числа, свойства чисел; округление чисел; стандартный вид числа: Понятие арифметического квадратного корня; действительные числа: рациональные и иррациональные числа.

**9 класс**

Степень с рациональным показателем; числовая последовательность, прогрессии.

**10 класс**

Дальнейшее изучение множества действительных чисел; бесконечная периодическая десятичная дробь и непериодическая десятичная дробь; понятие иррационального числа и определение действительных чисел.

**11 класс**

Комплексные числа: понятие; сложение и умножение комплексных чисел: модуль комплексного числа; вычитание и деление комплексных чисел; геометрическая интерпретация; тригонометрическая форма комплексного числа.

## 3. Различные пути расширении понятии числа

Современная математика оперирует с различными по природе числами: ***натуральными*** (1, 2, 3, ...); ***целыми*** (0, ±1, ±2, ±3, ...), включающими и все натуральные; ***рациональными*** (множество целых чисел, дополненное множеством дробей); ***действительными*** (множество всех рациональных и иррациональных чисел); ***комплексными*** (числа вида $a + bi$, где $a$ и $b$ – любые действительные числа, $i$ – мнимая единица); ***гиперкомплексными***, простейшим видом которых являются ***кватернионы***, т. е. числа вида $a + вi + cj + dk$, *где a, в, c, d* – любые действительные числа, а $i, j, k$ – особые единицы, и т. д.

Эти классы чисел (как Вы знаете из алгебры) являются примерами колец и полей. $Z$ – ***кольцо*** целых чисел, где всегда выполнимо сложение, вычитание, умножение, но не всегда выполнимо деление (даже если исключить деление на нуль); $Q$ – *поле* рациональных чисел, где вычитание и деление выполнимо (кроме деления на нуль). Числа и операции над ними изучаются в таких математических дисциплинах, как алгебра и теория чисел.

Проводя в школьном курсе математики линию развития понятия числа, необходимо придерживаться принципа расширения множества $A$ до множества $B$. Этот принцип определяется следующими условиями:

1) $A$ должно быть подмножеством $B$;

2) Все операции, которые выполнимы в множестве $A$, определяются в множестве $B$ так, чтобы не противоречить правилам, введенным в множестве $A$; например, при изучении натуральных чисел рассматривалась операция умножения натуральных чисел ($8 \cdot 3 = 24$), которая сводилась к сложению. Изучая дробные числа, вводим операцию умножения дробных чисел, которая носит уже другой характер, но при этом смысл правила умножения натуральных чисел не теряется. Действительно:

$$\frac{8}{1} \cdot \frac{3}{1} = \frac{8 \cdot 3}{1 \cdot 1} = 8 \cdot 3;$$

3) в множестве $B$ выполнима операция, которая не выполнима в множестве $A$;

Условие 3) определяет цель расширения. Например, на множестве натуральных чисел не всегда выполнима операция вычитания. Расширением множества натуральных чисел, которое удовлетворяет всем этим условиям, является множество целых чисел.

4) расширение $B$ должно быть минимальным из всех расширений данного множества $A$ и определяется множеством $A$ однозначно с точностью до изоморфизма.

***Замечание.*** Два множества называются *изоморфными* относительно какой-либо операции, если между их элементами можно установить взаимно однозначное соответствие таким образом, что это соответствие распространяется и на результаты операции; например, сумме и произведению произвольных двух элементов первого множества будет соответствовать сумма и произведение соответствующих элементов второго множества. В таком случае по соотношениям, имеющимся в одном множестве, можно судить об отношениях, которые существуют в другом, изоморфном ему множестве. Поэтому в высшей алгебре принято изоморфные группы, кольца, поля считать тождественными.

Существуют два пути расширения числа: ***логический*** и ***исторический***.

***Логическая схема расширения числа***

Натуральные числа и нуль → Целые числа → Рациональные числа → Действительные числа

Символически эта схема выглядит так: $\mathbf{N}_{+0} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

Расширение числа в действительности осуществлялось по другой схеме.



***Историческая схема расширения числа***

Натуральные числа и нуль → Неотрицательные рациональные числа → Отрицательные числа → Рациональные числа → Действительные числа

Символически эта схема выглядит так: $((\mathbf{N}_{+0} \subset \mathbf{Q}_{+0}) \cup \mathbf{Q}_{-}) \subseteq \mathbf{Q} \subset \mathbf{R}$.

Логический путь неприемлем, так как учащиеся младших классов не в состоянии сознательно отнестись к идее расширения множества чисел, исходя из задачи сделать выполнимой операцию вычитания и деления, за исключением деления на нуль. Этот путь доступен лишь старшеклассникам.

Первое расширение понятия числа, с которым встречаются ученики, заключается в присоединении к натуральным числам нуля ($\mathbf{N}_{+0}$). С этим расширением понятия числа учащиеся встречаются в начальной школе.

На этой ступени обучения важно добиться того, чтобы учащиеся считали нуль числом (на нуль можно умножать, с нулем можно выполнять операции сложения и вычитания). Если раньше нуль обозначал отсутствие единиц соответствующего разряда, то теперь он выступает как результат операции над натуральными числами.

В практике отечественной школы существовали различные пути последующего расширения понятия числа:

1. После изучения множества $\mathbf{N}_{+0}$ вводилось понятие неотрицательного рационального числа ($\mathbf{Q}_{+0}$). После изучения неотрицательных рациональных чисел рассматривались отрицательные числа ($\mathbf{Q}_{-}$), при этом сначала изучались операции над обыкновенными дробями, затем над десятичными. Недостатком этой последовательности является «отдаление» десятичных дробей от натуральных чисел.

2. Первый проект новых программ (1967 г.) предусматривал изучение отрицательных чисел сразу же после изучения темы «Натуральные числа и нуль», после этого – изучение дробей (положительных и отрицательных). Такая схема обосновывалась возможностью быстрее перейти к решению уравнений на основании их свойств. Однако эксперименты показали, что уровень логического развития учащихся на этом этапе недостаточен для сознательного усвоения вводимых понятий и использования их.

В проекте новых программ (1968 г.) предлагалась следующая последовательность, которая была реализована в учебниках математики для 4-5 классов под редакцией профессора А. И. Маркушевича.

Натуральные числа и нуль → Десятичные дроби → Обыкновенные дроби → Отрицательные числа → Рациональные числа → Действительные числа

В пробных учебниках математики содержались в это время и другие варианты расширения понятия числа. Например, в учебнике «Математика» для 4 класса И. В. Барановой и З. Г. Борчуговой после темы «Натуральные числа и нуль» изучались неотрицательные рациональные числа , затем - отрицательные числа. Действия с десятичными дробями изучались после действий с обыкновенными, что отдаляло их от действий с натуральными числами. А действия с десятичными дробями аналогичны действиям с натуральными числами.

В заключение приведем еще две последовательности изучения чисел в учебниках математики для 5-6 классов.

1. *Нурк Э.Р. и Тельгмаа А.Э.* «Математика – 5» (М., 1988) и «Математика – 6» (М., 1989):

Натуральные числа и нуль → Десятичные дроби → Обыкновенные дроби → Отрицательные числа → Рациональные числа

2. *Виленкин Н. Я., Чесноков А.С., Шварцбурд С.И., Жохов В. И.* «Математика – 5» (М., 2000) и «Математика – 6» (М., 2002):

Натуральные числа и нуль → Дробные числа → Обыкновенные дроби → Рациональные числа

## 4. Методика изучения натуральных чисел

В математике имеются различные теории построения каждого множества чисел. Для построения арифметики натуральных чисел используется обычно аксиоматический подход, например, основанный на системе аксиом Пеано. Известно и другое построение арифметики натуральных чисел, связанное с именем Кантора, основанное на теории множеств и, в частности, на понятии мощности любого множества.

В школьном курсе математики изучение арифметики натуральных чисел опирается, прежде всего, на наглядность. Однако основой изложения этого материала в учебниках и на уроках является ясное и последовательное логическое строение его. Причем обучение арифметике натуральных чисел исходит из самостоятельного происхождения этих чисел из счета предметов. Формирование понятия натурального числа начинается в начальной школе.

В 5 классе проводится систематизация и расширение сведений о натуральном числе, полученных в начальной школе. Изучение натуральных чисел здесь связано с формированием таких важных для математики понятий, как «координатный луч», «уравнение» и «неравенство».

При этом учащиеся должны твердо усвоить, что любое натуральное число может быть изображено точкой на координатном луче, причем *каждому натуральному числу соответствует единственная точка на координатном луче, но не каждой точке координатного луча соответствует натуральное*



*число*. На этот момент важно обратить особое внимание, так как это готовит к пониманию необходимости введения новых чисел, то есть к расширению понятия числа. С учащимися выясняется также такое свойство множества натуральных чисел, как *бесконечность*.

С помощью координатного луча сравниваются натуральные числа между собой, устанавливаются понятия «равно», «больше» и «меньше» для натуральных чисел. Важно, чтобы ученики усвоили такие понятия, как «числа, следующие за данным», «числа, предшествующие данному», умели ответить на вопросы: сколько чисел может непосредственно следовать за данным числом, сколько чисел может непосредственно предшествовать данному числу, кроме 1. На этом этапе дается запись четного и нечетного чисел формулами: $2n$ и $2n + 1$.

Особое внимание следует уделить действиям над многозначными числами, трудным случаям умножения и деления, действиям с нулем и единицей и, в частности, «закону поглощения 0 ($a + 0 = a$, $0 + a = a$)». Необходимо показать учащимся, что, например, действия $1 \cdot a = a$, $0 \cdot a = 0$ являются, по существу, следствиями из определения действия умножения, а $a : 1 = a$, $a : a = 1$, $0 : a = 0$, $a : \cancel{0}$ – из определения действия деления.

После изучения действий над натуральными числами можно рассмотреть вопрос о замкнутости множества натуральных чисел относительно сложения и умножения и отметить, что в отношении вычитания это свойство не выполняется.

Большое внимание в этой теме следует уделить законам арифметических действий (переместительному, сочетательному, распределительному). В учебниках математики они формулируются как свойства сложения и умножения. Важно показать глубокое теоретическое значение законов, так как у учащихся обычно создается впечатление, что законы нужны лишь для упрощения арифметических действий. В 5 классе законы арифметических действий записываются в общем виде с использованием буквенной символики. Рассмотрение коммутативного (переместительного) и ассоциативного (сочетательного) законов умножения целесообразно связать с геометрическим материалом, а именно, с вычислением площадей прямоугольников и объемов прямоугольных параллелепипедов.

## 5. Основные вопросы методики изучения дробей

Второе расширение понятия числа, с которым встречаются учащиеся, заключается в присоединении к целым неотрицательным числам дробных положительных чисел. На этом этапе следует добиться от них того, чтобы они четко различали понятия «дробь» и «дробное число». Для этого следует обратить внимание учащихся на то, что любое число $x$ из множества дробных неотрицательных чисел может быть записано в виде дроби $x = \frac{m}{n}$, где $m \in Z_0$, $n \in N$. Одно и то же число можно записать разными дробями. Так, например, дроби $\frac{2}{3}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{22}{33}$ являются записями одного и того же числа.

Дроби $\frac{8}{8}$, $\frac{24}{3}$ служат для записи целых чисел, дроби $\frac{7}{8}$ или $\frac{23}{8}$ служат для записи дробных чисел. Таким образом, дробь может служить записью не только дробного, но и целого числа.

Усвоению различия между дробными числами и дробью способствует выполнение упражнений, аналогичных следующим:

1) Сколько содержится в записи 0,40; $\frac{0}{100}$; 0,4; $\frac{6}{3}$; 0; $\frac{2}{5}$; 0,33; $\frac{3}{5}$: а) различных чисел; б) дробных чисел; в) целых чисел?

2) Какое значение принимает $x$, если дроби $\frac{3}{7}$ и $\frac{x}{14}$ изображают одно и то же число?

Следует заметить, что в учебнике иногда происходит смешение понятий ***«дробь»*** и ***«дробное число»***. Так, в младших классах дробь трактуется как число, составленное из нескольких долей единицы. Значит, понятие дроби включает в себя понятие дробного числа. Затем «дробь» используется для названия чисел из множества $Q_0$ и для названия записи такого числа. Когда говорят о действиях с дробями, то имеют в виду числа из $Q_0$, когда же говорят о преобразовании дробей, то понимают записи чисел из $Q_0$, так как нецелесообразно обращать одно число в другое. Поэтому с помощью специально подобранных вопросов необходимо приучать учащихся понимать из контекста, о чем идет речь: о числе или о его записи (символе).

Более четкого пояснения требует и понятие ***«десятичная дробь»***. При введении десятичных дробей основной акцент в учебнике (см., например, Виленкин Н. Я. и др. Математика. 5 класс, М., 2013) делается на то, что это дроби, которые можно записать без знаменателя. Однако знаменатель у десятичной дроби тоже записан, но по иному правилу.

Десятичные дроби изучаются рядом с натуральными числами. Это закономерно, так как действия с десятичными дробями во многом аналогичны действиям с натуральными числами, кроме того, имеется возможность использования метрической системы мер, что облегчает изучение десятичных дробей. При этом сначала учащиеся знакомятся с обыкновенными дробями, изучают сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями, сложение и вычитание смешанных чисел. Полученные знания помогают им в обосновании действий с десятичными дробями.

Изучение десятичных дробей в 5 классе осуществляется в такой последовательности: 1) десятичная запись дробных чисел; 2) сравнение десятичных дробей; 3) сложение и вычитание десятичных дробей; 4) приближенные значения чисел, округление чисел; 5) умножение десятичных дробей на натуральные числа; 6) деление десятичных дробей на натуральные числа; 7) умножение десятичных дробей; 8) деление на десятичную дробь; 9) среднее арифметическое (см. Виленкин Н. Я. и др. Математика. 5 класс, М., 2013).

Основное внимание при изучении десятичных дробей уделяется оперативным умениям учащихся. В качестве примера рассмотрим ***методику изучения сложения и вычитания десятичных дробей.*** Эти два действия в названном выше учебнике Н. Я. Виленкина изучаются одновременно (на одном уроке).



Учащимся предлагается сложить десятичные дроби 3,7 и 2,651. При этом сначала они уравнивают количество цифр после запятой, приписав к первой дроби два нуля справа: 3,7 = 3,700, потом записывают числа в смешанной форме: $3{,}700 = 3\frac{700}{1000}$; $2{,}651 = 2\frac{651}{1000}$, после этого выполняют сложение: $3{,}7 + 2{,}651 = 3\frac{700}{1000} + 2\frac{651}{1000} = 5\frac{700+651}{1000} = 5\frac{1351}{1000} = 6\frac{351}{1000} = 6{,}351$. Затем учащимся сообщается, что тот же ответ можно получить иначе, сложив числа 3,7 и 2,651 «столбиком» (приводится решение).

После этого находится разность тех же чисел:

$$3{,}7 - 2{,}651 = 3\frac{700}{1000} - 2\frac{651}{1000} = 1\frac{700-651}{1000} = 1\frac{49}{1000} = 1{,}049,$$

затем также сообщается, что ответ можно получить короче, вычитая числа «столбиком» (приводится решение).

Правило формулируется одно для двух действий сразу:

*«Чтобы сложить (вычесть) десятичные дроби, нужно:*

*1) уравнять в этих дробях количество знаков после запятой;*

*2) записать их друг под другом так, чтобы запятая была записана под запятой;*

*3) выполнить сложение (вычитание), не обращая внимания на запятую;*

*4) поставить в ответе запятую под запятой в данных дробях».*

Существует и ***другой подход к изучению десятичных дробей.*** Авторы учебников математики для 5- 6 классов И. В. Баранова, З. Г. Борчугова предлагают изучать десятичные дроби после изучения обыкновенных дробей. Поэтому обыкновенные дроби у них изучаются в 5 классе, а десятичные дроби – в 6 классе. Последовательность изучения материала в этом случае выглядит так: 1) десятичные доли как разрядные единицы; 2) запись дробей с помощью десятичных знаков, чтение десятичных дробей; 3) запись числа в виде десятичной и в виде обыкновенной дроби; 4) сравнение десятичных дробей; 5) сложение десятичных дробей; 6) вычитание десятичных дробей; 7) округление чисел; 8) совместное выполнение сложения и вычитания; 9) умножение десятичных дробей; 10) умножение десятичной дроби на 10, 100,1000 и т.д.; 11) деление десятичной дроби на натуральное число; 12) деление десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т. д.; 13) деление на десятичную дробь; 14) среднее арифметическое; 15) выполнение совместных действий над десятичными дробями; 16) выполнение совместных действий с обыкновенными и десятичными дробями.

Действия с десятичными дробями при таком подходе получают хорошее обоснование с помощью обыкновенных дробей. Рассмотрим этот момент подробнее ***на примере изучения сложения десятичных дробей.***

Учащимся предлагается задача: «*Ученики 5-го А класса собрали 3,45 кг липового цвета, а ученики 5-го Б класса – 4,23 кг. Сколько килограммов липового цвета собрали ученики 5-го А и 5-го Б классов?*» Далее сообщается, что для решения задачи нужно найти сумму чисел 3,45 и 4,23. Для этого дробные части этих чисел записывают в виде обыкновенных дробей и выполняют сложение:

$$3{,}45 + 4{,}23 = 3\frac{45}{100} + 4\frac{23}{100} = 7\frac{45+23}{100} + 7\frac{68}{100} = 7{,}68.$$

Значит, 3,45 + 4,23 = 7,68. Итак, получаем ответ задачи: 7,68 кг.

После этого учащимся сообщается, что сумму 7,68 можно получить, если складывать числа 3,45 и 4,23 поразрядно, начиная с единиц низшего разряда: к 5 сотым прибавить 3 сотых, получим 8 сотых; к 4 десятым прибавить 2 десятых, получим 6 десятых; к 3 единицам прибавить 4 единицы, получим 7 единиц.

После рассмотрения еще одной аналогичной задачи вводится ***правило сложения двух десятичных дробей:***

*«Чтобы сложить две десятичные дроби, надо:*

*1) подписать слагаемые одно под другим так, чтобы цифры одинаковых разрядов были в одном столбце (тогда запятая окажется под запятой);*

*2) сложить числа поразрядно;*

*3) поставить в полученной сумме запятую под запятыми в слагаемых».*

Далее сообщается, что сложение более двух десятичных дробей выполняется по этому же правилу. Если слагаемые имеют разное число десятичных знаков, то, чтобы не допустить ошибки при записи одного слагаемого под другим, можно уравнять число десятичных знаков. Для этого следует приписать к дроби, содержащей меньшее число десятичных знаков, справа нули.

Нахождение суммы десятичных дробей иллюстрируется на координатном луче. Справедливость переместительного и сочетательного законов сложения десятичных дробей обосновывается их справедливостью для обыкновенных дробей. Законы сложения записываются в буквенной форме. По аналогичной схеме изучается вычитание и умножение десятичных дробей.

В настоящее время наибольшее распространение получил первый подход в изучении десятичных дробей. Обязательный уровень теоретических знаний и умений учащихся по данному разделу ограничивается знанием формулировок правил, однако должна проводиться и работа, направленная на понимание смысла некоторых действий с десятичными дробями. Например, при изучении умножения и деления десятичной дроби на натуральное число полезно обсуждение с учащимися таких вопросов:

1) смысл умножения десятичной дроби на натуральное число;

2) появление нулей между запятой и значащей цифрой в произведении десятичной дроби на натуральное число;

3) смысл деления десятичной дроби на натуральное число;

4) проверка умножением деления десятичной дроби на натуральное число.

Понятие ***обыкновенной дроби*** вводится в 5 классе через понятие ***доли***. Здесь же изучается сравнение дробей, рассматриваются правильные и неправильные дроби, сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями, устанавливается связь между делением и дробями, вводятся смешанные числа и правила сложения и вычитания этих чисел. Необходимо подчеркнуть, что сложение дробей с одинаковыми знаменателями состоит в подсчете одинаковых долей, содержащихся в данных дробях вместе, то есть определение сложения дробей мало отличается от определения сложения целых чисел. Определение



сложения обыкновенных дробей с равными знаменателями заменяется правилом сложения дробей, знакомство с которым осуществляется через решение задач. Вычитание дробей с равными знаменателями рассматривается одновременно со сложением дробей. Здесь необходимо разъяснить смысл операции вычитания дробей. Например, вычесть из дроби $\frac{7}{9}$ дробь $\frac{5}{9}$ – это значит найти такую дробь, которая при сложении с дробью $\frac{5}{9}$ даст дробь $\frac{7}{9}$. Действие вычитания в множестве рациональных чисел имеет такой же смысл, как и действие вычитания в множестве целых чисел.

В 6 классе основное внимание, в соответствии с подходом Н. Я. Виленкина, уделяется ***изучению действий с обыкновенными дробями: сложению, вычитанию, умножению и делению.*** Сложение и вычитание обыкновенных дробей с разными знаменателями сводится к сложению дробей с одинаковыми знаменателями через приведение дробей к общему знаменателю. Операция вычитания дробей рассматривается одновременно со сложением дробей.

При приведении дробей к общему знаменателю важно, чтобы учащиеся осознали замену их равными дробями с одинаковым знаменателем. Поэтому не следует спешить с переходом к записи общего знаменателя под одной чертой.

Например, $\frac{9}{20} + \frac{5}{12} = \frac{27}{60} + \frac{25}{60} = \frac{27+25}{60} = \frac{52}{60}$.

Позже можно записать короче: $\frac{9}{20} + \frac{5}{12} = \frac{27+25}{60} = \frac{52}{60}$.

Полезно обратить внимание учащихся на то, что, говоря о действии с дробями, под термином дробь понимается дробное число (дробь – число) и, говоря о сокращении дробей, под термином дробь понимается запись дробного числа, символ (дробь – запись).

В учебнике Н. Я. Виленкина рассматривается сначала умножение дроби на натуральное число, а затем умножение дроби на дробь. Введение понятия умножения дроби на число и дроби на дробь осуществляется через решение задач. Остановимся на этом подробнее. Учащимся предлагается решить две задачи:

***Задача 1****. В бутылке $\frac{3}{4}$ л сока. Сколько сока в 5 таких бутылках?*

Р е ш е н и е. Для решения задачи надо найти произведение $\frac{3}{4} \cdot 5$. По умножить $\frac{3}{4}$ на натуральное число 5 – значит найти сумму пяти слагаемых, каждое из которых равно $\frac{3}{4}$:

$$\frac{3}{4} \cdot 5 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3+3+3+3+3}{4} = \frac{3 \cdot 5}{4} = \frac{15}{4} = 3\frac{3}{4}.$$

Значит, в 5 бутылках $3\frac{3}{4}$ л сока. После этого формулируется правило.

*«Чтобы умножить дробь на натуральное число, надо её числитель умножить на это число, а знаменатель оставить без изменения».*

Затем решается вторая задача.

***Задача 2.*** *Длина прямоугольника $\frac{4}{5}$ дм, а ширина $\frac{2}{3}$ дм (рис. 1). Чему равна площадь прямоугольника?*

Р е ш е н и е. Из рисунка видно, что данный прямоугольник можно получить так: разделить одну сторону квадрата со стороной 1 дм на 5 одинаковых частей и взять 4 такие части, а другую сторону разделить на 3 одинаковые части и взять 2 такие части. При таком делении квадрат будет состоять из 15 равных частей, а прямоугольник будет состоять из 8 таких частей. Значит, площадь прямоугольника равна $\frac{8}{15}$ дм$^2$. Но мы знаем, что площадь прямоугольника равна произведению длины и ширины. Поэтому считают, что число $\frac{8}{15}$ получено от умножения $\frac{4}{5}$ на $\frac{2}{3}$. Итак, $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} = \frac{8}{15}$.

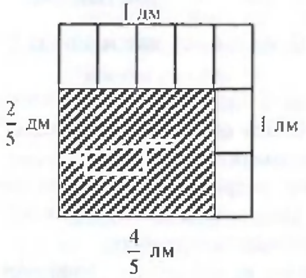



Рис. 1

Сразу после решения задачи формулируется правило. *«Чтобы умножить дробь на дробь, надо: 1) найти произведение числителей и произведение знаменателей этих дробей;*
*2) первое произведение записать числителем, а второе – знаменателем».*

Обычно вначале обозначают произведение числителей и произведение знаменателей, а затем производят сокращение и только потом выполняют умножение. В ответе, если это возможно, из дроби исключают целую часть. Например:

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{14}{5} = \frac{4 \cdot 14}{7 \cdot 5} = \frac{4 \cdot 2}{5} = \frac{8}{5} = 1\frac{3}{5}.$$

Введение ***правила умножения смешанных чисел*** осуществляется путем решения задачи на движение.

***Задача 3.*** *Сколько км проедет велосипедист за $1\frac{5}{12}$ ч, если будет двигаться со скоростью $9\frac{3}{5}$ км/ч?*

Р е ш е н и е. Так как пройденный путь равен произведению скорости и времени, то для решения задачи надо найти произведение чисел $9\frac{3}{5}$ и $1\frac{5}{12}$.

Представим каждое из этих чисел в виде неправильной дроби:

$$9\frac{3}{5} = \frac{48}{5}; \quad 1\frac{5}{12} = \frac{17}{12}.$$

Теперь воспользуемся правилом умножения дробей. Получим:

$$9\frac{3}{5} \cdot 1\frac{5}{12} = \frac{48}{5} \cdot \frac{17}{12} = \frac{48 \cdot 17}{5 \cdot 12} = \frac{4 \cdot 17}{5} = \frac{68}{5} = 13\frac{3}{5}.$$

Таким образом, за $1\frac{5}{12}$ ч велосипедист проедет $13\frac{3}{5}$ км.



После решения задачи формулируется правило. *«Для того чтобы выполнить умножение смешанных чисел, надо их записать в виде неправильных дробей, а затем воспользоваться правилом умножения дробей».*

Ученикам сообщается, что с помощью умножения дробей решают такие же задачи, как и с помощью умножения натуральных чисел. Затем они знакомятся с переместительным, сочетательным и распределительным свойствами умножения. Через решение задач осуществляется и введение понятий «нахождение дроби числа» и «числа по его дроби». Деление дробей рассматривается как действие, обратное умножению.

Необходимо заметить, что существуют и другие подходы к введению операции умножения дроби на дробь, некоторые из них подробно освещены в книге «Методика преподавания математики» под редакцией С. Е. Ляпина (Л., 1956).

**И с т о р и ч е с к а я   с п р а в к а**

***1. Десятичные дроби.*** Десятичные дроби впервые были использованы замечательным узбекским ученым ал-К а ш и. В начале XV в. в Узбекистане, вблизи города Самарканда, была создана большая обсерватория. В ней производились наблюдения за движением звезд, планет и Солнца, вычислялись дни праздников и т. д. В обсерватории работали лучшие ученые того времени. Руководитель обсерватории ученый Джемшид ибн-Масуд ал-Каши был высокообразованным математиком и астрономом. Он оставил после себя много замечательных математических открытий.

В 1427 г. ал-Каши закончил книгу «Ключ к арифметике». В этой книге он впервые в мире употребляет десятичные дроби, дает правила действия с ними, поясняет эти правила на примерах, подробно описывает новую, открытую им систему записи дробей. Для обозначения разрядов он писал по-разному: отделял вертикальной черточкой, писал разными чернилами, иногда выписывал название разряда полностью словами.

До этого в практике люди пользовались только обыкновенными и шестидесятичными дробями. О возможности десятичных дробей не догадывались даже величайшие ученые древней Греции. Д. Г. ал-Каши умер около 1456 года. Год рождения его неизвестен.

Труды ал-Каши долго не были известны европейским ученым. Они упорно искали и, наконец, нашли новый вид дробей, более простой и более удобный – десятичные дроби. В Европе впервые подробно описал десятичные дроби талантливый фламандский инженер и ученый С и м о н С т е в и н (1548 – 1620). В книге «О десятой», изданной в 1585 году, Стевин подробно описал правила действий и преимущества открытых им десятичных дробей.

Стевин не был знаком с трудами ал-Каши и действительно открыл десятичные дроби. Но он открыл открытое. Первенство принадлежит Джемшиду ал-Каши, опередившему Стевина на полтора века. В Европе предшественником Стевина в середине XIV в. был Бонфильс во Франции.

Ставить запятую после целой части десятичной дроби предложил знаменитый немецкий ученый Кеплер (1571 – 1630). До Кеплера после целой части ставили нуль в скобках, например, 3,7 писали как 3(0)7, отделяли вертикальной чертой (3|7) или писали разными чернилами, например целую часть числа черными, а дробную красными.

## 6. Методика изучения положительных и отрицательных чисел

Вопросы, связанные с введением отрицательных чисел, с изучением положительных и отрицательных чисел, являются наиболее трудными для учащихся. История развития математики показывает, что отрицательные числа значительно труднее дались человечеству, значительно труднее вошли в математику, чем дроби. Это объясняется тем, что отрицательные числа значительно меньше, чем дроби, связаны с жизнью, практикой.

Рассмотрим **исторический аспект** вопроса более подробно.

Отрицательные числа возникли внутри самой математики в связи с выполнением действий, преобразований с уже известными числами (натуральные, нуль, дроби). Первыми, кто дал некоторые правила действия с отрицательными числами, были китайские математики.

Во II в. до н. э. ***китайский ученый*** Ч ж а н Ц а н ь написал книгу «Арифметика в девяти главах». В этой книге впервые в науке встречаются отрицательные количества. Они понимаются им не так, как понимаем и применяем их мы. Полного и ясного понимания природы отрицательных величин и правил действия с ними у него нет.

Математики Древней Греции не признавали отрицательных чисел, они не могли им дать конкретное истолкование. Лишь в работах Д и о ф а н т а (III в. н. э.) встречаются преобразования, которые приводят к необходимости выполнения операций над отрицательными числами.

Довольно широкое использование получили отрицательные числа в работах ***индийских ученых***. Так, например, в их трудах встречается решение уравнений, где данные и ответы – числа положительные, а в промежуточных вычислениях получаются отрицательные числа. Положительные числа они называли ***настоящими***, а отрицательные – ***ненастоящими, ложными***. Отрицательные числа рассматривали как ***денежный долг***, а положительные – как ***наличные деньги***. Первые правила сложения и вычитания отрицательных чисел принадлежат также индийским ученым. Через восемь веков после Чжан Цаня индийский ученый Б р а м а г у п т а писал: «Сумма двух имуществ есть имущество, двух долгов – долг; имущество и долг – их разность или, если они равны, - нуль. Сумма нуля и долга есть долг, имущества и нуля – имущество, двух нулей – нуль». Брамагупта понимает отрицательные величины как долг, правильно производит действия сложения и вычитания с ними, но теоретического обоснования им не дает. При помощи понятия о долге нельзя объяснить все действия над отрицательными числами, например, действие умножения.

Независимо от индийцев итальянский ученый-математик Л е о н а р д о Ф и б о н а ч ч и (XIII в.) также пришел к мысли, что отрицательные количества надо понимать в смысле, противоположном положительным. В те годы были развиты так называемые математические поединки. На состязании в решении задач с придворными математиками Фридриха II Леонарду Пизанскому (Фибоначчи) было предложено решить задачу: требовалось найти капитал нескольких лиц. Фибоначчи получил отрицательное значение. «Этот случай, - сказал Фибоначчи, - невозможен, разве только принять, что один имел не капитал, а долг».

Первые правила умножения отрицательных чисел появились позже, чем правила сложения. В работах О с к а р а (XII в.) дано такое правило:

Произведение двух долгов или имуществ есть имущество.

Если приведенные правила сложения положительных и отрицательных чисел были достаточно ясны, то для правила умножения этих чисел не могли найти обоснование. Почему произведение двух долгов есть имущество, оставалось непонятным.

Использовались иногда довольно оригинальные правила действий с положительными и отрицательными числами, а именно:

друг моего друга – мой друг,
враг моего друга – мой враг,



друг моего врага – мой враг.

Вплоть до XVII в. математикам не удавалось хорошо обосновать правило умножения отрицательных чисел.

Л е о н а р д Э й л е р (1707 - 1783), например, приводил такое обоснование: имеем два числа $a$ и $b$, рассмотрим, как умножить эти числа:

1) если $a > 0$, $b > 0$ – ясно, т. е. произведение будет иметь знак «+»;

2) если $a < 0$, $b > 0$ – ясно, т. е. произведение будет иметь знак «–»;

3) если $a > 0$, $b < 0$, то применяем переместительный закон и получаем случай второй;

4) если $a < 0$, $b < 0$, то произведение знак «-» не может иметь, так как произведение со знаком «–» было в другом случае, значит, произведение будет иметь знак «+». (Под другим случаем понимается тот случай, когда числа $a$ и $b$ имеют разные знаки. Другого обоснования Эйлер не дал.)

Были попытки обосновать правила действий с положительными и отрицательными числами исходя из геометрических образов. Так, для обоснования правила умножения положительных и отрицательных чисел вычисляли площадь заштрихованного прямоугольника (рис. 2) непосредственно и путем выполнения операции умножения:

$$(a-c)(b-d) = ab - bc - ad + cd.$$

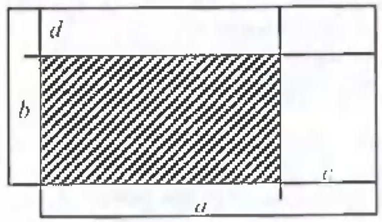



Рис. 2

Полученный один и тот же результат являлся основанием для формулировки правила умножения. Ошибочность возникновения этого правила связана с тем, что, выполняя умножение $a - c$ на $b - d$ в скрытой форме, предполагают, что для отрицательных чисел справедлив распределительный закон, хотя отрицательное число не введено, не дан критерий сравнения, не определены действия сложения и умножения.

Таким образом, отрицательные числа долго не получали признания.

Немецкий математик М и х а и л Ш т и ф е л ь в книге «Полная арифметика» (1544) впервые вводит понятие об отрицательных числах как о числах, меньших нуля (меньших, чем ничто). Это был очень большой шаг вперед в деле обоснования отрицательных чисел. Он дал возможность рассматривать отрицательные числа не как долг, а совсем по-иному, по-новому. Но и Штифель называл отрицательные числа *абсурдными*; действия с ними, по его словам «тоже идут абсурдно, навыворот».

После Штифеля ученые стали более уверенно производить действия с отрицательными числами. Все чаще сохранялись и истолковывались отрицательные решения в задачах.

Права гражданства отрицательные числа получили лишь после того, как Р е н е Д е к а р т (1596 - 1650) применил их в построении аналитической геометрии. Декарт дал определенное истолкование отрицательным числам, они получили математическую интерпретацию. Отрицательные числа он рассматривал как самостоятельные, расположенные на оси $x$ влево от начала координат. Декарт называл их *ложными*. Так отрицательные числа вошли в математику.

Основная цель ознакомления с историей любого математического вопроса заключается в том, что этот материал помогает предвидеть трудности, которые могут возникнуть при объяснении соответствующей темы на уроке.

Рассмотрим теперь методику изучения отрицательных чисел.

В учебной и методической литературе выделяют в основном два пути введения отрицательных чисел.

1. ***Формально-логический***, когда введение отрицательных чисел объясняется необходимостью выполнения действия вычитания во всех случаях. Эта

точка зрения отражена в работах таких математиков, как П. А. Погорельский, Д. А. Гравс, в первых учебниках А. П. Киселева (до 1912 г.) и др.

2. ***Реально-конкретный***, который исходит из непосредственной связи отрицательных чисел с действительностью, с конкретными представлениями. Такая тенденция нашла отражение в учебниках А. Ю. Давидова, А. Ф. Малинина, К. Ф. Лебединцева, А. П. Киселева (с 1912 г.) и др., а также в большинстве современных учебников.

Чтобы ввести понятие отрицательного числа, надо не только дать его определение, но и сделать это новое число равноправным с ранее известными положительными числами, узаконить его. Для этого необходимо:

1) определить понятие равенства;

2) определить понятия «больше», «меньше», то есть указать критерий сравнения новых чисел между собой и с ранее известными числами;

3) определить действия сложения и умножения;

4) показать, что законы действий, установленные для изучаемых ранее чисел, справедливы для новых чисел.

Необходимо показать также, что до введения отрицательных чисел операция вычитания на множестве положительных чисел была не всегда выполнима. Таким образом, в школьном курсе математики сочетаются реально-конкретный и формально-логический пути введения отрицательного числа.

Учащиеся должны хорошо понимать смысл и значение отрицательных чисел, поэтому введение отрицательных чисел должно быть хорошо *мотивировано*.

Мотивировка может быть:

а) *алгебраической* (возможность выполнения вычитания);

б) *геометрической* (соответствие между точками прямой и числами);

в) *практической* (характеристика изменения величины)

В учебнике математики для 6 класса Н. Я. Виленкина [4] подробно рассматриваются эти вопросы, имеются разнообразные и интересные по содержанию задачи.

Для введения понятия отрицательного числа нельзя ограничиваться рассмотрением какой-то одной конкретной ситуации, ограниченным числом примеров. Если это понятие вводится на большом числе примеров, то ученики и в аналогичной ситуации научатся его применять.

Мотивировать введение понятия отрицательного числа в школе можно также и на основе знакомого арифметического материала в связи с невозможностью выполнения вычитания на множестве положительных чисел. При этом в качестве иллюстрации можно использовать координатную прямую.

П р и м е р (рис. 3). Пусть число 5 – уменьшаемое, а вычитаемыми будут числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ….

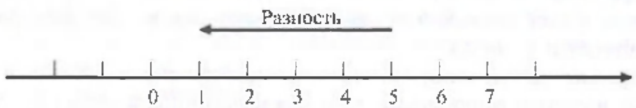



Рис. 3



Всякий раз, чтобы найти разность между числом 5 и каждым из вычитаемых, достаточно перемещаться влево по координатной прямой от уменьшаемого на столько единиц, сколько их содержится в вычитаемом.

$5 - 0 = 5$
$5 - 1 = 4$
$5 - 2 = 3$
$5 - 3 = 2$
$5 - 4 = 1$
$5 - 5 = 0$
$5 - 6 = -1$
$5 - 7 = -2$

Результат вычитания из числа 5 числа 6 окажется на одну единицу слева от нуля.

Но чтобы не писать «слева от нуля», принимают условие: писать перед единицей знак «–».

Рассмотрим несколько методических приемов, используемых при введении понятия отрицательного числа и исходящих из реально-конкретного пути изучения отрицательных чисел.

***Первый прием.*** Используется некоторая конкретная задача, в ходе решения которой получается отрицательное число.

П р и м е р 1. Термометр показывал утром $a$ градусов, а в полдень – $b$ градусов. На сколько градусов изменилось показание термометра за это время, если:

а) $a = 6$, $b = 13$; б) $a = 7$, $b = 7$; в) $a = 10$, $b = 8$?

Для решения этой задачи составим формулу: $b - a$.

а) $a = 6$, $b = 13$, $b - a = 13 - 6 = 7$. Семь градусов выше нуля.

б) $a = 7$, $b = 7$, $b - a = 7 - 7 = 0$. Термометр показывает нулевую температуру. Нуль здесь принимает новый смысл, это число, которое показывает определенную температуру, то есть это уже число, характеризующее величину.

в) $b - a = 8 - 10$, что не имеет смысла для учащихся. Но ведь температура существует и в этом случае. Как ее найти?

Обычно на этот вопрос учащиеся отвечают, что надо из 10 вычесть 8, или говорят, что будет два градуса ниже нуля. Здесь можно сообщить учащимся, что и в этом случае пользуемся формулой $b - a$ и выполняем вычитание $8 - 10$, но оно противоположно действию $10 - 8$, и поэтому удобнее результату приписывать знак «–», то есть $8 - 10 = -2$.

Вместо слов «выше нуля» и «ниже нуля» договорились ввести математические знаки «+» и «–», и тогда формула $b - a$ стала применимой для любых значений $b$ и $a$.

П р и м е р 2. Теплоход прошел $m$ км вверх по реке (против течения), а затем $n$ км вниз. На каком расстоянии от первоначального места и по какую сторону от него находится теплоход, если:

а) $m = 80$, $n = 25$; б) $m = 50$, $n = 90$; в) $m = 60$, $n = 60$?

(Решение аналогично.)

После решения нескольких подобных задач делается вывод о том, что решение одной и той же задачи не может быть выражено одной формулой, если пользоваться только положительными числами. Поэтому возникает необходимость введения новых чисел – *отрицательных чисел*.

Этот подход имеет свои недочеты. Например, более строго надо доказать справедливость формулы для всех случаев, когда понятие о положительных и отрицательных числах и действиях над ними уже дано.

***Второй прием.*** В учебной и методической литературе часто встречается *способ введения отрицательных чисел в связи с рассмотрением изменения какой-нибудь величины.* Причем положительные числа характеризуют увеличение величины, отрицательные – ее уменьшение.

Рациональное число рассматривается как мера значения величины, которая изменяется в двух противоположных направлениях. В этом случае необходимо указание направления рассматриваемых величин. Примеры:

1. Пешеход от станции прошел 10 км. Где он находится?
2. Термометр показывает 12°С. Замерзла ли вода? И т.д.

Из рассмотрения таких примеров учащиеся убеждаются, что для определенности в этих задачах необходимо указать направление, в котором идет отсчет, направление изменения величины. Вместо того чтобы применять словесные записи: вверх-вниз, вправо-влево, тепло-холод и т. д., что громоздко, проще направление изменения величины характеризовать математическими знаками. Для числа, характеризующего изменение величины в одном направлении, принимается знак «+» (например, 12° тепла запишем: +12°); для числа, характеризующего изменение величины в противоположном направлении, принимается знак «–» (например, 12° холода запишем: –12°).

Такой подход имеет большое преимущество по сравнению с первым подходом. Рассмотрение задач в данном случае сопровождается графической иллюстрацией. Таким образом естественно устанавливается связь между рациональными числами и точками координатной прямой.

***Третий прием.*** Согласно ему новые числа вводятся в связи с рассмотрением *меры изменения величины* (в отличие от понятия *меры значения величины* во 2-ом приеме), то есть вводится понятие приращения. Такой подход вызывает у учащихся меньше путаницы в связи с двояким смыслом знаков «+» и «–» как знаков сложения и вычитания и в то же время знаков положительных и отрицательных чисел.

В учебнике математики для общеобразовательных учреждений основным средством изложения темы «Положительные и отрицательные числа» является ***координатная прямая.***

Для введения понятия отрицательного числа необходимо дать определение модуля, понятие о противоположных числах, выяснить вопрос о сравнении новых чисел между собой и с изученными ранее, рассмотреть действия с положительными и отрицательными числами и выяснить справедливость законов действий для этих чисел. Остановимся кратко на этих вопросах.

**I.** Понятие ***модуля числа*** вводится как расстояние от точки, изображающей это число, до начальной точки. Это определение тесно связано с наглядным и геометрическим представлениями и истолкованием положительных и отрицательных чисел.

Мотивировать введения модуля числа можно на примере решения конкретной задачи. Следует также показать на примерах, что при рассмотрении одних вопросов, связанных с положительными и отрицательными числами,



приходится учитывать направление отсчета значений величины, а при рассмотрении других – в этом нет надобности.

П р и м е р. *Когда путешественник пройдет на восток от начального пункта 60 км, то его положение относительно начального пункта можно записать числом +60. Когда он пройдет от того же пункта 60 км на запад, то его положение относительно начального пункта следует записать числом –60. И в том и в другом случае пройденный путь будет характеризоваться числом 60.*

Затем формулируется ***правило нахождения модуля числа.*** Поясняется, что модуль числа не может быть отрицательным, так как модуль числа – это расстояние, что модуль положительного числа равен самому числу, модуль любого отрицательного числа равен числу ему противоположному.

**II.** Введение ***противоположных чисел*** связывается с геометрическим истолкованием положительных и отрицательных чисел. Учащимся сообщается, что точки с координатами 5 и – 5 одинаково удалены от точки $O$ и находятся по разные стороны от нее. Чтобы попасть из точки $O$ в эти точки, надо пройти одинаковые расстояния, но в противоположных направлениях. Числа 5 и –5 называются противоположными числами: 5 противоположно –5, а –5 противоположно 5. *Два числа, отличающиеся друг от друга только знаками, называют противоположными числами.*

**III.** Вопрос ***о сравнении положительных и отрицательных чисел*** выясняется с помощью координатной прямой. Соотношение равенства и неравенства между этими числами в 6 классе вводится без доказательств. При этом очень важно показать учащимся целесообразность вводимых определений на конкретных примерах и с помощью геометрических образов. Обращение к координатной прямой можно использовать и для подготовки к введению соответствующих определений. Причем, так как множество рациональных чисел включает в себя множество натуральных чисел, то сравнение их необходимо производить так же, как проводилось сравнение натуральных чисел. Учащимся уже известно, что относительно двух неравных положительных чисел $a$ и $b$ можно сказать: если $a > b$ ($a < b$), то точка, соответствующая числу $a$, на координатном луче расположена правее (левее), чем точка, соответствующая числу $b$. Если числа равны, то соответствующие им точки совпадают. Это же правило можно распространить (по определению) и на всю координатную прямую в применении к положительным, отрицательным числам и нулю. Значит, если на координатной прямой числу $a$ соответствует точка $A$ и числу $b$ соответствует точка $B$, то:

1) если $a = b$, то $A$ и $B$ совпадают;
2) если $a < b$, то $A$ лежит левее $B$;
3) если $a > b$, то $A$ лежит правее $B$.

Верны и обратные предложения:

1) если $A$ и $B$ совпадают, то $a = b$ ($a$ и $b$ соответствуют одна и та же точка);
2) если $A$ лежит левее $B$, то $a < b$;
3) если $A$ лежит правее $B$, то $a > b$.

Из этого вытекают правила для сравнения положительных и отрицательных чисел, которыми учащиеся могут теперь пользоваться, не прибегая всякий раз к координатной прямой.

1. Всякое положительное число больше нуля и больше всякого отрицательного числа.

2. Всякое отрицательное число меньше нуля и меньше всякого положительного числа.

3. Из двух положительных чисел больше то число, модуль которого больше, и меньше то, у которого модуль меньше.

4. Из двух отрицательных чисел меньше то, у которого больше модуль, а больше то, у которого меньше модуль.

Эти правила устанавливаются из рассмотрения ряда примеров с использованием координатной прямой.

Таким образом, координатная прямая является основным средством, которое дает наглядное истолкование соотношениям равенства и неравенства между положительными и отрицательными числами.

IV. Рассмотрим ***действия над положительными и отрицательными числами.*** Здесь необходимо учитывать, что *действия сложения и умножения над положительными и отрицательными числами* вводятся по определению, причем формулировки этих определений должны включать в себя ранее известные учащимся понятия об этих действиях.

*Вычитание* и *деление* определяются как действия, обратные соответственно сложению и умножению. Это уже известная учащимся форма этих действий. Но объемы этих понятий, то есть каждого из двух обратных действий, значительно расширяются.

В школьном курсе математики определение действия обычно дается в виде правила. Причем даются отдельно правила сложения отрицательных чисел и правила сложения чисел с разными знаками. Формулировка этих правил содержит указания на соответствующие действия, операции. К такому введению действий учащиеся уже привыкли.

Большое внимание здесь следует уделить тому, как подвести к определению действия *сложения.* Для этого можно использовать конкретные задачи на сложение чисел с помощью координатной прямой. Но каким бы путем ни вводилось правило сложения, учащимся должно быть ясно, что рассмотрение примеров лишь иллюстрирует правило, но не может служить его доказательством.

В ходе изучения данного материала учащиеся должны овладеть навыками выполнения операции сложения двух положительных чисел, двух отрицательных чисел, двух чисел с разными знаками, противоположных чисел, нуля с положительными и отрицательными числами. При этом они должны твердо усвоить, что сохраняют силу все те законы, которые имели место для положительных чисел.

Учащимся дается формулировка переместительного и сочетательного законов, запись каждого из них с помощью букв. В справедливости этих законов, а также в целесообразности их использования для сложения нескольких положительных и отрицательных чисел учащиеся убеждаются путем рассмотрения большого числа примеров.



***Вычитание*** отрицательных чисел, так же как и положительных, определяется как действие, обратное сложению: вычесть из числа $a$ число $b$ – значит найти такое число $x$, которое в сумме с числом $b$ даст число $a$. Однако объем этого понятия расширяется. По существу, это новое определение, которое включает ранее известное. В этом случае вычитание сводится к прибавлению противоположного числа.

***Умножение*** положительных и отрицательных чисел представляет наибольшую трудность, которая заключается в том, что учащиеся не могут отделаться от потребности в доказательстве правила знаков при умножении, а учитель не только не может дать доказательство этого правила, но должен суметь убедить учащихся, что такого доказательства нельзя искать или требовать. Правило знаков, которое дается в школе, является, по существу, своеобразной трактовкой определения операции умножения положительных и отрицательных чисел.

Итак, *действие умножения вводится по определению.* Однако определение этого действия можно ввести по-разному. Существуют различные пути истолкования правила знаков.

Сложение и умножение положительных и отрицательных чисел имеют много общего, однако трактовка правила умножения вызывает больше трудностей.

Довольно распространено объяснение правила умножения из предварительного рассмотрения ряда конкретных задач, решение которых требует проводить вычисления по формуле вида $ab$. Задача рассматривается вначале для положительных значений $a$ и $b$, затем когда $a$ или $b$ отрицательно и, наконец, когда и $a$ и $b$ отрицательны. После чего дается правило умножения. Недочет такого метода не только в его громоздкости, но главным образом в том, что у учащихся создается впечатление, даже убеждение, что они «доказывают» правило умножения. Кроме того, применение такого пути связано и с допущением логической ошибки, ибо формула вида $ab$ верна для $a > 0$ и $b > 0$. Но если $a$ или $b$ отрицательно или оба вместе отрицательны, то до введения определения произведения любых положительных и отрицательных чисел распространять формулу вида $ab$ на эти числа нельзя.

Многие авторы учебной и методической литературы придерживаются догматического способа введения умножения. Сущность его состоит в том, что дается формулировка правила умножения, затем оно поясняется на примерах, задачах. Учащиеся убеждаются на конкретном материале в практической целесообразности введенного определения.

Этот способ соответствует научной трактовке определения умножения рациональных чисел, экономен в отношении времени и, как показала практика, доступен учащимся.

В учебнике математики для 6 класса Н. Я. Виленкина [4] формулировкам правила умножения чисел с разными знаками и правила умножения отрицательных чисел предшествует рассмотрение ряда примеров. При этом используется положение о том, что если изменить знак одного из множителей, то изменится знак произведения. Правила формулируются в удобном для использования виде.

С целью конкретного истолкования смысла умножения двух отрицательных чисел и умножения положительного числа на отрицательное целесообразно рассмотреть ряд задач, решение которых связано с перемещением по координатной прямой.

Необходимо обратить внимание учащихся на условие равенства произведения нулю, результат умножения на $-1$.

Деление положительных и отрицательных чисел рассматривается обычно как действие, обратное умножению.

Учащимся сообщается, что деление положительных и отрицательных чисел имеет тот же смысл, что и деление положительных чисел, а именно, по данному произведению и одному из множителей находят второй множитель. После рассмотрения ряда примеров делают вывод о знаке частного и о том, как находить модуль при делении двух отрицательных чисел, двух чисел с разными знаками. Таким образом учащихся подводят к формулировке ***правила деления положительных и отрицательных чисел.***

В 6 классе в теме «Рациональные числа» продолжается изучение положительных и отрицательных чисел и вводится понятие рационального числа как числа, которое может быть записано в виде дроби. Рассматривая множество рациональных чисел, можно сделать вывод о том, что в этом множестве всегда выполнимы сложение, вычитание, умножение и деление на число, не равное нулю. При выполнении действий получаем числа того же множества, то есть это множество обладает свойством замкнутости по отношению к действиям первой и второй ступени.

Для сложения справедливы:

1) переместительный закон $a + b = b + a$;

2) сочетательный закон $a + (b + c) = (a + b) + c$;

3) $a + 0 = a$, то есть имеется нейтральный элемент;

4) $a + (-a) = 0$, то есть имеется противоположный элемент – противоположное число.

Для умножения справедливы:

1) переместительный закон $ab = ba$;

2) распределительный закон $a(b + c) = ab + ac$;

3) сочетательный закон $a(bc) = (ab)c$;

4) $a \cdot 1 = a$, то есть имеется нейтральный элемент;

5) $a \cdot (\frac{1}{a}) = 1$, то есть имеется обратный элемент.

## *Вопросы и задания*

1. Охарактеризуйте в общих чертах структуру и содержание курса математики 5 – 6 классов.

2. Каково значение учения о числе в школьном курсе математики?

3. Проанализируйте учебники математики для 5 – 6 классов авторов:

а) Дорофеев Г. В., Шарыгин И. Ф., Суворова С. В. и др.;



б) Зубарева И. И., Мордкович А. Г.;

в) Истомина Н. Б.;

г) Никольский С. М., Потапов М. К., Решетников Н. Н. и др.

с точки зрения последовательности изучения в них чисел разных видов. Сделайте выводы.

4. Сравните методику изучения дробей в разных учебниках, сделайте выводы.

5. Охарактеризуйте приемы введения понятия отрицательного числа. Предложите свой прием.

6. Опишите методику сравнения положительных и отрицательных чисел.

7. Используя действующие учебники математики для 5 – 6 классов, разработайте методику изучения сложения (умножения) положительных и отрицательных чисел.

8. Какое число называется рациональным? Какие законы справедливы для сложения и умножения рациональных чисел?

### Рекомендуемая литература


1. Б а р а н о в а, И. В. Математика: Пробный учебник для 4 класса средней школы / И. В. Баранова, З. Г. Борчугова. – М. : Просвещение, 1984. – 256 с.
2. Б а р а н о в а, И. В. Математика: Пробный учебник для 5 класса средней школы / И. В. Баранова, З. Г. Борчугова. – М. : Просвещение, 1985. – 324 с.
3. В и л е н к и н, Н. Я. Математика. 5 класс : учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. – М. : Мнемозина, 2013. – 278 с.
4. В и л е н к и н, Н. Я. Математика. 6 класс : учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. – М. : Мнемозина, 2012 – 288 с.
5. Г л е й з е р, Г. И. История математики в школе: IV – VI кл.: Пособие для учителей / Г. И. Глейзер. – М. : Просвещение, 1981. – 239 с.
6. Д а л и н г е р, В. А. Методика обучения математике. Изучение дробей и действий над ними : учебное пособие для прикладного бакалавриата / В. А. Далингер. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 194 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-00722-0.
7. И в а н о в а, Т. А. Современный уок математики: теория, технология, практика : Книга для учителя. – Н. Новгород : НГПУ, 2010. – 288 с.
8. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под научн. ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.
9. Методика обучения математике в 2 ч. Часть 1 : учебник для академического бакалавриата / Н. С. Подходова, [и др.]; под ред. Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 274 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-9916-7001-2.
10. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. /А. Я. Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев и др.; Сост. В. И. Мишин. – М. : Просвещение, 1987. – 416 с.
11. Х и н ч и н, А. Я. Педагогические статьи: Вопросы преподавания математики. Борьба с методическими штампами / А. Я. Хинчин. – 3-е изд. Под ред. Б. В. Гнеденко. – М.: КомКнига, 2013. – 204 с.
12. Ц у к а р ь, А. Я. Практика и образы при изучении обыкновенных дробей / А. Я. Цукарь // Математика в школе. – 1994. - № 5. – С. 5 – 9.

**Лекция II**

# ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1. Основные типы преобразований и этапы их изучения.
2. Особенности организации системы упражнений при изучении тождественных преобразований.

---

## 1. Основные типы преобразований и этапы их изучения

Изучение различных преобразований выражений и формул занимает большую часть учебного времени в школьном курсе математики. Простейшие преобразования, опирающиеся на свойства арифметических операций, производятся уже в начальной школе. Но основную нагрузку по формированию умений и навыков выполнения преобразований несет на себе курс школьной алгебры. Это связано:

1) с резким увеличением числа совершаемых преобразований, их разнообразием;

2) с усложнением деятельности по их обоснованию и выяснению условий применимости;

3) с выделением и изучением обобщенных понятий тождества, тождественного преобразования, равносильного преобразования, логического следования.

Линия тождественных преобразований получает следующее развитие в курсе алгебры основной школы:

*5 – 6 классы* – раскрытие скобок, приведение подобных слагаемых, вынесение множителя за скобки;

*7 класс* – тождественные преобразования целых и дробных выражений;

*8 класс* – тождественные преобразования выражений, содержащих квадратные корни;

*9 класс* – тождественные преобразования тригонометрических выражений и выражений, содержащих степень с рациональным показателем.

Необходимо заметить, что у разных авторов учебников эта последовательность имеет свои особенности.

Линия тождественных преобразований является одной из важных идейных линий курса алгебры. Поэтому обучение математике в 5-6 классах строится таким образом, чтобы учащиеся уже в этих классах приобрели навыки простейших тождественных преобразований (без употребления термина «тождественные преобразования»). Эти навыки формируются при выполнении упражнений на приведение подобных слагаемых, раскрытие скобок и заключение в



скобки, вынесение множителя за скобки и т. д. Рассматриваются также простейшие преобразования числовых и буквенных выражений. На этом уровне обучения осваиваются преобразования, которые выполняются непосредственно на основе законов и свойств арифметических действий.

Так в 5 классе изучаются законы и свойства действий над неотрицательными числами: $a + b = b + a$; $(a + b) + c = a + (b + c)$; $a \cdot b = b \cdot a$; $a : 0 = a$; $0 + a = a$; $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$; $a \cdot 1 = a$; $1 \cdot a = a$; $a \cdot (b + c) = ab + ac$; $a - 0 = a$; $a - a = 0$ и др.

К основным видам задач в 5-6-х классах, при решении которых активно используются свойства и законы арифметических действий и через которые формируются навыки тождественных преобразований, относятся:

1) обоснование алгоритмов выполнения действий над числами изучаемых числовых множеств;

2) вычисление значений числового выражения наиболее рациональным способом;

3) сравнение значений числовых выражений без выполнения указанных действий;

4) упрощение буквенных выражений;

5) доказательство равенства значений двух буквенных выражений и т.д.

П р и м е р ы. 1. Представьте число 153 в виде суммы разрядных слагаемых; в виде разности двух чисел, в виде произведения двух чисел.

2. Представьте число 27 в виде произведения трех одинаковых множителей.

Эти упражнения на представление одного и того же числа в разных формах записи содействуют усвоению понятия о тождественных преобразованиях. Вначале эти представления могут быть произвольными, в дальнейшем - целенаправленными. Например, представление в виде суммы разрядных слагаемых используется для объяснения правил сложения натуральных чисел «столбиком», представление в виде суммы или разности «удобных» чисел – для выполнения быстрых вычислений различных произведений, представление в виде произведения множителей – для упрощения различных дробных выражений.

3. Найдите значение выражения $928 \cdot 36 + 72 \cdot 36$.

Рациональный способ вычисления значения данного выражения основан на использовании распределительного закона умножения относительно сложения: $928 \cdot 36 + 72 \cdot 36 = (928 + 72) \cdot 36 = 1000 \cdot 36 = 36000$.

В школьном курсе математики можно выделить следующие этапы освоения применений преобразований буквенно-числовых выражений и формул.

***I этап.*** Начала алгебры. На этом этапе используется нерасчлененная система преобразований; она представлена правилами выполнения действий над одной или обеими частями формулы.

П р и м е р. Решить уравнения:

*а*) $5x - 3x = 2$; *б*) $5x = 3x + 2$; *в*) $6(2 - 4y) + 5y = 3(1 - 3y)$.

Общая идея решения состоит в упрощении данных формул с помощью нескольких правил. *В первом задании* упрощение достигается при помощи применения тождества: $5x - 3x = (5 - 3)x$. Основанное на этом тождестве тождественное преобразование переводит данное уравнение в равносильное ему уравнение $2x = 2$.

*Второе уравнение* требует для своего решения не только тождественного, но и равносильного преобразования; в таком качестве здесь используется правило переноса членов уравнения из одной части уравнения в другую с изменением знака. В решении уже такого простого задания, как *б*), используются оба типа преобразований – и тождественное, и равносильное. Это положение сохраняется и для более громоздких заданий, таких, как третье.

<u>Цель первого этапа</u> – научить быстро решать простейшие уравнения, упрощать формулы, задающие функции, рационально проводить вычисления с опорой на свойства действий.

***II этап.*** *<u>Формирование навыков применения конкретных видов преобразований</u>.* Понятия тождества и тождественного преобразования явно вводятся в курсе алгебры 7 класса. Так, в учебнике Ю. Н. Макарычева «Алгебра. 7 класс» [7] вначале вводится понятие тождественно равных выражений: «Два выражения, соответственные значения которых равны при любых значениях переменных, называются **тождественно равными**», затем понятие тождества: «Равенство, верное при любых значениях переменных, называется **тождеством**».

Приводятся п р и м е р ы:

1) $3(x + y)$ и $3x + 3y$ – тождественно равные выражения;

2) $2x + y$ и $2xy$ не являются тождественно равными выражениями;

3) $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$ – тождество;

4) $x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$ – тождество.

Тождествами считают и верные числовые равенства: $a + b = b + a$; $(a + b) + c = a + (b + c)$; $ab = ba$; $(ab)c = a(bc)$; $a + 0 = a$; $a + (-a) = 0$; $a - b = a + (-b)$; $a \cdot 1 + a$; $a \cdot (-b) = -ab$; $(-a) \cdot (-b) = ab$ и т. д.

В учебнике А. Г. Мордковича «Алгебра. 7 класс» [19] приводится сразу и уточненное понятие тождества: «**Тождество** – это равенство, верное *при любых допустимых* значениях входящих в его состав переменных».

При введении понятия тождественного преобразования следует прежде всего показать целесообразность изучения тождественных преобразований. Для этого можно рассмотреть различные упражнения на нахождение значения выражений. Например, найти значение выражения $37{,}1x + 37{,}1y$ при $x = 0{,}98$, $y = 0{,}02$. Используя распределительное свойство умножения, данное выражение можно заменить выражением $37{,}1(x + y)$, тождественно равным ему. Ещё более впечатляет решение следующего упражнения: найти значение выражения $\frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{ab}$ при: а) $a = 3$, $b = 2$; б) $a = 121$, $b = 38$; в) $a = 2{,}52$, $b = 1\frac{2}{9}$.
После проведенных преобразований оказывается, что множество значений этого выражения состоит из одного числа 4.

В учебнике Ю. П. Макарычева «Алгебра. 7 класс» [7] введение понятия тождественного преобразования мотивируется примером: «Чтобы найти значение выражения $xy - xz$ при $x = 2{,}3$; $y = 0{,}8$; $z = 0{,}2$, надо выполнить 3 действия:

$$xy - xz = 2{,}3 \cdot 0{,}8 - 2{,}3 \cdot 0{,}2 = 1{,}84 - 0{,}46 = 1{,}38.$$



Этот результат можно получить выполнив лишь два действия, если воспользоваться выражением $x(y - z)$, тождественно равным выражению $xy - xz$:

$$x(y - z) = 2{,}3\,(0{,}8 - 0{,}2) = 2{,}3 \cdot 0{,}6 = 1{,}38.$$

Мы упростили вычисления, заменив выражение $xy - xz$ тождественно равным выражением $x(y - z)$. Замену одного выражения другим, тождественно равным ему выражением называют **тождественным преобразованием** или просто **преобразованием выражения**».

Освоение различных видов преобразований на этом этапе начинается с введения формул сокращенного умножения. Затем рассматриваются преобразования, связанные с операцией возведения в степень, с различными классами элементарных функций – показательных, степенных, логарифмических, тригонометрических. Каждый из этих типов преобразований проходит этап изучения, на котором внимание сосредоточивается на усвоении их характерных особенностей.

По мере накопления материала появляется возможность выделить и на этой основе ввести понятия тождественного и равносильного преобразований.

Следует заметить, что понятие тождественного преобразования дается в школьном курсе алгебры не в полной общности, а только в применении к выражениям. Преобразования разделяются на два класса: *тождественные преобразования* – это преобразования выражений, а *равносильные* – преобразования формул. В случае, когда возникает потребность в упрощении одной части формулы, в этой формуле выделяется выражение, которое и служит аргументом применяемого тождественного преобразования. Например, уравнения $5x - 3x = 2$ и $2x = 2$ считаются не просто равносильными, а одинаковыми.

В учебниках алгебры Ш. А. Алимова и др. понятие тождества явно не вводится в 7-8-х классах и только в 9 классе в теме «Тригонометрические тождества» при решении задачи 1: «Доказать, что при $\alpha \neq \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$, справедливо равенство $1 + \mathrm{ctg}^2\,\alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$» вводится это понятие. Здесь учащимся поясняется, что указанное равенство «справедливо для всех допустимых значений $\alpha$, то есть таких, при которых его левая и правая части имеют смысл. Такие равенства называют *тождествами*, а задачи на доказательства таких равенств называют задачами на доказательство тождеств».

***III этап.*** *Организация целостной системы преобразований (синтез).*

Основная цель этого этапа состоит в формировании гибкого и мощного аппарата, пригодного для использования в решении разнообразных учебных заданий. Развертывание второго этапа изучения преобразований происходит на протяжении всего курса алгебры основной школы. Переход к третьему этапу осуществляется при итоговом повторении курса в ходе осмысления уже известного материала, усвоенного по частям, по отдельным типам преобразований.

В курсе алгебры и начал анализа целостная система преобразований, в основном уже сформированная, продолжает постепенно совершенствоваться. К ней также добавляются некоторые новые виды преобразований (например, относящиеся к тригонометрическим и логарифмическим функциям), однако они только обогащают её, расширяют её возможности, но не меняют её структуру.

Методика изучения этих новых преобразований практически не отличается от применяемой в курсе алгебры.

Необходимо отметить один тип преобразований, специфический для курса алгебры и начал анализа. Это преобразования выражений, содержащих *предельные переходы*, и *преобразования, основанные на правилах дифференцирования и интегрирования.* Основное отличие этих «аналитических» преобразований от «алгебраических» преобразований состоит в характере множества, которое пробегают переменные в тождествах. В алгебраических тождествах переменные пробегают *числовые области*, а в аналитических этими множествами являются определенные *множества функций*. Например, правило дифференцирования суммы: $(f+g)' = f' + g'$; здесь $f$ и $g$ – переменные, пробегающие множество дифференцируемых функций с общей областью определения. Внешне эти преобразования сходны с преобразованиями алгебраического типа, поэтому иногда говорят «алгебра пределов», «алгебра дифференцирования».

Тождества, изучаемые в школьном курсе алгебры и алгебраическом материале курса алгебры и начал анализа, можно разделить на *два класса*.

*Первый состоит из тождеств сокращенного умножения*, справедливых в любом коммутативном кольце, и тождества $\frac{ab}{ac} = \frac{b}{c},\ a \neq 0,$ справедливого в любом поле.

*Второй класс образован тождествами, связывающими арифметические операции и основные элементарные функции, а также композиции элементарных функций.* Большинство тождеств этого класса также имеет общую математическую основу, состоящую в том, что степенная, показательная и логарифмическая функции являются изоморфизмами различных числовых групп. Например, имеет место утверждение: существует единственное непрерывное изоморфное отображение $f$ аддитивной группы действительных чисел в мультипликативную группу положительных действительных чисел, при котором единица отображается в заданное число $a > 0$, $a \neq 1$; это отображение задается показательной функцией с основанием $a$: $f(x) = a^x$. Аналогичные утверждения имеются и для степенной и логарифмической функций.

Методика изучения тождеств обоих классов обладает многими общими чертами. В целом тождественные преобразования, изучаемые в школьном курсе математики, включают:

1) преобразования алгебраических выражений;

2) преобразования выражений, содержащих радикалы и степени с дробными показателями;

3) преобразования тригонометрических выражений;

4) преобразования выражений, содержащих степени и логарифмы;

5) преобразования выражений, содержащих предельные переходы, и преобразования, основанные на правилах дифференцирования и интегрирования.



## 2. Особенности организации системы заданий при изучении тождественных преобразований

Основной принцип организации любой системы заданий – предъявление их *от простого к сложному* с учетом необходимости преодоления учениками посильных трудностей и создания проблемных ситуаций. Этот основной принцип требует конкретизации применительно к особенностям данного учебного материала. Приведем пример системы упражнений по теме: «Квадрат суммы и разности двух чисел».

Учащимся хорошо известен вывод этой формулы:

$$(a+b)^2 = (a+b)(a+b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2.$$

Известна также и геометрическая иллюстрация ее (рис. 4).

Так как под $a$ и $b$ можно подразумевать не только числа, но и выражения, то формулу $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ можно символически записать следующим образом: $(\mathrm{I}_a + \mathrm{II}_b)^2 = \mathrm{I}_a{}^2 + 2\,\mathrm{I}_a\,\mathrm{II}_b + \mathrm{II}_b{}^2$.

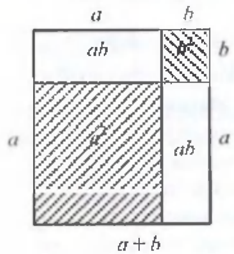



Рис. 4

Для изучения этой темы учащиеся должны вспомнить умножение одночленов, умножение многочленов, умножение степеней с одинаковыми основаниями, возведение степени в степень, умножение рациональных чисел и т. д. – то есть учителю необходимо подготовить вспомогательную систему упражнений.

Затем следует основная система упражнений по выработке умений возводить в квадрат двучлены.

1. $(a \pm b)^2$; *Упражнения 1 – 4 направлены на*
2. $(a \pm x)^2$; *запоминание формул «в чистом*
3. $(x \pm y)^2$; *виде»*
4. $(m \pm n)^2$;
5. $(2a + b)^2$;
6. $(3a \pm 4b)^2$; *В упражнениях 5 – 9 коэффициенты меняются от целых*
7. $(\frac{1}{2}a \pm 2b)^2$; *чисел до обыкновенных и десятичных дробей, но степень*
8. $(\frac{1}{4}a \pm \frac{1}{3}b)^2$; *буквенной части слагаемых пока остается первой.*
9. $(\frac{1}{5} \pm 0{,}2b)^2$.
10. $(a^2 \pm b)^2$; *В упражнениях 10 – 11 рассматриваются случаи,*
11. $(a^3 \pm b^4)^2$. *в которых степени слагаемых выше первой.*
12. $(a^n \pm b^2)^2$; *В примерах 12 – 13 степени с буквенными показателями.*
13. $(a^n \pm b^{2n})^2$.
14. $(2a^2b \pm 3a^3b^2)^2$. *Упражнение 14 - общий случай, в котором слагаемые одночлены, содержащие произведение степеней.*
15. $(-2a^2b + ab)^2$; *В примерах 15 – 16 отрицательные коэффициенты*
16. $(-a^2b - 2ab^2)^2$. *у слагаемых.*

На этом основная система упражнений заканчивается. Такая система должна обеспечить усвоение базисного материала.

Следующие упражнения (17–19) позволяют акцентировать внимание учащихся на типичных ошибках и способствуют развитию интереса и их творческих способностей.

17. Проверь равенства:

$(\frac{1}{2}x + y)^2 = \frac{1}{4}x^2 + y^2;$

$(\frac{1}{2}x + y)^2 = \frac{1}{4}x^2 + 2xy + y^2.$

18. Заполни точки соответствующими выражениями:

$(\ldots + \ldots)^2 = \frac{1}{4}x^2 + \ldots + y^2;$

$(\ldots + \ldots)^2 = \frac{1}{4}a^2 + ab + \ldots .$

19. Сколько примеров можно составить $(\ldots + \ldots)^2 = \ldots + xy + \ldots$ . Запиши некоторые из них.

В каждом конкретном случае число упражнений в системе может быть меньше или больше, но последовательность их выполнения должна быть такой же.

Для описания различных систем заданий в методике математики используется ещё понятие *цикла упражнений*. Цикл упражнений характеризуется тем, что соединяются в последовательность упражнения нескольких аспектов изучения и приемов расположения материала. По отношению к тождественным преобразованиям представление о цикле можно дать следующим образом.

Цикл упражнений связан с изучением одного тождества, вокруг которого группируются другие тождества, находящиеся с ним в естественной связи. В состав цикла наряду с *исполнительными* входят задания, требующие *распознавания применимости рассматриваемого тождества*. Изучаемое тождество применяется для проведения вычислений на различных числовых областях.

Задания в каждом цикле разбиты на *две группы*. К *первой* относятся задания, выполняемые при первоначальном знакомстве с тождеством. Они выполняются на нескольких уроках, объединенных одной темой. *Вторая группа* упражнений связывает изучаемое тождество с различными приложениями. Упражнения из этой группы обычно разбросаны по различным темам.

Описанная структура цикла относится к этапу формирования навыков применения конкретных видов преобразований. На заключительном этапе – этапе синтеза, циклы видоизменяются. Во-первых, объединяются обе группы заданий, образующие ***«развернутый» цикл***, причем из первой группы исключаются наиболее простые по формулировкам или по сложности выполнения задания. Оставшиеся типы заданий усложняются. Во-вторых, происходит слияние циклов, относящихся к различным тождествам, в силу этого повышается роль действий по распознаванию применимости того или иного тождества. Приведем конкретный пример цикла.

П р и м е р. Цикл заданий для тождества $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$.

Выполнение первой группы заданий этого цикла происходит в следующих условиях. Ученики только что ознакомились с формулировкой тождества (вернее, с двумя формулировками: «Разность квадратов двух выражений равна произведению суммы и разности данных выражений» и «Произведение суммы и разности двух выражений равно разности квадратов этих выражений»), его записью в виде формулы, доказательством. После этого приведено несколько образцов использования преобразования, основанного на этом тождестве. Наконец, ученики приступают к самостоятельному выполнению упражнений.

П е р в а я г р у п п а з а д а н и й

а) Представить в виде произведения:
а$_1$) $a^2 - b^2$; а$_2$) $c^2 - 5^2$; а$_3$) $121 - k^2$.

б) Проверить верность равенства $(100 + 1)(100 - 1) = 10000 - 1$.

в) Раскрыть скобки в выражении $(4xy + 5x^2)(4xy - 5x^2)$.

г) Вычислить: г$_1$) $49 \cdot 51$; г$_2$) $25^2 - 24^2$; г$_3$) $(10^4 - 1)(10^4 + 1)$.

д) Разложить на множители:
д$_1$) $k^2 - p^2$; д$_2$) $16(ab)^2 - 9c^2$; д$_3$) $x^4 - y^4$.

е) Упростить выражение $(a + b)^2 - (a - b)^2$.

В т о р а я г р у п п а з а д а н и й

ж) Используя тождество $a = (\sqrt{a})^2$ при $a \geq 0$, разложить на множители многочлен $x^2 - 5$.

з) Исключить иррациональность в знаменателе дроби $\frac{1}{\sqrt{2} - 1}$.

и) Доказать, что если $k$ – нечетное число, то $k^2 - 1$ делится на 4.

к) Функция задана аналитическим выражением $f(x) = \frac{x^2 + 2|x| + 1}{x^2 - 1}$. Избавиться от знака модуля, рассмотрев два случая: $x \geq 0$ и $x < 0$.

л) Решить уравнение $x^3 - 4x = 15$.

(Задания каждой группы можно представить студентам с помощью мультимедийного проектора.)

Проведем методический анализ этой системы типов заданий.

Задание а$_1$) имеет целью фиксировать структуру изучаемого тождества. Это достигается заменой букв ($x$ и $y$) в записи тождества другими буквами. Задания этого типа позволяют уточнить связь между словесным выражением и символической формой тождества.

Задание а$_2$) ориентировано на установление связи данного тождества с числовой системой. Преобразуемое выражение является здесь не чисто буквенным, а буквенно-числовым. Для описания производимых действий необходимо использовать понятие *замещения* буквы числом в тождестве. Развитие навыков применения операции замещения и углубление представления о ней осуществляется при выполнении заданий типа г$_5$).

Следующий шаг в освоении тождества иллюстрируется заданием а$_3$). В этом задании предложенное для преобразования выражение не имеет вида разности квадратов; преобразование становится возможным лишь тогда, когда ученик заметит, что число 121 можно представить в виде квадрата числа. Таким образом, выполнение этого задания производится не в один шаг, а в два: *на первом* происходит распознавание возможности приведения данного выражения к виду разности квадратов, *на втором* производится преобразование, использующее тождество.

На первых порах освоения тождества производится запись каждого шага: $121 - k^2 = 11^2 - k^2 = (11 - k)(11 + k)$, в дальнейшем некоторые операции по распознаванию выполняются учениками устно.

В примере д$_5$) требуется установить связи данного тождества и других, относящихся к действиям с одночленами; в д$_3$) следует применить тождество для разности квадратов дважды; в ж) ученикам придется преодолеть определенный психологический барьер, осуществляя выход в область иррациональных чисел.

Задания типа б) направлены на формирование навыков замены произведения $(x - y)(x + y)$ на разность $x^2 - y^2$. Аналогичную роль играют задания типа в). В примерах типа г) требуется выбрать одно из направлений преобразований.

В целом задания первой группы ориентированы на усвоение структуры тождества, операции замещения в простейших наиболее важных случаях и представления об обратимости преобразований, осуществляемых тождеством.

Основные особенности и цели, раскрытые нами при рассмотрении первой группы заданий цикла, относятся к любому циклу упражнений, формирующему навыки использования тождества. Для любого вновь вводимого тождества первая группа заданий в цикле должна сохранять описанные здесь особенности; различия могут быть только в количестве заданий.

Вторая группа заданий в цикле, в отличие от первой, направлена на возможно более полное использование и учет специфики именно данного тождества. Задания этой группы предполагают уже сформированными навыки использования тождества для разности квадратов (в наиболее простых случаях); цель заданий этой группы – углубить понимание тождества за счет рассмотрения разнообразных приложений его в различных ситуациях, в сочетании с использованием материала, относящегося к другим темам курса математики.

Рассмотрим решение задания л):

$x^3 - 4x = 15 \Leftrightarrow x^3 - 9x = 15 - 5x \Leftrightarrow x(x - 3)(x + 3) = 5(3 - x) \Leftrightarrow x = 3$, или $x(x + 3) = -5$. Уравнение $x(x + 3) = -5$ действительных корней не имеет, поэтому $x = 3$ – единственный корень уравнения.

Использование тождества для разности квадратов составляет здесь лишь часть в решении примера, являясь ведущей идеей проведения преобразований.

Циклы заданий, связанных с тождествами для элементарных функций, имеют свои особенности, которые обусловлены тем, что, *во-первых*, соответствующие тождества изучаются в связи с изучением функционального материала



и, *во-вторых*, они появляются позже тождеств первой группы и изучаются с использованием уже сформированных навыков проведения тождественных преобразований. Значительная часть использования тождественных преобразований, связанных с элементарными функциями, приходится на решение иррациональных и трансцендентных уравнений. В циклы, относящиеся к усвоению тождеств, входят только наиболее простые уравнения, но уже здесь целесообразно проводить работу по усвоению приема решения таких уравнений: сведение его путем замены неизвестного к алгебраическому уравнению.

Последовательность шагов при этом способе решения такова:

а) найти функцию $\varphi$, для которой данное уравнение $f(x) = 0$ представимо в виде $F(\varphi(x)) = 0$;

б) произвести подстановку $y = \varphi(x)$ и решить уравнение $F(y) = 0$;

в) решить каждое из уравнений $\varphi(x) = y_k$, где $\{y_k\}$ - множество корней уравнения $F(y) = 0$.

Новым вопросом, который необходимо учитывать при изучении тождеств с элементарными функциями, является рассмотрение области определения. Приведем примеры трех заданий:

а) Построить график функции $y = 4^{\log_2 x}$.

б) Решить уравнение $\lg x + \lg (x - 3) = 1$.

в) На каком множестве формула $\lg (x - 5) + \lg (x + 5) = \lg (x^2 - 25)$ является тождеством?

Типичная ошибка, которую совершают ученики в решении задания а) состоит в использовании равенства $a^{\log_a b} = b$ без учета условия $b > 0$. В данном случае в итоге искомый график оказывается имеющим вид параболы вместо верного ответа – правой ветви параболы. В задании б) показан один из источников получения сложных систем уравнений и неравенств, когда необходимо учитывать области определения функций, а в задании в) – упражнение, которое может служить подготовительным.

Идея, которой объединены эти задания – необходимость изучения области определения функции, может выявиться только при сопоставлении таких, разнородных по внешней форме заданий. Значение этой идеи для математики очень велико. Она может служить основой нескольких циклов упражнений – по каждому из классов элементарных функций.

В заключение заметим, что изучение тождественных преобразований в школе имеет большое ***воспитательное значение***. Умение делать какие-то выкладки, проводить расчеты, в течение длительного времени с неослабным вниманием следить за некоторым объектом необходимо людям самых разнообразных профессий, независимо от того, работают ли они в сфере умственного или физического труда. Специфика раздела «Тождественные преобразования выражений» такова, что он открывает широкие возможности для выработки у учащихся этих важных профессионально-значимых умений.

Составление плана выполнения преобразования, определение последовательности отдельных действий, поиск рациональных путей способствуют воспитанию ***алгоритмической культуры учащихся***. При выполнении заданий комбинированного характера ученик должен воедино собрать известные ему правила тождественных преобразований и суметь, следуя этим правилам, шаг за шагом сделать все выкладки, не допуская никаких ошибок. Такая работа способствует воспитанию настойчивости, аккуратности, внимательности, выработке привычки к самоконтролю.

### *Вопросы и задания*

1. Назовите основные типы преобразований, которые изучаются в школьном курсе математики. Каковы этапы их изучения?

2. Охарактеризуйте особенности тождественных преобразований:
а) в 5 – 6 классах; б) в 7 классе; в) в 8 классе; г) в 9 классе; д) в 10 – 11 классах.

3. Чем отличаются тождественные преобразования от равносильных преобразований?

4. Раскройте смысл понятий «тождество», «тождественно равные выражения». Приведите примеры.

5. Опишите мотивационный этап введения понятия тождественного преобразования. В каком классе вводится это понятие у разных авторов?

6. Какие два класса тождеств изучаются в школьном курсе алгебры и алгебраическом материале курса алгебры и начал анализа?

7. Чем отличаются «аналитические» преобразования в курсе алгебры и начал анализа от «алгебраических» преобразований?

8. Назовите принципы организации системы упражнений при изучении тождественных преобразований.

9. Раскройте смысл понятия «цикл упражнений».

10. Проанализируйте системы упражнений для усвоения формул сокращенного умножения в учебниках алгебры для 7 класса разных авторов. Какие принципы организации системы упражнений при этом не соблюдаются? Составьте свою систему упражнений для усвоения и применения формулы разности (суммы) кубов.

11. Какие виды преобразований включают в себя тождественные преобразования, изучаемые в школьном курсе математики?

**Рекомендуемая литература**


1. А в т о н о м о в а, Т. В. Практикум по методике преподавания математики в средней школе: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Т.В. Автономова, С.Б. Верченко, В.А. Гусев и др.; Под ред. В.И. Мишина. – М.: Просвещение, 1995. – 192 с.
2. Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин. – М.: Просвещение, 2012. – 319 с.
3. Алгебра. 8 класс: учеб. для общеобразоват. учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – М. : Просвещение, 2012. – 255 с.
4. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, Ю.В. Сидоров и др. – М.: Просвещение, 2014. – 304 с.
5. Алгебра и начала математического анализа. 10 класс. Базовый и углубленный уровни : учеб. для общеобразоват. учреждений / / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, Н. Е. Федорова, М. И. Шабунин. – М. : Просвещение, 2017. – 384 с.
6. Алгебра и начала математического анализа. 11 класс. Базовый и профильный уровни : учеб. для общеобразоват. учреждений / / Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева, М. И. Шабунин. – М. : Просвещение, 2017. – 384 с.
7. Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова. – М. : Просвещение, 2014. – 256 с.
8. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова. – М. : Просвещение, 2013. – 287 с.
9. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват. учреждений / Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк, К. И. Нешков, С. Б. Суворова. – М. : Просвещение, 2014. – 271 с.
10. Б а ш м а к о в, М. И. Алгебра. 7 класс : учеб. для общеобразоват учреждений / М. И. Башмаков. – М. : Бином. Лаборатория знаний, 2014. – 264 с.
11. Б а ш м а к о в, М. И. Алгебра. 8 класс : учеб. для общеобразоват учреждений / М. И. Башмаков. – М. : Бином. Лаборатория знаний, 2013. – 256 с.
12. Б а ш м а к о в, М. И. Алгебра. 9 класс : учеб. для общеобразоват учреждении / М. И. Башмаков. – М. : Бином. Лаборатория знаний, 2013. – 256 с.
13. И в а н о в а, Т. А. Современный урок математики: теория, технология, практика : Книга для учителя. – Н. Новгород : НГПУ, 2010. – 288 с.
14. М а к а р ы ч е в, Ю. Н. О преподавании темы «Тригонометрические выражения и их преобразования» в курсе алгебры VIII класса / Ю.Н. Макарычев, Н.Г. Миндюк, С.Б. Суворова // Математика в школе. – 1986. - № 1. – С. 23 – 32.
15. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под научн. ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.
16. М и н д ю к, Н. Г. Основные этапы формирования навыков тождественных преобразований / Н.Г. Миндюк // Математика в школе. – 1985. - № 5. – С. 17 – 21.
17. Методика обучения математике в 2 ч. Часть 1 : учебник для академического бакалавриата / Н. С. Подходова [и др.] ; под ред. Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. — М. : Издательство Юрайт, 2017. — 274 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-7001-2.
18. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. /А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987.
19. М о р д к о в и ч, А. Г. Алгебра. 7 класс. В 2-х частях. Учебник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, Н. П. Николаев. – М. : Мнемозина, 2016. – 455 с.
20. М о р д к о в и ч, А. Г. Алгебра. 8 класс. В 2-х ч. Учебник + задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, Л. А. Александрова, Е. Е. Тульчинская. – М. : Мнемозина, 2016. – 511 с.
21. М о р д к о в и ч, А. Г. Алгебра. 9 класс. В 2-х частях. Учебник + задачник для учащихся общеобразовательных учреждений / А. Г. Мордкович, Л. А. Александрова, П. В. Семенов. – М. : Мнемозина, 2015. – 455 с.
22. М о р д к о в и ч, А. Г. Алгебра и начала математического анализа. 10 - 11 классы: В 2-х частях. Учебник + задачник для общеобразоват. учреждений / А. Г. Мордкович, Л. Денищева, Т. А. Корешкова. – М. : Мнемозина, 2016. – 671 с.
23. С а р а н ц е в, Г. И. Упражнения в обучении математике / Г.И. Саранцев. – М. : Просвещение, 2005. – 255 с.
24. Учебники алгебры, алгебры и начал математического анализа разных авторов, входящие в Федеральный перечень школьных учебников.
25. http://matem.uspu.ru/i/inst/math/subjects/16.ppt

Лекция III

# УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

1. Содержание и роль линии уравнений и неравенств в современном школьном курсе математики.
2. Основные понятия линии уравнений и неравенств:
   а) трактовка понятия уравнения;
   б) равносильность и логическое следование;
   в) классификация преобразований уравнений, неравенств и их систем;
   г) логические обоснования при изучении уравнений и неравенств.
3. Последовательность изучения линии уравнений и неравенств.

---

## 1. Содержание и роль линии уравнений и неравенств в современном школьном курсе математики

Решение уравнений и неравенств составляет значительную часть школьного курса математики. Это объясняется тем, что уравнения и неравенства широко используются в различных разделах математики, в решении важных прикладных задач.

Уравнения и неравенства уже сами по себе представляют интерес для изучения, так как именно с их помощью на символическом языке записываются важнейшие задачи, связанные с познанием реальной действительности. Этой ролью уравнений и неравенств в естествознании определяется и их роль в школьном курсе математики. Но дело не только в этом. При изучении любой темы уравнения и неравенства могут быть использованы как эффективное средство закрепления, углубления, повторения и расширения теоретических знаний, для развития творческой математической деятельности учащихся. Операции над числами и свойства этих операций, функции и свойства функций, метрические соотношения между элементами геометрических фигур, а также связанные с этими вопросами тождества и тождественные преобразования в процессе изучения сразу же могут находить отражение в упражнениях на решение уравнений и неравенств. Например, ознакомившись с распределительным законом умножения относительно сложения, учащиеся могут применить его к решению уравнений вида $(x + 5) \cdot 2 = 16$, $14x + 27x = 656$; в 7 классе решение вопроса: может ли уравнение $x^4 - 25x^3 + 13x^2 - 20x + 1 = 0$ иметь отрицательные



корни? – не только потребует применения знаний свойств степеней рациональных чисел, но и будет способствовать развитию исследовательских способностей учащихся. Возможность разнообразить формы упражнений (решить заданное уравнение (неравенство); составить уравнение (неравенство) по заданному множеству его решений; решить задачу с помощью уравнения (неравенства); составить задачу по заданному уравнению (неравенству), составить два уравнения (неравенства), имеющие одно и то же множество решений и т. д.) способствует развитию сообразительности, находчивости и инициативы учащихся.

Графическое решение уравнений и неравенств раскрывает значение методов аналитической геометрии, играет большую роль в развитии пространственного воображения. Решение задач из разных разделов математики с помощью уравнений и неравенств формирует представление о единой математике и относительном характере ее расчленения на арифметику, алгебру, геометрию.

Значительна роль метода уравнений и неравенств в решении задач жизненного содержания. Решение задач, связанных с основами современного производства, экономикой народного хозяйства, со смежными дисциплинами может служить одним из эффективных способов осуществления принципа связи преподавания математики с жизнью, подготовки учащихся к свободному выбору будущей профессии.

Истоки алгебраических методов решения практических задач связаны с наукой Древнего мира. Как известно из истории математики, значительная часть задач математического характера, решаемых египетскими, шумерскими, вавилонскими писцами-вычислителями (XX – VI вв. до н. э.), имела расчетный характер. Однако уже тогда возникали задачи, в которых искомое значение величины задавалось некоторыми косвенными условиями, требующими, фактически, *составления уравнения* или *системы уравнений*. Первоначально для решения таких задач применялись арифметические методы. В дальнейшем начали формироваться первые алгебраические представления. Сначала был создан метод решения текстовых задач. Он послужил в дальнейшем основой для выделения *алгебраического компонента* и его независимого изучения. Это изучение осуществлялось в период VI – X вв. н. э. сначала *арабскими математиками, выделившими характерные действия, посредством которых уравнения приводились к стандартному виду* (приведение подобных членов, перенос членов из одной части уравнения в другую с переменой знака), а затем *европейскими математиками Возрождения*. Именно *они* в итоге длительного поиска *создали язык современной алгебры* (использование букв, введение символов арифметических операций, скобок и т.д.).

На рубеже XVI – XVII вв. алгебра как специфическая часть математики, обладающая своим предметом, методом, областями приложения, была уже сформирована. Дальнейшее ее развитие, вплоть до нашего времени, состояло в совершенствовании методов, расширении области приложений, уточнении понятий и связей их с понятиями других разделов математики. В этом процессе все яснее становилось, какую важную роль играет понятие уравнения в системе алгебраических понятий.

Открытие координатного метода (Р. Декарт, XVII в.), развитие аналитической геометрии позволили применить алгебру не только к задачам, связанным с числовой системой, но и к изучению различных геометрических фигур. Эта линия развития алгебры упрочила положение уравнения как ведущего алгебраического понятия, которое связывалось теперь уже с тремя главными областями своего функционирования: 1) ***уравнение как средство решения текстовых задач;*** 2) ***уравнение как особого рода формула,*** которая служит в алгебре объектом изучения; 3) ***уравнение как формула, которой косвенно определяются числа или координаты точек плоскости (пространства),*** являющиеся его решением.

Таким образом, ***уравнение*** как общематематическое понятие ***многоаспектно,*** причем ни один из аспектов нельзя исключить из рассмотрения, особенно если речь идет о проблемах школьного математического образования.

Ввиду важности и обширности материала, связанного с понятием уравнения, его изучение в современной методике математики организовано в ***содержательно-методическую линию – линию уравнений и неравенств.*** Здесь рассматриваются вопросы формирования понятий уравнения и неравенства, общих и частных методов их решения, взаимосвязи изучения уравнений и неравенств с числовой, функциональной и другими линиями школьного курса математики. Выделенным областям возникновения и функционирования понятия уравнения в алгебре соответствуют *три основных направления развертывания линии уравнений и неравенств в школьном курсе математики.*

а) ***Прикладная направленность*** линии уравнений и неравенств раскрывается главным образом при изучении алгебраического метода решения текстовых задач. Этот метод широко применяется в школьной математике, так как он связан с обучением приемам, которые используются в приложениях математики. Прикладное значение уравнений, неравенств и их систем определяется тем, что они используются в математическом моделировании.

б) ***Теоретико-математическая направленность*** линии уравнений и неравенств раскрывается в двух аспектах: *во-первых*, в изучении наиболее важных классов уравнений, неравенств и их систем и, *во-вторых*, в изучении обобщенных понятий и методов, относящихся к линии в целом. Оба эти аспекта необходимы в курсе школьной математики.

в) Для линии уравнений и неравенств характерна ***направленность на установление связей с остальным содержанием курса математики.***

Эта линия тесно связана с *числовой линией.* Все числовые области, которые рассматриваются в школьной алгебре и началах анализа, за исключением области всех действительных чисел, возникают в связи с решением каких-либо уравнений, неравенств, систем. Связь линии уравнений и неравенств с числовой линией *двусторонняя.* Обратное влияние проявляется в том, что каждая вновь введенная числовая область расширяет возможности составления и решения различных уравнений и неравенств. Например, введение арифметического квадратного корня из рациональных чисел позволяет записывать корни не только уравнений вида $x^2 = b$, где $b$ – неотрицательное рациональное число, но и любых



квадратных уравнений с рациональными коэффициентами и неотрицательным дискриминантом.

Линия уравнений и неравенств тесно связана также и с *функциональной линией.* Одна из важнейших таких связей – приложения методов, которые разрабатываются в линии уравнений и неравенств, к исследованию функций (например, к заданиям на нахождение области определения некоторых функций, их корней, промежутков знакопостоянства и т. д. С другой стороны, функциональная линия оказывает существенное влияние на содержание линии уравнений и неравенств и на стиль её изучения. В частности, функциональные представления служат основой привлечения графической наглядности к решению и исследованию уравнений, неравенств и их систем.

Следует отметить взаимосвязь линии уравнений и неравенств с *алгоритмической линией.* Само содержание понятия алгоритма может быть выделено на основе анализа процесса решения уравнений различных классов. Влияние же алгоритмической линии на линию уравнений и неравенств заключается прежде всего в возможности использования ее понятий для описания алгоритмов решения уравнений, неравенств и систем различных классов.

## 2. Основные понятия линии уравнений и неравенств

### а) О трактовке понятия уравнения

Понятие уравнения относится к важнейшим математическим понятиям. Именно поэтому трудно дать его определение, одновременно и строгое с формальной точки зрения, и доступное для учащихся, которые приступают к овладению школьным курсом алгебры. Приведем примеры некоторых определений.

***Опр. 1*** (логико-математическое определение уравнения). Пусть на множестве $M$ зафиксирован набор алгебраических операций, $x$ – переменная на $M$; тогда уравнением на множестве $M$ относительно $x$ называется *предикат* (т. е. предложение с переменной) вида $a(x) = b(x)$, где $a(x)$ и $b(x)$ – *термы* (выражения) относительно заданных операций, в запись которых входит символ $x$.

Аналогично определяется уравнение от двух переменных и т. д.

***Опр. 2.*** Предложение с переменной, имеющее вид равенства между двумя выражениями с этой переменной, называется уравнением (Н. Я. Виленкин, 2012).

Анализируя приведенное математическое определение уравнения можно выделить в нем *два компонента*: *первый компонент* (уравнение – это предикат) – ***смысловой***, он важен для уяснения понятия корня уравнения. *Второй компонент* – ***знаковый*** (уравнение – это равенство, соединяющее два терма) – относится к формальным особенностям записи, изображающей уравнение. Он важен, когда запись уравнения подвергается различным преобразованиям: часто такие преобразования производятся чисто механически: без обращения к их смыслу.

***Опр. 3.*** Равенство с переменной называется уравнением. Значение переменной, при котором равенство с переменной обращается в верное числовое равенство, называется корнем уравнения (А. Н. Колмогоров, 1975).

В учебнике Ю. М. Колягина и др. «Алгебра. 7 класс» (М., 2012) понятие уравнения вводится на материале текстовой задачи, которую мы рассмотрим позже. После ее решения формулируется определение.

*Опр. 4.* Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется уравнением.

Здесь же вводятся понятия левой и правой частей уравнения и его корня. Корнем уравнения называется то значение неизвестного, при котором это уравнение обращается в верное равенство.

Этот способ введения соответствует еще одному компоненту понятия уравнения – *прикладному*.

Помимо выделенных компонентов понятия уравнения (смыслового, знакового, прикладного) в школьной математике большую роль играет компонент, при котором ***уравнение трактуется как равенство двух функций***. Его роль проявляется в изучении графического метода решения уравнений. Однако в большинстве действующих учебниках алгебры этот компонент не кладется в основу определения уравнения.

*Опр. 5.* Буквенное равенство, которое не обязательно превращается в верное численное равенство при допустимых наборах букв, называется уравнением (Д. К. Фаддеев, 1983).

В основу этого определения положено *противопоставление тождества и уравнения.*

Таким образом, при освоении понятия уравнения необходимо использовать термины «уравнение», «корень уравнения», «что значит решить уравнение».

В определении понятия уравнения используется один из двух терминов: «***переменная***» или «***неизвестное***». Различие между ними состоит в том, что *переменная пробегает ряд значений*, не выделяя ни одного из них специально, а *неизвестное* представляет собой *буквенное обозначение конкретного числа* (поэтому этим термином удобно пользоваться при составлении уравнений по текстовым задачам). Вопрос о выборе одного из них в школьной практике в настоящее время окончательно ещё не решен.

Выбор одного из них влечет за собой различия в нахождении корней уравнения. Так, с термином «переменная» связана операция подстановки числа вместо буквы, поэтому в уравнение $a(x) = b(x)$ можно подставлять вместо $x$ конкретные числа и находить среди них корни. Термин же «неизвестное» обозначает фиксированное число; подставлять число на место буквы, обозначающей неизвестное, поэтому нелогично. Нахождение корней уравнения $a(x) = b(x)$ с этой точки зрения должно осуществляться с помощью действий, при которых это равенство рассматривают как верное и пытаются привести его к виду $x = x_0$, где $x_0$ – числовое выражение.

Мы будем в дальнейшем пользоваться термином неизвестное, который ближе с прикладной направленностью линии уравнений и неравенств.

### б) Равносильность и логическое следование

Равносильность и логическое следование – это всё логические средства, которые используются в процессе изучения уравнений и неравенств. Наиболее важным из них является понятие равносильности.



*Опр. 6.* Уравнения называются равносильными, если равносильны соответствующие предикаты, то есть если выполнены условия: области определения уравнений одинаковы и множества их корней равны.

Имеются *два пути установления равносильности уравнений*:

1) Используя известные множества корней уравнений, убедиться в их совпадении; например, уравнения $x + 1 = x + 2$ и $x^2 + 1 = x^2 + 2$ равносильны, так как они не имеют корней.

2) Используя особенности записи уравнений, осуществить последовательный переход от одной записи к другой посредством преобразований, не нарушающих равносильности.

Для большинства заданий второй путь более характерен, ведь равносильность в теории уравнений как раз и используется для того, чтобы указать конкретные правила для решения уравнений. Однако в преподавании ограничиваться им нецелесообразно, так как он относится только к практическому применению равносильности и требует первого для своего обоснования.

В отношении формирования понятия равносильности и его применения к решению уравнений учебные пособия по алгебре можно разделить на ***две группы***. К ***первой*** относятся те пособия, в которых *использование равносильных преобразований основано на явном введении и изучении понятия равносильности*; ко ***второй*** – те, в которых *применение равносильных преобразований предшествует выделению самого понятия*. Методика работы над понятием равносильности имеет при указанных подходах отличия.

В связи *с вопросом равносильности* в изучении материала линии уравнений и неравенств можно выделить ***три основных этапа***.

***Первый этап*** охватывает начальный курс школьной математики и начало курса алгебры. Здесь происходит ознакомление с различными способами решения отдельных, наиболее простых классов уравнений. Используемые при этом преобразования получают индуктивное обоснование при рассмотрении конкретных примеров. По мере накопления опыта индуктивные рассуждения все чаще заменяются такими, где фактически используется равносильность, *но сам термин не употребляется*. Длительность этого этапа может быть различной в зависимости от методических установок учебника.

На ***втором этапе*** происходит *выделение понятия равносильности* и сопоставление его теоретического содержания с правилами преобразований, которые выводятся на его основе. Длительность этого этапа незначительна, так как на нем происходит только выделение этого понятия и его использование на нескольких теоретических примерах.

На ***третьем этапе*** на основе общего понятия равносильности происходит *развертывание общей теории, и теории отдельных классов уравнений*. Такой стиль характерен для курса алгебры и начал анализа. К числу неравносильных преобразований относится понятие логического следования.

***Логическое следование*** начинает применяться значительно позже равносильности и осваивается как дополнение к нему. При решении уравнений при прочих равных условиях предпочтение отдается равносильному преобразованию; логическое следование применяется лишь тогда, когда равносильного преобразования найти не удастся.

**в) Классификация преобразований уравнений, неравенств и их систем**

В методике математики выделяют три типа таких преобразований:

1) Преобразование одной из частей уравнения или неравенства.

2) Согласованное преобразование обеих частей уравнения или неравенства.

3) Преобразование логической структуры.

Поясним эту классификацию.

*Преобразования 1-го типа* используются при необходимости упрощения выражения, входящего в запись решаемого уравнения или неравенства. Например, решая уравнение $\cos x \cdot tg\, x = 1$, можно пытаться заменить выражение в левой части более простым. В данном случае имеем: $\sin x = 1$, это уравнение неравносильно исходному за счет изменения области определения. При изучении некоторых типов уравнений, например, тригонометрических или логарифмических при такой замене возможно получение уравнения, неравносильного исходному уравнению ($\log_2 (x + 1) + \log_2 (x + 3) = 3 \Rightarrow \log_2 (x + 1)(x + 3) = 3$).

Преобразование одной из частей уравнения используют раньше всех других преобразований уравнений, это происходит ещё в начальном курсе математики. Прочность владения навыком преобразований этого типа имеет большое значение для успешности изучения других видов преобразований.

*Преобразования 2-го типа* состоят в согласованном изменении обеих частей уравнения или неравенства в результате применения к ним арифметических действий или элементарных функций. Преобразования 2-го типа многочисленны. Они составляют ядро материала, изучаемого в линии уравнений и неравенств. Приведем примеры преобразований этого типа.

1) Прибавление к обеим частям уравнения (неравенства) одного и того же выражения.

2а) Умножение (деление) обеих частей уравнения на одно и то же выражение.

2б) Умножение (деление) обеих частей неравенства на выражение, принимающее только положительные значения.

2в) Умножение (деление) обеих частей неравенства на выражение, принимающее только отрицательные значения и изменение знака неравенства на противоположный.

3а) Переход от уравнения $a = b$ к уравнению $f(a) = f(b)$, где $f$ - некоторая функция, или обратный переход.

3б) Переход от неравенства $a > b$ к неравенству $f(a) > f(b)$, где $f$ – возрастающая функция, или обратный переход.

3в) Переход от неравенства $a > b$ к неравенству $f(a) < f(b)$, где $f$ – убывающая функция, или обратный переход.

Среди преобразований 2-го типа преобразования неравенств образуют сложную в изучении, обширную систему. Этим в значительной степени объясняется то, что навыки решения неравенств формируются медленнее навыков решения уравнений и не достигают у большинства учащихся такого же уровня.

*К 3-ему типу преобразований* относятся преобразования уравнений, неравенств и их систем, изменяющие логическую структуру заданий. В каждом задании можно выделить элементарные предикаты – отдельные уравнения или неравенства. Под логической структурой понимается способ связи элементарных предикатов посредством логических связок конъюнкции или дизъюнкции.

Приведем п р и м е р ы.

1. Переход от уравнения $a \cdot b = 0$ к совокупности уравнений $a = 0$, $b = 0$. Для неравенств аналогичный переход имеет вид

$$a \cdot b > 0 \Rightarrow (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0).$$

Сюда же относятся сходные преобразования для уравнений и неравенств вида $\frac{a}{b} = 0$, $\frac{a}{b} > 0$.

2. Переход от системы уравнений к одному уравнению посредством почленного сложения, вычитания, умножения или деления уравнений, входящих в систему.

Эти два примера иллюстрируют арифметические преобразования логической структуры. В следующих двух примерах выполняются логические преобразования логической структуры.

3. Выделение из системы уравнений или неравенств одного из компонентов. Например, при решении системы уравнений способом подстановки можно в качестве первого шага рассмотреть первое из уравнений (это и будет преобразование данного типа: $A \wedge B \Rightarrow A$). Смысл такого преобразования в том, что выделенное уравнение можно подвергать дальнейшим преобразованиям, независимо от той системы, в которую оно входит.

4. Замена переменных. Уравнение $F(f(x)) = 0$ равносильно системе

$$\begin{cases} F(y) = 0, \\ y = f(x). \end{cases}$$

Связь этой системы с уравнением такова: $x_0$ – решение уравнения тогда и только тогда, когда $(x_0; f(x_0))$ – решение системы.

**г) Логические обоснования при изучении уравнений и неравенств**

При изучении материала линии уравнений и неравенств большое внимание уделяется вопросам обоснования процесса решения конкретных заданий. На начальных этапах изучения курса алгебры и в курсе математики младших классов эти *обоснования имеют эмпирический индуктивный характер*. По мере накопления опыта решения уравнений, неравенств, систем различных классов всё большую роль приобретают *общие свойства преобразований*. Наконец, выделяются наиболее часто используемые преобразования (равносильность и логическое следование). Рассмотрим каждое из этих направлений.

**1. *Эмпирическое обоснование процесса решения.*** Таким способом описываются приемы решения первых изучаемых классов уравнений, в частности, уравнений первой степени с одним неизвестным. Методика изучения этих уравнений состоит в предъявлении алгоритма решения таких уравнений и разборе нескольких типичных примеров. Указанный алгоритм формируется не сразу. Перед этим разбирается несколько примеров, причем цель рассмотрения состоит в том, чтобы выделить в последовательности действий нужные для описания алгоритма операции. Объяснения учителя могут быть такими: «Нужно решить уравнение $5x + 4 = 3x + 10$. Постараемся все члены, содержащие неизвестное, собрать в одной части, а все члены, не содержащие неизвестное, – в другой части уравнения. Прибавим к обеим частям уравнения число (–4), данное уравнение примет вид $5x = 3x + 10 - 4$. Теперь прибавим к обеим частям уравнения $(-3x)$, получим уравнение $5x - 3x = 10 - 4$. Приведем подобные члены в левой части уравнения, а в правой вычислим значение выражения; уравнение примет вид $2x = 6$. Разделим обе части уравнения на 2, получим $x = 3$».

Этот рассказ сопровождается последовательно возникающей па доске записью преобразований:

$$5x + 4 = 3x + 10,$$
$$5x = 3x + 10 - 4,$$
$$5x - 3x = 10 - 4,$$
$$2x = 6, x - 3.$$

Анализируя решение, учащиеся приходят к правилам решения уравнений первой степени с одним неизвестным.

Обратим внимание на следующее: прежде всего, в таком рассказе *не акцентируется внимание на том, что под действием преобразований уравнение преобразуется в некоторое новое уравнение*. Ученики как бы имеют дело все время с тем же уравнением. Если бы упор делался непосредственно на переход от одного уравнения к другому, то это потребовало бы введение равносильности, что не характерно для первых этапов обучения алгебре.

Далее, вопрос о том, *все ли корни уравнения найдены, здесь не ставится*. Если даже он и возникает по ходу обсуждения процесса решения, то ответ на него не дается. *Основную роль играют действия по переносу членов из одной части уравнения в другую, группировка подобных членов.*

Таким образом, *вопросы обоснования решения уравнения стоят на втором плане, а на первом – формирование прочных навыков преобразований.*

***2. Дедуктивное обоснование процесса решения уравнений и неравенств без явного использования понятия равносильности.***

К изучению линии уравнений и неравенств постепенно нужно привлекать различные приёмы дедуктивного обоснования. Это связано с возрастанием сложности предлагаемых заданий по сравнению с уравнениями первой степени с одним неизвестным. Дедуктивные обоснования опираются на свойства верных числовых равенств. Например, переход от уравнения $3x + 2y = 5$ к уравнению $y = -1{,}5x + 2{,}5$ обосновывается с помощью свойства: если $a = b$ – верное равенство, то $a + c = b + c$ и $ac = bc$ также верные равенства. Рассуждения при этом проводятся примерно так: «Пусть $(x_0, y_0)$ – решение первого уравнения, т.е. $3x_0 + 2y_0 = 5$. Пользуясь свойствами числовых равенств, данное равенство можно записать в виде $y_0 = -1{,}5x_0 + 2{,}5$, значит, $(x_0, y_0)$ – решение второго уравнения».

Переход к дедуктивному обоснованию может производиться на различном материале. Например, в учебнике Ю. Н. Макарычева и др. «Алгебра. 7 класс» (М., 2014) это сделано при изучении линейного уравнения с двумя переменными, в учебнике Ю. М. Колягина и др. «Алгебра. 7 класс» (М., 2012) при изучении системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.



Необходимо отметить, что каким бы ни был *способ обоснования*, он *не является самоцелью в курсе школьной математики. Цель изучения обоснований состоит в обеспечении осознанности процесса решения*. После того как она достигнута, дальнейшее использование приема приводит к формированию навыка, которым учащиеся пользуются в дальнейшем, лишь изредка возвращаясь к обоснованию приёма.

***3. Обоснование решения уравнений, неравенств и их систем с помощью понятий равносильности и логического следования.***

Рассмотренные приемы обоснования опираются на связь линии уравнений и неравенств с числовой системой. Однако последовательное применение этих приемов затруднительно из-за громоздкости рассуждений. Поэтому на определенном этапе изучения содержания курса алгебры происходит *введение понятия равносильности* и (в ряде пособий) *логического следования*.

Вернемся к нашему примеру: $5x + 4 = 3x + 10$. С использованием равносильности его решение проводится так: «Поскольку перенос членов уравнения из одной части в другую с изменением знака – равносильное преобразование, то, осуществив его, приходим к уравнению, равносильному данному: $5x - 3x = 10 - 4$. Упрощая выражения в левой и правой частях уравнения, получим $2x = 6$, откуда $x = 3$».

Отметим особенности приведенного решения по сравнению с изложенным ранее. Прежде всего, *оно более свёрнуто, предполагает намного более высокий уровень владения материалом курса алгебры*. Поэтому применению такого способа решения уравнений и неравенств и их систем должна предшествовать большая подготовительная работа.

Сделаем некоторые замечания о содержании учебников.

<u>В учебнике Ю. П. Макарычева и др. «Алгебра. 7 класс»</u> (М., 2014) понятие «равносильные уравнения» вводится при изучении темы «Уравнения с одной переменной». Здесь же учащиеся знакомятся и с двумя основными свойствами уравнений:

*1) Если в уравнении перенести слагаемые из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному.*

*2) Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.*

<u>По учебникам Ш. А. Алимова и др.</u> понятие «равносильные уравнения» вводится в 10 классе в курсе «Алгебра и начала анализа 10-11» при изучении темы «Логарифмические уравнения». При этом вначале вводится понятие «следствие уравнения».

Рассматривается пример. Решить уравнение:

$$log_2 (x + 1) + log_2 (x + 3) = 3. \qquad (1)$$

Предположим, что $x$ – такое число, при котором равенство (1) является верным, т. е. $x$ – корень уравнения (1). Тогда по свойству логарифма верно равенство

$$log_2 (x + 1)(x + 3) = 3. \qquad (2)$$

Из этого равенства по определению логарифма получаем:

$$(x+1)(x+3)=8,$$
откуда $x_1 = 1$ или $x_2 = -5$. Проверкой убеждаемся, что $x = 1$ – корень уравнения (1), а $x = -5$ не является корнем уравнения (1), но является корнем уравнения (2). При переходе от уравнения (1) к уравнению (2) корень $x = 1$ сохранился и появился посторонний корень $x = -5$. В этом случае *уравнение* (2) *называют следствием уравнения* (1). Затем дается определение 7.

***Опр.*** *7.* Если все корни первого уравнения являются корнями второго уравнения, то второе уравнение называется следствием первого уравнения.

Учащимся также сообщается, что если уравнения решаются постепенным переходом к более простым уравнениям, которые являются следствием исходного уравнения, то в таких случаях после нахождения корней необходима их проверка. После рассмотрения конкретного примера дается второе определение.

***Опр. 8.*** Уравнения, имеющие одно и то же множество корней, называют равносильными. В частности, два уравнения, не имеющие корней, являются равносильными. Любое из двух равносильных уравнений является следствием другого.

## 3. Последовательность изучения линии уравнений и неравенств

Учебный материал данной линии распределен по ступеням. Можно выделить 4 основные ступени: 1) изучение основных типов уравнений, неравенств, систем; 2) изучение уравнений, неравенств, систем, сводящихся к основным классам; 3) формирование общих приемов решения и исследования уравнений, неравенств и их систем; 4) синтез материала линии уравнений и неравенств.

Остановимся кратко на характеристике этих ступеней.

1. ***Изучение основных типов уравнений, неравенств, систем.*** К числу основных типов уравнений, неравенств, систем можно отнести: линейные уравнения с одним неизвестным, линейные неравенства с одним неизвестным, системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными, квадратные уравнения и неравенства, простейшие иррациональные и трансцендентные уравнения и неравенства. Эти классы изучаются очень тщательно, для них указываются алгоритмы решения и выполнение их доводится до автоматизма, указывается также форма, в которой должен быть записан ответ.

Введение каждого нового класса уравнений сопровождается введением новой области числовых выражений, входящих в стандартную форму записи ответа. Например, *квадратичные иррациональности* ($a + b\sqrt{c}$; $a, b, c \in Q$) связываются с решением квадратных уравнений; *логарифмические выражения* появляются при решении показательных и логарифмических уравнений; числовые множества вида $\frac{\pi}{6} + 2\pi k, k \in Z$, возникают в связи с тригонометрическими уравнениями.

Когда материал усвоен, целесообразно иногда предлагать и такие задания, в которых могут возникать нестандартные для данного класса уравнений ответы. Например, подавляющее большинство заданий на решение квадратных уравнений содержит в данных только рациональные числа; при повторении можно предложить и такое задание: $x^2 + 21x + \sqrt{2} = 0$.



2. ***Изучение уравнений, неравенств, систем, сводящихся к основным классам.*** Каждый из основных классов уравнений, неравенств, систем уравнений имеет четкую, стандартную форму записи. Например, уравнение $x^2 + x - 1 = 0$ – квадратное, а уравнение $x^2 + x = 1$, равносильное первому, квадратным не является.

В результате длительного развития как элементарной алгебры, так и методики преподавания математики было выделено несколько типов уравнений, неравенств, систем уравнений, сведение которых к основным классам производится особенно просто. Именно эти «вторичные» классы изучаются сразу вслед за изучением основных, причем в тесном взаимодействии с ними. Например, уже при изучении систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными могут быть предложены задания, не имеющие стандартного вида:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 3y = 4x - 2. \end{cases}$$

Первый шаг в решении таких заданий состоит в том, что они приводятся к стандартному виду заданий основного класса; в нашем случае:

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x - 3y = 2. \end{cases}$$

Классификация «вторичных» классов уравнений обширнее, чем основных. Она включает, например, уравнения первой степени, биквадратные, алгебраические, иррациональные уравнения. Устанавливается соответствие между ними и основными классами. Некоторые вторичные классы находятся между собой в отношении включения. Например, класс алгебраических уравнений шире класса биквадратных уравнений, но биквадратные уравнения имеют особый приём сведения их к квадратным.

3. ***Формирование общих приемов решения и исследования уравнений, неравенств и их систем.*** Общие приемы решения и исследования уравнений можно разделить на 3 группы.

<u>Первая группа</u> состоит из *логических методов обоснования решения.* Используя эти методы (например, равносильные преобразования или логическое следование), переходят от исходных уравнений, неравенств, систем к новым. Такие переходы делаются до тех пор, пока не получаются задания, относящиеся к известным классам.

<u>Вторая группа</u> состоит из *вычислительных приемов*, посредством которых производятся упрощения одной из частей данного уравнения или неравенства, проверка найденных корней при помощи подстановки вместо неизвестного, различные промежуточные подсчеты и т. д. Роль вычислительных приемов особенно заметна при выполнении заданий по нахождению приближенных значений корней уравнений.

В <u>третью группу</u> входят *наглядно-графические приемы.* Большинство этих приемов используют в качестве основы координатную прямую или координатную плоскость.

Использование *координатной прямой* позволяет решать некоторые неравенства и системы неравенств с одним неизвестным, а также уравнения и неравенства с модулями. Например, прием решения систем линейных неравенств с одним неизвестным состоит в том, что на координатную прямую наносятся множества решений каждого неравенства, а потом выделяется их общая часть.

Решение уравнений и неравенств с модулями связывается с геометрической интерпретацией модуля разности чисел. Например, решение уравнения $|x - a| = b$ сводится к нахождению на координатной прямой точек, удаленных от точки с координатой $a$ на расстояние $b$.

Использование *координатной плоскости* позволяет применить графические методы к решению и исследованию уравнений, неравенств и их систем как с одним, так и с двумя неизвестными. Один из самых ярких примеров использования графических методов в курсе школьной математики – прием графического представления системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Этот приём используется, главным образом, для того, чтобы провести исследование этого класса систем. В качестве подготовительного этапа необходимо рассмотреть график линейного уравнения с двумя неизвестными. Построение этого графика осуществляется при помощи преобразования данного уравнения к виду $y = l(x)$, где $l(x)$ – линейная функция, и использования сведений о графике линейной функции (график уравнения $x = c$ рассматривается отдельно).

Графические приемы эффективно применяются для изображения результатов исследования там, где чисто аналитическая запись громоздка.

Иногда графический метод применяется и для фактического нахождения числовых значений корней. Например, графический способ решения уравнения с одним неизвестным $f(x) = g(x)$ состоит в нахождении абсцисс точек пересечения графиков функций $y = f(x)$ и $y = g(x)$, фактически при этом используется графический метод решения системы уравнений $\begin{cases} y = f(x), \\ y = g(x). \end{cases}$

Область применения графического метода решения уравнений и систем в отличие от исследования ограничена, так как с его помощью можно рассматривать только задания, в которых требуемые для построения графики хорошо известны, а искомые точки пересечения не выходят за пределы чертежа; кроме того, на отыскание решений влияют неизбежные погрешности чертежа.

Таким образом, мы видим, что графические методы, использующие координатную плоскость, могут играть важную роль в решении и исследовании уравнений и неравенств с одним неизвестным, уравнений и систем уравнений с двумя неизвестными. Роль этого метода в применении к неравенствам с двумя неизвестными (и их системам) иная – здесь он используется только для изображения ответа; часто это единственная форма, в которой ответ может быть указан.

***4. Синтез материала линии уравнений и неравенств.*** Последняя ступень в освоении школьной теории уравнений и неравенств относится к организации имеющихся у учащихся знаний и опыта решения уравнений и неравенств в единую целостную систему. *Для этой ступени характерны более сложные задания, в которых возрастает роль таких компонентов, как распознавание возможности сведения задания к одному из типовых классов, организация процесса решения.* Здесь следует проводить разбор решаемых заданий, выделять особенности различных классов заданий и их общие черты, отмечать ценность тех или иных применяемых средств.



По своему положению в курсе алгебры эта ступень может быть отнесена к прохождению последних тем курса и к итоговому повторению; в результате формируется общая картина связей изученных классов уравнений, неравенств и их систем.

В курсе математики старших классов учащиеся сталкиваются с новыми классами уравнений, неравенств, систем или с углубленным изучением уже известных классов. Однако это мало влияет на уже сформированную систему; они дополняют её новым фактическим содержанием, не меняя сложившиеся связи, соединяющие различные классы.

**Историческая справка**

Алгебра вырастала из арифметики, из вычислительной практики людей. Первые алгебраические тенденции роста проявились очень рано. Вначале они представляли собой стремление группировать однотипные задачи и формулировать возможно более общие правила их решения. У них была общая особенность: неизвестное, которое требуется отыскать по условию задачи, получало свое особое название, а затем обозначалось специальным символом. Это имело место уже в древнеегипетских папирусах за две тысячи лет до н. э. В них неизвестное обозначалось словом, которое ученые переводят как «куча» или «все вместе». В течение всей истории алгебры и алгебраического метода выделение и обозначение неизвестной было непременным признаком алгебраичности суждений.

В более поздней математике Древней Греции произошло отделение геометрической части математических знаний, как обладающей наивысшей по тем временам общностью, от числовых её компонентов. Поэтому в источниках математики Древней Греции элементы алгебраического характера представлены в двух разновидностях: в виде геометрической алгебры, изложенной во второй книге «Начал» Евклида, и в буквенно-символическом виде, каким был неопределенный анализ Диофанта.

«Арифметика» Диофанта, которую относят к III в. н. э. резко отличается от дошедших до нас классических сочинений того времени постановкой задач, методикой их решения, алгебраической трактовкой величин и действий над ними.

Диофант рассматривал задачи из неопределенного анализа. Он отыскивал рациональные решения таких систем алгебраических уравнений, в которых число неизвестных превышает число уравнений. Эта проблематика очень трудна и является актуальной и в наше время, ее теперь чаще называют *диофантовым анализом*.

«Арифметика» Диофанта состояла из 13 книг (частей); сохранились только первые 6 книг. В начале сочинения введена развитая алгебраическая символика и определен способ подхода к решению задач, характерный для алгебры. В «Арифметике» величины обозначены порядковыми буквами греческого алфавита, введены специальные символы для неизвестной и для первых ее шести степеней. Показатели степеней у Диофанта не только положительные, но и отрицательные. Имеются специальные обозначения для свободного члена, для знака вычитания и знака равенства. Для сложения специального знака еще не существовало, слагаемые просто писали рядом. Явно были сформулированы правила алгебраических операций, в том числе правило умножения и деления степеней неизвестной, правило перенесения членов уравнения с одной стороны знака равенства на другую и др. Без такого аппарата невозможно было справляться с такими трудными задачами, как задачи диофантова анализа.

В истории математики отсутствуют сведения о предшественниках и последователях Диофанта, которые бы продолжали его работу.

Геометрическая алгебра и диофантов анализ остались изолированными друг от друга.

Не сохранилось ничего, что говорило бы о связях между обоими направлениями. Тем не менее, историки утверждают, что элементы алгебры со времен древнегреческой математики, т.е. приблизительно с начала нашего летоисчисления, начали свой исторический путь параллельно в двух формах (интерпретациях): *геометрической и буквенно-символической*. Эти две линии развития были восприняты в их взаимосвязи и в последующие времена. В качестве одного из следствий этого в алгебре и вообще в математике установились и сохранились до наших дней геометрические термины (квадрат, куб, линейные уравнения и др.) для обозначения чисто алгебраических объектов.

Первые века нашей эры, как известно, не были благоприятными для развития наук, в том числе и для математики. Только значительно позже, в государствах средневекового Востока, стали возникать научные центры, возрождались занятия математикой не только прикладной, но и теоретической. Научные сочинения в те времена были написаны на арабском языке, который являлся официальным языком многих государств от Испании до Индии. Поэтому математику этого периода нередко называют *арабской* или *математикой стран ислама*.

В трудах арабских математиков элементы алгебры объединились, их общность была осознана и алгебра, таким образом, выделилась в самостоятельную область математики.

Основополагающим сочинением по алгебре был трактат узбекского математика и астронома IX в. аль-Хорезми «Китаб аль-Джебр валь-Мукабала». В переводе это означает: книга об операциях *джебр* (восстановления) и *кабала* (приведения). Первая операция, из названия которой получилось название для всей алгебры, состоит в переносе членов уравнения с одной стороны знака равенства в другую. Вторая – является приведением подобных членов в уравнении. Решение уравнений в этот период рассматривается как самостоятельная наука. В книге аль-Хорезми содержатся систематические решения уравнений 1-й и 2-й степени вида:

$$ax = b; \qquad x^2 + bx = a;$$
$$ax^2 = b; \qquad x^2 + a = bx;$$
$$ax^2 = bx; \qquad bx + a = x^2.$$

Хорезми приводит как *арифметические*, так и *геометрические* решения приведенных уравнений. Метод нахождения геометрических решений состоит в приравнивании площадей, специально подобранных для геометрической интерпретации уравнения.

Книга Хорезми пользовалась большой известностью. Термин «алгебра» укоренился в математике. Осталось в этой науке и имя автора (аль-Хорезми) в латинизированном виде: *алгоритм*. Хорезми не высказывал мысли о приоритете в алгебре. Видимо, оба приёма джебр и кабала – были уже широко распространены в его время.

Алгебраические арабские трактаты IX – XV вв., кроме решения уравнений 1-й и 2-й степени, включали в себя и кубические уравнения. К ним приводили разнообразные геометрические задачи: а) рассечение шара плоскостью; б) трисекция угла; в) отыскание стороны правильного девятиугольника; г) отыскание стороны правильного семиугольника и др.

Методы решения кубических уравнений были разнообразны. В одних трактатах содержатся попытки численного решения этих уравнений, в других строится теория решения кубических уравнений с помощью пересечения конических сечений. Последнее направление основывалось на получении геометрического образа положительного корня путем пересечения подходящим образом подобранных конических сечений.

В трудах математиков средневекового Востока алгебраические элементы были впервые выделены и собраны в новый специальный отдел математики, был сформулирован предмет этого отдела науки и построена систематическая теория. Вот что писал об алгебре и ее методе среднеазиатский математик Омар Хайям (ок. 1048 – после 1122): «Алгебра есть научное искусство. Её предмет – это абсолютное число и измеримые величины, являющиеся неизвестными, но отнесенные к какой-либо известной вещи так, что их можно определить; эта известная вещь есть количество или индивидуально определенное отношение, и к этой известной вещи приходят, анализируя условия задачи; и в этом искусстве ищут соотношения, связывающие данные в задачах величины с неизвестной, которая вышеуказанным образом составляет предмет алгебры. Совершенство этого искусства состоит в знании математических методов, с помощью которых можно осуществить упомянутое определение как числовых, так и геометрических неизвестных.,. Алгебраические решения, как это хорошо известно производятся лишь с помощью уравнения, то есть приравниванием одних степеней другим» [14, с.72].



Дальнейшее формирование алгебры происходило в странах Европы, где сложилась благоприятная для этого обстановка. Математика испытывала воздействие практических запросов техники и мореплавания. Темп научной жизни к XV в. заметно ускорился. В системе наук математика заняла центральное место как основа наук, как азбука естествознания, или натуральная философия. Это упрочило её положение и ускорило процесс создания теоретических частей, предпосылок новых успехов. Наибольшие успехи наметились в построении формально символического аппарата алгебры и в тригонометрии. В XV – XVI вв. было произведено обобщение понятия числа, понятия степени, введены радикалы и операции над ними и др.

Большим практическим успехом было решение в радикалах уравнений 3-й и 4-й степени. Формулы для решения этих уравнений открыли итальянские ученые Д. Ферро, Н. Тарталья, а затем Кардано. Ученик Кардано Л. Феррари (1522 – 1565) открыл и метод решения уравнений 4-й степени путем сведения задачи к кубической резольвенте.

Рост содержания математических знаний всегда тесно связан с развитием математической символики. Она активно воздействует на математику и сама приобретает оперативные свойства. Именно развитая символика делает алгебру наукой об операциях над общими классами множеств: чисел, векторов, тензоров, матриц и др.

В рассматриваемый период происходил быстрый переход от словесной (риторической) алгебры к алгебре символической путем сокращения слов, а затем введения символов.

Единую, последовательно введенную систему алгебраических символов первым дал французский математик Ф. Виет (1540 – 1603). С введением буквенной символики алгебра начинает развиваться как общая наука о буквенных вычислениях - тождественных преобразованиях буквенных формул, решении алгебраических уравнений и т. п. [10, с. 114]. Вместе с ней появляется и новый метод – *алгебраический*, заключающийся в употреблении букв и буквенных выражений, над которыми производятся преобразования по определенным правилам. Его ещё называют методом буквенных вычислений [9, с. 249].

Новой алгебре Ф. Виет посвятил главный труд своей жизни – «Введение в искусство анализа». Благодаря буквенной символике стало впервые возможным выражение уравнений, их свойств общими формулами. Объектами математических операций стали не числовые задачи, а сами алгебраические выражения. Именно этот смысл вкладывал Виет в характеристику своего исчисления как «искусства, позволяющего хорошо делать математические открытия».

Алгебра Виета была ещё несовершенной и имела большие недостатки. Необходимо было сочетать эффективность алгебраических приёмов со строгостью античных геометрических построений, хорошо знакомых Виету и представлявших, по его мнению, образцы подлинно научного анализа. Эта видовая трактовка величин, обладающих размерностью, делала новую алгебру «тяжелой». Кроме того, в ней не было еще общей трактовки степеней, все степени были натуральные и т.д.

*Алгебру Виета* впоследствии вытеснила *алгебра Декарта*. Однако известно, что Ферма, изучив алгебру Виета, придерживался её формы, когда строил аналитическую геометрию. Предполагают, что параллелизм между свойствами уравнений и геометрическими построениями, регулярно проводимый Виетом, сыграл свою роль в формировании идей аналитической геометрии в XVII в. Он послужил исходным пунктом развития новой науки.

Таким образом, благодаря работам Ф. Виета, в европейской математике к концу XVI в. сформировалась *алгебра как наука о решении уравнений*. Первые элементы алгебры появились сразу в двух равноправно существующих интерпретациях: геометрической и буквенно-символической. Систематизация алгебраических сведений и построение алгебры как особой части математики проходило также в двух равносильных и равноправных интерпретациях. К середине XVIII в. алгебра сложилась примерно в том объёме, который теперь принято называть «элементарной» алгеброй.

Как уже подчеркивалось выше, алгебра на всех этапах своего исторического пути развивалась не изолированно. Она вырастала из арифметики. Арифметические и геометрические элементы были всегда неотъемлемыми компонентами алгебры. Успехи алгебры на определенном уровне развития сыграли важную роль в появлении аналитической геометрии и математического анализа, неотъемлемыми частями которых являются их алгебраические составляющие.

В процессе исторического развития точка зрения на предмет алгебры несколько раз существенно менялась. В конце XVIII в. и начале XIX в. постепенно одна из задач алгебры, а именно теория решения алгебраических уравнений, начала считаться центральной. Алгебра поэтому стала определяться как теория алгебраических уравнений.

Наряду с теорией алгебраических уравнений с одним неизвестным развивается теория систем алгебраических уравнений с несколькими неизвестными, в частности систем линейных уравнений. В связи с исследованием таких систем возникают понятия матрицы и определителя. В дальнейшем матрицы становятся предметом самостоятельной теории – алгебры матриц.

Начиная с середины XIX в., центр тяжести в алгебраических исследованиях постепенно перемещается с теории уравнений на изучение произвольных алгебраических операций. Поэтому современная алгебра определяется как «часть математики, посвященная изучению алгебраических операций» [10, с. 114] или как «наука о системах объектов той или иной природы, в которых установлены операции, по своим свойствам более или менее сходные со сложением и умножением чисел. Такие операции называются алгебраическими».

Алгебра классифицирует системы с заданными на них алгебраическими операциями по их свойствам и изучает различные задачи, возникающие в этих системах, включая и задачу решения и исследования уравнений, которая в новых системах объектов получает новый смысл (решением уравнения может быть вектор, матрица, оператор и т. д.). Этот новый взгляд на алгебру, оформившийся окончательно лишь в XX в., способствовал дальнейшему расширению области применения алгебраических методов, в т. ч. и за пределами математики, в частности в физике. Кроме того, он укрепил связи алгебры с другими отделами математики и усилил влияние алгебры на их дальнейшее развитие.

## *Вопросы и задания*

1. Какова роль линии уравнений и неравенств в школьном курсе математики?
2. Как исторически развивались алгебраические методы решения задач?
3. С какими главными областями функционирования связывалось понятие уравнения в XVII веке?
4. Назовите основные направления развертывания линии уравнений и неравенств в школьном курсе математики.
5. Какие существуют подходы к определению понятия уравнения в школьном курсе математики?
6. Какие уравнения называются равносильными? Какие этапы можно выделить в изучении и применении этого понятия?
7. Какие типы преобразований используются при решении уравнений и неравенств?
8. Приведите примеры разных обоснований процесса решения уравнений, неравенств и их систем.



9. Проанализируйте учебники алгебры, алгебры и начал математического анализа разных авторов с точки зрения развертывания линии уравнений, неравенств и их систем. Как вводится понятие уравнения в разных учебниках? Какие классы уравнений, неравенств и их систем изучают учащиеся в основной школе и в старших классах?
10. Как изменялась точка зрения на предмет алгебры как науки? Что представляет собой современная алгебра?

### Рекомендуемая литература


1. Виленкин, Н. Я. Математика. 6 класс : учеб. для учащихся общеобразоват. учреждений / Н. Я. Виленкин, В. И. Жохов, А. С. Чесноков, С. И. Шварцбурд. – М. : Мнемозина, 2012. – 288 с.
2. Глейзер, Г. И. История математики в школе: VI – VIII кл. : Пособие для учителей / Г. И. Глейзер. – М. : Просвещение, 1982. – 240 с.
3. Далингер, В. А. Методика обучения математике. Поисково-исследовательская деятельность учащихся : учебник и практикум для вузов / В. А. Далингер. — 2-е изд., испр. и доп. — М. : Издательство Юрайт, 2017. – 460 с. — (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-534-00450-2.
4. Иванова, Т. А. Современный урок математики: теория, технология, практика : Книга для учителя. – Н. Новгород : НГПУ, 2010. – 288 с.
5. Капкаева, Л. С. Интеграция алгебраического и геометрического методов при обучении математике в школе : учеб. пособие для студ. мат. спец. пед. вузов / Л.С. Капкаева. – Саранск, 2003. – 179 с.
6. Капкаева, Л. С. Алгебраический и геометрический методы в обучении математике / Л. С. Капкаева // Математика в школе. – 2004. – № 7. – С. 27 – 33.
7. Литаренко, Н. И. Правила решения уравнений / Н. И. Литаренко // Математика в школе. – 1996. - № 2. – С. 16 – 22.
8. Маркушевич, Л. А., Черкасов, Р. С. Уравнения и неравенства в заключительном повторении курса алгебры средней школы / Л.А. Маркушевич, Р.С. Черкасов // Математика в школе. - 1994. - № 1. – С. 24 – 32.
9. Математика, ее содержание, методы и значение / Ред. колл. А. Д. Александров, А.Н. Колмогоров, М. А. Лаврентьев. Т. 1. – М., 1956. – 296 с.
10. Математическая энциклопедия. Т. 1. – М., 1977. – 576 с.
11. Методика обучения математике в 2 ч. Часть 1 : учебник для академического бакалавриата / Н. С. Подходова [и др.] ; под ред. Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. — М. : Издательство Юрайт, 2017. – 274 с. – (Бакалавр. Академический курс). — ISBN 978-5-9916-7001-2.
12. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. /А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.
13. Перельман, Я. И. Занимательная алгебра / Я. И. Перельман. – М.: Триада-Литера, 1994. – 200 с.
14. Рыбников, К. А. Возникновение и развитие математической науки : Книга для учителя / К. А. Рыбников. – М.: Просвещение, 1987. – 160 с.
15. Саранцев, Г. И. Упражнения в обучении математике / Г.И. Саранцев. – М. : Просвещение, 2005. – 255 с.
16. Школьные учебники по алгебре, алгебре и началам математического анализа разных авторов (см. лекцию № 2).

Лекция IV

# МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ОСНОВНЫХ КЛАССОВ УРАВНЕНИЙ, НЕРАВЕНСТВ И ИХ СИСТЕМ

1. Этапы изучения линии уравнений, неравенств и их систем в основной школе.
2. Методика изучения линейных уравнений с одним неизвестным.
3. Методика изучения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными.
4. Методика изучения квадратных уравнений.
5. Особенности изучения неравенств.
6. Интеграция алгебраического и графического методов в решении уравнений, неравенств и их систем.

---

## 1. Этапы изучения линии уравнений, неравенств и их систем в основной школе

Понятие уравнения формируется у учащихся постепенно в процессе изучения математики в средней школе. Впервые с уравнениями учащиеся знакомятся в начальных классах. Это – уравнение первой степени с одним неизвестным. ***Уравнение*** трактуется в 3 классе как равенство, содержащее переменную, значение которой надо найти [13, с. 29]. Здесь же указывается, что значение переменной, при котором из уравнения получается верное равенство, называют ***корнем уравнения***. ***Решить уравнение*** – значит найти все его корни (или убедиться, что их нет).

Уравнения решаются в начальных классах на основе свойств арифметических действий. Учащиеся решают их с *комментированием*, то есть, проговаривая выполняемые операции с известными компонентами действий. Приведем примеры (см. таблицу 1).

В курсе математики 5 класса понятие уравнения трактуется аналогично.

***Опр.1.*** Уравнением называется равенство, содержащее букву, значение которой надо найти (Н. Я. Виленкин и др. «Математика. 5 класс», М., 2013).

Учащимся сообщается, что «значение буквы, при котором из уравнения получается верное числовое равенство, называют корнем уравнения», приводятся примеры корней уравнений и поясняется, что значит «решить уравнение».



Таблица 1

| № п/п | Уравнение | Выполняемые операции |
|---|---|---|
| 1. | $x + 28 = 53$<br>$x = 53 - 28$<br>$x = 25$ | Неизвестно **слагаемое**. Чтобы найти неизвестное слагаемое, надо из суммы вычесть известное слагаемое. |
| 2. | $y - 34 = 26$<br>$y = 34 + 26$<br>$y = 60$ | Неизвестно **уменьшаемое**. Чтобы найти неизвестное уменьшаемое, надо к разности прибавить вычитаемое. |
| 3. | $35 - z = 19$<br>$z = 35 - 19$<br>$z = 16$ | Неизвестно **вычитаемое**. Чтобы найти неизвестное вычитаемое, надо из уменьшаемого вычесть разность. |
| 4. | $7 \cdot a = 56$<br>$a = 56 : 7$<br>$a = 8$ | Неизвестен **множитель**. Чтобы найти неизвестный множитель, надо произведение разделить на известный множитель |
| 5. | $b : 23 = 4$<br>$b = 23 \cdot 4$<br>$b = 92$ | Неизвестно **делимое**. Чтобы найти неизвестное делимое, надо делитель умножить на частное. |
| 6. | $90 : c = 5$<br>$c = 90 : 5$<br>$c = 18$ | Неизвестен **делитель**. Чтобы найти неизвестный делитель, надо делимое разделить на частное. |

В дальнейшем учение об уравнениях в основной школе (5 – 9 кл.) развертывается следующим образом.

**5 класс** – определение уравнения первой степени с одним неизвестным; правая и левая части уравнения; корень уравнения и что значит «решить уравнение». Решение уравнений осуществляется на основе зависимости между компонентами и результатами арифметических действий.

**6 класс** – решение уравнений с помощью переноса членов уравнения из одной части в другую с заменой знака переносимых членов на противоположный. Если до 6 класса учащиеся пользовались различными правилами: в одних случаях – правилом нахождения неизвестного слагаемого, в других – правилом нахождения неизвестного уменьшаемого, в третьих – правилом нахождения неизвестного вычитаемого и т. д., то теперь, после изучения операций над положительными и отрицательными числами, уравнения решаются одним способом.

В качестве примера рассмотрим решение уравнения: $6x + 2 = 3x + 8$. Перенесем слагаемое $3x$ из правой части уравнения в левую, а слагаемое 2 – из левой в правую: $6x - 3x = 8 - 2$. Упростим левую и правую части уравнения: $3x = 6$. Разделим обе части уравнения на 3, получим: $x = 2$. Проверка показывает, что число 2 является корнем данного уравнения.

**7 класс** – понятие уравнения и его корня; уравнения первой степени с одним неизвестным; решение уравнений с одним неизвестным, сводящихся к линейным; свойства уравнений; алгоритм решения уравнений, сводящихся к линейным; линейное уравнение с двумя неизвестными и его решение; график уравнения с двумя неизвестными; понятие системы двух уравнений с двумя неизвестными и способы её решения: способ подстановки, способ сложения, графический способ. Рассматриваются уравнения вида $f(x) \cdot g(x) = 0$.

В 7 классе заканчивается изучение линейной функции, линейных уравнений с одним неизвестным и систем линейных уравнений с двумя неизвестными.

**8 класс** – уравнения с неизвестным в знаменателе; квадратные уравнения; уравнения с параметрами.

**9 класс** – понятие алгебраического уравнения степени $n$; решение алгебраических уравнений; уравнения, сводящиеся к алгебраическим; системы нелинейных уравнений с двумя неизвестными и способы их решения; иррациональные уравнения, простейшие тригонометрические уравнения.

Мы рассмотрим вопросы методики изучения наиболее важных классов уравнений, неравенств и их систем. Эти классы можно разбить на *две группы*.

*I группа* - *рациональные уравнения, неравенства и системы*. Наиболее важными классами здесь являются линейные уравнения с одним неизвестным, квадратные уравнения, соответствующие классы неравенств, системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными.

*II группа* – *иррациональные и трансцендентные уравнения, неравенства и системы*. В состав этой группы входят иррациональные, показательные, логарифмические и тригонометрические уравнения и неравенства.

Первая группа изучается в курсе основной школы, там формируются навыки решения названных уравнений, неравенств и систем. Вторая группа в этом курсе только начинает изучаться, причем рассматриваются не все классы, а окончательное изучение происходит в курсе алгебры и начал анализа.

Последовательность изучения различных классов уравнений, неравенств и систем различна в разных учебниках. Можно выделить два основных пути развертывания содержания линии уравнений и неравенств:

1. Сначала изучается материал, относящийся к уравнениям и их системам, затем к неравенствам. Раздельное изложение проводится до теории квадратного трехчлена включительно. Дальше, в старших классах, логарифмические, показательные, тригонометрические уравнения и соответствующие неравенства изучаются в более тесной связи друг с другом.

2. Основные классы неравенств изучаются сразу вслед за изучением соответствующих классов уравнений.

Имеются и промежуточные пути, когда некоторые классы уравнений и неравенств сближены друг с другом по времени изучения, а другие, наоборот, не связаны. Различные подходы требуют и своей методики, различных приёмов изучения материала. Мы будем придерживаться первого пути.

## 2. Методика изучения линейных уравнений с одним неизвестным

Линейные уравнения с одним неизвестным – это первый класс уравнений в курсе алгебры, поэтому от характера его изучения в значительной мере зависят особенности организации всего последующего изучения линии уравнений и



неравенств. При изучении этого класса уравнений формируется общее понятие об уравнении, вводится соответствующая терминология.

Первая методическая задача, с которой сталкивается учитель, приступая к изложению этой темы, состоит в выделении формальной части понятия уравнений из той ситуации, в которой оно возникает. В качестве такой ситуации обычно выступает несложная текстовая задача, решение которой алгебраическим методом приводит к уравнению первой степени с одним неизвестным. Здесь следует обратить внимание учащихся на основной метод, примененный в решении задачи, – переход к её алгебраической модели, общий вид которой $f(x) = g(x)$, где $f$ и $g$ – некоторые выражения, содержащие неизвестное $x$.

Проследим, как реализуется этот этап на практике, например, по учебнику Макарычева Ю. Н. и др. «Алгебра. 7 класс» (М., 2014). Сначала решается задача: «На нижней полке в 4 раза больше книг, чем на верхней. Если с нижней полки переставить на верхнюю 15 книг, то книг на полках станет поровну. Сколько книг на верхней полке?

Обозначим буквой $x$ число книг на верхней полке. Тогда число книг на нижней полке равно $4x$. На нижней полке останется: $4x - 15$ книг, а на верхней будет $x + 15$ книг. По условию задачи после такой перестановки книг на полках окажется поровну. Значит,

$$4x - 15 = x + 15».$$

Далее учитель говорит: «Чтобы найти неизвестное число книг, мы составили равенство, содержащее *переменную*. Такие равенства называют уравнениями с одной переменной или уравнениями с одним неизвестным. Нам надо найти число, при подстановке которого вместо $x$ в уравнение $4x - 15 = x + 15$ получается верное равенство. Такое число называют решением уравнения или корнем уравнения». Затем формулируется определение.

***Опр. 1.*** Корнем уравнения называется значение переменной, при котором уравнение обращается в верное равенство.

Учащиеся убеждаются, что уравнение $4x - 15 = x + 15$ имеет один корень – число 10. Затем выясняется, что можно привести примеры уравнений, которые имеют два, три и более корней или не имеют корней.

Так, уравнение $(x - 4)(x - 5)(x - 6) = 0$ имеет три корня $x_1 = 4, x_2 = 5, x_3 = 6$.

Уравнение $x + 2 = x$ не имеет корней, так как при любом значении $x$ левая часть уравнения на 2 больше его правой части. В результате делается вывод: «Решить уравнение – значит найти все его корни или доказать, что корней нет».

***Замечание.*** В различных учебниках применяется разная терминология, относящаяся к одному и тому же классу уравнений. Поэтому надо быть внимательным и употреблять только те термины, которые введены в учебнике, причем, именно в том смысле, который им придается.

Рассмотрим теперь несколько подходов к выделению первого изучаемого в курсе алгебры класса уравнений.

1. В учебнике Ю. Н. Макарычева и др. «Алгебра. 7 класс» (М., 2014) – это ***линейные уравнения с одной переменной***, то есть уравнения вида $ax = b$, где $x$ –переменная, $a$ и $b$ – числа. Это определение выделяет очень узкий класс

уравнений, недостаточный для решения самых простых задач. Какую роль он выполняет?

*Во-первых*, уравнения этого класса решаются просто, причем этот класс допускает полное исследование (что и осуществляется в учебнике). *Во-вторых*, запись уравнений из этого класса играет роль образца, к которому могут быть сведены посредством простейших преобразований уравнения более широкого класса.

В учебнике проводится исследование линейного уравнения с одной переменной $ax = b$:

1) если $a \neq 0$, то уравнение $ax = b$ имеет единственный корень $x = \frac{b}{a}$;

2) если $a = 0$, $b \neq 0$, тогда $0 \cdot x = b \neq 0$, и уравнение $ax = b$ не имеет корней;

3) если $a = 0$, $b = 0$, тогда $0 \cdot x = 0$ при любом $x$, поэтому уравнение $ax = b$ имеет бесконечно много корней.

Далее рассматриваются случаи сведения уравнения к линейному.

Большая часть времени, отводимого на изучение линейных уравнений по этому учебнику, используется именно на то, чтобы *сформировать навыки сведения к линейным других уравнений, не входящих в этот класс.*

**2.** В учебнике Ю. М. Колягина и др. «Алгебра. 7 класс» (М., 2012) вводится и рассматривается класс уравнений, названный по-иному – ***уравнения первой степени с одним неизвестным***. К особенностям введения этого класса следует отнести то, что явного определения он не получает: определение заменяется описанием и иллюстрацией несколькими примерами. Предполагается, что в итоге их рассмотрения учащиеся получат ясное представление об объёме понятия.

Сначала рассматривается задача: «Конверт с новогодней открыткой стоит 17 р. Конверт дешевле открытки на 5 р. Найти стоимость открытки.

Пусть открытка стоит $x$ р., тогда конверт стоит $(x - 5)$ р. По условию задачи $x + (x - 5) = 17$, откуда $2x - 5 = 17$, $2x = 22$, $x = 11$.

В равенстве $x + (x - 5) = 17$ буква $x$ обозначает неизвестное число, или, короче, *неизвестное*». Затем формулируется определение.

***Опр. 2.*** Равенство, содержащее неизвестное число, обозначенное буквой, называется уравнением.

***Опр. 3.*** Корнем уравнения называется то значение неизвестного, при котором это уравнение обращается в верное равенство.

Решить уравнение – это значит найти все его корни или установить, что их нет.

Далее сообщается, что решение многих практических задач сводится к решению уравнений, которые можно преобразовать в уравнение

$$ax = b, \qquad (1)$$

где $a$ и $b$ – заданные числа, $x$ – неизвестное. Уравнение (1) называют ***линейным уравнением***.

Основное внимание в учебнике Ю. М. Колягина и др. уделяется изложению правил последовательного преобразования уравнения ко всё более простому виду. Фактически при этом приходят к уравнению $ax = b$. Этот класс уравнений явно не выделяется, но на примерах рассматриваются все возможные случаи решения уравнений из него. Такой подход позволяет сконцентрировать внимание непосредственно на алгоритмах решения уравнений.



**3.** В учебнике Д. К. Фаддеева «Алгебра 6-8. Материалы для ознакомления» (М.,1983) также вводится понятие уравнения первой степени с одним неизвестным и объясняется алгоритм его решения. В отличие от учебника Ю. М. Колягина и др. здесь дано явное определение этого уравнения.

***Опр. 4.*** «Алгебраическое уравнение от одного неизвестного называется уравнением первой степени, если обе его части являются многочленами первой степени относительно неизвестного».

**4.** В учебнике С. М. Никольского, М. К. Потапова «Алгебра: Пособие для самообразования» (М., 1984) в системе изучения присутствуют оба понятия: и линейные уравнения с одним неизвестным, и уравнения первой степени.

Введение двух терминов (линейное уравнение и уравнение первой степени) позволяет четче описать сам процесс решения. Однако при этом возникает необходимость в усвоении двух, а не одного термина. Точно так же указание явного определения изучаемого понятия по сравнению с описанием имеет преимущество большей четкости, но предъявляет более высокие требования к развитию логического мышления учащихся.

Выделенные 4 варианта изложения теории уравнений, имеющих вид $ax + b = cx + d$, свидетельствуют о том, что эта теория допускает несколько различных по стилю и методике изучения развертываний.

Можно (как это сделано в 1-ом и 4-ом случаях) *сконцентрировать внимание на выделении более узкого класса, играющего роль «канонического вида»*, к которому приводятся данные уравнения; но можно (как во втором и третьем случаях) обойтись и без этого, а *сразу изучать способы решения уравнений общего класса*, используя изученные типы преобразований уравнений. Точно так же можно по-разному описывать вводимые термины: четким определением или же посредством описания.

Несмотря на наличие таких разных подходов к введению первого класса уравнений, основная часть методики его изучения одинакова при любом из них. Это объясняется прежде всего тем, что ***основной целью изучения в данном случае всегда является освоение правил решения уравнений данного класса*** (в основном они относятся к преобразованиям буквенно-числовых выражений).

В итоге изучения первого класса уравнений учащиеся должны овладеть: алгоритмом решения уравнений данного класса; умением применять результаты исследования уравнений данного класса; основными понятиями общей теории уравнений; применением уравнений данного класса к решению текстовых задач.

## 3. Методика изучения систем двух линейных уравнений с двумя неизвестными

Изложение темы в учебниках начинается с рассмотрения задачи. Например, в учебнике Ю. М. Колягина и др. «Алгебра. 7 класс» (М., 2012) приводится следующая задача: «Ученик задумал два числа и сказал, что сумма этих чисел равна 10, а их разность равна 4. Можно ли по этим данным узнать, какие числа задумал ученик?

Обозначим первое число буквой $x$, второе буквой $y$. По условию задачи

$$x + y = 10, \quad (1)$$
$$x - y = 4. \quad (2)$$

В равенствах (1) и (2) буквами $x$ и $y$ обозначены неизвестные числа, или, короче, неизвестные. Эти равенства называют ***линейными уравнениями с двумя неизвестными***. Так как в этих уравнениях неизвестные числа одни и те же, то эти уравнения рассматривают совместно и говорят, что они образуют систему двух уравнений:

$$\begin{cases} x + y = 10, \\ x - y = 4. \end{cases} \quad (3)$$

Фигурная скобка, стоящая слева, показывает, что нужно найти такую пару чисел ($x$; $y$), которая обращает каждое уравнение в верное равенство. Система уравнений (3) – пример системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными».

Затем рассматривается пример решения системы уравнений с двумя неизвестными и сообщается, что «*Решением системы двух уравнений с двумя неизвестными* называют такую пару чисел $x$ и $y$, которые при подстановке в эту систему обращают каждое ее уравнение в верное равенство.

*Решить систему уравнений* – это значит найти все ее решения или установить, что их нет».

В общем виде систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными записывают так:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x - b_2y = c_2, \end{cases}$$

где $a_1$, $b_1$, $a_2$, $b_2$, $c_1$, $c_2$ – заданные числа, $x$ и $y$ – неизвестные.

В учебнике Ю. Н. Макарычева и др. «Алгебра 7» (М., 2014) изучение темы начинается с изучения понятия уравнения с двумя переменными (неизвестными). Полезность изучения понятия уравнения с двумя переменными перед введением понятия о системе уравнений заключается в том, что при этом могут быть рассмотрены два важных в дальнейшем вопроса: *выражение одного из неизвестных через другое* (используется при изучении метода подстановки) и *введение понятия графика уравнения с двумя неизвестными*.

Вначале рассматриваются примеры уравнений с двумя переменными:

$$5x + 2y = 10, \quad -7x + y = 5, \quad x^2 + y^2 = 20, \quad xy = 12.$$

Из этих уравнений первые два имеют вид: $ax + by = c$, где $a$, $b$, $c$ – числа.



Такие уравнения называют *линейными уравнениями с двумя переменными*. Затем дается определение.

***Опр. 1.*** Линейным уравнением с двумя переменными называется уравнение вида $ax + by = c$, где $x$ и $y$ – переменные, $a$, $b$, $c$ – числа.

После этого учащиеся выясняют, что называется решением уравнения с двумя переменными. Рассматривается пример.

Уравнение $x - y = 5$ при $x = 8$, $y = 3$ обращается в верное равенство $8 - 3 = 5$. Говорят, что пара значений переменных $x = 8$, $y = 3$ является решением этого уравнения. Формулируется определение.

***Опр. 2.*** *Решением* уравнения с двумя переменными называется *пара значений переменных*, обращающая это уравнение в верное равенство.

Новым для учащихся здесь является то, что решением уравнения с двумя переменными, в отличие от уравнения с одной переменной, является ***пара значений переменных.*** Кроме того, учащиеся узнают, что уравнения с двумя переменными, имеющие одни и те же решения, называют *равносильными;* уравнения, не имеющие решений, также считают равносильными.

Уравнения с двумя переменными обладают такими же свойствами, как и уравнения с одной переменной.

1) если в уравнении перенести слагаемое из одной части в другую, изменив его знак, то получится уравнение, равносильное данному;

2) если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же отличное от нуля число, то получится уравнение, равносильное данному.

Учащиеся знакомятся и с графиком линейного уравнения с двумя переменными. Они узнают, что каждая пара чисел, являющаяся решением уравнения с переменными $x$ и $y$, изображается в координатной плоскости точкой, координатами которой служит эта пара чисел (абсциссой служит значение $x$, а ординатой - значение $y$). Все такие точки образуют *график уравнения*.

***Опр. 3.*** Графиком уравнения с двумя переменными называется множество всех точек координатной плоскости, координаты которых являются решениями этого уравнения.

После этого учащиеся выясняют, что представляет собой график уравнения $3x + 2y = 6$. Выражают из уравнения $y$, получают $y = -1{,}5x + 3$. Формулой $y = -1{,}5x + 3$ задается линейная функция, графиком которой служит прямая. Так как уравнения $3x + 2y = 6$ и $y = -1{,}5x + 3$ равносильны, то эта прямая является и графиком уравнения $3x + 2y = 6$.

С помощью таких же рассуждений можно показать, что графиком любого линейного уравнения с переменными $x$ и $y$, в котором коэффициент при $y \neq 0$, является прямая. Если в линейном уравнении коэффициент при $y = 0$, а коэффициент при $x \neq 0$, то графиком такого уравнения также является прямая.

Например, $2x + 0y = 12$. Его решениями служат все пары чисел ($x$; $y$), в которых $x = 6$, а $y$ – любое число. Графиком этого уравнения является прямая, проходящая через точку (6; 0) и параллельная оси $OY$.

Итак, учащиеся делают вывод, что *графиком линейного уравнения с двумя переменными*, в котором хотя бы один из коэффициентов при переменных не равен нулю, *является прямая.* Затем рассматривается случай, когда в линейном уравнении оба коэффициента при переменных равны нулю, то есть уравнение $ax + by = c$ имеет вид: $0x + 0y = c$. При $c = 0$ любая пара чисел является решением этого уравнения, а его графиком – вся координатная плоскость. При $c \neq 0$ уравнение не имеет решений и его график не содержит ни одной точки.

Существенно новым представлением, которое получают учащиеся при изучении этой темы, как уже отмечалось, является представление о том, что ***решением уравнения с двумя неизвестными служит не число, а упорядоченная пара чисел.***

Вторым представлением, резко расширяющим кругозор учащихся, служит то, что ***множество решений уравнения с двумя неизвестными***, как правило, ***бесконечно и его изображение на координатной плоскости – некоторая линия.***

Изучение этой темы может рассматриваться как определенный мостик, связывающий *понятие функции* и *понятие уравнения с двумя неизвестными*: с одной стороны, уравнение с двумя неизвестными, в котором одно из них выражено через другое, по виду формулы совпадает с функцией; с другой, – оказывается, что одни и тот же геометрический образ является и графиком уравнения, и графиком функции. Эти представления в дальнейшем уточняются учащимися, переосмысливаются.

***Замечание.*** Понятие системы уравнений в школьном курсе математики строго определено быть не может из-за отсутствия в нём понятия конъюнкции. Однако для развития теории уравнений достаточно, формировать представление о системе уравнений косвенным образом, посредством указания на цель – нахождение общих решений двух данных уравнений. Общее понятие о системе уравнений в этот момент и необязательно вводить. Общее понятие формируется постепенно на основе частного случая – системы линейных уравнений.

Основное содержание темы состоит в изучении двух алгебраических способов решения таких систем (способа подстановки и способа сложения), графического способа решения и исследования систем этого класса.

Алгоритмы решения систем линейных уравнений намного сложнее алгоритма решения линейного уравнения с одним неизвестным. Поэтому при их изучении следует четко указывать последовательность операций, используемых в этих алгоритмах, а также провести изучение каждого действия.

При изучении данной темы используются геометрические представления, которые не только могут пояснить изложение, но имеют важное самостоятельное значение. Наиболее значимым является их применение для проведения исследования данного класса систем.

## 4. Методика изучения квадратных уравнений

Для этой темы характерна большая глубина изложения и богатство связей, устанавливаемых с ее помощью в обучении, логическая обоснованность изложения. Поэтому она занимает особое положение в линии уравнений и неравенств. К изучению этой темы учащиеся приступают, имея уже определенный опыт, владея достаточно большим запасом алгебраических и общематематических представлений, понятий, умений.



Во всех современных школьных учебниках алгебры термин и объем понятия квадратного уравнения одинаковы. Понятие квадратного уравнения вводится посредством явного определения, поэтому необходимо организовать работу по усвоению его формальных признаков.

В учебнике Ш. А. Алимова и др. «Алгебра. 8 класс» (М., 2012) рассматривается текстовая задача: «Основание прямоугольника больше высоты на 10 см, а его площадь равна 24 см$^2$. Найти высоту прямоугольника».

При решении этой задачи учащиеся получают уравнение

$$x^2 + 10x - 24 = 0,$$

которое называют квадратным, так как в левой его части стоит квадратный трехчлен. Затем дается определение.

***Опр. 1.*** Квадратным уравнением называется уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \qquad (1)$$

где $a$, $b$, $c$ – заданные числа, $a \neq 0$, $x$ – неизвестное.

Необходимо акцентировать внимание учащихся на то, что уравнение другого вида (например, $x^2 + 10x = 24$) уже не является квадратным. Иногда учащиеся ошибочно считают, что уравнение называется квадратным, потому что неизвестное $x$ стоит в квадрате, и к квадратным относят уравнения вида

$$\frac{4}{x^2} - 3x - 1 = 0.$$

Для усвоения понятия квадратного уравнения и предупреждения подобных ошибок целесообразно предлагать упражнения на распознавание объектов, принадлежащих данному понятию.

Последовательность изучения материала, относящегося к квадратным уравнениям в разных учебниках различна. Например, по учебнику Ш. А. Алимова и др. «Алгебра. 8 класс» (М., 2012) последовательность следующая:

1. Квадратное уравнение и его корни; уравнение $x^2 = d$, теорема о корнях этого уравнения.
2. Неполные квадратные уравнения $ax^2 = 0$ ($a \neq 0$), $ax^2 + c = 0$ ($a \neq 0$, $c \neq 0$) и $ax^2 + bx = 0$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$) и способы их решения.
3. Метод выделения полного квадрата.
4. Решение квадратных уравнений (вывод формул корней квадратного уравнения).
5. Приведенное квадратное уравнение. Теорема Виета (прямая и обратная) и теорема о разложении квадратного трехчлена на множители.
6. Уравнения, сводящиеся к квадратным (биквадратное и дробно рациональное).
7. Решение задач с помощью квадратных уравнений.

В учебнике Ю. Н. Макарычева и др. «Алгебра. 8 класс» (М., 2012) последовательность изучения несколько иная (*составить самостоятельно!*), к тому же рассматривается графический способ решения квадратных уравнений.

Вывод формулы корней квадратного уравнения может быть осуществлен несколькими различными способами: сразу для общего или сначала для приведенного квадратного уравнения, сведением к уравнению $x^2 - a = 0$ или $x^2 = a$. Но в любом случае используется выделение полного квадрата в трехчлене $ax^2 + bx + c$, сводящее уравнение к двучленному. Выделение последовательности шагов, приводящих к решению квадратных уравнений и составляющих его алгоритм, проводится сначала на конкретных примерах. Сообщается, что при решении квадратного уравнения по формуле надо поступить следующим образом:

1) вычислить дискриминант $D$ и сравнить его с нулем;

2) если $D > 0$ или $D = 0$, то следует воспользоваться формулой корней, если же $D < 0$, то записать, что корней нет.

Необходимым этапом при выводе формулы корней квадратного уравнения служит исследование, выявляющее три возможных случая: отсутствие корней, наличие одного или двух корней. При этом вводится дискриминант уравнения. В результате исследования формулируется вывод: «Если $D < 0$, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет действительных корней; если $D = 0$, то имеется один корень, равный $x = -\frac{b}{2a}$ ; если $D > 0$, то уравнение имеет два корня: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$».

Учитывая этот вывод, решение конкретных квадратных уравнений проводится по указанному выше алгоритму: сначала вычисляется дискриминант, сравнивается с нулем, и если он неотрицателен, то применяются формулы для нахождения корней.

В ряде учебников, кроме основной формулы для корней квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, приводятся еще формулы корней уравнения $x^2 + px + q = 0$ или $x^2 + 2px + q = 0$. Иногда использование этих формул упрощает вычисления, поэтому их полезно тоже рассмотреть.

При изучении темы «Квадратные уравнения» рассматриваются и неполные квадратные уравнения. Обычно они изучаются перед выводом корней общего квадратного уравнения. Хотя различные виды неполных квадратных уравнений имеют разные алгоритмы решения, при их изучении необходимо показать, что общая формула корней применима и для этих случаев.

Важным моментом в изучении квадратных уравнений является рассмотрение ***теоремы Виета.*** Сложность освоения теоремы Виета связана с несколькими обстоятельствами. Прежде всего, требуется учитывать различие прямой и обратной теоремы. В прямой теореме Виета даны квадратное уравнение и его корни; в обратной – только два числа, а квадратное уравнение появляется в заключении теоремы. Учащиеся часто совершают ошибку, обосновывая свои рассуждения неверной ссылкой на прямую или обратную теорему Виета.

Например, при нахождении корней квадратного уравнения подбором ссылаться нужно на обратную теорему Виета, а не на прямую, как часто делают ученики. Для того чтобы распространить теоремы Виета на случаи $D = 0$, надо условиться, что в этом случае квадратное уравнение имеет *два равных корня.* Это удобно при разложении квадратного трехчлена на множители.



Владение теорией квадратных уравнений существенно расширяет возможности решения уравнений методами, изучаемыми в курсе алгебры К квадратным уравнениям сводятся дробно-рациональные, биквадратные и алгебраические уравнения. Сюжеты текстовых задач также становятся более разнообразными, возрастает сложность их перевода на язык математики. В целом можно сказать, что освоение темы «Квадратные уравнения» поднимает учащихся на качественно новую ступень овладения содержанием школьного курса математики.

## 5. Особенности изучения неравенств

Тема «Неравенства» изучается в 8 классе. До этого учащиеся в 5-6-х классах знакомятся со строгими и нестрогими числовыми неравенствами, со знаками, которые используются для их обозначения $>$, $<$, $\geq$, $\leq$, с двойными числовыми неравенствами, отмечают на координатной прямой все числа, которые меньше (больше) данного числа. В 6 классе учащиеся выполняют первые упражнения типа: «Какие натуральные числа являются решениями неравенства: а) $x \leq 4$; б) $5 \leq x \leq 9$; в) $3 < x \leq 5$». Позже встречаются и более сложные упражнения типа: «Найдите целые решения неравенства:

а) $3 < |x| < 7$; б) $5\frac{1}{3} < |x| < 10,1$».

В 8 классе начинается систематическое изучение неравенств. Расположение этой темы в разных учебниках различно, например, в учебниках Ш. А. Алимова и др. «Алгебра. 8 класс» (М., 2012) и Ю. Н. Макарычева и др. «Алгебра. 8 класс» (М., 2013) – это первая тема, а в учебнике А. Г. Мордковича «Алгебра. 8 класс» (М., 2016) – последняя тема. Содержание и последовательность изложения этой темы у разных авторов также имеет свои особенности.

В учебнике Ш. А. Алимова и др. «Алгебра. 8 класс» последовательность изучения вопросов, относящихся к неравенствам следующая:

1. Положительные и отрицательные числа (свойства чисел).
2. Числовые неравенства.
3. Основные свойства числовых неравенств.
4. Сложение и умножение неравенств.
5. Строгие и нестрогие неравенства.
6. Неравенства с одним неизвестным.
7. Решение неравенств.
8. Системы неравенств с одним неизвестным. Числовые промежутки.
9. Решение систем неравенств.
10. Модуль числа. Уравнения и неравенства, содержащие модуль.

Остановимся кратко на введении понятия линейного неравенства с одним неизвестным. Так же как и уравнение, неравенство этого типа вводится путем рассмотрения задачи: «Из двух городов отправляются одновременно навстречу друг другу два поезда с одинаковыми постоянными скоростями. С какой скоростью должны двигаться поезда, чтобы через 2 ч после начала движения сумма расстояний, пройденных ими, была не менее 200 км?».

В ходе решения получают неравенство $2x + 2x \geq 200$, отсюда $4x \geq 200$, $x \geq 50$.

Учащимся сообщается, что это пример линейного неравенства с одним неизвестным. Неравенства $ax > b$, $ax < b$, $ax \geq b$, $ax \leq b$, в которых $a$ и $b$ – заданные числа, а $x$ – неизвестное, называют линейными неравенствами с одним неизвестным. «*Решением неравенства* с одним неизвестным называется то значение неизвестного, при котором это неравенство обращается в верное числовое неравенство. *Решить неравенство* – это значит найти все его решения или установить, что их нет».

В изучении этой темы можно выделить три особенности.

**1.** Как правило, навыки решения неравенств, за исключением квадратных, формируются на более низком уровне, чем уравнений соответствующих классов. Эта особенность имеет объективную природу: теория неравенств сложнее теории уравнений. Но в целом можно считать, что содержательная сторона неравенств, возможности их приложений от этого не страдают.

**2.** Большинство приёмов решения неравенств состоит в переходе от данного неравенства $a > b$ к уравнению $a - b$ и последующем переходе от найденных корней уравнения к множеству решений исходного неравенства. Такого перехода не производится лишь при рассмотрении линейных неравенств, где в нем нет необходимости из-за простоты процесса решения таких неравенств. Эту особенность необходимо постоянно подчеркивать с тем, чтобы переход к уравнениям и обратный переход превратились в основной метод решения неравенств; в старших классах он формализуется в виде «метода интервалов».

**3.** В изучении неравенств большую роль играют наглядно-графические средства.

*Первая особенность* может быть истолкована так: при выполнении одного и того же числа упражнений техника решения неравенств какого либо класса будет ниже, чем уравнений соответствующего класса; следовательно, если имеется необходимость формирования прочных навыков решения неравенств, то для этого требуется большее число заданий.

*Вторая особенность* объясняет то, что темы, относящиеся к неравенствам, расположены после тем, относящихся к соответствующим классам уравнений.

*Третья особенность* говорит о том, что изучение неравенств зависит от качества изучения функциональной линии школьного курса (построение графиков и графическое исследование функций).

Перечисленные особенности показывают, что изучение предшествующего материала сильно влияет на изучение неравенств. Поэтому роль IV этапа (этапа синтеза) в изучении неравенств особенно возрастает.

Эти особенности можно проиллюстрировать на материале квадратных неравенств. В школьном курсе математики изучаются только неравенства основных классов, неравенства, сводящиеся к ним, встречаются редко.



К заданиям, в которых проявляется прикладная роль неравенств в курсе алгебры, можно отнести нахождение области определения функции и исследование корней уравнений в зависимости от параметров.

## 6. Интеграция алгебраического и графического методов в решении уравнений, неравенств и их систем[1]

Под *интеграцией алгебраического и геометрического (графического) методов* будем понимать процесс сочетания или связи (слияния) данных методов, осуществляемый учеником путем перевода учебной информации с алгебраического языка на геометрический или с геометрического языка на алгебраический и обратно.

Под *сочетанием* алгебраического и геометрического методов будем понимать одновременное использование их на одном уроке при решении задачи, доказательстве теоремы, а также при введении нового понятия или правила.

### 6.1 Решение квадратных уравнений и неравенств

**Историческая справка**

Квадратные уравнения и способы их решения были известны в глубокой древности. Так еще за две тысячи лет до нашей эры задачи измерения земельных участков приводили древних вавилонян к решению квадратных уравнений.

В древней Греции (Пифагор, Евклид) квадратные уравнения решались геометрическим методом.

Знаменитый узбекский математик аль-Хорезми решал квадратные уравнения как алгебраическим, так и геометрическим методами.

Так как общая формула решения квадратных уравнений тогда ещё не была выведена, то аль-Хорезми приводит решения шести различных видов квадратных уравнений, например:

1. Один квадрат равен корням ($x^2 = ax$).
2. Один квадрат и корни равны числу ($x^2 + ax = b$).
3. Один квадрат и число равны корням ($x^2 + a = bx$) и т. д.

Приведем примеры решения уравнений аль-Хорезми алгебраическим и геометрическим методами.

Пример 1.

$$x^2 + 21 = 10x.$$

***Алгебраический метод***

1. Раздели число корней пополам: $10 : 2 = 5$.
2. Умножь это число само на себя: $5 \cdot 5 = 25$.
3. Вычти из него число: $25 - 21 = 4$.
4. Извлеки квадратный корень: $\sqrt{4} = 2$.
5. Этот корень прибавь к половине корней или вычти из неё: $5 + 2 = 7$; $5 - 2 = 3$.

Если записать все приведенные действия одной формулой, то получим:

$$x = \frac{10}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{10}{2}\right)^2 - 21}.$$

[1] Данный пункт предназначен для самостоятельного изучения студентами.

Как видим решение аль-Хорезми полностью совпадает с современным решением по формуле. Приведем пример геометрического решения уравнения.

П р и м е р 2. Решить уравнение

$$x^2 + 10x = 39.$$

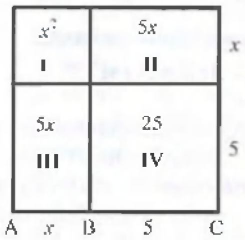



Рис. 5

Р е ш е н и е

***Геометрический метод***

Пусть отрезок АВ = $x$, а отрезок ВС = 5 (рис. 5).

Строим квадрат со стороной, равной $x + 5$, и разбиваем его на четыре участка, как показано на рисунке. Площадь квадрата равна $(x + 5)^2$. С другой стороны, площадь участков I, II и III равна 25. Значит, площадь всего квадрата равна $39 + 25 = 64$. Отсюда имеем:

$$(x + 5)^2 = 64,\ x + 5 = 8,\ x = 3.$$

Задачи, приводящие к квадратным уравнениям, имеются в старинных китайских и индийских математических трактатах.

В современной школе квадратные уравнения и неравенства изучаются по действующей программе в 8 классе, изолированно друг от друга. Причем, в учебниках квадратные уравнения решаются только аналитически, по формулам или путем выделения квадрата двучлена, графический метод решения таких уравнений не рассматривается. Например, в учебнике «Алгебра. 8 класс», автор Ш. А. Алимов (и др.), квадратичная функция и ее график, необходимые для решения квадратных уравнений графическим методом, изучаются после темы «Квадратные уравнения». Аналогично обстоит дело и в учебнике «Алгебра. 8 класс», автор Ю. Н. Макарычев (и др.), где представлен только аналитический метод решения квадратных уравнений. Такой односторонний подход не способствует формированию целостных знаний учащихся о решении квадратных уравнений и отрицательно сказывается на формировании их образного мышления.

По иному представлен вопрос о методах решения квадратных уравнений в учебнике «Алгебра. 8 класс» А. Г. Мордковича. Автор рассматривает графический метод решения квадратных уравнений раньше алгебраического и знакомит учащихся с разными способами этого метода. В соответствии с этим квадратичная функция и ее график изучаются до введения понятия квадратного уравнения. Обосновывая данный факт, А. Г. Мордкович пишет: «Графический (или, точнее, функционально-графический) метод решения уравнений, на наш взгляд, должен всегда быть первым и одним из главных при решении уравнений любых типов. Неудобства, связанные с применением графического метода, как правило, и создают ту проблемную ситуацию, которая приводит к необходимости отыскания алгоритмов аналитических способов решения уравнения» [13, с.11].

Заметим, что прежде, чем решать квадратные уравнения и неравенства графическим методом, необходимо провести специальную подготовительную работу. В восьмом классе после ознакомления учащихся с квадратичной функцией и ее графиком следует рассмотреть какую-либо задачу, которая привела бы учеников к пониманию квадратного уравнения как равенства двух функций от одного и того же аргумента, например:



***Задача.*** *Квадрат периметра прямоугольника, основание которого больше высоты на 1 см, больше площади этого прямоугольника на 34 см. Найдите высоту прямоугольника.*

В ходе решения учащиеся приходят к выводу, что площадь прямоугольника равна $x\,(x + 1)$ см$^2$, а периметр равен $(4x + 2)$ см, тогда квадрат периметра равен $(4x + 2)^2$ см$^2$. Так как по условию задачи квадрат периметра прямоугольника больше площади прямоугольника на 34 см$^2$, то можно составить уравнение:

$$x\,(x + 1) + 34 = (4x + 2)^2$$

После преобразований получаем следующее квадратное уравнение:

$$x^2 + x - 2 = 0.$$

Корнями полученного уравнения являются $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$. Так как длина отрезка не может быть отрицательным числом, то искомая высота равна 1 см.

Вместе с этим каждое из выражений уравнения

$$x\,(x + 1) + 34 = (4x + 2)^2 \text{ или}$$
$$x^2 + x + 34 = 16x^2 + 16x + 4$$

можно рассматривать как функцию $y = x^2 + x + 34$ и $y = 16x^2 + 16x - 30$. Для каждой из них можно построить график. Если графики построить в одной системе координат, то они пересекутся. Абсциссы точек пересечения $x_1 = 1$ и $x_2 = -2$ дают то значение аргумента, при котором данные функции равны ($y(1) = 36$ и $y(-2) = 36$). Но так как нам надо найти высоту прямоугольника, а длина отрезка отрицательной быть не может, то искомая высота принимает значение $x = 1$.

Можно рассмотреть другие задачи, подобные данной, решение которых приводит к квадратным уравнениям. Таким образом, учащиеся приходят к выводу, что квадратные уравнения, как и уравнения первой степени с одной переменной, тоже могут решаться геометрическим (графическим) методом.

Приведем примеры параллельного решения квадратных уравнений и неравенств алгебраическим и графическим методами.

П р и м е р 3. Решить квадратное уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$ и соответствующие ему неравенства: $x^2 - 4x + 3 > 0$ и $x^2 - 4x + 3 < 0$.

Р е ш е н и е. ***I. Алгебраический метод***

$x^2 - 4x + 3 = 0$, по общей формуле корней квадратного уравнения имеем:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2};$$

откуда $x_1 = 3$, $x_2 = 1$. О т в е т: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$.

***II. Графический метод (I способ)***

Построим график функции $y = x^2 - 4x + 3$. Построение будем проводить по следующей схеме:

1) Найдем координаты вершины параболы и уравнение оси параболы. Имеем $a = 1$, $b = -4$, тогда $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$; $y_0 = f(2) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$. Значит, вершиной параболы является точка $(2; -1)$, а осью параболы – прямая $x = 2$.

2) Возьмем какую-нибудь точку, принадлежащую параболе, например, $(0; 3)$ и построим ей симметричную относительно оси, получим точку $(4; 3)$.

3) Через полученные три точки (2; –1), (0; 3), (4; 3) проводим параболу (рис. 6). Корнями уравнения $x^2 - 4x + 3 = 0$ служат абсциссы точек пересечения параболы с осью $OX$. Таких точек две: (1; 0) и (3; 0). Итак, $x_1 = 1$, $x_2 = 3$.

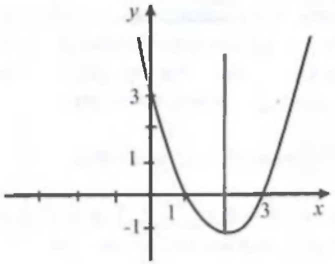


Рис. 6

Решив графическим методом уравнение, решаем сразу же соответствующие ему неравенства: $x^2 - 4x + 3 > 0$ и $x^2 - 4x + 3 < 0$, используя построенный график. Решить данные неравенства графически – это значит ответить на вопрос, при каких значениях $x$ ординаты точек параболы положительны (для первого неравенства) и отрицательны (для второго неравенства). Из рисунка 6 видим, что график функции расположен **выше** оси $OX$ при $x < 1$ и при $x > 3$.

Значит, решениями неравенства $x^2 - 4x + 3 > 0$ служат все точки, принадлежащие промежуткам $x < 1$ и $x > 3$.

Аналогично, для неравенства $x^2 - 4x + 3 < 0$ замечаем, что график функции расположен **ниже** оси $OX$ при $1 < x < 3$. Этот промежуток и является решением неравенства.

Для проверки полученных ответов решаем неравенства $x^2 - 4x + 3 > 0$ и $x^2 - 4x + 3 < 0$ аналитически, с помощью системы неравенств или методом интервалов (после его изучения).

После решения двух (трех) аналогичных уравнений и соответствующих им неравенств учащиеся могут сделать выводы по геометрической интерпретации их решений, а именно:

***1. Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня, то геометрически это означает, что парабола – график функции $y = ax^2 + bx + c$ – пересекает ось OX в двух точках, абсциссы которых и являются корнями данного уравнения. Верно и обратное: если парабола – график функции $y = ax^2 + bx + c$ – пересекает ось OX в двух точках, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет два корня, которыми являются абсциссы точек пересечения.***

***2. Если квадратное неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ ($ax^2 + bx + c < 0$) имеет решения (но выполняется не при всех значениях x), то геометрически это означает, что часть параболы – графика функции $y = ax^2 + bx + c$ – расположена выше (ниже) оси OX. Верно и обратное: если часть параболы – графика функции $y = ax^2 + bx + c$ – расположена выше (ниже) оси OX, то это означает, что квадратное неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ ($ax^2 + bx + c < 0$) имеет решения.***

Следует заметить, что графический метод решения квадратных уравнений и неравенств включает, кроме рассмотренного, ещё четыре способа решения. Приведем их схемы.



***II способ.*** Преобразуем уравнение к виду $x^2 = 4x - 3$, затем построим в одной системе координат графики функций $y = x^2$ и $y = 4x - 3$. Корнями уравнения служат абсциссы точек пересечения параболы и прямой – графиков этих функций.

***III способ.*** Преобразуем уравнение к виду $x^2 + 3 = 4x$, затем построим в одной системе координат графики функций $y = x^2 + 3$ и $y = 4x$. Корнями уравнения являются абсциссы точек пересечения параболы и прямой – графиков этих функций.

***IV способ.*** Преобразуем уравнение к виду $x^2 - 4x + 4 - 1 = 0$ и далее $x^2 - 4x + 4 = 1$, т. е. $(x - 2)^2 = 1$. Построим в одной системе координат параболу $y = (x - 2)^2$ и прямую $y = 1$. Корнями уравнения служат абсциссы точек пересечения графиков этих функций.

***V способ.*** Разделив почленно обе части уравнения на $x$, получим $x - 4 + \frac{4}{x} = 0$ и далее $x - 4 = -\frac{4}{x}$. Построим в одной системе координат гиперболу $y = -\frac{4}{x}$ и прямую $y = x - 4$. Корнями уравнения являются абсциссы точек пересечения графиков данных функций.

П р и м е р 4. Решить квадратное уравнение $4x^2 - 4x + 1 = 0$ и соответствующие ему неравенства: $4x^2 - 4x + 1 > 0$ и $4x^2 - 4x + 1 < 0$.

Р е ш е н и е. ***I. Алгебраический метод***

$4x^2 - 4x + 1 = 0$, по формуле корней квадратного уравнения имеем:

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4}}{2 \cdot 4} = \frac{4 \pm 0}{8} = \frac{1}{2}.$$

О т в е т: $x = \frac{1}{2}$.

***II. Графический метод (I способ)***

Построим график функции $y = 4x^2 - 4x + 1$. Найдем сначала координаты вершины параболы: $a = 4$, $b = -4$, $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 4} = \frac{1}{2}$, $y_0 = f(\frac{1}{2}) = 0$.

Значит, вершиной параболы является точка $(\frac{1}{2}; 0)$, а осью параболы прямая $x = \frac{1}{2}$. Так же как и в примере 3, выполняем построение графика (рис. 7).

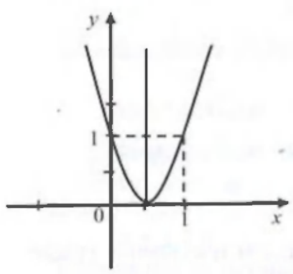


Рис. 7

Как видим из рисунка, парабола имеет с осью $OX$ только одну общую точку $(\frac{1}{2}; 0)$. Значит, данное квадратное уравнение имеет только один корень: $x = \frac{1}{2}$.

Построенный график позволяет сразу же решить и квадратные неравенства: $4x^2 - 4x + 1 > 0$ и $4x^2 - 4x + 1 < 0$.

Из рисунка видно, что вся парабола, кроме одной её точки, которая лежит на оси $OX$, расположена **выше** оси $OX$, поэтому решением первого неравенства служат промежутки $x < \frac{1}{2}$ и $x > \frac{1}{2}$. Второе неравенство не имеет решений, так как **ниже** оси $OX$ нет графика.

Для проверки полученных ответов решаем данные неравенства аналитически, путем разложения левой части на множители, аналогично тому, как мы делали это в примере 3.

После решения еще двух (трех) аналогичных уравнений и соответствующих им неравенств учащиеся могут сделать выводы по геометрической интерпретации их решений, а именно:

***1. Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет один корень, то геометрически это означает, что парабола – график функции $y = ax^2 + bx + c$ – имеет с осью OX одну общую точку (то есть касается её) и абсцисса этой точки является корнем данного уравнения.***

***Верно и обратное:***

***если парабола – график функции $y = ax^2 + bx + c$ – имеет с осью OX одну общую точку (то есть касается её), то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ имеет один корень, которым является абсцисса этой точки.***

***2. Если квадратное неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ ($ax^2 + bx + c < 0$) выполняется при всех x, кроме одного, то геометрически это означает, что вся парабола расположена <u>выше</u> (<u>ниже</u>) оси OX, кроме одной её точки, которая лежит на оси OX (т. е. парабола касается оси OX).***

***Верно и обратное:***

***если парабола – график функции $y = ax^2 + bx + c$ – касается оси OX, то квадратное неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ ($ax^2 + bx + c < 0$) при $a > 0$ ($a < 0$) выполняется при всех x, кроме одного – абсциссы точки касания, при $a < 0$ ($a > 0$) – решений нет.***

П р и м е р 5. Решить квадратное уравнение $-x^2 + 3x - 4 = 0$ и соответствующие ему неравенства: $-x^2 + 3x - 4 > 0$ и $-x^2 + 3x - 4 < 0$.

Р е ш е н и е. ***I. Алгебраический метод***

$-x^2 + 3x - 4 = 0$, здесь $a = -1$, $b = 3$, $c = -4$, тогда дискриминант этого уравнения равен: $D = b^2 - 4ac = -7$. Так как $D < 0$, то данное квадратное уравнение не имеет корней.

***II. Графический метод***

Построим график функции $y = -x^2 + 3x - 4$. Найдем сначала координаты вершины параболы.

$a = -1$ ($a < 0$, значит, ветви параболы направлены вниз), $b = 3$,

$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$, $y_0 = f(\frac{3}{2}) = -\frac{7}{4}$. Значит, вершиной параболы является точка $(\frac{3}{2}; -\frac{7}{4})$, а осью параболы – прямая $x = \frac{3}{2}$.

Так же, как и в предыдущих примерах, выполняем построение графика, учитывая, что ветви параболы направлены вниз (рис. 8).



Как видно из рисунка, парабола не пересекает ось $OX$, значит, данное уравнение $-x^2 + 3x - 4 = 0$ не имеет корней.

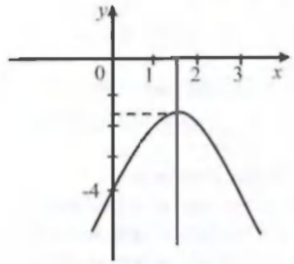


Рис. 8

Решаем с помощью графика соответствующие неравенства:

$-x^2 + 3x - 4 > 0$ и $-x^2 + 3x - 4 < 0$.

Рисунок показывает, что вся парабола лежит ниже оси $OX$, поэтому первое неравенство не имеет решений, а второе неравенство выполняется при всех $x$. Из графического решения учащиеся делают выводы:

***1. Если квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней, то геометрически это означает, что парабола – график функции $y = ax^2 + bx + c$ – не пересекает ось OX. Верно и обратное:***

***если парабола – график функции $y = ax^2 + bx + c$ – не пересекает ось OX, то квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ не имеет корней.***

***2. Если квадратное неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ ($ax^2 + bx + c < 0$, пусть для определенности $a > 0$) выполняется при всех значениях x, то геометрически это означает, что парабола – график функции $y = ax^2 + bx + c$ – расположена вся <u>выше</u> (<u>ниже</u>) оси OX.***

***Если же указанное неравенство не имеет решений, то геометрически это означает, что парабола вся расположена <u>ниже</u> (<u>выше</u>) оси OX.***

Уравнения и неравенства, сводящиеся к квадратным, можно решать аналогично, предварительно приведя их к квадратным. Приведем пример.

П р и м е р 6. Решить уравнение $x^2 - 3x + 2 = 2x - x^2$ и соответствующие ему неравенства: $x^2 - 3x + 2 > 2x - x^2$ и $x^2 - 3x + 2 < 2x - x^2$.

Р е ш е н и е. ***I. Алгебраический метод***

$x^2 - 3x + 2 = 2x - x^2$, преобразуем данное уравнение, перенеся все члены в левую часть:

$$x^2 - 3x + 2 - 2x + x^2 = 0,$$

после приведения подобных членов получим квадратное уравнение:

$$2x^2 - 5x + 2 = 0,$$

его корни находим по известной формуле:

$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 16}}{4} = \frac{5 \pm 3}{4}$, $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

О т в е т: $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

***II. Графический метод***

Графически данное уравнение можно решить, не преобразовывая его, построив графики функций, стоящих в левой и правой частях уравнения, то есть $y_1 = x^2 - 3x + 2$ и $y_2 = 2x - x^2$. Графиками данных функций являются две параболы. Построение их осуществляем по схеме, приведенной в примере 3.

Для первой функции $y_1 = x^2 - 3x + 2$ находим:

$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{3}{2}$; $y_0 = f(x_0) = -\frac{1}{4}$, значит, точка $(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4})$ является вершинной параболы, а прямая $x = \frac{3}{2}$ – осью параболы.

Для второй функции $y_2 = 2x - x^2$, то есть $y_2 = -x^2 + 2x$, имеем:

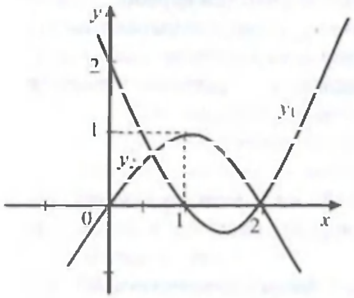



Рис. 9

$x_0 = -\frac{b}{2a} = 1$, $y_0 = f(x_0) = 1$, значит, точка (1; 1) является вершиной параболы, а прямая $x = 1$ – осью параболы. Затем осуществляем построение графиков функций (рис. 9). Абсциссы точек пересечения графиков дают корни исходного уравнения: $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 2$.

Используя рисунок, решаем неравенства: $x^2 - 3x + 2 > 2x - x^2$ и $x^2 - 3x + 2 < 2x - x^2$.

Решить первое (второе) неравенство – на геометрическом языке означает, найти те значения $x$, при которых график функции $y_1$ расположен **выше (ниже)** графика функции $y_2$. Из рисунка получаем ответ: $x < 0{,}5$, $x > 2$ $(0{,}5 < x < 2)$.

В приведенных примерах интеграция алгебраического и геометрического методов преследует цель, показать учащимся графическую интерпретацию решения квадратного уравнения в случае, если оно имеет два корня (парабола пересекает ось $OX$ в двух точках), один корень (парабола имеет с осью $OX$ одну общую точку, касается ее), не имеет корней (парабола не пересекает ось $OX$).

Аналогично, дается графическая интерпретация решения квадратных неравенств, соответствующих данному квадратному уравнению, что приводит к укрупнению дидактических единиц (квадратные уравнения и неравенства рассматриваются одновременно). В ходе решения осуществляется постоянный перевод информации с алгебраического языка на геометрический и обратно, что влияет на развитие как понятийно-логического, так и эмоционально-образного типов мышления. В результате сопоставления выполняемых алгебраических и геометрических действий осуществляется контроль за ходом решения, а также прогнозирование некоторых результатов.

### 6.2 Системы уравнений с двумя переменными, в которых одно или оба уравнения второй степени

В восьмом классе после изучения квадратных уравнений программой предусмотрено знакомство учащихся с решением простейших систем, содержащих уравнение второй степени. Однако в учебниках приводится только алгебраический метод их решения (способ подстановки и способ сложения), хотя решения многих таких систем имеют наглядную геометрическую интерпретацию, а в некоторых случаях (особенно когда в системе оба уравнения второй



степени) аналитический метод недоступен школьникам, он приводит к решению кубического уравнения, и тогда графический метод является единственно возможным для решения данной системы.

Поэтому в процессе обучения решению указанных систем уравнений целесообразно рассматривать параллельно алгебраический и графический методы решения, сравнивать их, выбирать наиболее рациональный из них. Следует рассмотреть с учащимися разные случаи, когда система уравнений имеет одно решение, два или более решений, не имеет решений, когда систему трудно (или даже невозможно) решить аналитически и др. Для решения системы алгебраическим и графическим методами используем алгоритм, аналогичный алгоритму решения системы двух линейных уравнений с двумя переменными. Приведем примеры.

П р и м е р 7. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 - y = 8, \\ x - y = 2. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. ***I. Алгебраический метод (способ подстановки)***

1. Выразим $y$ через $x$ из второго уравнения системы:

$$y = x - 2.$$

2. Подставим найденное выражение вместо $y$ в первое уравнение системы:

$$x^2 - (x - 2) = 8.$$

1. Решим полученное уравнение:

$$x^2 - x + 2 - 8 = 0,$$

$$x^2 - x - 6 = 0, \text{ откуда } x_1 = 3; x_2 = -2.$$

4. Подставим найденные значения $x$ в формулу $y = x - 2$:

$$y_1 = 3 - 2 = 1, y_2 = -2 - 2 = -4.$$

5. Пары (3; 1) и (–2; -4) являются решениями данной системы уравнений.

О т в е т: (3; 1), (–2; -4).

***II. Графический метод***

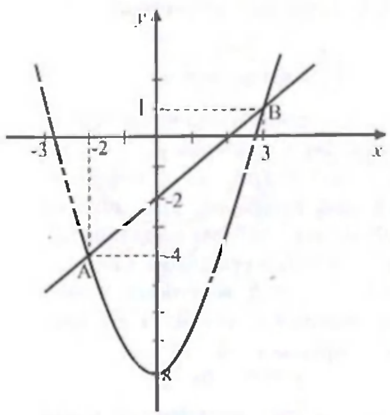



Рис. 10

1. Из каждого уравнения системы

$$\begin{cases} y = x^2 - 8, \\ y = x - 2. \end{cases}$$

выразим $y$ через $x$:

2. Построим в одной системе координат графики первого и второго уравнений системы. Графиком первого уравнения является парабола, а второго – прямая. Для построения параболы найдем координаты её вершины - это точка (0; –8), и координаты точки пересечения с осью абсцисс, для этого решим уравнение: $x^2 - 8 = 0$, откуда $x_1 = -2\sqrt{2}$, $x_2 = 2\sqrt{2}$. Осью симметрии параболы является ось ординат. Можно построить параболу и иначе,

сдвигом параболы $y = x^2$ вдоль оси $OY$ на 8 единиц вниз (рис. 10).

Из рисунка видим, что графики пересекаются в двух точках $A$ и $B$. Координаты этих точек дают нам решение системы уравнений: $A(-2; -4)$, $B(3; 1)$.

Ответ: (–2; –4), (3; 1).

Решив несколько аналогичных систем, учащиеся делают вывод:

***1. Если система двух уравнений с двумя переменными, одно из которых или оба второй степени, имеет решения, то геометрически это означает, что графики уравнений системы пересекаются и координаты точек пересечения являются решениями данной системы. Верно и обратное: если графики уравнений указанной системы пересекаются, то система имеет решения, которыми являются координаты точек пересечения графиков.***

Пример 8. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x^2 + y = 5, \\ y + 6x - x^2 = 8. \end{cases}$$

Решение. ***I. Алгебраический метод (способ сложения)***

1. Из каждого уравнения системы выразим $y$ через $x$:

$$\begin{cases} y = 5 - 2x^2, \\ y = 8 - 6x + x^2. \end{cases}$$

2. Вычтем из первого уравнения второе и решим полученное уравнение:

$$-3x^2 + 6x - 3 = 0,$$

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \text{ или } (x-1)^2 = 0, \text{ откуда } x = 1.$$

3. Подставив вместо $x$, найдем $y$: $y = 5 - 2 = 3$.

Ответ: (1; 3).

***II. Графический метод***

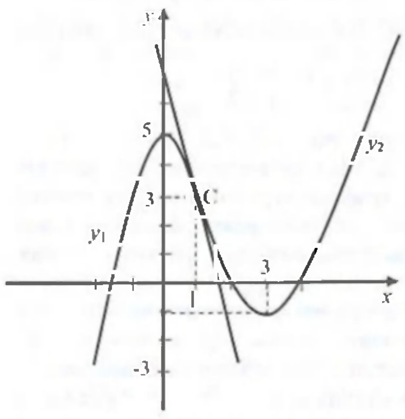



Рис. 11

1. Первое действие такое же, как и в случае алгебраического метода:

$$\begin{cases} y = 5 - 2x^2, \\ y = 8 - 6x + x^2. \end{cases}$$

2. Построим в одной системе координат графики функций $y_1 = 5 - 2x^2$ и $y_2 = 8 - 6x + x^2$ (рис. 11). Графиками являются две параболы. Для построения каждой из них найдем координаты вершины параболы и ось симметрии.

$y_1 = -2x^2 + 5$, вершиной данной параболы является точка (0; 5), а осью симметрии – прямая $x = 0$.

$$y_2 = x^2 - 6x + 8,$$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-6}{2} = 3$, $y_0 = f(x_0) = -1$, значит, вершиной параболы является точка (3; -1), а осью симметрии – прямая $x = 3$.

Построение парабол осуществляем по схеме, рассмотренной нами.

Из рисунка видно и аналитическое решение подтверждает это, что параболы имеют одну общую точку $C$, то есть касаются, координаты этой точки и являются решением данной системы уравнений: $C(1; 3)$.

Ответ: (1; 3).

Таким образом, получаем вывод:

***1. Если система двух уравнений с двумя переменными, одно из которых или оба второй степени, имеет единственное решение, то геометрически это означает, что графики первого и второго уравнений системы касаются или пересекаются в одной точке. Верно и обратное:***
***если графики уравнений указанной системы касаются или пересекаются в одной точке, то данная система имеет единственное решение, которым являются координаты точки касания или пересечения графиков.***

Пример 9. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4, \\ x - y = 4. \end{cases}$$

Решение. ***I. Алгебраический метод (способ подстановки)***

1. Выразим $y$ через $x$ из второго уравнения системы:

$$y = x - 4.$$

2. Подставим в первое уравнение системы вместо $y$ полученное выражение:

$$x^2 + (x-4)^2 = 4.$$

3. Решим полученное уравнение, предварительно преобразовав его:

$$x^2 + x^2 - 8x + 16 - 4 = 0,$$

$$2x^2 - 8x + 12 = 0,$$

$$x^2 - 4x + 6 = 0.$$

Дискриминант этого уравнения $D = 4 - 6 = -2 < 0$, это означает, что уравнение не имеет действительных корней, следовательно, и система уравнений не имеет решений.

Ответ: решений нет.

***II. Графический метод***

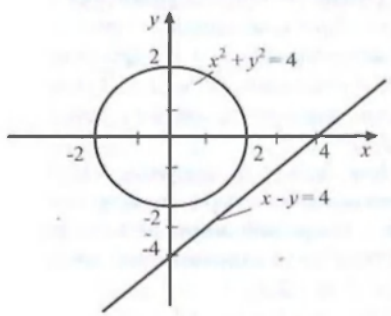



Рис. 12

Построим в одной системе координат графики первого и второго уравнений. График первого уравнения есть окружность с центром в точке (0; 0) и радиусом $r = 2$. Графиком второго уравнения является прямая, проходящая через точки (4; 0) и (0; -4) (рис. 12).

Из рисунка видим, что графики уравнений системы не имеют общих точек, а это означает, что система уравнений не имеет решений.

Ответ: решений нет.

Итак, сравнивая оба метода учащиеся приходят к выводу:

***I. Если система двух уравнений с двумя переменными, одно из которых или оба второй степени, не имеет решений, то геометрически это означает, что графики уравнений системы не пересекаются. Верно и обратное: если графики уравнений названной системы не пересекаются, то система не имеет решений.***

П р и м е р 10. Решить систему уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y = 5, \\ x + y^2 = 3. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. ***I. Алгебраический метод (способ подстановки)***

1. Выразим $y$ через $x$ из первого уравнения системы: $y = 5 - x^2$.

2. Подставим вместо $y$ полученное выражение во второе уравнение системы, тогда получим:

$$x + (5 - x^2)^2 = 3.$$

3. Преобразуем полученное уравнение:

$$x + 25 - 10x^2 + x^4 - 3 = 0,$$
$$x^4 - 10x^2 + x + 22 = 0.$$

Пришли к уравнению четвертой степени, которое учащиеся 8 класса не могут решить без специальной подготовки.

***II. Графический метод***

Построим в одной системе координат графики уравнений системы. Для этого выразим из первого уравнения системы $y$ через $x$: $y = 5 - x^2$, а из второго уравнения – $x$ через $y$: $x = 3 - y^2$.

Графиком первого уравнения $y = 5 - x^2$ является парабола с вершиной в точке (0; 5), пересекающая ось $OX$ в точках ($\sqrt{5}$; 0), ($-\sqrt{5}$; 0). Осью симметрии параболы является ось $OY$, ветви параболы направлены вниз.

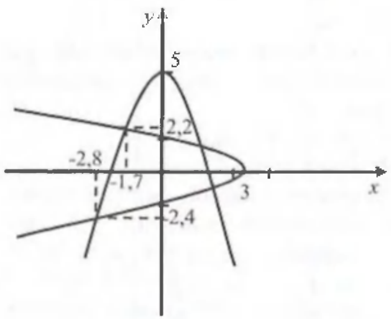



Рис. 13

Графиком второго уравнения является парабола с вершиной в точке (3; 0), осью симметрии $y = 0$ и пересекающая ось $OY$ в точках (0; $\sqrt{3}$) и (0; $-\sqrt{3}$) (то есть горизонтально расположенная парабола) (рис. 13).

Как видим из рисунка, параболы пересекаются в четырех точках, значит, система уравнений имеет четыре решения. Из рисунка находим приближенные координаты точек пересечения, абсциссы: $x_1 = 2$, $x_2 \sim 2{,}3$, $x_3 \approx -1{,}7$, $x_4 \sim -2{,}8$ и ординаты: $y_1 = 1$, $y_2 \approx -0{,}6$, $y_3 \approx 2{,}2$, $y_4 \sim -2{,}4$.

О т в е т: (2; 1), (2,3; –0,6), (–1,7; 2,2), (–2,8; –2,4).

Аналогично двумя методами можно решить следующие системы уравнений с двумя переменными:



1) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 36 \\ y - 0{,}5x = 0. \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ y = 0{,}5x^2. \end{cases}$ 3) $\begin{cases} y^2 + x = 13, \\ y - x^2 = -13. \end{cases}$

4) $\begin{cases} y = x^2, \\ xy = 8. \end{cases}$ 5) $\begin{cases} x^2 + y^2 = 20, \\ xy = -8. \end{cases}$

В некоторых случаях, прежде чем использовать графический метод, следует преобразовать систему, довести её до графической кондиции. Например, решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 36, \\ y - 0{,}5x = 0 \end{cases}$$

сходу, путем построения графиков уравнений не удастся. Способом подстановки её решать также неудобно, так как нельзя получить рационального выражения одной переменной через другую. Поэтому сначала преобразуем данную систему. Умножив второе уравнение на –1 и сложив почленно с первым уравнением, получим:

$$6x + 6y = 102.$$

Затем разделим каждый член этого уравнения на 6:

$$x + y = 17,$$

Система уравнений:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 169, \\ x + y = 17, \end{cases}$$

равносильна первоначальной, состоит из одного уравнения второй степени и одного уравнения первой степени. Эта система легко решается способом подстановки и графическим методом.

Таким образом, постоянное сопоставление алгебраического и графического методов решения систем уравнений, одно из которых или оба второй степени, приучает учащихся за аналитической записью системы видеть её геометрический образ, а значит, и количество решений. В то же время они убеждаются, что иногда данную систему трудно решить аналитически, но можно легко решить графически или наоборот, графический метод недоступен, но систему можно решить алгебраическим методом, то есть при решении подобных систем знание одного метода решения (алгебраического или графического) недостаточно, обязательно необходимы знания и умения по использованию другого метода.

Одновременное обучение двум методам позволит учитывать и индивидуальные особенности учащихся, связанные с разными типами ума (аналитическим и геометрическим), о которых говорили такие ученые-математики, как А. Пуанкаре, Ж. Адамар, а также известный отечественный психолог В. А. Крутецкий.

## 6.3 Уравнения и неравенства, содержащие степень

В 9 классе после изучения степенной функции рассматриваются уравнения и неравенства, содержащие степень. При решении таких уравнений и неравенств используются свойства степенной функции. Сочетание алгебраического и графического методов решения здесь бывает не только желательным, но часто и необходимым для проведения правильных логических рассуждений и получения ответа. Иногда графический метод выступает в единстве с логическими рассуждениями, а чисто алгебраический (аналитический) метод решения на данном уровне развития учащихся оказывается недоступным для них. Приведем один из таких примеров.

П р и м е р 11. Решить уравнение $\frac{3}{x} = x^2 + 1$.

Решая уравнение алгебраическим методом, мы рассуждаем так:

1) При $x < 0$ данное уравнение корней не имеет, так как $\frac{3}{x} < 0$, а $x^2 + 1 > 0$.

2) При $x > 0$ мы приходим к уравнению $x^3 + x - 3 = 0$, которое девятиклассники не могут решить без специальной подготовки. Поэтому для решения уравнения применяем графический метод.

*I. Графический метод*

1. В одной системе координат построим графики функций, стоящих в левой и правой частях уравнения, т. е. $y_1 = \frac{3}{x}$ и $y_2 = x^2 + 1$. Графиком первой функции является гипербола, графиком второй функции – парабола с вершиной в точке (0; 1) и осью симметрии $x = 0$ (рис. 14).

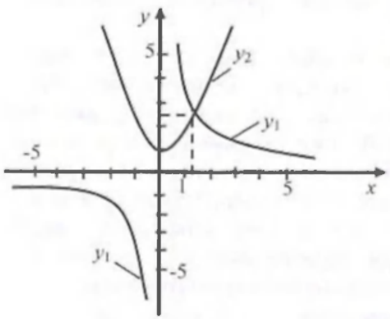



Рис. 14

Как мы видим из рисунка, при $x < 0$ уравнение не имеет корней. При $x > 0$ это уравнение имеет один корень, равный абсциссе точки пересечения графиков этих функций, $x_1 \approx 1{,}2$. Других положительных корней уравнение не имеет, так как при $x > x_1$ функция $y_1 = \frac{3}{x}$ убывает, а функция $y_2 = x^2 + 1$ возрастает, и, следовательно, графики функций при $x > x_1$ не пересекаются. По этой же причине они не пересекаются при $0 < x < x_1$.

О т в е т: $x \approx 1{,}2$.

Таким образом, уравнение $f(x) = g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ степенные функции, разномонотонные, лучше решать графическим методом, где наглядно можно увидеть промежутки (интервалы), в которых уравнение имеет корни и в которых оно не имеет корней, а также, если имеет корни, то сколько их.

Итак, на основе графического решения уравнения учащиеся делают вывод:



***1. Если уравнение, содержащее степень, имеет корни, то геометрически это означает, что графики функций, стоящих в левой и правой частях уравнения, пересекаются, и абсциссы точек пересечения являются корнями уравнения. Верно и обратное: если графики функций, стоящих в левой и правой частях уравнения, содержащего степень, пересекаются, то уравнение имеет корни, которыми являются абсциссы точек пересечения этих графиков.***

П р и м е р 12. Решить уравнение $4\sqrt{x+1} = |2x - 1| + 3$.

Р е ш е н и е. ***I. Алгебраический метод***

1. Найдем область допустимых значений для переменной $x$.

$$x + 1 \geq 0, \text{ откуда } x \geq -1.$$

2. Выражение, стоящее под знаком модуля, приравняем к нулю:

$$2x - 1 = 0, \text{ откуда } x = \frac{1}{2}.$$

Учитывая ОДЗ, вся числовая ось разобьется на два промежутка: $-1 \leq x < \frac{1}{2}$ и $x > \frac{1}{2}$. В каждом из этих промежутков решим наше уравнение.

3. При $-1 \leq x < \frac{1}{2}$ получаем:

$$4\sqrt{x+1} = -2x + 4,$$
$$2\sqrt{x+1} = -x + 2.$$

Возведем в квадрат обе части полученного уравнения:

$$4x + 4 = x^2 - 4x + 4,$$
$$x^2 - 8x = 0 \text{ или } x(x - 8) = 0, \text{ откуда } x_1 = 0, x_2 = 8.$$

Второй корень является посторонним, так как он не входит в промежуток $-1 \leq x < \frac{1}{2}$, на котором рассматривается уравнение. Итак, $x = 0$ – корень исходного уравнения.

4. При $x > \frac{1}{2}$ наше уравнение примет вид:

$$4\sqrt{x+1} = 2x - 1 + 3,$$
$$4\sqrt{x+1} = 2x + 2.$$

Возведем в квадрат обе части полученного уравнения:

$$x^2 - 2x - 3 = 0.$$

Решая это уравнение, находим: $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. Второй корень не входит в промежуток $x > \frac{1}{2}$, поэтому он является посторонним. Итак, $x = 3$ – корень исходного уравнения. Учитывая корень, найденный в пункте 3, получаем ответ.

О т в е т: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$.

Как мы видим, алгебраический метод решения уравнения требует от учащихся большой внимательности, так как появляются посторонние корни. Необходимо постоянно сравнивать полученный результат с промежутком, на котором рассматривается уравнение.

В отличие от алгебраического, графический метод решения наглядно показывает количество корней, их знаки и позволяет учащимся избежать возможных ошибок. В данном случае он может применяться для проверки ответа, полученного аналитически.

*II. Графический метод*

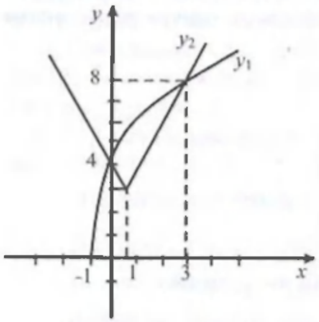


Рис. 15

1. Построим в одной системе координат графики функций (рис. 15)

$$y_1 = 4\sqrt{x+1} \text{ и } y_2 = |\,|2x-1| + 3.$$

Построение графиков можно осуществлять путем их преобразований, например, график первой функции $y_1$ строим по цепочке:

$$y = \sqrt{x} \to y' = \sqrt{x+1} \to y_1 = 4\sqrt{x+1},$$

а функции $y_2$ – по цепочке:

$$y = (2x-1) \to y' = |2x-1| \to y_2 = |\,|2x-1| + 3.$$

2. Из рисунка найдем абсциссы точек пересечения графиков функций: $x_1 = 0, x_2 = 3$.

О т в е т: $x_1 = 0, x_2 = 3$.

Сами корни уравнения при графическом методе можно находить иногда аналитически, определив по рисунку промежутки, в которых они находятся. Это позволит получить более точный результат в случае, если корни являются дробными числами.

Решая уравнения, содержащие степень, можно решать и соответствующие им неравенства. Приведем пример.

П р и м е р 13. Решить уравнение $x^3 = -\frac{5}{x}$ и соответствующие ему неравенства $x^3 > -\frac{5}{x}$ и $x^3 < -\frac{5}{x}$.

Р е ш е н и е. *I. Алгебраический метод*

1. Найдем ОДЗ: $x \neq 0$.

2. Умножив обе части уравнения на $x$, получим: $x^4 = -5$. Данное уравнение не имеет корней, так как $x^4 > 0$ при любом $x$.

Решим неравенство $x^3 > -\frac{5}{x}$. Преобразуя данное неравенство, получим:

$$x^3 + \frac{5}{x} > 0 \text{ или } \frac{x^4+5}{x} > 0, \text{ откуда } x > 0.$$

Аналогично, решая неравенство $x^3 < -\frac{5}{x}$, получим $x < 0$.

*II. Графический метод*

Построим в одной системе координат графики функций $y_1 = x^3$ и $y_2 = -\frac{5}{x}$ (рис. 16). Из рисунка видно, что графики функций не имеют точек пересечения, значит, уравнение $x^3 = -\frac{5}{x}$ не имеет корней.

Решаем соответствующие неравенства.



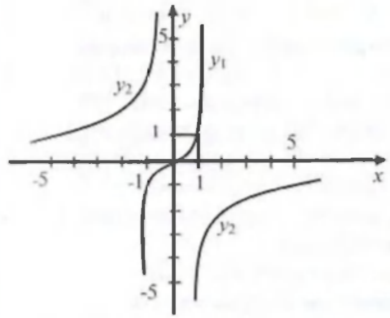


Рис. 16

График функции $y_1 = x^3$ расположен **выше** графика функции $y_2 = -\frac{5}{x}$ при $x > 0$, значит, неравенство $x^3 > -\frac{5}{x}$ выполняется при $x > 0$. Аналогично, по рисунку видим, что график функции $y_1 = x^3$ расположен **ниже** графика функции $y_2 = -\frac{5}{x}$ при $x < 0$.

Таким образом, графический метод подтверждает отсутствие корней у данного уравнения и наглядно показывает решения соответствующих неравенств.

Учащиеся, сопоставляя оба метода решения, приходят к выводу:

***1. Если уравнение, содержащее степень, не имеет корней, то геометрически это означает, что графики функций, стоящих в левой и правой частях уравнения, не имеют общих точек, т.е. не пересекаются и не совпадают. Верно и обратное: если графики функций, стоящих в левой и правой частях уравнения, содержащего степень, не имеют общих точек, то данное уравнение не имеет корней.***

Среди уравнений, содержащих степень, часто встречаются такие, в которых переменная содержится под знаком радикала. Такие уравнения называются ***иррациональными***. Одно из таких уравнений мы уже рассмотрели в примере 12. Так как интеграция алгебраического и графического методов при решении иррациональных уравнений и неравенств имеет особое значение, то рассмотрим этот вид уравнений и неравенств подробнее.

Мотивацию введения понятия иррационального уравнения можно провести путем решения задачи.

***Задача.*** *В треугольнике ABC (рис. 51) BD перпендикулярно AC, AD = 2 см, DC = 5 см, AB + BC = 9 см. Найти BD.*

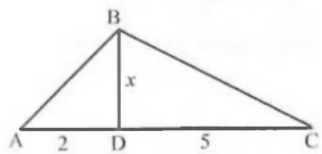


Рис. 17

Р е ш е н и е.

Пусть длина отрезка BD равна $x$ см. Тогда AB = $\sqrt{x^2+4}$ и BC = $\sqrt{x^2+25}$.

По условию задачи

$$\sqrt{x^2+4} + \sqrt{x^2+25} = 9.$$

Учащиеся видят, что получилось уравнение, в котором переменная входит в подкоренное выражение. Вводится термин - такое уравнение называется и р р а ц и о н а л ь н ы м, затем формулируется определение самими учащимися или учителем.

***Определение.*** *Уравнение, в котором переменная входит в какое-либо выражение, стоящее под знаком корня, называется иррациональным.*

Мы не будем подробно останавливаться на алгебраических методах решения иррациональных уравнений, так как они описаны в учебниках и учебных пособиях для учащихся и абитуриентов, а ограничимся лишь их перечислением: 1) метод введения вспомогательных переменных, в результате чего решение иррационального уравнения сводится к решению систем уравнений, уже не содержащих радикалов; 2) метод изолирования (уединения) радикала и возведения обеих частей уравнения в степень, в результате чего приходим к уравнению, не содержащему радикалов или содержащему их меньшее число; 3) метод умножения обеих частей уравнения на выражение, сопряженное одной из его частей, и использования свойств монотонности функций.

Наиболее часто в школьной практике используется второй метод.

Следует заметить, что решение иррациональных уравнений и неравенств имеет свои особенности (опасности), в отличие от ранее рассмотренных видов уравнений и неравенств, заключающиеся в том, что в ходе выполнения преобразований данного уравнения может быть появление посторонних корней или потеря корней. Поэтому необходима постоянная проверка полученных результатов и контроль выполняемых действий. Здесь интеграция алгебраического и геометрического (графического) методов в виде их сочетания или единства в одном методе не только желательна, но и необходима. Приведем примеры.

П р и м е р 14. Решить уравнение $\sqrt{1-x} = x$ и соответствующие ему неравенства $\sqrt{1-x} > x$ и $\sqrt{1-x} < x$.

Р е ш е н и е. ***I. Алгебраический метод***

А) Решим сначала уравнение $\sqrt{1-x} = x$.

1. Найдем ОДЗ:

$$\begin{cases} 1-x > 0, \\ x > 0, \end{cases} \quad \text{откуда } 0 < x < 1.$$

2. Возведем обе части уравнения в квадрат:

$$1 - x = x^2.$$

3. Решим полученное уравнение:

$$x^2 + x - 1 = 0, \text{ откуда } x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

4. Сравним полученные результаты с ОДЗ. Как видим, $x_2 < 0$, поэтому он является посторонним корнем.

О т в е т: $x = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

Б) Решим неравенство $\sqrt{1-x} > x$.

Данное неравенство равносильно совокупности двух систем рациональных неравенств:

$$\begin{cases} x > 0, \\ 1 - x > x^2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x < 0, \\ 1 - x > 0; \end{cases}$$



Решая первую систему, находим: $0 < x < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$. Решением второй системы является промежуток $x < 0$. Объединяя оба решения, получаем ответ: $x < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$.

В) Решим неравенство $\sqrt{1-x} < x$.

Данное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 1 - x \geq 0, \\ 1 - x < x^2. \end{cases}$$

Решая данную систему, находим: $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < x < 1$.

О т в е т: $\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < x < 1$.

Укажем недостатки алгебраического метода решения. При решении уравнения $\sqrt{1-x} = x$ учащиеся, найдя $x_1$ и $x_2$, забывают сравнить их значения с ОДЗ. Решая неравенство $\sqrt{1-x} > x$, они испытывают трудности в составлении систем неравенств. Составив первую систему, часто забывают о второй системе.

Ошибки возникают и при решении систем.

***II. Графический метод***

Построим в одной системе координат графики функций $y_1 = \sqrt{1-x}$ и $y_2 = x$ (рис. 18).

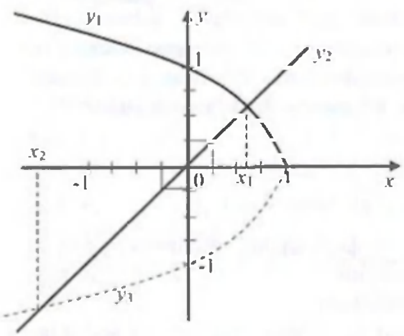



Рис. 18

А) На геометрическом языке решить уравнение $\sqrt{1-x} = x$ – это значит, найти абсциссы точек пересечения графиков указанных функций или установить, что таких точек нет.

Как видим из рисунка, корень уравнения единственный и он лежит в интервале (0; 1). Можно найти его приближённо по рисунку, если не требуется большой точности, или найти его аналитически, решив уравнение $1 - x = x^2$, то есть $x^2 + x - 1 = 0$.

Решение даст два корня:

$$x_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2},\ x_2 = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}.$$

Так как $x_2 < 0$ и не принадлежит интервалу (0; 1), то это посторонний корень. Как он получается, можно показать учащимся на рисунке. Прямая $y_2 = x$ пересекается с графиком функции $y_3 = -\sqrt{1-x}$ в точке с абсциссой $x_2$ (график функции $y_3$ на рис. изображен пунктиром).

Б-В) Для решения неравенства $\sqrt{1-x} > x$ ($\sqrt{1-x} < x$) замечаем, что график функции $y_1 = \sqrt{1-x}$ лежит **выше (ниже)** графика функции $y_2 = x$ на интервале $x < x_1$ ($x_1 < x < 1$).

Преимущество графического метода решения в его наглядности. Во-первых, отпадает необходимость в дополнительных исследованиях по определению постороннего корня $x_2$. Во-вторых, есть возможность наглядно показать учащимся, почему в результате решения уравнения $\sqrt{1-x} = x$ появляется посторонний корень $x_2$ и почему он отрицательный.

П р и м е р 15. Решить неравенство $\sqrt{x-2} > \sqrt{3x-6}$.

Р е ш е н и е. ***I. Алгебраический метод***

1. Найдем ОДЗ: $\begin{cases} x - 2 > 0, \\ 3x - 6 > 0. \end{cases}$

Решая данную систему неравенств, получаем: $x > 2$.

2. Возведем обе части неравенства в квадрат:

$$x - 2 > 3x - 6, \text{ откуда } x < 2.$$

Сравнивая полученное решение с ОДЗ, имеем: $x = 2$. О т в е т: $x = 2$.

***II. Графический метод***

1. Построим в одной системе координат графики функций $y_1 = \sqrt{x-2}$ и $y_2 = \sqrt{3x-6}$ (рис. 19).

2. Используя рисунок, найдем те значения $x$, при которых график функции $y_1$ расположен **не ниже** графика функции $y_2$. Очевидно, что при $x > 2$ функция $y_1 = \sqrt{x-2}$ принимает значения, меньшие значений функции $y_2 = \sqrt{3x-6}$ (график функции $y_1$ при $x > 2$ расположен **ниже** графика функции $y_2$). При $x = 2$ значения функций равны (графики функций имеют общую точку).

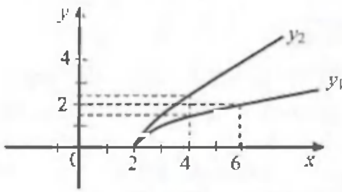


Рис. 19

О т в е т: $x = 2$.

П р и м е р 16. Решить неравенство $\sqrt{x-2} + 3 < \frac{2}{x}$.

Часто подходя к решению неравенства формально, учащиеся преобразуют его и приходят к неравенству третьей степени $x^3 - 11x^2 + 12x - 4 < 0$, которое они не могут решить без специальной подготовки.

Данное неравенство можно решить и методом оценки его левой и правой частей. Учитывая ОДЗ: $x > 2$, замечаем, что левая часть неравенства всегда больше или равна 3, а правая – всегда меньше или равна 1, а это значит, что левая часть неравенства не может быть больше правой. Поэтому получаем ответ: решений нет.

***Графический метод***

1. Построим в одной системе координат графики функций:

$$y_1 = \sqrt{x-2} + 3 \text{ и } y_2 = \frac{2}{x} \text{ (рис. 20).}$$



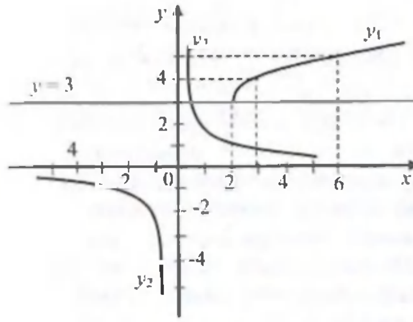


Рис. 20

2. Область определения первой функции: $x > 2$. Графиком второй функции является гипербола. Функция $y_1 = \sqrt{x-2} + 3$ возрастающая на всей области определения (то есть при $x > 2$), а функция $y_2 = \frac{2}{x}$ – убывающая на этом же промежутке. Графики функций, как видно из рисунка, не имеют точек пересечения, так как самая нижняя точка графика функции $y_1$ есть точка (2; 3), а ветвь гиперболы $y_2 = \frac{2}{x}$ при $x > 0$ расположена ниже координат этой точки.

3. Ветвь гиперболы при $x < 0$ рассматривать нет смысла, так как функция $y_1$ при $x < 0$ не существует.

4. Из рисунка видно, что график функции $y_2 = \frac{2}{x}$ при $x > 2$ всегда расположен **ниже** графика функции $y_1 = \sqrt{x-2} + 3$, это значит, функция $y_1$ не может принимать значения, большие значений функции $y_2$, поэтому данное неравенство не имеет решений.

О т в е т: решений нет.

Как видим, графический метод сопровождается здесь рассуждениями, обоснованиями своих выводов, сделанных на основе рисунка, что положительно сказывается на развитии мышления учащихся и предупреждает формализм, присущий иногда алгебраическому методу решения подобных неравенств.

Рассмотрим пример иррационального неравенства, содержащего корень третьей степени.

П р и м е р 17. Решить неравенство $\sqrt[3]{x^2 + 8} > 2 - x$.

Р е ш е н и е. ***I. Алгебраический метод***

1. ОДЗ: $x$ – любое.

2. Возведем в куб обе части неравенства и преобразуем его:

$$x^2 + 8 > 8 - 12x + 6x^2 - x^3,$$
$$x^3 - 5x^2 + 12x > 0,$$
$$x(x^2 - 5x + 12) > 0.$$

3. Разложим на множители квадратный трехчлен $x^2 - 5x + 12$. Для этого решим уравнение $x^2 - 5x + 12 = 0$. Дискриминант уравнения Д = 25 – 48 = -23, -23 < 0, значит, трехчлен $x^2 - 5x + 12 > 0$ при любом значении $x$ (ветви параболы направлены вверх, и она не пересекается с осью $OX$).

4. Так как $x^2 - 5x + 12 > 0$ при любом $x$, то решением неравенства $x(x^2 - 5x + 12) > 0$ будет промежуток $x > 0$.

О т в е т: $x > 0$.

### *II. Графический метод*

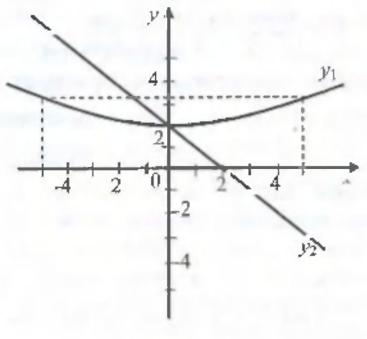


Рис. 21

1. Построим в одной системе координат графики функций (рис. 21)

$$y_1 = \sqrt[3]{x^2+8} \text{ и } y_2 = 2 - x.$$

Графиком первой функции является кривая, симметричная относительно оси OY, с вершиной в точке (0; 2). Графиком второй функции является прямая, проходящая через точку (0; 2).

2. Из рисунка видно, что график функции $y_1$ расположен **выше** прямой $y_2 = 2 - x$ при $x > 0$.

О т в е т: $x > 0$.

Интеграция алгебраического и геометрического (графического) методов особенно необходима при решении иррациональных уравнений и неравенств с параметром. Здесь она часто выступает в виде единства, слияния данных методов в одном методе. Приведем пример.

П р и м е р 18. Решить неравенство $x - \sqrt{a - x^2} \geq 1$.

Р е ш е н и е. ***Графический метод***

1. Преобразуем данное неравенство к виду $x - 1 > \sqrt{a - x^2}$.

2. Построим в одной системе координат графики функций: $y_1 = x - 1$ и $y_2 = \sqrt{a - x^2}$. Графиком первой функции является прямая, графиком второй функции – полуокружность (расположенная в верхней полуплоскости) с центром в точке $x = 0$ и радиусом $\sqrt{a}$ (рис. 22).

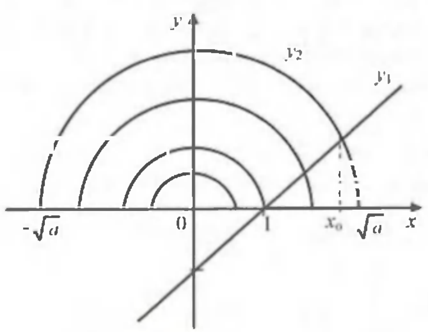


Рис. 22

Очень важно построить на одном и том же чертеже график $y_2$ при различных значениях параметра $a$. Тогда легко заметить, что графики $y_1$ и $y_2$ пересекаются, т.е. данное уравнение имеет действительное решение $x_0$, если $a > 1$.

Если $a = 1$, то решение $x_0 = 1$ и оно единственно.

Если $a > 1$, решение уравнения также единственно и оно лежит в интервале $(1; \sqrt{a})$.

Решением данного неравенства являются те значения $x$, при которых график функции $y_1$ (прямая) лежит **выше** графика функции $y_2$ (полуокружности). Рисунок показывает, что $x_0 < x < \sqrt{a}$.

Решив уравнение $x - \sqrt{a - x^2} = 1$,



получаем два корня: $x_1 = \frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}$, $x_2 = \frac{1-\sqrt{2a-1}}{2}$. $x_2$ - посторонний корень, так как он не входит в интервал $(1; \sqrt{a})$. Итак, решением данного неравенства является промежуток $[\frac{1+\sqrt{2a-1}}{2}, \sqrt{a}]$. Следует заметить, что с увеличением $a$ он увеличивается.

Графический метод в данном случае содержит в себе и элементы аналитического метода (решение уравнения). Он требует от учащихся более высокого уровня образного мышления, умение представить графическую модель в динамике в зависимости от изменений параметра $a$.

Ещё большую эффективность графический метод имеет при решении уравнений и неравенств, содержащих модуль. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

### 6.4 Уравнения и неравенства, содержащие модуль

В школьном курсе математики часто встречаются уравнения и неравенства, содержащие переменную под знаком абсолютной величины (под знаком модуля). Для решения таких уравнений и неравенств необходимо разбить числовую ось на отдельные промежутки так, чтобы на каждом из них можно было записать уравнение (неравенство), не используя знака абсолютной величины.

Аналитический метод решения уравнений и неравенств, содержащих модуль, требует часто утомительных рассмотрений уравнения или неравенства на интервалах знакопостоянства функций, стоящих под знаком модуля. Причем, полученный на каждом интервале результат необходимо постоянно проверять, входит он в заданный интервал или нет (что часто забывают делать учащиеся). Поэтому наиболее эффективен при решении подобных уравнений и неравенств графический метод. Обучение при этом целесообразно вести одновременно аналитическому и графическому методам, что позволит проводить их сравнение, выбор среди них наиболее рационального. Графический метод будет способствовать к тому же осознанию и осмыслению решений уравнения (неравенства), полученных аналитическим путем.

Начинать обучение следует с решения простейших уравнений и неравенств, содержащих модули, предварительно познакомив учащихся с построением графиков функций $y = |x|$, $y = |kx + b|$, $y = |ax^2 + bx + c|$ и др.

Рассмотрим примеры.

П р и м е р 19. Решить уравнение $|3x + 2| = 1$.

Р е ш е н и е. *I. Алгебраический метод*

1. Приравняем к нулю выражение, стоящее под знаком модуля:

$$3x + 2 = 0, \text{ откуда } x = -\frac{2}{3}.$$

2. Разобьем всю числовую ось на два промежутка $(-\infty; -\frac{2}{3})$ и $(-\frac{2}{3}; +\infty)$.

3. На каждом из данных промежутков решим наше уравнение.

А) На промежутке $(-\infty; -\frac{2}{3})$ уравнение запишется в виде:

$$-3x - 2 = 1,$$

откуда $x = -1$ (входит в данный промежуток, значит, является корнем).

Б) На промежутке $(-\frac{2}{3}; +\infty)$ уравнение примет вид:

$$3x + 2 = 1,$$

откуда $x = -\frac{1}{3}$ (входит в данный промежуток, значит, является корнем).

4. Записываем ответ. Ответ: $x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{3}$.

*II. Графический метод*

1. Построим в одной системе координат графики функций $y_1 = |3x + 2|$ и $y_2 = 1$ (рис. 23).

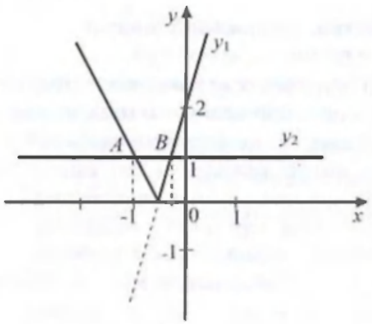



Рис. 23

2. Найдем абсциссы точек пересечения графиков $A$ и $B$. Можно найти их по рисунку, но это будут приближенные значения, а можно найти их, решив уравнения:

$$-3x - 2 = 1 \text{ и } 3x + 2 = 1.$$

Первое уравнение составляем, исходя из того, что точка $A$ лежит на отрицательной части графика, отображенной симметрично относительно оси $OX$, а второе уравнение, исходя из того, что точка $B$ лежит на положительной ветви графика функции $y_1$.

Решая эти уравнения, находим точные значения абсцисс точек пересечения: $x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{3}$.

Ответ: $x_1 = -1, x_2 = -\frac{1}{3}$.

В данном случае графический метод предполагает и аналитические действия (решение уравнений). Приведем ещё примеры.

Пример 20. Решить уравнение $2|x - 1| - |x - 3| - 2 = 0$.

Решение. *I. Алгебраический метод*

1. Приравняем к нулю выражения, стоящие под знаком модуля, и решим полученные уравнения:

$$x - 1 = 0, \text{ откуда } x = 1 \text{ и } x - 3 = 0, \text{ откуда } x = 3.$$

2. Разобьем всю числовую ось на промежутки точками $x = 1$ и $x = 3$. Получим три промежутка: $(-\infty; 1)$, $[1; 3)$, $[3; +\infty)$. На каждом промежутке решим наше уравнение.

А) На промежутке $(-\infty; 1)$ уравнение запишется в виде:

$$-2x + 2 + x - 3 - 2 = 0 \text{ или } -x - 3 = 0,$$

откуда $x = -3$ (входит в данный промежуток, значит, является корнем).



Б) На промежутке $[1; 3)$ уравнение примет вид:

$$2x - 2 + x - 3 - 2 = 0 \text{ или } 3x - 7 = 0,$$

откуда $x = \frac{7}{3}$ (входит в данный промежуток, значит, является корнем).

В) На промежутке $[3; +\infty)$ уравнение примет вид:

$$2x - 2 - x + 3 - 2 = 0 \text{ или } x - 1 = 0,$$

откуда $x = 1$ (не входит в данный промежуток, значит, не является корнем).

Ответ: $x_1 = -3, x_2 = \frac{7}{3}$.

*II. Графический метод*

1. Преобразуем уравнение к виду:

$$2|x - 1| = |x - 3| + 2.$$

2. Построим в одной системе координат графики функций $y_1 = 2|x - 1|$ и $y_2 = |x - 3| - 2$ (рис. 24). Графики удобно строить по трём точкам: первая точка такая, при которой значение модуля равно нулю, она же является вершиной данного графика. Вторая точка берется левее этого значения, а третья – правее этого значения. В нашем случае таблица значений функций выглядит так:

| $x$ | $y_1 = 2\|x - 1\|$ | $x$ | $y_2 = \|x - 3\| + 2$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 0 – вершина | 3 | 2 – вершина |
| 0 | 2 | 0 | 5 |
| 2 | 2 | 5 | 4 |

3. Абсциссы точек пересечения графиков являются корнями данного уравнения. Их можно «считать» с рисунка, а можно найти, решив уравнения:

1) $-2x + 2 = -x + 3 + 2$, откуда $x = -3$;

2) $2x - 2 = -x + 3 + 2$, откуда $x = \frac{7}{3}$.

Ответ: $x_1 = -3, x_2 = \frac{7}{3}$.

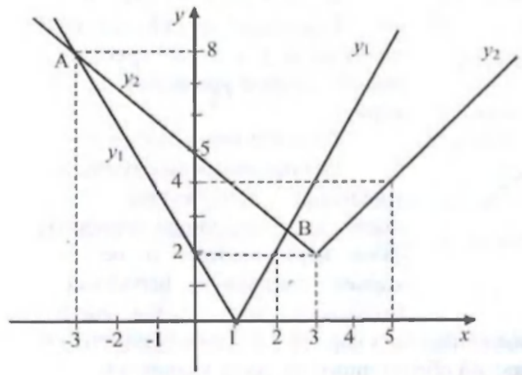



Рис. 24

При составлении первого уравнения учитываем то, что пересекаются отрицательные ветви графиков, отображенные симметрично относительно оси $OX$ (второй график к тому же поднят на три единицы вверх). В соответствии с этим раскрываем модули. Аналогично, при составлении второго уравнения учитываем то, что пересекаются положительная ветвь графика $y_1$ с отрицательной ветвью графика функции $y_2$.

Таким образом, рассмотренные примеры решения уравнений с модулем показывают, что графический метод представляет собой интеграцию геометрических действий (построение графиков функций) и аналитических действий (тождественные преобразования, решение уравнения). Приведем еще несколько примеров.

П р и м е р 21. Решить уравнение $|x+1| + |x-1| = 1$.

Р е ш е н и е. ***I. Алгебраический метод***

1. Разобьем всю числовую ось точками $x = -1$ и $x = 1$ на три промежутка: $(-\infty; -1)$, $[-1; 1)$ и $[1; +\infty)$. На каждом промежутке решим наше уравнение.

А) На промежутке $(-\infty; -1)$ уравнение запишется в виде:

$$-x-1-x+1=1 \text{ или } -2x=1,$$

откуда $x=-\frac{1}{2}$ (не входит в данный промежуток, значит, не является корнем).

Б) На промежутке $[-1; 1)$ уравнение примет вид:

$$x+1-x+1=1,$$

откуда $2 = 1$ – неверное равенство, значит, на этом промежутке уравнение тоже не имеет корней.

В) На промежутке $[1; +\infty)$ уравнение примет вид:

$$x+1+x-1=1,$$

откуда $x=\frac{1}{2}$ (не входит в данный промежуток, значит, не является корнем).

О т в е т: корней нет.

Построим геометрический образ этого уравнения, используя графики.

***II. Графический метод***

1. Преобразуем уравнение к виду: $|x+1| = 1-|x-1|$.

2. Построим в одной системе координат графики функций (рис. 25) $y_1=|x+1|$ и $y_2=1-|x-1|$.

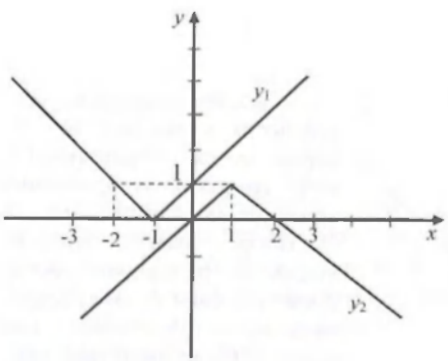



Рис. 25

Как видим из рисунка, графики функций $y_1$ и $y_2$ не пересекаются, значит, данное уравнение не имеет корней.

О т в е т: корней нет.

Мы рассмотрели случаи, когда уравнения, содержащие модуль, имеют конечное число корней (графики пересекаются) и не имеют корней (графики не пересекаются). Возможны также случаи, когда такие уравнения имеют бесконечное множество корней (графики полностью или частично совпадают). Геометрический образ одного из таких уравнений

$$|x+1| = 2-|x-1|$$



представлен на рисунке 26. Графики функций $y_1$ и $y_2$ на отрезке $[-1; 1]$ совпадают, значит, уравнение имеет бесконечное множество корней, отрезок $[-1; 1]$.

О т в е т: $[-1; 1]$.

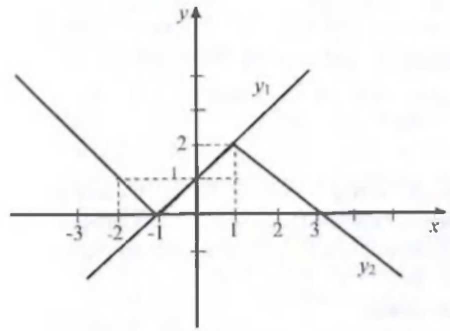



Рис. 26

Графический метод решения уравнений, содержащих модуль, требует от учащихся следующих умений:

1) умение преобразовать уравнение к виду, удобному для использования графического метода;

2) умение строить графики функций, содержащих модуль;

3) умение устанавливать с помощью чертежа, имеет уравнение, содержащее модуль, решения или нет;

4) умение находить координаты точек пересечения графиков функций, стоящих в левой и правой частях уравнения;

5) умение правильно составлять уравнения для нахождения абсцисс точек пересечения графиков.

Рассмотрим теперь интеграцию алгебраического и геометрического методов решения **неравенств, содержащих модуль**. При этом будем использовать следующие с в о й с т в а:

1. *Неравенство $|x| < a$, где $a > 0$, означает то же самое, что и двойное неравенство $-a < x < a$, т.е. при $a > 0$ неравенство $|x| \le a$ равносильно неравенству $-a < x < a$.*

2. *Неравенство $|x| > a$, где $a > 0$, означает, что $x > a$ или $x < -a$.*

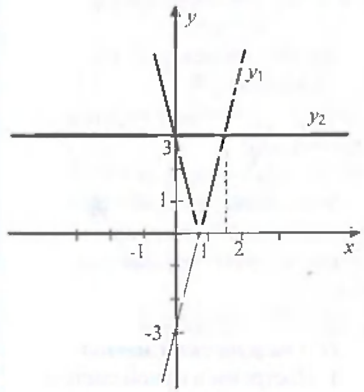



Рис. 27

П р и м е р 22. Решить неравенство

$$|4x-3| > 3.$$

Р е ш е н и е. ***I. Алгебраический метод***

Согласно свойству 2 данное неравенство означает, что $(4x-3) > 3$ или $(4x-3) < -3$. Решая эти неравенства, получаем: $x > \frac{3}{2}$, $x < 0$.

О т в е т: $x < 0$, $x > \frac{3}{2}$.

***II. Графический метод***

1. Построим в одной системе координат графики функций $y_1 = |4x-3|$ и $y_2 = 3$ (рис. 27).

2. Найдем абсциссы точек пересечения

графиков, решив уравнения:

$$-4x + 3 = 3 \text{ и } 4x - 3 = 3.$$

$$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{3}{2}.$$

3. Геометрически решить данное неравенство – это значит, найти те значения $x$, при которых график функции $y_1$ расположен не ниже прямой $y_2 = 3$. Из рисунка видим, что это условие выполняется при $x \leq 0$ и $x \geq \frac{3}{2}$.

О т в е т: $x \leq 0,\ x \geq \frac{3}{2}$.

В данном случае алгебраический метод оказался более рациональным, чем графический. Преимущество графического метода в его наглядности. Часто в неравенствах встречается не один, а несколько модулей, приведем примеры.

П р и м е р 23. Решить неравенство $|5 - x| > 2|x - 2|$.

Р е ш е н и е. ***I. Алгебраический метод***

1. Разобьем всю числовую прямую на три промежутка: $(-\infty; 2)$, $[2; 5]$ и $(5; +\infty)$. На каждом из этих промежутков запишем данное неравенство без модуля и решим его.

А) На промежутке $(-\infty; 2)$ верны равенства $|5 - x| = 5 - x$ и $|x - 2| = -x + 2$, и наше неравенство примет вид:

$$5 - x > -2x + 4, \text{ откуда } x > -1.$$

Учитывая данный промежуток, получаем решение исходного неравенства на этом промежутке: $-1 < x < 2$.

Б) На промежутке $[2; 5]$ верны равенства $|5 - x| = 5 - x$ и $|x - 2| = x - 2$, поэтому наше неравенство примет вид:

$$5 - x > 2x - 4, \text{ откуда } x < 3.$$

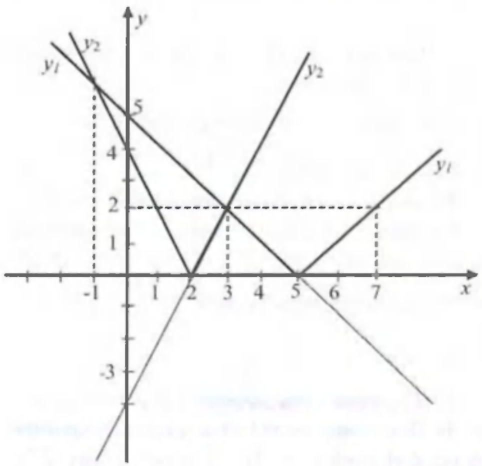



Рис. 28

Учитывая данный промежуток, получаем решение неравенства на этом промежутке:

$$2 < x < 3.$$

В) На промежутке $(5; +\infty)$ верны равенства $|5 - x| = -5 + x$ и $|x - 2| = x - 2$, поэтому неравенство примет вид:

$$-5 + x > 2x - 4, \text{ откуда } x < -1.$$

Учитывая данный промежуток, получаем, что решений на этом промежутке неравенство не имеет.

О т в е т: $-1 < x < 3$.

***II. Графический метод***

1. Построим в одной системе координат графики функций $y_1 = |5 - x|$ и $y_2 = 2|x - 2|$ (рис. 28).



2. Абсциссы точек пересечения графиков найдем, решив уравнения: $5 - x = -2x + 4$ и $5 - x = 2x - 4$, откуда $x_1 = -1$, $x_2 = 3$.

3. Геометрически решить данное неравенство – это значит, найти те значения $x$, при которых график функции $y_1$ расположен **не ниже** графика функции $y_2 = 2|x - 2|$.

Из рисунка видим, что это условие выполняется при $-1 < x < 3$.

О т в е т: $-1 < x \leq 3$.

Графический метод, как мы видим, здесь является более рациональным, наглядным и не требует каких-либо особых умений, кроме умений выполнять построение графика функции, содержащей модуль.

П р и м е р 24. Решить неравенство $|x - 1| + |x + 1| < 4$.

Р е ш е н и е. ***I. Алгебраический метод***

1. Разобьем всю числовую прямую на три промежутка: $(-\infty; -1)$, $[-1; 1]$ и $(1; +\infty)$. На каждом из этих промежутков запишем данное неравенство без модуля и решим его.

А) На промежутке $(-\infty; -1)$ верны равенства

$$|x - 1| = -x + 1 \text{ и } |x + 1| = -x - 1,$$

и наше неравенство примет вид: $-2x < 4$, откуда $x > -2$.

Учитывая данный промежуток, получаем решение исходного неравенства на этом промежутке: $-2 < x < -1$.

Б) На промежутке $[-1; 1]$ верны равенства

$$|x - 1| = -x + 1 \text{ и } |x + 1| = x + 1,$$

поэтому наше неравенство равносильно верному числовому неравенству $2 < 4$, значит, все значения переменной, принадлежащие этому отрезку, входят в множество решений.

В) На промежутке $(1; +\infty)$ верны равенства

$$|x - 1| = x - 1 \text{ и } |x + 1| = x + 1,$$

поэтому получаем, что наше неравенство равносильно линейному неравенству $2x < 4$, откуда $x < 2$.

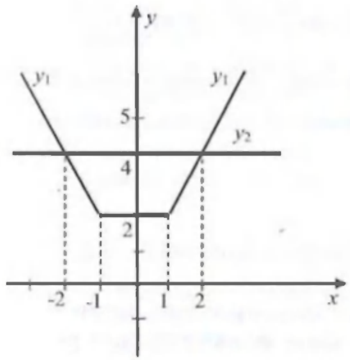



Рис. 29

Учитывая данный промежуток, получаем решение исходного неравенства на этом промежутке: $1 < x < 2$. Объединяя полученные результаты, делаем вывод: неравенству удовлетворяют все значения переменной из интервала $-2 < x < 2$ и только они.

О т в е т: $-2 < x < 2$.

***II. Графический метод***

1. Построим в одной системе координат графики функций $y_1 = |x - 1| + |x + 1|$ и $y_2 = 4$. Построение графика функции $y_1$ выполняем отдельно на каждом из промежутков $(-\infty; -1)$, $[-1; 1]$ и $(1; +\infty)$ (рис. 29). На промежутке $(-\infty; -1)$ это будет график функции

$y = -2x$, соответственно, на двух других промежутках $y = 2$ и $y = 2x$.
На интервале $-2 < x < 2$ график функции $y_1$ расположен **под графиком** функции $y_2$, т. е. неравенство $y_2 < 4$ справедливо.

Ответ: $-2 < x < 2$.

Можно было бы решить данное неравенство графически, преобразовав его сначала к виду:

$$|x - 1| < -|x + 1| + 4.$$

Рассмотрим случай, когда неравенство, содержащее модуль, выполняется при любом значении $x$.

Пример 25. Решить неравенство $|2x - 1| > |x + 1| - 2$.

Решение. ***I. Алгебраический метод***

1. Разобьем всю числовую прямую на три промежутка: $(-\infty; -1)$, $[-1; \frac{1}{2}]$ и $(\frac{1}{2}; +\infty)$. На каждом из этих промежутков запишем данное неравенство без модуля и решим его.

А) На промежутке $(-\infty; -1)$ верны равенства

$$|2x - 1| = -2x + 1 \text{ и } |x + 1| = -x - 1,$$

и наше неравенство примет вид: $-2x + 1 > -x - 1 - 2$, откуда $x < 4$.

Учитывая данный промежуток, получаем решение исходного неравенства на этом промежутке: $x < -1$.

Б) На промежутке $[-1; \frac{1}{2}]$ верны равенства

$$|2x - 1| = -2x + 1 \text{ и } |x + 1| = x + 1,$$

поэтому наше неравенство равносильно неравенству: $-2x + 1 > x + 1 - 2$, откуда $x < \frac{2}{3}$, тогда решением неравенства будет данный промежуток $-1 < x < \frac{1}{2}$.

В) На промежутке $(\frac{1}{2}; +\infty)$ верны равенства

$$|2x - 1| = 2x - 1 \text{ и } |x + 1| = x + 1,$$

поэтому получаем, что наше неравенство равносильно неравенству: $2x - 1 > x - 1$, откуда $x > 0$.

Учитывая данный промежуток, получаем решение исходного неравенства на этом промежутке: $x > \frac{1}{2}$. Объединяя полученные результаты, делаем вывод: неравенству удовлетворяет любое число $x$.

Ответ: $x$ – любое.

***II. Графический метод***

1. Построим в одной системе координат графики функций $y_1 = |2x - 1|$ и $y_2 = |x + 1| - 2$ (рис. 30).

2. Геометрически решить данное неравенство – это значит, найти те значения $x$, при которых график функции $y_1$ расположен **не ниже** графика функции $y_2$, то есть **над** графиком или **на** графике функции $y_2$.



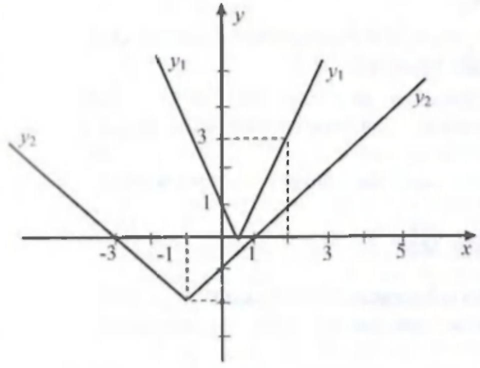



Рис. 30

Из рисунка видно, что график функции $y_1$ всегда расположен **выше** графика функции $y_2$, поэтому неравенство выполняется при любом значении $x$.

Таким образом, рассмотренные примеры позволяют сделать следующие **выводы**:

1. Интеграция алгебраического и графического методов решения уравнений и неравенств с одной переменной, систем уравнений с двумя переменными имеет большое значение в плане повышения качества знаний учащихся и одновременного развития всех трёх компонентов их математических способностей (алгебраического, логического и геометрического).

2. Графический метод позволяет обучать учащихся геометрическому моделированию при решении уравнений, неравенств и их систем. При этом выполняются все три этапа математического моделирования: 1) построение геометрической модели задачи (т. е. перевод уравнения, неравенства, системы уравнений или неравенств на геометрический язык); 2) решение уравнения, неравенства, системы уравнений (неравенств) на геометрическом языке; 3) интерпретация (т. е. перевод полученного решения с геометрического языка на алгебраический).

3. Графический метод в ряде случаев является единственным средством приближенного решения уравнений и систем уравнений, в других – он дает возможность наиболее просто определить количество действительных решений, найти промежутки, в которых лежат искомые корни, определить их приближенные численные значения. Задания такого типа часто встречаются в части «С» заданий единого государственного экзамена.

4. Применение наряду с алгебраическим графического метода в школе имеет и воспитательное значение – построение графиков приучает учащихся к самостоятельности в работе (списать решение уже трудно), к точности, аккуратности.

5. Графический метод способствует эстетическому воспитанию школьников, прививает вкус к изящным, красивым решениям алгебраических задач.

### *Вопросы и задания*

1. Как трактуется понятие уравнения в 5-6-х классах?
2. Как решаются уравнения в 5 классе (в 6 классе)?
3. Какие уравнения изучаются в 7 классе и на чем основан метод их решения?

4. Какие существуют подходы к изучению линейных уравнений с одной переменной (с одним неизвестным)?

5. Какие типы уравнений изучаются в 8-9 классах? Опишите способы их решения. Приведите соответствующие примеры.

6. Как вводится понятие системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными? Каковы особенности изучения этой темы в школьном курсе математики?

7. Опишите методику введения понятия квадратного уравнения и алгоритм его решения.

8. Как представлен вывод формулы корней квадратного уравнения в учебниках алгебры разных авторов?

9. Назовите особенности изучения неравенств в школьном курсе математики.

10. Опишите методику введения понятия линейного неравенства с одним неизвестным.

11.Что понимается под интеграцией алгебраического и геометрического методов решения задач?

12. Каков алгоритм построения параболы при решении квадратного уравнения (или неравенства) графическим методом? Приведите примеры.

13. Какие существуют способы решения квадратного уравнения (или неравенства) графическим методом? Приведите примеры.

14. Какое уравнение называется иррациональным? Как можно мотивировать введение понятия иррационального уравнения?

15. Назовите алгебраические методы решения иррациональных уравнений. Какой из них наиболее часто используется в школьной практике?

16. Составьте (подберите из учебников) 2-3 уравнения или неравенства с модулем и решите каждое из них алгебраическим и графическим методами.

17. Какие умения необходимы учащимся для овладения ими графическим методом решения уравнений (неравенств), содержащих модуль?

**Рекомендуемая литература**


1. Автономова, Т. В. Практикум по методике преподавания математики в средней школе:Учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Т. В. Автономова, С. Б. Верченко, В. А. Гусев и др.; Под ред. В. И. Мишина. – М. : Просвещение, 1993. – 192 с.
2. Далингер, В. А. Геометрия помогает алгебре / В. А. Далингер // Математика в школе. – 1996. – № 4. – С. 29 – 34.
3. Далингер, В. А. Методика обучения математике. Когнитивно-визуальный подход : учебник для академического бакалавриата / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 340 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-00920-0.
4. Далингер, В. А. Методика обучения математике. Поисково-исследовательская деятельность учащихся : учебник и практикум для вузов / В. А. Далингер – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 460 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-00450-2.
5. Звавич, Л. И. Тригонометрические уравнения / Л. И. Звавич, Б. И. Пигарев // Математика в школе. – 1995. – № 2 и № 3. – С. 18 – 27.





6. Иванова, Т. А. Современный урок математики: теория, технология, практика : Книга для учителя. – Н. Новгород : НГПУ, 2010. – 288 с.
7. Канкаева, Л. С. Интеграция алгебраического и геометрического методов при обучении математике в школе: учеб. пособие для студ. мат. спец. пед. вузов / Л. С. Канкаева. – Саранск, 2003. – 179 с.
8. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики: Учеб. пособие для студентов физ.-мат. спец. пед. ин-тов / Е. И. Лященко, К. В. Зобкова, Т. Ф. Кириченко и др.; Под ред. Е. И. Лященко. – М. : Просвещение, 1988. – 223 с.
9. Методика обучения математике в 2 ч. Часть 2 : учебник для академического бакалавриата / Н. С. Подходова, [и др.]; под ред. Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 299 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-9916-7002-9.
10. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под научн. ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. – М. : Дрофа, 2005. – 416 с.
11. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. /А. Я. Блох, В. А. Гусев, Г. В. Дорофеев и др.; Сост. В. И. Мишин. – М. : Просвещение, 1987. – 416 с.
12. Моденов, В. П. Грани математики: координатно-параметрический метод / В. П. Моденов. - М. : Издат. отдел УНЦ ДО МГУ, 1999. – 64 с.
13. Мордкович, А. Г. Математика в школе – новые задачи, новые концепции, новые учебники / А. Г. Мордкович // Модернизация школьного математического образования и проблемы подготовки учителя математики: Труды XXI Всероссийского семинара препод. математики ун-тов и пед. вузов. – СПб.: Изд-во РГПУ им. А. И. Герцена, 2002. – С. 3-12.
14. Петерсон, Л. Г. Математика: 3 класс: в 3-х ч. Ч. 1. – М.: Изд-во «Баласс», 2014. – 112 с.
15. Саранцев, Г. И. Упражнения в обучении математике / Г. И. Саранцев. – М. : Просвещение, 2005. – 255 с.
16. Темербекова, А. А. Методика обучения математике : учеб. пособие / А. А. Темербекова, И. В. Чугунова, Г. А. Байгонакова. – СПб. : Лань, 2015. – 510 с.
17. Школьные учебники по алгебре, алгебре и началам математического анализа (см. лекцию № 2).
18. http://www.allmath.ru/
19. http://www.erudition.ru/referat/ref/id.34302_1.html
20. http://www.nztest.ru/abstracts/?idabstract=30
21. http://www.bibliofond.ru/view.aspx?id=5625

Лекция V

# МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ РЕШЕНИЮ ТЕКСТОВЫХ ЗАДАЧ

1. Цели обучения решению текстовых задач.

 а) понятие текстовой задачи и её основные компоненты;

 б) методы решения текстовых задач и их интеграция.

2. Пропедевтика алгебраического и геометрического методов решения текстовых задач.

3. Этапы решения задач на составление уравнений и их реализация.

---

## 1. Цели обучения решению текстовых задач

Среди всех задач в школьном курсе математики особое место занимают текстовые задачи. Они являются прекрасным дидактическим и развивающим средством, помогают осуществлять связь обучения с жизнью, способствуют усвоению математических понятий и установлению внутрипредметных и межпредметных связей, развивают мышление, память, воображение, смекалку ученика и т. д., но, главное, они позволяют показать учащимся процесс использования математики при решении задач, возникающих в действительности, то есть познакомить их с ***математическим моделированием***. Представления о моделировании имеют для учащихся общекультурную и общеобразовательную ценность. Поэтому формирование умений решать текстовые задачи всегда было и остается одной из главных задач учителя математики.

**а) Понятие текстовой задачи и её основные компоненты.** Методике обучения решению текстовых задач посвящено много разных работ. Текстовые задачи все авторы трактуют аналогично, как математические задачи, в которых есть хотя бы один объект, являющийся реальным предметом. Такие задачи называют ещё сюжетными, практическими, арифметическими и т. д. Перечисленные названия берут начало от способа записи (задача представлена в виде текста), сюжета (описываются реальные объекты, явления, события), характера математических выкладок (устанавливаются количественные отношения между значениями некоторых величин, связанные чаще всего с вычислениями). Сюжетную задачу определяют и как такую задачу, в которой данные и связь между ними включены в фабулу. В последнее время наиболее распространенным является термин «текстовая задача».

Текстовая задача представляет собой *словесную модель* ситуации, явления, процесса и т.п. Как в любой модели, в текстовой задаче описывается не всё событие или явление, а лишь его количественные и функциональные характеристики.

В каждой текстовой задаче можно выделить:

1) *числовые значения величин*, которые называются *данными*, или *известными* (их должно быть не меньше двух);

2) некоторую *систему функциональных зависимостей* в неявной форме, взаимно связывающих искомое с данными и данные между собой;

3) *требование* или *вопрос*, на который надо найти ответ.

Числовые значения величин и существующие между ними зависимости, т.е. количественные и качественные характеристики объектов задачи и отношений между ними, называют ***условием*** (или ***условиями***) ***задачи***. В задаче обычно не одно, а несколько условий, которые называют элементарными.

Требования могут быть сформулированы как в вопросительной, так и в повествовательной форме, их также может быть несколько. Величину, значения которой требуется найти, называют ***искомой величиной***, а числовые значения искомых величин – ***искомыми***, или ***неизвестными***.

Основная особенность текстовых задач и трудность в решении состоит в том, что в них не указывается прямо, какое именно действие (или действия) должно быть выполнено для получения ответа на требование задачи, так, например, не существует «правила» составления уравнения по условию задачи. Ответ на требование задачи получается в результате её *решения*. «*Решить математическую задачу*, по словам Л.М. Фридмана, – *это значит найти такую последовательность общих положений математики* (определений, аксиом, теорем, правил, законов, формул), *применяя которые к условиям задачи или к их следствиям* (промежуточным результатам решения), *получаем то, что требуется в задаче, – её ответ*» [17, с. 27].

**б) Методы решения текстовых задач и их интеграция.** Существуют различные методы решения текстовых задач: арифметический, алгебраический, геометрический, логический, практический и др. В основе каждого метода лежат различные виды математических моделей. Например, при алгебраическом методе решения задачи составляются уравнения или неравенства, при геометрическом – строятся диаграммы или графики. Решение задачи логическим методом начинается с составления алгоритма.

Дадим краткую характеристику первых трёх методов решения текстовых задач, которые наиболее часто встречаются в школьном курсе математики.

1. ***Арифметический метод.*** Решить задачу арифметическим методом – значит найти ответ на требование задачи посредством выполнения *арифметических действий над числами*. Одну и ту же задачу во многих случаях можно решить различными арифметическими способами. Задача считается решенной различными способами, если её решения отличаются связями между данными и искомыми, положенными в основу решений, или последовательностью использования этих связей.

2. ***Алгебраический метод.*** В науке данный метод трактуется как метод буквенных вычислений. Решить задачу алгебраическим методом – это значит

найти ответ на требование задачи, *составив и решив уравнение или систему уравнений (или неравенств).* Одну и ту же задачу можно также решить различными алгебраическими способами. Задача считается решенной различными способами, если для ее решения составлены различные уравнения или системы уравнений (неравенств), в основе составления которых лежат различные соотношения между данными и искомыми.

3. ***Геометрический метод.*** Он состоит в том, что логическое доказательство или решение задачи направляется наглядным представлением, иногда доказательство или решение видно из наглядной картины. *Под геометрическим методом решения текстовых алгебраических задач будем понимать в дальнейшем метод решения, заключающийся в использовании геометрических представлений (изображений), законов геометрии и элементов аналитических методов (уравнений (неравенств), систем уравнений, арифметических выражений и др.).*

Решение любой текстовой задачи ученик должен начинать с рисунка или наглядного описания, вместе с рисунком должно идти точное понимание ситуации, описанной в задаче. Ещё Г. Галилей писал: «Геометрия является самым могущественным средством для изощрения наших умственных способностей и даст нам возможность правильно мыслить и рассуждать».

Геометрические представления возникают на основе геометрических знаний и геометрической интуиции. Геометрическое представление условия текстовой задачи будем называть ***геометрической моделью этой задачи***. Построение и использование геометрических моделей в процессе решения текстовых алгебраических задач основаны на законах геометрии. Отсюда и название ***«геометрический метод»***.

Проанализируем подробнее понятие «геометрический метод решения алгебраических задач». Традиционно под геометрическим методом решения задач в курсе алгебры понимали только конструктивный прием, когда решение выполнялось с помощью точных построений, и ответ задачи получали прямо с чертежа. Это ограничивало возможности использования геометрических представлений, в частности, при решении текстовых задач. Мы будем понимать геометрический метод более широко, как метод, состоящий из двух приемов: ***конструктивного*** и ***конструктивно-аналитического*** (рис. 31). ***Конструктивный прием*** предполагает выполнение всех построений чертежными инструментами на миллиметровой бумаге или бумаге в клетку с использованием масштаба. Ответ задачи получается обычно приближённый, но приемлемый для практических целей, и находится он путем измерений длин отрезков или других элементов чертежа.

***Конструктивно-аналитический приём*** позволяет выполнять чертёж схематически, от руки. Решение задачи в этом случае осуществляется аналитически: либо арифметическим путём с использованием чертежа, либо путем составления уравнения, которое основывается на точных геометрических соотношениях (равенства, подобия, равновеликости и др.)



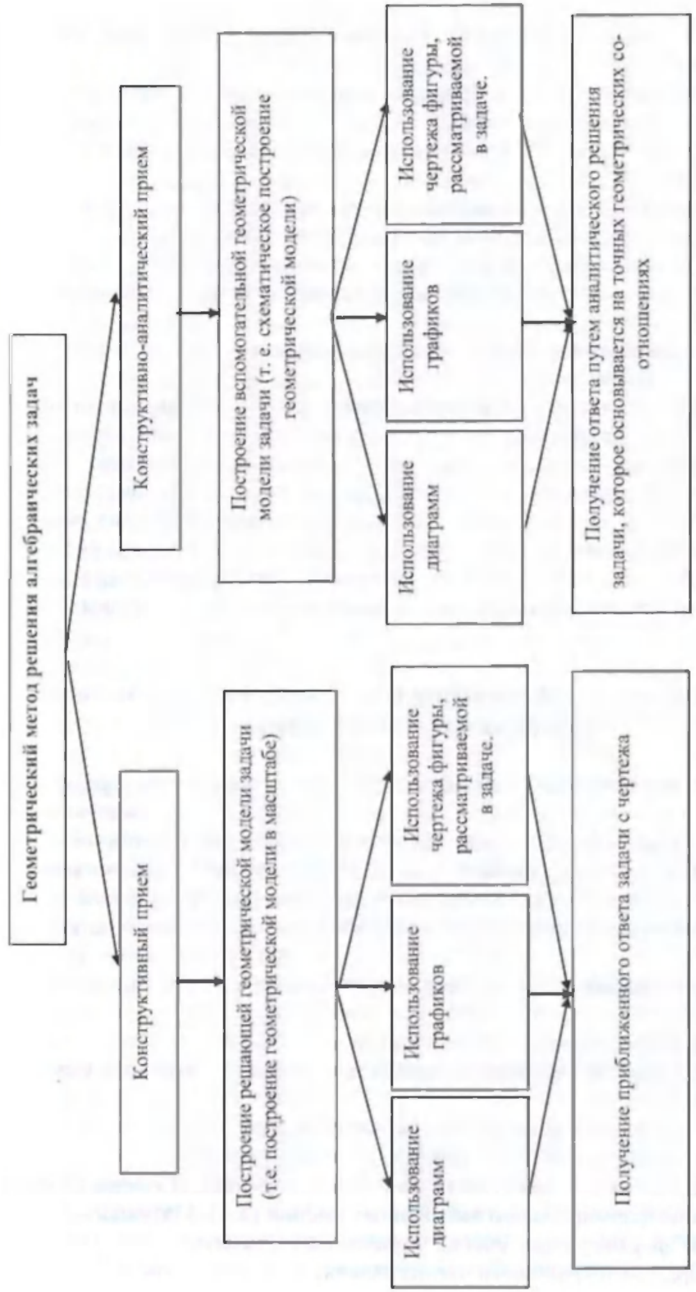



Рис. 31

Таким образом, для решения алгебраической задачи геометрическим методом необходимо:

1) построить геометрическую модель задачи: решающую или вспомогательную (геометрическая модель задачи называется *решающей*, если она позволяет получить ответ задачи без аналитических выкладок, в противном случае – *вспомогательной*).

2) найти ответ задачи: если модель решающая, то ответ «снимаем» с чертежа, в случае вспомогательной геометрической модели надо:

а) составить числовое выражение или уравнение (систему уравнений), неравенство (систему неравенств), используя геометрические соотношения полученных фигур;

б) найти значение числового выражения или решения уравнения, неравенства (системы уравнений или неравенств);

в) исследовать полученные решения: выяснить, удовлетворяют ли корни уравнения (системы уравнений), решения неравенства (системы неравенств) условию и требованию задачи, исчерпывают ли они все решения задачи и т.д.

Для обучения учащихся алгебраическому и геометрическому методам решения текстовых задач необходима специальная ***пропедевтическая работа***. Такая работа осуществляется в основном 5-6-х классах (в 1-4-х классах задачи решаются арифметическим способом). Различные приемы интеграции алгебраического и геометрического методов в процессе решения текстовых задач рассмотрим позже.

## 2. Пропедевтика алгебраического и геометрического методов решения текстовых задач

Выделяют два основных этапа пропедевтической работы. *На первом этапе* задача учителя состоит в том, чтобы систематически и целенаправленно формировать у учащихся некоторые важные общеучебные и математические навыки. *На втором этапе* основное внимание должно быть уделено выявлению зависимостей между величинами, входящими в текст задачи, и обучение переводу этих зависимостей на математический язык. Остановимся на каждом этапе подробнее.

***I этап пропедевтики.*** Здесь необходимо сформировать у учащихся следующие умения:

1) умение внимательно читать текст задачи;

2) умение проводить первичный анализ текста задачи – выделять условие и вопрос задачи;

3) умение оформлять краткую запись текста задачи;

4) умение выполнять чертежи (рисунки) по тексту задачи.

В методике обучения математике разработаны соответствующие приемы работы учителя по формированию выделенных умений (З. П. Матушкина).

1. *Приемы, формирующие умение читать текст задачи.*

- показ образцов правильного чтения задачи;



- проведение специальной работы над текстом задачи по усвоению её содержания: различные формы предъявления задачи: текстом, краткой записью, рисунком. Сюда включаются также приемы работы над усвоением содержания задачи: изменение числовых данных задачи; изменение сюжета задачи; изменение сюжета и числовых данных.

2. *Приемы, формирующие умения выделять условие и вопрос задачи:*

- выявление роли вопроса в нахождении способа решения задачи; обращение внимания на точность, ясность формулировки вопроса задачи; переформулировка вопроса задачи. Этот прием направлен на воспитание у учащихся потребности выделять условие и вопрос задачи;
- формулирование одного или нескольких вопросов к условию задачи;
- нахождение необходимых данных для ответа на вопрос задачи;
- составление задачи по вопросу.

3. *Приемы обучения оформлению краткой записи текста задачи:*
- оформление краткой записи в виде таблицы, схемы;
- оформление краткой записи в строку (столбец);
- чтение краткой записи задачи;
- составление задачи по её краткой записи.

4. *Приемы обучения выполнению чертежей (рисунков) по тексту задачи.*
Основные из них следующие:
- предъявление заданий, требующих только выполнения рисунка;
- чтение рисунка, выполненного по тексту задачи;
- составление задачи по рисунку или чертежу.

К выполнению чертежей предъявляются требования: они должны быть наглядными, четкими, соответствовать тексту задачи; на них должны быть отражены по возможности все данные, входящие в условие задачи; выделенные на них данные и искомые должны соответствовать условию задачи и общепринятым обозначениям.

Формирование умения выполнять чертёж будет успешным, если учащиеся будут уметь читать чертёж. В связи с этим очень важно научить составлять текст задачи по чертежу, рисунку. В результате выполнения таких упражнений формируются навыки перевода графических данных на словесный текст.

***II этап пропедевтики.*** Важным здесь является обучение пониманию учащимися способов словесного выражения изменения величин и фиксация их в виде математических выражений или уравнений. Достигается это с помощью соответствующих упражнений. Например, при изучении действий умножения натуральных чисел в 5 классе учащиеся рассматривают одно из применений умножения – увеличение числа в несколько раз. Здесь возможны упражнения:

1) Отец старше сына в 4 раза. Сколько лет отцу, если сыну $m$ лет? ($4m$.)

2) На первых двух полках стоит по $n$ книг на каждой, а на третьей – $m$ книг. Сколько книг на трёх полках? ($2n + m$.)

3) Сравните $a$ и $c$, если $a = 5c$. ($a$ больше $c$ в 5 р. или $c$ меньше $a$ в 5 р.).

4) Составьте равенство, исходя из условия: $x$ больше $y$ в $n$ раз. ($x = ny$.)

5) Составьте задачу по уравнению $2x = 28$. (Например, в корзине было нес-

колько грибов. После того как в неё добавили столько же, в ней стало 28 грибов. Сколько грибов было в корзине?)

Аналогичные упражнения могут быть предложены учащимся при изучении других арифметических действий.

В методике обучения решению задач предлагаются также другие системы упражнений для достижения поставленной цели. Например, рассматриваются конкретные текстовые задачи и после прочтения их текстов учащимся предлагается ответить на вопросы. Приведем примеры.

Задача 1. Теплоход «Метеор» за час проходит расстояние в 5 раз большее, чем катер. Сколько км в час проходит каждый из них, если сумма их скоростей равна 90 км/ч?

Задания. 1) Назовите величины, которые связаны зависимостями: а) одна больше другой в 5 раз; б) одна меньше другой в 5 раз; 2) Если катер проходит $x$ км/ч, то как можно истолковать выражения $5x$; $5x + x$? Значение какой величины известно по условию задачи?

Задача 2. На школьной математической олимпиаде было предложено 8 задач. За каждую решенную задачу засчитывалось 5 очков, а за каждую нерешенную задачу списывалось 3 очка. Сколько задач правильно решил ученик, если он получил 24 очка?

Задание. Установите, к решению каких из приведенных уравнений сводится решение предложенной задачи:

а) $5x - 3(8 - x) = 24$; в) $5(8 - x) - 3x = 24$; д) $3y = 24$;
б) $5x = 24$; г) $5x - 3(8 + x) = 24$; е) $5x + 3(8 - x) = 24$.

Задания к задачам не требуют решения исходных задач. Первая группа задач направлена на формирование умения видеть всевозможные зависимости между величинами, входящими в задачу; вторая группа формирует умение видеть в математическом выражении или формуле определенное содержание, т. е. математическую модель.

Текстовые задачи в 5-6-х классах и методы их решения имеют важное методическое значение. Прочное усвоение методов решения «чисто арифметических» задач позволяет подготовить учащихся к осознанному решению задач алгебраическим и геометрическим методами.

Программа по математике средней школы предусматривает в 5-6-х классах решение (наряду с известными типами задач) *основных задач на проценты, на дроби и на составление пропорций.*

В 5 классе изучаются 3 основные задачи на проценты: а) нахождение процентов числа; б) нахождение числа по данному числу его процентов и в) нахождение процентного отношения двух чисел. Однако эти виды задач не выделяются, так как в качестве основного способа решения задач на проценты принят *способ приведения к единице.* Он имеет преимущества:

1) проще для выполнения вычислений;

2) приучает учащихся выделять число, принимаемое за 100%;

3) не требует запоминания правил решения того или иного вида задач на проценты, а основан на рассуждениях.



По учебнику Н. Я. Виленкина предлагается решать некоторые задачи на проценты с помощью уравнений. Эти рекомендации относятся к двум видам задач: нахождение числа по данному числу его процентов и нахождение процентного отношения двух чисел. Примеры этих задач и образцы их решения мы рассмотрим на практических занятиях.

В 6 классе изучаются две основные задачи на дроби: а) нахождение дроби числа; б) нахождение числа по данному значению его дроби. Основным способом решения этих задач является способ приведения к единице, выраженный правилами:

– чтобы найти дробь от числа, нужно число умножить на эту дробь;

– чтобы найти число по данному значению его дроби, надо это значение разделить на дробь.

Решение задач с помощью пропорций в 6 классе предусматривает использование понятий *«прямая пропорциональность»* или *«обратная пропорциональность»*. Поэтому необходимо учить учащихся кратко записывать условие задачи так, чтобы соответствующие однородные величины записывались столбиком друг под другом. Это позволит учащимся увидеть, какие отношения каждой пары положительных чисел равны.

В целом у учащихся 5-6-х классов должны быть сформированы умения составлять числовые и буквенные выражения, пропорции, линейные уравнения по условиям текстовых задач, решать задачи с помощью арифметических приемов (способов) и уравнений.

Любая текстовая задача, сводящаяся к уравнению первой степени, может быть решена арифметическим способом. Поэтому сопоставление арифметического и алгебраического способов решения текстовых задач в процессе формирования умений решать эти задачи будет способствовать повышению интереса учащихся к решению задач, а также накоплению ими опыта самостоятельного поиска решений.

## 3. Этапы решения задач на составление уравнений и их реализация

В методике математики общепринято следующее деление процесса решения задач: 1) анализ текста задачи; 2) поиск способа решения задачи и составление плана решения; 3) осуществление найденного плана; 4) изучение (анализ) найденного решения.

Выделенные этапы представляют норму деятельности человека по решению задач. Однако в реальном процессе решения необязательно явным образом проходить через все указанные этапы. Это зависит от того, насколько решающему известен способ решения задачи. Каждый этап имеет свои признаки (ориентиры), руководствуясь которыми учитель формирует у учащихся компоненты общего умения решать задачи.

На ***первом этапе*** учитель должен добиться того, чтобы учащиеся «приняли» задачу, то есть поняли её смысл, сделав целью своей деятельности. В этом случае задача становится объектом мышления. Поэтому усвоение текста задачи учащимися будет первой важной целью учителя.

Исходным здесь является *выделение в задаче условия*, то есть данных и отношений между ними, и *требования задачи*, то есть искомого (искомых) и отношений между ними. Затем выявляется в задаче *основное отношение*, направляющее процесс поиска решения. Это отношение обычно имеет вид функциональной зависимости двух типов: $a \cdot b = c$ и $a_1 + a_2 = a_3$.

Важное значение на этом этапе имеют краткая запись текста задачи, составление схем, рисунков. Схемы и рисунки выступают в роли наглядного представления содержания задачи и зависимостей величин, входящих в неё. Ещё большее значение приобретает схема в роли *модели, выявляющей скрытые зависимости* между величинами. Поэтому составлению кратких записей и схем по тексту задачи необходимо специально обучать.

На первом этапе решения необходимо также *актуализировать «базис» решения задачи*, то есть теоретическую и практическую основу, необходимую для обоснования решения. Здесь же выясняется, не принадлежит ли задача к известному типу задач.

На ***втором этапе*** процесса решения задачи выясняется *стратегия решения*:

1) устанавливается, будет ли неизвестным, относительно которого составляется уравнение, искомая величина или же промежуточная величина (если находят сначала промежуточную величину, то искомая величина выражается через нее);

2) выясняется, для каких величин соответствующие выражения будут приравниваться.

Затем осуществляется *поиск способа решения задачи на основе построения модели поиска*. Аналитико-синтетический поиск решения заканчивается получением уравнения. Соответствующий план решения обсуждается с учащимися, при этом используется табличная запись поиска решения задачи. Иногда план как способ решения задачи оформляется письменно. В этом он выполняет роль ориентировочной основы деятельности учащегося.

На ***третьем этапе*** осуществляется найденный план решения, выполняется проверка решения и записывается полученный ответ.

***Четвертый этап*** – изучение (анализ) найденного решения задачи. На этом этапе выделяется главная идея решения, существенные его моменты, происходит обобщение решения задач данного типа. Выясняются недостатки решения и производится поиск другого, более рационального решения, выявляются и закрепляются в памяти учащихся приемы, которые были использованы в процессе решения задачи. Перед учащимися ставятся вопросы:

1) Какова главная идея решения данной задачи?

2) Нельзя ли указать другие способы решения данной задачи?

3) Почему рассмотренный способ решения является рациональным? И т.д.

***Формы записи решения***

1) Развернутая, когда решение оформляется в виде связного рассказа.

2) Запись-перечень, когда дается перечень величин, выраженных через



неизвестное, и рядом пояснение, что обозначает каждая величина и на основе чего составляется уравнение; эта запись включает в себя и решение уравнения.

3) Табличная, когда решение задачи оформляется в виде таблицы.

Раскроем методику обучения решению текстовых задач на примерах.

**I. Задачи на составление уравнений первой степени**

***З а д а ч а 1. (основное отношение $a_1 + a_2 = a_3$)***

*В первом элеваторе было зерна в 2 раза больше, чем во втором. Когда из первого элеватора вывезли 750 т зерна, а во второй привезли 350 т, зерна в обоих элеваторах стало поровну. Сколько тонн зерна было первоначально в каждом элеваторе?*

***I этап*** (анализ текста задачи) реализуется путем ответа на вопросы:

1) Сколько ситуаций рассматривается в задаче?

2) Сколько зерна было в первом элеваторе?

3) Сколько зерна было во втором элеваторе?

4) Сколько зерна вывезли из первого элеватора (привезли на 2-й элеватор?

5) Сколько зерна стало в обоих элеваторах?

6) Что требуется узнать в задаче?

Итогом первого этапа работы над задачей является запись текста задачи. Она может быть оформлена в виде таблицы 2. Умение ученика оформить соответствующую таблицу говорит о том, принял он задачу или нет. Как уже отмечалось, существуют и другие формы записи, см. [1].

Таблица 2

| Количество зерна, т | I элеватор | II элеватор |
|---|---|---|
| Сначала | ? | ? |
| Потом | ? - 750 | ? + 350 |

***II этап*** (поиск способа решения задачи и составление плана решения).

Здесь обсуждается стратегия решения. Затем вводится обозначение искомой или другой неизвестной величины в зависимости от стратегии.

Пусть $x$ т – количество зерна, которое было во втором элеваторе, тогда модель поиска решения задачи в виде таблицы примет вид:

Таблица 3

| Количество зерна, т | I элеватор | II элеватор |
|---|---|---|
| Сначала | $2x$ | $x$ |
| Потом | $2x - 750$ | $x + 350$ |

***III этап*** (осуществление найденного плана решения). После построения таблицы 2 делаем пояснение:

Так как в задаче сказано, что в обоих элеваторах зерна стало поровну, то можно составить уравнение:

$$2x - 750 = x + 350,$$
$$x = 1100.$$

О т в е т: в I элеваторе было 2200 т, во II элеваторе – 1100 т.

***IV этап*** (изучение (анализ) найденного решения). На этом этапе можно решить данную задачу с помощью линейной диаграммы. Проиллюстрируем, как реализуются этапы решения задачи в этом случае.

***I этап*** (построение линейной диаграммы). После прочтения текста задачи обсуждаются следующие вопросы (самими учащимися или с помощью учителя):

1) Сколько ситуаций рассматривается в задаче? (Две: первоначальная и конечная.)

2) С какой ситуации следует начать построение линейной диаграммы? (Можно начать построение с первой ситуации и от неё перейти ко второй, а можно сначала построить линейную диаграмму конечной ситуации и перейти от нее к первоначальной. Рассмотрим первый вариант построения линейной диаграммы.)

3) Что будет представлять собой линейная диаграмма первоначальной ситуации? (Два отрезка, один из которых в 2 раза больше другого. Первый отрезок будет изображать количество зерна в первом элеваторе, а второй - во втором.)

После этого учащиеся строят диаграмму первоначальной ситуации. Затем рассуждения продолжаются.

4) Как перейти на диаграмме от первой ситуации ко второй? (Надо из первого отрезка вычесть отрезок, условно изображающий 750 т, а ко второму отрезку прибавить отрезок, изображающий 350 т.)

5) Произвольно ли берутся эти отрезки? (Нет, следует учитывать, что вновь полученные отрезки должны быть равны, так как на обоих элеваторах зерна стало поровну.)

Выполнив действия с отрезками, учащиеся получают диаграмму конечной ситуации. Первый этап работы над задачей заканчивается обозначением отрезков и оформлением записей на чертеже.

***II этап*** (решение получившейся геометрической задачи.)

Построенная линейная диаграмма превращает алгебраическую задачу в геометрическую, решение которой основано на использовании свойств длины отрезка, а именно: 1) равные отрезки имеют равные длины; меньший отрезок имеет меньшую длину; 2) если точка делит отрезок на два отрезка, то длина всего отрезка равна сумме длин этих двух отрезков.

Решение учащиеся записывают на геометрическом языке, используя обозначения отрезков, а результат переводят на естественный язык. В данном случае этот перевод осуществляется автоматически за счет переноса терминологии (***III этап***). Вначале следует делать подробную запись решения с указанием того, что изображает каждый отрезок. Постепенно можно переходить к краткой записи, так как некоторые факты видны на чертеже.

Приведем подробную запись решения задачи 1.

Р е ш е н и е

***I этап.*** Пусть отрезок $AB$ изображает количество зерна в первом элеваторе (рис. 32), тогда отрезок $CD$ $\left(CD = \frac{1}{2} AB\right)$ будет изображать количество зерна во втором элеваторе.



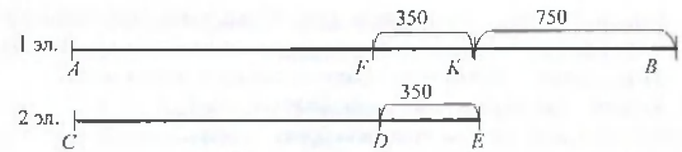



Рис. 32

$AB = 2CD$ - первоначальное распределение зерна между элеваторами. Из первого элеватора вывезли 750 т зерна, а на второй элеватор привезли 350 т, поэтому вычтем из отрезка $AB$ отрезок $BK$, условно изображающий 750 т, а к отрезку $CD$ прибавим отрезок $DE$, изображающий 350 т. (Отрезки $BK$ и $DE$ берем не произвольно, а такие, чтобы отрезки $AK$ и $CE$ были равны.)

$AK = CE$ - конечное распределение зерна между элеваторами.

***II этап.* 1 способ.** $CD = AF = FB$ (по построению), $FB = FK + KB = 350 + 750 = 1100$, значит, $CD = 1100$, $AB = 1100 \cdot 2 = 2200$.

О т в е т: в первом элеваторе было 2200 т зерна, во втором - 1100 т.

Учащиеся могут делать краткую запись решения задачи, например, она может быть такой:

Р е ш е н и е

$AB = 2CD$ - первоначальное распределение зерна между двумя элеваторами. $AB - BK = AK$, $CD + DE = CE$.

$AK = CE$ -конечное распределение зерна между элеваторами.

$CD = AF = FB$ (по построению), $FB = FK + KB$, $FB = 350 + 750 = 1100$, тогда $CD = 1100$, $AB = 1100 \cdot 2 = 2200$.

О т в е т: 2200 т, 1100 т.

Как видим, в данном случае ответ получили, не составляя уравнение.

Необходимо заметить, что диаграмма позволяет составить не только арифметическое выражение, но и различные уравнения к задаче, которые учащиеся не могут записать без чертежа. Таким образом, появляется возможность решить задачу алгебраически несколькими способами.

Приведем краткую запись других способов решения задачи 1.

**2 способ.** Пусть АК = СЕ = $x$, тогда, так как АВ = 2CD, получим:

$$x + 750 = 2(x - 350),$$

откуда $x = 1450$, CD = $1450 - 350 = 1000$, AB = $1100 \cdot 2 = 2200$.

О т в е т: 2200 т, 1100 т.

**3 способ.** Пусть CD = $x$, тогда AB = $2x$. Так как AK = CE, то имеем:

$$2x - 750 = x + 350.$$

(такое же уравнение получается при решении задачи без диаграммы.)

***З а д а ч а 2 (основное отношение $a \cdot b = c$).*** *По плану бригада должна была выполнить заказ за 10 дней. Но фактически она перевыполняла норму на 27 деталей в день и за 7 дней работы не только выполнила предусмотренное планом задание, но и изготовила сверх плана 54 детали. Сколько деталей в день должна была изготовлять бригада по плану?*

*I этап.* В ходе анализа текста задачи учащимся задаются вопросы:

1) За сколько дней бригада должна выполнить заказ по плану?
2) За сколько дней бригада фактически выполнила заказ?
3) Почему бригада выполнила заказ раньше?
4) Сколько деталей изготовила бригада сверх плана?
5) Какие величины содержатся в задаче?
6) Как связаны между собой эти величины?
7) Сколько различных ситуаций можно выделить в задаче?
8) Какие величины, входящие в условие и вопрос задачи, неизвестны?
9) Какая величина в задаче является искомой? И т.д.

В итоге учащиеся составляют таблицу 4.

Таблица 4

| Величины | По плану | Фактически |
|---|---|---|
| Производительность бригады, дет. в день | ? | ? на 27 |
| Время работы, дн. | 10 | 7 |
| Объем выполненной работы | ? | ? на 54 |

***II этап*** (поиск способа решения). Учащиеся выясняют здесь основное отношение: V = p · t, обозначают через $x$ искомую величину и составляют модель поиска решения в виде таблицы 5.

Таблица 5

| Величины | По плану | Фактически |
|---|---|---|
| Производительность бригады, дет. в день (p) | $x$ | $x$ + 27 на 27 |
| Время работы, дн. ($t_p$) | 10 | 7 |
| Объем выполненной работы ($V_p$) | $10x$ | $(x + 27) \cdot 7$ на 54 |

***III этап*** (осуществление плана решения)

Так как по условию задачи бригада за 7 дней работы не только выполнила задание, но и изготовила сверх плана 54 детали, то можно составить уравнение:

$$10x + 54 = (x + 27) \cdot 7,$$
$$10x + 54 = 7x + 189,$$
$$3x = 135,\ x = 45.$$

Решение задачи не может заканчиваться решением уравнения: необходимо проверить, удовлетворяет ли полученный корень уравнения условию и требованию задачи, то есть необходимо сделать проверку корня уравнения по смыслу задачи.

П р о в е р к а

$x = 45$ – положительное число,

$x + 27 = 45 + 27 = 72$ – положительное число,

$(x + 27) \cdot 7 = 72 \cdot 7 = 504$ – положительное число,

$10x = 10 \cdot 45 = 450$ – положительное число,



$504 - 450 = 54$ – положительное число, являющееся данным.

Следовательно, $x = 45$ удовлетворяет условию задачи, то есть является её решением.

О т в е т: бригада должна была изготовлять в день по плану 45 деталей.

***IV этап*** (изучение и анализ найденного решения). На этом этапе можно решить с учащимися задачу геометрическим методом с помощью двумерной диаграммы. Двумерная диаграмма может состоять из площади одного или нескольких прямоугольников (параллелограммов, треугольников, трапеций).

Р е ш е н и е

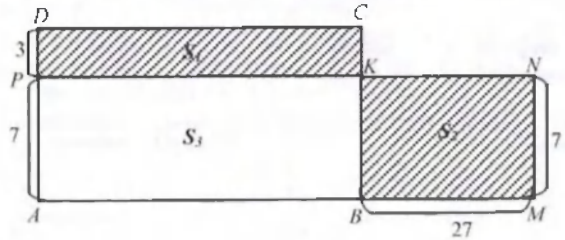



Рис. 33

Пусть отрезок $AB$ изображает производительность бригады в день по плану (рис. 33). $AD$ - срок выполнения заказа по плану, тогда $S_{ABCD}$ определяет весь заказ по выпуску деталей.

$AM$ изображает количество деталей, которое выпускала бригада ежедневно, $AP$ – срок выполнения заказа, тогда $S_{AMNP}$ соответствует количеству деталей, которое выпустила бригада за 7 дней.

По условию задачи бригада выпустила сверх плана 54 детали, поэтому имеем:

$S_1 + S_3 + 54 = S_3 + S_2$ или $S_1 + 54 = S_2$, но $S_2 = 27 \cdot 7 = 189$, поэтому $S_1 + 54 = 189$, откуда $S_1 = 135$.

С другой стороны, $S_1 = 3AB$, поэтому $3AB = 135$, тогда $AB = 45$.

О т в е т: бригада должна была изготовлять в день по плану 45 деталей.

(Подробно об использовании двумерных диаграмм при решении текстовых задач см. в работе [4].)

Одно из преимуществ геометрического метода состоит в наглядности.

Построение двумерной (или линейной) диаграммы и переход от одного её состояния к другому делает более осязаемым процесс, описываемый в задаче, и тем самым позволяет лучше понять её.

При решении задачи геометрическим методом учащиеся могут опираться на чертеж, использовать геометрические знания и умения. Иногда они могут решить задачу, даже не составляя уравнение, ответ бывает виден на чертеже. Геометрический метод решения задачи можно использовать в качестве проверки решения, полученного без чертежа, чисто алгебраически. (Более подробно о геометрическом методе решения текстовых задач и о методике обучения ему учащихся см. наши работы [5], [6], [7], [11] ).

***Задачи на составление уравнений второй степени***, в которых реализовано отношение $a \cdot b = c$, обладают той особенностью, что при одном и том же выбранном неизвестном они *допускают не менее двух различных путей поиска решения.* Этой особенностью не всегда обладают задачи на составление уравнений первой степени. Приведем один пример.

***З а д а ч а 3.*** *Спортивная площадка прямоугольной формы имеет площадь 840 $м^2$. Если длину площадки уменьшить на 5 м, а ширину увеличить на 4 м, то получится прямоугольник, равновеликий данному. Найти размеры спортивной площадки.*

Если $a$ – ширина, *м*, $b$ – длина, *м*, $c$ – площадь, $м^2$, то $a \cdot b = c$. Пусть $x$ *м* – ширина спортивной площадки, тогда модель поиска будет иметь вид:

Таблица 6

| Величины | Размеры площадки | |
|---|---|---|
| | I | II |
| Ширина, м | $x$ | $x+4$ на 4 |
| Длина, м | $\frac{840}{x}$ | $\frac{840}{x+4}$ на 5 |
| Площадь, $м^2$ | 840 | 840 |

Уравнение $\frac{840}{x} - 5 = \frac{840}{x+4}$ в данном случае получается путем сравнения двух выражений одной и той же величины (длины), являющейся вторым компонентом основного отношения $a \cdot b = c$.

При том же выбранном неизвестном уравнение можно составить путем сравнения двух выражений другой величины – площади, являющейся третьим компонентом основного отношения $a \cdot b = c$.

Таблица 7

| Величины | Размеры площадки | |
|---|---|---|
| | I | II |
| Ширина, м | $x$ | $x+4$ на 4 |
| Длина, м | $\frac{840}{x}$ | $\frac{840}{x} - 5$ на 5 |
| Площадь, $м^2$ | 840 | $(\frac{840}{x} - 5)(x+4)$ |

Уравнение будет иметь вид: $840 = (\frac{840}{x} - 5)(x+4)$.

Возможен и третий путь поиска решения. Если через $x$ м обозначить ширину площадки, а через $y$ м её длину, то модель поиска решения задачи приведет к системе уравнений:



$$\begin{cases} xy = 840, \\ (x+4)(y-5) = 840. \end{cases}$$

Эту же задачу можно решить и геометрическим методом с помощью двумерной диаграммы. Причем, геометрическая модель ее будет иметь такой же вид, как и в задаче 2, только, в отличие от первого случая, площади $S_1$ и $S_2$ будут равны. (Решите задачу геометрическим методом самостоятельно!)

Большие возможности в решении текстовых задач геометрическим методом представляет использование графиков равномерных процессов. Метод решения в этом случае называется графико-геометрическим. Приведем примеры.

***З а д а ч а 4.*** *С двух аэродромов навстречу друг другу вылетели одновременно два самолёта. К моменту встречи первый пролетел на 200 км больше второго. Остальной путь до аэродрома первый пролетел за 5/3 часа, а второй за 12/5 часа. Найти расстояние между аэродромами.*

I. ***Алгебраический метод*** решения задачи (без чертежа) приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} \frac{5x}{3y} = \frac{12y}{5x}, \\ \frac{12}{5}y - \frac{5}{3}x = 200, \end{cases}$$

где $x$ км/ч – скорость первого самолета, $y$ км/ч – скорость второго самолета.

II. Решим задачу ***графико-геометрическим методом.***

Рассмотрим две прямоугольные системы координат $xOy$ и $x'O'y'$ (рис. 34).

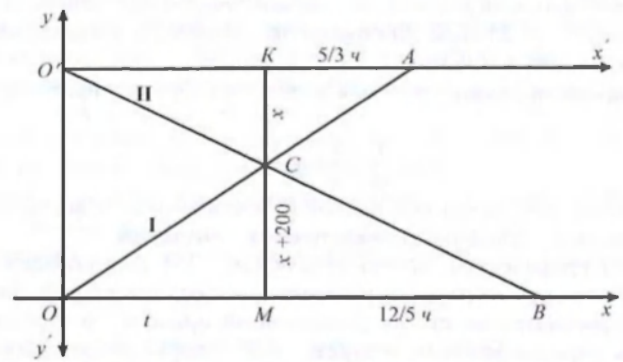



Рис. 34

$Ox$ и $O'x'$ - оси времени с одинаковыми масштабами. Отрезок $OO'$ изображает расстояние между аэродромами.

Так как движение равномерное, то отрезок $OA$ – график движения первого самолёта. Второй самолет движется навстречу первому, поэтому отрезок $O'B$ – график движения второго самолёта. Пересечение графиков в точке $C$ соответствует моменту встречи самолетов.

Обозначим через $x$ км путь, который пролетел второй самолет до встречи, тогда $(x + 200)$ км пролетел до встречи первый самолет.

Рассмотрим две пары треугольников:

$\Delta OMC \sim \Delta AKC$ (по первому признаку), тогда:

$$\frac{3t}{5}=\frac{x+200}{x}. \qquad (1)$$

$\Delta BMC \sim \Delta OKC$ (по первому признаку), тогда:

$$\frac{12}{5t}=\frac{x+200}{x}. \qquad (2)$$

***Из равенств (1) и (2) получаем:***

$$\frac{3t}{5}=\frac{12}{5t}, \text{ откуда } t^2=4,$$

тогда $t = 2$ (отрицательный корень уравнения не удовлетворяет условию задачи). Подставив полученное значение $t$ в (1), получим:

$$\frac{6}{5}=\frac{x+200}{x},$$

решая это уравнение, находим: $x = 1000$, тогда $x + 200 = 1000 + 200 = 1200$.

Всё расстояние $S = 1000 + 1200 = 2200$ (км).

О т в е т: 2200 км.

Аналогично решаются задачи на совместную работу.

***З а д а ч а 5.*** *Двое рабочих, выполняя задание вместе, могли бы закончить его за 12 дней. Если сначала будет работать только один из них, а когда он выполнит половину всей работы, его сменит второй рабочий, то все задание будет закончено за 25 дней. За сколько дней каждый рабочий в отдельности может выполнить все задание?*

I. ***Алгебраический метод*** решения задачи (без чертежа) приводит к уравнению:

$$\frac{1}{12}=\frac{1}{x}+\frac{1}{50-x},$$

где $x$ - количество дней, за которое первый рабочий выполнит все задание.

II. Решим задачу ***графико-геометрическим методом***.

Построим графическую модель задачи (рис. 35). Для определенности предположим, что первый рабочий работает быстрее, чем второй. Так как в задаче работа рассматривается как равномерный процесс, то отрезок $AN$ – график работы первого рабочего, а отрезок $BD$ – график работы второго рабочего. $AQ$ – изображает время совместной работы. $AQ = 12$.

Проведем $NK \parallel BD$, тогда $AK = 50$. Затем используем подобие образовавшихся треугольников.

$\Delta NMA \sim \Delta PKA \sim \Delta PCN$, отсюда следует, что $\frac{MN}{CP}=\frac{12+x}{x}$. (3)

$\Delta NMK \sim \Delta PQD \sim \Delta PCB$, отсюда следует, что $\frac{MN}{CP}=\frac{38-x}{12}$. (4)



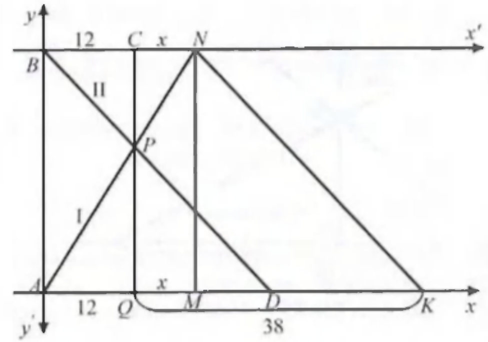



Рис. 35

Из равенств (3) и (4) получаем, что $\frac{12+x}{x}=\frac{38-x}{12}$. Решая это уравнение, находим: $x_1 = 18$, $x_2 = 8$. Учитывая, что первый рабочий работает быстрее, то $x < 12$, значит, $x = 8$. Тогда время $t_1$ (его изображает отрезок $AM$) равно 20 ч, а время $t_2$ (его изображает отрезок $MK$) равно 30 ч.

О т в е т : 20 ч и 30 ч.

В задачах 4 и 5 геометрический метод решения представляет собой интеграцию графического метода, метода подобия треугольников и метода уравнений и неравенств.

Интеграция алгебраического и геометрического методов позволяет иногда оригинально и быстро решить достаточно сложную (в алгебраическом смысле) задачу. Приведем пример.

***З а д а ч а 6.*** *Сын выбежал из школы в 17.00, через несколько минут отец вышел из дома в школу. Сын прибежал домой через 4 минуты после того, как отец вышел из дома. Отец пришёл в школу в 17.10 того же дня. Какую часть пути сын пробежал до встречи с отцом? (Скорости отца и сына считать постоянными).*

Решим эту задачу, выделяя этапы её решения.

Р е ш е н и е

**I этап** (*перевод задачи на геометрический язык*).

$OB$ – график движения сына (рис. 36). $CD$ – график движения отца. Надо найти отношение $MN : NK$.

**II этап** (*решение задачи на геометрическом языке*).

$\Delta ODN \sim \Delta BNC$ (по I признаку), поэтому $\frac{OD}{BC}=\frac{MN}{NK}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$.

Следовательно, $\frac{MN}{MK}=\frac{5}{7}$.

О т в е т: $\frac{5}{7}$.

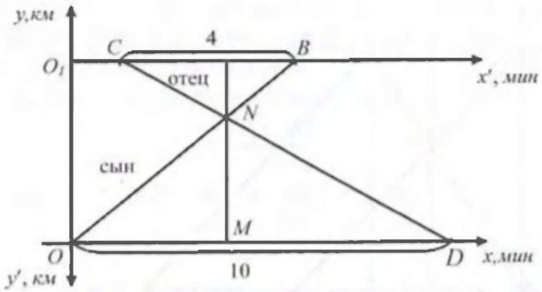



Рис. 36

Алгебраический метод решения задачи приводит к системе уравнений:

$$\begin{cases} y\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)=\frac{1}{15}, \\ x\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}\right)=\frac{1}{6} \end{cases} \Rightarrow \frac{y}{x}=\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{x}{x+y}=\frac{5}{7},$$

где $x$ км прошел до встречи сын, а $y$ км прошел до встречи отец.

(Другие примеры решения текстовых задач графико-геометрическим методом см. в работах [5], [6], [7], [11]).

Рисунки и решения приведенных выше задач в ходе лекции могут демонстрироваться с помощью мультимедиапроектора.

## *Вопросы и задания*

1. Как трактуется понятие «текстовая задача»? Назовите её основные компоненты.
2. Какова основная особенность текстовых задач?
3. Какие существуют методы решения текстовых задач? Охарактеризуйте их.
4. Что понимается под геометрическим методом решения текстовых задач? В чем его преимущество перед другими методами?
5. Какая пропедевтическая работа необходима для обучения учащихся решению текстовых задач? Проанализируйте учебники математики для 5-6 классов разных авторов. Содержатся ли в них упражнения, направленные на пропедевтику алгебраического и геометрического методов решения текстовых задач? Приведите соответствующие примеры.
6. Какие типы текстовых задач решают учащиеся в 5-6 классах? Какие методы решения больше всего здесь используются?
7. Какие виды задач на проценты изучаются в 5 классе? приведите примеры. Каким способом решаются эти задачи?
8. Охарактеризуйте этапы решения текстовой задачи.
9. Какие существуют формы записи решения текстовой задачи?



10. Найдите в учебниках алгебры задачи, решаемые геометрическим методом: а) с помощью линейной диаграммы; б) с помощью двумерной диаграммы; в) с помощью графиков. Оформите запись решения этих задач в тетрадях.
11. Что понимается под интеграцией алгебраического и геометрического методов решения текстовой задачи?

### Рекомендуемая литература

1. Д а л и н г е р, В. А. Методика обучения математике. Поисково-исследовательская деятельность учащихся : учебник и практикум для вузов / В. А. Далингер – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 460 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-00450-2.
2. Д е м и д о в а, Т. Е., Т о н к и х, А. П. О способах проверки решения текстовых задач / Т. Е. Демидова, А. П. Тонких // Математика в школе. – 1999. - № 5. – С. 4 – 7.
3. Д о р о ф е е в, Г. В. Проверка решения текстовых задач / Г. В. Дорофеев // Математика в школе. – 1974. – № 5. – С. 18 - 20.
4. И в а н о в а, Т. А. Современный урок математики: теория, технология, практика : Книга для учителя. – Н. Новгород : НГПУ, 2010. – 288 с.
5. К а п к а е в а, Л. С. Интеграция алгебраического и геометрического методов решения текстовых задач: Учеб. пособие для студ. мат. спец. пед. вузов / Л. С. Капкаева. – Саранск, 2001. – 134 с. – ISBN 5-8156-0070-9.
6. К а п к а е в а, Л. С. Интеграция алгебраического и геометрического методов при обучении математике в школе: Учеб. пособие для студ. мат. спец. пед. вузов / Л. С. Капкаева. – Саранск, 2003. – 179 с.
7. К а п к а е в а, Л. С. Алгебраический и геометрический методы в обучении математике / Л.С. Капкаева // Математика в школе. – 2004. - № 7. – С. 27 – 33.
8. К и п н и с, И. М. Задачи на составление уравнений и неравенств : Пособие для учителей / И. М. Кипнис.– М. : Просвещение, 1980. – 63 с.
9. К о р ж у е в, А. В., Б о г а т ы р е в а, П. Э. Обучение решению текстовых задач с неравенствами / А.В. Коржуев, П.Э. Богатырева // Математика в школе. – 1993. - № 3. – С. 63 – 75.
10. Л а х о в а, Н. В. Решение текстовых задач в средних классах / Н. В. Лахова // Математика в школе. – 1998. – № 3. – С. 17 – 23.
11. Л у н и н а, Л. С. Обучение решению алгебраических задач геометрическим методом / Л. С. Лунина // Математика в школе – 1996. – № 4. – С. 34 – 39.
12. Л у р ь е, М. В., А л е к с а н д р о в, Б. И. Задачи на составление уравнений / М. В. Лурье, Б. И. Александров. – М.: Наука, 1990. – 96 с.
13. Методика обучения математике в 2 ч. Часть 2 : учебник для академического бакалавриата / Н. С. Подходова, [и др.]: под ред. Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 299 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-9916-7002-9.
14. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под науч. ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.
15. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. /А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.
16. С а р а н ц е в, Г. И. Упражнения в обучении математике / Г.И. Саранцев. 2-е изд. дораб. – М.: Просвещение, 2005. – 255 с.
17. Ф р и д м а н, Л. М. Как научиться решать задачи: Беседы о решении математических задач. Пособие для учащихся / Л. М. Фридман – М.: Просвещение, 1989. – 192 с.
18. Школьные учебники по алгебре (см. лекцию № 2).
19. http://www.shevkin.ru/?action=Page&ID=399

**Лекция VI**

# ФОРМИРОВАНИЕ ПОНЯТИЯ ФУНКЦИИ В КУРСЕ АЛГЕБРЫ 7-9-х КЛАССОВ

1. Из истории введения понятия функциональной зависимости в школьный курс математики.
2. Различные трактовки понятия функции.
3. Методика введения понятия функции.
4. Методическая схема изучения функций в курсе алгебры основной школы.
5. Методика изучения линейной функции.
6. Интеграция аналитического и графического методов в изучении квадратичной функции.

---

## 1. Из истории введения понятия функциональной зависимости в школьный курс математики

Понятие функции – одно из фундаментальных математических понятий, непосредственно связанных с реальной действительностью. В нем ярко воплощены изменчивость и динамичность реального мира, взаимная обусловленность реальных объектов и явлений. Именно в понятии функции в определенной степени отображается бесконечное многообразие явлений реального мира.

Термин «функция» впервые встречается в письме немецкого математика Г. В. Лейбница к голландскому математику Х. Гюйгенсу в 1694 году. В обычное употребление термин введен в начале XVIII в. Иоганном Бернулли.

На рубеже XIX и XX веков в России и за границей прогрессивные математики и педагоги высказались за внедрение ***идеи функции*** в школьный курс математики. Русский педагог В. П. Шереметевский в статье «Математика как наука и её школьные суррогаты», опубликованной в журнале «Русская мысль» (№ 5, 1895) писал: «… Если вся математика есть, в сущности, учение о функциях, то ясно, и элементарный курс должен группироваться вокруг основного понятия о функциональной зависимости. Чем раньше оно будет вызвано и осторожно выращено в сознании учащихся, тем лучше».

На Западе за введение идеи функциональной зависимости в школьный курс математики выступал немецкий педагог-математик Ф. Клейн (1849–1925), убежденный в ведущей роли этого понятия и в математике-науке и в обучении математике. Он считал понятие функции центральным понятием всей математики: «Какое же понятие в современной математике доминирует? Это есть понятие о *функции*. Изучение функции составляет предмет, можно сказать, всей высшей математики; установление функциональной зависимости между различного рода факторами составляет задачу прикладной математики» [5, с. 13].

И еще: «Понятие о функции должно играть основную, так сказать, руководящую роль в курсе средней школы. Понятие это должно быть выяснено учащимися очень рано и должно пронизать все преподавание алгебры и геометрии» [там же, с. 13].

Пожелания Ф. Клейна легли в основу Меранских программ, которые были приняты в 1905 году.

В России в 1911–1912 и 1913–1914 гг. были проведены I и II Всероссийские съезды преподавателей математики. Лейтмотивом большинства докладов на этих съездах прозвучала необходимость введения в школьный курс математики идеи функциональной зависимости. Первый съезд в своей резолюции записал: «Съезд признает своевременным опустить из курса математики средней школы некоторые вопросы второстепенного значения, провести через курс и ярко осветить идею функциональной зависимости».

Профессор А. Я. Хинчин подчеркивал, что «понятие функциональной зависимости должно стать не только одним из важнейших понятий школьного курса математики, но и тем основным стержнем, проходящим от элементарной арифметики до высших разделов алгебры, геометрии и тригонометрии, вокруг которого группируется все математическое преподавание» [10, с. 23].

Отметив недопустимость недооценки других не менее важных понятий, представлений и методов, А. Я. Хинчин указывал далее, почему понятие функциональной зависимости должно быть явно выделено из всех других основных математических понятий, с которыми знакомит учащихся средняя школа:

*во-первых*, ни одно из других понятий не отражает явлений реальной действительности с такой непосредственностью и с такой конкретностью, как понятие функциональной зависимости, в котором воплощены и подвижность, динамичность реального мира, и взаимная обусловленность реальных величин;

*во-вторых*, это понятие, как ни одно другое, воплощает в себе диалектические черты современного математического мышления; именно оно приучает мыслить величины в их живой изменчивости, а не в искусственной неподвижности, в их взаимной связи и обусловленности, а не в искусственном отрыве их друг от друга;

*в третьих*, понятие функциональной зависимости есть основное понятие всей высшей математики и качество подготовки учащихся к усвоению курса математики в высшей школе в значительной степени измеряется тем, насколько твердо, полно и культурно они свыклись с этим важнейшим понятием.

В ходе всех этих обсуждений возник вопрос, какое из исторически сложившихся определений понятия функции должно быть положено в основу изучения функции в средней школе:

1) ***«оперативное»*** определение, сформулированное более 200 лет назад Л. Эйлером и отождествляющее функцию с той формулой, которая указывает, какие действия надо произвести над значениями независимых переменных, чтобы получить соответствующие значения функции;

2) ***графическое***, которое для функции одного аргумента сводится к указанию зависимости между абсциссой и ординатой точки, движущейся по совершенно произвольной кривой, и которое в XVIII в. считалось более общим, чем оперативное;

3) ***табличное***, которое для случая функции одного аргумента формулируется так: «Если каждому элементу $x$ множества $M$ поставлен в соответствие некоторый элемент $y$ множества $N$, то говорят, что на множестве $M$ задана функция, и пишут $y = f(x)$». При этом отдельные элементы $x$ называют значениями аргумента, а элементы $y$ – значениями функции.

С точки зрения Ф. Клейна, всякое научное знание не может быть усвоено школьниками без обращения к наглядности. Поэтому трактовка понятия функции с помощью геометрических образов является, по его мнению, наиболее целесообразной в школьном обучении. «Понятие функции в геометрической форме должно быть вообще душой школьного математического образования», – писал он [5, с. 112].

Академик С. Н. Бернштейн в своем докладе «Понятие функции в средней школе», сделанном в 1913 году на II Всероссийском съезде преподавателей математики, решительно высказался за выставление на первый план оперативное определение функции, хотя и признавал, что табличное определение является более общим, чем оперативное, не говоря уже о графическом определении.

Рассмотрим подробнее, как изменялось понятие функции в математике и в обучении математике.

## 2. Различные трактовки понятия функции

Функциональная линия школьного курса математики является в настоящее время одной из ведущих, определяющих изучение многих тем и разделов курсов алгебры и начал анализа. Особенность материала этой линии состоит в том, что с его помощью можно устанавливать разнообразные связи в обучении.

В процессе эволюции математики понятие функции (и соответствующее ему определение или описание) подвергалось определенным изменениям. Как уже указывалось выше, долгое время Л. Эйлер под функцией понимал всякое аналитическое выражение. Это определение не только искусственно ограничивало объем понятия функции (она отождествлялась только с одним из способов её задания), но и приводило к различным противоречиям. В частности, не допускалось задание функции двумя аналитическими выражениями. Например, функция вида

$$y = \begin{cases} \sin x, & \text{если } x < 0, \\ \lg x, & \text{если } x > 0, \end{cases}$$



не имела права на существование.

Со времен Н. И. Лобачевского и Л. Дирихле в математике укрепилось новое представление о функции как о зависимости одной переменной величины от другой. Такой подход долгое время сохранялся и в школьном курсе математики. Так в учебнике «Алгебра – 7» Ю. П. Макарычева и др. (М., 1989) дано такое определение функции: «Зависимость переменной $y$ от переменной $x$ называется функцией, если каждому значению $x$ соответствует единственное значение $y$». Это определение имеет ряд недостатков: *во-первых*, так как переменную рассматривают в учебнике как букву, вместо которой можно подставлять числа, создается впечатление, будто функция – это зависимость между самими буквами $y$ и $x$; *во-вторых*, термин «зависимость» означает, что с изменением значений $x$ обязаны меняться значения $y$, а как быть в этом случае с функцией $y = b$? *В-третьих*, функцию $y = \frac{k}{x}$ также нельзя подвести под указанное определение (не каждому $x$, а только $x \neq 0$, соответствует единственное значение $y$).

Приведенное выше определение функции можно заменить следующим: «Переменная $y$ называется функцией переменной $x$, если каждому допустимому значению $x$ соответствует единственное значение $y$». Допустимыми в алгебре считаются значения переменной, при которых выражение имеет смысл. Отсюда следует, что функция должна задаваться только формулой, что значительно сужает объем этого понятия.

В настоящее время существует несколько вариантов определения понятия функции. В частности, понятие функции может выступать как:

1) первичное (неопределяемое) математическое понятие;

2) отображение одного числового множества в другое;

3) особое отношение между элементами множеств;

4) некоторое соответствие между элементами множеств.

Иногда функцию определяют как *правило (закон)*, по которому каждому элементу $x$ из множества $X$ ставится в соответствие строго один элемент $y$ множества $Y$. Недостатком этого определения является то обстоятельство, что функцией оказывается правило, а не множество, что неестественно, так как известно, что функции можно складывать, умножать и выполнять с ними другие арифметические операции.

В школьном курсе математики использовались две наиболее резко различающиеся методические трактовки понятия функции: ***генетическая*** и ***логическая***. При генетической трактовке исходными понятиями являются понятия: переменная величина, функциональная зависимость переменных величин, формула (выражающая одну переменную через комбинацию других переменных), декартова система координат на плоскости.

***Достоинства генетической трактовки понятия функции:***

1) «динамический» характер понятия функциональной зависимости;

2) легко выявляется модельный аспект понятия функции относительно изучения явлений природы.

Такая трактовка естественно согласуется с остальным содержанием курса алгебры, так как большинство функций в нем выражаются аналитически или таблично.

***Недостатки генетической трактовки понятия функции:*** переменная величина при таком подходе всегда неявно (или даже явно) пробегает непрерывный ряд числовых значений. Поэтому понятие связывается только с числовыми функциями одного числового аргумента (определенными на числовых промежутках). В обучении же приходится постоянно выходить за эти пределы.

При ***логической трактовке*** функция выступает в виде отношения специального вида между двумя множествами, и это отношение удовлетворяет условию функциональности. Начальным этапом изучения понятия функции становится вывод его из понятия отношения. Логический подход вызывает необходимость иллюстрировать понятие функции при помощи разнообразных средств; язык школьной математики при этом обогащается. Помимо формул и таблиц функцию задают стрелками, перечислением пар, используют не только числовой, но и геометрический материал; геометрическое преобразование при таком подходе становится возможным рассматривать как функцию.

***Основные достоинства логической трактовки***: обобщенность понятия функции и вытекающие отсюда возможности установления разнообразных связей в обучении математике.

Однако это общее понятие оказывается в дальнейшем связанным главным образом с числовыми функциями одного числового аргумента.

Таким образом, если генетический подход оказывается ***недостаточным*** для формирования функции как обобщенного понятия, то логический обнаруживает определенную ***избыточность***.

Следует отметить, что различия в трактовках функции проявляются с наибольшей резкостью при введении этого понятия. В дальнейшем, при изучении функциональной линии различия постепенно стираются, так как в курсах алгебры и начал анализа изучается не само понятие функции, а в основном конкретно заданные функции и классы функций, их приложения в задачах естествознания и общественного производства.

В современном школьном курсе математики в итоге длительных методических поисков в качестве ведущего был принят генетический подход к понятию функции. Одновременно учитывается все ценное, что можно извлечь из логического подхода.

Формирование понятия функции предполагает выделение в обучении следующих компонентов этого понятия:

1) представление о функциональной зависимости переменных величин в реальных процессах и в математике;

2) представление о функции как о соответствии;

3) построение и использование графиков функций, исследование функций;

4) вычисление значений функций, определенных различными способами.

Связь между этими компонентами устанавливается с помощью специальных упражнений.



## 3. Методика введения понятия функции

Введение понятия функции, также как и любого другого понятия осуществляется поэтапно.

*I этап. Мотивация введения понятия.*

Здесь можно подчеркнуть практическую значимость понятия функции.

На практике мы часто встречаемся с зависимостями между различными величинами. Например, площадь круга зависит от его радиуса, масса металлического бруска зависит от его объема и плотности металла, объем прямоугольного параллелепипеда зависит от его длины, ширины и высоты.

В дальнейшем мы будем изучать зависимость между двумя величинами.

***II этап. Выделение существенных свойств понятия.***

Этот этап реализуется путем рассмотрения примеров.

П р и м е р 1. Площадь квадрата зависит от длины его стороны. Пусть сторона квадрата равна *a см*, а его площадь равна *S см*$^2$. Для каждого значения переменной $a$ можно найти соответствующее значение переменной $S$.

Так, если $a = 3$, то $S = 3^2 = 9$;
если $a = 15$, то $S = 15^2 = 225$;
если $a = 0{,}4$, то $S = 0{,}4^2 = 0{,}16$.

Зависимость переменной $S$ от переменной $a$ выражается формулой

$S = a^2$ (по смыслу задачи $a > 0$).

Переменную $a$, значения которой выбираются произвольно, называют ***независимой переменной***, а переменную $S$, значения которой определяются выбранными значениями $a$ – ***зависимой переменной***.

П р и м е р 2. Путь, пройденный автомобилем со скоростью 50 км/ч, зависит от времени движения.

Обозначим: $t$ – время движения (в часах), $S$ – пройденный путь ( в км). Для каждого значения переменной $t$, где $t > 0$, можно найти соответствующее значение переменной $S$. Например,

если $t = 0{,}5$, то $S = 50 \cdot 0{,}5 = 25$;
если $t = 2$, то $S = 50 \cdot 2 = 100$;
если $t = 3{,}5$, то $S = 50 \cdot 3{,}5 = 175$.

Зависимость переменной $S$ от переменной $t$ выражается формулой

$S = 50t$.

В этом примере $t$ является независимой переменной, а $S$ – зависимой переменной.

П р и м е р 3. На рис. 37 изображен график температуры воздуха в течение суток. С помощью этого графика для каждого момента времени $t$ (в час.), где $0 < t < 24$ можно найти соответствующую температуру $P$ (в градусах Цельсия). Например,

если $t = 6$, то $P = -5$;
если $t = 12$, то $P = 2$;
если $t = 17$, то $P = 3$.

Здесь $t$ является независимой переменной, а $P$ – зависимой переменной.

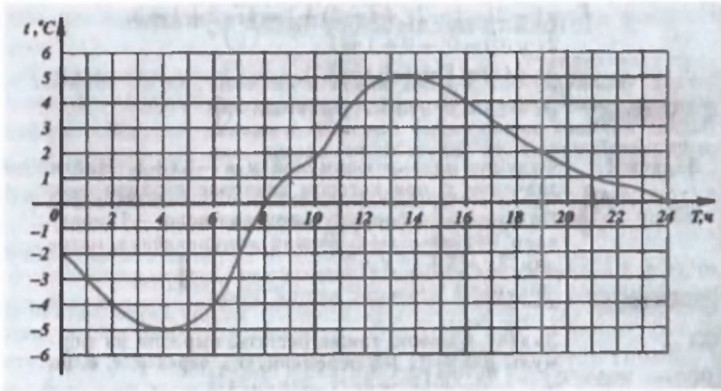



Рис. 37

П р и м е р 4. Стоимость проезда в пригородном поезде зависит от номера зоны, к которой относится станция. Эта зависимость показана в таблице (буквой $n$ обозначен номер зоны, а буквой $m$ – стоимость проезда в рублях):

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | 10 | 15 | 20 | 25 | 35 | 40 | 55 | 65 | 85 |

По этой таблице для каждого значения $n$, где $n = 1, 2, \ldots 9$, можно найти соответствующее значение $m$. Так,

если $n = 2$, то $m = 15$;
если $n = 6$, то $m = 40$;
если $n = 9$, то $m = 85$.

Здесь $n$ является независимой переменной, а $m$ – зависимой переменной.

В рассмотренных примерах каждому значению независимой переменной соответствует единственное значение зависимой переменной. Такую зависимость одной переменной от другой называют ***функциональной зависимостью*** или ***функцией***.

Независимую переменную иначе называют ***аргументом***, а о зависимой переменной говорят, что она является ***функцией*** от этого аргумента. Так площадь квадрата является функцией от длины его стороны; путь, пройденный автомобилем с постоянной скоростью, является функцией от времени движения. Значения зависимой переменной называют ***значениями функции***.

Все значения, которые принимает независимая переменная, образуют ***область определения функции***.

На этом этапе учащиеся знакомятся не только с описанием понятия функции, но и со способами ее задания: *аналитическим (с помощью формулы), графическим и табличным*.

Следующие этапы формирования понятия функции (усвоение определения понятия, использование понятия функции в конкретных ситуациях и установление связи с другими понятиями) реализуются посредством специальных упражнений. Все упражнения можно разделить на три группы.

***I группа*** – упражнения, в которых описана некоторая зависимость, надо выразить формулой эту зависимость и для данных значений аргумента найти соответствующие значения функции.

***II группа*** – упражнения, в которых некоторая данная зависимость изображена графически. Требуется с помощью графика по данному значению аргумента найти соответствующее значение функции и обратно, по данному значению функции найти значение аргумента; найти область определения функции; назвать несколько значений аргумента, при которых значение функции положительно (отрицательно); выяснить, принадлежит ли графику функции точка с заданными координатами, и т.д.

***III группа*** – упражнения, в которых функциональная зависимость задана таблицей. Требуется указать, какие числа служат значениями аргумента и какие значениями функции. Заполнить таблицу, если известны некоторые значения функции и некоторые значения аргумента.

Введение понятия ***графика функции*** можно начать с рассмотрения примера.

Пусть задана функция $y = \frac{6}{x+3}$, где $-2 \le x \le 3$. По этой формуле для любого значения аргумента можно найти соответствующее значение функции. Возьмем, например, целые значения аргумента. Получим:

если $x = -2$, то $y = 6$;
если $x = -1$, то $y = 3$;
если $x = 0$, то $y = 2$;
если $x = 1$, то $y = 1{,}5$;
если $x = 2$, то $y = 1{,}2$;
если $x = 3$, то $y = 1$.

Каждую из найденных пар значений $x$ и $y$ изобразим в координатной плоскости, считая значение $x$ абсциссой, а соответствующее значение $y$ ординатой (рис. 38).

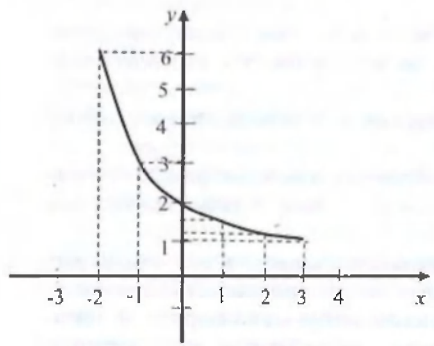



Рис.38

Выбирая другие значения $x$ из промежутка от $-2$ до 3 и вычисляя соответствующие им значения $y$ по формуле $y = \frac{6}{x+3}$, будем получать другие пары значений $x$ и $y$. Каждой из этих пар также соответствует некоторая точка координатной плоскости. Все такие точки образуют график функции, заданной формулой $y = \frac{6}{x+3}$, где $-2 \le x \le 3$ (рис. 38). После этого можно сформулировать определение графика функции.

***Графиком функции*** называется множество всех точек координатной плоскости, абсциссы которых равны значениям аргумента, а ординаты – соответствующим значениям функции.

Затем необходимо рассмотреть примеры на построение графика функции, заданной формулой на определенном промежутке. Алгоритм построения выглядит следующим образом:

1) составляется таблица соответствующих значений аргумента и функции;

2) в координатной плоскости отмечаются точки, координаты которых указаны в таблице;

3) отмеченные точки соединяют плавной линией.

При этом учащимся сообщается, что «чем больше отметим точек, принадлежащих графику, и чем плотнее они будут расположены, тем точнее будет построен график функции».

Построенный график можно использовать для выполнения упражнений второго типа: «По графику функции найти: а) значение функции при $x = 3$; б) значения $x$, при которых значение функции равно 5». Учащимся подробно объясняется, как выполнить это упражнение.

График дает наглядное представление о зависимости между величинами. Так, по графику температуры воздуха можно узнать, когда температура равна нулю, была выше нуля, ниже нуля, возрастала, убывала и т. д. Интересные упражнения образного (графического) характера на освоение понятий функции и графика функции приведены в статье А. Я. Цукаря [12].

Последовательность изучения конкретных функций в курсе алгебры основной школы следующая: *7 класс* – линейная функция; *8 класс* – квадратичная функция; *9 класс* – степенная функция и как функции натурального аргумента – арифметическая и геометрическая прогрессии. Рассмотрим подробнее методическую схему изучения этих функций и методику изучения линейной функции.

## 4. Методическая схема изучения функций в курсе алгебры основной школы

Опыт, накопленный отечественной школой, показывает, что изучение конкретных функций в основной школе полезно проводить по следующей методической схеме:

**1. *Рассмотреть конкретные ситуации или задачи, приводящие к данной функции.***

На этом этапе учащиеся должны убедиться в целесообразности изучения данной функции, исходя из практики или необходимости дальнейшего развития теории.

**2. *Сформулировать определение функции и записать её в виде формулы.***

На этом этапе учащиеся выявляют существенные свойства данной функции, формулируют её определения, записывают функцию формулой, проводят исследование входящих в эту формулу параметров. Здесь же идет усвоение определения функции, выполняются упражнения на распознавание.



**3. *Ознакомить учащихся с графиком данной функции.***

На этом этапе учащиеся учатся изображать изучаемую функцию графически, отличать по графику данную функцию от других, заданных графиками функций, устанавливать влияние параметров на характер графического изображения функции.

**4. *Исследовать функцию на основные свойства.***

Здесь учащиеся находят область определения и множество значений функции, промежутки возрастания и убывания, промежутки знакопостоянства, нули, экстремумы функции, исследуют её на четность или нечетность, периодичность, ограниченность, непрерывность и т.д.

В основной школе свойства функций устанавливаются по её графику, то есть на основе наглядных соображений, и лишь немногие обосновываются аналитически. В 7 – 9 классах школьники учатся истолковывать свойства функций на трёх «языках»: *графическом, словесном и символическом*. Это умение формируется постепенно и имеет большое дидактическое значение.

**5. *Использовать изученные свойства функций при решении различных задач, в частности уравнений и неравенств.***

Этот этап является этапом закрепления основных понятий и теоретических положений, связанных с изучаемой функцией, а также этапом формирования соответствующих умений и навыков.

Эта методическая схема является планом – программой для изучения любой функции.

З а м е ч а н и е. Изучение функций в школе связано с новым видом специфической учебной деятельности – *исследовательской*. Было бы неправильно утверждать, что до изучения функций учащиеся не встречались с исследовательской деятельностью, но она не была прямой целью деятельности, и учебная задача формировать исследовательские умения не ставилась. При изучении в школе первой конкретной функции – линейной необходимо поставить такую цель.

Специфическая особенность функционального материала выражается в том, что *функции есть модели реальных процессов*. Изучение отдельных свойств процессов осуществляется путем исследования функций. Конкретные функции обладают определенными свойствами, которые есть абстракции реальных свойств процессов. Установить наличие и специфику для конкретной функции определенных свойств – значит исследовать функцию.

Методы выяснения определенных свойств функций есть методы исследования. Они могут выполняться средствами: 1) координатного метода; 2) элементарного анализа (с помощью уравнений и неравенств); 3) математического анализа (с помощью производной).

Исследовательские умения, необходимые при изучении функций – это умения выделить условия, при которых функция обладает определенным свойством, и умения выяснить, как с изменением условий изменяются свойства функций. Формирование названных специфических исследовательских умений окажет влияние на формирование исследовательской деятельности вообще.

При изучении функций в школе формируются и используются следующие специфические исследовательские действия: установить числовое множество, на котором функция существует, и то множество значений, которое она может принимать на этом множестве; выяснить, убывающая или возрастающая функция на своей области определения или некоторых ее частях, имеет ли максимумы или минимумы, каковы корни у функции, если они есть, четна функция или нечетна, периодична или нет, какой вид графика данной функции и т. д.

Для линейной функции это: выяснение характеристического свойства этой функции, множества её значений, влияния коэффициентов $k$ и $b$ на поведение функции, установление вида графика и влияние на его положение значений $k$ и $b$, корней функции и т.д. Рассмотрим все это более подробно.

## 5. Методика изучения линейной функции

Место темы «Линейная функция» и последовательность изложения материала в разных учебниках разная (см. таблицу 8).

Таблица 8

| № п/п | Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк и др. «Алгебра. 7 класс» (М., 2014) *Глава II.* Линейная функция | Ю. М. Колягин, М. В. Ткачева и др. «Алгебра. 7 класс» (М., 2012) *Глава VI.* Линейная функция и её график |
|---|---|---|
| 1. | Линейная функция и её график | Функция $y = kx$ и её график |
| 2. | Прямая пропорциональность | Линейная функция и её график |
| 3. | Взаимное расположение графиков линейных функций | |

Как видим, по учебнику Ю. Н. Макарычева и др. линейная функция изучается в начале курса, что дает возможность раньше использовать ее график (например, при решении уравнений или неравенств), а по учебнику Ю. М. Колягина и др. она изучается в конце курса. Кроме того, в нем не выделен пункт «Взаимное расположение графиков линейных функций», очень важный для графического решения систем уравнений. В первом учебнике сначала изучается линейная функция, а затем, как частный случай, прямая пропорциональность ($y = kx$) . Во втором учебнике сначала изучается функция $y = kx$, а затем линейная функция и её график.

Рассмотрим более подробно методику введения линейной функции и её графика ( в первом варианте). Изучение линейной функции начинается с рассмотрения конкретных примеров:

П р и м е р 1. На шоссе расположены пункты $A$ и $B$, удаленные друг от друга на 20 км (рис. 39).

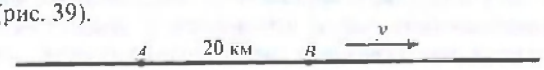



Рис. 39



Мотоциклист выехал из пункта $B$ в направлении, противоположном $A$, со скоростью 50 км/ч. За $t$ часов мотоциклист проедет $50t$ км и будет находиться от $A$ на расстоянии $(50t + 20)$ км.

$$S = 50t + 20, \text{ где } t > 0.$$

П р и м е р 2. Ученик купил тетради по 3 р. за штуку и ручку за 3р. 50 к. Стоимость покупки зависит от числа тетрадей.

Обозначим число купленных тетрадей буквой $x$, а стоимость покупки (в руб.) буквой $y$. Получим:

$$y = 3x + 3{,}5, \text{ где } x \in N.$$

П р и м е р 3. Из курса физики известно, что если железная проволока длиной 1 м нагревается до температуры $t^0$, а коэффициент линейного её расширения равен $k = 0{,}0012$, то длина проволоки при этой температуре может быть вычислена по формуле

$$l(t) = 1 + 0{,}0012t.$$

И т. д.

В этих примерах мы встретились с функциями, заданными формулами вида $y = kx + b$, где $x$ – независимая переменная, $k$ и $b$ – числа. Такие функции называют ***линейными***.

Затем формулируется определение.

***Опр. 1.*** Линейной функцией называется функция, которую можно задать формулой $y = kx + b$, где $x$ – независимая переменная, $k$ и $b$ – некоторые числа.

Усвоение определения происходит путем выполнения упражнений на распознавание. После этого учащиеся знакомятся с графиком линейной функции. При этом рассматриваются два наиболее распространенных способа построения графика линейной функции.

***1 способ.*** Использование «загущения» точек на графике. Последовательность действий по этому способу: а) нанесение нескольких точек; б) наблюдение – все построенные точки расположены на одной прямой; проведение этой прямой; в) проверка: берем произвольное значение аргумента и вычисляем по нему значение функции; наносим точку на координатную плоскость – она принадлежит построенной прямой. Отсюда делается вывод о графике данной линейной функции.

Общее свойство линейных функций будет при этом формироваться на основе изолированных примеров.

***2 способ.*** Построение графика по двум точкам. Этот способ уже предполагает знание соответствующего свойства графиков линейных функций.

В обучении происходит последовательная смена этих способов: когда общее свойство графиков усвоено (при рассмотрении первого способа), начинают применять второй способ – он экономнее и обоснован геометрически, так как через две точки проходит одна и только одна прямая.

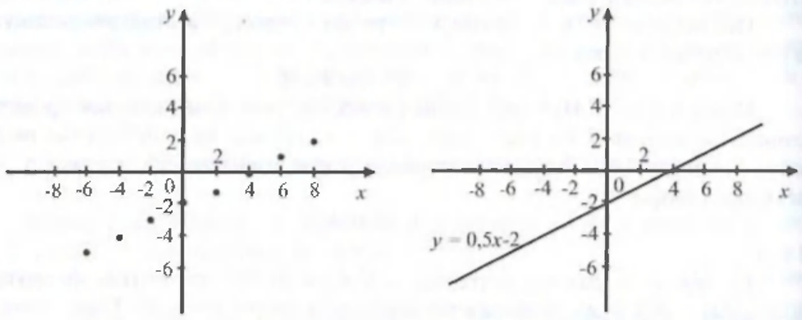
Изучение этих способов сопровождается рассмотрением конкретных примеров.

П р и м е р 1. Построить график линейной функции $y = 0{,}5x - 2$.

Составим таблицу соответственных значений $x$ и $y$:

| | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | -6 | -4 | -2 | 0 | 2 | 4 | 6 | 8 |
| $y$ | -5 | -4 | -3 | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 |

Отметим в координатной плоскости точки, координаты которых указаны в таблице. Все отмеченные точки лежат на одной прямой. Эта прямая является графиком линейной функции $y = 0{,}5x - 2$ (рис. 40 а, б).




а) б)

Рис. 40

После этого делается вывод, что графиком любой линейной функции является прямая. Для построения графика линейной функции достаточно найти координаты двух точек графика, отметить эти точки в координатной плоскости и провести через них прямую.

В качестве упражнений можно рассмотреть примеры на построение графика линейной функции: 1) $y = 2x + 3$; 2) $y = -0{,}8x + 1$.

Замечание 1. В 7 классе принимают без доказательства тот факт, что графиком линейной функции является прямая линия. В 8 классе после изучения признаков подобия треугольников появляется возможность обосновать этот факт (*попробуйте провести доказательство самостоятельно*).

Замечание 2. Если область определения линейной функции состоит не из всех чисел, то ее график представляет собой соответствующую часть прямой. Например, это может быть *полупрямая* или *отрезок*.

**_Влияние коэффициентов k и b на поведение функции_**

1. При $k = 0$ формула $y = kx + b$ имеет вид $y = 0x + b$, то есть $y = b$. Линейная функция, задаваемая формулой $y = b$, принимает одно и то же значение при любом $x$, например, функция $y = -2$ принимает значение -2 при любом $x$. Функция $y = b$ – это *частный случай линейной функции*. Её графиком является прямая, параллельная оси $OX$ и проходящая через точку $(0; -2)$.

Для учащихся построение графика функции $y = b$ представляет определенную трудность психологического характера, так как в такой формуле в явном виде не содержится переменная $x$. Поэтому можно рекомендовать записывать формулу $y = b$ в виде $y = 0x + b$, тогда, как и в общем случае, учащиеся



смогут находить пары соответственных значений $x$ и $y$. (При этом в качестве $x$ берется любое число, а значение $y$ при любом $x$ оказывается равным $b$.)

Желательно, чтобы на первых же уроках учащиеся усвоили, что графиком функции $y = b$ служит прямая, параллельная оси $OX$, и что при $b = 0$ мы получаем саму ось $OX$.

2. Вторым частным случаем линейной функции является ***прямая пропорциональность***.

Введение прямой пропорциональности осуществляется следующим образом. Рассматривается пример: пусть $V$ – объем железного бруска в $см^3$, $m$ – его масса в $г$. Так как плотность железа равна 7,8 $г/см^3$, то $m = 7{,}8V$.

Зависимость массы железного бруска от его объема является примером функции, которая задается формулой вида $y = kx$, где $x$ – независимая переменная, $k$ – число, отличное от нуля. Такую функцию называют *прямой пропорциональностью*. Затем формулируется определение.

***Опр. 2.*** Прямой пропорциональностью называется функция, которую можно задать формулой вида $y = kx$, где $x$ – независимая переменная, $k$ – число, отличное от нуля.

Учащимся сообщается, что прямая пропорциональность является частным случаем линейной функции, так как формула $y = kx$ получается из формулы $y = kx + b$ при $b = 0$. Отсюда следует, что графиком прямой пропорциональности служит прямая. Эта прямая проходит через начало координат, так как при $x = 0$ $y = 0$.

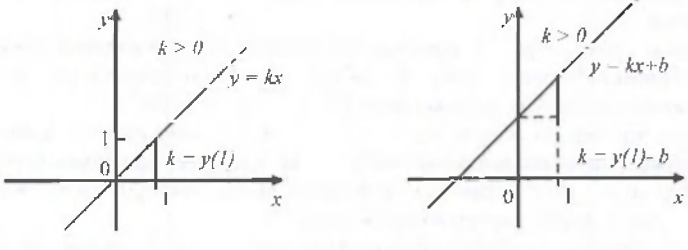
Итак, *графиком прямой пропорциональности является прямая, проходящая через начало координат.*

Для построения графика прямой пропорциональности достаточно отметить какую-либо точку графика, отличную от начала координат, и провести через эту точку и начало координат прямую. (Учащимся предлагается построить график функции $y = 0{,}5x$.)

Расположение графика функции $y = kx$ в координатной плоскости зависит от коэффициента $k$. Из формулы $y = kx$ находим, что если $x = 1$, то $y = k$. Значит, график функции $y = kx$ проходит через точку $(1; k)$. При $k > 0$ эта точка расположена в первой координатной четверти, а при $k < 0$ – в четвертой. Отсюда следует, что при $k > 0$ график прямой пропорциональности расположен в I и III координатных четвертях, а при $k < 0$ – во II и IV четвертях.

Итак, обучив семиклассников построению графика линейной функции, можно приступить к элементарному исследованию свойств этой функции. В 7-м классе возможно аналитически выделить значения аргумента, при которых линейная функция принимает положительные (отрицательные) значения, доказать монотонность линейной функции. Все остальные свойства (например, роль и геометрический смысл коэффициентов в уравнении линейной функции) можно установить из геометрических соображений.

Достаточно легко устанавливается, что коэффициент $b$ есть значение линейной функции при $x = 0$. Геометрически $b$ означает длину и положение на оси ординат отрезка, отсекаемого графиком функции, считая от 0 (вверх, если $b > 0$, и вниз, если $b < 0$) или иначе, это ордината точки пересечения графика функции с осью $OY$ (абсцисса этой точки всегда равна 0). А коэффициент $k$ находится в случае прямой пропорциональности $y = kx$ как $k = y(1)$. В общем случае линейной функции как $k = y(1) - b$. Учащимся следует все это показать на графиках функций (рис. 41 а, б).




а) б)

Рис. 41

Значительные трудности представляет случай отрицательных значений углового коэффициента; для него требуется отдельная работа, построенная аналогично.

Конечно, необходимы упражнения в отыскании коэффициентов линейной функции по их графикам. Начальные упражнения должны быть простыми и иметь своей целью усвоение геометрического смысла коэффициентов формулы, задающей функцию. Приведем примеры.

**1.** Найдите значения коэффициентов $k$ в уравнениях прямых $y = kx$, изображенных на рисунке 42. Запишите уравнения этих прямых.

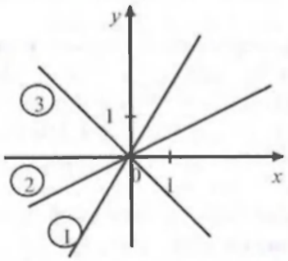



Рис. 42

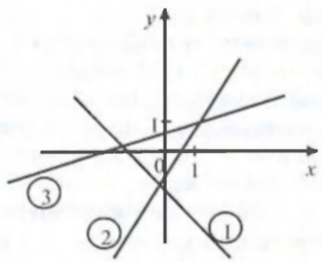



Рис. 43

**2.** а) Найдите значения коэффициентов $b$ для прямых $y = kx + b$, изображенных на рисунке 43.

б) Каковы числовые значения коэффициентов $k$ для этих прямых с точностью до 0,1?

в) Запишите уравнения прямых, изображенных на этом рисунке (измерения дадут приближенные значения $k$ и $b$).



Графические иллюстрации приводят учащихся к выводу, что при $k > 0$ график линейной функции составляет острый угол с положительным направлением оси абсцисс, а при $k < 0$ – тупой угол.

После этого можно говорить о возрастании и убывании линейной функции в зависимости от знака коэффициента $k$. Сказанное можно закрепить в упражнениях.

**3.** Не строя графиков функций, установите, под острым, тупым или нулевым углом они наклонены к положительному направлению оси абсцисс:

а) $y = x$; б) $y = -x + 1$; в) $y = 2$; г) $y = 10,7x - 5$.

**4.** Даны функции:

а) $y = 2x + 4$; б) $y = 2x - 4$; в) $y = -2x + 4$; г) $y = -2x - 4$.

Не строя графиков, выясните, в каком случае значения $y$ возрастают (убывают) с возрастанием $x$. Затем постройте графики и проверьте на них свои ответы.

Выполняя такие упражнения, учащиеся постепенно овладевают умением «читать» график, готовятся к элементарному исследованию функции $y = kx + b$. Эти упражнения являются также подготовкой к более серьезному изучению в дальнейшем геометрического смысла и роли коэффициентов квадратичной функции.

Таким образом, при изучении линейной функции предпочтение отдается графическим методам, поскольку основной аппарат для аналитического исследования функции (неравенства) ещё не изучен. Восприятие графических иллюстраций, и даже суждений и умозаключений, из наблюдения и анализа геометрических представлений более доступно семиклассникам, чем выполнение ими логических аналитических умозаключений.

Аналогично можно провести исследование роли коэффициента $k$ в формуле $y = \frac{k}{x}$, задающей обратную пропорциональность. Но при этом надо учитывать, что рассматриваемая функция имеет разрыв при $x = 0$. (Проведите это исследование самостоятельно и сделайте выводы.)

### *Взаимное расположение графиков линейных функций*

Графики двух линейных функций представляют собой прямые, которые либо *пересекаются*, либо *параллельны*. Установить с учащимися этот факт можно следующим образом. Рассмотрим, например, графики функций, заданных формулами $y = 0,9x - 1$ и $y = 0,8x + 1$ с различными коэффициентами при $x$. Выясним, пересекаются ли эти графики. Пересечение графиков означает, что они имеют общую точку. В этом случае найдется такое значение $x$, которому соответствует одно и то же значение $y$ для обеих функций. Чтобы найти это значение $x$, надо решить уравнение:

$$0,9x - 1 = 0,8x + 1.$$

При $x = 20$ обе функции $y = 0,9x - 1$ и $y = 0,8x + 1$ принимают одно и то же значение, равное 17. Точка (20; 17) принадлежит как одному, так и другому графику. Такая точка только одна. Значит, прямые, являющиеся графиками функций $y = 0{,}9x - 1$ и $y = 0{,}8x + 1$, *пересекаются*.

Рассмотрим теперь линейные функции, заданные формулами $y = 0{,}5x + 4$ и $y = 0{,}5x - 2$ с одинаковыми коэффициентами. Так как уравнение

$$0{,}5x + 4 = 0{,}5x - 2$$

не имеет корней, то прямые, которые являются графиками функций $y = 0{,}5x + 4$ и $y = 0{,}5x - 2$ не имеют общих точек, то есть они параллельны.

*Вообще, графики двух линейных функций, заданных формулами вида $y = kx + b$, пересекаются, если коэффициенты при $x$ различны, и параллельны, если коэффициенты при $x$ одинаковы.*

Графики линейных функций, заданных формулами $y = kx + b$ с одинаковыми коэффициентами при $x$ и различными $b$, параллельны и наклонены к оси $Ox$ под одним и тем же углом. Этот угол зависит от коэффициента $k$. Число $k$ называют *угловым коэффициентом прямой* – графика функции $y = kx + b$.

Это свойство можно сформулировать так: *если угловые коэффициенты прямых, являющихся графиками двух линейных функций, различны, то эти прямые пересекаются, а если угловые коэффициенты одинаковы, то прямые параллельны.*

Из формулы $y = kx + b$ следует, что при $x = 0$, $y = b$. Значит, график функции $y = kx + b$ пересекает ось $Oy$ в точке с координатами $(0; b)$.

Чтобы далее выяснить, как располагаются графики функций $y = kx + b$ при различных значениях $k$ и одинаковых значениях $b$, можно предложить учащимся упражнение: *постройте графики функций:* $y = 2x + 3$, $y = 0{,}5x + 3$, $y = -3x + 3$. После построения учащиеся делают вывод, что все эти прямые пересекаются в одной точке, лежащей на оси $Oy$.

Основные типы упражнений к этой теме следующие:

1. Установить взаимное расположение графиков функций (функции заданы формулами).

2. Линейные функции заданы формулами. Выделить те функции, графики которых: а) параллельны; б) пересекаются.

3. Дана линейная функция (например, : $y = 2{,}5x + 4$). Задайте формулой какую-нибудь линейную функцию, график которой

а) параллелен графику данной функции;

б) пересекает его.

4. Задать формулами две линейные функции, графики которых:

а) параллельные прямые; б) пересекающиеся прямые.

5. Найти координаты точки пересечения графиков функций (функции заданы формулами).

В результате выполнения упражнений учащиеся должны знать, как располагается график функции $y = kx + b$ в зависимости от значений $k$ и $b$.



## 6. Интеграция аналитического и графического методов в изучении квадратичной функции

Квадратичная функция вводится и изучается в тесной связи с квадратными уравнениями и неравенствами, которые представлены в курсе алгебры 8 класса. Первой из этого класса функций рассматривается функция $y = x^2$. Свойства этой функции во многом отличаются от рассмотренного случая *линейных функций*.

1. Прежде всего, эта функция ***немонотонна***; только на этом этапе у учащихся появляется пример функции, отличной от линейных, которые немонотонны на всей области определения. Чтобы подчеркнуть указанное отличие, можно предложить учащимся следующее задание: *функция задана формулой $y = x^2$ на промежутке $-2 < x < 3$. Найти множество значений этой функции.* Перенося свойство монотонности с класса линейных функций на функцию $y = x^2$, учащиеся часто делают ошибку, приводя ответ: *промежуток* $4 < x < 9$. Эта ошибка требует рассмотрения графика функции $y = x^2$.

2. Другое отличие состоит в том, что ***характер изменения значений функции $y = x^2$ неравномерный***: на одних участках она растет быстрее, на других – медленнее. Эта особенность выявляется при построении графика, причем целесообразно рассмотреть два графика: один – в крупном масштабе на промежутке $-1 \le x \le 1$, другой – в мелком масштабе на промежутке $-3 < x < 3$. Построение можно вести методом загущения. Важно отметить свойство параболы – *симметричность относительно оси ординат*; в дальнейшем это свойство приведет к рассмотрению класса четных функций, причем функция $y = x^2$ является ведущим примером функции этого класса.

Рассмотрим более подробно схему изучения квадратичной функции.

***1 этап.*** Изучение данного материала следует начать с рассмотрения конкретных ситуаций или задач, приводящих к квадратичной функции.

Вначале необходимо заметить, что в различных областях науки и техники часто встречаются функции, которые называют ***квадратичными***. Приведем примеры.

1) Площадь квадрата $y$ со стороной $x$ вычисляется по формуле $y = x^2$.

2) Если тело брошено вверх со скоростью $\vartheta$, то расстояние $s$ от него до поверхности земли в момент времени $t$ определяется формулой

$$s = -\frac{gt^2}{2} + \vartheta t + s_0,$$

где $s_0$ - расстояние от тела до поверхности земли в момент времени $t = 0$.

В этих примерах рассмотрены функции вида $y = ax^2 + bx + c$. В первом примере $a = 1$, $b = c = 0$, а переменными являются $x$ и $y$. Во втором примере $a = -\frac{g}{2}$, $b = \vartheta$, $c = s_0$, а переменные обозначены буквами $t$ и $s$.

***2 этап.*** На этом этапе формулируется определение квадратичной функции и дается её запись в виде формулы.

*Опр. 3. Функция $y = ax^2 + bx + c$, где $a$, $b$ и $c$ заданные действительные числа, $a \neq 0$, $x$ – действительная переменная, называется квадратичной функцией.*

Затем приводятся примеры квадратичных функций (учителем и учащимися) $y = x^2$, $y = -2x^2$, $y = x^2 - x$, $y = x^2 - 5x + 6$, $y = -3x^2 + \frac{1}{2}x$ и т.д. Для усвоения определения учащиеся выполняют упражнения па распознавание.

***3 этап.*** Ознакомление учащихся с графиком квадратичной функции начинается с графика функции $y = x^2$. Для построения графика этой функции составляется таблица её значений. Построив указанные в таблице точки и соединив их плавной кривой, учащиеся получают график функции $y = x^2$.

***4 этап.*** На этом этапе учащиеся исследуют свойства функции $y = x^2$. Используя график, они выясняют следующее.

1) Значение функции $y = x^2$ *положительно* при $x \neq 0$, и *равно нулю* при $x = 0$. Следовательно, парабола $y = x^2$ проходит через начало координат, а остальные точки параболы лежат выше оси абсцисс. Говорят, что парабола $y = x^2$ *касается оси абсцисс* в точке (0; 0).

2) График функции $y = x^2$ симметричен *относительно оси ординат*, так как $(-x)^2 = x^2$. Например, $y(-3) = y(3) = 9$. Таким образом, ось ординат является *осью симметрии параболы*. Точку пересечения параболы с её осью симметрии называют *вершиной параболы*. Для параболы $y = x^2$ вершиной является начало координат.

3) При $x > 0$ большему значению $x$ соответствует большее значение $y$. Например, $y(3) > y(2)$. Говорят, что функция $y = x^2$ является *возрастающей на промежутке* $x > 0$.

При $x < 0$ большему значению $x$ соответствует меньшее значение $y$. Например, $y(-2) < y(-4)$. Говорят, что функция $y = x^2$ является *убывающей на промежутке* $x \leq 0$ (все рассуждения сопровождаются рассмотрением графика функции).

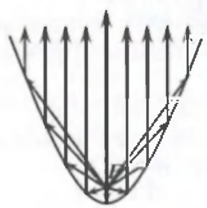


Рис. 44

Следует заметить учащимся, что парабола обладает многими интересными свойствами, которые широко используются в технике. Например, на оси симметрии параболы есть точка, которую называют *фокусом параболы* (рис. 44). Если в этой точке находится источник света, то все отраженные от параболы лучи идут параллельно. Это свойство используется при изготовлении прожекторов, локаторов и других приборов.

Фокусом параболы $y = x^2$ является точка $F(0; \frac{1}{4})$.

Изучение ***класса квадратичных функций*** может проходить в двух вариантах (они достаточно подробно рассмотрены в работе Е. С. Канина «Начала в изучении функций», М., 2005. Изучите их самостоятельно по данному тексту.)

***Вариант I***

Порядок рассмотрения квадратичной функции и графиков следующий:

1) $y = x^2$; 2) $y = ax^2$; 3) $y = ax^2 + k$;

4) $y = a(x - m)^2$; 5) $y = a(x - m)^2 + k$.



Остановимся на этой схеме подробнее.

**1. Функция $y = ax^2$**

При изучении этой функции требуется установить роль коэффициента $a$: при $a > 0$ функция имеет минимум, при $a < 0$ – максимум в начале координат. При $|a| < 1$ происходит растяжение параболы от оси ординат (парабола становится более «пологой»), при $|a| > 1$ – сжатие к оси ординат (парабола становится «круче»). Все это должно иллюстрироваться конкретными примерами и графиками.

*Свойства функции $y = ax^2$.*

1. Если $x = 0$, то $y = 0$.
2. Если $x = \pm 1$, то $y = a$.
3. Если $x \neq 0$ и $a > 0$, то $y > 0$, если $a < 0$, то $y < 0$.
4. Противоположным значениям аргумента соответствуют одинаковые значения функции: $ax^2 = a(-x^2)$ при любых $x$.
5. При $a > 0$ функция возрастает, если $x > 0$, и убывает, если $x < 0$; при $a < 0$ – возрастает, если $x < 0$ и убывает, если $x > 0$.
6. Если $|a| < 1$, то график функции $y = ax^2$ «сжимается» к оси абсцисс (по сравнению с графиком $y = x^2$); если $|a| > 1$, то график $y = ax^2$ «сжимается» к оси ординат.

Заметим, что свойства 2, 3, 5 и 6 функции $y = ax^2$ зависят от коэффициента $a$.

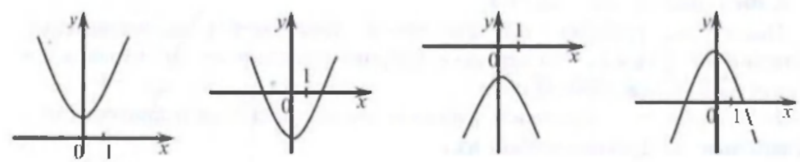
**2. Функция $y = ax^2 + k$**

Геометрически $k$ означает здесь ординату точки параболы с абсциссой 0, то есть график функции сдвигается (переносится) вдоль оси ординат на $k$ вверх, если $k > 0$, и на $|k|$ вниз, если $k < 0$. Свойства четности функции (симметрии графика относительно оси ординат), промежутки её монотонности (в зависимости от знака $a$) рассматриваются аналогично функции $y = ax^2$.

Добавляются и новые свойства квадратичной функции: функция $y = ax^2$ имела нуль при $x = 0$, функция же $y = ax^2 + k$ может (при $k \neq 0$) иметь два нуля или не иметь ни одного. Это надо показать как аналитически, так и графически: нули функции имеют вид

$$x = \pm\sqrt{-\frac{k}{a}},\quad -\frac{k}{a} > 0$$

(при условии, что $k$ и $a$ противоположных знаков). На графике это выглядит так (рис. 45):



$a > 0, k > 0$ $a > 0, k < 0$ $a < 0, k < 0$ $a < 0, k > 0$

Рис. 45

Как видим, если $k$ и $a$ имеют противоположные знаки, то график функции $y = ax^2 + k$ пересекает ось абсцисс, то есть функция имеет два нуля, если же $k$ и $a$ одинаковых знаков, то график функции не пересекает ось абсцисс, то есть функция не имеет нулей.

Наряду с вопросом о нулях функции возникает и вопрос о промежутках знакопостоянства, который следует рассмотреть подробно, так как он часто используется при решении квадратных неравенств.

В случаях, когда $a$ и $k$ одного знака, один и тот же знак имеют и все значения функции. Если $a$ и $k$ отрицательны, то отрицательны и значения функции $y = ax^2 + k$. Это следствие того, что функция не имеет нулей.

Если же функция имеет два нуля, то имеются промежутки области определения, на которых функция принимает только положительные или только отрицательные значения. На такие промежутки область определения разбивается нулями функции. Если обозначить нули функции $x_1$ и $x_2$, то при $a > 0$ и $k < 0$ на промежутках $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$ функция принимает положительные значения, на промежутке $(x_1; x_2)$ - отрицательные. При $a < 0$, $k > 0$ функция положительна на промежутке между своими нулями и отрицательна на промежутках $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$. Все это хорошо видно на рисунке 45. Все сказанное широко используется при решении квадратных неравенств.

И еще одно свойство. В точке $x = 0$ функция имеет экстремум равный $k$ : если $a > 0$ $k$ – минимум, если $a < 0$, то $k$ – максимум функции $y = ax^2 + k$ (рис. 45).

**3. Функция $y = a(x - m)^2$**

Геометрически $m$ означает здесь абсциссу точки параболы с ординатой, равной 0. Значит, $x = m$ является нулем функции $y = a(x - m)^2$. Иными словами, график функции $y = ax^2$ переносится вдоль оси абсцисс на $m$. Сам этот факт усваивается учениками достаточно трудно, поэтому необходимо привести конкретные примеры, рассмотреть параллельный перенос графика как вправо (при $m > 0$), так и влево ($m < 0$) вдоль оси абсцисс.

Как и функция $y = ax^2$, функция $y = a(x - m)^2$ при $a > 0$ возрастает, но уже при $x > m$, и убывает при $x < m$. При $a < 0$, наоборот: при $x > m$ убывает, а при $x < m$ – возрастает.

Кроме того функция, если $x \neq m$, при $a > 0$ положительна, а при $a < 0$ отрицательна.

**4. Функция $y = a(x - m)^2 + k$**

Построение графика этой функции осуществляется последовательным выполнением параллельного переноса графика функции $y = ax^2$ вдоль оси абсцисс на $m$ и вдоль оси ординат на $k$.

Если в формуле, задающей функцию, раскрыть скобки и привести подобные слагаемые, то функция примет вид

$$y = ax^2 + bx + c, \text{ где } b = -2am, \quad c = am^2 + k, \quad m = -\frac{b}{2a}, \quad k = \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Таким образом, функция $y = ax^2 + bx + c$ имеет вид



$$y = a(x + \frac{b}{2a})^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}.$$

Эта же форма получается путем выделения из трехчлена $ax^2 + bx + c$ полного квадрата.

Итак, для построения графика функции $y = ax^2 + bx + c$ достаточно перенести график функции $y = ax^2$ на $-\frac{b}{2a}$ вдоль оси абсцисс и на $\frac{4ac - b^2}{4a}$ вдоль оси ординат.

Гораздо проще в этом случае *перенести не график функции, а систему координат*, построив сначала график функции $y = ax^2$.

***Вариант 2***

Рассмотрение квадратичной функции и графиков проходит в следующем порядке:

1) $y = x^2$; 2) $y = ax^2$; 3) $y = a(x - m)^2$;
4) $y = a(x - m)^2 + k$; 5) $y = ax^2 + bx + c$.

Число шагов от начала изучения квадратичной функции в этом варианте меньше на один, но он имеет и недостатки. В частности здесь фактически выпадает изучение параллельного переноса графика функции $y = ax^2$ вдоль оси ординат, поэтому сразу приходится переходить к более сложному переносу того же графика вдоль оси абсцисс. В школах и классах с углубленным изучением математики возможен сразу переход от функции $y = ax^2$ к функции $y = ax^2 + bx + c$, с

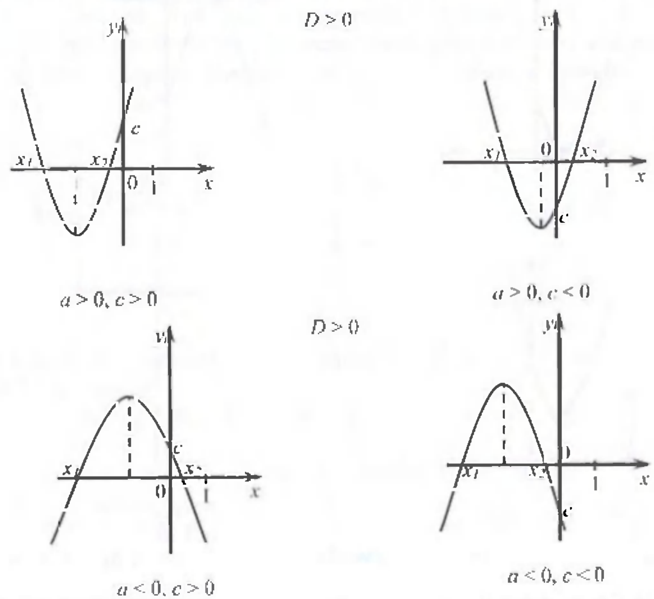



Рис. 46

выделением полного квадрата и построением графика функции путем применения двух параллельных переносов.

Следует отметить, что целью изучения квадратичной функции является не только построение графика, но и оценка поведения функции $y = ax^2 + bx + c$, выявление роли коэффициентов $a$, $b$, $c$. Роль коэффициента $a$ уже рассмотрена нами. Геометрический смысл коэффициента $c$ – это ордината точки пересечения графика функции с осью $Oy$.

Нули квадратичной функции связаны со знаком дискриминанта $D = b^2 - 4ac$: если $D = 0$, то функция имеет один нуль, равный абсциссе вершины параболы $x = -\frac{b}{2a}$ (его в алгебре называют двойным или двукратным нулем); если $D > 0$, то функция имеет два различных нуля, они находятся по формулам корней квадратного уравнения; если $D < 0$, то функция действительных нулей не имеет.

Все сказанное полезно изобразить геометрически: график функции $y = ax^2 + bx + c$ может иметь с осями координат три общих точки, когда $D > 0$ (два нуля и точка $(0; c)$ (рис. 46), две общих точки, если $D = 0$; одну общую с осью ординат точку, если $D < 0$ (рис. 47). При этом: если $a > 0$, то функция имеет минимум, если $a < 0$ – максимум.

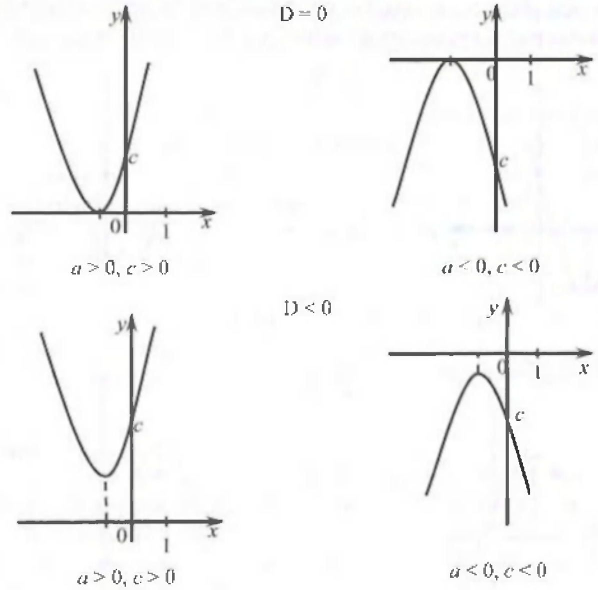


Рис. 47

При $D > 0$ коэффициенты $a$ и $c$ могут иметь как различные, так и совпадающие знаки, а при $D < 0$ $a$ и $c$ обязательно одного знака.



Ордината вершины параболы совпадает со значением максимума (минимума): $y = \frac{4ac - b^2}{4a}$.

Промежутки знакопостоянства записываются так же, как и для функции $y = ax^2 + k$, но зависят они от знака дискриминанта и коэффициента $a$: при $D > 0$, $a > 0$ положительные значения функция принимает на двух интервалах $(-\infty; x_1)$ и $(x_2; +\infty)$, отрицательные значения – на интервале $(x_1; x_2)$. Со сменой знака коэффициента $a$ на интервалах слева и справа от нулей квадратичная функция отрицательна, а на интервале между нулями функции – положительна.

Все сказанное можно иллюстрировать графически (рис. 46, 47).

Полезно, как и в случае функции $y = ax^2$, показать, как от коэффициента $a$ зависит положение графика функции $y = ax^2 + bx + c$:

при $|a| < 1$ график «растягивается» вдоль оси $Ox$;

при $|a| > 1$ – «сжимается» вдоль оси $Ox$ (или «сжимается» к оси $Oy$).

Так будет раскрыт геометрический смысл коэффициентов квадратичной функции.

Большую роль в изучении этой темы играют упражнения. Кроме стандартных упражнений, которые представлены в учебниках, здесь полезны задания, предполагающие интеграцию аналитического и графического методов, направленные на глубокое усвоение геометрического смысла коэффициентов в формуле, задающей квадратичную функцию, на понимание и сопоставление свойств функций и их графического изображения и наоборот; на формирование у учащихся хорошей привычки анализировать условия, заданные как аналитически, так и графически. Приведем некоторые примеры таких упражнений.

**1.** Может ли парабола на рисунке 48 быть графиком функции:

а) $y = ax^2 - ax + b$; б) $y = ax^2 + bx + a$; в) $y = ax^2 - x + a$?

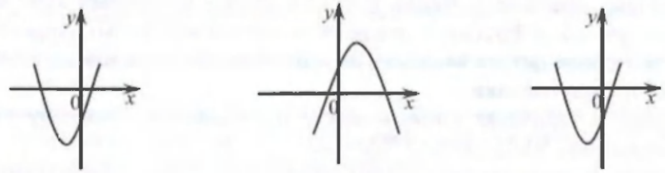


Рис. 48

**2.** На рисунке 49 изображен график функции $y = x^2 + px + q$. Изобразите графики функций:

а) $y = x^2 + px - q$; б) $y = x^2 - px + q$; в) $y = -x^2 + px + q$.

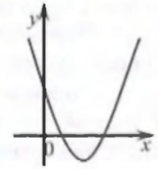


Рис. 49

**3.** Могут ли параболы (рис. 50) быть графиками функций:

а) $f(x) = ax^2 + bx + c_1$ и $g(x) = bx^2 + ax + c_2$;

б) $f(x) = ax^2 + b_1x + c$ и $g(x) = cx^2 + b_2x + a$;

в) $f(x) = ab\,x^2 + x + 1$ и $g(x) = ax^2 + x + b$?


Рис. 50

Следующие упражнения направлены на выяснение положения графика квадратичной функции относительно оси абсцисс.

4. При каких условиях данные параболы касаются оси абсцисс:

а) $f(x) = x^2 + ax + 4$; б) $y = (a - 1)x^2 + (a + 4)x + a + 7$;

в) $g(x) = (ax + b)^2 + (a_1 x + b_1)^2$?

5. При каких действительных значениях $a$ данные параболы расположены:

а) выше оси абсцисс:

1) $y = x^2 + 2(3a - 1)x + 2a + 1$; 2) $y = x^2 - 2(a + 1)x + a$;

б) ниже оси абсцисс:

1) $y = ax^2 - 2x + a - 1$; 2) $y = (a - 1)x^2 + ax - 1$.

## *Вопросы и задания*

1. Подготовьте сообщение об истории возникновения понятия функции и причинах его эволюции.

2. Кто впервые ввел термин «функция»?

3. Почему понятие функции было введено в школьный курс математики? Какие ученые в России и за рубежом выступали за его введение? Как А. Я. Хинчин обосновывал введение понятия функциональной зависимости в школьный курс математики?

4. Какие исторически сложившиеся определения понятия функции существовали в конце XIX – начале XX века?

5. Какие варианты определения понятия функции существуют в настоящее время в математике – науке?

6. Какие методические трактовки понятия функции использовались в школьном курсе математики? Назовите достоинства и недостатки каждой из них.

7. Опишите методику введения понятия функции. Какие виды упражнений необходимы для формирования этого понятия?

8. По какой схеме происходит изучение функций в курсе алгебры основной школы? Проиллюстрируйте сказанное на конкретном примере.

9. Как вводится понятие графика функции? Приведите пример. Каков алгоритм построения графика функции?

10. Какие упражнения необходимы для формирования умения «читать» график функции? Приведите примеры.



11. Опишите методику введения понятия линейной функции и ее графика. Какие частные случаи линейной функции изучаются в курсе алгебры 7 класса?

12. Что геометрически означают коэффициенты $b$ и $k$ в формуле $y = kx + b$?

13. Какие умения формируются у учащихся при изучении линейной функции?

14. Составьте упражнения на усвоение учащимися взаимного расположения графиков линейных функций.

15. В чем отличие свойств квадратичной функции от свойств линейной функции?

16. Охарактеризуйте этапы изучения квадратичной функции.

17. Проанализируйте действующие учебники алгебры для 8 класса. В каком порядке проходит изучение класса квадратичных функций в каждом из них?

18. Как реализуется интеграция алгебраического и графического методов при изучении квадратичной функции? Приведите соответствующие примеры.

19. Разработайте методику введения одной из следующих функций (на выбор): 1) степенной; 2) показательной; 3) логарифмической; 4) тригонометрических; 5) обратных тригонометрических. Составьте общую схему изучения этих функций.

### Рекомендуемая литература


1. Виленкин, Н. Я. Функции в природе и технике / Н. Я. Виленкин. – 2-е изд. испр. – М. : Просвещение, 1985. – 192 с.
2. Вольхина, И. Н. Дифференцированные задания по темам «Функции» и «Рациональные дроби» / И. Н. Вольхина // Математика в школе. – 1999. - № 1. – С. 9 – 13.
3. Дворянинов, С. В., Розов, Н. Х. Некоторые замечания об изучении функций в школе / С. В. Дворянинов, Н. Х. Розов // Математика в школе. – 1994. - № 5. – С. 27 – 30.
4. Каинин, Е. Начала в изучении функций / Е. Каинин. – М. : Чистые пруды. 2005. – 32 с.
5. Клейн, Ф. Элементарная математика с точки зрения высшей. Т. 1. Арифметика, алгебра, анализ. – М. : Наука, 1987. – 431 с.
6. Марнянский, И. А. Еще раз об определении функции / И. А. Марнянский // Математика в школе. – 1991. - № 4. – С. 71 – 72.
7. Методика обучения математике в 2 ч. Часть 2 : учебник для академического бакалавриата / Н. С. Подходова, [и др.]; под ред. Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 299 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-9916-7002-9.
8. Саранцев, Г. И. Упражнения в обучении математике / Г. И. Саранцев. – 2-е изд., дораб. – М.: просвещение, 2005. – 255 с.
9. Теляковский, С. А. О понятии функции в школьном курсе математики / С. А. Теляковский // Математика и школе. - 1989. – № 4. – С. 90 – 91.
10. Хинчин, А. Я. Основные понятия математики и математические определения в средней школе / А. Я. Хинчин. – № 19. Изд. 3. – М. : UPSS, 2014. – 56 с.
11. Хинчин, А. Я. Педагогические статьи : Вопросы преподавания математики. Борьба с методическими штампами / А. Я. Хинчин. – 3-е изд. Под ред. Б. В. Гнеденко. – М. : Изд-во Комкнига, 2013. – 204 с.
12. Цукарь, А. Я. Изучение функций в VII классе с помощью средств образного характера / А. Я. Цукарь // Математика в школе. – 2000. - № 4. – С. 20 – 27.
13. Учебники алгебры, алгебры и начал математического анализа разных авторов, входящие в Федеральный перечень школьных учебников.
14. http://wiki.km-school.ru/wiki/index.php

Л е к ц и я VII

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА КУРСА ГЕОМЕТРИИ ОСНОВНОЙ ШКОЛЫ

1. Цели и задачи курса геометрии основной школы.
2. Содержание обучения геометрии в 7–9-х классах.
3. Логические основы изложения геометрии в 7–9-х классах.

---

## 1. Цели и задачи курса геометрии основной школы

Прежде чем говорить о школьном курсе геометрии, остановимся кратко на характеристике геометрии как науки и основных этапах её развития. В различных энциклопедиях понятие «геометрия» (греч. geometria, от ge – Земля и metreo – мерю) трактуется как «раздел математики, изучающий пространственные отношения и формы, а также другие отношения и формы, сходные с пространственными по своей структуре» (см., например, «Математическую энциклопедию», с. 940 – 941).

**И с т о р и ч е с к а я  с п р а в к а**

Возникновение геометрии относится к глубокой древности и обусловлено практическими потребностями измерения земельных участков, объемов и др. Отсюда и греческое название «геометрия», что означает «землемерие».

В развитии геометрии выделяют четыре основных периода.

***Первый период***, зарождения геометрии как математической науки – протекал в Древнем Египте, Вавилоне и Греции примерно до V в. до н. э. Геометрические сведения того периода были немногочисленны и сводились, прежде всего, к вычислению некоторых площадей и объемов. Геометрия, по свидетельству греческих историков, была перенесена в Грецию из Египта в VII в. до н. э. Здесь на протяжении нескольких поколений она складывалась в стройную систему. Процесс этот происходил путем накопления новых геометрических знаний, выяснения связей между разными геометрическими фактами, выработки приемов доказательств и формирования понятий о фигуре, геометрическом предложении и о доказательстве.

Этот процесс привёл к качественному скачку. Строгое построение геометрии как системы предложений (теорем), последовательно выводимых из немногочисленных определений, основных понятий и истин, принимаемых без доказательства (аксиом) было дано в Древней Греции Евклидом в его труде «Начала» (около III в. до н. э.).

Итак, к III в. до н. э. геометрия превратилась в самостоятельную математическую науку: появились систематические изложения геометрии, где её предложения последовательно доказывались. С этого времени начинается ***второй период*** развития геометрии. Здесь геометрия представлена так, как её в основном понимают и теперь, если ограничиться элементарной геометрией: это наука о простейших пространственных формах и отношениях, развиваемая в логической последовательности, исходя из явно формулированных основных положений – аксиом и основных пространственных представлений. Ещё в Греции к ней добавляются новые результаты, возникают новые методы определения площадей и объемов, учение о конических сечениях, присоединяются начатки тригонометрии и геометрии на сфере.

Начало новой эры было временем упадка греческой цивилизации, а вместе с ней и геометрии. Возрождение наук и искусств в Европе в XVII в. стимулировало развитие геометрии: теоретической основой построения изображений явилась *проективная геометрия* (Ж. Дезарг, Б. Паскаль). Она возникла из задач изображения тел на плоскости. Учение о геометрическом изображении было развито и проведено Г. Монжем (Франция) в виде начертательной геометрии.

Новый шаг был сделан в первой половине XVII в. (1637 г.) Р. Декартом, который ввёл в геометрию метод координат. Метод координат позволил связать геометрию с развивавшейся тогда алгеброй и зарождающимся анализом. Применение методов этих наук в геометрии породило *аналитическую геометрию*, а потом и *дифференциальную*. Геометрия перешла на качественно новую ступень по сравнению с геометрией древних: в ней рассматриваются уже гораздо более общие фигуры и используются существенно новые методы. С этого времени начинается ***третий период*** развития геометрии. Аналитическая геометрия изучает фигуры и преобразования, задаваемые алгебраическими уравнениями в прямоугольных координатах, используя при этом методы алгебры.

Дифференциальная геометрия, возникшая в XVIII в. в результате работ Л. Эйлера, геометрия Г. Монжа и др. исследуют уже любые достаточно гладкие кривые линии и поверхности, их семейства и преобразования.

Во всех этих дисциплинах основы геометрии оставались неизменными, круг же изучаемых фигур и их свойств, а также применяемых методов расширялся.

***Четвертый период*** в развитии геометрии открывается построением в 1826 г. Н. И. Лобачевским *неевклидовой геометрии*, отличающейся от евклидовой аксиомой (постулатом) о параллельных прямых и называемой теперь *геометрией Лобачевского*.

В середине XIX в. были рассмотрены многомерные пространства (К. Якоби, Г. Грассман). Принципиальный шаг был сделан немецким математиком Б. Риманом. Развилась обширная область геометрии, так называемая *риманова геометрия* и ее обобщения, нашедшая важные приложения в теории относительности, в механике и др. В тот же период зародилась топология как учение о тех свойствах фигур, которые зависят лишь от взаимного проникновения их частей и которые сохраняются при любых преобразованиях.

Таким образом, предмет геометрии изменялся в процессе исторического развития, а вместе с ним изменялось и содержание геометрического метода. Постепенно геометрия превратилась в разветвлённую и быстро развивающуюся в разных направлениях совокупность математических теорий, изучающих разные пространства и фигуры в этих пространствах.

Выделяя существенные свойства геометрического метода, А. Д. Александров писал: «Для геометрии характерен такой подход к объекту, который состоит в обобщении и перенесении на новые объекты обычных геометрических понятий и наглядных представлений» [1, с. 309]. И далее: «… геометрия характеризуется не только своим предметом, но и методом, идущим от наглядных представлений и оказывающимся плодотворным в решении многих проблем других областей математики» [там же, с. 313].

Особенности геометрии как науки и задачи школьного курса геометрии академик А. Д. Александров сформулировал в своей статье «О геометрии» (см. «Математика в школе», 1980, № 3). Он писал: «Особенность геометрии, выделяющая ее не только среди остальных частей математики, но и среди других наук вообще, состоит в том, что в ней самая строгая логика соединена с наглядным представлением. Геометрия в своей сущности и есть такое соединение живого воображения и строгой логики, в котором они взаимно организуют и направляют друг друга».

Продолжая эту мысль, он отмечал, что живое воображение ближе к искусству, сухая строгая логика – привилегия науки – это две совершенные противоположности. Однако геометрия их все же соединяет, и задачи преподавания – соединить их в одном учебном предмете. Это есть единство противоположностей, противоречие в самой сущности предмета. Это противоречие составляет особую трудность, а вместе с этим и особую прелесть геометрии.

В курсе геометрии соединяются еще две противоположности: абстрактная математическая геометрия и реальная геометрия – реальные пространственные отношения и свойства тел. Это противоречие выступает уже в тот момент, когда на доске «проводят прямую» и говорят: «Проведем прямую через точки $A$ и $B$ », – но на доске нет точек и невозможно провести прямую: геометрические точки и прямые – это идеальные объекты, они не существуют иначе как в абстрактном мышлении, их, строго говоря, нельзя даже представить, а можно только мыслить.

Утверждения геометрии высказываются и доказываются для идеальных геометрических объектов, но воспринимаются как утверждения об объектах, наглядно представимых, и применяются к реальным вещам.

При всей своей абстрактности геометрия возникла из практики и применяется в практике. Поэтому преподавание геометрии обязательно должно связывать её с реальными вещами, с другими дисциплинами, особенно с физикой.

Таким образом, преподавание геометрии должно включать три тесно связанных, но вместе с тем и противоположных элемента: ***логику, наглядное представление, применение к реальным вещам*** (рис. 51).

***Задача преподавания геометрии*** – развить у учащихся соответствующие три качества: *пространственное воображение, практическое понимание и логическое мышление.*

При этом решаются следующие задачи:

1) приобретение систематических сведений об основных фигурах на плоскости и их важнейших свойствах;

2) формирование представления о равенстве и подобии фигур, основных типах геометрических преобразований и их применении в геометрии;

3) формирование навыков построений, измерение и вычисление длин, углов и площадей;


Рис. 51

4) ознакомление с применением аналитического аппарата для решения геометрических задач (алгебраическими преобразованиями и уравнениями, элементами тригонометрии, аналитической геометрии и векторной алгебры).

В программе по математике перечислены умения, которые должны быть результатом решения этих задач:

- изображать геометрические фигуры, данные в условиях задач и теорем;



- выделять известные фигуры на чертежах и моделях;
- решать типичные задачи на доказательство, вычисление и построение;
- вычислять значения геометрических величин;
- выполнять основные построения циркулем и линейкой;
- решать несложные комбинированные задачи;
- применять аппарат алгебры и тригонометрии в ходе решения геометрических задач;
- использовать векторы и координаты для решения стандартных задач.

## 2. Содержание обучения геометрии в 7-9 классах

Поскольку изучение геометрии в 7-9 классах опирается на достигнутый уровень геометрической подготовки учащихся, то необходимо очертить круг геометрических сведений, получаемых учащимися 1- 6 классов.

В 1-4 классах предусмотрено распознавание геометрических фигур (линий, отрезков, многоугольников, круга) на окружающих предметах и моделях. Изображение фигур на бумаге. Разрезание фигур на части, составление новых фигур. Измерение отрезков. Измерение и вычисление площади прямоугольника.

Программа 5- 6 классов рассматривает основные геометрические фигуры: отрезок, прямую, луч и т. д. Перпендикуляр к прямой. Прямой угол. Параллельные прямые. Величины: длину, площадь, объем, градусную меру угла. Единицы измерения длин, площадей, объемов и углов. Площадь прямоугольника. Объем прямоугольного параллелепипеда. Инструменты: линейку, угольник, транспортир, циркуль. Программа предусматривает построение отрезков и углов заданной величины, построение перпендикуляра к прямой, построение параллельных прямых.

Основные блоки содержания курса геометрии 7-9 классов:

1) геометрические фигуры и их свойства;
2) геометрические величины;
3) элементы тригонометрии;
4) координаты и векторы.

Наиболее важные особенности содержания ныне действующих учебников геометрии в девятилетней школе следующие:

1. Отказ от теоретико-множественного подхода к изучению геометрии, заключающийся не только в отказе от использования теоретико-множественных моделей изучаемых понятий, но даже и от теоретико-множественного языка и символики.

2. Отказ от идеи геометрических преобразований как основы школьного курса геометрии.

3. Равенство треугольников – основная линия в доказательстве теорем и решении задач.

4. Координатный и векторный методы не являются самостоятельными объектами изучения, предусматривается лишь ознакомление учащихся с применением этих методов к решению геометрических задач.

5. Постепенное ознакомление школьников с аксиоматическим методом как способом организации знаний.

Отметим особенности содержания учебников геометрии, написанных в соответствии с рассматриваемой программой.

Обучаясь по учебнику «Геометрия 6-8» под ред. А. Н. Колмогорова (М., 1979), в котором преобладал теоретико-множественный подход, и большое внимание уделялось геометрическим преобразованиям, школьники испытывали большую трудность. Уже на первых уроках геометрии в 6 классе ученики узнавали о неопределяемых понятиях, аксиомах, теоремах. Кроме этого, первые страницы учебника содержали много сложных понятий и утверждений. Изучение этого материала отнимало много времени, но учителям так и не удавалось добиться ясного понимания его содержания. К тому же изучение этих понятий значительно отодвигало знакомство школьников с доказательством теорем, то есть с содержательной частью геометрии.

В действующих учебниках геометрии основное внимание на первых уроках уделяется формированию умения обосновывать простейшие утверждения, что является пропедевтикой доказательства теорем, и осуществляется постепенная подготовка школьников к пониманию необходимости определений и их структуры.

Особенностью действующих учебников геометрии, в отличие от учебников под ред. А. Н. Колмогорова, является отказ от традиционных определений угла и многоугольника. *Углом* считают фигуру, образованную точкой и двумя лучами, исходящими из нее; *треугольником* – фигуру, состоящую из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трёх попарно соединяющих их отрезков, и т. д. (В учебнике А. Н. Колмогорова и др. *углом* называлась фигура, состоящая из двух различных лучей с общим началом и ограниченной ими части плоскости; *многоугольником* - объединение простой замкнутой ломаной и ее внутренней области.) Этот путь к введению понятий угла, треугольника освобождает первые уроки геометрии от необходимости изучения таких понятий как внутренняя область, внешняя область, замкнутая ломаная, простая ломаная и т.д., усвоение которых вызывает значительные трудности у школьников. Указанные понятия вводятся в тех местах курса, где они действительно необходимы. Например, необходимость в понятии внутренней области возникает только при изложении площадей.

В дальнейшем под углом понимают не только два луча, исходящие из одной точки, но и ограниченную ими «часть плоскости». Аналогично рассматривается и многоугольник. Такой подход реализуется сегодня в учебнике геометрии А.В. Погорелова и в учебнике геометрии Л. С. Атанасяна и др., но он имеет свои недостатки. Хотя угол и вводится в этих учебниках как фигура, состоящая из точки и двух лучей, исходящих из нее, однако тут же сообщается, что фигуру, состоящую из угла и его внутренней области, также называют углом.

Таким же как в определении (без части плоскости) представляют себе треугольник учащиеся. В этом случае воображаемая модель треугольника соответствует его графической модели (изображению на доске и бумаге).



В учебнике геометрии авторов А. Д. Александрова, А. Л. Вернера и В. И. Рыжика такие понятия как угол, треугольник, многоугольник с самого начала трактуются как «часть плоскости».

Курсы геометрии А. В. Погорелова, Л. С. Атанасяна и др., А. Д. Александрова и др. построены аксиоматически с умеренным уровнем строгости, учитывающим возрастные особенности учащихся в усвоении тех или иных понятий, и объема материала, подлежащего изучению. Аксиоматика школьного курса геометрии выступает в них не как основа строго формализованной теории, а как совокупность характеристических свойств математической модели реального пространства.

В учебниках геометрии А. В. Погорелова, А. Д. Александрова и др. аксиомы вводятся по мере надобности в них, и доказательства теорем осуществляются со ссылками на используемые аксиомы и ранее доказанные теоремы.

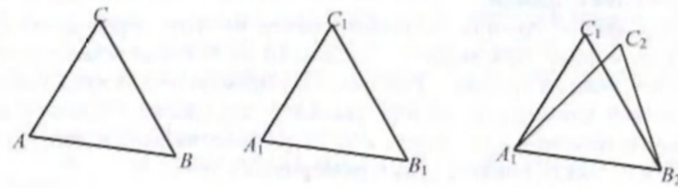



Рис. 52

Система аксиом учебника геометрии Л.С. Атанасяна и др. не содержится в самом учебнике, она представлена в конце его в Приложении I. Можно сказать, данный учебник построен аксиоматически лишь для учителя, аксиоматика этого пособия скрыта для учащихся. Объясняется это следующим:

1) громоздкостью аксиоматики учебника Л. С. Атанасяна;

2) учащиеся не понимают на первых уроках роль аксиом; доказательства теорем со ссылками на аксиомы кажутся им неестественными: для ученика 7 класса, доказывающего первый признак равенства треугольников по учебнику А. В. Погорелова, треугольник $A_1B_2C_2$, равный треугольнику $ABC$ (рис. 52), существует сам по себе, безотносительно к аксиоме существования треугольника, равного данному.

## 3. Логические основы изложения геометрии в 7-9 классах

Чтобы выяснить логические основы школьного курса геометрии, проведем краткий анализ действующих учебников.

**1. *Учебник геометрии А. В. Погорелова***

Неопределяемые понятия: точка, прямая, принадлежность точки прямой, отношение трех точек «лежать между», длина отрезка, градусная мера угла.

Система аксиом планиметрии состоит из следующих групп аксиом.

I. *Аксиомы принадлежности*

$I_1$. Какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки не принадлежащие ей.

$I_2$. Через любые две точки можно провести прямую, и только одну.

Из второй аксиомы следует, что каждая прямая определяется заданием двух её точек. Это дает основание для обозначения прямой двумя точками, например, прямая $AB$. Из второй аксиомы следует также, что две различные прямые либо не пересекаются, либо пересекаются только в одной точке.

II. *Аксиомы порядка*

$II_1$. Из трех точек на прямой одна и только одна лежит между двумя другими.

$II_2$. Прямая разбивает плоскость на две полуплоскости. Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекается с прямой. Если концы отрезка принадлежат одной полуплоскости, то отрезок не пересекается с прямой.

Аксиомы данной группы позволяют ввести понятия отрезка, луча, треугольника. С помощью этих аксиом и аксиом III и IV групп можно доказать, что точка $A$, лежащая на прямой $a$, разбивает эту прямую на два луча и является начальной точкой для каждого из них. Данное утверждение позволяет ввести понятие дополнительного луча. Затем, используя понятия луча и дополнительного луча, можно ввести понятие угла и развернутого угла.

III. *Аксиомы измерения отрезков и углов*

$III_1$. Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

Аксиома $III_1$ позволяет ввести координаты на прямой, то есть сопоставить каждой точке действительное число так, что если $x(A)$ и $x(B)$ – координаты точек $A$ и $B$, то длина отрезка $AB$ равна: $|AB| = |x(B) - x(A)|$. Однако для установления взаимно-однозначного соответствия между точками прямой и действительными числами нужна аксиома существования отрезка данной длины.

$III_2$. Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен $180^0$. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами.

Используя понятия длины отрезка и градусной меры угла, можно ввести понятия равных отрезков, равных углов и равных треугольников, причем понятие равенства треугольников распространяется на ориентированные треугольники.

$\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, если у них $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$, $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$ и $BC = B_1C_1$. При обозначении равенства треугольников важен порядок в котором записываются вершины треугольников.

Равенство $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$ означает, что $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$ … .

Равенство $\Delta ABC = \Delta B_1C_1A_1$ означает уже другое: $\angle A = \angle B_1$, $\angle B = \angle C_1$, $\angle C = \angle A_1$ … .

IV. *Аксиомы откладывания отрезков и углов*

$IV_1$. На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один.



Из этой аксиомы следует, что введением координат на прямой устанавливается взаимно-однозначное соответствие между точками прямой и действительными числами.

$IV_2$. От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей, чем $180^0$, и только один.

V. *Аксиома существования треугольника, равного данному*

Каков бы ни был треугольник, существует равный ему треугольник в заданном расположении относительно данной полупрямой.

VI. *Аксиома параллельных прямых.*

Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.

**2. *Учебник геометрии Л. С. Атанасяна и др.***

Неопределяемые понятия: точка, прямая, отношение трех точек «лежать между», наложение (понятие принадлежности трактуется авторами как теоретико-множественное, а поэтому не относится к числу неопределяемых понятий).

Система аксиом планиметрии включает следующие группы аксиом.

I. *Аксиомы принадлежности* (3 аксиомы).

II. *Аксиомы порядка* (3 аксиомы).

III. *Аксиомы наложения* (8 аксиом, они позволяют ввести понятие равенства фигур).

IV. *Аксиомы измерения отрезков.*

Аксиомы первых четырех групп позволяют ввести координаты на прямой и доказать взаимно однозначное соответствие между точками прямой и действительными числами, а также обосновать измерение углов.

V. *Аксиома параллельных прямых.*

**3. *Пробный учебник А. Д. Александрова, А. Л. Вернера и В. И. Рыжика***

Построение геометрии в данном учебнике опирается на оригинальную аксиоматику, существенным отличием которой является использование отрезка, а не прямой, как неопределенного понятия.

Приведем *аксиомы планиметрии.*

I. Каждые две точки можно соединить отрезком и притом только одним.

II. Каждый отрезок можно продолжить за каждый из его концов.

Аксиомы I-II позволяют ввести понятия: «лежать между», прямая, луч. Лучом называется фигура, получающаяся при неограниченном продолжении отрезка за один из его концов. Прямой $AB$ называется фигура, которая получается при неограниченном продолжении отрезка $AB$ за оба конца.

III. Два отрезка, равные одному и тому же отрезку, равны друг другу.

IV. На каждом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

V. От каждого данного луча по любую сторону от него можно отложить угол, равный данному, и притом только один.

VI. На всяком отрезке, как на основании, можно построить прямоугольник любой данной высоты.

VII. Отрезки, составленные из соответственно равных отрезков, равны.

VIII. Равные отрезки имеют одну и ту же длину. У большего отрезка длина больше.

IX. Длина суммы отрезков равна сумме их длин.

X. Равные углы имеют равные величины, величина большего угла больше.

XI. При сложении углов их величины складываются.

Многие утверждения, традиционно известные как аксиомы, в учебнике А. Д. Александрова и др. доказываются. Например:

1. Через две различные точки проходит прямая и притом только одна.

2. Через точку вне данной прямой можно провести не более одной прямой, параллельной данной.

Аксиоматика, используемая в учебнике А. Д. Александрова и др., обладает рядом преимуществ: она естественно опирается на опыт учащихся, компактна, наглядна, формулировки аксиом просты. Она в большей мере, чем какая-либо другая, дает возможность развивать изложение дедуктивно, доказывая все теоремы с логической строгостью, исходя из аксиом, и вместе с тем доступно для учащихся VII класса.

## *Вопросы и задания*

1. Подготовить сообщение об истории зарождения и развития геометрии как науки.

2. В чем заключается особенность геометрии, выделяющая ее среди других математических наук?

3. Каковы задачи школьного курса геометрии?

4. Опираясь на программы и школьные учебники, охарактеризуйте содержание обучения геометрии в 7-9 классах.

5. Как представлены логические основы школьного курса геометрии в каждом из действующих учебников геометрии?

6. Проанализируйте учебник геометрии для 7 класса В. А. Гусева. Чем он отличается от учебников других авторов? Перечислите его особенности.

7. Охарактеризуйте учебник геометрии 7-9 авторов И. М.Смирновой, В. А. Смирнова. Каковы особенности этого учебника? Как представлена в нем аксиоматика? Какие понятия приняты за неопределяемые?

**Рекомендуемая литература**

1. Александров, А. Д. Геометрия. БСЭ / А.Д. Александров. 3 изд., т. 6. – М., 1971. – С. 309 – 313.
2. Александров, А. Д. О геометрии / А.Д. Александров // Математика в школе. – 1980. – № 3. – С. 56 – 62.
3. Александров, А. Д. Геометрия. 8 класс : учебник для общеобразовательных организаций / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – М. : Просвещение, 2016. – 176 с.
4. Вернер, А. Л. Цикл учебников геометрии / А. Л. Вернер // Математика в школе. – 1996. – № 6. – С. 34 – 37.
5. Геометрия .7 – 9 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – М. : Просвещение, 2017. – 384 с.
6. Гусев, В. А. Геометрия 5 – 6 классы : Учебное пособие / В. А. Гусев. – М.: ООО «ТИД «Русское слово – РС», 2002. – 256 с.
7. Гусев, В. А. Геометрия – 6 (7, 8, 9): Эксперимент. учеб. / В. А. Гусев. – М.: Авангард, 1995 (1996- 1998, 2001).
8. Гусев, В. А. Программа курса «Геометрия» для 5 – 11 классов общеобразовательных учреждений / В. А. Гусев. – М.: ООО «ТИД «Русское слово – РС», 2002. – 32 с.
9. Киселев А. П. Геометрия: Планиметрия: 7-9 кл.: Учебник и задачник / А. П. Киселев, Н. А. Рыбкин. – М.: Дрофа, 1995. – 353 с.
10. Методика обучения геометрии : учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Гусев, В. В. Орлов, В. А. Панчищина и др., под ред. В. А. Гусева. – М. : Издательский центр «Академия», 2012. – 368 с.
11. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под научн. ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.
12. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост. В.И. Мишин. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.
13. Погорелов, А. В. Геометрия. 7 – 9 классы. Учебник. ФГОС / А. В. Погорелов. – М. : Мнемозина, 2015. – 376 с.
14. Рыжик В. И. Геометрия. 7 класс : учебник для общеобразовательных организаций. ФГОС / В. И. Рыжик, А. Д. Александров, А. Л. Вернер. – М. : Просвещение, 2016. – 175 с.
15. Саранцев, Г. И. Методика обучения геометрии : учеб. пособие для студентов вузов по направлению «Педагогическое образование» / Г.И. Саранцев. – Казань : Центр инновационных технологий, 2011. – 228 с.
16. Методика обучения математике в 2 ч. Часть 2 : учебник для академического бакалавриата / Н. С. Подходова, [и др.]; под ред. Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 299 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-9916-7002-9.
17. Смирнова, И. М. Геометрия 7-9: учеб. для общеобразоват. учреждений / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – М.: Мнемозина, 2007. – 376 с.
18. Тихомиров, В. М. Геометрия в современной математике и математическом образовании / В.М. Тихомиров // Математика в школе. – 1993. – № 4. – С. 3 – 9.
19. Шарыгин, И. Ф. Геометрия. 7 – 9 классы. Учебник / И. Ф. Шарыгин. – М. : Дрофа, 2017. – 464 с.
20. Шарыгин, И. Ф. Нужна ли школе XXI века геометрия? / И.Ф. Шарыгин // Математика в школе. – 2004. – № 4. – С. 72 – 79.
21. Шарыгин, И. Ф. Математика. Наглядная геометрия. 5-6 классы : пособие для общеобразоват. учреждений / И. Ф. Шарыгин, Л. Н. Ерганжиева. – 2-е изд. – М.: Дрофа, 2015. – 192 с.

**Лекция VIII**

# МЕТОДИКА ПРОВЕДЕНИЯ ПЕРВЫХ УРОКОВ ГЕОМЕТРИИ В 7 КЛАССЕ

1. Методика изучения основных свойств простейших геометрических фигур.
2. Методика формирования геометрических понятий.
3. Обучение решению задач на первых уроках геометрии.

---

## 1. Методика изучения основных свойств простейших геометрических фигур

Содержание первых уроков геометрии по учебнику А. В. Погорелова составляет § 1 «Основные свойства простейших геометрических фигур», а по учебнику Л. С. Атанасяна и др. глава I «Начальные геометрические сведения».

Первые уроки геометрии в 7 классе во многом определяют успех в изучении этой дисциплины. Они знакомят учащихся с понятиями и их свойствами, которые являются базой для построения геометрии. Цель первых уроков заключается в том, чтобы добиться полного усвоения каждым учеником основных терминов, формулировок; свойств простейших геометрических фигур; понимания необходимости и сути логического обоснования утверждений. Несмотря на общность цели, содержание первых уроков геометрии по учебнику А. В. Погорелова отличается от соответствующего содержания по учебнику Л. С. Атанасяна и др. Поэтому рассмотрим их отдельно.

**1. *Учебник А. В. Погорелова: § 1 «Основные свойства простейших геометрических фигур»***

Содержание первых уроков здесь составляют неопределяемые понятия (точка, прямая, принадлежность, «лежать на», длина отрезка, градусная мера угла); десять аксиом, которые описывают основные свойства неопределяемых понятий и связи между ними. Кроме неопределяемых, рассматриваются понятия: пересекаться, лежать по разные стороны, лежать по одну сторону, отрезок, полуплоскость, полупрямая, дополнительные полупрямые, расстояние, равные отрезки, угол, равные углы, откладывание отрезка и угла, равные треугольники и т.д.; вводятся также понятия: доказательство, теорема, условие и заключение теоремы, аксиома.

Следует заметить, что многие геометрические фигуры и их свойства, а также термины уже знакомы учащимся. Поэтому изучение геометрии на первых



уроках в седьмом классе должно носить характер систематизации и обобщения знаний и умений, приобретенных учащимися в предыдущие годы обучения, и опираться на их опыт восприятия реального пространственного окружения.

Методика преподавания первых разделов курса планиметрии предполагает постепенный, плавный переход от конкретного к общему, постоянное обращение к окружающей действительности и другим видам наглядности. Большое внимание следует уделять обучению учащихся умению логически рассуждать, обосновывать, доказывать высказываемые предложения. С самых первых этапов изучения геометрии необходимо в единую систему увязывать содержание учебника, соответствующие записи на доске и в тетради с рисунками, являющимися опорой для учащихся при самостоятельной работе. На первом уроке геометрии необходимо познакомить учащихся с историей возникновения геометрии.

Геометрические объекты, с которых начинается изучение систематического курса планиметрии, уже знакомы учащимся, однако они предстают перед ними в новом виде. Точка и прямая рассматриваются как основные понятия, свойства которых раскрываются в аксиомах. Это находит отражение в записях, которые носят характер опорных схем: в них дается изображение точек и прямых, их обозначение на плоскости.

Изучение геометрии по учебнику А. В. Погорелова начинается с выделения основных геометрических фигур на плоскости: точки и прямой. Затем с помощью рисунков разъясняется смысл терминов: «лежат на», «принадлежат», «проходит», «прямые пересекаются». Указывается, что выражения «точки лежат на прямой», «точки принадлежат прямой», «прямая проходит через точки» имеют один и тот же смысл. Овладение этой терминологией, понимание её смысла – важная учебная цель, которую необходимо достичь на первом уроке геометрии.

А. В. Погорелов в своем учебнике широко использует обращение к учащимся: «вы видите на рис.», «вы видите, как строится» и т. д. Это обращение имеет несколько целей: 1) сформировать у учащихся представления пространственных образов простейших геометрических фигур; 2) показать образцы изображения простейших фигур на бумаге и выработать умения и навыки школьников в построении этих фигур на бумаге с помощью инструментов.

Методологическая концепция формирования геометрических понятий заключается в восхождении от чувственно-конкретного к абстрактному и в переходе от абстрактных представлений к их конкретизации.

Например, вначале *понятия точки и прямой* ассоциируются с их изображениями на листе бумаги, затем в мышлении школьников осуществляется переход к идеальным образам точки и прямой, не имеющим никаких физических свойств. *Отрезок* воспринимается как часть данной прямой, а затем это восприятие трансформируется в образ отрезка, обладающего основным свойством – *иметь длину*. Восприятие графической модели *угла* служит основой для формирования представления об угле как геометрической фигуре, обладающей основным свойством – *иметь меру*.

Угол треугольника, внешний угол, смежные углы и т.д. – это конкретные образы геометрической фигуры «угол». В мышлении учащихся осуществляется переход от абстрактных представлений к их конкретизации.

Таким же образом осуществляется изучение и других свойств изучаемых понятий. В качестве примера рассмотрим основные свойства откладывания отрезков и углов. Ученик должен посмотреть на рис., где показано, как с помощью линейки на полупрямой от её начальной точки можно отложить отрезок данной длины. Имея образец откладывания отрезка на полупрямой, учащиеся выполняют упражнения на реализацию этого действия. Осуществляется переход от конкретного к абстрактному. Учащиеся замечают свойство: на любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины, и только один. Аналогично, от любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой, меньшей 180°, и только один.

После каждой группы аксиом в учебнике приводится задача с решением, которое служит образцом аргументированного обоснования. Например, в конце пункта 3 «Точка и прямая» дана задача: *Могут ли две прямые иметь две точки пересечения? Объясните ответ.*

*Р е ш е н и е.* Если бы две прямые имели две точки пересечения, то через эти точки проходили бы две прямые. А это невозможно, так как через две точки можно провести только одну прямую. Значит, две прямые не могут иметь две точки пересечения.

В учебнике А. В. Погорелова используются различные виды определений понятий: 1) через ближайший род и видовые отличия; 2) конструктивные (генетические); 3) описательные.

Для понятий, вводимых в начале учебника, характерны определения второго и третьего видов. Вначале используются описательные определения, затем – конструктивные, потом – определения «через ближайший род и видовые отличия». К *описательным* относятся определения таких понятий, как: пересекающиеся прямые, отрезок, луч, лежат по разные стороны и т. д.

К *конструктивным* – определения понятий угла, треугольника, угла треугольника и др.

Определения равных отрезков, равных углов, равных треугольников, смежных углов и т. д. – относятся к определениям «через ближайший род и видовые отличия».

Приведем примеры названных определений.

**1. *Описательные определения***

«Точка $B$ лежит на прямой $b$. Она не лежит на прямой $a$. Точка $C$ лежит на прямой $a$ и на прямой $b$. Прямые $a$ и $b$ пересекаются в точке $C$. Точка $C$ является точкой пересечения прямых $a$ и $b$».

Так дается описание объекта, принадлежащего к понятию пересекающихся прямых.

**2. *Конструктивные определения***

«Углом называется фигура, которая состоит из точки – вершины угла – и двух различных полупрямых, исходящих из этой точки».



Особенностью определений этого вида является то, что они указывают на происхождение объекта, принадлежащего понятию, на способ его построения.

**3. *Определения «через ближайший род и видовые отличия»***

1) «Два отрезка называются равными, если они имеют одинаковую длину».

2) «Биссектрисой угла называется луч, который исходит из его вершины, проходит между его сторонами и делит угол пополам» (связь между свойствами здесь конъюнктивная).

3) «Два отличных от нуля вектора называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых» (связь между свойствами здесь дизъюнктивная).

Характер определений подчеркивается в особенностях контрольных вопросов: Какие отрезки называются равными? Какие углы называются равными? и т.д. Ответы на эти вопросы предполагают *воспроизведения определений* равных отрезков, равных углов и т.д. Вместе с тем есть и такие вопросы: Что такое отрезок с концами в данных точках? Что такое полупрямая? Что такое треугольник? и т.д. Ответы на эти вопросы предполагают *описание построения объекта*, принадлежащего к указанному понятию.

Характер определения указывает на главный акцент в формировании понятий. Если понятие вводится путем конструктивного определения, то основной акцент ставится на овладение способом построения объекта, принадлежащего понятию. Формирование понятия, определение которого построено по схеме «ближайший род и видовые отличия», предполагает овладение его существенными свойствами, запоминание определения.

В обоих случаях важным является умение использовать понятие в различных конкретных ситуациях.

В основе *выбора методов обучения* на данном этапе лежат следующие требования автора учебника: «Каждый ученик должен:

а) практически убедиться в опытном происхождении основных свойств простейших фигур; выполнить письменную работу с использованием инструментов и соответствующей терминологии: «принадлежит», «расположены между», «по разные стороны», «разделяет», «измерить отрезок», «отложить угол» и т. д.;

б) сформулировать свойство и решить приведенную в тексте учебника задачу;

в) приблизиться к пониманию того, что доказывать нужно основные геометрические утверждения, опираясь лишь на аксиомы и ранее доказанные теоремы».

**2. *Учебник Л. С. Атанасяна и др.: глава I «Начальные геометрические сведения»***

Содержание этой главы составляют понятия: точка, прямая, лежать на, пересекаться, отрезок, луч, дополнительные лучи, угол, внутренняя и внешняя области угла, наложение, равенство фигур, отрезок меньше (больше) другого, биссектриса угла, угол меньше (больше) другого, длина отрезка, градусная мера угла и т.д. Кроме того, первая глава содержит понятия прямого, острого и тупого углов, смежных и вертикальных углов.

Здесь формулируются утверждения:

1. Через две любые точки можно провести прямую и притом только одну.

2. Две прямые либо не имеют общих точек, либо имеют только одну общую точку.

3. Выбрав единицу измерения, можно измерить любой отрезок.

4. Равные отрезки имеют равные длины.

5. Меньший отрезок имеет меньшую длину.

6. Если точка делит отрезок на два отрезка, то длина всего отрезка равна сумме длин этих отрезков.

7. Равные углы имеют равные градусные меры.

8. Меньший угол имеет меньшую градусную меру.

9. Неразвернутый угол меньше 180°.

10. Если луч делит угол на два угла, то градусная мера всего угла равна сумме градусных мер этих углов.

Здесь же рассматриваются свойства смежных и вертикальных углов, а также перпендикулярных прямых.

Многие геометрические фигуры и их свойства, изучаемые на первых уроках геометрии 7 класса (по учебнику Л. С. Атанасяна), учащимся известны из курса математики 5-6 классов, поэтому их изучение в 7 классе должно опираться на имеющийся опыт учащихся и основываться на систематизации и обобщении их знаний и умений.

При формировании геометрических понятий большое внимание необходимо уделить этапу, на котором осуществляется непосредственное оперирование графическими моделями фигур. В процессе такого оперирования осуществляется переход к идеальным образам.

Методологическая концепция формирования геометрических понятий, заключающаяся в восхождении от чувственно-конкретному к абстрактному, является основой формирования геометрических понятий в учебнике Л. С. Атанасяна и др..

Также как и в учебнике А. В. Погорелова изучение геометрии здесь начинается с выделения точки, прямой и отрезка. Указывается, что для изображения прямых на чертеже пользуются линейкой, но при этом изображают лишь часть прямой, а всю прямую представляют продолженной бесконечно в обе стороны. Затем с помощью рисунков разъясняется содержание понятий: точка лежит на прямой, точка не лежит на прямой; прямая проходит через точку. Обращается внимание на известный учащимся факт: *через любые две точки можно провести прямую и притом только одну.*

Вначале учащиеся воспринимают взаимное расположение двух конкретных прямых. Это восприятие служит опорой для формулировки свойства взаимного расположения прямых как идеальных геометрических объектов: *две прямые либо не имеют общих точек, либо имеют только одну общую точку.* Точка пересечения двух прямых осознается как конкретный образ «точка».

*Отрезок* воспринимается сначала как часть данной прямой, ограниченной двумя точками, затем как геометрическая фигура, состоящая из двух точек и всех точек, лежащих между ними.



В дальнейшем при изучении треугольников (многоугольников и других фигур) стороны треугольника, его медиана, биссектриса и т.д. выступают в качестве конкретных образов геометрической фигуры «отрезок».

Аналогично формируются понятия «луч», «угол». *Луч* вначале воспринимается как часть прямой, ограниченная точкой. *Угол* – это геометрическая фигура, состоящая из точки и двух лучей, исходящих из этой точки. Указывается, что любой угол разделяет плоскость на две части. Если угол неразвернутый, то одна из частей называется внутренней, а другая – внешней областью угла. Это все поясняется рисунком. Отмечается, что фигуру, состоящую из угла и его внутренней области, также называют углом.

Такая двойственность в трактовке понятия «угол» на первых порах вряд ли целесообразна. В учебнике А. В. Погорелова возможность толкования угла как части плоскости (плоский угол) отмечается только в конце курса планиметрии перед изучением площадей.

В основе формирования понятия равенства фигур лежит представление о предметах, имеющих одинаковую форму и размеры. Существенное свойство этого понятия – совмещение наложением – возникает как абстракция опыта, заключающегося в совмещении фигуры $\Phi_1$ с фигурой $\Phi_2$.

С помощью рисунков выясняется содержание таких понятий, как отрезок $AC$ меньше отрезка $AB$, середина отрезка, угол меньше другого угла, биссектриса угла.

Изложение материала первой главы осуществляется без использования терминов «определение», «доказательство», «теорема», многие факты не обосновываются, а разъясняются. Например, с помощью рисунка делается вывод о том, что неразвернутый угол составляет часть развернутого угла, меньшим считается тот угол, который составляет часть другого, развернутый угол больше любого неразвернутого угла.

*Измерение отрезков и углов*

Принципиально важными моментами здесь являются утверждения:

1) выбрав единицу измерения, можно измерить любой отрезок;
2) равные отрезки имеют равные длины;
3) если точка делит отрезок на два отрезка, то длина всего отрезка равна сумме длин этих отрезков.

Смысл этих трех утверждений разъясняется на конкретных примерах и рисунках. Рисунок как средство усвоения материала используется при формировании понятия градусной меры угла и изучении утверждений.

При изучении первой главы учащиеся впервые встречаются с дедуктивным обоснованием утверждений:

1) сумма смежных углов равна 180°;
2) вертикальные углы равны.

При рассмотрении этих утверждений следует специально подчеркнуть дедуктивный характер их обоснования.

Итак, существенным средством изучения геометрических фигур и их свойств является рисунок. В учебнике Л. С. Атанасяна и др. использование рисунков имеет ту особенность, что они снабжены «подстрочными» указаниями. Например, для разъяснения смысла понятия «неразвернутый угол $COB$ составляет часть развернутого угла $AOB$» используется рисунок с соответствующим замечанием. Слово «определение» используется только в конце курса геометрии седьмого класса, однако многие понятия, изучаемые в первой главе, определяются. Большинство определений имеет структуру «через ближайший род и видовые отличия». К ним относятся: определения дополнительных лучей, развернутого угла, равенства геометрических фигур, середины отрезка, биссектрисы угла, градусной меры угла, прямого, острого, тупого углов, смежных углов, вертикальных углов.

Кроме этого используются конструктивные и описательные определения. К *конструктивным* относятся определения отрезка и угла.

К *описательным* – определения понятий: прямая проходит через точки, пересекающиеся прямые, луч, внутренние и внешние области угла, отрезок меньше другого отрезка и т.д.

Вид определения должен учитываться учителем при опросе учащихся. Если определение понятия описательное, то нельзя требовать от учащихся заучивания определения и ставить им вопрос: «Что называется?». В этом случае следует предложить им объяснить, например, что такое луч, что означает «отрезок $AC$ меньше отрезка $AB$» и т.д.

Важным средством целенаправленного формирования геометрических понятий по учебнику Л. С. Атанасяна и др., в частности на первых уроках геометрии, являются *практические задания*, позволяющие усваивать геометрические факты в процессе оперирования моделями различных геометрических фигур.

Многие упражнения этого учебника ориентированы на мотивацию введения понятий и утверждений, раскрытию их содержания, целенаправленное формирование умений применять изучаемые понятия и факты в различных ситуациях. Все это позволяет учителю организовать учебную деятельность школьников так, что сами учащиеся принимают активное участие в «открытии» и обосновании геометрических фактов.

Осуществление такой учебной деятельности в рамках учебника А. В. Погорелова намного труднее. Обусловлено это трактовкой понятий, способами доказательства, ограниченной ролью упражнений.

**3. *Учебник А. Д. Александрова и др.: глава I «Начала геометрии»***

Эта глава включает следующий учебный материал: «О чем и зачем геометрия» (§ 1). «Отрезки» (§ 2). «Углы» (§ 3). «Треугольники» (§ 4). «Некоторые применения первых теорем о треугольниках» (§ 5). «Четырехугольники» (§ 6). Вопросы, связанные с измерением величин отнесены во вторую главу учебника.

Многие положения методики изучения геометрии на первых уроках по учебникам А. В. Погорелова и Л. С. Атанасяна и др. (широкое использование опыта учащихся, систематизация и обобщение знаний, полученных ими в 5-6 классах, оперирование с моделями фигур как средство раскрытия содержания изучаемых понятий и фактов и т.д.) остаются справедливыми и при изучении



геометрии по учебнику А. Д. Александрова и др. Следует отметить характерное для этого учебника широкое использование *практической мотивации изучения геометрического материала, его связи с жизнью, техникой, практикой.*

## 2. Методика формирования геометрических понятий

Рассмотрим особенности методики формирования геометрических понятий (не только на первых уроках геометрии).

Г. Фройденталь писал: «В школе математика должна рассматриваться не как завершенная наука, а как вид деятельности» («Математика как педагогическая задача: Пособие для учителей. – М., 1982. – Ч. I). Это значит, что в процессе обучения математике учитель должен использовать в разных ситуациях (при формировании математических понятий, обучении решению задач, доказательству теорем) деятельностный подход, сущность которого заключается в деятельностной природе знаний. (Более подробно он изучается в разделах общей методики математики.)

Рассмотрим реализацию этого подхода при формировании геометрических понятий в основной школе.

Понятия, изучаемые в школьном курсе геометрии, составляют 2 группы: *неопределяемые* и *определяемые*. Большинство понятий, представленных в курсе геометрии, определяются по способу «через ближайший род и видовые отличия». Причем в разных учебниках геометрии используются иногда различные определения одних и тех же понятий. Например, параллелограмм в разных пособиях трактуется как:

а) четырёхугольник, у которого противоположные стороны попарно параллельны;

б) пересечение двух полос с непараллельными краями;

в) четырёхугольник, имеющий центр симметрии и т.д.

Все эти определения неравноценны в том смысле, что они обладают разной степенью наглядности. Учитывая важность образного компонента в процессе формирования понятия, следует заметить, что в школьном учебнике геометрии желательны такие определения, которые позволяют воображению легко конструировать образы определяемых объектов. С точки зрения этого требования наиболее удачным является традиционное определение параллелограмма, как четырехугольника, у которого противоположные стороны попарно параллельны.

В целом, формирование геометрических понятий осуществляется по этапам.

***I этап.*** Начинается процесс формирования понятия, как известно, с мотивации его введения. Сущность этого этапа заключается в возбуждении интереса к изучению понятия. Важным средством мотивации введения геометрических понятий является выполнение упражнений, рассмотрение моделей фигур, в частности, готового рисунка. Приведем примеры.

**1.** Выполняется упражнение: $\Delta ABC$ – равнобедренный ($AB = BC$), $BD$ – биссектриса угла $B$ (рис. 53). Доказать, что $\Delta ABD = \Delta CBD$.

Внимание учащихся обращается на то, что отрезок $BD$ соединяет вершину треугольника с серединой противоположной стороны. Это дает возможность ввести понятие медианы треугольника.

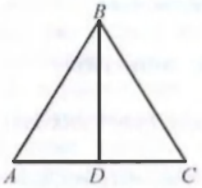



Рис. 53

2. При изучении взаимного расположения прямой и окружности обращается внимание на то, что окружность и прямая могут иметь только одну общую точку. Этот случай мотивирует введение понятия касательной к окружности.

3. Понятия треугольника, четырехугольника можно ввести на основе рассмотрения предметов, имеющих такую форму.

**4.** При рассмотрении моделей различных фигур (куба, пирамиды и т.д.), а также окружающих предметов можно ввести понятия параллельных прямых, пересекающихся прямых.

Со многими геометрическими фигурами можно познакомить учащихся в процессе выполнения упражнений на построение этих фигур. Например, равнобедренный треугольник появляется в результате упражнения на построение треугольника по трем сторонам, из которых две равны.

*Мотивация* введения отдельных понятий предусмотрена и в учебниках геометрии. В учебнике А. В. Погорелова широко используется *готовый рисунок*, в учебнике Л. С. Атанасяна и др. – *практические задания*, в учебнике А. Д. Александрова и др. – *практические ситуации*.

Мотивацией изучения материала может служить *необходимость расширения или углубления теории*. Например, введение векторов вызывает различные операции с ними. В каждом конкретном случае вопрос о мотивации введения понятия решает учитель, и иногда этот этап может отсутствовать, например, при изучении понятий, мотивация введения которых сложна, либо понятий, с которыми ученики уже знакомы на уровне наглядных представлений, а также понятий, которым отводится второстепенная роль.

***II этап.*** Выделение существенных свойств понятия, составляющих его определение (на них следует акцентировать внимание учащихся). Например, ознакомление с существенными свойствами понятия вертикальных углов может быть осуществлено путем выполнения упражнения:

*Постройте произвольный угол, отличный от развернутого. Продолжите его стороны за вершину угла. Охарактеризуйте образовавшиеся пары углов.*

В результате построения образуется 4 пары смежных углов, известных уже учащимся, и две пары углов, стороны которых являются дополнительными лучами. Таким образом, выполняя это упражнение, учащиеся закрепляют понятие смежных углов и знакомятся с существенными свойствами вертикальных углов. С помощью упражнений на построение объектов, удовлетворяющих определенным свойствам, можно осуществлять ознакомление учащихся со многими геометрическими понятиями.

В 5- 6 классах выделение существенных свойств понятий можно осуществлять с помощью упражнений на конструирование фигур, выполняя которые



учащиеся сами выделяют эти свойства понятия. Например, ознакомление с существенными свойствами *биссектрисы угла* может быть осуществлено в процессе выполнения упражнений на перегибание листа бумаги так, чтобы его стороны совпали.

***III этап.*** На этом этапе происходит синтез выделенных существенных свойств и формулировка определения понятия.

***IV этап*** – выяснение понимания каждого слова в определении. На этом этапе не следует пока требовать запоминания определения. Важно выявить, понятен ли учащимся смысл каждого слова, используемого в определении. Непонимание смысла отдельных слов затрудняет усвоение логической структуры определения понятия. Понимание материала – важнейшее условие его запоминания.

***V этап*** – усвоение логической структуры определения понятия. Оно достигается с помощью специальных упражнений. Один из типов таких упражнений составляют упражнения на распознавание объектов, принадлежащих понятию (как составляются такие упражнения, вы знакомились в курсе общей методики математики).

При формировании геометрических понятий удобно для упражнений на распознавание объектов, принадлежащих изучаемому понятию, использовать *готовые рисунки*. Приведем пример.

**1.** Какие из углов, отмеченных на рис. 54, являются смежными?

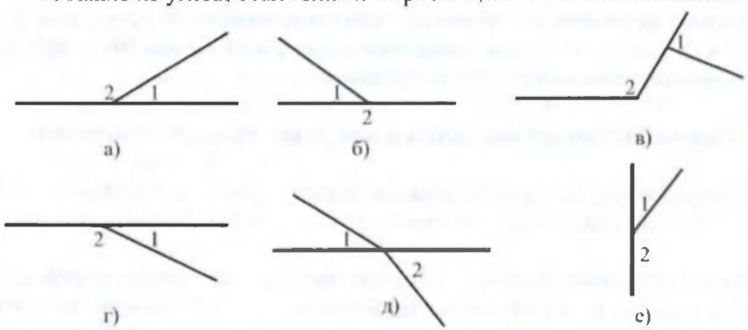



Рис. 54

При распознавании смежных углов следует использовать различные ситуации изображения их на рисунке. Можно в упражнения на распознавание включать требования: изменить условие так, чтобы указанный объект принадлежал понятию. Кроме упражнений на готовых чертежах, следует использовать *задания с неопределенным ответом*. Например:

**2.** Являются ли два угла смежными, если у них одна сторона общая.

Однозначный ответ на этот вопрос отсутствует, так как ничего не сказано о двух других сторонах этих углов.

Для усвоения определения понятия, кроме действия распознавания, используется *действие отыскания следствий*. Для овладения этим действием рекомендуются упражнения на отыскание свойств, которыми обладает объект, принадлежащий понятию. Приведем примеры.

3. Четырехугольник $KPDF$ параллелограмм. Какими свойствами обладает он?

4. Углы 1 и 2 – смежные. Что из этого следует?

***VI этап*** – запоминание определения.

***VII этап*** – использование понятия в конкретных ситуациях.

***VIII этап*** – установление связей данного понятия с другими понятиями.

На VII – VIII этапах осуществляется знакомство со свойствами и признаками понятия, выяснение места данного понятия в системе других понятий. Здесь же учащиеся овладевают умениями переходить от определения понятия к его различным существенным свойствам и обратно, усваивают связи изучаемого понятия с ранее изученными.

В школьном курсе геометрии есть ряд понятий, вводимых путем описания. Процесс формирования этих понятий состоит из тех же этапов, что и формирование понятий с указанием их определений, за исключением этапов III и IV. Работа по формированию таких понятий требует особого внимания учителя; необходимо выделить свойства понятия, разработать алгоритм их применения, составить упражнения, в которых существенные свойства явились бы предметом действия учащихся.

Итак, процесс формирования геометрических понятий (так же как и других математических понятий) включает 8 этапов. Ведущая роль на каждом из этапов принадлежит упражнениям.

Процесс формирования понятий является динамичным процессом. В зависимости от опыта учащихся, конкретного содержания понятий, внимание к этапам формирования может быть различным.

## 3. Обучение решению задач на первых уроках геометрии

Данный вопрос достаточно полно освещен в учебном пособии Г. И. Саранцева «Методика обучения геометрии» (Казань, 2011). Рассмотрим его подробно.

«Успех в решении задач, – отмечает автор, – во многом определяется умением извлекать информацию из требования и условия задачи, вычленять отдельные элементы, комбинировать их, переформулировать требование задачи, выводить следствия, работать с чертежом. Поэтому формирование этих умений должно быть особой заботой учителя математики и осуществляться им систематически и целенаправленно. Особое внимание этому должно быть уделено на первых уроках геометрии в VII классе при изучении первых разделов курса, так как успешное усвоение материала последующих разделов предполагает владение школьниками указанными умениями» [5, с. 51].

Формирование умений происходит, как известно, в процессе выполнения упражнений. Первые навыки в овладении названными выше действиями учащиеся приобретают при выполнении следующих упражнений.

***I группа*** 1. Даны прямая п три точки $A$, $B$, $C$, не лежащие на этой прямой. Известно, что отрезок $AB$ пересекает прямую. При каком условии отрезок $BC$ пересекает данную прямую?



Один из вариантов *ответа*: отрезок $AC$ не пересекает данную прямую.

2. Что нужно знать, чтобы утверждать, что концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, на которые разбивает плоскость прямая $a$?

*Ответ.* Отрезок $AB$ пересекается с прямой $a$.

3. На луче $AB$ отложен отрезок $AC$. Какое условие нужно добавить, чтобы можно было утверждать, что точка $C$ лежит между точками $A$ и $B$?

*Ответ.* Отрезок $AC$ меньше отрезка $AB$.

4. Точки $A$, $B$, $C$ лежат на одной прямой. При каком условии точка $C$ лежит между точками $A$ и $B$?

*Ответ.* Длина отрезка $AB$ равна сумме длин отрезков $AC$ и $BC$, либо отрезок $AB$ больше отрезка $AC$ и отрезки $AB$ и $AC$ отложены на одном луче от его начала $A$.

5. На стороне $AB$ треугольника $ABC$ взята точка $D$. Известно, что $AD = 5$ *см*. Дополните условие так, чтобы можно было найти сторону $AB$ треугольника.

6. Треугольники $ABC$, $PQR$ и $XYZ$ равны. Известно, что $AB = 5$ *см*, $QR = 6$ *см*. Что еще нужно знать, чтобы найти остальные стороны каждого треугольника.

Какова методика работы с этими упражнениями? Они могут предлагаться учащимся при изучении соответствующих фактов. Например, упражнение 3 – при изучении основных свойств откладывания отрезков, а упражнение 6 – при изучении равенства треугольников. В основном предлагаемые упражнения могут выполняться устно. Акцент делается на их целевом назначении. В качестве примера рассмотрим методику работы с упражнением 3.

Этап анализа содержания задачи включает выяснение условия, заключения, вычерчивание рисунка. Дальше беседа с учащимися может быть такой.

*Учитель.* Итак, нам известно, что отрезок $AC$ отложен на луче $AB$. Как расположены точки $A$, $B$ и $C$?

*Ученики.* Либо точка $C$ лежит между точками $A$ и $B$, либо точка $B$ лежит между точками $A$ и $C$.

*Учитель.* А что нам надо установить?

*Ученики.* Надо найти такое условие, которое вместе с данным позволило бы сделать вывод «точка $C$ лежит между точками $A$ и $B$»

*Учитель.* Что нужно ещё знать, чтобы утверждать, что точка $C$ лежит между точками $A$ и $B$?

*Ученики.* Отрезок $AC$ меньше отрезка $AB$.

*Учитель.* Какое же утверждение мы должны включить в условие?

*Ученики.* $AC < AB$

Оформление выполненного упражнения может быть таким.

Точка $C$ лежит между точками $A$ и $B$, если отрезок $AC$ отложен на луче $AB$ и $AC < AB$.

Можно использовать и более подробную запись.

Так как отрезок $AC$ отложен на луче $AB$, то либо $C$ лежит между $A$ и $B$, либо $B$ между $A$ и $C$. Точка $C$ лежит между $A$ и $B$, если $AC < AB$.

В поиске решения задачи большую роль играет прием переформулировки её требования. Сущность этого приема заключается в замене требования задачи новым так, чтобы из него вытекало первоначальное требование. На усвоение данного приема направлены следующие упражнения, которые учащиеся выполняют при изучении соответствующих разделов учебника.

__*II группа*__ 7. Решить задачи, заменив предварительно их требования новыми так, чтобы из них вытекали первоначальные требования.

**7.1.** Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.

*Указание к решению.* Докажите, что угол между биссектрисами вертикальных углов – развернутый.

**7.2.** Отрезки $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $O$. Докажите, что если отрезки $AC$, $CB$, $BD$ и $AD$ равны, то прямые $AB$ и $CD$ перпендикулярны.

*Указание к решению.* Докажите, что луч $AB$ является биссектрисой угла $CAD$, а луч $CD$ – биссектрисой угла $ACB$.

**7.3.** Два отрезка $AB$ и $CD$ пересекаются в точке $O$, которая является серединой каждого из них. Докажите равенство треугольников $ACD$ и $BOC$.

*Указание к решению.* Докажите, что $AC = BD$ и $CB = AD$.

**7.4.** Постройте две окружности, каждая из которых проходит через центр другой. Сколько общих точек имеют эти окружности?

*Указание к решению.* Найдите точки пересечения окружностей, каждая из которых проходит через центр другой.

**7.5.** Если две окружности с центрами $O_1$ и $O_2$ касаются друг друга в точке $M$ внешним образом, то $O_1M + MO_2 = O_1O_2$. Докажите это.

*Указание к решению.* Докажите, что точки $O_1$, $O_2$ и $M$ принадлежат одной прямой.

Методику работы со второй группой упражнений проиллюстрируем на примере 7.1. После выяснения условия и требования задачи, выполнения рисунка, следует акцентировать внимание учащихся на замене требования задачи новым так, чтобы из него следовало первоначальное.

*Учитель.* Откуда следует, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой? Каким предложением можно заменить требование задачи?

*Ученики.* Доказать, что угол между биссектрисами вертикальных углов – развернутый.

Далее следует этап дальнейшего поиска решения задачи, который заканчивается выяснением способа решения: доказательством того, что $\angle MOK = 180°$, где лучи $OM$ и $OK$ – биссектрисы вертикальных углов $AOB$ и $COD$, с опорой на свойство смежных углов.

*Запись решения.*

$$\angle MOK = \angle MOA + \angle AOC + \angle COK = \frac{1}{2}\angle AOB + \angle AOC + \frac{1}{2}\angle COD = \angle AOB + \angle AOC = 180°.$$

Выполнение следующей группы упражнений ориентировано на овладение действием выведения следствий из данных условий. Суть его заключается в выделении утверждений, являющихся следствием данных. Овладение этим действием предполагает умение видеть различные связи между объектами, данными в условии задачи.



__*III группа*__ **8.** Точка $C$ лежит между точками $A$ и $B$, а точка $X$ – между точками $A$ и $C$. Докажите, что точки $A$, $B$, $C$ и $X$ лежат на одной прямой. Сформулируйте все утверждения, полученные в процессе решения этой задачи.

*Ответ.* 1) $A$, $B$, $C$ лежат на одной прямой $AC$; 2) $A$, $X$, $C$ лежат на одной прямой $AC$.

**9.** Точки $A$, $B$, $C$ не лежат на одной прямой. Что следует из этого?

*Ответ.* 1) $AB + BC \neq AC$; 2) $AC + CB \neq AB$; 3) $BA + AC \neq BC$.

По мере продвижения учащихся в изучении геометрии число сформулированных следствий может возрастать. Так, учащиеся могут отметить и такие следствия: около треугольника $ABC$ можно описать окружность; в треугольник $ABC$ можно вписать окружность.

**10.** Назовите различные следствия из следующих данных:

а) известно, что концы отрезка $AB$ лежат на отрезке $CD$, но не совпадают с точками $C$ и $D$;

б) на прямой точка $A$ расположена левее точки $B$, а точка $B$ – левее точки $C$.

*Ответ.* а) 1) Все точки отрезка $AB$ лежат на отрезке $CD$; 2) $A$ лежит между $C$ и $D$; 3) $B$ лежит между $C$ и $D$; 4) $CA < CD$ и т. д.

б) 1) $AB + BC = AC$; 2) $AB < AC$ и т. д.

**11.** Даны окружность с центром в точке $O$ и радиусом $R$ и точка $A$. Известно, что $OA > R$. Что отсюда следует?

*Ответ.* 1) $A$ не лежит на данной окружности; 2) Прямая $OA$ – секущая и т.д.

**12.** Сторона $AB$ треугольника $ABC$ является диаметром окружности, а сторона $AC$ – хордой. Что из этого следует?

*Ответ.* 1) Треугольник $ABC$ – прямоугольный; 2) Треугольник $BOC$ – равнобедренный ($O$ – центр окружности) и т. д.

При выполнении этих упражнений внимание учащихся акцентируется на выводимых следствиях, что прямо подчеркивается в требовании задачи. Рассмотрим, например, упражнение 10.

Из условия и определения отрезка следует, что точки $A$ и $B$ лежат между точками $C$ и $D$. Из последнего утверждения следует, что $CA + AD = CD$, $CB + BD = CD$, откуда получаем: $CA < CD$, $CB < CD$. Из условия и свойства принадлежности точек и прямых на плоскости имеем, что прямые $AB$ и $CD$ совпадают.

*Запись решения* может быть следующей:

1) точки $A$ и $B$ лежат между точками $C$ и $D$ (определение отрезка);

2) $CA < CB$ (свойство величин);

3) прямые $AB$ и $CD$ совпадают (свойство принадлежности точек и прямых).

При выполнении этой группы упражнений можно предлагать учащимся составление задач, используя данные утверждения и их следствия. Примером такой задачи может являться следующая. *Концы отрезка AB лежат на отрезке CD. Докажите, что прямые AB и CD совпадают.*

В процессе поиска решения задачи часто приходится осуществлять не только выведение следствий, замену требования задачи новым, из которого следует первоначальное, но и самостоятельно формулировать промежуточную задачу. В упражнениях следующей группы учащимся предлагалось самостоятельно подобрать требование (вопрос) к предложенному набору данных и решить полученную задачу.

*IV группа* 13. Известно, что $AB = 8$ *см*, $BC = 4$ *см*, $AC = 12$ *см*.

Предполагаемые вопросы:

1) Лежат ли точки $A$, $B$, $C$ на одной прямой?
2) Лежит ли точка $B$ между точками $A$ и $C$?
3) Лежит ли точка $A$ между точками $B$ и $C$?

**14.** В равнобедренном треугольнике $ABC$ с основанием $AC$ проведена медиана $BM$. На ней взята точка $K$.

Предполагаемые требования:

1) Докажите, что треугольники $ABK$ и $CBK$ равны.
2) Докажите, что треугольники $AKM$ и $MCK$ равны.
3) Докажите, что $AK = KC$ и т. д.

**15.** Два внешних угла треугольника равны 100° и 150°.

Предполагаемые вопросы:

1) Найдите третий внешний угол.
2) Найдите сумму внутренних углов треугольника, не смежных с каждым из данных.
3) Что можно сказать о каждом внутреннем угле треугольника?
4) Найдите все углы треугольника.

При решении задач с использованием чертежа часто приходится мысленно выделять (вычленять) отдельные элементы чертежа и сопоставлять их друг с другом. Приведем примеры упражнений такого типа.

**16.** На отрезке $AB$ взята точка $C$. Постройте всевозможные лучи, задаваемые этими точками. Среди них назовите пары совпадающих лучей, пары дополнительных лучей.

**17.** Имеется четыре луча с общим началом. Сколько углов можно задать с помощью этих лучей?

В последней серии упражнений предусматривается формирование умения составлять задачи. Однако прежде чем составить задачу, учащиеся должны сами сформулировать требование, для чего необходимо из данных получить некоторые сведения.

Рассмотрим, например, упражнение 13. Из условия задачи следует, что точка $B$ лежит между точками $A$ и $C$, а, следовательно, точка $C$ не лежит между точками $A$ и $B$. Требуемые задачи могут быть следующими:

1) Известно, что $AB = 8$ *см*, $BC = 4$ *см*, $AC = 12$ *см*. Лежат ли точки $A$, $B$, $C$ на одной прямой?

2) Известно, что $AB = 8$ *см*, $BC = 4$ *см*, $AC = 4$ *см*. Лежит ли точка $B$ между точками $A$ и $C$?

Аналогичная работа проводится и с другими упражнениями.

Приведенные упражнения можно представить в ходе лекции на экране с помощью мультимедийного проектора.



## *Вопросы и задания*

1. Какие понятия являются неопределяемыми в школьном курсе геометрии? Приведите различные варианты систем неопределяемых понятий в разных школьных учебниках.

2. Какие Вам известны виды определений геометрических понятий? Какие виды определений преобладают в первых разделах учебников геометрии для 7 класса? Подберите для каждого вида определений примеры из учебника. Найдите в учебниках геометрии для средней школы разные варианты определений отрезка, луча, угла.

3. Какова методологическая концепция формирования геометрических понятий?

4. На конкретном примере раскройте этапы формирования геометрических понятий.

5. Какие умения необходимо формировать у учащихся для овладения ими общим умением решать задачи?

6. Составьте или подберите из учебников геометрии задания, направленные на формирование каждого из выделенных умений. Разработайте методику выполнения этих упражнений.

7. Составьте систему упражнений по готовым чертежам на формирование понятия «смежные углы».

### Рекомендуемая литература


1. Д а л и н г е р, В. А. Методика обучения математике. Поисково-исследовательская деятельность учащихся : учебник и практикум для вузов / В. А. Далингер – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 460 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-00450-2.3. Д р а з н и н, И. Е. О работе над определениями / И. Е. Дразнин // Математика в школе. – 1995. – № 5. – С. 9.
2. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под научн. ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.
3. Методика обучения математике в 2 ч. Часть 2 : учебник для академического бакалавриата / Н. С. Подходова, [и др.]; под ред. Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 299 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-9916-7002-9.
4. М и щ е н к о, Т. М. Первые уроки геометрии / Т. М. Мищенко // Математика в школе. – 2008. – № 9 - 10. – С. 19-24.
5. С а р а н ц е в, Г. И. Методика обучения геометрии : учеб. пособие для студентов вузов по направлению «Педагогическое образование» / Г.И. Саранцев. – Казань : Центр инновационных технологий, 2011. – 228 с.
6. С о ф р о н о в а, Н. В. Как помочь детям на первых уроках геометрии / Н. В. Софронова // Математика в школе. – 1988. – № 4. – С. 24 – 25.
7. Ф и н к е л ь ш т е й н, В. М. О подготовке учеников к изучению нового понятия, новой теоремы / В. М. Финкельштейн // Математика в школе. – 1996. – № 6. – С. 21 – 23.
8. Ф р о л о в а, Т. Ф. Роль наглядных представлений при изучении первых разделов планиметрии / Т. Ф. Фролова // Математика в школе. – 1989. – № 1. – С. 39 – 45.
9. Учебники геометрии разных авторов, входящие в Федеральный перечень школьных учебников (см. лит-ру к лекции VII № 3, 4, 6, 14 и др.).

Лекция IX

# МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ РАВЕНСТВА ФИГУР

1. Различные подходы к формированию понятия равенства фигур.
2. Введение понятия равных треугольников.
3. Методика изучения признаков равенства треугольников.
4. Обучение решению задач с помощью признаков равенства треугольников

---

## 1. Различные подходы к формированию понятия равенства фигур

В учебно-методической литературе изложены различные подходы к введению понятия равенства фигур.

***I подход.*** Вначале дается определение равных (конгруэнтных) фигур, затем рассматривается равенство различных видов фигур (треугольников, четырехугольников и т. д.). Известны различные модификации этого подхода.

1. Равенство фигур определяется через отображение фигуры на фигуру, либо через движение (перемещение) плоскости. Первый путь реализован в учебнике геометрии под ред. А. Н. Колмогорова, второй – в учебнике под ред. З. А. Скопеца. Отображение, как правило, не определяется; содержание этого понятия раскрывается на конкретных примерах. Опыт работы по учебнику под ред. А. Н. Колмогорова показал, что реализация этого пути вызывает большие трудности у учащихся.

2. Равенство фигур определяется через наложение. Причем, иногда содержание понятия наложения считают интуитивно ясным и не раскрывают его (например, Киселев А. П. Элементарная геометрия. – М., 1980). Иногда понятие наложения относят к основным, а поэтому его содержание и связь с другими основными понятиями описывают с помощью аксиом. Этот вариант реализован в учебнике геометрии Л. С. Атанасяна и др.

***II подход.*** Определению равенства фигур предшествует введение равенства отрезков, углов и треугольников. *Два отрезка называются равными, если они имеют одинаковую длину. Два угла называются равными, если они имеют равные градусные меры. Треугольники называются равными, если у них соответствующие стороны равны и соответствующие углы равны.*

Равенство фигур определяется через движение: две фигуры называются равными, если они движением переводятся одна в другую. Для указанного способа определения равенства треугольников значение имеет порядок в записи вершин.

Реализация этого подхода вызывает ряд методических и психологических трудностей. В частности, учащиеся 7 класса не понимают необходимости настойчивого обращения к аксиомам при обосновании первых утверждений, а опора всякий раз на аксиомы затрудняет логический смысл и усвоение доказательств. Определенные трудности возникают и с необходимостью соблюдать порядок, в котором записываются вершины равных треугольников.

***III подход.*** Оригинальным является изложение равенства фигур в учебнике А. Д. Александрова и др. Как и в учебнике А. В. Погорелова, сначала рассматривается равенство отрезков, затем равенство углов, треугольников, после чего равенство фигур. Однако в данном пособии основу равенства углов и треугольников составляет равенство отрезков. Методическим приемом, облегчающим учащимся усвоение аксиом сравнения отрезков и откладывания отрезков здесь выступает наложение.

Равенство углов определяется через равенство отрезков: *два угла с вершинами $O$ и $O_1$ и сторонами $a$, $b$ и $a_1$, $b_1$ называются равными, если на их сторонах найдутся такие точки $A$, $B$ и $A_1$, $B_1$, что отрезки $OA$, $OB$, $AB$ равны соответственно отрезкам $O_1A_1$, $O_1B_1$, $A_1B_1$, то есть $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$, $AB = A_1B_1$.* Используя определение равенства углов, легко доказать, что, если в треугольниках $ABC$ и $A_1B_1C_1$ $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $BC = B_1C_1$, то $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, $\angle C = \angle C_1$. Этот факт позволяет определить равенство треугольников только через равенство их соответственных сторон: *треугольники называются равными, если их соответственные стороны равны.*

При таком подходе к равенству треугольников вместо обычно трёх признаков равенства треугольников рассматриваются два, доказательства которых несложные.

## 2. Введение понятия равных треугольников

Треугольник – самый «экономный» вид многоугольника. Для его задания достаточно указать его вершины – три точки, не лежащие на одной прямой, или три попарно пересекающиеся прямые. Классифицируют треугольники или по степени их симметричности или по числу равных сторон (таблица 9).

Таблица 9

| Треугольник | Количество осей симметрии | Количество пар равных треугольников |
|---|---|---|
| Равносторонний | 3 | 3 |
| Равнобедренный | 1 | 1 |
| Разносторонний | Нет | Нет |

В школе принята также классификация треугольников по углам: остроугольные, прямоугольные и тупоугольные.

Изучение треугольников в соответствии с программой распределено по всем классам основной школы. Курс 7 класса – это, по существу, геометрия треугольника.

Треугольник – одна из основных «рабочих» фигур изучаемого в школе курса планиметрии. Установление цепочек равных треугольников – широко используемый прием доказательства различных геометрических утверждений.

Равенство треугольников традиционно изучается в курсе планиметрии. Однако трактовка этого понятия, методика его введения разные для различных учебников. Так, в учебниках А. Н. Колмогорова и др. «Геометрия 6-8» (М., 1979) и Л. С. Атанасяна и др. «Геометрия 7-9» (М., 2003) равные треугольники – частный случай равных фигур, то есть фигур, которые можно совместить наложением. Такие понятия, как «совмещение» и «наложение», считаются интуитивно понятными учащимся и в курсе не определяются.

Иной подход, как уже было сказано, реализован в пробном учебнике А. Д. Александрова и др.. Здесь равными называются треугольники, у которых соответственные стороны равны. Такая «экономия» свойств, определяющих равные треугольники, ведет к сокращению числа признаков равенства треугольников. С другой стороны, такой подход не позволяет ввести общее понятие равных многоугольников.

Будем рассматривать методику изучения равенства фигур по действующим учебникам А. В. Погорелова и Л. С. Атанасяна и др., хотя методические рекомендации по формированию понятий, по организации работы с теоремой применимы и к изучению этой темы по другим учебным пособиям, в частности по учебнику А. Д. Александрова и др. (Подробно этот вопрос рассмотрен в учебном пособии Г. И. Саранцева [11].)

**1. *Учебник геометрии А.В. Погорелова***

Характерным для учебника А.В. Погорелова является наличие в нем аксиомы существования треугольника, равного данному (которая, по существу, является эквивалентом аксиомы подвижности плоскости).

Понятие равных отрезков (углов) можно ввести здесь следующим образом. Начертить на доске несколько отрезков, среди которых должны быть и такие, которые имеют равные длины, измерить длины отрезков, отметить, что отрезки, имеющие одинаковую длину, называются равными.

Определение равных отрезков простое и поэтому не требуется большой работы для его усвоения. Для этого достаточно выполнить следующие упражнения:

**1.** Установить с помощью линейки, какие из изображенных на рисунке отрезков равны (рисунок дан).

**2.** Известно, что отрезок $AB$ равен отрезку $CD$. В каком соотношении находятся их длины?

При введении понятия равных треугольников следует начертить несколько треугольников, измерить их стороны и углы, выделить треугольники с равными углами и сторонами, это равные треугольники. Затем следует предложить упражнения на усвоение существенных свойств понятия, в частности, на усвоение записи равенства треугольников.



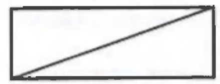


Рис. 55

**1.** Что нужно знать, чтобы утверждать равенство треугольников $ABC$ и $DEK$?

**2.** На рисунке 55 изображено два равных треугольника. Написать равенство этих треугольников, обозначив их вершины.

**3.** Если разносторонние треугольники $ABC$ и $DKM$ (рис. 56) равны, то

а) $AB = DK$, $AC = DM$, $\angle B = \angle K$;

б) $\angle A = \angle M$, $AB = DK$, $\angle C = \angle D$;

в) $AB = DK$, $AC = DM$, $BC = KM$, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle K$? Верны ли эти утверждения?

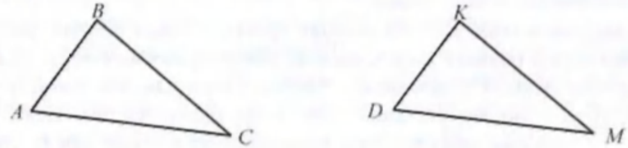



Рис. 56

**4.** Известно, что $\Delta ABC = \Delta MPK$. Написать все соотношения между сторонами и углами этих треугольников.

**5.** Известно, что $\angle A = \angle K$, $\angle B = \angle L$, $\angle C = \angle M$, $AB = KL$, $AC = KM$, $BC = LM$. Равенство каких треугольников следует из условия?

**6.** $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle L$, $\angle C = \angle M$. Равны ли треугольники $ABC$ и $PLM$? Дополнить условие так, чтобы из него следовало равенство треугольников $ABC$ и $PLM$.

Следует обратить внимание на запись равенства треугольников в данном учебнике. Буквы, обозначающие соответственные вершины, должны занимать одинаковые позиции в обозначении треугольников. Это позволяет: 1) имея запись равенства треугольников, например $\Delta ABC = \Delta PQR$, почти автоматически делать вывод о равенстве соответственных сторон и углов, т. е. по определению будем иметь: $AB = PQ$, $BC = QR$, $AC = PR$, $\angle A = \angle P$, $\angle B = \angle Q$, $\angle C = \angle R$; 2) существенно опираться на запись равенства треугольников при доказательстве равенства углов при основании в равнобедренном треугольнике и теоремы, обратной ей.

Необходимо отметить, что А. В. Погорелов использует (в целях логического развития учащихся) сильный прием: доказательство эквивалентности двух различных определений равных треугольников – вышеуказанного и как фигур, совмещаемых движением. Этот вопрос можно обсудить на занятиях кружка или в индивидуальной работе с сильными учащимися.

**1. *Учебник геометрии Л. С. Атанасяна и др.***

В этом учебнике понятие равных фигур вводится через наложение. Для этого на листе бумаги изображаются две равные фигуры $Ф_1$ и $Ф_2$, затем копируется фигура $Ф_1$ на кальку и перемещением кальки совмещается копия фигуры $Ф_1$ с фигурой $Ф_2$. Если они совместятся, то фигура $Ф_1$ равна фигуре $Ф_2$. (Подобные действия можно проиллюстрировать с помощью компьютера.)

Согласно определению равенства фигур два отрезка (угла, треугольника) равны, если их можно совместить наложением. Для усвоения этих понятий следует использовать упражнения на установление равенства заданных фигур с помощью кальки. Таким же способом легко установить, что: а) равные отрезки имеют равные длины и обратно; б) равные углы имеют равные градусные меры и обратно. Эти утверждения используются для доказательства равенства отрезков, углов.

Программа диктует необходимость с самого начала изучения курса планиметрии проводить с учащимися работу по формированию и развитию таких понятий, как «свойство» и «признак».

После введения определения равных треугольников обычно рассматривается их свойство: «В равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы и против равных углов лежат равные стороны». Из такой формулировки ученику непонятно, что же здесь дано, а что требуется доказать. Поэтому желательно формулировку теоремы дать на языке «если – то»: «Если треугольники равны, то ...». Ученику видно, что даны равные треугольники, и в этом случае легче пояснить, что речь идет о свойствах равных треугольников. Когда заключение в формулировке теоремы будет «..., то такие треугольники равны», то следует заметить учащимся, что речь идет о признаке равных треугольников.

Целесообразно также выполнить несколько упражнений на доказательство равенства фигур с помощью наложения. Такие упражнения будут способствовать усвоению метода доказательства, который используется в учебнике.

**1.** $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$. Докажите, что медианы $BD$ и $B_1D_1$ этих треугольников равны.

Так как $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, то при наложении треугольника $ABC$ на треугольник $A_1B_1C_1$ вершины $A$, $B$, $C$ совпадут соответственно с вершинами $A_1$, $B_1$, $C_1$. Так как точки $D$ и $D_1$ середины совпавших сторон $AC$ и $A_1C_1$, то при указанном наложении они также совпадут, следовательно, совпадут и отрезки $BD$ и $B_1D_1$. Значит, $BD = B_1D_1$.

## 3. Методика изучения признаков равенства треугольников

Центральное место в изучении равных треугольников занимают признаки равенства треугольников.

Прежде, чем, приступить к ознакомлению учащихся с этими признаками, надо пояснить термины «угол, прилежащий к стороне», «угол, противолежащий стороне», «сторона, противолежащая углу», «угол, заключенный между сторонами» и т.д.. Учащиеся не всегда могут указать угол, противолежащий меньшей стороне тупоугольного треугольника (рис. 57).

Полезно на чертеже продолжить стороны треугольника, заключающие некоторый угол, и выяснить, что прилежащие стороны лежат на сторонах угла (лучах), а противолежащая углу сторона расположена внутри угла (рис. 58).



Ознакомление с признаками равенства треугольников можно осуществить посредством упражнения.

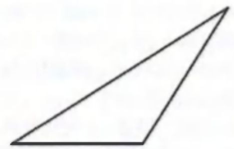


Рис. 57

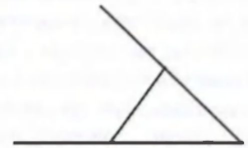


Рис. 58

Например, перед введением признака равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними выполняется упражнение.

**1.** Постройте два треугольника $ABC$ и $A_1B_1C_1$, у которых $AB = A_1B_1 = 6$ *см*, $AC = A_1C_1 = 5$ *см*, $\angle A = \angle A_1 = 50°$. Равны ли треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$?

Для того чтобы ответить на вопрос задачи, учащиеся должны (в рамках учебника А.В. Погорелова) измерить стороны $BC$ и $B_1C_1$, углы $B$, $B_1$, $C$, $C_1$ и сравнить результаты.

Упражнение приведет таким образом к выводу, что указанные треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ равны. Так как выполнение этого упражнения требует проведения различных измерений, а значит, и времени, то целесообразнее предложить его в качестве домашнего задания, а на уроке обсудить результаты его выполнения. Можно использовать для ознакомления с признаком и специальные модели.

По учебнику Л. С. Атанасяна и др. введение признаков равенства треугольников можно осуществить другим способом. Взять две каркасные модели треугольника, удовлетворяющие изучаемому признаку (равные элементы можно как-то выделить, например, окрасить одинаковым цветом), и наложить одну из них на другую (аналогичную операцию можно также выполнить с помощью компьютера). В результате этой операции треугольники совпадут, откуда и будет следовать их равенство.

«Открыв» с учащимися признак равенства треугольников, следует подчеркнуть практическую значимость теоремы, которая позволяет делать вывод о равенстве двух треугольников не по равенству шести элементов треугольника (трех сторон и трех углов), а по равенству трех элементов (двух сторон и угла между ними; стороны и двух прилежащих к ней углов; трех сторон). Здесь же необходимо выяснить с учащимися и ***сущность понятия признака***. Признак явления позволяет дать однозначный ответ на вопрос: принадлежит какой-либо объект данному явлению или нет?

Формулировки признаков равенства треугольников громоздки, поэтому целесообразно поэлементное их усвоение. Например, формулировка первого признака равенства треугольников может быть разбита на следующие элементы: *Если две стороны и угол между ними одного треугольника / равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, / то такие треугольники равны.*

После этого можно предложить упражнения на распознавание.

Важным этапом в изучении теоремы является её доказательство.

В учебнике Л. С. Атанасяна и др. доказательства первых двух признаков равенства треугольников аналогичны и осуществляются посредством наложения. Рассмотренные нами упражнения на доказательство равенства фигур с помощью наложения способствуют усвоению этого метода, поэтому изучение первых двух признаков не вызывает затруднений у школьников.

Доказательство третьего признака равенства треугольников (по трем сторонам) не аналогично доказательству первых двух признаков, оно отличается большей искусственностью. Однако и в этом случае можно привлечь учащихся к её доказательству. Их внимание следует обратить на то, что наложение треугольника $ABC$ на треугольник $A_1B_1C_1$ не приводит к успеху (ничего неизвестно об углах). Поэтому нужно искать новый способ доказательства. Попробуем как-то «сблизить» эти треугольники, для чего наложим треугольник $ABC$ на полуплоскость с границей $A_1B_1$, не содержащую точку $C_1$ (более подробно доказательство см. в учебнике Л. С. Атанасяна и др.).

Доказательства первых двух признаков равенства треугольников в учебнике А. В. Погорелова основывается на аксиомах существования треугольника, равного данному, откладывания отрезка и угла. Поиск доказательства первого признака может быть начат такой беседой.

**1.** Как будем доказывать равенство треугольников $ABC$ и $A_1B_1C_1$ (рис. 59)?

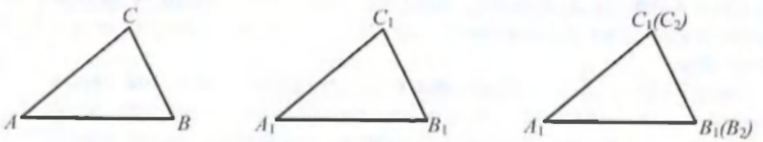



Рис. 59

Может быть кто-то из учащихся ответит, что нужно измерить стороны $BC$ и $B_1C_1$ и углы $B$, $B_1$, $C$, $C_1$. В случае равенства соответствующих сторон $BC$ и $B_1C_1$ и равенства углов $C$ и $C_1$, $B$ и $B_1$, делаем вывод о равенстве самих треугольников. Но здесь необходимо заметить учащимся, что таким образом мы можем установить равенство конкретных треугольников, да и то приближенно, так как практические измерения не дают точных результатов. Итак, нужно искать способ, который не основан на измерениях.

**2.** Нельзя ли ввести треугольник, равный треугольнику $ABC$ и «удобнее» расположенный по отношению к треугольнику $A_1B_1C_1$.

Введем треугольник $A_1B_2C_2$, расположенный так, что точка $C_2$ принадлежит лучу $A_1C_1$, а точка $B_2$ лежит в одной полуплоскости с точкой $B_1$ относительно прямой $A_1C_1$. Теперь задача заключается в доказательстве равенства треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_1B_2C_2$.

**3.** Что надо знать, чтобы установить равенство треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_1B_2C_2$?

Надо установить совпадение треугольников $A_1B_1C_1$ и $A_1B_2C_2$.



Для утверждения того, что $\Delta A_1B_1C_1$ совпал с $\Delta A_1B_2C_2$ надо убедиться в совпадении вершин $B_1$ и $B_2$, $C_1$ и $C_2$.

4. Из каких утверждений следует совпадение вершин $B_1$ и $B_2$, $C_1$ и $C_2$?

Ответ на этот вопрос дают свойства откладывания отрезка, откладывания угла и условие теоремы. По мере поиска доказательства осуществляется и формирование рисунка. После нахождения способа доказательства теоремы (признака равенства треугольников) следует еще раз остановиться на узловых моментах доказательства (введение нового треугольника, равного данному, совпадение «нового» треугольника с одним из данных, равенство данных треугольников) и оформить его. Запись доказательства должна содержать все узловые моменты, по которым можно было бы воспроизвести доказательство.

В качестве примера приведем запись доказательства первого признака равенства треугольников по учебнику А. В. Погорелова.

*Дано:* $\Delta ABC$, $\Delta A_1B_1C_1$ (рис. 59), $AB = A_1B_1$, $AC = A_1C_1$, $\angle A = \angle A_1$.

*Доказать:* $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$.

*Доказательство:*

1) $\Delta A_1B_2C_2 = \Delta ABC$ (свойство 8);

2) $C_2$ совпадает с $C_1$ ($A_1C_1 = A_1C_2$);

3) лучи $A_1B_2$ и $A_1B_1$ совпадают ($\angle B_1A_1C_1 = \angle BA_1C_2$);

4) точки $B_2$ и $B_1$ совпадают ($A_1B_1 = A_1B_2$);

5) $\Delta A_1B_1C_1$ и $\Delta A_1B_2C_2$ совпадают, а потому они равны;

6) Так как $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta A_1B_2C_2$, $\Delta A_1B_2C_2 = \Delta ABC$, то $\Delta ABC = \Delta A_1B_1C_1$, что и требовалось доказать.

Запись доказательства первого признака равенства треугольников по учебнику Л. С. Атанасяна и др. выглядит следующим образом:

*Доказательство:*

1. Наложим $\Delta ABC$ на $\Delta A_1B_1C_1$ так, чтобы:

1) точка $A$ совпала с точкой $A_1$;

2) луч $AC$ с лучом $AC_1$. Тогда:

3) точка $C$ совпадет с точкой $C_1$ (так как $AC = A_1C_1$);

4) луч $AB$ пойдет по лучу $A_1B_1$ (так как $\angle A = \angle A_1$);

5) точка $B$ совпадет с точкой $B_1$ (так как $AB = A_1B_1$);

6) сторона $BC$ совпадет со стороной $B_1C_1$ (так как крайние точки этих отрезков совместились);

7) треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ таким образом совместятся, следовательно, они равны, что и требовалось доказать.

Запись доказательства может быть представлена в ходе лекции на экране с помощью мультимедийного проектора.

Использование признака равенства треугольников следует начинать с простейших примеров. Затем ситуации должны усложняться и в конечном варианте возможно использование нескольких признаков. Следует учитывать ситуации, в которых школьники должны выбрать оптимальный для данного случая признак.

## 4. Обучение решению задач с помощью признаков равенства треугольников

Овладение тем или иным методом предполагает усвоение всех его составляющих действий. Компонентами умения применять признаки равенства треугольников в различных конкретных ситуациях являются:

1) умение выделять на чертеже фигуры;
2) умение переосмысливать элементы чертежа в плане различных понятий;
3) умение осуществлять сопоставимое вычленение фигур;
4) умение преобразовывать требование задачи в равносильное ему;
5) умение выводить следствия из данных условий;
6) умение выделять треугольники с заданными элементами;
7) умение строить треугольники с заданными элементами;
8) умение переходить от равенства треугольников к равенству их элементов;
9) умение переходить от равенства элементов треугольника к равенству самих треугольников;
10) умение выбирать из различных соотношений между сторонами и углами треугольников такие, которые наиболее просто доказать в данной ситуации;
11) умение распознавать ситуации, к которым применим признак равенства треугольников.

Проиллюстрируем сказанное на конкретном примере.

*Два отрезка AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Доказать равенство треугольников ACD и BDC.*

Для доказательства выделим, прежде всего, треугольники *ACD* и *BDC* (умение выделять на рисунке фигуры, переосмысливать элементы чертежа в плане различных понятий). Сравним треугольники *ADC* и *BDC* (умение осуществлять сопоставимое вычленение фигур). Учитывая, что *DC* – общая сторона треугольника *ADC* и *BDC*, нужно доказать:

1) $AD = BC$, $DB = AC$; либо 2) $AD = BC$, $\angle ADC = \angle BCD$;

либо 3) $\angle ACD = \angle BDC$, $\angle ADC = \angle BCD$;

4) $\angle DCA = \angle CDB$, $AC = BD$.

Возможно доказательство и других соотношений, например: 5) $AD = BC$, $BC = AC$, $\angle A = \angle B$ (умение переходить от равенства треугольников к равенству их элементов, умение преобразовывать требование задачи). Важно выбрать из указанных соотношений такое, которое наиболее просто доказать в данной ситуации. (Подобным образом продолжите анализ решения этой задачи.)

Отметим, что умения преобразовывать требование задачи, формулировать промежуточные задачи, выводить следствия из данных условий являются основой решения любых задач, они должны формироваться, в основном на первых уроках геометрии. Остановимся лишь на тех умениях, которые являются специфическими в составе умения применять признаки равенства треугольников. В учебниках достаточно упражнений на формирование умения переходить от равенства треугольников к равенству их элементов, однако упражнения, формирующие умение осуществлять переход от равенства соответственных элементов к равенству треугольников, отсутствуют. Примеры таких упражнений уже приводились нами (см. п. 2 данной лекции).

Для усвоения действий 8) – 11) и их совокупностей можно предложить следующие упражнения.

**1.** Треугольники *BAC* и *CDB* равны. Напишите все соотношения, из которых следует равенство указанных треугольников.

**2.** Известно, что $OD = AO$, $OC = BO$ (рис. 60). Какое из возможных соотношений между элементами треугольников *ABC* и *BCD* следует взять, чтобы как можно проще доказать равенство этих треугольников.

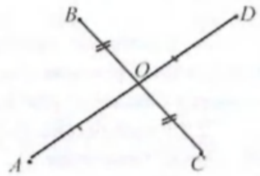


Рис. 60

**3.** Известно, что две стороны одного треугольника равны двум сторонам другого. Равны ли сами треугольники? Если нет, то изменить условие так, чтобы из него следовало равенство этих треугольников.

**4.** Известно, что $AO = OC$ (рис. 61). Что еще нужно знать чтобы утверждать, что $\Delta ABO = \Delta CDO$?

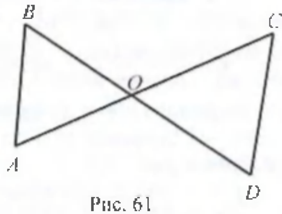


Рис. 61

**5.** Напишите соотношение между элементами треугольников *ABC* и *ADC*, из которых следовало бы их равенство.

**6.** $AB = AD$, $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 62). Доказать, что $\Delta ABC = \Delta ADC$.

**7.** Луч АС – биссектриса угла *BAD*, $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 63). Доказать, что $\Delta ABC = \Delta ADC$.

Выполнение приведенных упражнений и им подобных значительно продвигает учащихся в умении не только использовать признаки равенства треугольников, но и в умении работать с задачей.

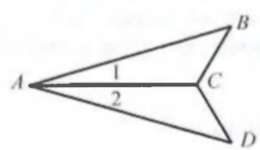


Рис. 62

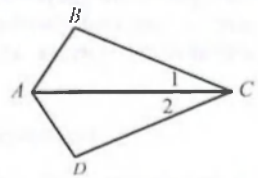


Рис. 63

Рассмотрим, например, упражнение 4. Его выполнение требует приложения признаков равенства треугольников к конкретным ситуациям, анализа этих ситуаций, выбора наиболее «экономного» в данных условиях признака.

Действительно, анализ условия (чертежа) показывает, что $\angle AOB = \angle COD$ (вертикальные углы). Значит, для того чтобы утверждать, что $\Delta\ ABO = \Delta\ CDO$, достаточно знать, что $BO = OD$, либо $\angle BAO = \angle CDO$.

Следует отметить, что решение задач с использованием признаков равенства треугольников позволяет формировать метод аналогии и применять его в различных ситуациях (см. [13]).

## *Вопросы и задания*

1. Какие методические подходы существуют к введению понятия равенства фигур в школьном курсе геометрии? Какой подход, на Ваш взгляд, является наиболее удачным?

2. В чем особенности введения понятия равных треугольников в разных учебниках геометрии?

3. Приведите примеры упражнений на усвоение понятия равных треугольников.

4. Разработайте методику изучения одного из признаков равенства треугольников, исходя из того, что организация изучения теоремы включает мотивацию, ознакомление с фактом, отраженным в теореме, усвоение содержания теоремы, ознакомление со способом доказательства, доказательство теоремы, её применение, связь теоремы с ранее доказанными теоремами. Запишите доказательство теоремы в виде таблицы с двумя колонками: «Утверждения» и «Обоснования».

5. Составьте (подберите) практические задачи на применение признаков равенства треугольников.

6. Разработайте методику использования аналогии при составлении и решении задач по теме: «Признаки равенства треугольников».

7. Назовите компоненты умения применять признаки равенства треугольников в различных конкретных ситуациях.

8. Составьте (или подберите из учебников) по одной задаче на применение каждого признака равенства треугольников. Разработайте методику решения этих задач и выделите умения, на формирование которых они направлены.

9. Разработайте систему задач на закрепление признаков равенства треугольников.

### Рекомендуемая литература


1. Б е л о в а, Г. В. Как учить решению задач на признаки равенства треугольников / Г. В. Белова, Л. В. Виноградова . – Математика в школе. – 1999. – № 2. – С. 18 – 21.
2. Г у р т о в о й, О. С. Некоторые приемы, облегчающие решение геометрических задач / О. С. Гуртовой. – Математика в школе. – 1996. – № 2. – С. 61 – 65.
3. Д а л и н г е р, В. А. Методика обучения математике. Поисково-исследовательская деятельность учащихся : учебник и практикум для вузов / В. А. Далингер – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 460 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-00450-2.
4. Д а л и н г е р, В. А. Методика обучения математике. Когнитивно-визуальный подход : учебник для академического бакалавриата / В. А. Далингер, С. Д. Симонженков. – 2-е изд., перераб. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 340 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-00920-0.
5. И в а н о в а, Т. А. Современный урок математики: теория, технология, практика : Книга для учителя. – Н. Новгород : НГПУ, 2010. – 288 с.
6. К а п к а е в а, Л. С. Интеграционные технологии обучения математике школьников / Л. С. Капкаева // Инновационные образовательные технологии в школе : монография / под ред. И. В. Кузнецовой, Е. В. Белоглазовой; Мордов. гос. пед. ин-т. – Саранск, 2016. – С.179 – 200.
7. Методика обучения математике в 2 ч. Часть 2 : учебник для академического бакалавриата / И. С. Подходова, [и др.]; под ред. Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 299 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-9916-7002-9.
8. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под научн. ред. Н. Л. Стефановой. Н. С. Подходовой. -- М.: Дрофа, 2005. – 416 с.
9. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост. В.И. М и ш и н. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.
10. О р л о в, В. В. Организация обучения поиску решения планиметрических задач / В.В. Орлов – Математика в школе. – 1996. – № 1. – С. 5 – 7.
11. С а р а н ц е в, Г. И. Методика обучения геометрии : учеб. пособие для студентов вузов по направлению «Педагогическое образование» / Г. И. Саранцев. – Казань : Центр инновационных технологий, 2011. – 228 с.
12. С а р а н ц е в, Г. И. Обучение математическим доказательствам в школе: Кн. для учителя / Г. И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2000. – 173 с.
13. С а р а н ц е в, Г. И. Обучение методу аналогии / Г. И. Саранцев, Л. С. Лунина // Математика в школе. – 1989. – № 4. – С. 42 – 46.
14. Темербекова, А. А. Методика обучения математике : учеб. пособие / А. А. Темербекова, И. В. Чугунова, Г. А. Байгонакова. - СПб. : Лань, 2015. – 510 с.
15. Учебники геометрии разных авторов, входящие в Федеральный перечень школьных учебников.

Лекция X

# ИЗУЧЕНИЕ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТИ ПРЯМЫХ НА ПЛОСКОСТИ

1. Цели и этапы изучения взаимного расположения прямых на плоскости
2. Различные подходы к введению понятия параллельности прямых на плоскости.
3. Методика изучения признаков параллельности прямых.
4. Методические замечания к изучению перпендикулярности прямых на плоскости.

---

## 1. Цели и этапы изучения взаимного расположения прямых на плоскости

Знания о взаимном расположении прямых и плоскостей лежат в основе изучения свойств геометрических фигур, как в планиметрии, так и в стереометрии. Действительно, параллельность и перпендикулярность прямых на плоскости являются необходимым материалом для изучения свойств многоугольников и окружностей.

***Основные цели изучения этой темы:***

- актуализировать и обобщить знания и опыт учащихся о взаимном расположении прямых на плоскости;
- дать систематические сведения о параллельности прямых, первое представление об аксиомах и аксиоматическом методе в геометрии;
- ввести аксиому параллельных прямых;
- обосновать известные учащимся свойства фигур (квадрата, куба и др.), изучить связанные с отношениями параллельности и перпендикулярности новые свойства известных фигур, а также новых фигур (например, параллелограмма и параллелепипеда);
- познакомить с новым методом доказательства – косвенным доказательством, формировать опыт его применения при обосновании утверждений и решении задач;
- познакомить с историей геометрии как науки, с иными геометриями и другими подходами к построению евклидовой геометрии.



Отношения параллельности и перпендикулярности наряду с отношениями равенства и подобия – одни из важнейших для изучения окружающего ученика пространства, формирования естественнонаучной картины мира.

Изучение взаимного расположения прямых и плоскостей в школьном курсе математики можно разделить на три этапа:

1) подготовительная (пропедевтическая) работа по ознакомлению учащихся со взаимным расположением прямых на плоскости и некоторыми пространственными фигурами в 1- 6-х классах;

2) систематическое изучение взаимного расположения прямых на плоскости и знакомство на наглядной основе с простейшими многогранниками в 7 – 9-х классах;

3) систематическое изучение взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве в 10 – 11-х классах.

Знакомство со взаимным расположением прямых начинается с первого появления геометрического материала в курсе математики средней школы. Уже в подготовительном курсе геометрии, в 1 – 6-х классах изучаются на наглядном уровне такие вопросы, как пересечение двух прямых на плоскости, перпендикулярность двух прямых на плоскости, параллельность прямых.

Конечно, изучаться строгая теория параллельных прямых на этой ступени обучения не может. Здесь даются лишь определения перпендикулярных и параллельных прямых, формируются навыки изображения каждого из названных случаев, развиваются умения пользоваться чертежными инструментами - линейкой, угольником, циркулем. Затем полученные знания и умения используются при решении простейших задач.

Учащимся известны к этому времени квадрат и куб, прямоугольник и прямоугольный параллелепипед, пирамида, некоторые их свойства, что позволяет иллюстрировать новые понятия параллельности и перпендикулярности прямых на этих фигурах, использовать их при составлении задач по данным темам.

Основой для введения различных случаев взаимного расположения прямых является беседа о возможном числе общих точек у двух прямых на плоскости, где используются интуиция и жизненный опыт учащихся. Изучение этого материала проводится на различных рисунках, как готовых, так и выполненных учащимися.

Подготовительный этап в изучении взаимного расположения прямых на плоскости играет важную роль в обогащении жизненного опыта учащихся, в накоплении необходимого наглядного материала, который может служить хорошей базой для успешного систематического изучения этих вопросов на последующем этапе обучения.

На этой ступени обучения учащиеся должны знать:

1) что две пересекающиеся прямые имеют только одну общую точку, и уметь изобразить пересекающиеся прямые с помощью линейки;

2) что две перпендикулярные прямые являются пересекающимися, и уметь построить такие прямые с помощью линейки и угольника, линейки и транспортира;

3) что две параллельные прямые совсем не имеют общих точек и уметь построить параллельные прямые с помощью линейки и угольника.

Особые трудности вызывают первые уроки систематического курса планиметрии, на которых систематизируются полученные ранее знания о взаимном расположении прямых на плоскости, поэтому разработка методики их проведения требует особого внимания. Это обусловлено целым рядом причин: психическими особенностями учащихся этого возраста, выделением курса геометрии в отдельную учебную дисциплину и новизной его структуры, резким повышением уровня строгости логических рассуждений, введением большого числа новых понятий, терминов, новой символики, повышением уровня абстрактности изучаемого материала, недостаточной развитостью пространственных представлений и т.д.

Методика преподавания первых разделов курса планиметрии предполагает постепенный, плавный переход от конкретного к общему, постоянное обращение к окружающей действительности и другим видам наглядности, особое внимание следует уделять обучению учащихся умению логически рассуждать, обосновывать, доказывать высказываемые предложения.

## 2. Различные подходы к введению понятия параллельности прямых на плоскости

В учебной литературе по геометрии для средней школы представлена различная последовательность изучения разделов о параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости после введения понятий пересекающихся и непересекающихся прямых.

**1.** В учебнике А. В. Погорелова введение понятия параллельных прямых и аксиома параллельных прямых предшествуют изучению перпендикулярных прямых. Существование параллельных прямых на плоскости, признаки параллельных прямых, построение параллельных прямых с помощью циркуля и линейки излагаются после изучения раздела о перпендикулярных прямых.

**2.** В учебном пособии по геометрии под ред. А. Н. Колмогорова изучается вначале параллельность прямых, хотя понятие перпендикулярных прямых, знакомое учащимся из курса математики 4 – 5 классов, используется ранее при изучении осевой симметрии.

**3.** В учебнике Л. С. Атанасяна и др. изучение взаимного расположения прямых на плоскости начинается с перпендикулярности прямых, а затем излагается раздел о параллельности прямых на плоскости.

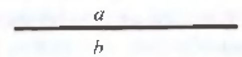
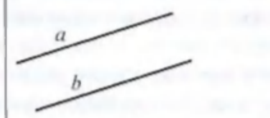
Все названные пути вполне доступны для учащихся, хотя учение о перпендикулярных прямых в логическом отношении проще для них, ближе к их опыту. Понятие параллельности связано с бесконечностью, что само по себе является нелегким в средней школе. Большая роль при изучении раздела о взаимном расположении прямых отводится аксиоме: *через любые две точки можно провести прямую и только одну.*

В начале изучения взаимного расположения прямых на плоскости целесообразно дать учащимся общую картину взаимного расположения двух прямых на плоскости (таблица 10): две прямые имеют только одну общую точку (то есть пересекаются); все точки двух прямых общие – две прямые совпадают; две прямые на плоскости совсем не имеют общих точек (то есть параллельны).

Можно провести с этой целью беседу с учащимися по вопросам:

1. Могут ли две прямые на плоскости иметь только две общие точки?
2. Могут ли две прямые на плоскости иметь только одну общую точку?
3. Могут ли две прямые на плоскости совсем не иметь общих точек?

Таблица 10

| Взаимное расположение двух прямых на плоскости | | |
|---|---|---|
| <br> | <br> | <br> |
| Прямые $a$ и $b$ имеют только одну общую точку $A$: $a$ и $b$ пересекаются | У прямых $a$ и $b$ все точки общие: $a$ и $b$ совпадают | Прямые $a$ и $b$ не имеют общих точек: прямые $a$ и $b$ параллельны |

Особо следует остановиться на том случае, когда все точки двух прямых общие, то есть прямые сливаются. Дальнейшее изложение материала зависит от принятого подхода в учебнике. Возможны два подхода.

1) Случай совпадения двух прямых не рассматривать в дальнейшем, как не представляющий интереса; если речь идет о двух прямых, то их всегда надо представлять себе различными; этот подход изложен в учебниках А. В. Погорелова, Л. С. Атанасяна и др., А. П. Киселева.

2) Две совпадающие прямые считают параллельными. Этот подход имеет место в учебном пособии по геометрии под ред. А. Н. Колмогорова.

Второй подход дает возможность на определенном этапе изучения геометрии в школе показать учащимся, что параллельность прямых входит в класс эквивалентности, однако само восприятие понятия параллельности прямых в этом случае для учащихся с чисто психологической точки зрения более затруднительно.

Учение о параллельности прямых в курсе планиметрии можно разделить на части:

1) определение параллельных прямых;
2) существование параллельных прямых;
3) построение параллельных прямых;
4) аксиома параллельных прямых;
5) свойства параллельных прямых;
6) признаки параллельности прямых;
7) применение изученной теории к решению задач.

Резко очерченных границ между выделенными частями не может быть. Последний раздел присутствует во всех предыдущих.

Формулировки определений параллельных прямых в учебниках, так же как и подходы к их изучению, различны. В учебнике А. В. Погорелова и в учебнике Л. С. Атанасяна и др. рассматриваются только два случая взаимного расположения прямых на плоскости: прямые пересекаются (имеют только одну общую точку) и прямые не пересекаются (совсем не имеют общих точек). Поэтому и определения параллельных прямых формулируются следующим образом: или *как прямые на плоскости, которые не пересекаются*, или *как прямые на плоскости, не имеющие общих точек*. Эти определения эквивалентны друг другу.

В учебном пособии по геометрии под ред. А. Н. Колмогорова рассматриваются три случая взаимного расположения двух прямых па плоскости: прямые имеют только одну общую точку; прямые совпадают (все точки общие); прямые совсем не имеют общих точек. Определение параллельных прямых здесь выглядит следующим образом: две прямые на плоскости называются параллельными, если они не имеют общих точек или совпадают.

В процессе работы над определением параллельных прямых следует особо выделить, что они лежат в одной плоскости, и требовать этого постоянно от учащихся. Такая работа поможет в дальнейшем избежать ошибок при изучении соответствующих вопросов в курсе стереометрии. В качестве контрпримера полезно наглядно показать прямые пространства, которые не лежат в одной плоскости, не имеют общих точек и не являются параллельными прямыми (это скрещивающиеся прямые).

Учитывая это замечание, определение параллельных прямых следует записать в тетради, выделив четко в записи видовые отличия (таблица 11).

Таблица 11

| **Две прямые называются параллельными, если они:** | | |
|---|---|---|
| 1) лежат в одной плоскости<br>2) не пересекаются | 1) лежат в одной плоскости<br>2) не имеют общих точек | 1) лежат в одной плоскости<br>2) не имеют общих точек или совпадают |

## 3. Методика изучения признаков параллельности прямых

Вопрос о существовании параллельных прямых в разных учебных пособиях решается неодинаково. Здесь можно выделить два подхода:

1) рассматривается специальная теорема, показывающая существование параллельных прямых, а затем дается аксиома параллельных (Л. С. Атанасян и др.);

2) рассматривается аксиома параллельных, а затем доказывается теорема, показывающая существование таких прямых (А. В. Погорелов).

Второй подход вызывает большие трудности, так как ряд рассуждений проводится на основе предположения, что такие прямые уже существуют, поэтому при изучении теоремы необходимо сообщить учащимся, что построение параллельных прямых, аксиома параллельных и некоторые свойства параллельных рассматривались с учетом предположения, что параллельные прямые реально существуют.



Существование параллельных прямых обосновывается в школе двумя путями, а именно: *на основе центральной симметрии* (В. Г. Болтянский, М. Б. Волович, А. Д. Семушин и др.) или *на основе свойств углов*, образованных при пересечении двух прямых третьей (Л. С. Атанасян и др., А. В. Погорелов).

Доказательство теоремы везде ведется методом от противного, однако предложения, на основе которых делается окончательный вывод, различны: в одних случаях – это свойство двух различных прямых не иметь двух и более различных общих точек; в других случаях – это свойство внешнего угла треугольника не быть меньшим или равным внутреннему углу этого треугольника, не смежному с ним.

Доказательство теоремы опирается на представление учащихся о неограниченности и бесконечности прямой, поэтому теряется наглядность чертежа, возникает противоречие правильным интуитивным представлениям учащихся. Вследствие этого чертежу необходимо уделить особое внимание при доказательстве теоремы, при изображении точки пересечения прямых желательно не делать изломов.


Рис. 64

В практике школы большое распространение получили обоснования признаков параллельности прямых на основе сравнения углов, образуемых при пересечении двух прямых третьей. Этот раздел не вызывает у учащихся особых затруднений, но следует заметить, что рисунок к введению этих понятий не должен отражать частных случаев: две прямые не должны изображаться параллельными, а секущая не должна быть к ним перпендикулярной.

Прямые $a$ и $b$ разбивают плоскость на три части: две внешние и одну внутреннюю (рис. 64). Из восьми углов, образующихся при пересечении прямых $a$ и $b$ прямой $c$, некоторые лежат по одну сторону от прямой $c$, другие – по разные стороны от прямой $c$. Некоторые из углов, расположенных по разные стороны от прямой $c$, получили название накрест лежащих; некоторые углы, расположенные по одну сторону от прямой $c$, получили название или односторонних, или соответственных. В зависимости от того, в каких из частей расположены углы, различают внутренние и внешние накрест лежащие углы (3 и 6, 4 и 5, 1 и 8, 2 и 7), внутренние или внешние односторонние углы (4 и 6, 3 и 5, 1 и 7, 2 и 8), соответственные углы (2 и 6, 1 и 5, 4 и 8, 3 и 7). Для лучшего запоминания углов, названные части, на которые разбивают плоскость прямые $a$ и $b$, можно закрасить на рисунке в различные цвета, а именно: внутреннюю часть закрасить одним цветом, а внешние части другим цветом. В итоге следует записать:

3 и 6, 4 и 5 – *внутренние накрест лежащие углы;*

1 и 8, 2 и 7 – *внешние накрест лежащие углы;*

3 и 5, 4 и 6 – *внутренние односторонние углы;*

1 и 7, 2 и 8 – *внешние односторонние углы;*

2 и 6, 1 и 5, 4 и 6, 3 и 7 – *соответственные углы.*

Большую роль в изучении параллельных прямых играет аксиома параллельных. В учебниках приведены различные формулировки этой аксиомы:

1. «Через данную точку проходит не более одной прямой, параллельной данной» (А. Н. Колмогоров и др.) или «Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной» (А. В. Погорелов, 1991).

2. «Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит только одна прямая, параллельная данной» (Л. С. Атанасян и др., А. П. Киселёв).

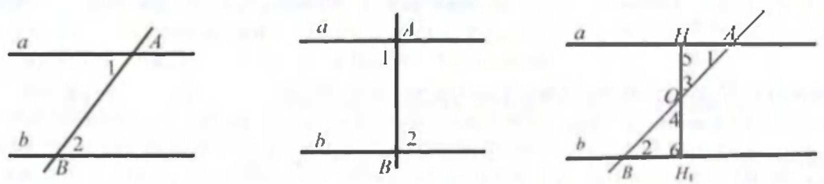
Требование, чтобы точка не лежала на данной прямой, связано с тем, что в этих учебных пособиях совпадающие прямые не считаются параллельными и вообще не рассматриваются. Следует заметить, что во втором случае аксиома является более сильной, чем в первом случае.

При изложении курса геометрии большое значение имеют ***теоремы-признаки параллельности*** и ***теоремы им обратные***. Достаточно доказать один из признаков параллельности прямых, основанных на углах, образованных при пересечении двух прямых третьей, а остальные признаки параллельности свести к уже доказанному.

Рассмотрим признаки параллельности прямых в соответствии с учебниками Л. С. Атанасяна и др. и А. В. Погорелова.

В учебнике Л. С. Атанасяна параллельность двух перпендикуляров к прямой на плоскости устанавливается уже в одном из первых пунктов учебника на основе «перегибания» рисунка. Данный факт не выделен в качестве теоремы существования параллельных прямых, но он используется для доказательства признака параллельности прямых при равенстве накрест лежащих углов.

Т е о р е м а. ***Если при пересечении двух прямых секущей накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны.***




а) б) в)

Рис. 65

В учебнике А. В. Погорелова эта теорема формулируется в дизъюнктивной форме.



Т е о р е м а. ***Если внутренние накрест лежащие углы равны или сумма внутренних односторонних углов равна $180^0$, то прямые параллельны.***

Обе теоремы доказываются методом от противного. При доказательстве теоремы по учебнику Л. С. Атанасяна и др. вначале рассматривается частный случай, когда $\angle 1 = \angle 2 = 90^\circ$, то $a$ и $b$ перпендикулярны к прямой $AB$ и, следовательно, параллельны (рис. 65).

Приведем запись условия и доказательств данных теорем.

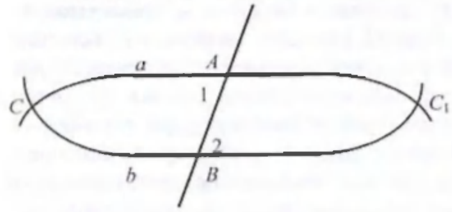



Рис. 66

Д а н о: $c$ – секущая для прямых $a$ и $b$ (рис. 65, а) ;

$\angle 1$ и $\angle 2$ - внутренние накрест лежащие углы; $\angle 1 = \angle 2$.

Д о к а з а т ь: $a \parallel b$.

Д о к а з а т е л ь с т в о (*метод от противного*)

| **По учебнику Л. С. Атанасяна и др. (рис. 65)** | **По учебнику А. В. Погорелова (рис. 66)** |
|---|---|
| **1.** Если $\angle 1$ и $\angle 2$ прямые (рис. 65, б), то $a$ и $b$ перпендикулярны к прямой $AB$ и, следовательно, параллельны. | **1.** Пусть $a$ и $b$ непараллельны, т. е. пересекаются в точке С. |
| **2.** Пусть $\angle 1$ и $\angle 2$ не прямые. Из середины $O$ отрезка $AB$ проведем перпендикуляр $OH$ к прямой $a$ (рис. 65, в). | **2.** Секущая $AB$ разбивает плоскость на две полуплоскости. В одной из них лежит точка С. Построим треугольник $BAC_1$ равный треугольнику $ABC$, с вершиной $C_1$ в другой полуплоскости. |
| **3.** На прямой $b$ от точки $B$ отложим отрезок $BH$, равный отрезку $AH$ (рис. 65, в), и проведем отрезок $OH_1$. | **3.** По условию $\angle 1 = \angle 2$. Так как соответствующие углы треугольников $ABC_1$ и $BAC$ с вершинами А и В равны, то они совпадают с внутренними накрест лежащими углами. |
| **4.** $\Delta OHA = \Delta OH_1B$ по первому признаку равенства треугольников ($AO = BO$, $AH = BH_1$, $\angle 1 = \angle 2$), поэтому $\angle 3 = \angle 4$ и $\angle 5 = \angle 6$. | **4.** Из п. 3 следует, что прямая $AC_1$ совпадает с прямой $a$, а прямая $BC_1$ совпадает с прямой $b$. |
| **5.** Из равенства $\angle 3 = \angle 4$ следует, что точка $H_1$ лежит на продолжении луча $OH$, т. е. точки $H$, $O$ и $H_1$ лежат на одной прямой. | **5.** Таким образом, через точки $C$ и $C_1$ проходят две различные прямые $a$ и $b$, что невозможно. Значит, прямые $a$ и $b$ параллельны. |
| **6.** Из равенства $\angle 5 = \angle 6$ следует, что $\angle 6$ - прямой (так как $\angle 5$ - прямой). | |
| **7.** Из п. 6 следует, что $a$ и $b$ перпендикулярны к прямой $HH_1$, поэтому $a \parallel b$. | |

(Рисунки и запись доказательства теорем могут быть представлены на экране с помощью мультимедиапроектора.)

В учебнике Л. С. Атанасяна и др. параллельность двух перпендикуляров к прямой на плоскости устанавливается уже в одном из первых пунктов учебника на основе «перегибания» рисунка. Данный факт не выделен в качестве теоремы существования параллельных прямых, при этом он используется для доказательства признака параллельности прямых при равенстве накрест лежащих углов. Работая с этим признаком, следует, во-первых, аккуратно обосновать принадлежность трех точек одной прямой. Во-вторых, обратить внимание учащихся на неполноту доказательства (не рассматривается третий случай - тупые накрест лежащие углы, его можно предложить школьникам для самостоятельной работы). В-третьих, объяснить, что теорема доказывается с помощью полной индукции: рассматриваются все возможные углы (прямые, тупые, острые). В-четвертых, целесообразно сделать разделение углов на внутренние и внешние во всех признаках параллельности прямых, предложив все теоремы с внешними углами для самостоятельного доказательства. В хорошо подготовленных классах можно предложить для самостоятельного доказательства все признаки, кроме первого.

Перед доказательством признаков параллельности прямых необходима специальная работа по организации повторения тех вопросов, которые составляют основу доказательства. Рассуждения и доказательства теорем, обратных признакам параллельности прямых, аналогичны между собой, это облегчает их усвоение. Можно совместно с учащимися провести рассуждения при доказательстве одной из этих теорем и записать их, остальные теоремы предложить учащимся доказать самостоятельно.

Большую роль в усвоении материала о параллельных прямых на плоскости играют задачи. Задачи могут быть использованы при формировании понятий темы, при подготовке учащихся к доказательству теорем, при использовании изученных теорем, в доказательстве новых фактов. Особо следует выделить задачи на построение параллельных прямых с использованием различных инструментов.

По содержанию задачи по этой теме можно разделить на 3 группы:

1) задачи на прямое применение аксиомы параллельности типа: «Доказать, что две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны»;

2) задачи на применение признаков параллельности прямых;

3) задачи на применение теорем, обратных признакам параллельности прямых.

## 4. Методические замечания к изучению перпендикулярности прямых на плоскости

Учение о перпендикулярности прямых в средней школе имеет в своей основе понятие угла между прямыми и умение измерять величину угла.

Случай перпендикулярных прямых появляется при рассмотрении пересекающихся прямых в 7 классе. Величину наименьшего из углов, образованных



двумя пересекающимися прямыми, считают углом между ними. Поэтому величина угла между пересекающимися прямыми не может превосходить 90°. В том случае, если угол между прямыми равен 90° (равен прямому углу), прямые называются перпендикулярными (перпендикуляр в переводе с лат. –«отвес»). Прямые, следовательно, будут перпендикулярны в том и только в том случае, если угол между ними равен 90°.

Две пересекающие прямые образуют четыре угла. Если один из этих углов прямой, тогда любой из остальных трех углов будет либо смежным с этим углом, либо вертикальным с ним. Отсюда следует, что если один из углов прямой, то остальные углы тоже прямые. В этом случае говорят, что прямые пересекаются под прямым углом.

Поэтому в учебнике А. В. Погорелова дается следующее определение перпендикулярных прямых: *две прямые называются перпендикулярными, если они пересекаются под прямым углом.*

В учебнике Л. С. Атанасяна и др. дается такое определение: *две пересекающиеся прямые называются перпендикулярными (или взаимно перпендикулярными), если они образуют четыре прямых угла.*

При введении понятия перпендикулярных прямых правильному его восприятию и более прочному запоминанию его определения помогает обращение к окружающей действительности, опора на жизненный опыт учащихся. Примеры перпендикулярных прямых в окружающей жизни убеждают учащихся в их существовании, в их большой значимости для практики, а значит, помогают создать правильное представление у них о природе этого понятия - о возникновении его на основе практической деятельности людей.

После определения перпендикулярных прямых вводится соответствующая символика, проводится обучение учащихся использованию введенной символики при выполнении записей, а также обучение чтению записей, в которых используется символика. Перпендикулярность прямых обозначается знаком $\perp$. Запись $a \perp в$ читается: «Прямая *a* перпендикулярна прямой *в*».

Существование перпендикулярных прямых показывается конструктивно. В учебнике Л. С. Атанасяна (и др.) решается задача.

***Задача 1.*** *Дана прямая a и точка на ней. Построить прямую, проходящую через данную точку и перпендикулярную данной прямой.*

Способ решения этой задачи основан на свойстве медианы равнобедренного треугольника, проведенной к его основанию.

Знакомство учащихся со способом построения перпендикуляра к прямой, проходящего через точку вне этой прямой, осуществляется также через решение задачи. В учебнике Л. С. Атанасяна и др. это задача № 153.

***Задача 2.*** *Дана прямая a и точка M, не лежащая на ней. Постройте прямую, проходящую через точку M и перпендикулярную к прямой a.*

Решение основано на использовании двух окружностей равных радиусов и свойстве биссектрисы равнобедренного треугольника, проведенной к его основанию.

В учебнике А. В. Погорелова доказывается теорема: *через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую, и только одну.* Доказательство теоремы ведется методом от противного.

По учебнику Л. С. Атанасяна и др. в 7 классе, а по учебнику А. В. Погорелова в 8 классе вводятся понятия перпендикуляра и наклонной к прямой.

***Определение.*** Перпендикуляром к данной прямой называется отрезок прямой, перпендикулярной данной, который имеет одним из своих концов их точку пересечения. Этот конец отрезка называется основанием перпендикуляра.

Длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую, называется *расстоянием от точки до прямой.*

В разделе о перпендикулярности прямых на плоскости рассматривается понятие наклонной к данной прямой. Поскольку через данную точку проходит только один перпендикуляр к данной прямой, то все остальные прямые, проходящие через эту точку (кроме прямой, параллельной ей), называют наклонными к данной прямой.

В беседе с учащимися следует четко подчеркнуть, что через данную точку к данной прямой можно провести сколько угодно наклонных, а перпендикуляр только один.

Методом от противного доказывается следующая теорема: *из любой точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр, и только один.*

В восьмом классе вводится понятие серединного перпендикуляра к отрезку. *Серединным перпендикуляром к отрезку называется прямая, проходящая через середину отрезка и перпендикулярная к нему.*

Затем доказывается теорема о серединном перпендикуляре к отрезку.

Теорема. ***Каждая точка серединного перпендикуляра к отрезку равноудалена от концов этого отрезка. Обратно: каждая точка, равноудаленная от концов отрезка, лежит на серединном перпендикуляре к нему.***

Эта теорема состоит из двух теорем: прямой и обратной. Доказательство первой теоремы следует провести вместе с учащимися. Доказательство обратной теоремы можно дать с пояснениями в качестве домашнего задания.

Постепенно в работе над понятием серединного перпендикуляра к отрезку выясняется, что прямая будет являться серединным перпендикуляром к отрезку в том и только том случае, если ее точки равноудалены от концов этого отрезка. В процессе такой работы формируются представления учащихся о необходимых и достаточных условиях, которые играют большую роль в дальнейшем построении курса математики средней школы.

Учащимся надо разъяснить, что формулировка теоремы со словами «в том и только в том случае» или «тогда и только тогда» включает в себя две теоремы — прямую и обратную.

Большое значение для изучения последующих разделов курса геометрии и особенно для решения задач имеет установление взаимосвязи параллельности и перпендикулярности прямых, которая может быть раскрыта в процессе решения соответствующих задач на доказательство.



***Задача 3.*** Доказать, что два перпендикуляра к одной и той же прямой параллельны.

При ее решении можно опираться на единственность перпендикуляра к прямой, проходящего через данную точку. Если изучение перпендикулярности прямых предшествует изучению параллельности прямых, то эта задача рассматривается как теорема — признак параллельности прямых.

***Задача 4.*** Если одна из двух параллельных прямых перпендикулярна к данной прямой, то другая из параллельных прямых также перпендикулярна к этой прямой.

Эта задача вытекает как частный случай из теоремы о свойстве углов, образуемых при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой.

**Историческая справка**

Среди аксиом Евклида была такая (обычно называемая пятым постулатом): «Две прямые, которые при пересечении с третьей образуют с ней по одну сторону внутренние углы, в сумме меньше двух прямых, при продолжении в ту же сторону пересекаются»

Легко доказать, что пятый постулат Евклида равносилен таким предложениям:

1. В данной плоскости через точку вне данной прямой можно провести только одну прямую, параллельную данной.

2. Сумма внутренних углов треугольника равна $2d$.

Если принять одно из этих предложений, то нетрудно вывести (доказать) пятый постулат Евклида.

Характерной чертой всей греческой математической мысли было стремление освободить изложение геометрии от выводов, основанных на наглядности. Чертеж есть иллюстрация, облегчающая понимание, а не способ доказательства. В пятом же постулате мы более доверяем нашим зрительным ощущениям. Это вызвало желание доказать пятый постулат, вывести его (или равносильное ему предложение) из других аксиом. Попытки доказать пятый постулат длились около 2000 лет.

Доказательств было много, но каждое из них содержало ту или иную логическую ошибку, и всякий раз постулат оказывался недоказанным. Бесплодно затратив силы, средства и жизнь на доказательство пятого постулата, многие люди впадали в уныние и отчаяние. В недоказуемости его начали усматривать проявление божественной силы.

Пятый постулат доказан не был, но двухтысячелетние усилия ученых подготовили почву для нового великого открытия в геометрии. К этому великому открытию подошли почти одновременно и независимо друг от друга русский ученый Николай Иванович Лобачевский (1792—1856), венгерский ученый Янош Бойаи (1802—1860) и немецкий математик Карл Гаусс.

Первым и в более совершенной форме опубликовал свои работы Н. И. Лобачевский. 23 февраля 1826 г. на заседании физико-математического отделения Казанского университета Лобачевский сделал доклад о своем открытии.

Впервые в мировой науке Лобачевский признал пятый постулат недоказуемым, заменив его новым предположением: *через точку вне данной прямой и в одной с ней плоскости можно провести более чем одну прямую, не пересекающую данную прямую.* Он показал, что это предположение ведет не к противоречию, а к своеобразной геометрической системе, отличной от геометрии Евклида.

Мысли, которые Лобачевский высказал в своем докладе, были так новы, так необычны, что не были поняты даже выдающимися математиками того времени. Лишь единицы, например профессор Казанского университета П. И. Котельников, признали новое великое открытие, но их голос не был услышан. Лобачевского высмеивали, но это не заставило великого ученого отказаться от своих идей.

Через 12 лет после его смерти была найдена поверхность, на которой справедлива новая геометрия. Постепенно новые идеи были поняты, получили всемирную известность и признание. Геометрию, основанную на идеях Лобачевского, мы называем сегодня геометрией Лобачевского.

Геометрия Евклида — геометрия земных пространств и расстояний.

Геометрия Лобачевского — геометрия гигантских межпланетных и исчезающе малых атомных пространств, она включает в себя геометрию Евклида как составную часть, как частный случай. Точные астрономические и физические наблюдения подтвердили теоретические выводы геометрии Лобачевского.

## *Вопросы и задания*

1. Назовите цели изучения темы о взаимном расположении прямых на плоскости.

2. Каковы этапы изучения взаимного расположения прямых и плоскостей в школьном курсе математики?

3. Какие подходы существуют к введению понятия параллельности прямых на плоскости?

4. Как решается вопрос о существовании параллельных прямых в разных учебниках?

5. Сформулируйте аксиому параллельных прямых в разных вариантах.

6. Составьте вопросы для актуализации знаний, которые необходимы учащимся при доказательстве первого признака параллельности прямых.

7. В чем сущность доказательства «методом от противного»?

8. Подберите задачи на применение признаков параллельности прямых. К одной из задач составьте вопросы, направляющие поиск решения.

9. Как определяются перпендикулярные прямые в школьном курсе математики и как показывается их существование?

10. Оформите запись доказательства теоремы о серединном перпендикуляре к отрезку в виде таблицы: «Утверждения - обоснования».

11. Что означают в формулировке теоремы слова «в том и только том случае», «тогда и только тогда»?

12. Проанализируйте учебники геометрии А. Д. Александрова, В. А. Гусева, И. Ф. Шарыгина с точки зрения изучения данной темы, выявите особенности, сделайте выводы.

13. Какие геометрии, кроме геометрии Евклида вы знаете? В чем отличие геометрии Лобачевского от геометрии Евклида?

14. Подготовьте сообщение о жизни и деятельности Н. И. Лобачевского.

### **Рекомендуемая литература**

1. А л е к с а н д р о в, А. Д. Геометрия. 8 класс : учебник для общеобразовательных организаций / А. Д. Александров, В. И. Рыжик, А. Л. Вернер. – М. : Просвещение, 2016. – 176 с.
2. А л е к с а н д р о в, А. Д. Геометрия. 9 класс : учебник для общеобразовательных организаций / А. Д. Александров, В. И. Рыжик, А. Л. Вернер. – М. : Просвещение, 2014. – 175 с.
3. Геометрия .7 – 9 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – М. : Просвещение, 2017. – 384 с.
4. Г л е й з е р Г. И. История математики в школе: VII – VIII кл. Пособие для учителей. – М. : Просвещение, 1982. – 240 с.
5. Д а л и н г е р, В. А. Методика обучения математике. Поисково-исследовательская деятельность учащихся : учебник и практикум для вузов / В. А. Далингер – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 460 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-00450-2.
6. И в а н о в а, Т. А. Современный урок математики: теория, технология, практика : Книга для учителя. – Н. Новгород : НГПУ, 2010. – 288 с.
7. М а р к о в, С. Н. Курс истории математики: Учеб. пособие / С. Н. Марков. – Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1995. – 248 с.
8. Методика обучения математике в 2 ч. Часть 2 : учебник для академического бакалавриата / Н. С. Подходова, [и др.]; под ред. Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 299 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-9916-7002-9.
9. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под науч. ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.
10. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост. В.И. М и ш и н. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.
11. О р л о в, В. В. Организация обучения поиску решения планиметрических задач / В. В. Орлов – Математика в школе. – 1996. – № 1. – С. 5 – 7.
12. П о г о р е л о в, А. В. Геометрия. 7 – 9 классы. Учебник. ФГОС / А. В. Погорелов. – М. : Мнемозина, 2015. – 376 с.
13. Р о г а н о в с к и й, Н. М. Поисковые задания по геометрии / Н. М. Рогановский // Математика в школе. – 1990. – № 5. – С. 22 - 26.
14. Р ы ж и к В. И. Геометрия. 7 класс : учебник для общеобразовательных организации. ФГОС / В. И. Рыжик, А. Д. Александров, А. Л. Вернер. – М. : Просвещение, 2016. – 175 с.
15. С а р а н ц е в, Г. И. Методика обучения геометрии : учеб. пособие для студентов вузов по направлению «Педагогическое образование» / Г.И. Саранцев. – Казань : Центр инновационных технологий, 2011. – 228 с.
16. С а р а н ц е в, Г. И. Обучение математическим доказательствам в школе: Кн. для учителя / Г. И. Саранцев. – М.: Просвещение, 2000. – 173 с.
17. Темербекова, А. А. Методика обучения математике : учеб. пособие / А. А. Темербекова, И. В. Чугунова, Г. А. Байгонакова. - СПб. : Лань, 2015. - 510 с.
18. Ш а р ы г и н, И. Ф. Геометрия. 7 – 9 классы. Учебник / И. Ф. Шарыгин. – М. : Дрофа, 2017. - 464 с.
19. Учебники геометрии разных авторов, входящие в Федеральный перечень школьных учебников.
20. http://www.hrono.ru/biograf/lobachevski.html
21. http://taina.aib.ru/biography/nikolai-lobachevskii.htm

Лекция XI

# МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

1. Различные подходы к изучению многоугольников.
2. Методика изучения четырехугольников:
   а) методика введения понятия четырехугольника;
   б) методика изучения параллелограмма;
   в) методика изучения трапеции и ее свойств.
3. Методика изучения правильных многоугольников.

---

## I. Различные подходы к изучению многоугольников

Как известно, уже в 1- 3 классах учащиеся получают представления о простейших геометрических фигурах. Во втором классе дети считают элементы многоугольников: вершины, стороны, углы, измеряют их стороны. В третьем классе учащиеся разбивают прямоугольник на равные квадраты и используют его для иллюстрации переместительного закона умножения, с помощью задачи на вычисление периметра этого прямоугольника иллюстрируется распределительный закон умножения относительно сложения. В четвертом классе формируются представления о площади фигуры, основное внимание при этом уделяется вычислению площади прямоугольника и квадрата.

В 5-6-х классах многоугольник выступает не только как средство изучения арифметики и элементов алгебры, но и как объект изучения. Большое внимание при этом уделяется развитию пространственных представлений учащихся, работе с изображением многоугольника.

В учебно-методической литературе отражены различные подходы к изложению многоугольников.

*I подход.* Дается общее понятие многоугольника, затем рассматриваются его частные виды. Введению понятия многоугольника предшествует изучение понятий ломаной, простой ломаной. Вводится также понятие области и рассматривается тот факт, что простая замкнутая ломаная разбивает множество непринадлежащих ей точек плоскости на две области: внешнюю и внутреннюю. *Многоугольник* определяется как *объединение простой замкнутой ломаной и ее внутренней области.* Такой подход был реализован в своё время в учебном пособии по геометрии А. Н. Колмогорова и др.

Но такое определение многоугольника, по словам академика А. Д. Александрова, сужает объем нового понятия. К многоугольникам не относится, например, фигура, изображенная на рисунке 67.



А. Д. Александров предложил рассматривать *многоугольник как замкнутую область конечных размеров, граница которой состоит из конечного числа отрезков.* Многоугольник называется *простым*, если его граница представляет собой одну простую замкнутую линию.

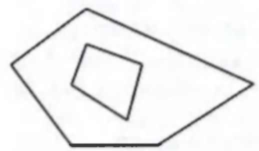


Рис. 67

В рамках этого подхода существует и концепция *многоугольника как фигуры, образованной замкнутой ломаной линией* (Киселев А. П. Элементарная геометрия. – М., 1981).

*II подход.* Вначале рассматриваются частные виды многоугольника – треугольник, четырехугольник, затем вводится понятие многоугольника. Реализация первого подхода связана с большими трудностями, они обусловлены усвоением таких понятий, как область, граница и т. д. К тому же в курсе геометрии 7 класса используется только понятие треугольника. При первом подходе оказывается большим по времени этап, предшествующий изучению теорем.

Изучение многоугольников обычно распределено по всему курсу планиметрии. Последовательность изучения материала в учебниках разных авторов различная (см. таблицу 12).

Таблица 12

| Автор учебника | Л. С. Атанасян и др. | А. В. Погорелов | А. Д. Александров и др. |
|---|---|---|---|
| 7 класс | Треугольники, равенство треугольников, соотношения между сторонами и углами треугольника, сумма углов треугольника, прямоугольные треугольники. | Треугольники, равенство треугольников, сумма углов треугольника, прямоугольный треугольник. | Треугольники, прямоугольник, построение прямоугольника. |
| 8 класс | Многоугольники, четырехугольники, площади многоугольников, подобные многоугольники. | Четырёхугольники, теорема Пифагора, неравенство треугольника, соотношения между сторонами и углами в прямоугольном треугольнике. | Ломаная, простая замкнутая ломаная, многоугольник, выпуклые и невыпуклые многоугольники, многоугольная фигура, четырехугольники, параллелограмм, ромб, трапеция, решение треугольника. |
| 9 класс | Соотношения между сторонами и углами треугольника, вписанные и описанные многоугольники, правильные многоугольники. | Решение треугольников, выпуклые многоугольники, правильные многоугольники, площади некоторых видов многоугольников. | Правильные многоугольники, вписанные и описанные многоугольники |

Рассмотрим подробно изложение этой темы в разных учебниках.

***I. Учебник геометрии А. В. Погорелова***

Сначала вводится понятие *ломаной.*

Ломаной $A_1A_2A_3 \ldots A_n$ называется фигура, которая состоит из точек $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и соединяющих их отрезков $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$. Точки $A_1, A_2, \ldots, A_n$ называются вершинами ломаной, а отрезки $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ – звеньями ломаной.

Затем вводится понятие простой ломаной и замкнутой ломаной.

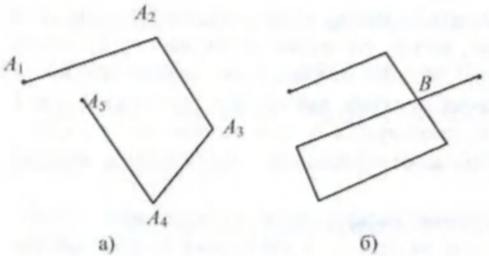



Рис. 68

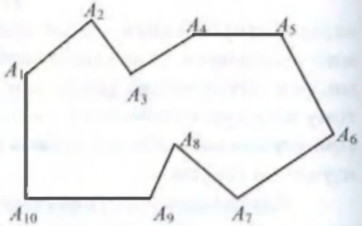



Рис. 69

Ломаная называется *простой*, если она не имеет самопересечений. На рис. 68а изображена простая ломаная, а на рис. 68б – ломаная с самопересечением в точке $B$.

Ломаная называется *замкнутой*, если у нее концы совпадают. После этого вводится понятия многоугольника и его элементов.

*Простая замкнутая ломаная называется многоугольником, если её соседние звенья не лежат на одной прямой* (рис. 69).

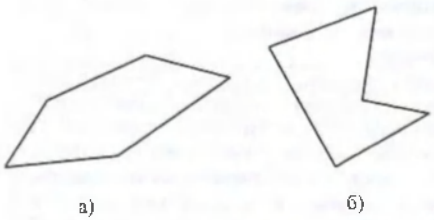



Рис. 70

*Вершины* ломаной называются вершинами многоугольника, а звенья ломаной – сторонами многоугольника.

Отрезки, соединяющие не соседние вершины многоугольника, называются *диагоналями.*

Многоугольник с $n$ вершинами и $n$ сторонами называется $n$ - угольником.

*Плоским многоугольником* или *многоугольной областью* называется конечная часть плоскости, ограниченная многоугольником.

*Многоугольник* называется *выпуклым*, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону. На рис. 70а изображен выпуклый многоугольник, а на рис. 70б– невыпуклый многоугольник.

Здесь же доказывается теорема: сумма углов выпуклого $n$-угольника равна $180°(n-2)$.

Затем рассматриваются *правильные многоугольники.*



*Выпуклый многоугольник* называется *правильным*, если у него все стороны равны и все углы равны.

Здесь же вводятся понятия *вписанного в окружность многоугольника* и *описанного около окружности.* Даются формулы для радиусов окружностей, вписанных и описанных около правильных многоугольников. Рассматривается построение некоторых правильных $n$- угольников ( $n = 3$, $n = 6$, $n = 4$).

В учебнике формулируется также теорема о подобии правильных выпуклых многоугольников.

***II. Учебник геометрии Л. С. Атанасяна и др.***

Понятие многоугольника вводится в 8 классе в главе V «Четырехугольники». Рассматривается фигура, составленная из отрезков $AB$, $BC$, $CD$, … , $EF$, $FA$ так, что смежные отрезки (т. е. $AB$ и $BC$, $BC$ и $CD$, …, $FA$ и $AB$) не лежат на одной прямой, а несмежные отрезки не имеют общих точек. Такая фигура называется *многоугольником.* Точки $A$, $B$, $C$, … $E$, $F$ называются вершинами, а отрезки $AB$, $BC$, …, $EF$, $FA$ – сторонами многоугольника. Сумма длин всех сторон называется периметром многоугольника.

Многоугольник с $n$ вершинами называется *$n$ – угольником*, он имеет $n$ сторон. На рис. 71-73 приведены примеры многоугольников.

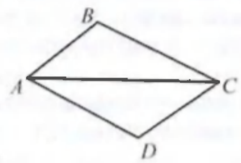



Рис. 71

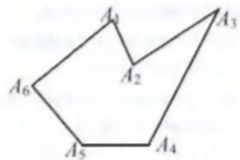



Рис. 72

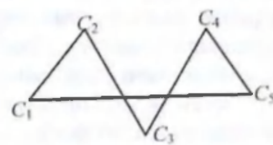



Рис. 73

Отрезок, соединяющий любые две несоседние вершины, называется *диагональю многоугольника.*

Любой многоугольник разделяет плоскость на две части, одна из которых называется внутренней, а другая – внешней областью. Фигуру, состоящую из многоугольника и его внутренней области, также называют многоугольником.

Вводится понятие выпуклого многоугольника.

Многоугольник называется *выпуклым*, если он лежит по одну сторону от каждой прямой, проходящей через две его соседние вершины.

Затем рассматриваются четырехугольники и в частности, параллелограмм и трапеция, а также частные виды параллелограмма: прямоугольник, ромб, квадрат.

## 2. Методика изучения четырехугольников

В учебниках А. В. Погорелова, Л. С. Атанасяна и др. методика введения понятия четырехугольника различна, хотя трактовка четырехугольника в этих учебниках одинакова.

В учебнике А. В. Погорелова (8 кл.) понятие четырехугольника вводится непосредственно его определением.

*Опр. 1.* Четырехугольником называется фигура, которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться.

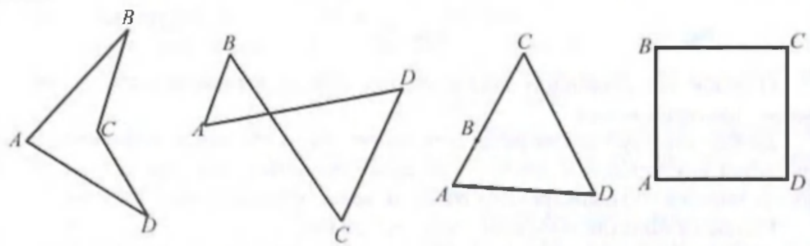
Данные точки называются вершинами четырехугольника, а соединяющие их отрезки – сторонами четырехугольника.

В учебнике Л. С. Атанасяна и др. (8 кл.) введению этого понятия предшествуют понятия многоугольника, внутренней и внешней области многоугольника, выпуклого многоугольника, а также теорема о сумме углов $n$ –угольника. (В учебнике А. В. Погорелова эти факты рассматриваются позже.)

В учебнике говорится, что каждый четырехугольник имеет четыре вершины, четыре стороны и две диагонали. Две несмежные стороны четырехугольника называются противоположными. Две вершины, не являющиеся соседними, называются также противоположными. Сообщается, что четырехугольники бывают выпуклыми и невыпуклыми.

**а) Методика введения понятия четырехугольника.** Учащиеся уже знакомы с некоторыми видами четырехугольников, поэтому перед тем как ввести понятие четырехугольника, можно предложить им построить любой четырехугольник. Рассматривая построенные фигуры, учащиеся делают вывод: четырехугольник – фигура, образованная четырьмя точками и четырьмя отрезками, последовательно соединяющими эти точки.

Затем можно предложить упражнения па распознавание четырехугольников типа: Какие из фигур, изображенных на рис. 74 являются четырехугольниками?




а) б) в) г)

Рис. 74

Фигура, изображенная на рис. 74в, образована четырьмя точками и четырьмя отрезками, последовательно соединяющими их, но три точки $A$, $B$, $C$ лежат па одной прямой. Фигуру на рис. 74б образуют четыре точки $A$, $B$, $C$, $D$, никакие три из них не лежат на одной прямой, и четыре отрезка, по отрезки $AD$ и $BC$ пересекаются. Такие фигуры, хотя и образованы четырьмя точками и четырьмя отрезками, последовательно их соединяющими, не относят к четырехугольникам.

Так постепенно уточняется содержание понятия четырехугольника. Затем



вводятся понятия соседних и противолежащих вершин, диагоналей четырехугольника, соседних и противолежащих сторон.

Возможен и другой подход к введению четырехугольника: учитель с помощью мультимедиапроектора показывает учащимся изображения различных фигур: треугольников, четырехугольников, пятиугольников и т. д., и просит их выделить фигуры, образованные по одному и тому же признаку. В процессе анализа фигур учащиеся постепенно выделяют сами содержание понятия четырехугольника.

Конкретные подходы могут быть разными, по важно, чтобы учащиеся сами принимали активное участие в анализе содержания изучаемого понятия.

В учебнике Л. С. Атанасяна и др. четырехугольник вводится как частный случай многоугольника. Такой подход по сравнению с подходом в учебниках А. В. Погорелова, А. Д. Александрова и др. является менее удачным, так как общее понятие многоугольника используется только в конце 9 класса, использовать же это понятие для введения четырехугольника нецелесообразно, так как понятие четырехугольника проще понятия многоугольника.

**б) Методика изучения параллелограмма.** В разных учебниках геометрии можно увидеть разные определения параллелограмма. С точки зрения психологии, как уже подчеркивалось нами в предыдущих лекциях, наиболее удачным является определение параллелограмма как четырехугольника, у которого противоположные стороны попарно параллельны. Такое определение позволяет быстро представить себе образ определяемого объекта.

Перед введением понятия можно выполнить упражнение на построение четырехугольника, у которого противоположные стороны попарно параллельны. Затем рассмотреть упражнения на распознавание объектов, принадлежащих понятию «параллелограмм». Среди предлагаемых объектов должны быть четырехугольники, у которых одна пара, ни одной пары, две пары противоположных параллельных сторон, в том числе – прямоугольник, ромб, квадрат.

Целесообразны упражнения на построение четырехугольников и доказательство принадлежности их к параллелограмму. Приведем пример.

*Начертите четырехугольник ABCD так, чтобы* $\angle A = 60^0$, $\angle B = 120^0$, $\angle C = 60^0$ *и выясните, является ли он параллелограммом.*

Подобные упражнения имеются в учебнике Л. С. Атанасяна и др.

В учебной литературе используются различные последовательности изложения свойств и признаков параллелограмма. В учебнике Л. С. Атанасяна и др. излагаются свойства параллелограмма, а затем их признаки.

***Свойства параллелограмма:***

1. *В параллелограмме противоположные стороны равны и противоположные углы равны.*

2. *Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.*

***Признаки параллелограмма:***

1. *Если в четырехугольнике две стороны равны и параллельны, то этот четырехугольник - параллелограмм.*

2. *Если в четырехугольнике противоположные стороны попарно равны,*

*то этот четырехугольник – параллелограмм.*

3. *Если в четырехугольнике диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник параллелограмм.*

В других учебниках излагаются сначала признаки, а затем свойства параллелограмма (А. В. Погорелов).

Свойства параллелограмма могут быть сформулированы самими учащимися в процессе выполнения упражнений. Например, свойство сторон параллелограмма может быть выделено в результате выполнения упражнения:

**1.** *ABCD – параллелограмм. Доказать, что* $\triangle ABC = \triangle CDA$.

Это упражнение моделирует и доказательство этого свойства.

Перед изучением свойств углов параллелограмма можно выполнить упражнение:

**2.** *В параллелограмме ABCD* $\angle A = 60^0$. *Вычислить все его углы.*

Выполнение этого упражнения основывается на определении параллелограмма и свойстве параллельных прямых. Решив задачу, учащиеся замечают, что противоположные углы параллелограмма равны, а сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 180°.

Это упражнение дает другой, отличный от представленных в учебниках, способ доказательства теоремы о свойстве углов параллелограмма. В учебниках доказательство основано на признаках равенства треугольников. Оно может быть таким: $\angle A + \angle B = 180°$, $\angle C + \angle B = 180°$ (по свойству внутренних односторонних углов), следовательно, $\angle A = \angle C$.

Если в учебнике изложение теории начинается со свойств параллелограмма, то признаки будут выступать как теоремы, обратные изученным теоремам. Если изложение начинается с признака, то естественна постановка проблемы: отыскать четырехугольник, являющийся параллелограммом.

Следует подчеркнуть практическую значимость изучения признаков параллелограмма. Они позволяют активнее решать различные задачи, владеть критериями распознавания параллелограммов. Каждый из признаков может служить определением параллелограмма. Тогда определение параллелограмма надо будет доказывать как теорему.

В ходе изучения параллелограмма рассматриваются его частные виды: *прямоугольник, ромб, квадрат.* Ознакомление учащихся с ними можно осуществить через упражнения на их построение. Например, можно выполнить упражнение на построение параллелограмма, у которого углы прямые. Далее формулируется определение прямоугольника и выявляется его специфическое свойство: *диагонали прямоугольника равны.* Верно и обратное утверждение: *если диагонали параллелограмма равны, то он – прямоугольник.* Поэтому прямоугольник можно определить и так: *это – параллелограмм, у которого диагонали равны.* За таким определением было бы очень трудно видеть объекты, относящиеся к прямоугольнику, но познакомить учащихся с этим признаком полезно.

Аналогично, при изучении *ромба* следует рассмотреть его признаки:

1. *Если диагонали параллелограмма перпендикулярны, то он является ромбом.*



2. *Если у параллелограмма диагонали являются биссектрисами его углов, то он – ромб.*

Определения прямоугольника, ромба, квадрата, содержащиеся в учебнике, являются обычно избыточными, то есть содержат лишние свойства. Например, прямоугольник определяется как параллелограмм, у которого *все углы прямые.* Такое определение избыточное: можно указать только один прямой угол. Тогда, используя свойство параллелограмма, легко доказать, что и другие три угла также будут прямыми. Однако в целях простоты создания наглядного адекватного образа параллелограмма используется указанное избыточное определение. Итогом изучения может быть классификация параллелограммов (таблица 13).

Таблица 13

| **По сторонам** / **По углам** | Параллелограмм, не являющийся ромбом | Ромб |
|---|---|---|
| Параллелограмм, не являющийся прямоугольником |  |  |
| Прямоугольник |  |  |

**в) Методика изучения трапеции и её свойств.** При изучении параллелограмма можно обратить внимание учащихся на четырехугольник, у которого только две противоположные стороны параллельны. Такой четырехугольник называется *трапецией.* При изучении свойств трапеции центральное место занимает теорема о средней линии. Однако в учебнике нет ни одного упражнения на усвоение понятия средней линии трапеции. Подвести учащихся к теореме можно, предложив упражнение:

*Доказать, что средняя линия треугольника ABE является средней линией трапеции ABCD* (рис. 75).

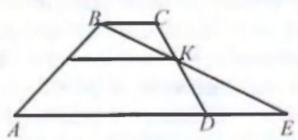



Рис. 75

Это упражнение позволяет учащимся «открыть» теорему о средней линии трапеции и способ ее доказательства. Учащиеся могут предложить и другие способы доказательства теоремы, например, разбить трапецию её диагональю на два треугольника и затем доказать, что отрезки, заключенные между диагональю и боковыми сторонами трапеции, являются средними линиями образуемых треугольников и т. д.

При изучении четырехугольников есть возможность осуществлять интеграцию алгебраического и геометрического методов и формировать при этом целостные знания учащихся о параллелограмме, трапеции и других частных видах четырехугольников. Проиллюстрируем этот подход на примере формирования понятия трапеции, выделив его основные этапы.

*I этап* (*мотивация введения понятия трапеции*) реализуется традиционно, поэтому мы не будем останавливаться на нем подробно.

***2 этап. Ознакомление с существенными свойствами*** трапеции на геометрическом языке может осуществляться так: заранее готовится рисунок с изображением разных многоугольников, в том числе и трапеции. Он может быть

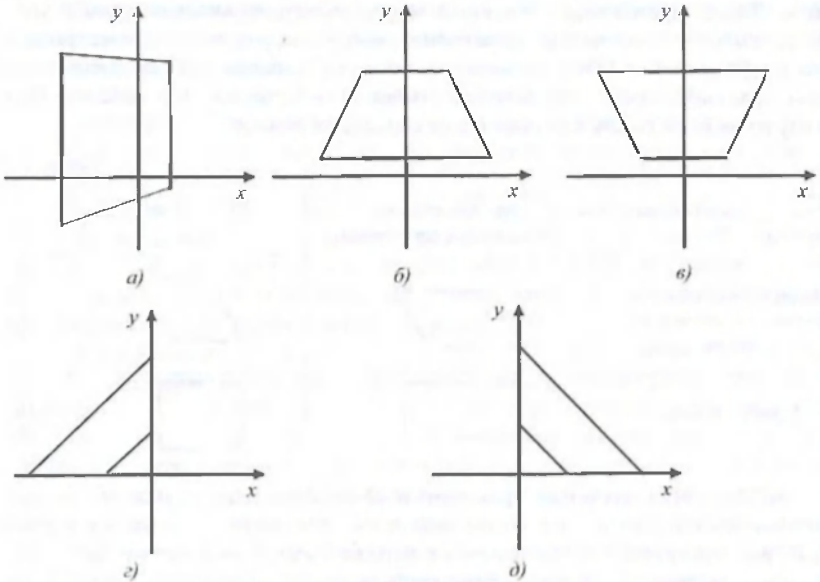



Рис. 76

выполнен на доске или спроецирован на экран с помощью мультимедийного проектора. Перед учащимися ставится вопрос, какие из фигур, изображенных на рисунке, имеют общие свойства? Учащиеся замечают, что в некоторых четырехугольниках две противоположные стороны параллельны, а две другие нет. Затем им сообщается, что такой четырехугольник называется *трапецией*. Здесь же можно сказать, что описанный четырехугольник вместе с его внутренней областью также называют трапецией

После выделения существенных свойств трапеции учащиеся под руководством учителя, используя конкретные примеры, переводят эти свойства на алгебраический язык и задают трапецию системой неравенств:

$$\begin{cases} y > ax + b, \\ y < ax + c, \\ y < c_1x + a_1, \\ y > c_2x + d_2; \end{cases} \quad \text{где, } a \neq c_1,\ a \neq c_2,\ b_2 > b_1,\ d_1 > d_2.$$



Как мы видим, система состоит из четырех линейных неравенств с двумя переменными. В двух неравенствах коэффициенты при $x$ равны, что означает параллельность двух сторон трапеции.

С помощью конкретных примеров учащиеся самостоятельно выясняют, что в зависимости от расположения трапеции возможно различное задание ее в виде системы неравенств. В случае, если: 1) основания трапеции параллельны оси $OY$ (рис. 76 *а*); 2) трапеция симметрична относительно оси $OY$ (рис. 76 *б*, *в*); 3) в качестве боковых сторон трапеции выступают отрезки осей $OX$ и $OY$
(рис. 76 *г*, *д*), трапеция может быть задана соответственно системой неравенств:

$$1)\ \begin{cases} a_1 < x < a_2, \\ y \geq c_1x + d_1, \\ y < c_2x + d_2; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} a_1 < y < a_2, \\ y < bx + c, \\ y < -bx + c; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} a_1 < y \leq a_2, \\ y > bx + c, \\ y > -bx + c; \end{cases}$$

$$3)\ \begin{cases} y > ax + b_1, \\ y \leq ax + b_2, \\ x < 0, \\ y > 0; \end{cases} \text{ или } \begin{cases} y \geq -ax + b_1, \\ y < -ax + b_2, \\ x > 0, \\ y > 0; \end{cases}$$

причем, $a_1 < a_2$, $b_2 > b_1 > 0$, $a > 0$, $c_1 < c_2$ и $d_1 < d_2$.

Очевидно, возможны и другие случаи задания трапеции системой неравенств. После таких рассуждений формулируется определение трапеции.

***Опр. 2.*** *Четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны, называется трапецией.*

Такой четырехугольник вместе с его внутренней областью будем также называть трапецией. Учащимся следует разъяснить сам термин «трапеция». Он произошел от греческого слова *trapezion*, что означает «столик».

***3 этап. Для усвоения определения трапеции*** учащиеся выполняют упражнения на распознавание объектов, принадлежащих понятию, и на выведение следствий из факта принадлежности объекта понятию. Упражнения предлагаются как геометрические, так и алгебраические. Не останавливаясь подробно на упражнениях геометрического характера, которых достаточно в методической литературе и в учебниках по геометрии, приведем примеры упражнений, заданных в алгебраической форме.

1. Какие из систем неравенств задают на плоскости трапецию и почему?

$$1)\ \begin{cases} y < x + 4, \\ y > x - 4, \\ y < 2x + 4, \\ y > -x - 4; \end{cases} \qquad 2)\ \begin{cases} y \leq 0{,}5x + 3, \\ y > -x + 3, \\ y > 2x - 3; \end{cases} \qquad 3)\ \begin{cases} y < 2x + 7, \\ y > 2x + 3, \\ x < 0, \\ y > 0, \end{cases}$$

$$4)\ \begin{cases} y < 2x - 2, \\ y > x + 5, \\ x > -3, \\ x < 2; \end{cases} \qquad 5)\ \begin{cases} y - 2x - 2 > 0, \\ y - 2x - 8 < 0, \\ y + x - 6 < 0, \\ y + x - 2 > 0; \end{cases} \qquad 6)\ \begin{cases} y > -3, \\ y < 2, \\ y > x + 3, \\ y < 3x - 1. \end{cases}$$

2. На рисунке изображена плоская трапеция и даны координаты ее вершин. Задайте трапецию системой неравенств (возможны различные случаи расположения оснований трапеции относительно осей координат). (Это упражнение предлагается учащимся после изучения декартовых координат на плоскости.)

3. Трапеция задана системой неравенств. Какие уравнения задают основания трапеции, боковые стороны? Объясните, почему?

а) $\begin{cases} y < 2x+2, \\ y > x-4, \\ x \geq -3, \\ x \leq 2; \end{cases}$ б) $\begin{cases} y \geq 0, \\ y < 4, \\ y > -x-5, \\ y < -3; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x < 0, \\ y > 0, \\ y < 3x+4, \\ y \leq 3x+1. \end{cases}$

***4 этап.*** *На этапе применения понятия* целесообразно проводить интегрированные уроки по теме «Трапеция». На таких уроках решаются как геометрические задачи, представленные в действующих учебниках, так и задачи комплексного характера, в решении которых сочетаются алгебраический и геометрический методы. Приведем примеры:

1. Найдите площадь трапеции, заданную системой неравенств:

$$\begin{cases} -1 < y \leq 3, \\ y < 2x+5, \\ y < -2x+5. \end{cases}$$

Для решения этой задачи необходимо сначала изобразить трапецию, затем найти координаты ее вершин и длины оснований (длина высоты определяется фактически условием: $h = 4$), после чего по известной формуле $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$ найти площадь трапеции.

2. Имеет ли ось симметрии фигура, заданная системой неравенств:

1) $\begin{cases} -2 < y \leq 4, \\ y > x-4, \\ y > -x-4; \end{cases}$ 2) $\begin{cases} y-x-2 < 0, \\ y+2x-4 < 0, \\ y+5 > 0? \end{cases}$

Если да, то запишите ее уравнение.

Следующие задачи предлагаются после изучения векторов.

3. На сторонах $AB$ и $BC$ треугольника $ABC$ отмечены соответственно точки $M$ и $H$ так, что $AB = 3BM$, $BC = 3BN$. Используя векторы, докажите, что $ACHM$ – трапеция.

4. Используя векторы, докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен ее основаниям и равен полуразности оснований.

5. В трапеции $ABCD$ основание $AD$ в три раза больше основания $BC$. На стороне $AD$ отмечена точка $K$, такая, что $AK = \frac{1}{3}AD$. Выразите векторы $\overrightarrow{CK}$, $\overrightarrow{KD}$ и $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\vec{a} = \overrightarrow{BA}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{CD}$.



Аналогично, по такой же схеме, сочетая геометрические действия с алгебраическими, можно проводить формирование понятия параллелограмма и его частных видов (ромба, прямоугольника, квадрата).

Таким образом, формирование математических понятий в условиях единства алгебраического и геометрического методов сводится к следующим действиям:

1) одновременная трактовка понятия на геометрическом и алгебраическом (буквенно-символическом) языках;

2) распознавание объектов, принадлежащих понятию и представленных как в алгебраической, так и геометрической формах;

3) выведение следствий из факта принадлежности объекта данному понятию, в случае, если этот объект представлен в геометрической и алгебраической формах;

4) решение задач и упражнений на применение данного понятия параллельно алгебраическим и геометрическим методами или методом, включающим в себя действия, связанные с геометрическим образом данного понятия и его алгебраической трактовкой вместе.

В целом взаимосвязь алгебраического и геометрического методов позволяет формировать понятия в единстве алгебраических и геометрических действий, адекватных этому виду знаний, создавая тем самым у учащихся целостное представление о каждом изучаемом понятии.

## 3. Методика изучения правильных многоугольников

Учащиеся уже знакомы с некоторыми правильными многоугольниками, поэтому введение понятия правильного многоугольника должно основываться на имеющемся у них опыте.

Сначала внимание учащихся акцентируется на равностороннем треугольнике, квадрате, подчеркивается, что указанные фигуры отличает то, что они выпуклые, имеют равные стороны и равные углы. Равенство сторон треугольников обусловливает равенство его углов, однако для четырехугольника такая связь не имеет места. Фигурами, иллюстрирующими это утверждение, являются ромб и прямоугольник. Затем сообщается, что *выпуклый многоугольник, у которого все стороны равны и все углы равны, называется правильным.*

Определение правильного многоугольника построено по способу «через ближайший род и видовые отличия». Родовым понятием является понятие выпуклого многоугольника, видовые отличия – равенство сторон и равенство углов. Формирование понятия правильного многоугольника предполагает усвоение его существенных свойств, а для этого используются упражнения на распознавание правильных многоугольников. Можно использовать задачи, в которых распознавание правильных многоугольников осуществляется с использованием непосредственных измерений их углов и сторон, а также упражнения типа:

**1.** Верно ли утверждение: а) любой правильный многоугольник является выпуклым; б) любой выпуклый многоугольник является правильным?

**2.** Какие из следующих утверждений верны: а) многоугольник является правильным, если он выпуклый и все его стороны равны; б) существует правильный четырехугольник, являющийся параллелограммом; в) треугольник является правильным, если все его углы равны?

**3.** Чему равны градусные меры углов: а) правильного пятиугольника; б) правильного двенадцатиугольника; в) правильного тридцатишестиугольника?

В процессе изучения возникает вопрос: нельзя ли указать способ построения с помощью циркуля и линейки некоторых правильных многоугольников? Ответить на этот вопрос помогут свойства правильных многоугольников: около любого правильного многоугольника можно описать окружность, в любой правильный многоугольник можно вписать окружность.

Учащимся известно, что точка пересечения диагоналей квадрата равноудалена от всех его вершин. Поэтому все вершины квадрата будут лежать на окружности с центром в точке пересечения его диагоналей и радиуса, равного половине диагонали. Поскольку точка пересечения диагоналей квадрата равноудалена от всех его сторон, то середины всех его сторон лежат на окружности с центром в точке пересечения его диагоналей радиуса равного половине стороны этого квадрата.

Указанные свойства квадрата обусловливают вопросы: 1) можно ли описать окружность около любого правильного многоугольника; 2) можно ли вписать окружность в любой правильный многоугольник?

Для ответа на эти вопросы необходимо выяснить существование точки, равноудаленной от всех вершин правильного многоугольника, и точки, равноудаленной от всех сторон правильного многоугольника.

Выясним, существует ли точка, равноудаленная от всех вершин правильного многоугольника. Предположив, что некоторая точка обладает этим свойством, получим, что она является точкой пересечения биссектрис его углов. Чтобы окончательно решить поставленную проблему, надо доказать, что биссектрисы углов правильного многоугольника пересекаются в одной точке.

Таким образом, открыта самими учащимися не только теорема, но и способ её доказательства. Следует обратить внимание учащихся на связь между радиусом описанной (вписанной) окружности, стороной правильного многоугольника и числом его сторон. Полученные формулы обычно конкретизируются для правильного треугольника, квадрата и правильного шестиугольника. Связь между стороной правильного шестиугольника и радиусом описанной около него окружности ($a_6 = R$) прямо указывает на способ построения правильного шестиугольника. Построив правильный шестиугольник, легко построить правильный двенадцатиугольник. Указанный способ позволяет с помощью циркуля и линейки построить целый ряд правильных многоугольников, если построен один из них. Например, построив правильный четырехугольник, можно построить правильный восьмиугольник, затем правильный шестнадцатиугольник и, вообще, правильный $2^k$ –угольник, где $k$ – любое число, большее двух.

Следует иметь в виду, что не все правильные многоугольники можно построить с помощью циркуля и линейки. Например, нельзя построить с помощью циркуля и линейки правильный семиугольник, однако можно построить правильный семнадцатиугольник. Теория построения правильных многоугольников может быть предметом кружковых занятий с учащимися.



## *Вопросы и задания*

1. Какие существуют методические подходы к изучению многоугольников в школьном курсе геометрии?

2. Как вводится понятие многоугольника в учебниках по геометрии разных авторов?

3. Какой многоугольник называется выпуклым? Дайте разные определения этого понятия. Приведите примеры и контрпримеры.

4. Опишите методику введения понятия четырехугольника, опираясь на один из учебников геометрии.

5. Как происходит изучение частных видов четырехугольника: параллелограмма и трапеции?

6. Опишите методику формирования понятия трапеции (параллелограмма) в условиях интеграции алгебраического и геометрического методов.

7. Как вводится понятие правильного многоугольника, и какие свойства правильных многоугольников изучаются в школьном курсе геометрии?

8. Охарактеризуйте особенности изучения темы «Многоугольники» по учебникам геометрии В. А. Гусева и И.Ф. Шарыгина.

**Рекомендуемая литература**


1. А л е к с а н д р о в, А. Д. Что такое многогранник / А. Д. Александров // Математика в школе. – 1981. – № 1. – С. 18 - 24.
2. Г о т м а н, Э. Г. Задача одна – решения разные: Геометр. задачи: Кн. для учащихся / Э. Г. Готман, З. А. Скопец. – М. : Просвещение, 2000. - 224 с.
3. Д а л и н г е р, В. А. Методика обучения математике. Поисково-исследовательская деятельность учащихся : учебник и практикум для вузов / В. А. Далингер – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 460 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-00450-2.
4. И з а а к, Д. Ф. Поиски решения геометрической задачи / Изаак Д. Ф. // Математика в школе. – 1998. – № 6. – С. 30 – 34.
5. Методика обучения геометрии: Учеб. пособие для студ. высш. пед. учеб. заведений / В. А. Гусев, В.В. Орлов, В. А. Панчищина др.; Под ред. В. А. Гусева. – М.: Издательский центр «Академия», 2004. – 368 с.
6. Методика обучения математике в 2 ч. Часть 2 : учебник для академического бакалавриата / П. С. Подходова, [и др.]; под ред. Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 299 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-9916-7002-9.
7. С а р а н ц е в, Г. И. Методика обучения геометрии : учеб. пособие для студентов вузов по направлению «Педагогическое образование» / Г.И. Саранцев. – Казань : Центр инновационных технологий, 2011. - 228 с.
8. Ш а р ы г и н, И. Ф. Учимся решать задачи по геометрии / И. Ф. Шарыгин // Математика в школе. – 1989. – № 2. (3) – С. 87 – 101 (95 – 103) .
9. Учебники геометрии разных авторов, входящие в Федеральный перечень школьных учебников.

Лекция XII

# МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ВЕКТОРОВ НА ПЛОСКОСТИ

1. Различные подходы к введению понятия вектора.
2. Методика изучения равенства векторов.
3. Методика изучения действий с векторами.
4. Методика обучения решению задач с помощью векторов.

---

## 1. Различные подходы к введению понятия вектора

Вектор – одно из фундаментальных понятий современной математики, оно широко используется в различных её областях. В работах Г. Бесселя, Ж. Аргана и К. Ф. Гаусса по теории комплексных чисел установлена связь между арифметическими операциями над комплексными числами и геометрическими операциями над векторами в двумерном пространстве. В работах В. Гамильтона, Г. Грассмана, Ф. Мебиуса понятие вектора нашло широкое применение при изучении свойств трехмерного и многомерного пространств.

В настоящее время на векторной основе излагаются линейная алгебра, аналитическая и дифференциальная геометрия, функциональный анализ и др.

В математике *под вектором понимают элемент векторного пространства.* Векторное пространство трактуется как множество объектов, на котором введены операции сложения объектов и умножения объекта на действительное число так, что выполняются известные вам аксиомы:

1) внутренний закон композиции: для любых элементов $\vec{a}$, $\vec{b}$, принадлежащих множеству $V$, существует единственный элемент ($\vec{a}+\vec{b}$), принадлежащий множеству $V$;

2) закон ассоциативности: $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}$, для любых элементов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, принадлежащих множеству $V$;

3) закон коммутативности: $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$, для любых элементов $\vec{a}$, $\vec{b}$, принадлежащих множеству $V$;

4) для любых элементов $\vec{a}$, $\vec{b}$, принадлежащих множеству $V$, существует такой элемент $\vec{x}$, принадлежащий множеству $V$, что $\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$;

5) внешний закон композиции: для любого элемента $\vec{a}$, принадлежащего множеству $V$ и для любого элемента $\alpha$, принадлежащего множеству $R$, существует элемент $\alpha\vec{a}$, принадлежащий множеству $V$.



6) закон ассоциативности для умножения: $(\alpha\beta)\vec{a}=\alpha(\beta\vec{a})$, где $\alpha,\beta$ - действительные числа;

7) для любого элемента $\vec{a}$, принадлежащего множеству $V$, справедливо равенство $1\vec{a}=\vec{a}$;

8) закон дистрибутивности: $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$ и $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.

Как вы видите сами, таким образом понятие вектора не может быть введено в школьном курсе геометрии. Тем более, если учесть, что понятие вектора вводится в основной школе.

Рассмотрим (кратко) различные интерпретации векторного пространства, которые используют разные авторы при изложении школьного курса геометрии.

1. ***Множество направленных отрезков плоскости***

Сложение определяется следующим образом. Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ - два направленных отрезка. Отметим произвольную точку $A$ плоскости и отложим от нее направленный отрезок $\overline{AB}$, равный $\vec{a}$. Затем от точки $B$ отложим направленный отрезок $\overline{BC}$, равный $\vec{b}$. Направленный отрезок $\overline{AC}$ называется суммой направленных отрезков $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Введенное таким образом сложение направленных отрезков удовлетворяет аксиомам сложения.

Произведением ненулевого направленного отрезка $\vec{a}$ на число $k$ называется такой направленный отрезок $\vec{b}$, длина которого равна $|k|\cdot|\vec{a}|$, причем отрезки $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены, если $k>0$ и противоположно направлены, если $k<0$. Произведением нулевого направленного отрезка на любое число считается нулевой направленный отрезок. Под нулевым направленным отрезком понимают направленный отрезок, начало и конец которого совпадают (точку). При этом выполняются аксиомы умножения.

Таким образом, множество направленных отрезков плоскости является *векторным пространством*. В этом случае вектор отождествляется с направленным отрезком.

Такая трактовка вектора используется в учебниках А. В. Погорелова и Л. С. Атанасяна и др.

2. ***Множество классов направленных отрезков плоскости***

Объектами этого множества являются не отдельные направленные отрезки, а классы, состоящие из сонаправленных отрезков, имеющих равные длины. В качестве «нулевого» объекта выступает множество точек плоскости. Операции сложения этих объектов и умножения на действительное число сводятся к соответствующим операциям с представителями классов, поэтому они удовлетворяют аксиомам векторного пространства.

Таким образом, множество классов, каждый из которых состоит из сонаправленных отрезков равной длины, является интерпретацией векторного пространства. Здесь векторы – это классы сонаправленных отрезков равной длины.

Этот подход реализован в пробном учебнике геометрии для 6 – 8 классов В. Г. Болтянского, М. Б. Воловича и А. Д. Семушина (М., 1979).

**3.** ***Множество параллельных переносов плоскости***

Под суммой параллельных переносов $T_1$ и $T_2$ понимается их композиция. Произведением параллельного переноса $T$ на число $m$ называется параллельный перенос $mT$, расстояние которого равно произведению расстояния, на которое осуществляется параллельный перенос $T$, и модуля числа $m$, а направление совпадает с направлением параллельного переноса $T$, если $m > 0$ и противоположно ему, если $m < 0$.

Можно доказать, что введенные таким образом сложение параллельных переносов и умножение параллельного переноса на число удовлетворяет аксиомам сложения и умножения, поэтому множество параллельных переносов плоскости является интерпретацией векторного пространства. Отсюда можно отождествить понятие вектора и понятие параллельного переноса.

Такая трактовка вектора использовалась в ранее действующем учебном пособии А. Н. Колмогорова и др.

**4.** ***Множество упорядоченных пар действительных чисел***

Определим сложение пар и умножение пары на число следующим образом. Суммой пар $\vec{a} = (a_1, a_2)$ и $\vec{b} = (b_1, b_2)$ назовем пару $\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$, а произведением пары $\vec{a} = (a_1, a_2)$ на число $m$ – пару $m\vec{a} = (ma_1, ma_2)$. При этом все аксиомы векторного пространства выполняются. Значит, множество упорядоченных пар действительных чисел есть векторное пространство.

Отметим достоинства и недостатки рассмотренных подходов к введению понятия вектора.

*Достоинства трактовки вектора как направленного отрезка:*

1) Трактовка вектора как направленного отрезка придает этим объектам и операциям над ними хорошую наглядность. Это очень важно, так как в процессе формирования понятия большую роль играет образный компонент, поэтому желательны такие определения, которые позволяют воображению легко конструировать образы определяемых объектов. Такой вывод согласуется с результатами психологических исследований.

2) Трактовка вектора как направленного отрезка обычно используется в физике. Таким образом, она способствует осуществлению межпредметных связей. Следует отметить и то, что в решении геометрических задач вектор используется как направленный отрезок.

*Недостатки трактовки вектора как направленного отрезка:*

1) Ее реализация связана с громоздкостью доказательства свойств сложения векторов и умножения вектора на число. Так, доказательство переместительного свойства сложения векторов предполагает рассмотрение двух случаев:
а) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны; б) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Доказательство свойства: для любых $k$, $l$ и вектора $\vec{a}$ $(kl)\vec{a} = k(l\vec{a})$ требует рассмотрение четырех случаев.

Кроме того, реализация трактовки вектора как направленного отрезка отличается непоследовательностью. При этой трактовке векторы считаются равными, если они имеют одинаковую длину и направление. Такое определение нельзя считать математически корректным, так как «равные векторы» - это по существу «один и тот же вектор» (аналогично тому, как «равные числа» - по существу «одно и то же число»), тогда как направленные отрезки $AB$ и $CD$ – это различные отрезки, а не один и тот же отрезок. Тем самым, приняв это определение вектора, мы отождествляем два различных (хотя и родственных) математических понятия: понятие *равенства* и понятие *эквивалентности*.

Равенство двух математических объектов есть их совпадение; эквивалентность же объектов означает любое отношение, обладающее свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности.

Непоследовательность такой трактовки вектора проявляется при доказательстве теорем или решении задач. Например, доказательство того, что сумма векторов зависит от выбора «начальной» точки предполагает не различать равные векторы, то есть понимать под вектором множество сонаправленных отрезков равной длины, хотя вектор определен как направленный отрезок.

Конечно, эту непоследовательность легко можно исключить, если с самого начала вектор определить как множество сонаправленных отрезков равной длины, но в этом случае наглядность затруднительна.

*Трактовка вектора как параллельного переноса* наиболее абстрактна, лишена наглядности, неприемлема в физике. Её достоинства – это отсутствие непоследовательностей в действиях с векторами, естественное введение сложения векторов и умножения вектора на число, более простые доказательства основных законов векторной алгебры. Её реализация требует обширных знаний теории геометрических преобразований. Но геометрические преобразования не составляют основу наших учебников, поэтому такой подход к введению понятия вектора не используется в настоящее время.

Трудность выбора того или иного определения вектора возникает потому, что в различных научных дисциплинах используются различные виды векторов. Так, в механике обычно рассматриваются так называемые *скользящие векторы* (вектор, начало которого можно выбирать на некоторой прямой, по которой он может перемещаться) и *связанный вектор* (вектор, начало которого отождествляется с некоторой фиксированной точкой); в математике же обычно имеют дело с так называемым *свободным вектором* (не связанным ни с какой прямой и ни с какой фиксированной точкой).

Итак, рассмотрение различных интерпретаций векторного пространства приводит к выводу о том, что наиболее приемлемой в средней школе является интерпретация вектора как *направленного отрезка.*

Следует заметить, что есть предложения отказаться в школьном курсе геометрии от определения вектора. В этом случае вектор появляется как термин, обозначающий векторные величины; направленный отрезок выступает как изображение этой величины (вектора).

Такой подход реализуется в учебнике геометрии А. Д. Александрова, А. Л. Вернера и В. И. Рыжика и в «Экспериментальном учебном пособии по математике» для ПТУ М. И. Башмакова (М., 1987).

Последовательность изучения векторных понятий в действующих учебниках геометрии представлена в таблице 14.

Таблица 14

| Автор учебника | Л. С. Атанасян и др. | А. В. Погорелов |
|---|---|---|
| 8 класс (последняя глава) | Понятие вектора, нулевой вектор, длина или модуль вектора, равные векторы, откладывание вектора от точки, сложение и вычитание векторов, умножение вектора на число | Понятие вектора, абсолютная величина (модуль) вектора, равные векторы, нулевой вектор, откладывание вектора от точки, координаты вектора, сложение векторов, умножение вектора на число, коллинеарные вектора, скалярное произведение векторов. |
| 9 класс | Скалярное произведение векторов | |

Изложение теории векторов в учебнике А. В. Погорелова отличается от соответствующего изложения в учебнике Л. С. Атанасяна и др. не только последовательностью, но и методом изложения.

В основу изложения векторов в учебнике А. В. Погорелова положен координатный метод, поэтому здесь широко используются координатные модели векторных понятий и доказательства теорем с использованием координат вектора.

В учебнике Л. С. Атанасяна и др., а также в учебнике А. Д. Александрова и др. используется метод изложения без использования координат. Это создает определенные трудности в обосновании законов векторной алгебры. Трудности возникают, главным образом, за счет необходимости рассмотрения большого количества частных случаев. Так, доказательство независимости суммы векторов от выбранной точки требует рассмотрения кроме стандартного случая (точки $A$, $B$, $C$, $A_1$, $B_1$, $C_1$ не лежат на одной прямой), который приведен в учебнике Л. С. Атанасяна и др., случая, при котором все точки $A$, $B$, $C$, $A_1$, $B_1$, $C_1$ расположены на одной прямой. Доказательство переместительного свойства сложения векторов предполагает рассмотрение двух частных случаев, а доказательство сочетательного свойства умножения вектора на число – четырех случаев.

В учебнике Л. С. Атанасяна и др. большинство теорем, связанных со свойствами векторов, сообщаются без доказательства. В учебнике А.Д. Александрова и др. – все свойства обосновываются.

Тема «Векторы» как в учебнике Л. С. Атанасяна и др., так и в учебнике А. В. Погорелова, является последней в курсе геометрии 8 класса. Это, очевидно, отражает точку зрения авторов на функции векторов в изложении геометрии: им отводится, в основном, служебная роль (способствовать изучению физических векторных величин). Об этом говорит и то, что векторы никак не связаны с изучением основного содержания курса геометрии.

В действующих учебниках геометрии вектор трактуется как направленный отрезок. При введении понятия вектора следует обратить внимание на по-



нимание различия между отрезком и направленным отрезком. Ученики должны усвоить, что отрезок $AB$ и отрезок $BA$ – один и тот же объект, направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ и направленный отрезок $\overrightarrow{BA}$ - разные объекты. Для этого можно использовать упражнения.

1. Сколько отрезков и сколько векторов определяют две (три) различные точки?

2. Начертите параллелограмм. Назовите все отрезки, концами которых являются вершины параллелограмма. Назовите все векторы, определяемые вершинами параллелограмма. И т. д.

## 2. Методика изучения равенства векторов

1. В учебнике Л. С. Атанасяна и др. используется следующее определение равенства векторов:

*Векторы называются равными, если они сонаправлены и их длины равны.*

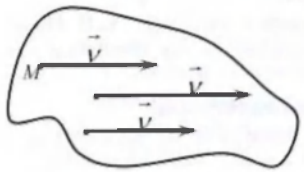


Рис. 77

Целесообразность этого определения мотивируется рассмотрением примера на движение тела, при котором все его точки движутся с одинаковой скоростью (рис. 77).

2. В учебнике А. В. Погорелова равенство векторов определяется через параллельный перенос: *Два вектора называются равными, если они совмещаются параллельным переносом.*

Из определения следует, что равные векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине. Обратно, если векторы одинаково направлены и равны по абсолютной величине, то они равны. Это утверждение дает новый способ распознавания равных векторов.

Введению понятия равных векторов должно предшествовать рассмотрение понятий *сонаправленных* и *противоположно направленных векторов, длины вектора.* Для иллюстрации сонаправленных (противоположно направленных) векторов следует использовать наглядный материал (модели, схемы и т. д.). Усвоению этих понятий будет способствовать использование упражнений.

1. Начертите равнобочную трапецию: а) существуют ли векторы, определяемые ее вершинами и равные по длине? б) Сколько пар сонаправленных векторов задают вершины трапеции?

2. Сколько пар сонаправленных (противоположно направленных) векторов определяют вершины параллелограмма?

3. Верны ли утверждения: если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены, то:
а) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ и $AB \neq CD$?

Усвоение понятия равных векторов предполагает овладение действием распознавания равных векторов и действием выведения следствий из факта равенства векторов. Овладению этих действий будет способствовать выполнение специальных упражнений.

1. Выделить на рисунке 78 равные векторы.

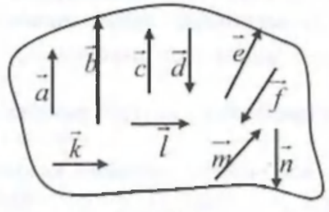


Рис. 78

2. Начертить параллелограмм, обозначить его вершины и написать все равные между собой векторы, началом и концом которых являются вершины параллелограмма.

3. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равны, что следует из этого?

4. Известно, что $\vec{a} \parallel \vec{b}$. Следует ли отсюда, что $\vec{a} = \vec{b}$? Если нет, то изменить условие так, чтобы из него следовало равенство векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

В рамках учебника А. В. Погорелова распознавание равных векторов может осуществляться как с помощью определения, так и с помощью следующего признака.

***Теорема (признак)*** *Два вектора равны тогда и только тогда, когда они одинаково направлены и равны по абсолютной величине.*

Одно из центральных мест в изложении векторов в учебнике А. В. Погорелова занимает понятие координат вектора. Остановимся на методике его формирования.

Координаты вектора автор определяет следующим образом:

*Координатами вектора с началом* $A\ (x_1; y_1)$ и концом $B\ (x_2; y_2)$ называются числа $a_1 = x_2 - x_1$ и $a_2 = y_2 - y_1$.

Вначале можно предложить учащимся выполнить следующее ***упражнение.*** на каждом из рисунков (рис. 79 а-в) изображены равные векторы. Определите координаты начала и конца каждого вектора; найдите разность координат конца и начала вектора.

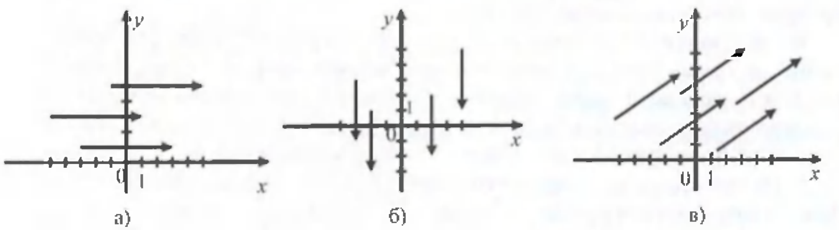


Рис. 79

Выполнив упражнение, учащиеся замечают, что разность абсцисс конца и начала вектора для всех равных ему векторов постоянна. Аналогично, и разность ординат конца и начала вектора. Числа, равные разностям соответствующих координат конца и начала вектора, называют *координатами вектора.*

Итак, координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, где $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$, есть $a_1 = x_2 - x_1$ и $a_2 = y_2 - y_1$. Координаты вектора записывают рядом с буквенным его обозначением: $\vec{a}(a_1; a_2)$. Координаты вектора, началом которого является начало координат, есть координаты его конца. Этот факт позволяет легко строить вектор по его координатам.



Приведенные упражнения позволяют учащимся самим формулировать теоремы, выражающие свойство и признак равных векторов. Равные векторы имеют равные соответствующие координаты. И обратно, если у векторов соответствующие координаты равны, то векторы равны. Эти упражнения моделируют и способы доказательства теорем. При выполнении упражнений следует подчеркнуть, что вектор $\vec{b}$, равный вектору $\vec{a}$, получается из вектора $\vec{a}$ параллельным переносом. Доказательство обратной теоремы основывается на формулах параллельного переноса.

В учебнике Л. С. Атанасяна и др. координаты вектора вводятся как коэффициенты разложения этого вектора по координатным векторам и используются для обоснования свойств скалярного произведения векторов.

## 3. Методика изучения действий с векторами

Рассмотрим, как изучаются в разных учебниках действия с векторами.

***I. Сложение и вычитание векторов***

***1. Учебник геометрии А. В. Погорелова***

Как уже отмечалось нами, в этом учебнике в качестве определений используются координатные модели. Поэтому сумма векторов, произведение вектора на число, скалярное произведение векторов определяются через координаты этих векторов. Однако вслед за координатным определением в учебнике доказывается теорема, вскрывающая геометрическую суть векторного отношения.

*Суммой векторов* $\vec{a}\,(a_1; a_2)$ и $\vec{b}\,(b_1; b_2)$ называется вектор $\vec{c}\,(a_1 + b_1; a_2 + b_2)$.

Из определения суммы векторов, признака равенства векторов и свойств сложения действительных чисел следуют все свойства сложения векторов.

Такое определение суммы векторов позволяет легко обосновать свойства сложения векторов, но оно не указывает способа построения суммы двух данных векторов. Один из таких способов дает теорема:

***Теорема.*** Каковы бы ни были точки $A$, $B$, $C$ имеет место равенство

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}.$$

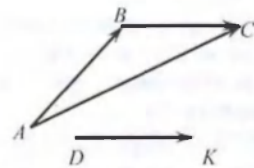


Рис. 80

(Следует заметить, что, говоря о построении суммы двух векторов, мы имеем в виду построение направленного отрезка, изображающего вектор-сумму этих векторов.)

В процессе доказательства теоремы устанавливается, что формула $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ (рис. 80) выражает так называемое «правило треугольника» для сложения векторов (отрезок, изображающий вектор-сумму, является стороной треугольника $ABC$, «замыкающей» ломаную $ABC$).

Изучение законов сложения векторов можно начать с выполнения соответствующих заданий. Например, известно, что три точки $O$, $A$, $B$ не лежат на одной прямой. Построить сумму векторов $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ следующими двумя способами: а) $\overrightarrow{OA}$ сложить с $\overrightarrow{OB}$; б) $\overrightarrow{OB}$ сложить с $\overrightarrow{OA}$.

Сравнивая результаты, полученные при выполнении этой работы двумя способами, учащиеся приходят к выводу: получен один и тот же вектор-сумма. Следовательно, для сложения векторов имеет место переместительный закон. Доказательство соответствующей теоремы можно предложить учащимся изучить по учебнику, а затем записать его на доске и в тетрадях.

Переместительное свойство сложения векторов обосновывает второй способ построения суммы двух векторов «правило параллелограмма», а сочетательное свойство позволяет ввести понятие сложения нескольких векторов.

*Разностью векторов* $\vec{a}(a_1, a_2)$ и $\vec{b}(b_1, b_2)$ называется вектор $\vec{c}(c_1; c_2)$ такой, что $\vec{c} + \vec{b} = \vec{a}$. Обозначается $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$, тогда $c_1 = a_1 - b_1$, $c_2 = a_2 - b_2$.

Следует заметить, что способ построения разности двух векторов рассмотрен здесь в задаче, поэтому решение этой задачи необходимо обсудить с учащимися.

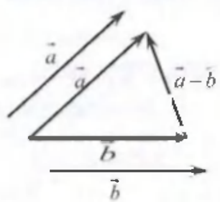


Рис. 81

***Задача.*** Даны векторы с общим началом: $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. Докажите, что $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

***Решение.*** Имеем $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, а это значит, что $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

Отсюда получается ***правило для построения разности двух векторов.*** Чтобы построить вектор, равный разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, надо отложить их от одной точки, тогда вектор, направленный от вычитаемого к уменьшаемому и будет вектором разности $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (рис. 81).

2. ***Учебник геометрии Л. С. Атанасяна и др.***

*Сумма векторов* определяется в этом учебнике следующим образом.

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ – два вектора. Отметим произвольную точку $A$ и отложим от этой точки вектор $\overrightarrow{AB}$, равный $\vec{a}$. Затем от точки $B$ отложим вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{b}$. Вектор $\overrightarrow{AC}$ называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Такое определение суммы векторов обладает хорошей наглядностью, легко может быть мотивировано рассмотрением примера на перемещение материальной точки. Однако при этом громоздким является обоснование свойств сложения векторов и независимости векторов от выбранной точки.

*Вычитание векторов* авторы определяют как действие, обратное сложению. Важное место здесь занимает теорема о том, что для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ справедливо соотношение $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$. Эта теорема дает способ построения разности векторов: чтобы вычесть из вектора $\vec{a}$ вектор $\vec{b}$, надо сложить вектор $\vec{a}$ с вектором, противоположным вектору $\vec{b}$.



Следует обратить внимание учащихся на то, что разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно найти, не прибегая к сложению векторов $\vec{a}$ и $(-\vec{b})$. Можно составить с учащимися алгоритм нахождения разности векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

1) отложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от одной точки;

2) построить вектор, начало, которого совпадает с концом вектора $\vec{b}$, а конец совпадает с концом вектора $\vec{a}$;

3) построенный вектор – искомый $\vec{a} - \vec{b}$.

***II. Умножение вектора на число***

1. ***Учебник геометрии А. В. Погорелова.***

*Произведением вектора* $\vec{a}(a_1; a_2)$ *на число* $\lambda$ называется вектор с координатами $\lambda a_1$, $\lambda a_2$.

Затем выполняются упражнения на построение произведения вектора на число:

1) Постройте произведение вектора $\overrightarrow{OA}(4; 5)$ на число а) 2; б) –3; в) 0; г) 5; д) –1,5.

В процессе выполнения упражнений такого типа учащиеся могут заметить, что векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\lambda\overrightarrow{OA}$ лежат на одной прямой и направления их совпадают, если $\lambda > 0$ и противоположны, если $\lambda < 0$.

Полезны упражнения на распознавание среди множества векторов таких, которые являются произведением данного вектора на некоторое число.

2) Среди векторов $\vec{a}(3; 5)$, $\vec{b}(-2; -10)$, $\vec{c}(0; 1)$, $\vec{d}(-2; 4)$, $\vec{e}(3; 6)$ указать такие, которые являются произведением вектора $\vec{m}(1; 2)$ на некоторое число.

Координатное определение произведения вектора на число позволяет легко обосновать все свойства умножения вектора на число. Однако оно не дает способа построения произведения данного вектора на заданное число. Возникает проблема отыскания такого способа. Приведенное нами первое упражнение позволяет ознакомить учащихся с тем, что длина вектора $\lambda\vec{a}$ равна $|\lambda||\vec{a}|$. Направление $\lambda\vec{a}\ (\vec{a} \neq \vec{0})$ совпадает с направлением $\vec{a}$, если $\lambda > 0$ и противоположно направлению вектора $\vec{a}$, если $\lambda < 0$. Упражнение будет способствовать и «открытию» доказательства этой теоремы. Теорема, в свою очередь, мотивирует введение понятие коллинеарных векторов.

2. ***Учебник геометрии Л. С. Атанасяна и др.***

В данном учебнике произведением ненулевого вектора $\vec{a}$ на число $k$ называют такой вектор $\vec{b}$, длина которого равна $|k||\vec{a}|$, причем векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены при $k > 0$ и противоположно направлены при $k < 0$. Произведением нулевого вектора на любое число считается нулевой вектор. Свойства умножения вектора на число в этом учебнике не доказываются.

Изучение новой операции над векторами – умножения вектора на число – можно начать со следующих заданий.

1) Построить вектор, представляющий сумму

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} + \vec{a}\,;\ \overrightarrow{CD} = \vec{a} + \vec{a} + \vec{a}\,.$$

В процессе выполнения этого задания выяснить с учащимися следующее:

а) Данный и построенный векторы являются сонаправленными.

б) Длина построенного вектора $|\overrightarrow{AB}|$ (или $|\overrightarrow{CD}|$) равна произведению длины данного вектора $\vec{a}$ на число 2 (на число 3). Результат операции выразить в записи:

$$\overrightarrow{AB} = 2 \cdot \vec{a}\,;\ \overrightarrow{CD} = 3 \cdot \vec{a}\,.$$

2) Рассматривая задачу построения вектора, противоположного данному вектору $\vec{b}$, нетрудно мотивировать учащимся, что вектор $-\vec{b}$ целесообразно рассматривать как произведение вектора $\vec{b}$ на число $(-1)$, т. е. $-\vec{b} = (-1) \cdot \vec{b}$.

После этого можно перейти к рассмотрению новой задачи.

Дан вектор $\vec{c}$. Построить вектор $\overrightarrow{MN} = -\vec{c} - \vec{c} = -\vec{c} + (-\vec{c})$.

В беседе с учащимися следует выяснить, что:

а) вектор $\vec{c}$ и вектор $\overrightarrow{MN}$ - противоположно направленные векторы;

б) длина вектора $\overrightarrow{MN}$ равна произведению длины вектора $\vec{c}$ на число (-2), то есть $|\overrightarrow{MN}| = |-2| \cdot |\vec{c}|$. Результат операции выразить в записи: $\overrightarrow{MN} = -2\vec{c}$.

Полезно обратить внимание учащихся на то, что запись $2 \cdot \overrightarrow{AB}$ не соответствует порядку, принятому в словесной формулировке этой операции (вектор умножается на число, в записи же числовой множитель принято ставить слева). Можно привести аналогичную запись в курсе алгебры: $a + a = 2a$; такая запись оказывается удобнее, чем запись вида $a \cdot 2$.

После этого можно дать определение произведения вектора $\vec{a}$ на число $k$ и рассмотреть равенство $|k\vec{a}| = |k|\,|\vec{a}|$, являющееся следствием этого определения.

Вытекающие отсюда равенства $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$ и $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$ следует рассмотреть детальнее.

**1.** Если $|k| = 0$, то правая часть равенства $|k\vec{a}| = |k|\,|\vec{a}|$ обращается в нуль, каков бы ни был вектор $\vec{a}$: $0 \cdot |\vec{a}| = 0$. Но тогда вектор $k \cdot \vec{a}$ имеет длину, равную нулю $|k\vec{a}| = 0$, то есть является нулевым вектором; поэтому при $|k| = 0$ $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Необходимо обратить внимание учащихся на то, что в правой части последнего равенства записано не число 0, а нулевой вектор, так как произведением вектора на любое число является вектор.

**2.** Если $\vec{a} = \vec{0}$, то $|\vec{a}| = |\vec{0}| = 0$.

Поэтому правая часть равенства $|k\vec{a}| = |k|\,|\vec{a}|$ и в этом случае обращается в нуль, каково бы ни было число $k$. $|k| \cdot 0 = 0$.

Таким образом, $k \cdot \vec{a}$ и в этом случае имеет длину, равную нулю, то есть является нулевым вектором. Поэтому при $\vec{a} = \vec{0}$ $k \cdot \vec{0} = \vec{0}$.

При изучении сложения векторов, вычитания векторов и умножения вектора на число следует выполнять упражнения не только на нахождение суммы,



разности векторов, произведения вектора на число, но и на представление вектора в виде: а) суммы нескольких векторов; б) произведения вектора на число. Эти умения важны при решении задач.

Рассмотрим основные направления методики изучения ***скалярного произведения векторов.***

Обычно это понятие вводится как произведение длины этих векторов на косинус угла между ними (учебник Л. С. Атанасяна и др.). При таком (традиционном) подходе значительную трудность представляет доказательство распределительного свойства скалярного умножения векторов. Оно очень громоздко.

В учебнике А. В. Погорелова скалярное произведение векторов изучается в 8 классе и определяется как сумма произведений их соответствующих координат (т. е. число):

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1b_1 + a_2b_2,$$

где $(a_1\,;\,a_2)$ – координаты вектора $\vec{a}$ и $(b_1;\,b_2)$ – координаты вектора $\vec{b}$.

Из определения следует, что для любых векторов $\vec{a}\,(a_1\,;\,a_2)$, $\vec{b}\,(b_1;\,b_2)$, $\vec{c}\,(c_1;\,c_2)$

$$(\vec{a} + \vec{b}\,)\vec{c} = \vec{a}\,\vec{c} + \vec{b}\,\vec{c}\,.$$

При этом в учебнике доказывается теорема:

*Скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними.*

В процессе доказательства этой теоремы выясняется *геометрический смысл скалярного произведения:*

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}(|\,\vec{a} + \vec{b}\,|^2 - |\,\vec{a}\,|^2 - |\,\vec{b}\,|^2).$$

Геометрически это равенство означает, что скалярное произведение $\vec{a} \cdot \vec{b}$ равно полуразности между площадью квадрата, построенного на стороне $|\,\vec{a} + \vec{b}\,|$ и площадями квадратов, построенных на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, верно также и обратное, если $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

В учебнике Л. С. Атанасяна и др. скалярное произведение изучается в 9-м классе после изучения тригонометрических функций, поэтому, как уже отмечалось, здесь принят традиционный подход к его определению.

## 4. Методика обучения решению задач с помощью векторов

Векторный метод решения задач является новым для учащихся, поэтому необходимо:

1) заинтересовать их, показав им эффективность его использования на специально подобранных задачах;

2) обучать учащихся некоторым эвристикам (системе определенных правил, помогающих найти ключ к решению задачи), которые помогут создать у них навык в его применении;

3) обучать этому методу на достаточно простых задачах, не отвлекая внимание на трудности чисто геометрического содержания.

Следует заметить, что векторный метод не является универсальным. к решению некоторых задач он неприменим или малоэффективен.

Можно выделить следующие эвристики (см. таблицу 15).

Таблица 15

| № п/п | Что требуется доказать (на геометрическом языке) | Что достаточно доказать (на векторном языке) |
|---|---|---|
| 1. | Прямые $a$ и $b$ параллельны. $a \parallel b$ | $\overline{AB} = k\overline{CD}$, где $k$ – число, отрезки $AB$ и $CD$ принадлежат соответственно прямым $a$ и $b$. |
| 2. | Точки $A$, $B$ и $C$ принадлежат прямой $a$. | а) Установить справедливость одного из равенств: $\overline{AB} = k\,\overline{BC}$ или $\overline{AC} = k\,\overline{AB}$. б) доказать равенство $\overline{QC} = p\,\overline{OA} + q\,\overline{QB}$, где $p + q = 1$ и $Q$ – произвольная точка плоскости. |
| 3. | Точка $C$ принадлежит отрезку $AB$, где $AC : AB = m : n$ (деление отрезка в данном отношении). | $\overline{AC} = \frac{m}{n}\cdot CB$ или $\overline{QC} = \frac{n}{m+n}\overline{QA} + \frac{m}{m+n}\overline{OB}$ для некоторой точки $Q$. |
| 4. | Прямая $a$ перпендикулярна прямой $b$ ($a \perp b$). | $\overline{AB}\cdot\overline{CD} = 0$, где $A$, $B$ принадлежат прямой $a$, а $C$, $D$ - прямой $b$. |
| 5. | Вычислить длину отрезка. | а) Выбрать два неколлинеарных базисных вектора, у которых известны длины и угол между ними; б) разложить по ним вектор, длина которого вычисляется; в) найти скалярный квадрат этого вектора, используя формулу $\vec{a}^2 = \lvert\vec{a}\rvert^2$. |
| 6. | Вычислить величину угла. | а) Выбрать два неколлинеарных базисных вектора, для которых известны отношение длин и угол между ними; б) выбрать векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, задающие искомый угол, и разложить их по базисным векторам; в) вычислить $\cos\angle(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$. |
| 7. | $M$ – середина $AB$. | а) $\overline{MA} = -\overline{MB}$ б) $\overline{OM} = \frac{1}{2}(\overline{OA} + \overline{OB})$, где $O$- произвольная точка плоскости. |
| 8. | $M$ – точка пересечения медиан треугольника $ABC$. И т.д.. | $\overline{OM} = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$, где $O$ – любая точка плоскости. |

***Цели изучения векторного метода в школе:***

1) дать эффективный метод решения различных геометрических задач и доказательства теорем;



2) показать широкое применение векторного аппарата в других областях знаний: технике, физике, химии, лингвистике и т.д. – на базе этого формировать у учащихся научное мировоззрение;

3) формировать у учащихся такие качества мышления, как гибкость (нешаблонность), целенаправленность, рациональность, критичность и др.

Использовать векторный метод в конкретных ситуациях достаточно сложно. Поэтому, прежде всего, необходимо овладеть действиями, составляющими это умение. Анализ решений различных задач приводит к выводу о том, что надо уметь:

1) переводить геометрические термины на язык векторов и наоборот;

2) выполнять операции над векторами (находить сумму, разность векторов, произведение вектора на число);

3) представлять вектор в виде суммы, разности векторов;

4) представлять вектор в виде произведения вектора на число;

5) преобразовывать векторные соотношения;

6) переходить от соотношения между векторами к соотношению между их длинами и наоборот;

7) выражать длину вектора через его скалярный квадрат;

8) выражать величину угла между векторами через его скалярное произведение.

Приведем пример задачи, при решении которой используются выделенные умения.

***Задача.*** *Доказать, что средняя линия трапеции параллельна основаниям*

Решение задачи будем осуществлять по этапам.

***I этап*** *(перевод задачи на векторный язык).*

$ABCD$ – трапеция, $AD$ и $BC$ – её основания, $MN$ – средняя линия (рис. 82).

$AM = MB$ и $CN = ND$.

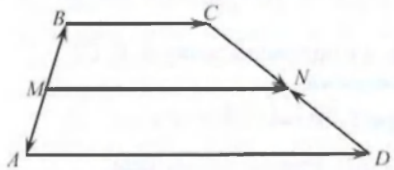



Рис. 82

Чтобы доказать параллельность средней линии основаниям, надо доказать коллинеарность векторов $\overline{MN}$ и $\overline{AD}$ или векторов $\overline{MN}$ и $\overline{BC}$.

***II этап*** *(решение задачи на векторном языке).*

1) Из четырехугольника $MBCN$ имеем:

$$\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CN} \qquad (1)$$

2) Из четырехугольника $AMND$ имеем:

$$\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AD} + \overline{DN} \qquad (2)$$

3) Сложим равенства (1) и (2):

$$2\,\overline{MN} = (\overline{AD} + \overline{BC}) + (\overline{MB} + \overline{MA}) + (\overline{CN} + \overline{DN}) = \overline{AD} + \overline{BC}.$$

Следовательно, $\overline{MN} = \frac{\overline{AD} + \overline{BC}}{2}$.

4) Так как векторы $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$ сонаправлены, то $\overline{AD} = k\cdot\overline{BC}$.

Значит, $\overrightarrow{MN} = \frac{k\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}}{2} = \frac{\overrightarrow{BC}(k+1)}{2}$. Отсюда следует, что $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ сонаправлены, а значит, и коллинеарны.

***III этап (перевод полученного ответа с векторного языка на геометрический).***

Если $\overrightarrow{MN}$ и $\overrightarrow{BC}$ коллинеарны, то $MN \parallel BC$, а так как $AD \parallel BC$, то $MN \parallel AD$ и $MN = \frac{AD + BC}{2}$.

При решении данной задачи были задействованы следующие умения:

1) переводить геометрические термины на векторный язык и наоборот;
2) выполнять операции над векторами;
3) представлять вектор в виде произведения вектора на число;
4) выполнять преобразования векторных равенств.

Эти умения и их совокупности должны формироваться с помощью специальных упражнений. Группы таких упражнений на формирование каждого действия приведены в учебном пособии Г. И. Саранцева «Методика преподавания геометрии в девятилетней школе» (Саранск, 1992).

Приведем примеры упражнений из каждой группы.

***I. Упражнения, в которых осуществляется перевод геометрических терминов на язык векторов и наоборот***

1. Отрезки $AB$ и $CD$ параллельны. Напишите это соотношение в векторной форме.

2. Точка $C$ принадлежит отрезку $AB$, причем $AC : CB = m : n$. Что означает это на векторном языке?

3. Известно, что $\overrightarrow{CD} = \alpha\,\overrightarrow{AB}$. Каково геометрическое толкование этого равенства.

4. Известно, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{O}$. Как расположены точки $A$, $B$, $C$?

***II. Упражнения на операции с векторами***

5. Дан вектор $\overrightarrow{AB}$. Постройте векторы $2\overrightarrow{AB}$; $-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

6. $ABCD$ – параллелограмм, $O = AC \cap BD$. Изобразите векторы:
а) $\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{AO} - \overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC}$.

Упражнение 6 выполняется мысленно, не осуществляя при этом непосредственных построений. Такие упражнения важны, так как применение векторов в конкретных ситуациях чаще требует именно этого.

***III. Упражнения на представление вектора в виде суммы (разности векторов, произведения вектора на число)***

7. Дан многоугольник $ABCDE$. Представьте $\overrightarrow{AD}$ в виде суммы: а) двух; б) трёх; в) четырех векторов, заданных вершинами этого многоугольника.

8. Представьте вектор $\overrightarrow{AB}$ в виде суммы векторов $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DC}$, $\overrightarrow{BD}$.

9. Вектор $\overrightarrow{CD}$ коллинеарен вектору $\overrightarrow{AB}$ и $\frac{|\overrightarrow{CD}|}{|\overrightarrow{AB}|} = k$. Выразите один вектор через другой.



***IV. Упражнения на переход от соотношения между векторами к соотношению между их длинами и наоборот***

10. В каком случае $|\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OA}| - |\overrightarrow{OB}|$?

11. Может ли $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{BC}|$?

12. Векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{MN}$ коллинеарны. Каково соотношение между длиной векторов $\overrightarrow{MN}$ и суммой длин векторов $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$, если

$$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AD}).$$

***V. Упражнения на преобразование векторных равенств***

13. Упростите выражения: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{NM}$;
б) $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{EP} + \overrightarrow{KD} - \overrightarrow{KA}$.

14. Упростите выражение $(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})(\vec{a} - \vec{b} + \vec{c})$, если вектор $\vec{b}$ перпендикулярен вектору $\vec{c}$.

15. Четырехугольник $ABCD$ – квадрат. Упростите выражение $(\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC})^2$.

***VI. Упражнения на нахождение длины вектора и величины угла между векторами***

16. Известно, что $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, $(\vec{a}, \vec{b}) = 30^0$, $|\vec{a}| = 5$ см, $|\vec{b}| = 3$ см. Найдите $|\vec{c}|$.

17. Известно, что векторы $\vec{a} + 2\vec{b}$ и $5\vec{a} - 4\vec{b}$ взаимно перпендикулярны. Какой угол образуют векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$?

В процессе выполнения этих упражнений вырабатываются критерии использования векторов для доказательства различных зависимостей. Векторы эффективны при доказательстве: а) параллельности прямых и отрезков; б) принадлежности трёх точек одной прямой; в) перпендикулярности прямых и отрезков и т. д.

Для того чтобы учащиеся научились решать задачи векторным методом, необходимо, прежде всего, научить их решать опорные задачи, при решении которых непосредственно используются эвристики, представленные в таблице 15.

### Историческая справка

Считается, что вектор как самостоятельный объект появился в 40-е гг. XIX в., хотя действия с отрезками выполнялись и ранее. Так, представление величин отрезками имело место уже в древнегреческой математике. В «Началах» Евклида изложены основы древнегреческого геометрического исчисления. Сложение величин сводилось к сложению отрезков, умножение величин – к построению прямоугольника на соответствующих отрезках, деление – к операции «приложения» геометрических фигур. Также ненаправленными отрезками оперировал Декарт. Но уже немецким ученым Г. Лейбницем была выдвинута идея построения векторного исчисления, близкого к современному. В XVI – XVII вв. Леонардо да Винчи, Галилео Галилей, Иоганн Кеплер пользовались направленными отрезками для наглядного представления сил в физике и астрономии. Так поступал и Симон Стевин, который, изучая равновесие тел на наклонной плоскости, дошел до разложения силы на составляющие и открыл закон параллелограмма сил. Однако в рассматриваемую эпоху в естествознании еще не оформилось четко понятие векторной величины, а идея алгебраических действий с направленными отрезками лишь зарождалась. Развитие настоящего векторного исчисления относится к XIX в.

Г. И. Глейзер в работе [6] выделил три направления развития векторного исчисления: *геометрическое* (исчисление отрезков), *физическое* (исследование векторных величин, встречающихся в естествознании), *алгебраическое* (расширение понятия операции при создании современной алгебры). Развитие первого направления связано с именем Каспара Весселя (Норвегия). Векторная алгебра на плоскости (двумерное векторное пространство) построена им почти так же, как она излагается в современных учебниках. Отрезки, имеющие любое направление, были введены Л. Карно (Франция, 1803), он же занимался и действиями с направленными отрезками, позже его идеи были систематизированы немецким математиком А. Мебиусом. У Карно отсутствует систематическое исчисление направленных отрезков, содержащееся у Весселя. Однако главный труд последнего «Опыт об аналитическом представлении направления и его применениях» не оказал никакого влияния на развитие векторного исчисления, так как на протяжении целого столетия ученые не обращали на него внимания, в то время как понятие *геометрического количества* Карно, под которым он понимал в основном направленный отрезок, стали употреблять передовые математики уже в самом начале XIX в. Некоторые введенные Карно термины и символы, в частности обозначение вектора с помощью черты наверху ( $\overline{AB}$, $\bar{C}$ ), сохранились и в наши дни.

Наиболее значительный вклад в развитие векторного исчисления внес ирландский математик У. Гамильтон в связи с изложением теории комплексных чисел и учения о кватернионах (1853). Именно Гамильтон стал применять понятия «вектор», «скаляр» (от латинского skala – лестница; подобно ступенькам лестницы можно упорядочить *действительные* числа, вводя понятия «больше» и «меньше», но не комплексные числа, не *векторы*), «скалярное произведение», «векторное произведение». Независимо от Гамильтона к аналогичным результатам пришел и немецкий ученый Г. Грассман. В 1844 г. в работе «Учение о протяженности» он впервые излагает учение об $n$-мерном евклидовом пространстве. Вместо терминов «скалярное произведение», «векторное произведение» он использует соответственно «внутреннее» и «внешнее». Векторы Грассман обозначал жирными буквами латинского алфавита. Принятое сейчас обозначение вектора $\bar{r}$ ввел в 1853 г. О. Коши, а единичные векторы $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ в том же году Гамильтон.

Систематически применял векторное исчисление для потребностей естествознания Дж. Максвелл, а современный вид векторному исчислению придали в конце XIX в. американский физик Дж. Гиббс и английский физик О. Хевисайд.

Систематическое изучение векторов и координат в курсе геометрии основной школы началось в последней трети XX в. в учебниках А. Н. Колмогорова. Изложение учебного материала осуществлялось в них на основе идей геометрических преобразований, поэтому вектор вводился как параллельный перенос, координатный метод в основной школе не изучался (вводились только координаты вектора), этот вопрос подробно рассматривался в старшей школе (в учебниках З. А. Скопеца).

## *Вопросы и задания*

1. Как трактуется вектор в математике?

2. Как определяют понятие «равные векторы» авторы школьных учебников геометрии? Опишите методику введения понятия равных векторов. Приведите примеры на усвоение этого понятия.

3. Как познакомить учащихся с понятием координат вектора?

4. Сформулируйте признак равенства векторов (в разных формах: а) через координаты; б) через их длины).



5. Какие действия с векторами изучаются в школьном курсе геометрии?

6. Каковы особенности методики изучения действий с векторами по учебникам геометрии А. В. Погорелова и Л. С. Атанасяна и др.?

7. Каковы цели изучения векторного метода в школе?

8. Какие действия составляют умение использовать векторный метод в разных ситуациях?

9. Охарактеризуйте этапы решения задачи векторным методом. Перечислите эвристики, которые используются при решении задач с помощью векторов.

10. Какие упражнения необходимы для формирования векторного метода? Приведите примеры.

11. Решите следующие задачи векторным методом, выделите умения, которые использовались при их решении:

а) Доказать, что диагонали ромба перпендикулярны.

б) В треугольнике $ABC$ известны длины всех сторон. Определить его углы.

**Рекомендуемая литература**


1. А л е к с а н д р о в, А. Д. Что же такое вектор? / А.Д. Александров // Математика в школе. – 1984. – № 5. – С. 39 – 46.
2. А л е к с а н д р о в, А. Д. Геометрия. 8 класс : учебник для общеобразовательных организаций / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – М. : Просвещение, 2016. – 176 с.
3. А л е к с а н д р о в, А. Д. Геометрия. 9 класс : учебник для общеобразовательных организаций / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – М. : Просвещение, 2016. – 175 с.
4. Б а ш м а к о в, М. И. Математика: Эксперимент. учеб. пособие для СПТУ / М. И. Башмаков – М.: Высш. шк., 1987. – 463 с.
5. Геометрия. 7 – 9 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – М. : Просвещение, 2017. – 384 с.
6. Г л е й з е р Г. И. История математики в школе: IX – X кл. Пособие для учителей. – М. : Просвещение, 1983. – 351 с.
7. Д а л и н г е р, В. А. Методика обучения математике. Поисково-исследовательская деятельность учащихся : учебник и практикум для вузов / В. А. Далингер – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 460 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-00450-2.
8. Методика обучения математике в 2 ч. Часть 2 : учебник для академического бакалавриата / Н. С. Подходова, [и др.]; под ред. Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 299 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-9916-7002-9.
9. Методика и технология обучения математике. Курс лекции: пособие для вузов / под науч. ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.
10. П о г о р е л о в, А. В. Геометрия. 7 – 9 классы. Учебник. ФГОС / А. В. Погорелов. – М. : Мнемозина, 2015. – 376 с.
11. Р ы ж и к В. И. Геометрия. 7 класс : учебник для общеобразовательных организаций. ФГОС / В. И. Рыжик, А. Д. Александров, А. Л. Вернер. – М. : Просвещение, 2016. – 175 с.
12. С а р а н ц е в, Г. И. Методика обучения геометрии : учеб. пособие для студентов вузов по направлению «Педагогическое образование» / Г.И. Саранцев. – Казань : Центр инновационных технологий, 2011. – 228 с.
13. Учебники геометрии разных авторов, входящие в Федеральный перечень школьных учебников.

Лекция XIII
# МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ МЕТОДА КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

1. Сущность и значение метода координат в школьном курсе математики.
2. Простейшие задачи в координатах на плоскости:
   а) нахождение координат середины отрезка;
   б) вычисление длины вектора по его координатам;
   в) нахождение расстояния между двумя точками по их координатам.
3. Уравнения фигур на плоскости.
4. Особенности применения метода координат.
5. Методика формирования координатного метода решения задач.

---

## 1. Сущность и значение метода координат в школьном курсе математики

В настоящее время многие специалисты из разных областей знания используют в своей работе прямоугольные декартовы координаты. Координаты дают возможность наглядно-геометрически при помощи графика изобразить зависимость одной величины от другой (врач строит график температуры больного в процессе болезни, экономист – график роста производства и т. д.).

Что же такое координаты?

Координаты – это числа, по которым определяется положение точки на прямой, на плоскости и в пространстве. Координаты – это числа, взятые в определенном порядке. Название «декартовы координаты» наводят на ложную мысль о том, что эти координаты были открыты Р. Декартом. В действительности прямоугольные координаты употреблялись в геометрии ещё до начала нашей эры. Древний математик александрийской школы Аполлоний Пергский (III – II вв. до н. э.) уже фактически пользовался прямоугольными координатами. Он при помощи них определял известные уже в то время кривые: параболу, гиперболу и эллипс. Аполоний задавал их уравнениями:

$y^2 = px$ (парабола);

$y^2 = px + \frac{p}{q}x^2$ (гипербола);

$y^2 = px - \frac{p}{q}x^2$ (эллипс), ($p$ и $q$ – положительные числа).

Аполоний, конечно, не записывал уравнения в этой алгебраической форме, так как в те времена не существовало еще алгебраической символики. Он описывал уравнения, пользуясь геометрическими понятиями: $y^2$ в его терминологии есть площадь квадрата со сторонами $y$; $px$ есть площадь прямоугольника со сторонами $p$ и $x$ и т. д. С этими уравнениями связаны названия кривых. Парабола (в переводе с греч. – «равенство»): квадрат $y^2$ имеет площадь, равную площади прямоугольника $px$. Гипербола по-гречески означает избыток: площадь квадрата $y^2$ превосходит площадь прямоугольника $px$, эллипс по-гречески означает недостаток: площадь квадрата $y^2$ меньше площади прямоугольника $px$.

Впервые идея координатного метода была систематически развита Пьером Ферма (1601 – 1665) и Рене Декартом (1596 – 1650). В их формулировках расстояния до координатных осей могли быть только положительными числами или нулем. Идея о том, что одно или оба эти расстояния можно также считать и отрицательными принадлежит Исааку Ньютону (1643 – 1727). Г. В. Лейбниц (1646 – 1716) первым назвал эти расстояния «координатными».

Таким образом, открытие декартовых координат не принадлежит Декарту. Декарт построил аналитическую геометрию, в которой сошлись математические открытия, с трудом слагавшиеся в течение тысячелетий. Работа Р. Декарта «La Geometrie», в которой излагались основные идеи аналитической геометрии на плоскости, была опубликована в 1637 г.

Значение аналитической геометрии состоит прежде всего в том, что она установила тесную связь между геометрией и алгеброй. Эти две ветви математики ко времени Р. Декарта достигли высокой степени совершенства, но развитие их в течение тысячелетий шло независимо друг от друга, и ко времени появления аналитической геометрии между ними была довольно слабая связь.

Что же дает нам введение понятия координаты?

1. В математическом отношении устанавливается взаимно-однозначное соответствие между множеством действительных чисел и множеством точек прямой или между парами чисел и множеством точек плоскости (между множеством троек чисел и множеством точек пространства).

2. В познавательном отношении мы получаем новые способы решения ряда известных задач.

3. В методическом отношении: например, координатная прямая используется для введения сравнения чисел, правил сложения чисел; координатная плоскость используется для геометрической интерпретации решений уравнений или неравенств, содержащих переменные.

В чем сущность координатного метода? Сущность координатного метода заключается в том, что устанавливается соответствие между множеством точек прямой (плоскости, пространства) и множеством чисел (пар чисел, троек чисел).

Л. С. Атанасян в пробном учебнике «Геометрия 6-8» (М., 1981) отмечает, что «введение системы координат позволяет изучать геометрические фигуры и их свойства с помощью уравнений и неравенств. В этом и состоит сущность метода координат».

В чем эффективность координатного метода?

1. Координатный метод позволяет решать геометрические задачи средствами алгебры, а некоторые алгебраические задачи средствами геометрии.

2. Использование координатного метода приводит к результатам более простым и коротким путем.

3. Координатное решение задачи позволяет охватить все его частные случаи, при этом для него не характерно выполнение дополнительных построений.

4. Использование координатного метода способствует развитию геометрической интуиции (правильный выбор системы координат и т.д.).

5. Координатный метод обогащает алгебру геометрической наглядностью.

6. Использование координатного метода способствует развитию вычислительных и графических навыков.

В соответствии с программой по математике для средней школы координаты впервые появляются в 6–7-х классах при изучении следующего алгебраического материала: «Изображение чисел на прямой, координаты точки. Формула расстояния между двумя точками с заданными координатами. Прямоугольная система координат на плоскости, абсцисса и ордината точки».

В учебнике геометрии А. В. Погорелова, Л. С. Атанасяна и др. используется один и тот же вариант изложения метода координат на плоскости. Однако роль координатного метода в этих учебниках не одинакова. Если учебник Л. С. Атанасяна и др. ограничивается лишь незначительным использованием координат в изложении геометрии (определение тригонометрических функций, основное тригонометрическое тождество, формулы приведения, теорема косинусов), то в учебнике А. В. Погорелова координатный метод является инструментом изучения геометрии. Он широко используется при доказательстве теорем и определении понятий (с помощью координатного метода изложены теория преобразований и векторы).

Схема изложения метода координат в учебнике А. В. Погорелова такова: введение координат, координаты середины отрезка, расстояние между точками, уравнение окружности, уравнение прямой, координаты вектора.

В учебнике Л. С. Атанасяна и др. последовательность такова: координаты вектора, простейшие задачи в координатах, уравнения окружности и прямой.

В пробных учебниках А. Д. Александрова и др. координаты появляются лишь в десятом классе, здесь рассматривается прямоугольная система координат, формула для расстояния между точками, задание сферы и шара в системе координат, задания фигур уравнениями и неравенствами, уравнение плоскости, другие системы координат.

Итак, учащиеся в курсе планиметрии знакомятся с тремя важными формулами. Это формулы для нахождения:

1) координат середины отрезка;

2) длины вектора по его координатам;

3) расстояния между двумя точками с заданными координатами.



## 2. Простейшие задачи в координатах на плоскости

**а) Нахождение координат середины отрезка.** При нахождении координат середины отрезка рассматриваются два случая возможного расположения этого отрезка: отрезок $AB$ не параллелен оси $Oy$, то есть $x_1 \neq x_2$, и $x_1 = x_2$, то есть $AB \parallel Oy$.

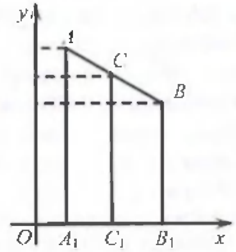



Рис. 83

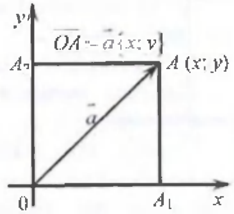



Рис. 84

В первом случае с помощью теоремы Фалеса доказываем, что точка $C_1$ является серединой отрезка $A_1B_1$ ($AA_1 \parallel Oy$, $BB_1 \parallel Oy$), $C$ – середина $AB$ (рис. 83).

Из равенства $A_1C_1 = B_1C_1$ следует, что $|x - x_1| = |x - x_2|$. Последнее равенство известно учащимся из курса алгебры. Поэтому либо $x - x_1 = x - x_2$, либо $x - x_1 = -(x - x_2)$. Первое невозможно, так как $x_1 \neq x_2$. Поэтому верно второе: $x - x_1 = -x + x_2$. Отсюда $2x = x_1 + x_2$, а $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ - абсцисса точки $C$.

Если $x_1 = x_2$, то есть $AB \parallel Oy$, то все три точки $A_1$, $B_1$ и $C_1$ имеют одну и ту же абсциссу. Значит, формула остается верной и в этом случае.

Ордината точки $C$ находится аналогично. Через точки $A$, $B$ и $C$ проводятся прямые, параллельные оси $Ox$. В итоге получаем $y = \frac{y_1 + y_2}{2}$ - ординату точки $C$.

**б) Вычисление длины вектора по его координатам.** В учебнике Л. С. Атанасяна и др. доказывается, что длина вектора $\vec{a}(x; y)$ вычисляется по формуле

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} .$$

Для доказательства этой формулы отложим от начала координат вектор $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ и проведем через точку $A$ перпендикуляры $AA_1$ и $AA_2$ к осям $Ox$ и $Oy$ (рис. 84). Координаты точки $A$ равны координатам векторов $\overrightarrow{OA}$, т. е. $(x; y)$. Поэтому $OA_1 = |x|$, $AA_1 = OA_2 = |y|$ (мы рассматриваем случай, когда $x \neq 0$ и $y \neq 0$; другие случаи учащиеся могут рассмотреть самостоятельно).

По теореме Пифагора

$$OA = \sqrt{OA_1^2 + AA_1^2} = \sqrt{x^2 + y^2} .$$

Но $|\vec{a}| = |\overrightarrow{OA}| = OA$, поэтому $|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , что и требовалось доказать.

**в) Нахождение расстояния между двумя точками по их координатам.**

Формулы для вычисления расстояния между точками, координаты которых известны, также рассматриваются для различных случаев расположения этих точек.

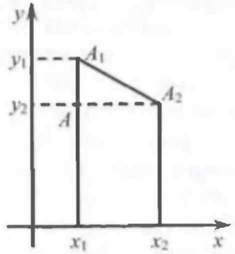



Рис. 85

Найдем расстояние между точками $A_1(x_1;\ y_1)$ и $A_2(x_2;\ y_2)$.

а) Пусть $x_1 \neq x_2$, и $y_1 \neq y_2$ (рис. 85).

В этом случае $AA_1 = |y_1 - y_2|$; $AA_2 = |x_1 - x_2|$.

По теореме Пифагора

$$A_1A_2^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2.$$

После этого рассматриваются другие возможные случаи:

1) $x_1 = x_2$, $y_1 \neq y_2$,

2) $x_1 \neq x_2$, $y_1 = y_2$,

3) $x_1 = x_2$, и $y_1 = y_2$.

Полученная формула верна для каждого из этих случаев.

В учебнике Л. С. Атанасяна и др. иной подход к выводу формулы. Рассматривается вектор $\overline{A_1A_2}$, находятся его координаты (если известны координаты его концов) и длина этого вектора через его координаты. В итоге получаем такую же формулу.

## 3. Уравнения фигур на плоскости

В курсе алгебры, исходя из уравнения $y = f(x)$, где $f(x)$ – заданная функция, строили кривую, определяемую этим уравнением, то есть строили график функции $y = f(x)$. Таким образом, шли как бы «от алгебры к геометрии». При изучении метода координат мы выбираем обратный путь: исходя из геометрических свойств некоторых кривых, выводим их уравнение, то есть идем как бы «от геометрии к алгебре». В восьмом классе (по учебнику Л. С. Атанасяна в девятом классе) рассматриваются уравнения окружности и прямой, а в десятом – уравнения плоскости и сферы.

В учебнике А. В. Погорелова дается общее понятие «уравнение фигуры».

*Опр. 1.* Уравнением фигуры на плоскости в декартовых координатах называется уравнение с двумя неизвестными $x$ и $y$, которому удовлетворяют координаты любой точки фигуры. И обратно: любые два числа, удовлетворяющие этому уравнению, являются координатами некоторой точки фигуры.

В учебнике Л. С. Атанасяна дается общее понятие «уравнение линии».

*Опр. 2.* Уравнение с двумя переменными $x$ и $y$ называется уравнением линии $L$, если этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки линии $L$ и не удовлетворяют координаты никакой точки, не лежащей на этой линии.

Уравнение фигуры на плоскости в общем виде можно записать так: $F(x, y) = 0$. Приведем примеры.



**1.** Уравнение $x^2 + y^2 + 1 = 0$ определяет на плоскости пустое множество. Неравенство $x^2 + y^2 + 1 < 0$ определяет на плоскости также пустое множество. Неравенство $x^2 + y^2 + 1 > 0$ определяет всю плоскость.

**2.** Уравнение $x^2 + y^2 - 1 = 0$ определяет на плоскости окружность с центром в начале координат и радиуса $r = 1$. Неравенство $x^2 + y^2 - 1 < 0$ $(x^2 + y^2 - 1 > 0)$ определяет на плоскости внутреннюю (внешнюю) область окружности с центром в начале координат и радиуса $r = 1$.

**3.** Уравнение $x^2 + y^2 = 0$ есть точка с координатами (0; 0).

**4.** Уравнение $F(x) = 0$ определяет на плоскости множество прямых, параллельных оси $OY$. Это множество прямых может оказаться и пустым, так как данное уравнение может не иметь действительных решений, например, $x^2 + 1 = 0$.

В приведенных примерах мы по данному уравнению или неравенству определяли фигуру. Поставим обратную задачу: для данной геометрической фигуры составить уравнение, которое определяло бы эту фигуру.

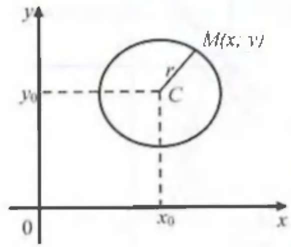



Рис. 86

Рассмотрим, как выводится уравнение окружности радиуса $r$ с центром в точке $C$ в заданной прямоугольной системе координат (рис. 86). Расстояние от точки $M\ (x;\ y)$ до точки $C\ (x_0;\ y_0)$ вычисляется по формуле $MC = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Если точка $M\ (x;\ y)$ лежит на данной окружности, то $MC = r$ или $MC^2 = r^2$, то есть

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2. \qquad (1)$$

Если же точка $M\ (x;\ y)$ не лежит на данной окружности, то $MC^2 \neq r^2$, и, значит, координаты точки $M$ не удовлетворяют уравнению (1).

Следовательно, в прямоугольной системе координат уравнение окружности радиуса $r$ с центром в точке $C\ (x_0;\ y_0)$ имеет вид:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2.$$

В частности, уравнение окружности радиуса $r$ с центром в начале координат имеет вид:

$$x^2 + y^2 = r^2.$$

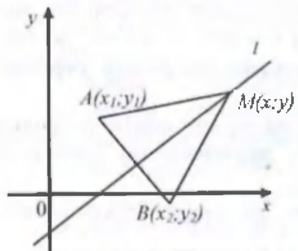



Рис. 87

Вывод уравнения прямой проводится по той же схеме, что и уравнение окружности.

Выведем уравнение данной прямой $l$ в заданной прямоугольной системе координат.

Отметим две точки $A\ (x_1;\ y_1)$ и $B\ (x_2;\ y_2)$ так, чтобы прямая $l$ была серединным перпендикуляром к отрезку $AB$ (рис. 87).

а) Если точка $M$ лежит на $l$, то $AM = MB$ или $AM^2 = BM^2$, то есть координаты точки $M$ удовлетворяют уравнению

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=(x-x_2)^2+(y-y_2)^2 \qquad (2)$$

б) Если же точка $M$ не лежит на прямой $l$, то $AM^2 \neq BM^2$, и, значит, координаты точки $M$ удовлетворяют уравнению (2).

Следовательно, уравнение (2) является уравнением прямой $l$ в заданной системе координат.

После преобразований уравнение (2) принимает вид:

$$ax + by + c = 0.$$

После вывода уравнения прямой необходимо выяснить ее расположение на плоскости в зависимости от значений, которые могут принимать коэффициенты $a$, $в$, $c$ (рис. 88 а-в).

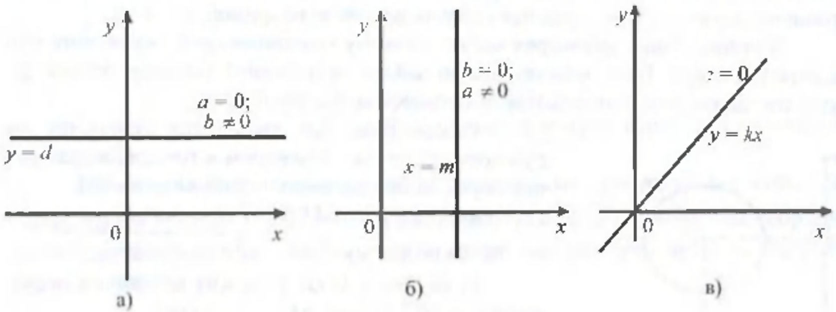



Рис. 88

Если $a = 0$, $b \neq 0$, то прямая параллельна оси абсцисс.

Если $a \neq 0$, $b = 0$, то прямая параллельна оси ординат.

Если $c = 0$, то прямая проходит через начало координат и лежит в I и III четвертях, если $k > 0$, и во II и IV четвертях, если $k < 0$.

## 4. Особенности применения метода координат

Сразу же после рассмотрения основных понятий, связанных с введением координат на плоскости и уравнений окружности и прямой, с учащимися изучаются такие вопросы, как: пересечение двух окружностей, пересечение прямой и окружности, определение синуса, косинуса и тангенса угла от $0^0$ до $180^0$. Это первые приложения метода координат, с которыми знакомятся учащиеся (по учебнику А. В. Погорелова).

Следует сразу обратить внимание учащихся на то, что основную роль в вопросах приложений метода координат занимает рациональный (оптимальный) выбор расположения осей координат.

Если выбирать систему координат случайно, то можно легкую задачу превратить в очень трудную.

Рассмотрим теорему: *«Середина гипотенузы прямоугольного треугольника равноудалена от его вершин»*. Докажем ее методом координат.



Первым шагом при использовании метода координат является оптимальный выбор осей и начала координат (то есть такой, при котором алгебраические выкладки становятся более простыми).

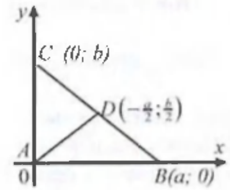



Рис. 89

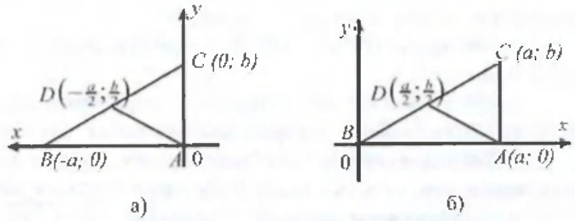



Рис. 90

На рисунке 89 показан самый оптимальный выбор прямоугольной системы координат для решения данной задачи. Удачный выбор системы координат можно выбрать и по-другому (рис. 90 а-б).

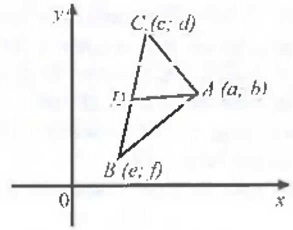



Рис.91

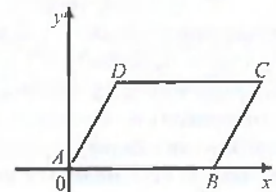



Рис. 92

На рис. 91 показан неоптимальный выбор прямоугольной системы координат. Здесь сначала нужно найти способ, позволяющий выразить алгебраически тот факт, что треугольник $ABC$ имеет при вершине $A$ прямой угол.

Если дан параллелограмм, то удобно выбирать прямоугольную систему координат, как показано на рис. 92.

Необходимы специальные упражнения, формирующие умение выбирать систему координат. Таких упражнений в учебниках почти нет. Приведем примеры.

**1.** Длина отрезка $AB$ равна 5 см:

а) выберите систему координат, в которой можно было бы наиболее просто определить координаты концов отрезка;

б) выберите систему координат так, чтобы координаты концов отрезка были бы: $A(-2{,}5; 0)$, $B(2{,}5; 0)$.

**2.** Длины сторон треугольника $ABC$ равны 3, 4 и 5 см. Выберите систему координат и определите в ней координаты вершин треугольника $ABC$.

## 5. Методика формирования координатного метода решения задач

Понятийный аппарат координатного метода (для декартовой системы координат) включает следующие понятия:

1. ***Абсцисса*** (от лат. *abscissus* – отрезанный, отсеченный) – отрезок, отсекаемый на оси $OX$.

2. ***Ордината*** (от лат. *ordinatus* – упорядоченный) – одна из декартовых координат точки, обычно вторая, обозначаемая буквой $y$. Первоначально была только одна ось и ординатами были отрезки, параллельные друг другу и перпендикулярные оси, то есть в каждой абсциссе строился свой перпендикуляр.

3. ***Координаты*** *(точки)* - числа, взятые в определенном порядке и характеризующие положение точки на линии, на плоскости, на поверхности или в пространстве.

4. ***Координатная прямая*** – прямая, на которой указан способ изображения действительных чисел.

5. ***Координатная плоскость*** – плоскость с введенной на ней системой координат; $x = 0$, $y = 0$ – оси координат; $x = const$, $y = const$ – координатные линии.

6. ***Координатный метод*** – способ определения положения точки (на прямой, плоскости, в пространстве) с помощью чисел. Используя координатный метод, алгебраические уравнения можно истолковать в виде геометрических образов (графиков) и, наоборот, искать решение геометрических задач с помощью аналитических формул (уравнений и их систем).

***Компоненты координатного метода*** (то есть действия, адекватные координатному методу).

- построение точки по ее координатам;
- нахождение координат заданных точек;
- вычисление расстояния между точками, заданными своими координатами;
- оптимальный выбор прямоугольной системы координат;
- составление уравнения фигуры по ее характеристическому свойству;
- видение за уравнением конкретного геометрического образа;
- преобразование алгебраических равенств.

Эти действия и определяют необходимую совокупность знаний, умений и навыков координатного метода решения задач.

***Этапы решения геометрической задачи координатным методом***

*I этап.* Оптимальный выбор прямоугольной системы координат.

*II этап.* Перевод задачи на координатный язык.

*III этап.* Выполнение преобразований полученного в координатной форме выражения (решение задачи на координатном языке).

*IV этап.* Перевод (и осмысление) полученного результата с координатного языка на тот язык, на котором была сформулирована задача.

Приведем пример.

***Задачи.*** *В треугольнике ABC* $AB = 4$, $AC = 6$, $\angle A = 60^\circ$. *Найти медиану, проведенную из вершины A (рис. 93).*



Р е ш е н и е (координатный метод)

***I этап*** *(оптимальный выбор прямоугольной системы координат).*

Выберем прямоугольную систему координат так, как показано на рис. 93.

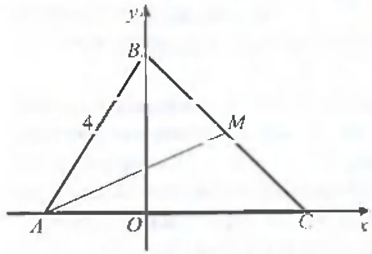



Рис. 93

***II этап*** *(перевод задачи на координатный язык).*

$\Delta AOB$ – прямоугольный, $\angle ABO = 30^\circ$, поэтому $AO = 2$, тогда $OC = 4$.

$$OB = AB \cdot \sin 60^\circ = 2\sqrt{3}.$$

Значит, $A(-2; 0)$, $C(4; 0)$, $B(0; 2\sqrt{3})$.

Так как $M$ середина стороны $BC$, то $M(2; \sqrt{3})$.

***III этап*** *(решение задачи на координатном языке).*

По формуле расстояния между двумя точками находим:

$$AM = \sqrt{(-2-2)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{19}.$$

***IV этап*** *(перевод полученного результата с координатного языка на язык задачи).*

В нашем случае этот этап осуществляется автоматически: расстояние между точками $A$ и $M$ (где $M$ – середина $BC$) – это и есть длина медианы, проведенной из вершины $A$.

О т в е т: $AM = \sqrt{19}$.

(*Решите задачу самостоятельно другими методами: векторным, тригонометрическим*).

Этапы формирования координатного метода у учащихся аналогичны этапам формирования векторного метода: 1) подготовительный; 2) мотивационный; 3) ориентировочный; 4) этап овладения отдельными компонентами метода; 5) этап формирования метода «в целом».

***Этапы решения алгебраической задачи координатным методом***

Пусть, например, требуется решить графически систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 5, \\ x^2 + y^2 = 26. \end{cases}$$

Решение осуществляется по этапам.

*I этап.* Перевод данных уравнений (неравенств) на графический язык.

*II этап.* Графическое решение задачи, то есть нахождение координат точек пересечения графиков (для уравнения или системы уравнений) или интервалов, на которых справедливо данное неравенство или система неравенств.

*III этап.* Перевод полученного ответа с графического (геометрического) языка на алгебраический.

Решение данной системы уравнений графическим методом выглядит следующим образом.

*I этап.* Из первого уравнения системы выразим $y$ через $x$: $y = \frac{5}{x}$. Графиком данной функции является гипербола. Графиком второго уравнения системы, $x^2 + y^2 = 26$, является окружность с центром в начале координат и радиусом $r = \sqrt{26} = 5{,}1$.

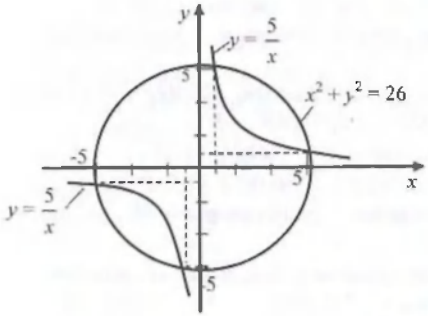


Рис. 94

*II этап.* Построим в одной системе координат графики уравнений системы (рис. 94).

*III этап.* Из рисунка находим координаты точек пересечения графиков: (5; 1), (1; 5), (-5; -1), (-1; -5).

О т в е т: (5; 1), (1; 5), (-5; -1), (-1; -5).

Иногда в качестве первого этапа выступает этап преобразования данного в задаче уравнения (неравенства) или системы уравнений (неравенств) к виду, удобному для перевода на графический язык.

В текстовых алгебраических задачах, решаемых геометрическим или графическим методом последовательность названных выше этапов сохраняется (подробнее о решении алгебраических задач геометрическим методом см. в наших работах [5], [6] и др.)

## *Вопросы и задания*

1. Кто одним из первых использовал прямоугольные координаты?

2. Что означают в переводе с греческого слова «парабола», «гипербола», «эллипс»?

3. Кем впервые была систематически развита идея координатного метода?

4. В каком научном труде излагались основные идеи аналитической геометрии на плоскости?

5. Каково значение аналитической геометрии в математике?

6. Что дает нам введение понятия координаты в школьный курс математики?

7. В чем сущность координатного метода?

8. В чем эффективность координатного метода?

9. Какова схема изучения метода координат на плоскости по учебникам геометрии А. В. Погорелова, Л. С. Атанасяна, А. Д. Александрова и др.?

10. Какие простейшие задачи в координатах решают учащиеся при изучении планиметрии?

11. Что называется уравнением фигуры на плоскости в декартовых координатах?

12. Опишите методику вывода уравнения окружности с центром в точке $(x_0, y_0)$ радиуса $r$.



13. Опишите методику вывода уравнения прямой $l$ в заданной прямоугольной системе координат. Как изменяется расположение прямой на плоскости в зависимости от значении коэффициентов при $x$ и $y$ и от свободного члена (проиллюстрируйте на примерах).

14. Назовите действия, составляющие координатный метод.

15. Каковы этапы решения задачи координатным методом?

16. Подготовьте сообщение о Рене Декарте с использованием мультимедиапрезентаций.

17. Подберите (или составьте) две-три геометрические задачи, решаемые координатным методом, и две-три алгебраические задачи, решаемые графическим методом. Представьте их решения, используя мультимедийные средства.

18. Проанализируйте данную тему в учебниках В. А. Гусева и И. Ф. Шарыгина [3], [13]. Каковы особенности ее изложения этими авторами?

### Рекомендуемая литература


1. Геометрия .7 – 9 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасяп, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – М. : Просвещение, 2017. – 384 с.
2. Г о т м а н Э. Г., С к о п е ц З. А. Задача одна - решения разные : Геометр. задачи / Э. Г. Готман, З.А. Скопец: Кн. для учащихся. – М.: Просвещение, 2000. – 224 с.
3. Г у с е в, В. А. Геометрия – 6 (7, 8, 9): Эксперимент. учеб. / В.А. Гусев. – М.: Авангард, 1995 (1996- 1998, 2001).
4. Д а л и н г е р, В. А. Методика обучения математике. Поисково-исследовательская деятельность учащихся : учебник и практикум для вузов / В. А. Далингер – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 460 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-00450-2.
5. К а п к а е в а, Л. С. Интеграция алгебраического и геометрического методов при обучении математике в школе / Л. С. Капкаева: Учеб. пособие для студ. мат. спец. пед. вузов. – Саранск, 2003. – 179 с.
6. К у з и ч е в а, З. А. Рене Декарт (к 400-летию со дня рождения) / З. А. Кузичева // Математика в школе. – 1996. - № 6. – С. 75-78.
7. Методика обучения математике в 2 ч. Часть 2 : учебник для академического бакалавриата / Н. С. Подходова, [и др.]; под ред. Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 299 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-9916-7002-9.
8. Методика и технология обучения математике. Курс лекций: пособие для вузов / под научн. ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. – М.: Дрофа, 2005. – 416 с.
9. Методика преподавания математики в средней школе: Частная методика: Учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. спец. / А.Я. Блох, В.А. Гусев, Г.В. Дорофеев и др.; Сост. В.И. М и ш и н. – М.: Просвещение, 1987. – 416 с.
10. . П о г о р е л о в, А. В. Геометрия. 7 – 9 классы. Учебник. ФГОС / А. В. Погорелов. – М. : Мнемозина, 2015. – 376 с.
11. П о н т р я г и н, Л.С. Знакомство с высшей метематикой: Метод координат / Л. С. Понтрягин. – 2 изд., испр. – М.:Наука. Гл. ред. физ-мат. лит. 1987. – 128 с.
12. С а р а н ц е в, Г. И. Методика обучения геометрии : учеб. пособие для студентов вузов по направлению «Педагогическое образование» / Г.И. Саранцев. – Казань : Центр инновационных технологий, 2011. – 228 с.
13. Ш а р ы г и н, И. Ф. Геометрия. 7-9 классы. Учебник. ФГОС / И. Ф. Шарыгин. – М.: Дрофа, 2017. – 464 с.

Лекция XIV

# МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ОСНОВНОЙ ШКОЛЕ

1. Роль и место тригонометрических функций в школьном курсе математики. Аналитический и геометрический пути их введения.
2. Значение тригонометрических функций в школьном курсе математики и различные подходы к их изложению.
3. Методика изучения тригонометрических функций на уроках геометрии в 8-9 классах:

а) введение понятий синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника;

б) определение синуса, косинуса и тангенса любого угла от $0^0$ до $180^0$.

---

## 1. Роль и место тригонометрических функций в школьном курсе математики. Аналитический и геометрический пути их введения

Тригонометрические функции являются первыми трансцендентными функциями, изучаемыми в школьном курсе математики. Их роль и место в нем определяются главным образом двумя сторонами применения этих функций в теории и практике. Во-первых, тригонометрические функции дают замечательный вычислительный аппарат для решения разнообразных задач планиметрии и стереометрии. Эта роль тригонометрических функций общеизвестна, и она нередко преувеличивается. Во-вторых, учение о тригонометрических функциях позволяет наглядно, просто и убедительно продемонстрировать важнейшие свойства функций вообще: периодичность, четность и нечетность, ограниченность, монотонность и т. д.

Две стороны в содержании учения о тригонометрических функциях отражаются и в выборе возможных путей введения их в школе.

Первый путь чисто ***аналитический.*** Наиболее перспективными для школы здесь являются два варианта. Один из них сводится к анализу дифференциального уравнения $f''(x) = -cf(x)$. Теория и приложения тригонометрических функций могут быть построены именно через решение указанного уравнения, такой подход является сложным и может быть использован пока лишь в старших классах на кружковых занятиях. Второй вариант аналитического введения тригонометрических функций – использование аппарата рядов, в настоящее время такой подход для средней школы представляется нереальным.

Более привычным для школы сегодня является второй путь - ***геометрический***, который существует и совершенствуется уже более ста лет. Имеется большое число разновидностей этого пути. Самый наглядный и простой из них является введение тригонометрических функций путем рассмотрения отношений сторон в прямоугольном треугольнике. Основной недостаток такого определения тригонометрических функций – затруднения, возникающие при переходе к углам, большим прямого, и при переходе к тригонометрическим функциям числового аргумента. Попытки преодоления первой из этих трудностей привели к разнообразным по форме, но единым, по сути, подходам – через так называемые тригонометрические линии в круге, через отношения координат радиус-вектора, через проекции единичного вектора и т. п.

В дальнейшем мы будем рассматривать лишь второй путь, изучение которого начинается в курсе геометрии основной школы.

## 2. Значение тригонометрических функций в школьном курсе математики и различные подходы к их изложению

Тригонометрические функции играют важную роль в математике и ее приложениях. Они описывают связи между сторонами и углами треугольников. Тригонометрические функции и их использование в курсе геометрии позволяет рассматривать понятие функции как важнейшее понятие математики, связывая тем самым курсы алгебры и геометрии. Велико значение тригонометрических функций в формировании научного мировоззрения: с их помощью геометрические факты находят применение в практической деятельности, в частности при проведении различных измерительных работ на местности, они являются моделью многих периодических процессов (биение сердца, зависимость напряжения в металле от нагрузки на него и т. д.).

В учебной литературе существуют различные системы изложения тригонометрических функций.

1. Ограничиваются рассмотрением тригонометрических функций острого угла прямоугольного треугольника. Такой подход был реализован в учебнике А. П. Киселева.

2. Вначале вводят тригонометрические функции острого угла прямоугольного треугольника, доказывают несколько теорем с их использованием, затем распространяют понятие тригонометрических функций на множество углов от $0^0$ до $180^0$, и рассматривают их различные приложения. Такая система излагается в учебнике А. В. Погорелова.

В учебнике А. Д. Александрова и др. рассматриваются параллельно тригонометрические функции острого и тупого углов.

3. Тригонометрические функции сразу рассматривают на множестве углов, изменяющихся от $0^0$ до $180^0$, затем частный случай от $0^0$ до $90^0$ –

тригонометрические функции острого угла. Такой подход реализуется в учебнике Л. С. Атанасяна и др.

4. Тригонометрические функции рассматриваются на множестве углов $\alpha$, $-\infty < \alpha < +\infty$. Такая система изложения содержалась в учебнике А. Н. Колмогорова и др.

Реализация последнего подхода, как показал опыт, встречает большие трудности в силу высокого уровня абстрактности изложения. В курсе геометрии тригонометрические функции на такой обширной области определения не находят применения для решения косоугольных треугольников достаточно знания тригонометрических функций углов, меньших $180^0$. Поэтому, можно сказать, что наиболее целесообразным является рассмотрение функций на множестве углов $\alpha$, где $0^0 < \alpha < 180^0$.

Возрастным возможностям учащихся 8-9 классов более соответствует такая система изложения тригонометрических функций, при которой вначале рассматриваются тригонометрические функции острого угла, а затем уже осуществляется расширение области их определения. Такая система изложения тригонометрических функций наглядна, она позволяет сразу же формировать практические навыки школьников в использовании функций к решению прямоугольных треугольников, затем появляется необходимость расширения области определения тригонометрических функций, обусловленная решением любых треугольников. Такой подход позволяет сразу же активно использовать тригонометрические функции острого угла при доказательстве многих геометрических фактов, а это способствует формированию представления учащихся о тригонометрических функциях, как о важном инструменте изучения геометрии.

## 3. Методика изучения тригонометрических функций на уроках геометрии в 8-9 классах

В действующих учебниках геометрии (планиметрии) используются различные структуры изложения тригонометрических функций (таблица 16).

Таблица 16

| № п/п | Авторы учебников | |
|---|---|---|
| | **А. В. Погорелов** | **Л. С. Атанасян и др.** |
| | *8 класс* | |
| | **§7. Теорема Пифагора** | ***Глава VII.* Подобные треугольники** **§ 4. Соотношения между сторонами и углами прямоугольного треугольника.** |
| 1. | Косинус острого угла прямоугольного треугольника, теорема о зависимости косинуса угла только от градусной меры угла. | Синус, косинус и тангенс острого угла прямоугольного треугольника. |
| 2. | Теорема Пифагора (использование косинуса угла для ее доказательства). | Значения синуса, косинуса и тангенса для углов $30^0$, $45^0$ и $60^0$. |
| 3. | Определение синуса угла $\alpha$, тангенса угла $\alpha$ ($\alpha$-острый угол) и теорема о зависимости их только от величины угла $\alpha$. | |
| 4. | Основные тригонометрические тождества: $tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$; $1 + \frac{1}{tg^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$. | |
| 5. | Значения синуса, косинуса, тангенса некоторых углов. Формулы: $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$. | |
| 6. | Изменение синуса, косинуса и тангенса при возрастании угла. | |
| | **§8. Декартовы координаты на плоскости** | |
| 7. | Определение синуса, косинуса и тангенса для любого угла от $0^0$ до $180^0$. | |
| | **§10. Векторы** | |
| 8. | Использование косинуса угла при изучении скалярного произведения векторов. | |
| | *9 класс* | |
| | **§ 12. Решение треугольников** | ***Глава XI.* Соотношения между сторонами и углами треугольника. Скалярное произведение векторов.** **§1. Синус, косинус и тангенс угла $\alpha$ ($0^0 < \alpha < 180^0$)** |
| 9. | Теорема косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$. | Основное тригонометрическое тождество. $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$. Формулы приведения $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$. |
| 10. | Теорема синусов $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. | Формулы для вычисления координат точки. |
| 11. | Соотношение между углами треугольника и противолежащими сторонами. | **§2. Соотношение между сторонами и углами треугольника** |
| 12. | Решение треугольников. | Теорема о площади треугольника $S = \frac{1}{2}ab\sin C$. |
| | **§ 13. Многоугольники** | Теорема синусов $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. |

| | | |
|---|---|---|
| 13. | Использование тригонометрических функций при изучении формул для радиусов вписанных и описанных окружностей правильных многоугольников. | Теорема косинусов $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$ – обобщенная теорема Пифагора. |
| | **§14. Площади фигур** | Решение треугольников. |
| 14. | Использование тригонометрических функций при выводе формул для вычисления площади треугольника. | |

В учебнике А. В. Погорелова изложение тригонометрических функций осуществляется по схеме «от частного к общему», а в учебнике Л. С. Атанасяна и др. – «от общего к частному», причем в первом учебнике наблюдается связь изложения тригонометрических функций с изложением геометрического материала, тогда как во втором учебнике применение тригонометрических функций к обоснованию геометрических зависимостей более ограничено, чем в первом.

### а) Введение понятий синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника

Наиболее принципиальными вопросами методики изучения тригонометрических функций острого угла прямоугольного треугольника являются: 1) введение понятий синуса, косинуса и тангенса острого угла и 2) доказательство зависимости их только от градусной меры угла.

1. Перед введением понятий синуса и косинуса угла желательно выполнить упражнения на выделение катетов прямоугольных треугольников, прилежащих к углу, противолежащих углу, на составление отношений катетов к гипотенузе.

2. После выполнения упражнений вводятся определения синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника.

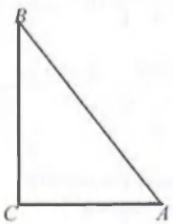



Рис. 95

***Опр. 1.*** Синусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к гипотенузе (рис. 95). *Обозначение.* $\sin\alpha$.

***Опр. 2.*** Косинусом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе. *Обозначение.* $\cos\alpha$.

***Опр. 3.*** Тангенсом острого угла прямоугольного треугольника называется отношение противолежащего катета к прилежащему. *Обозначение.* $tg\,\alpha$.

$$\sin A = \frac{BC}{AB}, \qquad (1)$$

$$\cos A = \frac{AC}{AB}, \qquad (2)$$

$$tg\,A = \frac{BC}{AC}. \qquad (3)$$



3. Затем доказывается утверждение: *если острый угол одного прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то синусы этих углов равны, косинусы этих углов равны и тангенсы этих углов равны.* Доказательство основано на первом признаке подобия треугольников (В учебнике А. В. Погорелова аналогичное утверждение доказывается с помощью теоремы о пропорциональных отрезках). Действительно, пусть $ABC$ и $A_1B_1C_1$ - два прямоугольных треугольника с прямыми углами $C$ и $C_1$ и равными острыми углами $A$ и $A_1$. Треугольники $ABC$ и $A_1B_1C_1$ подобны по первому признаку подобия треугольников, поэтому $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}$. Из этих равенств следует, что $\frac{BC}{AB} = \frac{B_1C_1}{A_1B_1}$, то есть $\sin A = \sin A_1$. Аналогично $\frac{AC}{AB} = \frac{A_1C_1}{A_1B_1}$, то есть $\cos A = \cos A_1$, и $\frac{BC}{AC} = \frac{B_1C_1}{A_1C_1}$, то есть $tg\,A = tg\,A_1$. Что и требовалось доказать.

Из этого утверждения следует, что косинус угла (а также его синус) не зависит от расположения треугольника, а зависит только от градусной меры угла. Доказательство независимости тангенса острого угла от размеров треугольника следует из представления тангенса угла через отношение синуса и косинуса этого угла.

После доказательства этого утверждения необходимо выполнить с учащимися несколько упражнений на построение угла по заданному косинусу (синусу) этого угла.

*Основное тригонометрическое тождество* $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$ получается из равенств (1) и (2).

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{BC^2}{AB^2} + \frac{AC^2}{AB^2} = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2}.$$

По теореме Пифагора $BC^2 + AC^2 = AB^2$, поэтому $\sin^2 A + \cos^2 A = 1$.

После доказательства этих утверждений учащиеся находят сначала значение синуса, косинуса и тангенса для углов $30^0$ и $60^0$, а затем для угла $45^0$, при этом используются определения синуса, косинуса и тангенса угла, основное тригонометрическое тождество и теорема Пифагора.

В учебнике А. В. Погорелова понятие косинуса угла используется при доказательстве теоремы Пифагора, а в учебнике Л. С. Атанасяна и др. теорема Пифагора к этому времени уже доказана и доказательство ее основано на понятиях площади квадрата и прямоугольника.

Тригонометрические функции острого угла используются для решения прямоугольных треугольников. Они позволяют, зная одну из сторон прямоугольного треугольника и острый угол, находить две другие стороны; зная две стороны, находить острые углы.

Доказательство утверждения о том, что *для любого острого угла* $\alpha$ $\sin(90^0 - \alpha) = \cos\alpha$, $\cos(90^0 - \alpha) = \sin\alpha$ могут провести сами учащиеся, выполняя упражнение:

***Упражнение.*** Дан прямоугольный треугольник $ABC$ с острым углом $\alpha$

при вершине $A$. Напишите значение синуса и косинуса углов $A$ и $B$, сравните их и сделайте вывод.

В учебнике А. В. Погорелова рассматривается теорема об изменении $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $tg\,\alpha$ при возрастании угла $\alpha$, в частности, об убывании $\cos\alpha$ и ее доказательство. Она может быть «открыта» учащимися самостоятельно путем наблюдения за моделью, которая отражает эту зависимость.

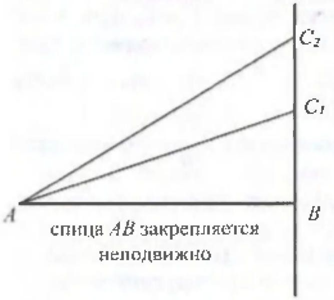


Рис. 96

Модель можно изготовить из спиц (рис. 96). Одна спица $AB$ крепится неподвижно, другая спица $AC$ закрепляется в точке $A$ и может вращаться вокруг нее, занимая положения $AC_1$, $AC_2$ и т.д. Эта модель хорошо иллюстрирует зависимость между изменением угла $\alpha$, который образуется спицами $AB$ и $AC$ и косинусом угла $\alpha$ (такую модель можно продемонстрировать и с помощью компьютера).

Следующий важный момент в изучении тригонометрических функций – введение $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $tg\,\alpha$, где $0^0 < \alpha < 180^0$.

**б) Определение синуса, косинуса и тангенса любого угла от $0^0$ до $180^0$**

Мотивация расширения области определения тригонометрических функций может быть осуществлена следующим образом. Учитель напоминает учащимся, что им уже известны некоторые зависимости между сторонами треугольника: 1) в любом треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон; 2) в прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов его катетов.

Возникает вопрос. Нельзя ли так же определённо, как и для прямоугольного треугольника, выразить зависимость между сторонами любого треугольника? Такая зависимость существует. Однако для ее выявления необходимо расширить понятие косинуса острого угла на любой угол от $0^0$ до $180^0$.

В учебнике А. В. Погорелова это делается следующим образом. Берется окружность на плоскости $xy$ с центром в точке $O$ радиуса $R$ (рис. 97). От положительной полуоси $x$ в верхнюю полуплоскость откладывается угол $\alpha$.

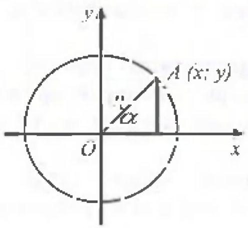


Рис. 97

Пусть $x$ и $y$ координаты точки $A$, тогда для острого угла $\alpha$ $\cos\alpha = \frac{x}{R}$, $\sin\alpha = \frac{y}{R}$, $tg\,\alpha = \frac{y}{x}$.

Затем значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $tg\,\alpha$ определяются этими формулами для любого угла $\alpha$. (Для $tg\,\alpha$ угол $\alpha \neq 90^0$.)

При таком определении $\sin 90^0 = 1$; $\cos 90^0 = 0$; $\sin 180^0 = 0$; $\cos 180^0 = -1$; $tg\,180^0 = 0$.

Если считать, что совпадающие лучи образуют угол $0^0$, будем иметь:

$$\sin 0^0 = 0;\ \cos 0^0 = 1;\ tg\,0^0 = 0.$$



Необходимо акцентировать внимание учащихся на том, что при изменении $\alpha$ от $0^0$ до $180^0$ каждому значению $\alpha$ соответствует единственное значение $\cos\alpha$ и единственное значение $\sin\alpha$; при изменении $\alpha$ от $0^0$ до $90^0$ ($0^0 \leq \alpha < 90^0$) и от $90^0$ до $180^0$ ($90^0 < \alpha < 180^0$) каждому значению $\alpha$ соответствует единственное значение $tg\,\alpha$. Таким образом, косинус и синус являются функциями угла $\alpha$, где $0^0 < \alpha < 180^0$, а тангенс – функцией угла $\alpha$, где $0^0 < \alpha < 90^0$ и $90^0 < \alpha < 180^0$.

Функции $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $tg\,\alpha$ называются *тригонометрическими функциями*. Введенное определение $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $tg\,\alpha$ следует закрепить с помощью упражнений типа:

***Упражнение.*** Вычислить $\cos 120^0$, $\sin 120^0$ и $tg\,120^0$, используя определения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ и $tg\,\alpha$.

После сообщения этих фактов доказывается теорема, что для любого угла $\alpha$, $0^0 < \alpha < 180^0$

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha,\ \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha.$$

Для угла $\alpha \neq 90^0$, $tg\,(180^0 - \alpha) = -tg\,\alpha$.

Необходимо подчеркнуть практическую значимость теоремы: она позволяет сводить вычисления $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ ($0^0 < \alpha < 180^0$) и $tg\,\alpha$, $\alpha \neq 90^0$, к вычислению синуса, косинуса и тангенса острого угла.

После определения косинуса угла $\alpha$ ($0^0 < \alpha < 180^0$) с учащимися обсуждается зависимость между сторонами треугольника, задаваемая теоремой косинусов. Следует обратить внимание учащихся на то, что теорема Пифагора является ее частным случаем. В учебнике Л. С. Атанасяна и др. доказательство теоремы косинусов основано на координатном методе (В учебнике А. В. Погорелова на векторном методе).

Затем сообщается и доказывается теорема синусов. Теорема синусов эффективна тогда, когда заданы два угла и сторона треугольника, теорема косинусов используется, если заданы две стороны и угол между ними. Далее выражается связь между стороной правильного треугольника и радиусом описанной (вписанной) окружности, площадью треугольника и произведением длин двух его сторон. Тригонометрические функции используются также при выводе формулы площади круга и формулы Герона.

В учебнике Л. С. Атанасяна и др. для 9 класса тригонометрическим функциям и соотношениям между сторонами и углами треугольника посвящена отдельная глава (см. Таблицу 1). В отличие от учебника А. В. Погорелова синус угла $\alpha$ ($0^0 < \alpha < 180^0$) вводится здесь как ***ордината*** $y$ точки $M$ пересечения луча $h$, образующего с положительной полуосью абсцисс угол $\alpha$, и единичной полуокружности; ***косинус*** угла – абсцисса $x$ точки $M$.

Определение синуса и косинуса угла $\alpha$ в учебнике являются генетическими определениями: вначале разъясняется происхождение точки $M$, а затем говорится, что «синусом угла $\alpha$ называется ордината $y$ точки $M$, косинусом угла – абсцисса $x$ точки $M$».

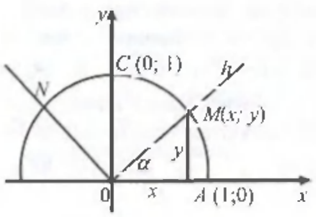



Рис. 98

При введении понятий синуса и косинуса угла $\alpha$ полезно использовать модель, соответствующую рисунку 98. Использование модели позволяет наглядно показать изменение значений функций $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, при возрастании $\alpha$ от $0^0$ до $180^0$. Следует заметить, что в учебнике эта зависимость формулируется на созерцательной основе. Основное тригонометрическое тождество получается в данном случае автоматически.

Так как синус и косинус угла $\alpha$ определены соответственно как ордината и абсцисса точки $M$ единичной полуокружности, то координаты $(x; y)$ любой точки $M$ единичной полуокружности удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=1$. Заменяя $x$ и $y$ соответственно на $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$, получаем $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$, ($0^0<\alpha<180^0$) – основное тригонометрическое тождество.

**Историческая справка**

Слово «тригонометрия» состоит из двух греческих слов: «тригонон» — треугольник и «метрайн» — измерять. В буквальном смысле «тригонометрия» означает «измерение треугольников». Как и всякая наука, тригонометрия возникла из потребностей жизни. Развитие мореплавания требовало умения определять положение корабля в открытом море по солнцу и звездам. Войны, которые правители вели между собой, требовали умения определять большие расстояния и составлять карты местности. Земледельцу надо было знать смену времен года, чтобы своевременно производить необходимые сельскохозяйственные работы; лицам, связанным с исполнением религиозных обрядов, необходимо определять дни праздников и т. д.

Повседневная жизнь становилась немыслима без календаря. Все это и многое другое привело к необходимости развивать астрономию — науку о движении небесных светил, а развитие астрономии было немыслимо без развития тригонометрии.

Астрономия, а вместе с ней и тригонометрия возникли и развивались у народов с развитой торговлей и сельским хозяйством: у вавилонян, греков, индийцев, китайцев. Зародилась она много веков назад. Об этом мы можем судить не только по догадкам, но и изучая письменные памятники древности. Указывается, что в одной китайской рукописи, написанной около 2637 г. до н. э., имеются сведения по астрономии и применяются вычисления тригонометрического характера.

Вавилоняне уже в начале третьего тысячелетия до н. э. имели календарь с делением года на 12 месяцев. Значит, они умели определять положения солнца и звезд на небесном своде, то есть владели некоторыми познаниями тригонометрического характера.

Названия тригонометрических функций сложились исторически на протяжении ряда веков. Слово «синус» индийского происхождения. Полную хорду индийцы называли «джива», т. е. тетива лука. Позднее при переводах с индийского на арабский и с арабского на латинский язык подлинный смысл слова был искажен. Хотя слово «синус» никак не характеризует обозначаемой им тригонометрической функции, это название прочно вошло в математический язык во всем мире.

Понятия «косинус дуги», «тангенс дуги», «котангенс дуги» и другие впервые встречаются в книге «Шакл ул - Гита» знаменитого азербайджанского ученого Насирэддина Т у с и. У него встречаются только соответствующие понятия, современных же терминов он не употребляет. Термины «косинус», «котангенс» и др. появились в XI—XVII вв.



Например, синус угла, дополняющий данный до 90°, называли «синусом дополнения» (по-латыни sinus *complementi*). В дальнейшем этот символ претерпел такие изменения: *sinus* co, co. — sinus. В 1600 г. английский ученый Э. Г ё н т е р употребил впервые слово «cosinus», а в 1748 г. Эйлер впервые употребил современную запись *cos x*.

Сирийский ученый ал-Б а т т а н и (X в.) первым пришел к выводу, что острый угол в прямоугольном треугольнике можно определить отношением одного катета к другому.

Слово «тангенс» (касающийся) взято из латинского языка, в Европе введено Томасом Ф и н к о м в 1583 г.

Первые тригонометрические таблицы были составлены во втором веке до н. э. Их автором был греческий астроном Г и п п а р х. Таблицы эти до нас не дошли, но в усовершенствованном виде они были включены в «Альмагест» («Великое построение») александрийского астронома Птолемея.

В средние века наибольшие успехи в развитии тригонометрии были достигнуты учеными Средней Азии и Закавказья. В это время к тригонометрии начинают относиться как к самостоятельной науке, не связывая ее, как прежде, с астрономией. Большое внимание уделяется задаче решения треугольников. Одним из самых примечательных сочинений по тригонометрии этого периода является «Трактат о четырехугольнике» Насир Э д д и н а (XIII век). В этом трактате введен ряд новых тригонометрических понятий, по-новому доказаны некоторые уже известные результаты. Основные работы по тригонометрии в Европе были выполнены почти на два столетия позднее. Здесь следует прежде всего отметить немецкого ученого Р е г и о м о н т а н а (XV век). Его главное произведение «Пять книг о различного рода треугольниках» содержит достаточно полное изложение основ тригонометрии. От наших нынешних учебников по тригонометрии это сочинение отличается в основном лишь отсутствием удобных современных обозначений. Все теоремы сформулированы словесно. После появления «Пяти книг» Региомонтана тригонометрия окончательно выделилась в самостоятельную науку, не зависящую от астрономии. Региомонтаном составлены также довольно подробные тригонометрические таблицы.

Развитие алгебраической символики и введение в математику отрицательных чисел позволило рассматривать отрицательные углы; появилась возможность рассматривать тригонометрические функции числового аргумента. Развитие математики позволило вычислять значения тригонометрических функций любого числа с любой наперед заданной точностью.

Существенный вклад в развитие тригонометрии внес Леонард Эйлер (1707-1783). Им дано современное определение тригонометрических функций и указано на тесную связь этих функций с показательными функциями.

В настоящее время тригонометрические функции лежат в основе специального математического аппарата, так называемого гармонического анализа, при помощи которого изучаются различного рода периодические процессы: колебательные движения, распространение волн, некоторые атмосферные явления и пр.

## *Вопросы и задания*

1. Какова роль тригонометрических функций в школьном курсе математики?

2. Какие возможны пути введения тригонометрических функций в школьный курс математики?

3. Опишите различные системы изложения тригонометрических функций у разных авторов школьных учебников?

4. Проанализируйте структуру изложения тригонометрических функций в учебниках геометрии А. В. Погорелова и Л. С. Атанасяна и др. Сделайте выводы.

5. Опишите методику введения понятий синуса, косинуса и тангенса острого угла прямоугольного треугольника.

6. Как происходит расширение области определения тригонометрических функций на случай любого угла от $0^0$ до $180^0$?

7. При изучении каких вопросов в курсе геометрии основной школы используются тригонометрические функции?

8. Проанализируйте учебники геометрии для 7-9-х классов авторов Смирновой И. М., Смирнова В.А. и Шарыгина И. Ф. с точки зрения изучения в них тригонометрических функций. Выявите особенности изложения этого материала, сделайте выводы.

9. Изучите историческую справку к данной теме и подготовьте по ней сообщение.

**Рекомендуемая литература**


1. Александров, А. Д. Геометрия. 8 класс : учебник для общеобразовательных организаций / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – М. : Просвещение, 2016. – 176 с.
2. Александров, А. Д. Геометрия. 9 класс : учебник для общеобразовательных организаций / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. – М. : Просвещение, 2014. – 175 с.
3. Геометрия .7 – 9 классы : учеб. для общеобразоват. учреждений / Л. С. Атанасян, В. Ф. Бутузов, С. Б. Кадомцев и др. – М. : Просвещение, 2017. – 384 с.
4. Гусев, В. А. Геометрия – 6 (7, 8, 9): Эксперимент. учеб. / В.А. Гусев. – М.: Авангард. 1995 (1996- 1998, 2001).
5. Далингер, В. А. Методика обучения математике. Поисково-исследовательская деятельность учащихся : учебник и практикум для вузов / В. А. Далингер – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 460 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-534-00450-2.
6. Капкаева, Л. С. Интеграция алгебраического и геометрического методов при обучении математике в школе / Л. С. Капкаева: Учеб. пособие для студ. мат. спец. пед. вузов. – Саранск, 2003. – 179 с.
7. Киселев, А. П. Элементарная геометрия. Книга для учителя / А. П. Киселев. – М.: Просвещение, 1980. – 287 с.
8. Колмогоров, А. Н. и др. Геометрия, 6-8 класс / А. Н. Колмогоров. – М.: Просвещение, 1980.
9. Методика обучения математике в 2 ч. Часть 2 : учебник для академического бакалавриата / Н. С. Подходова, [и др.]; под ред. Н. С. Подходовой, В. И. Снегуровой. – М. : Издательство Юрайт, 2017. – 299 с. – (Бакалавр. Академический курс). – ISBN 978-5-9916-7002-9.
10. Погорелов, А. В. Геометрия. Учеб.для 7 – 11 кл. сред. шк. / А.В. Погорелов. – 3-е изд. – М.: Просвещение. 1991. – 384 с.
11. Рыжик В. И. Геометрия. 7 класс : учебник для общеобразовательных организаций. ФГОС / В. И. Рыжик, А. Д. Александров, А. Л. Вернер. – М. : Просвещение, 2016. – 175 с.
12. Саранцев, Г. И. Методика обучения геометрии : учеб. пособие для студентов вузов по направлению «Педагогическое образование» / Г.И. Саранцев. – Казань : Центр инновационных технологий, 2011. – 228 с.
13. Смирнова, И. М., Смирнов, В. А. Геометрия. 7-9 классы. Учебник. ФГОС / И. М. Смирнова, В. А. Смирнов. – М. : Мнемозина, 2015. – 376 с.
14. Шарыгин, И. Ф. Геометрия. 7 – 9 классы. Учебник / И. Ф. Шарыгин. – М. : Дрофа, 2017. – 464 с.
15. http://alexlarin.narod.ru/Abitur/razdel7.html
16. http://ru.wikipedia.org/wiki/Тригонометрические_функции
17. http://www.bymath.net/index.html




# Новые издания по дисциплине «Методика обучения математике» и смежным дисциплинам


1. Далингер, В. А. Методика обучения математике в начальной школе : учебное пособие для академического бакалавриата / В. А. Далингер, Л. П. Борисова. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2016.

2. Далингер, В. А. Методика обучения математике. Практикум по решению задач : учебное пособие для прикладного бакалавриата / В. А. Далингер. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2016.

3. Далингер, В. А. Методика обучения математике. Традиционные сюжетно-текстовые задачи : учебное пособие для академического бакалавриата / В. А. Далингер. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017.

4. Далингер, В. А. Методика обучения учащихся стереометрии посредством решения задач : учебное пособие для академического бакалавриата / В. А. Далингер. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017.

5. Кругликов, В. Н. Интерактивные образовательные технологии : учебник и практикум для академического бакалавриата / В. Н. Кругликов, М. В. Олешникова. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017.

6. Кузнецов, В. В. Методика профессионального обучения : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / В. В. Кузнецов. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2016.

7. Куцебо, Г. И. Методика профессионального обучения. Развивающее обучение : учебное пособие для академического бакалавриата / Г. И. Куцебо. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017.

8. Лапыгин, Ю. Н. Методы активного обучения : учебник и практикум для вузов / Ю. Н. Лапыгин. – М. : Издательство Юрайт, 2017.

9. Методика обучения математике. Практикум : учебное пособие для академического бакалавриата / под ред. В. В. Орлова, В. И. Снегуровой. – М. : Издательство Юрайт, 2017.

10. Овчинникова, К. Р. Дидактическое проектирование электронного учебника в высшей школе: теория и практика : учебное пособие / К. Р. Овчинникова. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017.

11. Певзнер, М. Н. Корпоративная педагогика : учебное пособие / М. Н. Певзнер, П. А. Петряков, О. Грауманн. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017.

12. Перельман, Я. И. Живая математика. Математические рассказы и головоломки / Я. И. Перельман. – М. : Издательство Юрайт, 2017.

13. Плаксина, И. В. Интерактивные образовательные технологии : учебное пособие для академического бакалавриата / И. В. Плаксина. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017.

14. Попков, В. А. Теория и практика высшего образования : учебник для вузов / В. А. Попков, А. В. Коржуев. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017.

15. Розов, Н. Х. Педагогика высшей школы : учебное пособие для вузов / Н. Х. Розов, В. А. Попков, А. В. Коржуев. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017.

16. Талызина, Н. Ф. Усвоение научных понятий в школе : учебное пособие / Н. Ф. Талызина, И. А. Володарская, Г. А. Буткин. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017.

17. Технология профессионально-ориентированного обучения в высшей школе : учебное пособие / П. И. Образцов, А. И. Уман, М. Я. Виленский ; под ред. В. А. Сластенина. – 3-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017.

18. Шадрина, И. В. Методика преподавания начального курса математики : учебник и практикум для прикладного бакалавриата / И. В. Шадрина. – М. : Издательство Юрайт, 2016.

19. Ястребов, А. В. Методика преподавания математики: задачи : учебное пособие для академического бакалавриата / А. В. Ястребов. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017.

20. Ястребов, А. В. Методика преподавания математики: теоремы и справочные материалы : учебное пособие для академического бакалавриата / А. В. Ястребов, И. В. Суслова, Т. М. Корикова. – 2-е изд., испр. и доп. – М. : Издательство Юрайт, 2017.



*Учебное издание*

**Капкаева Лидия Семеновна**

**ТЕОРИЯ И МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ: ЧАСТНАЯ МЕТОДИКА**

**Часть 1**

Учебное пособие для вузов

Формат 60×90 1/16.
Печать цифровая. Усл. печ. л. 16,50.

**ООО «Издательство Юрайт»**
111123, г. Москва, ул. Плеханова, д. 4а.
Тел.: (495) 744-00-12. E-mail: izdat@urait.ru, www.urait.ru