В. С. КРАМОР

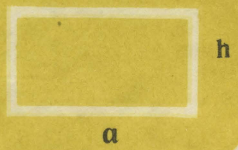
ПОВТОРЯЕМ И СИСТЕМАТИЗИРУЕМ ШКОЛЬНЫЙ КУРС ГЕОМЕТРИИ

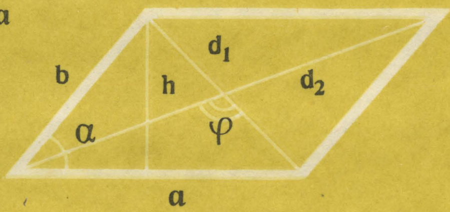
„ПРОСВЕЩЕНИЕ"

ПОВТОРЯЕМ И СИСТЕМАТИЗИРУЕМ ШКОЛЬНЫЙ КУРС ГЕОМЕТРИИ

В.С.КРАМОР

ПЛОЩАДИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА И ПАРАЛЛЕЛОГРАММА



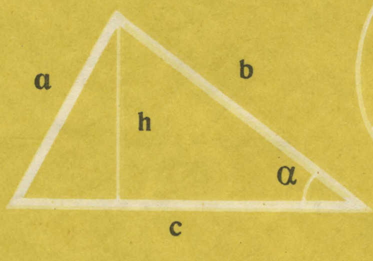


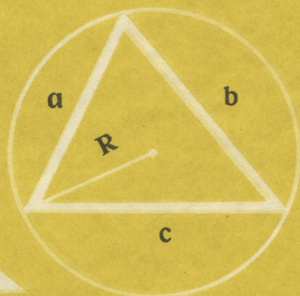
а) $S = ah$

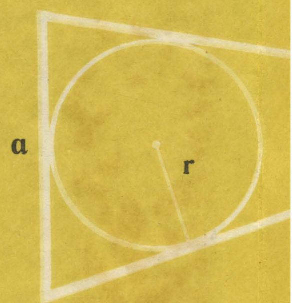
б) $S = \dfrac{d_1 \cdot d_2}{2} \sin\varphi$

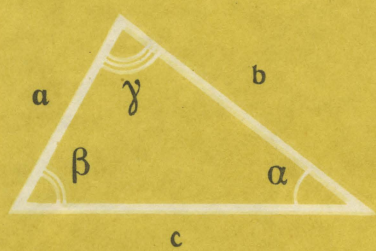
в) $S = ab \cdot \sin\alpha$

ПЛОЩАДИ ТРЕУ









$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$$

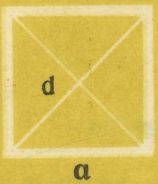
ТЕОРЕМА СИНУСОВ

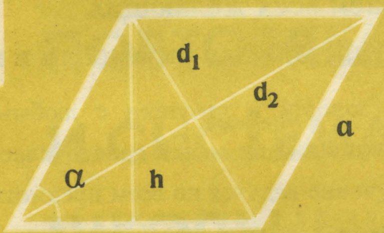
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

МЕТРИЯ

ПЛОЩАДИ КВАДРАТА И РОМБА





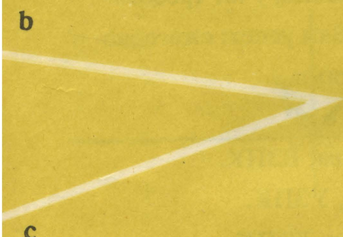
а) $S = a^2$

б) $S = ah$

в) $S = \frac{d^2}{2}$

г) $S = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

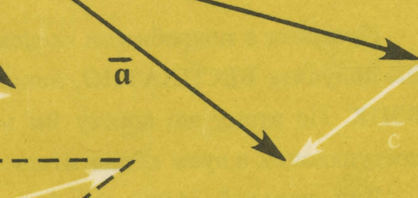
ТОЛЬНИКОВ



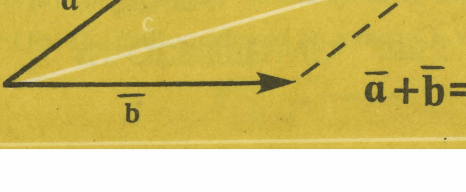
а) $S = \frac{c \cdot h}{2} = \frac{1}{2} bc \cdot \sin\alpha = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

б) $S = \frac{abc}{4R} = \frac{r(a+b+c)}{2}$

$\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$



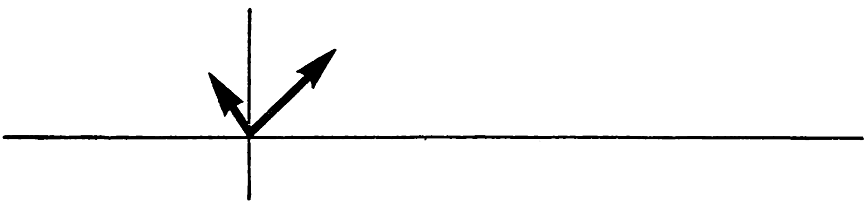
$\overline{a} - \overline{b} = \overline{c}$



$\overline{a} + \overline{b} = \overline{c}$

В.С.КРАМОР

ПОВТОРЯЕМ И СИСТЕМАТИЗИРУЕМ ШКОЛЬНЫЙ КУРС ГЕОМЕТРИИ



МОСКВА
«ПРОСВЕЩЕНИЕ» 1992

ББК 22.151
К78

Рецензенты:

старший преподаватель кафедры высшей математики Московского института инженеров землеустройства *А. Г. Хармац;* старший научный сотрудник ВНМЦентра, кандидат педагогических наук *Л. Ю. Березина;* кандидат физико-математических наук *А. И. Медяник*

Крамор В. С.

К78 Повторяем и систематизируем школьный курс геометрии.— М.: Просвещение, 1992.— 320 с.: ил.— ISBN 5-09-003862-7.

В пособии в конспективной форме изложен теоретический материал по геометрии для повторения в домашних и аудиторных условиях. К каждому пункту приведены примеры решения основных геометрических задач, вопросы для самоконтроля. Даны упражнения трех уровней сложности для самостоятельного решения. Пособие является продолжением книги «Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа», написанной тем же автором и вышедшей в издательстве «Просвещение» в 1990 году.

Пособие может быть использовано при подготовке к экзаменам в высшие учебные заведения, а также окажет помощь учителям при подготовке к урокам и проведении зачетов.

К $\frac{4306020000-370}{103(03)-92}$ 36—92 (заказ по КБ—31—1991) ББК 22.151

Учебное издание

Крамор Виталий Семенович

ПОВТОРЯЕМ И СИСТЕМАТИЗИРУЕМ ШКОЛЬНЫЙ КУРС ГЕОМЕТРИИ

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова.* Редакторы *Г. А. Шаламова, Л. М. Котова.* Младшие редакторы *Л. И. Заседателева, Т. Г. Войлокова.* Художники *Б. Л. Николаев, В. В. Костин.* Художественный редактор *Ю. В. Пахомов.* Технический редактор *С. С. Якушкина.* Корректор *О. В. Ивашкина.*

ИБ № 13895

Сдано в набор 23.07.91. Подписано к печати 17.01.92. Формат $60\times90^1/_{16}$. Бум. типограф. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая. Усл. печ. л. 20+0,31 форз. Усл. кр.-отт. 21,0. Уч.-изд. л. 18,40 + 0,37 форз. Тираж 192 000 экз. Заказ 113. Ордена Трудового Красного Знамени издательство «Просвещение» Министерства печати и информации Российской Федерации. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.
Саратовский ордена Трудового Красного Знамени полиграфический комбинат Министерства печати и информации Российской Федерации. 410004, Саратов, ул. Чернышевского, 59.

ISBN 5-09-003862-7

20-летию создания подготовительных отделений при вузах посвящается эта книга.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данная книга предназначается для самостоятельного повторения школьного курса геометрии. Она поможет систематизировать имеющиеся знания и ликвидировать пробелы в них, если такие окажутся.

Особенно она может быть полезной при подготовке к выпускным экзаменам в одиннадцатых классах средней школы и при подготовке к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения. Ею могут пользоваться как школьники, так и учащиеся СПТУ и техникумов, особенно слушатели подготовительных отделений и подготовительных курсов вузов.

Прообразом данной книги является книга того же автора «Учебное пособие для подготовительных отделений вузов» (М.: Высшая школа, 1981).

Эта книга по назначению, содержанию и структуре является продолжением книги того же автора «Повторяем и систематизируем школьный курс алгебры и начал анализа» (М.: Просвещение, 1990).

Остановимся подробнее на структуре. Каждая глава состоит из нескольких параграфов. Все параграфы главы (за некоторым исключением) автономны и построены по одной и той же схеме. Они содержат: 1) справочный материал; 2) задачи с решениями; 3) контрольные вопросы; 4) дидактический материал. В конце книги даны четыре приложения.

Дадим краткую характеристику каждому разделу параграфа.

Раздел «Справочный материал» содержит формулировки определений (определяемые слова выделены в тексте курсивом), аксиом, теорем и т. д. Краткое изложение теоретических вопросов в книге в основном соответствует изложению этих вопросов в действующих школьных пособиях. Последовательность рассмотрения материала примерно та же, что и при изучении школьного курса. В случае затруднений при выполнении упражнений или ответах на контрольные вопросы можно получить необходимые теоретические сведения, прочитав справочный материал. Этот раздел является как бы консультантом по вопросам теории.

Раздел «Задачи с решениями» содержит примеры решения задач, разбирая которые можно восстановить, а если отсутствуют, то и приобрести необходимые умения и навыки, связанные с использованием соответствующего теоретического материала. Решение каждой задачи сопровождается подробным пояснением.

Раздел «Контрольные вопросы» призван обеспечить определенный контроль за усвоением теоретического и практического материала.

Раздел «Дидактический материал» содержит набор задач трех уровней сложности.

Буквой **А** отмечены самые легкие задачи.

Буквой **Б** отмечены задачи, более сложные по отношению к предыдущим.

Буквой **В** отмечены задачи наибольшей сложности.

Таким образом, сначала можно выбрать задачи, соответствующие вашему уровню математической подготовки, а затем по мере приобретения навыков и умений переходить ко все более трудным задачам. В некоторых параграфах дидактический материал не разбит по уровням сложности. В этом случае рекомендуем решить все эти задачи. После условия каждой задачи к ней дается ответ в квадратных скобках.

Дадим краткую характеристику приложениям.

Приложение 1 содержит пять контрольных работ по планиметрии. Занятия по ним можно организовать так. Все задачи контрольной работы (30 задач) разбиваются на 10 вариантов по 3 задачи в каждом варианте следующим образом: в первый вариант включаются задачи под номером 1, 11, 21; во второй — под номером 2, 12, 22 и т. д. Ученик, записанный в классном журнале пятым, пятнадцатым, двадцать пятым, решает пятый вариант, т. е. задачи под номером 5, 15, 25, ученик записанный, например, двадцатым, решает десятый вариант, т. е. задачи 10, 20, 30.

Преподаватели подготовительных отделений и курсов вузов могут использовать данные задачи как в аудиторное время, так и для контроля по мере прохождения тем по планиметрии.

Приложения 2 и 3 содержат задачи повышенной трудности по планиметрии и стереометрии, для решения которых нужно использовать все теоретические знания и практические навыки по всему основному курсу по геометрии. Задачи из этих приложений можно использовать при работе с математически подготовленными учащимися.

Приложение 4 предназначается для абитуриентов, которые при поступлении в институт будут сдавать экзамен по математике. В нем даны три типа экзаменационных билетов из разных вузов Москвы и по разным уровням сложности.

Пользуюсь случаем поблагодарить Савченкова Г. Ф., Михайлова П. А. и Коршикову З. Ф., которые своими советами способствовали улучшению содержания книги.

ПЛАНИМЕТРИЯ

ГЛАВА I

§ 1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ. ТОЧКА И ПРЯМАЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Геометрия* — это наука о свойствах геометрических фигур.

2. Примеры геометрических фигур: треугольник, квадрат, окружность.

3. Раздел геометрии, в котором изучаются свойства фигур на плоскости, называется *планиметрией.*

4. Основными геометрическими фигурами на плоскости являются *точка* и *прямая.*

5. Точка не имеет размеров. Представление о точке дает след конца карандаша на бумаге. Точки принято обозначать прописными латинскими буквами: A, B, C, D, ...

6. Представление о прямой дает натянутая нить. Прямая бесконечна. Прямые обозначаются строчными латинскими буквами: a, b, c, ...

7. На рисунке 1 изображена точка A и прямая a.

8. Через две точки можно провести только одну прямую.

9. Две прямые могут пересекаться только в одной точке.

10. *Лучом*, или *полупрямой*, называется часть прямой, ограниченная с одной стороны точкой (рис. 2). Точка O называется

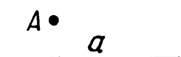


Рис. 1

Рис. 2

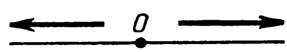


Рис. 3

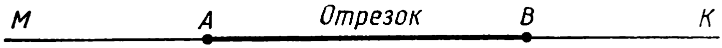


Рис. 4

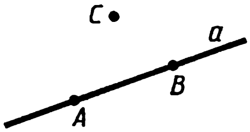


Рис. 5

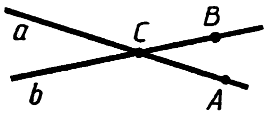


Рис. 6

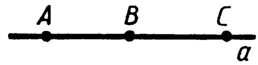


Рис. 7

началом луча. Всякий луч определяет направление. Точка O, лежащая на прямой, делит ее на два луча, направления которых противоположны (рис. 3), эти лучи называют еще *дополнительными.*

11. *Отрезком* называется часть прямой, ограниченная двумя точками, точки A и B принадлежат отрезку. Например, AB — отрезок прямой MK (рис. 4).

12. *Плоскость* есть ровная поверхность. Представление о плоскости дает спокойная поверхность воды или поверхность стола, лист бумаги. Фигура называется *плоской*, если все ее точки лежат в одной плоскости. Например, треугольник — плоская фигура.

13. Основные свойства принадлежности точек и прямых:

1) какова бы ни была прямая, существуют точки, принадлежащие этой прямой, и точки, не принадлежащие ей. На рисунке 5 точки A и B принадлежат прямой a, точка C не принадлежит a;

2) прямую можно обозначать двумя точками, лежащими на ней. Например, прямую a на рисунке 6 можно обозначить AC, а прямую b можно обозначить BC;

3) две различные прямые одной плоскости либо не пересекаются, либо пересекаются только в одной точке.

14. Основные свойства взаимного расположения точек на прямой и на плоскости:

1) из трех точек прямой одна и только одна лежит между двумя другими (рис. 7);

2) прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости. Если концы какого-нибудь отрезка принадлежат одной полуплоскости,

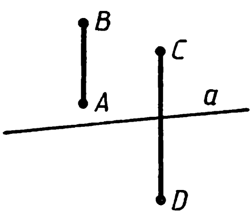


Рис. 8

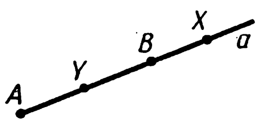


Рис. 9

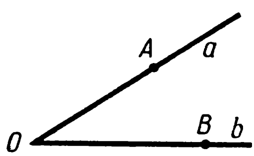


Рис. 10

то отрезок не пересекается с прямой a. Если концы отрезка принадлежат разным полуплоскостям, то отрезок пересекается с прямой a (рис. 8);

3) любые точки луча не разделяются его начальной точкой (рис. 9).

§ 2. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ИЗМЕРЕНИЯ ОТРЕЗКОВ И УГЛОВ. ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОТКЛАДЫВАНИЯ ОТРЕЗКОВ И УГЛОВ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Каждый отрезок имеет определенную длину, большую нуля. Длина отрезка равна сумме длин частей, на которые он разбивается любой его точкой.

2. *Углом* называется фигура, которая состоит из двух различных полупрямых с общей начальной точкой. Эта точка называется *вершиной* угла, а полупрямые — *сторонами* угла.

3. Если стороны угла являются дополнительными полупрямыми одной прямой, то угол называется *развернутым.*

4. Угол можно обозначить тремя способами: $\angle O$, $\angle(ab)$, $\angle AOB$ (рис. 10). При третьем способе записи угла буква, обозначающая вершину, ставится всегда посередине.

5. *Градус* — эта одна трехсотшестидесятая часть круга.

6. Каждый угол имеет определенную градусную меру, большую нуля. Развернутый угол равен 180°. Градусная мера угла равна сумме градусных мер углов, на которые он разбивается любым лучом, проходящим между его сторонами через вершину данного угла.

7. На любой полупрямой от ее начальной точки можно отложить отрезок заданной длины и причем только один.

8. От любой полупрямой в заданную полуплоскость можно отложить угол с заданной градусной мерой и причем только один.

§ 3. СУЩЕСТВОВАНИЕ ТРЕУГОЛЬНИКА, РАВНОГО ДАННОМУ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Треугольником* называется фигура, которая состоит из трех точек, не лежащих на одной прямой, и трех попарно соединяющих их отрезков. Точки называются *вершинами* треугольника, а отрезки — его *сторонами.*

2. Для краткости записей вместо слова «треугольник» иногда употребляют знак (символ) $\triangle$.

3. *Два отрезка* называются *равными*, если они имеют одинаковую длину.

4. *Два угла* называются *равными*, если они имеют одинаковую градусную меру.

5. *Треугольники равны*, если у них соответственные стороны и соответственные углы равны.

§ 4. ОСНОВНОЕ СВОЙСТВО ПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ПРЯМЫХ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Две прямые на плоскости* называются *параллельными*, если они не пересекаются, сколько бы их ни продолжали в обоих направлениях.

2. Для обозначения параллельности прямых употребляется знак $\|$.

3. Запись $a \| b$ читается так: «Прямая a параллельна прямой b».

4. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной.

§ 5. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ПРЕДЛОЖЕНИЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Геометрия изучает свойства фигур. Эти свойства выражаются различными предложениями: определениями, аксиомами, теоремами, следствиями.

2. *Определение* есть предложение, которое разъясняет данное понятие через уже известные понятия.

3. *Теоремой* называется предложение о свойствах фигуры, истинность которых устанавливается в результате рассуждений. Эти рассуждения называются доказательством.

4. Всякая теорема состоит из двух частей. Первая часть — *условие* (т. е. то, что дано в условии теоремы). Вторая часть — *заключение* (т. е. то, что нужно доказать).

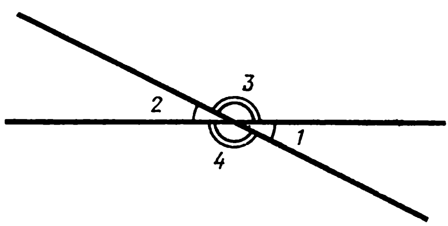


Рис. 11

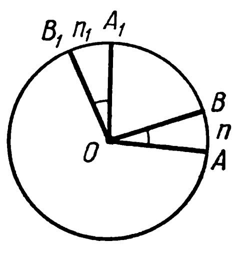


Рис. 12

Примеры: а) Если два угла вертикальные, то они равны (рис. 11).

Условие (дано)	Заключение (доказать)
Если два угла вертикальные,	то они равны.

б) Если два центральных угла окружности равны, то соответствующие им дуги также равны (рис. 12).

Условие (дано)	Заключение (доказать)
Если два центральных угла в окружности равны,	то соответствующие им дуги также равны.

5. Предложение, состоящее из условия A и заключения B, назовем *прямым предложением*. Составим новое предложение, в котором условием будет B, а заключением будет A. Его назовем *обратным предложением* (т. е. обратной теоремой).

	Условие	Заключение
Прямое предложение	A	B
Обратное предложение	B	A

Примеры:

Прямое предложение	Обратное предложение
а) Если два центральных угла окружности равны, то равны и соответствующие им дуги. б) Если два угла вертикальные, то они равны.	а) Если две дуги окружности равны, то равны и соответствующие им центральные углы. б) Если два угла равны, то они вертикальные.

Примечание. В примере а) прямое и обратное предложения верны. В примере б) прямое предложение верное, а обратное — неверное.

6. Если мы доказали, что прямое предложение верное, то будем его называть *прямой теоремой*. Если мы доказали, что обратное предложение также верное, то его будем называть *обратной теоремой*.

7. *Аксиома* — это предложение, которое принимают без доказательства. Аксиома — истина, достойная признания. Например: «Через две точки можно провести прямую и только одну».

8. *Следствием* называется предложение, которое вытекает (получается) из теоремы или аксиомы. Например, из аксиомы: «Через две точки можно провести прямую и только одну» — следует, что две различные прямые могут пересекаться только в одной точке.

Контрольные вопросы

1. Что такое планиметрия?
2. Назовите основные геометрические фигуры на плоскости.
3. Как обозначаются точки и прямые?
4. Объясните, почему различные прямые не могут иметь двух общих точек.
5. Объясните, что такое отрезок с концами A и B.
6. Какая фигура называется углом?
7. Как обозначается угол?
8. Что такое треугольник?
9. Какие отрезки называются равными?
10. Какие углы называются равными?
11. Какие прямые называются параллельными?
12. Что такое теорема?
13. Приведите пример теоремы и ее доказательства.
14. Из каких двух частей состоит теорема?

§ 6. СМЕЖНЫЕ УГЛЫ. ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Два угла* называются *смежными*, если у них одна сторона общая, а другие стороны этих углов являются дополнительными полупрямыми. На рисунке 13 углы (ab) и (a_1b) смежные.

2. Сумма смежных углов равна 180°.

3. Угол, равный 90°, называется *прямым* углом.

4. Угол, больший 90°, но меньший 180°, называется *тупым*.

5. *Острым* углом называется такой угол, градусная мера которого меньше 90° (прямого).

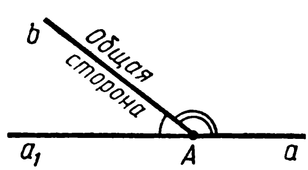


Рис. 13

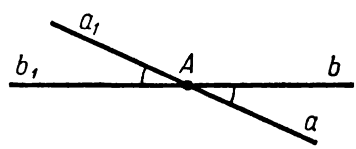


Рис. 14

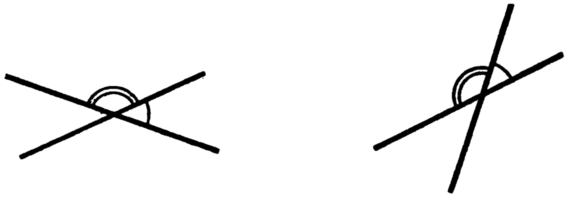


Рис. 15

6. Так как сумма смежных углов равна 180°, то угол, смежный с острым,— тупой, а смежный с тупым — острый.

7. Величину прямого угла иногда обозначают буквой d, т. е. $90° = d$, тогда $180° = 2d$ и т. д.

8. *Два угла* называются ***вертикальными***, если стороны одного угла являются дополнительными полупрямыми сторон другого.

9. Вертикальные углы равны.

10. На рисунке 14 углы (ab) и (a_1b_1) являются вертикальными.

11. Обозначения равных углов показаны на рисунке 15.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Найдите смежные углы, если один из них в 3 раза больше другого.

Решение. 1. Обозначим градусную меру меньшего угла через x. Тогда градусная мера большего угла будет $3x$.

2. Так как сумма смежных углов равна 180°, то получаем уравнение $x + 3x = 180°$, откуда $x = 45°$.

3. Значит, смежные углы равны 45° и 135°.

Задача 2. Градусные меры смежных углов относятся как 4:5. Найдите эти углы.

Решение. 1. Примем одну часть за x. Тогда смежные углы содержат $4x$ и $5x$.

2. Итак, $9x = 180°$, откуда $x = 20°$.

3. Значит, смежные углы равны 80° и 100°.

Контрольные вопросы

1. Какие углы называются смежными?
2. Чему равна сумма смежных углов?
3. Могут ли быть оба смежных угла прямыми? один тупым, другой прямым? оба острыми? один острым, другой прямым? оба тупыми?
4. Какова особенность общей стороны двух равных смежных углов?
5. Какие углы называются вертикальными?
6. Может ли сумма двух вертикальных углов быть равной 180°?
7. Каким свойством обладают вертикальные углы?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. **1.** Величина одного из смежных углов больше величины другого на 31°. Вычислите эти углы. [74,5°, 105,5°.]*

2. На прямой AB взята точка C и из нее проведен луч CD так, что $\angle ACD$ в 4 раза больше $\angle BCD$. Найдите эти углы. [36° и 144°.]

3. Один из углов, образованных двумя пересекающимися прямыми, равен 90°. Чему равны остальные углы? [90°, 90°, 90°.]

4. Один из углов, образованных при пересечении двух прямых, равен 54°. Найдите остальные углы. [126°, 54°, 126°.]

5. Сумма двух вертикальных углов равна 80°. Найдите величину каждого из полученных четырех углов. [40°, 40°, 140°, 140°.]

Б. **1.** Определите угол, который равен $\frac{3}{7}$ своего смежного. [54°.]

2. Отношение двух углов равно 7:3, а разность их равна 72°. Могут ли эти углы быть смежными? [Да.]

В. Докажите, что угол между биссектрисами двух смежных углов прямой.

§ 7. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Если прямые пересекаются под прямым углом, то их называют *перпендикулярными.*

2. Перпендикулярность прямых обозначается знаком (символом) $\perp$.

3. Запись $a \perp c$ читается так: «Прямая a перпендикулярна прямой c».

4. Через каждую точку прямой можно провести перпендикулярную ей прямую и притом только одну.

§ 8. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОТ ПРОТИВНОГО

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Способ *доказательства от противного* состоит в том, что сначала делается предположение, противоположное тому, которое утверждается теоремой. Затем путем рассуждений, опираясь на аксиомы и уже доказанные ранее теоремы, приходим к выводу, противоречащему либо условию теоремы, либо одной из аксиом, либо доказанной ранее теореме. На этом основании заключаем, что наше предположение было неверным, а значит, верно утверждение теоремы.

---

* После условия задачи, как правило, дается к ней ответ в квадратных скобках.

§ 9. УГЛЫ, ОТЛОЖЕННЫЕ В ОДНУ ПОЛУПЛОСКОСТЬ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Если от данной полупрямой отложить в одну полуплоскость два угла, то сторона меньшего угла, отличная от данной полупрямой, проходит между сторонами большего угла.

2. *Биссектрисой* угла называется луч, который исходит из его вершины, проходит между его сторонами и делит угол пополам (рис. 16).

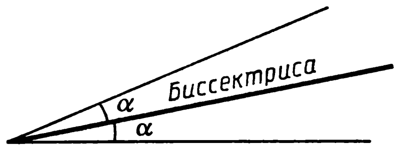


Рис. 16

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Чему равен угол между биссектрисой и стороной данного угла, равного 52°? [26°.]
2. Найдите угол, если его биссектриса образует со стороной угол, равный 60°. [120°.]
3. Докажите, что биссектрисы вертикальных углов лежат на одной прямой.
4. Какая разница между биссектрисой угла и биссектрисой угла в треугольнике?

ГЛАВА II

§ 1. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Если две стороны и угол между ними одного треугольника равны соответственно двум сторонам и углу между ними другого треугольника, то такие треугольники равны *(первый признак)*.

2. Если сторона и прилежащие к ней углы одного треугольника равны соответственно стороне и прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны *(второй признак)*.

3. Если три стороны одного треугольника равны соответственно трем сторонам другого треугольника, то такие треугольники равны *(третий признак)*.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O, которая является серединой каждого из них. Чему равен отрезок BD, если отрезок AC равен 6 м?

Решение. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 17.

2. Треугольники AOC и BOD равны (по первому признаку): $\angle AOC = \angle BOD$ (вертикальные), $AO = OB$, $CO = OD$ (по условию).

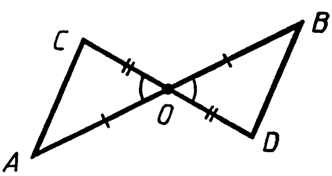


Рис. 17

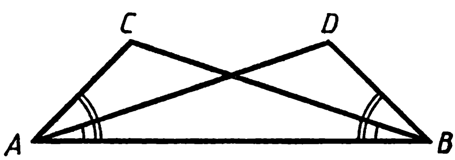


Рис. 18

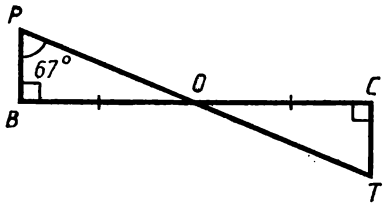


Рис. 19

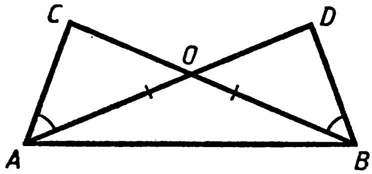


Рис. 20

3. Из равенства названных треугольников следует равенство их сторон, т. е. $AC=BD$. Но так как по условию задачи $AC=6$ м, то и $BD=6$ м.

Задача 2. На рисунке 18 углы DAB и CBA, CAB и DBA равны, $CA=13$ м. Найдите DB.

Решение. 1. Треугольники ACB и ADB имеют одну общую сторону AB и по два равных угла, которые прилежат к этой стороне. Следовательно, треугольники ACB и ADB равны (по второму признаку).

2. Из равенства этих треугольников следует равенство сторон BD и AC, т. е. $BD=13$ м.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте первый признак равенства треугольников.
2. Сформулируйте второй признак равенства треугольников.
3. Сформулируйте третий признак равенства треугольников.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Отрезки CC_1 и BB_1 пересекаются в точке A, причем $AC=AC_1$ и $BA=B_1A$. Докажите, что $BC=B_1C_1$.

2. По данным рисунка 19: а) найдите $\angle T$; б) докажите, что $PO=OT$.

3. На рисунке 20 углы DBC и DAC равны и $BO=OA$. Докажите, что $\angle C=\angle D$ и $AC=BD$.

4. По данным рисунка 21: а) докажите, что $BD=CD$; б) найдите $\angle C$, если $\angle B=53°$; в) найдите DC, если $DB=14$ мм.

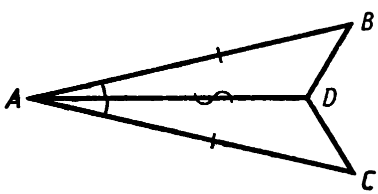


Рис. 21

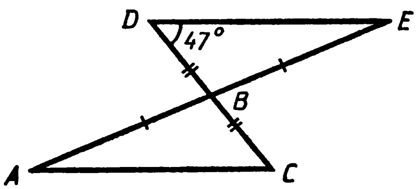


Рис. 22

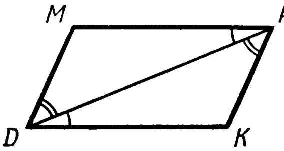


Рис. 23

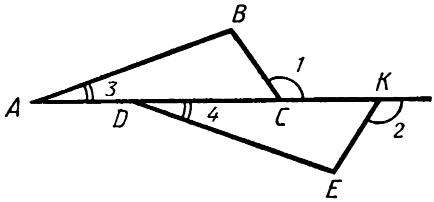


Рис. 24

Б. 1. По данным рисунка 22: а) найдите $\angle C$; б) докажите, что $DE=AC$. [47°.]

2. Отрезки AB и CD пересекаются в точке O. Докажите равенство треугольников ACO и DBO, если известно, что угол ACO равен углу DBO и $BO=OC$.

3. По данным рисунка 23 найдите PK, если $MD=9$ см. [9 см.]

В. 1. На рисунке 24 $AD=CK$, $\angle 1=\angle 2$ и $\angle 3=\angle 4$. Докажите, что $AB=DE$.

2. На рисунке 24 $AC=DK$, $\angle 1=\angle 2$ и $\angle ADE=180° - \angle 3$. Докажите, что треугольники ABC и DEK равны.

3. На рисунке 25 $\angle 1=\angle 2$, $BM=CM$ и $AM \perp BC$. Докажите, что $AB=AC$ и $\angle BAM=\angle CAM$.

§ 2. РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Треугольник называется *равнобедренным*, если две его стороны равны между собой.

2. Равные стороны треугольника называются *боковыми сторонами*, а третья сторона называется *основанием*.

3. В равнобедренном треугольнике углы при основании равны.

4. Если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

5. Треугольник называется *равносторонним*, если все его стороны равны между собой.

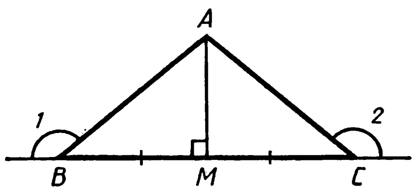


Рис. 25

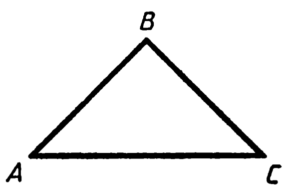


Рис. 26

6. Сумма всех сторон любого треугольника называется периметром.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Периметр равнобедренного треугольника равен 35 м. Одна сторона в 3 раза больше другой. Найдите стороны треугольника.

Решение. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 26.

2. Обозначим AC через x, тогда по условию задачи $AB=BC==3x$.

3. Периметр треугольника ABC составит $3x+3x+x$. По условию эта сумма равна 35, т. е. $7x=35$, или $x=5$.

4. Следовательно, стороны треугольника 5 м, 15 м и 15 м.

Задача 2. Периметр равнобедренного треугольника равен 70 м. Боковая сторона больше основания на 5 м. Найдите стороны треугольника.

Решение. Воспользуемся рисунком 26. Обозначим AC через x, а $BC=AB$ через $x+5$.

2. Тогда периметр треугольника составит $(x+5)+(x+5)+x==70$.

3. Решив уравнение, получим $AB=BC=25$ м, $AC=20$ м.

Контрольные вопросы

1. Какой треугольник называется равнобедренным?
2. Какой треугольник называется равносторонним?
3. Можно ли утверждать, что:
   а) равносторонний треугольник является равнобедренным;
   б) равнобедренный треугольник является остроугольным?
4. Какие стороны равнобедренного треугольника называются боковыми сторонами?
5. Докажите, что если в треугольнике два угла равны, то он равнобедренный.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Периметр равнобедренного треугольника равен 1 м, основание равно 0,4 м. Найдите боковую сторону. [0,3 м.]

2. Периметр равнобедренного треугольника равен 7,5 м, а боковая сторона равна 2 м. Найдите основание. [3,5 м.]

3. Периметр равнобедренного треугольника равен 15,6 м. Найдите его стороны, если : а) основание меньше боковой стороны на 3 м; б) основание больше боковой стороны на 3 м. [а) 3,2; 6,2; 6,2; б) 7,2; 4,2; 4,2.]

Б. 1. На боковой стороне равнобедренного треугольника построен равносторонний треугольник, периметр которого равен 45 м, а периметр первого треугольника 40 м. Найдите основание равнобедренного треугольника. [10 м.]

2. В остроугольном треугольнике MHP из середины основания MP восставлен перпендикуляр до пересечения с боковой стороной MH в точке K. Точки K и P соединены отрезком прямой. Найдите PK, если отрезок MK равен 13,7 м. [13,7 м.]

3. В равнобедренном треугольнике ABC на основании AC отмечены точки D и E так, что $AD=EC$. Докажите, что точки D и E равноудалены от вершины B.

В. 1. Докажите, что середины сторон равнобедренного треугольника также являются вершинами равнобедренного треугольника.

2. Докажите, что середины сторон равностороннего треугольника также являются вершинами равностороннего треугольника.

3. Угол K треугольника KMH равен углу P треугольника PAC, известно также, что $KM=23$ м, $KH=21$ м, $PA=21$ м, $PC=23$ м. Сравните треугольники KMH и PAC. Какой угол треугольника PAC равен углу M треугольника KMH? Как его найти?

§ 3. МЕДИАНА, БИССЕКТРИСА И ВЫСОТА ТРЕУГОЛЬНИКА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Высотой треугольника*, опущенной из данной вершины, называется перпендикуляр, проведенный из этой вершины к прямой, содержащей противолежащую сторону треугольника.

2. На рисунке 27 BK — высота треугольника, которая обозначена буквой h.

3. *Биссектрисой треугольника*, проведенной из данной вершины, называется отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий эту вершину с точкой на противолежащей стороне.

4. *Медианой треугольника*, проведенной из данной вершины, называется отрезок, соединяющий эту вершину с серединой противолежащей стороны треугольника.

5. На рисунке 28 BK — медиана треугольника.

6. В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.

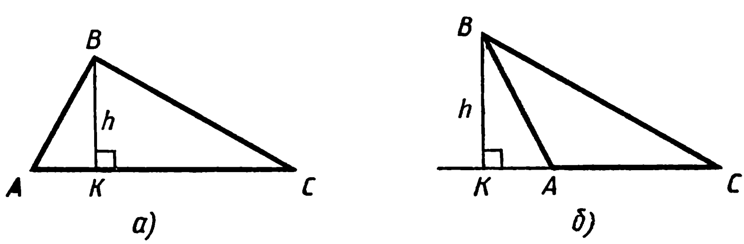


Рис. 27

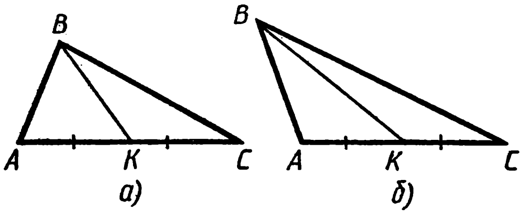


Рис. 28

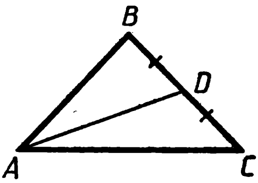


Рис. 29

ЗАДАЧА С РЕШЕНИЕМ

Задача. Медиана, проведенная к одной из боковых сторон равнобедренного треугольника, делит его периметр на две части длиной 15 и 6 м. Найдите стороны треугольника.

Решение. 1. Пусть ABC — данный равнобедренный треугольник, AD — медиана (рис. 29).

2. Так как AD — медиана к стороне BC, то $BD = DC$. Обозначим BD через x, тогда AB содержит $2x$.

3. По условию задачи $AB + BD = 15$, или $2x + x = 15$, откуда $x = 5$. Следовательно, AB равно 10 м, а BD равно 5 м.

4. По условию задачи $AC + DC = 6$, подставив найденное значение DC, имеем $AC + 5 = 6$, откуда $AC = 1$.

5. Стороны треугольника 10 м, 10 м, 1 м.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение биссектрисы треугольника.
2. Что общего между биссектрисой угла и биссектрисой треугольника?
3. Какой отрезок называют медианой треугольника?
4. Дайте определение высоты треугольника.
5. В каком треугольнике высота, биссектриса и медиана, проведенные из одной вершины, совпадают?
6. Верно ли, что в равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, является высотой и биссектрисой?
7. Докажите, что в равностороннем треугольнике три медианы, высоты и биссектрисы равны.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Периметр равнобедренного треугольника равен 1 м, а его основание равно 0,4 м. Найдите боковую сторону и отрезки, на которые медиана делит боковую сторону. [0,3 м и 0,15 м.]

2. Докажите, что в равнобедренном треугольнике: а) биссектрисы, проведенные из вершин при основании, равны; б) медианы, проведенные из вершин при основании, равны.

3. Докажите, что в равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, является медианой и биссектрисой.

Б. Докажите, что в равных треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$: а) медианы, проведенные из вершин равных углов A и A_1, равны; б) биссектрисы, проведенные из тех же вершин, равны.

В. Дан равнобедренный треугольник MCP с основанием MP и точки E и K соответственно на сторонах MC и CP. Периметр треугольника MCP равен 110 м, а периметр треугольника KMC на 10 м больше, чем периметр треугольника MEP. Найдите стороны треугольника MCP. [30 м, 40 м, 40 м.]

§ 4. ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Две прямые, параллельные третьей, параллельны.

2. Если две прямые AB и CD пересечены третьей MK, то прямая MK называется секущей (рис. 30).

3. Углы, которые образуются при пересечении прямых AB и CD секущей MK (рис. 30), имеют специальные названия:

а) $\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$, $\angle 4$ и $\angle 8$ — *соответственные*;
б) $\angle 3$ и $\angle 6$, $\angle 4$ и $\angle 5$ — *внутренние накрест лежащие*;
в) $\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 2$ и $\angle 7$ — *внешние накрест лежащие*;
г) $\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$ — *внутренние односторонние*;
д) $\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$ — *внешние односторонние*.

4. Из свойства смежных углов следует, что если углы одной пары внутренних накрест лежащих углов равны, то и углы другой пары внутренних накрест лежащих углов тоже равны, а сумма внутренних односторонних углов каждой пары равна 180° (рис. 31).

5. Если внутренние накрест лежащие углы равны или сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны (рис. 31).

6. Через точку, не лежащую на данной прямой, можно провести параллельную ей прямую и только одну.

7. Если две параллельные прямые пересечены третьей прямой, то внутренние накрест лежащие углы равны, а сумма внутренних односторонних углов равна 180°.

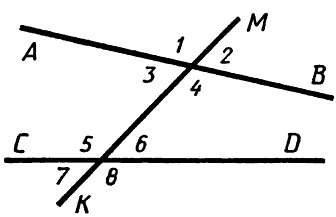


Рис. 30

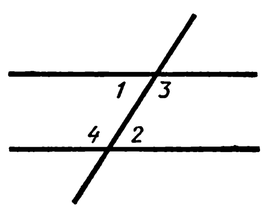


Рис. 31

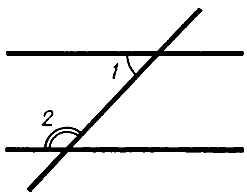


Рис. 32

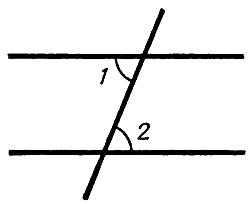


Рис. 33

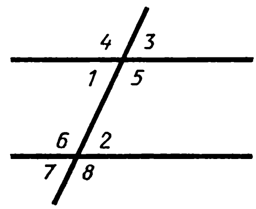


Рис.34

8. Две прямые, перпендикулярные третьей, параллельны. Если прямая перпендикулярна к одной из параллельных прямых, то она перпендикулярна и к другой.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Две параллельные прямые пересечены третьей. Известно, что разность двух внутренних односторонних углов равна 30°. Найдите эти углы.

Решение. 1. Пусть условию отвечает рисунок 32.

2. Углы 1 и 2 внутренние односторонние, их сумма равна 180°, т. е.

$$\angle 1+\angle 2=180^\circ. \qquad (1)$$

3. Обозначим градусную меру $\angle 1$ через x. По условию $\angle 2-x=30^\circ$, или $\angle 2=30^\circ+x$.

4. Подставим в (1) значения углов 1 и 2, получим $x+30+x=180$.

Решая это уравнение, получим $x=75^\circ$, т. е. $\angle 1=75^\circ$, а $\angle 2=180^\circ-75^\circ=105^\circ$.

Задача 2. Две параллельные прямые пересечены третьей. Известно, что сумма двух внутренних накрест лежащих углов равна 150°. Чему равны эти углы и остальные шесть?

Решение. 1. Пусть условию задачи соответствует рисунок 33.

2. Углы 1 и 2 внутренние накрест лежащие, следовательно, они равны. Сумма этих углов по условию задачи равна 150°, тогда $\angle 1=\angle 2=75^\circ$.

3. Найдем остальные углы (рис. 34): $\angle 1=\angle 3=75^\circ$ и $\angle 2=\angle 7=75^\circ$ (вертикальные). Углы 4 и 5, 6 и 8 равны как вертикальные, а $\angle 5=\angle 6$ как внутренние накрест лежащие. Все перечисленные углы 4, 5, 6 и 8 равны между собой и равны по 105°, так как $\angle 4+\angle 3=180^\circ$, а $\angle 4=180^\circ-\angle 3$.

4. Получили четыре угла по 75°, четыре угла по 105°.

Контрольные вопросы

1. Объясните, какие углы называются внутренними односторонними. Какие углы называются внутренними накрест лежащими?
2. Сформулируйте признаки параллельности прямых.
3. Каково взаимное расположение двух прямых, перпендикулярных к одной и той же прямой?
4. На плоскости даны две точки. Много ли пар параллельных прямых можно провести через эти точки?
5. Объясните, почему биссектрисы двух соответственных углов при параллельных прямых, пересеченных третьей, не могут пересекаться.
6. Можно ли утверждать, что две прямые, параллельные третьей, параллельны между собой?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Один из углов, которые образуются при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен 72°. Найдите остальные семь углов. [Три угла по 72°, а четыре угла по 108°.]

2. Разность двух внутренних односторонних углов при двух параллельных прямых и секущей равна 40°. Найдите эти углы и остальные шесть. [Четыре угла по 70°, а четыре по 110°.]

3. Сумма двух внутренних накрест лежащих углов при двух параллельных прямых и секущей равна 40°. Найдите эти углы и остальные шесть. [Четыре угла по 20°, а четыре по 160°.]

Б. 1. Один из углов, которые образуются при пересечении двух параллельных прямых секущей, равен 30°. Может ли один из остальных семи углов равняться 70°? [Не может.]

2. Прямые MK и OP пересечены третьей прямой, $\angle 1 = \angle 2$ (рис. 35). Параллельны ли прямые MK и OP? [Да, параллельны.]

3. Прямые AB и CD пересечены прямой MK, $\angle 1 = 72°$, а $\angle 2$ в 1,5 раза меньше смежного с ним (рис. 36). Докажите, что прямые AB и CD параллельны.

В. 1. Докажите, что биссектрисы двух внутренних односторонних углов, образованных при пересечении двух параллельных прямых третьей прямой, образуют прямой угол.

2. Две параллельные прямые пересечены третьей прямой, при этом один из внутренних углов равен $\frac{11d}{8}$. Под каким углом

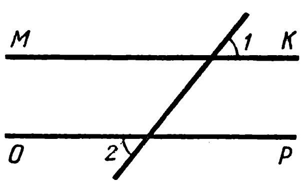


Рис. 35

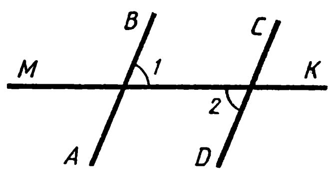


Рис.36

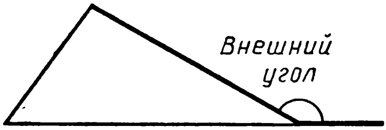


Рис.37

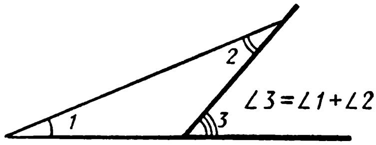


Рис. 38

его биссектриса пересекает каждую из параллельных прямых? $\left[\frac{11d}{16}, \frac{11d}{16}.\right]$

3. Две параллельные прямые пересечены третьей прямой. Сумма трех углов: внутреннего, внутреннего одностороннего с ним и внутреннего накрест лежащего с первым углом — равна $3\frac{2}{7}d$. Найдите угол, соответственный с первым внутренним. $\left[\frac{9}{7}d.\right]$

§ 5. СУММА УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Сумма углов треугольника равна 180°.
2. У любого треугольника хотя бы два угла острые.
3. У равностороннего треугольника все углы равны, каждый из них по 60°.
4. *Внешним углом* треугольника при данной вершине называется угол, смежный с углом треугольника при этой вершине (рис. 37).
5. Чтобы не путать угол треугольника при данной вершине с внешним углом при этой же вершине, его называют *внутренним углом.*
6. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним (рис. 38).
7. Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Один из смежных углов равен 44°. Чему равен другой?

Решение. 1. Сумма смежных углов равна 180°, т. е. $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ (рис. 39).

2. Обозначим градусную меру угла 2 через x, тогда $44 + x = 180$. Решая полученное уравнение, находим, что $x = 136°$. Следовательно, угол 2 равен 136°.

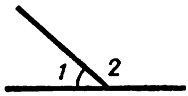


Рис. 39

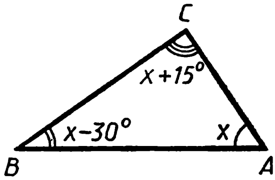


Рис. 40

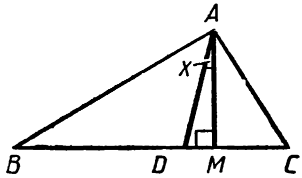


Рис. 41

Задача 2. Градусные меры смежных углов относятся как 2:7. Найдите эти углы.

Р е ш е н и е. 1. Обозначим через x градусную меру одной части, тогда $\angle 1$ содержит $2x$, а $\angle 2$ содержит $7x$.

2. По условию задачи составим уравнение $2x+7x=180$ или $x=20°$. Отсюда следует, что $\angle 1=2\cdot 20°=40°$ и $\angle 2=7\cdot 20°=$ $=140°$.

Задача 3. Найдите углы треугольника, зная, что один из них на 15° больше, а другой на 30° меньше третьего.

Р е ш е н и е. 1. Пусть ABC — данный треугольник (рис. 40). Обозначим градусную меру угла A через x, тогда градусная мера угла C равна $x+15$, а угла B — $x-30$.

2. Так как сумма внутренних углов треугольника равна 180°, то получаем уравнение $x+(x+15)+(x-30)=180$. Решая его, получаем $x=65°$.

3. Таким образом, $\angle A=65°$, $\angle B=35°$ и $\angle C=80°$.

Контрольные вопросы

1. Чему равна сумма внутренних углов треугольника?
2. Что такое внешний угол треугольника?
3. Могут ли всякие три угла (отличные от нулевого), сумма которых равна 180°, быть углами треугольника?
4. В равностороннем треугольнике проведены две медианы. Чему равен острый угол между ними?
5. Может ли угол при основании равнобедренного треугольника быть тупым?
6. Каков вид треугольника, если один из его внутренних углов больше смежного с ним внешнего угла? равен своему смежному?
7. Назовите вид треугольника, если один его угол равен сумме двух других углов; больше суммы двух других углов.
8. Может ли: а) больший угол треугольника быть меньше 60°; б) меньший угол треугольника быть больше 60°?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. В треугольнике один из углов равен 40°, другой 75°. Найдите третий угол треугольника. [65°.]

2. В равнобедренном треугольнике угол при вершине равен 32°. Найдите углы при основании. [74°.]

3. В равнобедренном треугольнике угол при основании равен $\frac{5}{9}d$. Найдите угол при вершине. $\left[\frac{8}{9}d.\right]$

4. Углы треугольника относятся как 1:2:3. Найдите эти углы. [30°, 60°, 90°.]

Б. 1. В треугольнике один из углов 50°, а разность двух других 10°. Найдите эти углы треугольника. [70°, 60°.]

2. Найдите сумму внешних углов треугольника, взятых по одному при каждой вершине. [360°.]

3. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 100°. Найдите внутренние углы треугольника. [80°, 80°, 20° или 80°, 50°, 50°.]

4. Два угла треугольника относятся как 5:7, а третий угол на $\frac{4}{19}d$ больше первого угла. Найдите третий угол треугольника. $\left[\frac{14}{19}d.\right]$

В. 1. В треугольнике один угол 60°, а другой 40°. Найдите угол между биссектрисами этих углов. [130°.]

2. В треугольнике один угол 50°, а другой 60°. Найдите угол между высотами, проведенными из вершин этих углов. [110°.]

3. Выразите через углы при основании треугольника угол x между его высотой и биссектрисой (рис. 41). $\left[\frac{1}{2}(\angle C-\angle B).\right]$

§ 6. ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК. ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Треугольник называется *прямоугольным*, если у него есть прямой угол.

2. Острые углы прямоугольного треугольника дополняют друг друга до 90°.

3. Сторона прямоугольного треугольника, противолежащая прямому углу, называется *гипотенузой*, две другие стороны называются *катетами* (рис. 42).

4. Прямой угол обозначается так, как показано на рисунке 43.

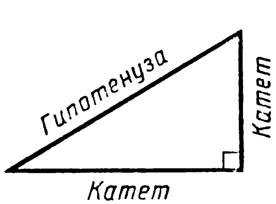


Рис. 42

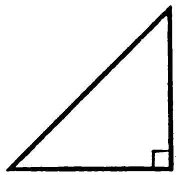


Рис. 43

5. Признаки равенства прямоугольных треугольников. Два треугольника ABC и $A_1B_1C_1$, где $\angle C = \angle C_1 = 90°$, равны, если выполняются следующие условия (рис. 44):

1) $AB = A_1B_1$ и $\angle A = \angle A_1$ (по гипотенузе и острому углу);

2) $BC = B_1C_1$ и $\angle A = \angle A_1$ (по катету и противолежащему углу);

3) $AB = A_1B_1$ и $BC = B_1C_1$ (по гипотенузе и катету).

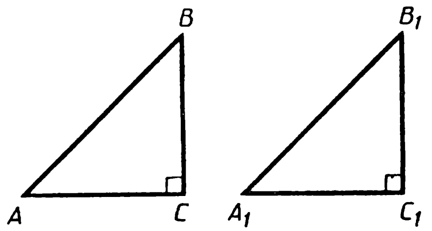


Рис. 44

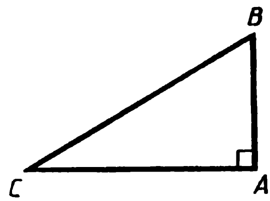


Рис. 45

6. В прямоугольном треугольнике катет, противолежащий углу 30°, равен половине гипотенузы.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Найдите углы прямоугольного треугольника, зная, что острые углы относятся как 1:2.

Р е ш е н и е. 1. В прямоугольном треугольнике угол A равен 90°, а сумма двух других углов составляет также 90° (рис. 45).

2. По условию $\angle C : \angle B = 1:2$.

3. Обозначим градусную меру угла C через x, тогда угол B содержит $2x$.

4. Составим уравнение и решим его: $x + 2x = 90$, т. е. $3x = 90$, или $x = 30$.

5. Следовательно, $\angle C = 30°$, $\angle B = 60°$.

Задача 2. В прямоугольном треугольнике один из острых углов равен 60°, а сумма гипотенузы и меньшего катета равна 18 м. Найдите гипотенузу.

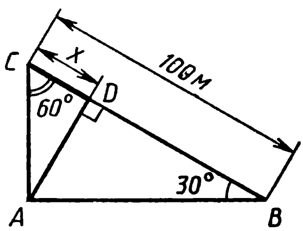


Рис. 46

Решение. 1. Пусть ABC — данный прямоугольный треугольник (рис. 45), где $\angle B=60°$, тогда $\angle C=90°-60°=30°$.

2. Обозначим AB через x, тогда BC содержит $2x$, так как в прямоугольном треугольнике катет, противолежащий углу 30°, равен половине гипотенузы.

3. По условию задачи составим уравнение $x+2x=18$, решая его, получаем $x=6$.

4. Следовательно, $AB=6$ м, $BC=12$ м.

Контрольные вопросы

1. Какой треугольник называется прямоугольным?
2. В каком треугольнике одна из его сторон является проекцией другой стороны?
3. Точно ли сформулирована теорема: «Все точки биссектрисы угла одинаково удалены от сторон этого угла»?
4. Известны углы прямоугольного треугольника. Как найти углы, образуемые катетами с высотой, опущенной на гипотенузу?
5. Сформулируйте признаки равенства прямоугольных треугольников.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Биссектриса угла при вершине равнобедренного треугольника образует с его стороной угол 60°. Найдите высоту треугольника, проведенную из этой же вершины, если его боковая сторона равна 25 м. [12,5 м.]

2. Найдите длину отрезка x на рисунке 46. [25 м.]

3. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 60°, сумма гипотенузы и меньшего катета 45 м. Найдите длину гипотенузы. [30 м.]

4. В прямоугольном треугольнике один острый угол равен 45°. Найдите катеты, если их сумма равна 36 м. [18 м, 18 м.]

5. Один из углов прямоугольного треугольника равен 60°, а сумма гипотенузы и меньшего катета равна 26,4 м. Найдите гипотенузу. [17,6 м.]

Б. 1. В прямоугольном треугольнике острый угол равен $\frac{d}{2}$. Найдите гипотенузу, если в сумме с опущенной на нее высотой она составляет 12 м. [8 м.]

2. Докажите, что треугольник равнобедренный, если он имеет две равные высоты.

В. **1.** В прямоугольном треугольнике ABC $\angle A=30°$, BM — медиана, проведенная к гипотенузе. Докажите, что один из треугольников ABM и MBC равносторонний, а другой равнобедренный.

2. Докажите, что если длина медианы треугольника равна половине длины стороны, к которой она проведена, то треугольник прямоугольный.

3. В равностороннем треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Расстояние от точки D до прямой AB равно 6 см. Найдите AD. [12 см.]

§ 7. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ПЕРПЕНДИКУЛЯРА К ПРЯМОЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Из любой точки, не лежащей на данной прямой, можно опустить на эту прямую перпендикуляр и только один.

2. Длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на прямую, называется *расстоянием от точки до прямой.*

3. *Расстоянием между параллельными прямыми* называется расстояние от какой-нибудь точки одной прямой до другой прямой.

4. Расстояния от всех точек прямой до параллельной прямой равны.

ГЛАВА III

§ 1. ОКРУЖНОСТЬ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Окружностью* называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки. Эта точка называется *центром* окружности.

2. Расстояние от точки окружности до ее центра называется *радиусом* окружности.

3. *Радиусом* называется также любой отрезок, соединяющий точку окружности с ее центром (рис. 47).

4. Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется *хордой* (рис. 47).

5. Хорда, проходящая через центр окружности, называется *диаметром* (рис. 47).

6. *Окружность* называется *описанной около треугольника,* если она проходит через все его вершины (рис. 48).

7. Центр окружности, описанной около треугольника, является точкой пересечения перпендикуляров к сторонам треугольника, проведенных через середины этих сторон (рис. 48).

8. Прямая, проходящая через точку окружности перпендикулярно к радиусу, проведенному в эту точку, называется *касатель-*

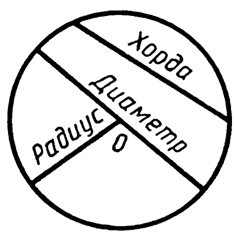


Рис. 47

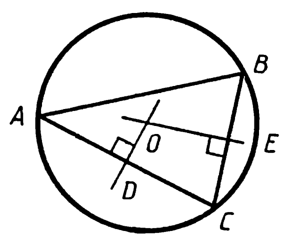


Рис. 48

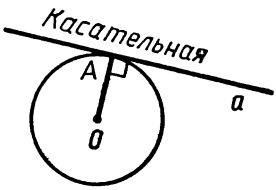


Рис. 49

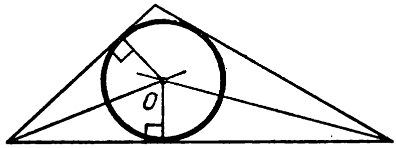
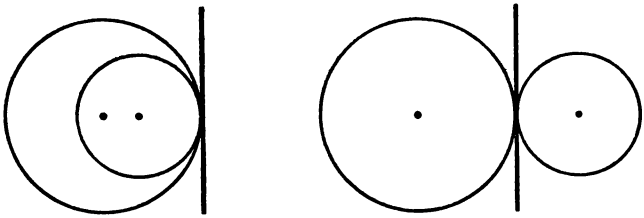


Рис. 50



а)   б)

Рис. 51

ной. При этом данная точка окружности называется *точкой касания* (рис. 49).

9. *Окружность* называется *вписанной в треугольник*, если она касается всех его сторон (рис. 50).

10. Центр окружности, вписанной в треугольник, является точкой пересечения его биссектрис (рис. 50).

11. Две окружности, имеющие общую точку, касаются в этой точке, если они имеют в этой точке общую касательную (рис. 51).

12. *Касание окружностей* называется *внутренним*, если центры окружностей лежат по одну сторону от их общей касательной (рис. 51, *а*).

13. *Касание окружностей* называется *внешним*, если центры окружностей лежат по разные стороны от их общей касательной (рис. 51, *б*).

14. Две окружности называются *концентрическими*, если они имеют общий центр (рис. 52).

15. Если из точки *A* проведены две касательные к окружности,

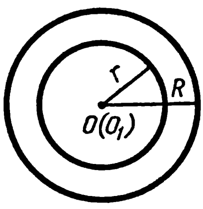


Рис. 52

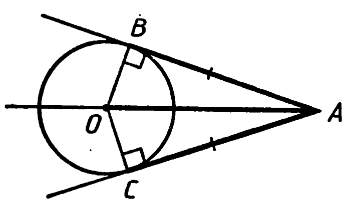


Рис. 53

то отрезки AB и AC равны, а центр окружности лежит на биссектрисе угла между ними (рис. 53).

16. Часть плоскости, ограниченная окружностью, называется *кругом*.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. В круге даны две взаимно перпендикулярные хорды, каждая из них делится другой на два отрезка 3 и 7. Найдите расстояния от центра до каждой хорды.

Решение. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 54.

2. Отрезки OK и OM и есть расстояния от центра круга до хорд CD и AB.

3. Треугольник COD равнобедренный, основание которого CD равно 10. Отрезок OK — высота треугольника COD, он же будет и медианой, поэтому $CK=KD=5$.

4. По условию $CE=3$, следовательно, $EK=KC-EC=2$.

5. $OMEK$ — прямоугольник (три угла по 90°), поэтому $EK=$ $=OM=2$.

6. Аналогично находим отрезок OK, который тоже будет равен 2.

Задача 2. Хорда пересекает диаметр под углом 30° и делит его на два отрезка 2 и 6. Найдите расстояние от центра до хорды.

Решение. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 55.

2. Перпендикуляр OK, опущенный из точки O на хорду DE, и есть искомое расстояние.

3. По условию диаметр окружности $AB=8$, тогда радиус $OB=4$.

4. По условию $AC=2$, следовательно, $OC=2$.

5. Треугольник COK прямоугольный, $\angle C=30°$, гипотенуза $CO=2$, поэтому катет, противолежащий углу 30°, равен 1 ($OK=1$).

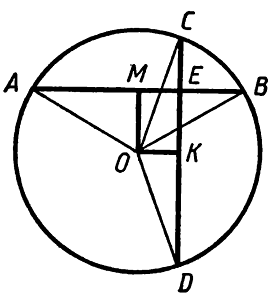


Рис. 54

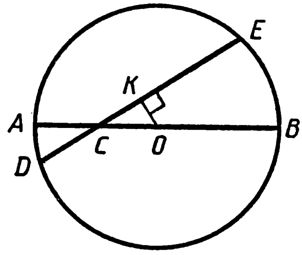


Рис. 55

Контрольные вопросы

1. Что называется окружностью?
2. Что называется радиусом?
3. Что называется хордой?
4. Что называется диаметром?
5. Что называется касательной?
6. Какая окружность называется вписанной в треугольник?
7. Какое касание окружностей называется внешним, какое — внутренним?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Окружности с радиусами 30 см и 40 см касаются. Найдите расстояние между центрами окружностей в случаях внешнего и внутреннего касания. [70 см и 10 см.]

2. Угол между радиусами OA и OB окружности равен 60°. Найдите хорду AB, если радиус окружности равен 6 м. [6 м.]

3. Из точки, лежащей вне окружности, проведены к ней две касательные, образующие угол 60°. Определите вид треугольника, вершины которого совпадают с данной точкой и точками касания. [Равносторонний.]

4. Найдите радиусы двух окружностей, имеющих общий центр, если диаметр большей окружности делится меньшей окружностью на 3 части, равные 9 м, 12 м, 9 м. [15 м и 6 м.]

Б. 1. Найдите угол между касательными, проведенными к окружности из одной точки, если расстояние от этой точки до центра окружности равно двум радиусам [60°.]

2. Касательные, проведенные из точки A к окружности радиуса R, перпендикулярны. Определите отрезки этих касательных, ограниченные данной точкой и точками касания. [Отрезки касательных равны радиусу.]

3. Радиусы двух окружностей, имеющих общий центр, относятся как 2:7. Найдите диаметры этих окружностей, если ширина кольца, образованного ими, равна 24 м. [19,2 м и 67,2 м.]

4. В круге на расстоянии 1 см от центра даны взаимно перпендикулярные хорды, каждая из которых равна 6 см. Найдите

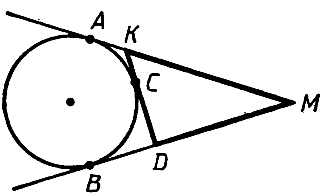


Рис. 56

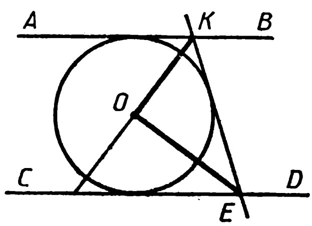


Рис. 57

отрезки, на которые делятся хорды точкой их пересечения. [2 см и 4 см.]

В. 1. Через точку M, взятую вне окружности, проведены к ней касательные MA и MB (A и B — точки касания) и через произвольную точку C меньшей дуги AB проведена касательная KD к окружности. Докажите, что периметр треугольника KMD не зависит от положения точки C (рис. 56).

2. На рисунке 57 AB, CD, KE — касательные к окружности, причем AB параллельна CD. Докажите, что $\angle KOE$ равен 90°.

§ 2. ЗАДАЧИ НА ПОСТРОЕНИЕ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

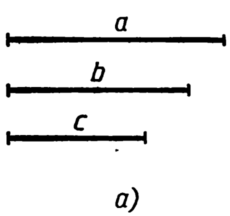
1. Что такое задачи на построение. В задачах на построение идет речь о построении геометрической фигуры с помощью данных *чертежных инструментов*, таковыми являются чаще всего линейка и циркуль.

С помощью *линейки* как инструмента геометрических построений можно провести произвольную прямую; произвольную прямую, проходящую через данную точку; прямую, проходящую через две данные точки. Никаких других операций выполнять линейкой нельзя. В частности, нельзя откладывать линейкой отрезки, даже если на ней имеются деления.

Циркуль как инструмент геометрических построений позволяет описать из данного центра окружность данного радиуса. В частности, циркулем можно отложить данный отрезок на данной прямой от данной точки.

2. Построение треугольника с заданными элементами.

З а д а ч а. Построить треугольник с данными сторонами a, b, c (рис. 58, a).



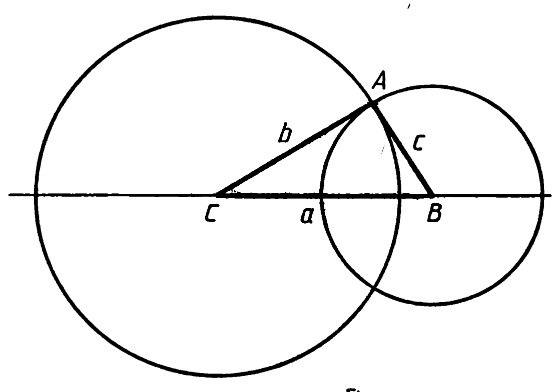


Рис. 58

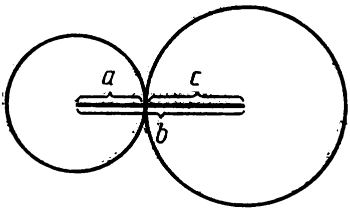


Рис. 59

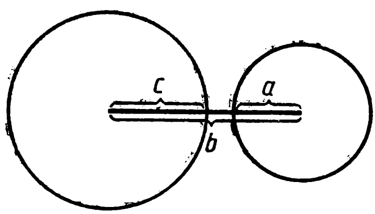


Рис. 60

Построение. С помощью линейки проводим произвольную прямую и отмечаем на ней произвольную точку B (рис. 58, *б*). Раствором циркуля, равным a, описываем окружность с центром B и радиусом a. Пусть C — точка ее пересечения с прямой. Теперь раствором циркуля, равным c, описываем окружность с центром B, а раствором циркуля, равным b, описываем окружность с центром C. Пусть A — точка пересечения этих окружностей. Проведем отрезки AB и AC. Треугольник ABC имеет стороны, равные a, b, c.

Замечание. Для сторон любого треугольника выполняются неравенства $a<b+c$, $c>a-b$. Если отрезки a, b, c, не удовлетворяют этим условиям, то построить треугольник со сторонами a, b, c невозможно.

Если $b=a+c$, то окружности касаются (рис. 59). Если $b>a+c$, то окружности не пересекаются (рис. 60).

3. Построение угла, равного данному.

Задача. Построить угол, равный данному (рис. 61).

Построение. Проведем произвольную окружность с центром в вершине C данного угла (рис. 61, *а*). Пусть M и D — точки пересечения окружности со сторонами угла. На луче C_1A_1 (рис. 61, *б*) радиусом CM проведем окружность с центром в точке C_1. Точку пересечения этой окружности с лучом обозначим M_1. Опишем окружность с центром M_1 и радиусом MD. Точка D_1 пересечения построенных окружностей лежит на стороне искомого угла $B_1C_1A_1$.

4. Построение биссектрисы угла.

Задача. Построить биссектрису данного угла.

Построение. Из вершины A данного нам угла как из центра описываем окружность произвольного радиуса (рис. 62).

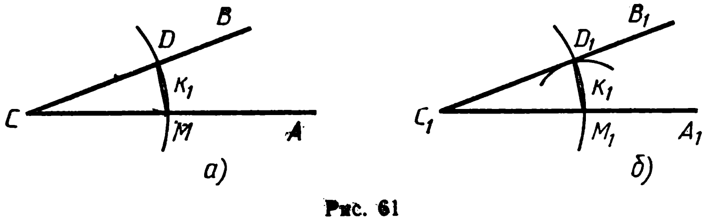


Рис. 61

Из точек ее пересечения со сторонами угла C и B тем же раствором циркуля описываем окружности. D — точка их пересечения, отличная от A. Проводим полупрямую AD, которая делит угол BAC пополам. Это следует из равенства треугольников ABD и ACD, у которых углы DAB и DAC являются соответствующими.

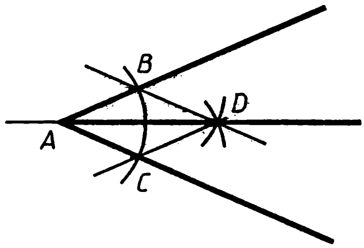


Рис. 62

5. Геометрическое место точек. Метод геометрических мест.

а) Одним из методов решения задач на построение является метод геометрических мест. *Геометрическим местом точек* называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, обладающих определенным свойством. Окружность можно определить как геометрическое место точек, равноудаленных от данной точки.

б) **Геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек, есть прямая, перпендикулярная к отрезку, соединяющему эти точки, и проходящая через его середину** (рис. 63).

в) Сущность метода геометрических мест, используемого при решении задач на построение, состоит в следующем. Например, пусть нам надо найти некоторую точку X, удовлетворяющую двум условиям.

Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть некоторая фигура K_1, а геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, есть некоторая фигура K_2, Искомая точка X принадлежит K_1 и K_2, т. е. является их точкой пересечения.

Рассмотрим пример. Даны три точки A, B, C. Построить точку X, которая одинаково удалена от точек A и B и находится на данном расстоянии от точки C.

Условию данной задачи соответствует рисунок 64. Геометрическое место точек, удовлетворяющих первому условию, есть прямая, перпендикулярная отрезку AB и проходящая через его середину. Геометрическое место точек, удовлетворяющих второму условию, есть окружность данного радиуса с центром в точке C.

Искомая точка X лежит на пересечении этих геометрических мест.

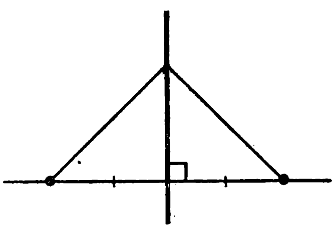


Рис. 63

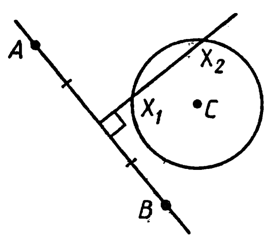


Рис. 64

Контрольные вопросы

1. Как построить треугольник по трем сторонам?
2. Как разделить данный угол пополам?
3. Что представляет собой геометрическое место точек, равноудаленных от двух данных точек?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Постройте треугольник ABC по следующим данным: а) $AB=5$ см, $AC=6$ см, $\angle A=40°$; б) $AB=6$ см, $\angle A=30°$, $\angle B=50°$.
2. Постройте окружность данного радиуса, проходящую через две данные точки.
3. Постройте равнобедренный треугольник по боковой стороне и углу при основании.
4. Постройте треугольник по двум сторонам и высоте, опущенной на третью сторону.
5. Постройте равнобедренный треугольник по основанию и радиусу описанной окружности.
6. Постройте прямоугольный треугольник по катету и сумме другого катета и гипотенузы.

§ 3. УГЛЫ, ВПИСАННЫЕ В ОКРУЖНОСТЬ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Угол, вершина которого лежит на окружности, а стороны пересекают эту окружность, называется *вписанным в окружность* (рис. 65).

2. Угол, вписанный в окружность, стороны которого проходят через две данные точки окружности, равен половине угла между радиусами, проведенными в эти точки, или дополняет половину этого угла до 180°.

3. Различные случаи расположения сторон вписанного угла по отношению к центру окружности изображены на рисунке 66.

4. Угол, вписанный в окружность, равен половине соответствующего центрального угла.

5. Все вписанные в окружность углы, стороны которых проходят через две данные точки окружности, а вершины лежат по одну сторону от прямой, соединяющей эти точки, равны (рис. 67).

6. Вписанные углы, стороны которых проходят через концы диаметра окружности, прямые (рис. 68).

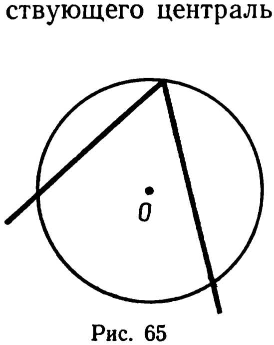


Рис. 65

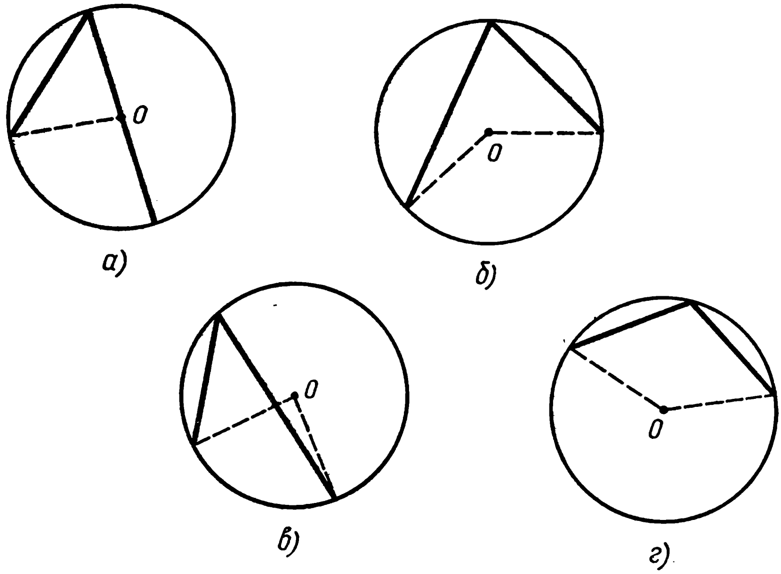


Рис. 66

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Точки A, B, C лежат на окружности. Чему равен угол ABC, если хорда AC равна радиусу окружности?

Решение. *1-й случай.* 1. Если точка B лежит по одну сторону с центром окружности относительно прямой AC (рис. 69), то по свойству вписанного угла $\angle ABC=\frac{1}{2}\angle AOC$.

2. Так как по условию хорда AC равна радиусу окружности, то треугольник AOC равносторонний. Следовательно, $\angle AOC=$ $=60°$, а искомый $\angle ABC=30°$.

2-й случай. Если точки B и O лежат по разные стороны от прямой AC (рис. 70), тогда по свойству вписанного угла $\angle ABC=180°-\frac{1}{2}\angle AOC=150°$.

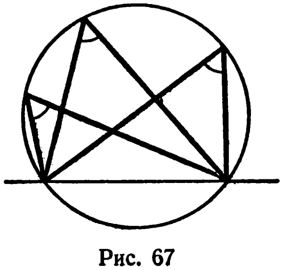


Рис. 67

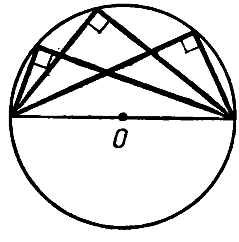


Рис. 68

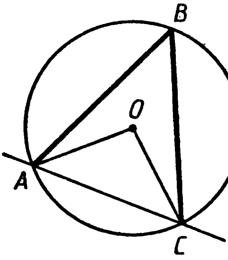


Рис. 69

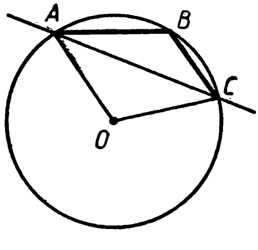


Рис. 70

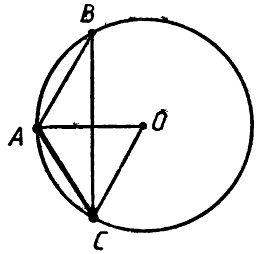


Рис. 71

Задача 2. Точки A, B, C лежат на окружности. Чему равна хорда AC, если угол ABC равен 30°, а диаметр окружности 10 см?

Решение. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 71, где угол $ABC=30°$.

2. Нам известно, что вписанный угол $ABC=\frac{1}{2}\angle AOC$, следовательно, $\angle AOC=60°$.

3. Треугольник AOC равносторонний, следовательно, хорда AC равна радиусу данной окружности. А так как диаметр равен 10 см, то радиус равен 5 см.

Контрольные вопросы

1. Какой угол называется вписанным в окружность?
2. Чему равен вписанный в окружность угол, если он острый? тупой?
3. Чему равен вписанный в окружность угол ABC, если: а) вершина угла ABC и центр окружности O лежат в одной полуплоскости относительно прямой AC; б) вершина угла B и центр окружности O лежат в разных полуплоскостях относительно прямой AC; в) хорда AC является диаметром окружности?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Докажите, что медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, разбивает его на два равнобедренных треугольника.

2. Медиана прямоугольного треугольника, проведенная к гипотенузе, равна 6 м. Найдите гипотенузу. [12 м.]

Б. На окружности отмечены четыре точки A, B, C, D. Чему равен угол ADC, если угол ABC равен α? [Два случая: α или $180°-\alpha$.]

В. Сторона треугольника равна 10 см, а противолежащий ей угол 150°. Найдите радиус описанной окружности. [10 см.]

ГЛАВА IV

§ 1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Четырехугольником* называется фигура, которая состоит из четырех точек и четырех последовательно соединяющих их отрезков. При этом никакие три из данных точек не должны лежать на одной прямой, а соединяющие их отрезки не должны пересекаться. Данные точки называются *вершинами* четырехугольника, а соединяющие их отрезки — *сторонами* четырехугольника.

2. *Вершины* четырехугольника (рис. 72) называются *соседними*, если они являются концами одной из его сторон. *Вершины*, не являющиеся соседними, называются *противолежащими*. Отрезки, соединяющие противолежащие вершины четырехугольника, называются *диагоналями*. На рисунке 72 диагоналями являются отрезки AC и BD.

3. Стороны четырехугольника, исходящие из одной вершины, называются *соседними сторонами*. Стороны, не имеющие общего конца, называются *противоположными сторонами*. На рисунке 72 противоположными сторонами будут AB и CD, BC и AD.

Контрольные вопросы

1. Какая фигура называется четырехугольником?
2. Какие вершины четырехугольника называются соседними, какие — противоположными?
3. Что такое диагонали четырехугольника?
4. Какие стороны четырехугольника называются соседними? Какие называются противолежащими?

§ 2. ПАРАЛЛЕЛОГРАММ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Параллелограмм* — это четырехугольник, у которого противолежащие стороны параллельны, т. е. лежат на параллельных прямых (рис. 73).

2. Если диагонали четырехугольника пересекаются и точкой

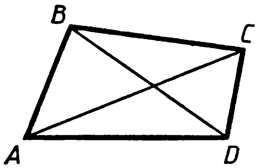


Рис. 72

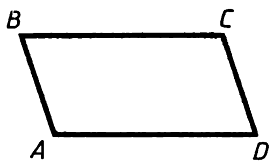


Рис. 73

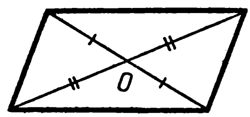


Рис. 74

пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм (рис. 74).

3. Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.

4. У параллелограмма противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм с периметром 10 см. Найдите BD, зная, что периметр треугольника ABD равен 8 см.

Решение. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 75.

2. Обозначим AB через x, а BC через y.

3. По условию периметр параллелограмма равен 10, т. е. $2(x+y)=10$, или $x+y=5$.

4. Периметр треугольника ABD равен 8, так как $AB+AD=$ $=x+y=5$, то $BD=8-5=3$. Таким образом, диагональ $BD=$ $=3$ см.

Задача 2. Найдите углы параллелограмма, зная, что один из них больше другого на 50°.

Решение. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 76.

2. Обозначим градусную меру $\angle A$ через x, а $\angle D$ через $x+50°$.

3. Углы BAD и ADC внутренние односторонние при параллельных прямых AB и DC и секущей AD. Тогда сумма этих названных углов составит 180°, т. е. $x+x+50 =180$, или $x=$ $=65°$.

4. Таким образом, $\angle A=\angle C=65°$, а $\angle B=\angle D=115°$.

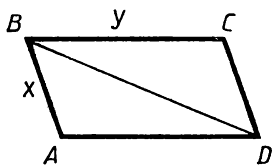


Рис. 75

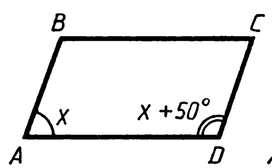


Рис. 76

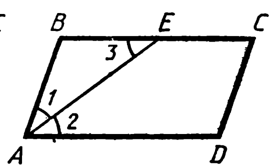


Рис. 77

Задача 3. Стороны параллелограмма равны 4,5 дм и 12 дм. Из вершины острого угла проведена биссектриса. На какие части делит она бо́льшую сторону параллелограмма?

Решение. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 77.

2. AE — биссектриса острого угла параллелограмма. Следовательно, $\angle 1 = \angle 2$.

3. $BC \parallel AD$, AE — секущая, следовательно, $\angle 2 = \angle 3$, т. е. $\angle 1 = \angle 3$. А это означает, что $\triangle ABE$ равнобедренный, следовательно, $AB = BE = 4{,}5$.

4. $EC = BC - BE = 7{,}5$ дм.

Контрольные вопросы

1. Что такое параллелограмм?
2. Может ли один угол параллелограмма быть равным 40°, а другой — 50°?
3. Сформулируйте свойства углов параллелограмма.
4. Сколько можно построить параллелограммов с вершинами в трех данных точках?
5. Как дополнить треугольник до параллелограмма?
6. Как измерить расстояние между большими сторонами параллелограмма?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Угол параллелограмма равен $\frac{2}{5}d$. Найдите остальные углы. [144°, 144°, 36°.]

2. В параллелограмме $ABCD$ проведена биссектриса угла A, которая пересекает сторону BC в точке E. Чему равны отрезки BE и EC, если $AB = 9$ см, $AD = 15$ см? [$BE = 9$ см, $EC = 6$ см.]

3. Найдите все углы параллелограмма, если сумма двух из них равна 80°. [40°, 140°.]

4. Две стороны параллелограмма относятся как 3:4, а его периметр равен 28 см. Определите стороны параллелограмма. [6 м и 8 м.]

5. Параллелограмм делится одной из его диагоналей на два треугольника, периметр каждого равен 6,21 м, а периметр параллелограмма равен 7,12 м. Найдите длину этой диагонали. [2,65 м.]

Б. 1. Периметр параллелограмма равен 2 м, а стороны относятся как 2:3. Найдите стороны параллелограмма. [0,4 м, 0,6 м.]

2. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 5 м. Из точки, взятой на основании этого треугольника, проведены две прямые, параллельные боковым сторонам. Найдите периметр получившегося параллелограмма. [10 м.]

3. Найдите все углы параллелограмма, если разность двух из них равна 70°. [55° и 125°.]

4. Стороны параллелограмма 8 м и 3 м. Биссектрисы двух углов параллелограмма, прилежащих к большей его стороне, делят противолежащую сторону на три части. Найдите длину каждой части. [3 м, 2 м и 3 м.]

5. В параллелограмме биссектриса тупого угла делит одну из сторон на отрезки, равные 5,7 дм и 80 см. Вычислите периметр параллелограмма. [43,4 дм или 38,8 дм.]

6. Периметр параллелограмма равен 299,2 дм. Одна сторона длиннее другой на 20%. Найдите стороны параллелограмма. [68 дм и 81,6 дм.]

В. 1. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит противоположную сторону в отношении 2 : 1, считая от вершины острого угла. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 60 м. [12 м и 18 м.]

2. В параллелограмме острый угол равен 60°. Высота параллелограмма, проведенная из вершины тупого угла, делит сторону параллелограмма пополам. Найдите меньшую диагональ параллелограмма, если его периметр равен 24 см. [6 см.]

3. Постройте параллелограмм: а) по двум сторонам и диагонали; б) по двум сторонам и углу между ними.

4. В параллелограмме угол между высотами, проведенными из вершины острого угла, равен $\frac{16}{11}d$. Определите углы параллелограмма. $\left[\frac{6}{11}d,\ \frac{16}{11}d.\right]$

§ 3. ПРЯМОУГОЛЬНИК. РОМБ. КВАДРАТ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Прямоугольник* — это параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 78).
2. Диагонали прямоугольника равны (рис. 79).
3. *Ромб* — это параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 80).
4. Диагонали ромба пересекаются под прямым углом. Диагонали ромба являются биссектрисами его углов.
5. *Квадрат* — это прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 81).
6. Квадрат является также ромбом, поэтому обладает свойствами прямоугольника и ромба.

Рис. 78

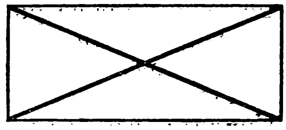


Рис. 79

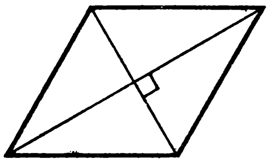


Рис. 80

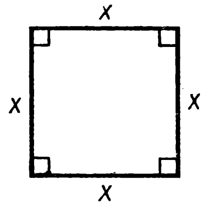


Рис. 81

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Докажите, что если у параллелограмма диагонали перпендикулярны, то он является ромбом.

Доказательство. 1. Пусть $ABCD$ — параллелограмм с перпендикулярными диагоналями, которые пересекаются в точке O (рис. 82).

2. Треугольники AOB и AOD равны по первому признаку равенства треугольников, так как углы при вершине O по условию прямые, сторона OA общая, а $OB=OD$ по свойству диагоналей параллелограмма.

3. Из равенства треугольников AOB и AOD следует и равенство сторон $AB=AD$. А так как у параллелограмма противоположные стороны равны, то $AD=BC$, $AB=CD$. Таким образом, все стороны параллелограмма равны, а значит, он является ромбом.

Задача 2. Биссектриса одного из углов прямоугольника делит сторону прямоугольника пополам. Найдите периметр прямоугольника, если его меньшая сторона равна 10.

Решение. 1. Условию задачи отвечает рисунок 83.

2. $BE=EC$ по условию.

3. Треугольник ABE прямоугольный и равнобедренный. Следовательно, $AB=BE=10$.

4. $BC=2\cdot BE=2\cdot 10=20$.

5. Периметр прямоугольника $ABCD$ состоит из суммы всех его сторон и равен $2(AB+BC)=2(10+20)=60$.

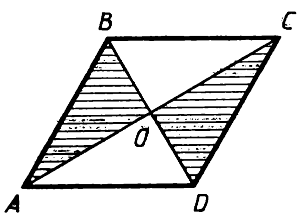


Рис. 82

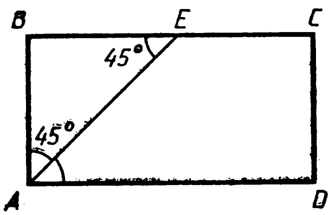


Рис. 83

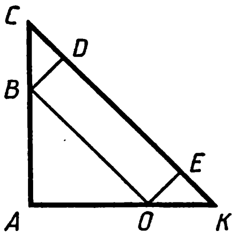


Рис. 84

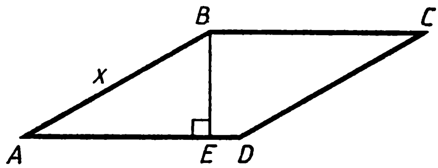


Рис. 85

Задача 3. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан прямоугольник так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а две другие — на катетах. Чему равны стороны прямоугольника, если известно, что они относятся как 5:2, а гипотенуза треугольника равна 45 см?

Решение. 1. Условию задачи отвечает рисунок 84.

2. $\angle C = \angle K = 45°$.

3. Треугольники BCD и OEK равнобедренные и равные. Следовательно, $BD = DC = OE = EK$.

4. Обозначим одну часть через x, тогда гипотенуза CK данного нам условием треугольника ACK, содержащая девять частей, равна $9x$.

5. Составим уравнение и решим его: $9x = 45$, $x = 5$. Таким образом, $BD = 2 \cdot 5 = 10$ см, а $DE = 5 \cdot 5 = 25$ см.

Задача 4. Периметр ромба 8 м, а высота 1 м. Найдите тупой угол ромба.

Решение. 1. Условию задачи отвечает рисунок 85.

2. Пусть сторона ромба равна x, тогда периметр ромба равен $4x$. Найдем сторону ромба: $4x = 8$, т. е. $x = 2$.

3. Опустим из вершины тупого угла ромба высоту BE. По условию $BE = 1$ м.

4. Треугольник ABE прямоугольный, так как BE — высота. В этом треугольнике гипотенуза равна 2 м, а катет BE равен 1 м. Следовательно, $\angle A = 30°$, $\angle EBA = 60°$.

5. Тупой угол ромба ABC равен сумме $\angle ABE$ и $\angle EBC$, т. е. $150°$.

Контрольные вопросы

1. Диагонали какого четырехугольника точкой пересечения делятся пополам?
2. Как называется параллелограмм, в котором: диагонали равны; диагонали взаимно перпендикулярны; диагонали равны и перпендикулярны?
3. Верно ли, что высоты ромба равны?
4. Имеет ли ромб оси симметрии и сколько?

5. Чем отличается квадрат от прямоугольника и ромба?
6. Верно ли, что диагонали ромба пересекаются под прямым углом? диагонали ромба являются биссектрисами его углов?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. **1.** В ромбе одна из диагоналей равна стороне. Найдите углы ромба. [60° и 120°.]

2. Вычислите углы ромба, если высота, проведенная из вершины тупого угла, делит противоположную сторону на равные отрезки. [60° и 120°.]

3. Через вершины квадрата проведены прямые, параллельные его диагоналям. Определите вид четырехугольника, образованного этими прямыми. [Квадрат.]

4. Дан ромб с углом 120° и стороной, равной 3 м. Найдите меньшую диагональ ромба. [3 м.]

Б. **1.** Углы, образованные стороной ромба с его диагоналями, относятся как 4:5. Вычислите углы ромба. [80° и 100°.]

2. Периметр ромба равен 16 см, высота 2 см. Вычислите углы ромба. [30° и 150°.]

3. В прямоугольнике точка пересечения диагоналей отстоит от меньшей стороны на 4 см дальше, чем от большей стороны. Периметр прямоугольника равен 56 см. Найдите стороны прямоугольника. [10 см и 18 см.]

4. В равнобедренный прямоугольный треугольник вписан квадрат так, что две его вершины находятся на гипотенузе, а две другие — на катетах. Найдите сторону квадрата, если известно, что гипотенуза равна 3 м. [1 м.]

5. Из внешней точки проведены к окружности две взаимно перпендикулярные касательные, радиус окружности 10 см. Найдите расстояние от данной точки до точки касания. [10 см.]

В. **1.** В равнобедренный прямоугольный треугольник, катет которого 2 м, вписан квадрат, имеющий с ним общий угол. Найдите периметр квадрата. [4 м.]

2. В прямоугольный треугольник, каждый катет которого равен 6 м, вписан прямоугольник, имеющий с треугольником общий угол. Найдите периметр прямоугольника. [12 м.]

3. Из одной точки окружности проведены две взаимно перпендикулярные хорды, которые удалены от центра на 6 см и 10 см. Найдите их длины. [12 см и 20 см.]

4. В равносторонний треугольник, периметр которого равен 7,2 м, вписан ромб так, что один угол у них общий, а все вершины ромба лежат на сторонах треугольника. Вычислите периметр ромба. [4,8 м.]

§ 4. ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные между собой отрезки, то они и на другой его стороне отсекают тоже равные между собой отрезки (теорема Фалеса).

2. *Средней линией треугольника* называется отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

3. Средняя линия треугольника, соединяющая середины двух сторон, параллельна третьей стороне и равна ее половине.

4. Любые две медианы треугольника пересекаются и точкой пересечения делятся в отношении 2:1, считая от вершин (рис. 86).

5. Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке. Из физики известно, что пересечение медиан треугольника есть его центр тяжести, он всегда лежит внутри треугольника.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Разделите данный отрезок на равные части.

Р е ш е н и е. 1. Пусть AB — данный отрезок (рис. 87), который надо разделить, например, на 4 равные части.

2. Для этого проведем через точку A произвольную полупрямую a и отложим на ней последовательно четыре равных между собой отрезка AC, CD, DE, EK.

3. Соединим точки B и K прямой. Проведем через оставшиеся точки C, D, E прямые, параллельные прямой BK, так, чтобы они пересекли отрезок AB.

4. Согласно теореме Фалеса отрезок AB разделится на 4 равные части.

Задача 2. Докажите, что середины сторон четырехугольника являются вершинами параллелограмма.

Р е ш е н и е. 1. Нам дан четырехугольник $ABCD$, точки E, K, O, H — середины его сторон (рис. 88).

2. Отрезок EK — средняя линия треугольника ABC, поэтому $EK \parallel AC$ и $EK = \frac{1}{2}AC$.

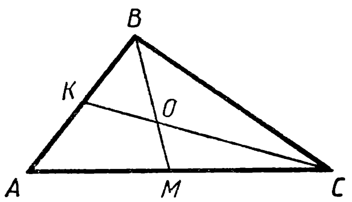


Рис. 86

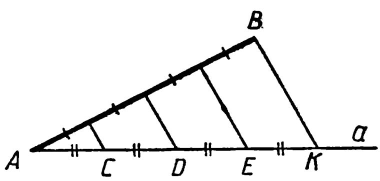


Рис. 87

3. Отрезок OH — средняя линия треугольника ACD, поэтому

$$OH \parallel AC \text{ и } OH = \frac{1}{2} AC.$$

4. Из пунктов 2 и 3 следует, что $EK \parallel OH$ и $EK = OH$, т. е. противолежащие стороны четырехугольника $EKOH$ параллельны и равны.

5. Следовательно, $EKOH$ — параллелограмм.

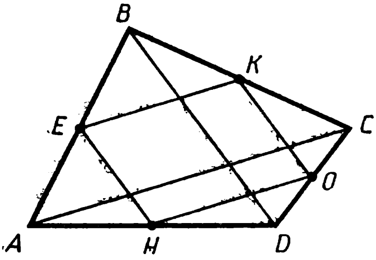


Рис. 88

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Разделите данный отрезок на 3, 5, 6 равных частей.

2. В треугольнике ABC сторона AC равна 24 м. Сторона BC разделена на 4 равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные AB. Найдите длины отрезков, получившихся на стороне AC. [6 м.]

3. Стороны треугольника 8, 10, 12 м. Найдите стороны и периметр треугольника, вершинами которого являются середины сторон данного треугольника. [4 м, 5 м, 6 м, 15 м.]

Б. 1. Периметр треугольника равен 12 м, середины его сторон соединены отрезками. Найдите периметр полученного треугольника. [6 м.]

2. Средняя линия равнобедренного треугольника равна 3 м. Найдите стороны треугольника, если его периметр равен 16 м. [6 м, 5 м, 5 м или 6 м, 6 м, 4 м.]

3. Постройте треугольник, если заданы середины его сторон.

4. Стороны треугольника относятся как 3:4:5, периметр его равен 60 м. Найдите периметр и стороны треугольника, вершины которого находятся в серединах сторон данного треугольника. [30 м, 7,5 м, 10 м, 12,5 м.]

В. 1. В треугольнике ABC $AB = 12$ м. Сторона BC разделена на 4 равные части и через точки деления проведены прямые, параллельные AB. Найдите отрезки этих прямых, заключенные внутри треугольника. [3 м, 6 м, 9 м.]

2. Середины E и K параллельных сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$ соединены прямыми с вершинами D и B. Докажите, что эти прямые делят диагональ AC на три равные части.

3. Стороны параллелограмма равны 6 и 8 м. Каждая диагональ параллелограмма разделена на четыре равные части и точки, делящие диагонали в отношении 1:3 и 3:1, последовательно соединены. Определите вид полученного четырехугольника и вычислите его периметр. [Параллелограмм; 14 м.]

§ 5. ТРАПЕЦИЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Трапецией* называется четырехугольник, у которого только две противолежащие стороны параллельны (рис. 89).

2. Параллельные стороны в трапеции называются *основаниями трапеции*. Две другие стороны называются *боковыми сторонами*.

3. Трапеция, у которой боковые стороны равны, называется *равнобокой* (равнобедренной).

4. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называется *средней линией*.

5. Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме: $EK \parallel BC \parallel AD$; $EK=\frac{BC+AD}{2}$ (рис. 90), где EK — средняя линия.

6. У равнобокой трапеции углы при основании равны.

7. На рисунке 91 изображены некоторые виды *выпуклых* четырехугольников:

а) четырехугольник общего вида — параллельных сторон нет;

б) трапеция — такой четырехугольник, у которого две противоположные стороны параллельны, а две другие не параллельны;

г) прямоугольник — такой параллелограмм, у которого все углы прямые;

д) ромб — такой параллелограмм, у которого все стороны равны;

е) квадрат — такой прямоугольник, у которого все стороны равны, или такой ромб, у которого все углы прямые.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Диагонали трапеции делят углы, прилежащие к большему основанию, пополам. Периметр трапеции равен 36 м, а средняя линия 11,7 м. Найдите стороны трапеции.

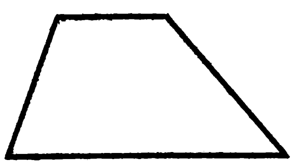


Рис. 89

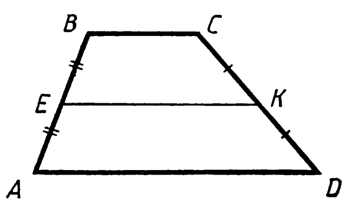


Рис. 90

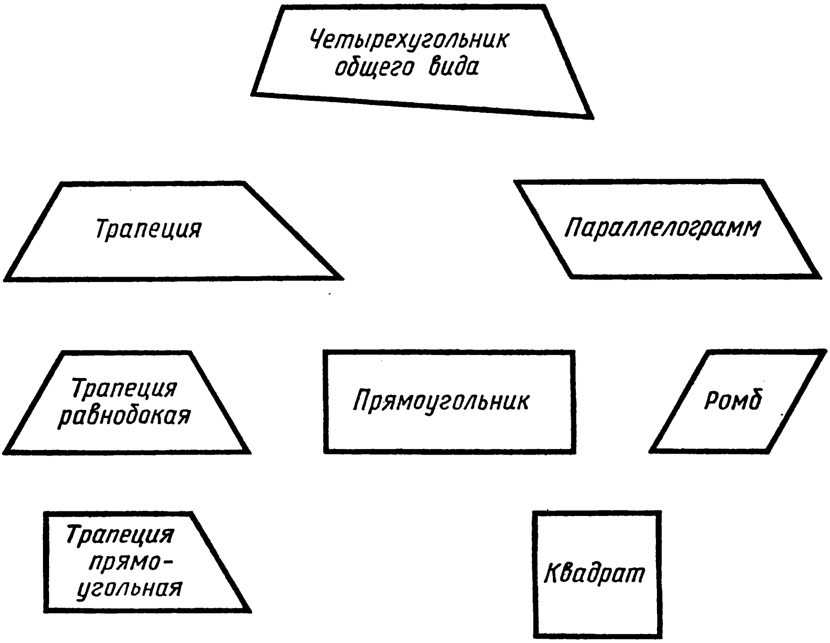


Рис. 91

Решение. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 92.

2. По условию AC — биссектриса $\angle BAD$, следовательно, $\angle CAD = \angle CAB$. DB биссектриса $\angle CDA$, поэтому $\angle ADB = \angle BDC$.

3. Треугольники ABC и BCD равнобедренные, значит, их боковые стороны равны: $AB = BC$ и $BC = CD$. Из последних равенств следует, что $AB = BC = CD$.

4. Обозначим AB через x, а AD через y.

5. Используя данные условия задачи, что $EK = 11{,}7$, а $P = 36$, составим систему уравнений:

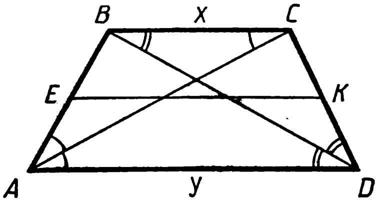


Рис. 92

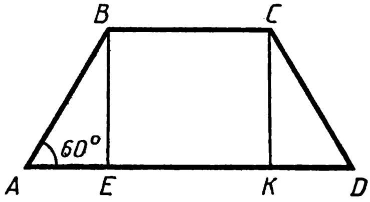


Рис. 93

$$\begin{cases} \frac{x+y}{2}=11{,}7, \\ x+x+x+y=36, \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x+y=23{,}4, \\ 3x+y=36, \end{cases}$$

откуда $x=6{,}3$, а $y=17{,}1$.

6. $AB=BC=CD=6{,}3$ м, $AD=17{,}1$ м.

Задача 2. В равнобокой трапеции большее основание равно 3,7, боковая сторона равна 1,5, а угол между ними равен 60°. Найдите среднюю линию трапеции.

Решение. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 93.

2. Из точек B и C опущены перпендикуляры на AD. Получили два равных прямоугольных треугольника ABE и CKD, у которых углы ABE и KCD равны 30°.

3. $AE=KD=\frac{AB}{2}$, и, следовательно, $EK=AD-2AE$, т. е. $EK=2{,}2$.

4. Так как $EK=BC$, то средняя линия трапеции равна $\frac{2{,}2+3{,}7}{2}=2{,}95$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение трапеции.
2. Как называют стороны трапеции?
3. Какая трапеция называется равнобокой?
4. Какая трапеция называется прямоугольной?
5. Дайте определение средней линии трапеции.
6. Какие свойства средней линии трапеции вы знаете?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. **1.** Докажите, что у равнобокой трапеции углы при основании равны.

2. В равнобокой трапеции большее основание равно 2,7 м, боковая сторона равна 1 м, угол между ними 60°. Найдите меньшее основание и среднюю линию. [1,7 м, 2,2 м.]

3. В равнобокой трапеции высота, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание на отрезки 6 и 30 м. Найдите меньшее основание и среднюю линию трапеции. [24 м и 30 м.]

4. Средняя линия трапеции равна 7 м, а одно из оснований больше другого на 4 м. Найдите основания трапеции. [5 м и 9 м.]

5. Основания трапеции равны 4 и 10 м. Найдите длины отрезков, на которые делит среднюю линию этой трапеции одна из ее диагоналей. [2 м и 5 м.]

Б. **1.** Основания трапеции относятся как 2:3, а средняя линия равна 5 м. Найдите основания трапеции. [4 м, 6 м.]

2. Средняя линия трапеции равна 2,4 м и делится диагональю на два отрезка, разность которых равна 0,6 м. Найдите основания данной трапеции. [1,8 м, 3 м.]

3. В прямоугольной трапеции один из углов равен 135°, средняя линия равна 18 м, а основания относятся как $\frac{1}{6}:\frac{4}{3}$. Найдите меньшую боковую сторону трапеции. [36 м.]

4. В равнобокой трапеции боковая сторона равна средней линии, а периметр 10 м. Найдите боковую сторону. [2,5 м.]

5. Меньшее основание трапеции равно 6,2 см, расстояние между серединами диагоналей равно 0,4 см. Найдите большее основание. [7 см.]

В. 1. Меньшее основание равнобокой трапеции равно боковой стороне, а диагональ перпендикулярна боковой стороне. Определите углы трапеции. [60° и 120°.]

2. Концы диаметра окружности удалены от касательной на 1,6 и 0,6 м. Найдите диаметр. [2,2 м.]

3. Докажите, что отрезок, соединяющий середины диагоналей трапеции, параллелен основаниям и равен полуразности оснований. [У к а з а н и е. Провести через середину боковой стороны прямую, параллельную основаниям.]

ГЛАВА V

§ 1. КОСИНУС УГЛА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. В прямоугольном треугольнике ABC с острым углом α (рис. 94) *AC — прилежащий катет*, а *BC — противолежащий катет, AB — гипотенуза.*

2. *Косинусом острого угла* прямоугольного треугольника называется отношение прилежащего катета к гипотенузе. Косинус угла α обозначается так: $\cos\alpha$.

3. Из определения следует: $\cos\alpha=\frac{AC}{AB}$ (рис. 94).

4. Косинус угла зависит только от величины угла.

ЗАДАЧА С РЕШЕНИЕМ

Задача. Постройте угол, косинус которого равен $\frac{2}{5}$.

Решение. 1. Из арифметики нам известно, что знаменатель дроби показывает, на сколько равных долей разделили отрезок, а числитель показывает, сколько таких долей взяли.

2. Строим прямоугольный треугольник ABC (рис. 95) с катетом AC, равным 2 единицам длины и гипотенузой AB, равной 5 единицам. В результате у этого треугольника угол α, противолежащий второму катету BC, будет искомым.

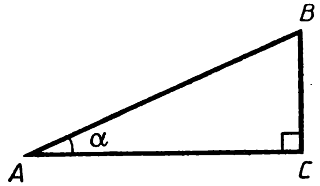


Рис. 94

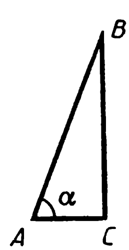


Рис. 95

Контрольные вопросы

1. Дайте определение косинуса острого угла прямоугольного треугольника.
2. Верно ли, что косинус угла зависит только от величины угла?
3. Как обозначается косинус угла?
4. Верно ли, что $\cos\alpha<1$, если α — острый угол?
5. Как выражается катет прямоугольного треугольника через гипотенузу и острый угол?
6. При каком значении острого угла α в прямоугольном треугольнике выполняется равенство $\cos\alpha=\frac{1}{2}$?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Постройте острый угол α, если: а) $\cos\alpha=\frac{2}{3}$; б) $\cos\alpha=\frac{1}{4}$; в) $\cos\alpha=1{,}5$.
2. Установите, который из углов α или β больше и почему, если каждый из них острый и известно, что: а) $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ и $\cos\beta=\frac{2}{5}$ $[\alpha<\beta]$; б) $\cos\alpha=\frac{2}{3}$ и $\cos\beta=\frac{3}{7}$ $[\alpha<\beta]$; в) $\cos\alpha=\frac{3}{5}$ и $\cos\beta=\frac{2}{3}$ $[\alpha>\beta]$.

§ 2. ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов (теорема Пифагора).

2. На рисунке 95 имеет место равенство $AB^2=AC^2+BC^2$.

3. В прямоугольном треугольнике любой из катетов меньше гипотенузы. А отсюда следует, что $\cos\alpha<1$ для любого острого угла α.

4. Пусть BA — перпендикуляр, опущенный из точки B на прямую a (рис. 96), и C — любая точка прямой a, отличная от A. В этом случае отрезок BC называется *наклонной*, проведенной из точки B к прямой a. Точка C называется *основанием* наклонной, а отрезок AC называется *проекцией* наклонной.

5. Если к прямой из одной точки проведены перпендикуляр и наклонные, то: а) каждая наклонная больше перпендикуляра; б) равные наклонные имеют равные проекции; в) из двух наклонных больше та, у которой проекция больше.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Стороны треугольника a, b, c. Найдите высоту треугольника, опущенную на сторону c.

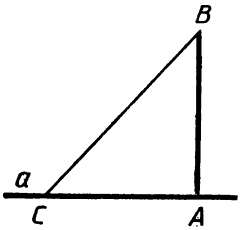


Рис. 96

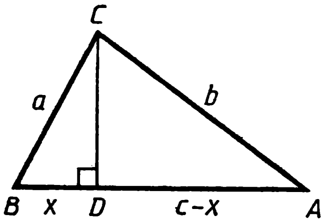


Рис. 97

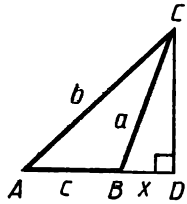


Рис. 98

Решение. *1-й случай.* Данный треугольник ABC остроугольный (рис. 97).

1. Обозначим проекцию BD стороны a на прямую, содержащую сторону c, через x (см. рисунок). Тогда проекция DA стороны b на эту же прямую равна $c-x$.

2. По теореме Пифагора из прямоугольных треугольников BDC и CDA найдем высоту CD:

а) $CD^2=BC^2-BD^2$ (из $\triangle BDC$); (1)

б) $CD^2=CA^2-AD^2$ (из $\triangle CDA$). (2)

Так как в равенствах (1) и (2) левые части равны, то равны и правые, т. е.

$$BC^2-BD^2=CA^2-AD^2. \qquad (3)$$

3. Из равенства (3) получаем:

$$a^2-x^2=b^2-(c-x)^2, \text{ или } x=\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}. \qquad (4)$$

4. Вернемся к равенству (1), сделаем подстановку значения x из равенства (4), найдем высоту CD:

$$CD=\sqrt{a^2-\frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4c^2}}. \qquad (5)$$

2-й случай. Данный треугольник ABC тупоугольный (рис. 98).

1. Наклонная a имеет проекцию $BD=x$, наклонная b имеет проекцию $AD=c+x$.

2. По теореме Пифагора из прямоугольных треугольников ACD и BCD найдем высоту CD:

а) $CD^2=AC^2-AD^2$ (из $\triangle ACD$); (6)

б) $CD^2=BC^2-BD^2$ (из $\triangle BCD$). (7)

Так как в равенствах (6) и (7) левые части равны, то равны и правые, т. е.

$$AC^2-AD^2=BC^2-BD^2. \qquad (8)$$

Сделаем подстановку данных из условия задачи в равенство (8) и упростим:

$$b^2-(c+x)^2=a^2-x^2, \text{ или } b^2-c^2-2cx-x^2=a^2-x^2,$$

откуда

$$x=\frac{b^2-c^2-a^2}{2c},$$

или $x=-\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}$. (9)

3. Вернемся к равенству (7), сделаем подстановку значения x из равенства (9) и найдем высоту CD:

$$CD=\sqrt{a^2-\left(-\frac{a^2+c^2-b^2}{2c}\right)^2}=$$

$$=\sqrt{a^2-\frac{(a^2+c^2-b^2)^2}{4c^2}}. \quad (10)$$

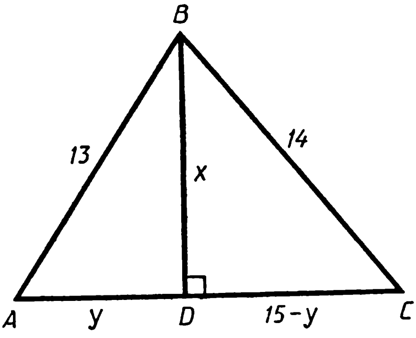


Рис. 99

4. Равенства (5) и (10) имеют одинаковые подкоренные выражения, следовательно, в обоих случаях ответ получается одинаковый.

Задача 2. Найдите высоту треугольника, стороны которого 13, 14 и 15 м.

Решение. 1. Пусть данным задачи отвечает рисунок 99.

2. Из прямоугольных треугольников ABD и BDC составим равенства:

$$x^2=13^2-y^2 \text{ (из } \triangle ABD\text{)}; \quad (1)$$

$$x^2=14^2-(15-y)^2 \text{ (из } \triangle BDC\text{)}. \quad (2)$$

Левые части равенств (1) и (2) равны, значит, равны и правые, т. е.

$$13^2-y^2=14^2-(15-y)^2. \quad (3)$$

3. Из равенства (3) найдем y:

$$169-y^2=196-225+30y-y^2;$$

откуда $30y=198$, т. е. $y=6{,}6$.

4. Вернемся к равенству (1), найдем x:

$$x^2=13^2-6{,}6^2=169-43{,}56=125{,}44,$$

откуда $x=\sqrt{125{,}44}=11{,}2$ м.

Задача 3. Найдите радиус окружности, описанной около равнобедренного треугольника с основанием a и боковой стороны k.

Решение. Решение данной задачи сводится к рассмотрению двух случаев.

1-й случай. Центр O окружности лежит на высоте CD (рис. 100).

1. Из условия задачи $AC=k$ и $AD=\frac{a}{2}$.

2. Находим высоту CD, опущенную на основание AB. Треугольник ACD прямоугольный, тогда по теореме Пифагора

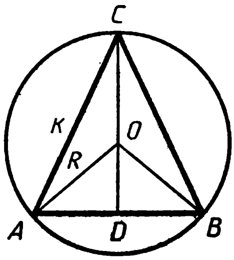


Рис. 100

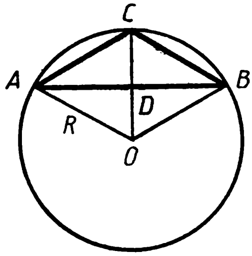


Рис. 101

$$CD=\sqrt{AC^2-AD^2}=\sqrt{k^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}. \qquad (1)$$

3. Треугольник AOD прямоугольный. По теореме Пифагора

$$AO^2=OD^2+AD^2. \qquad (2)$$

Здесь $AO=R$, $AD=\frac{a}{2}$, $OD=CD-OC$, но CD нам уже известна из равенства (1).

4. Решим уравнение (2):

а) Сделаем соответетствующую подстановку:

$$R^2=\left(\sqrt{k^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}-R\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2. \qquad (3)$$

$$R^2=k^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2-2R\sqrt{k^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}+R^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

или

$$k^2-2R\sqrt{k^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=0. \qquad (4)$$

б) Из равенства $2R\sqrt{k^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=k^2$ находим

$$R=\frac{k^2}{2\sqrt{k^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}. \qquad (5)$$

2-й случай. Центр O окружности лежит на продолжении высоты (рис. 101).

1. Из рисунка видно, что треугольник AOD прямоугольный, а $OD=R-CD$. По теореме Пифагора имеем $AO^2=OD^2+AD^2$, или

$$R^2=\left(R-\sqrt{k^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2. \qquad (6)$$

2. Решим уравнение (6):

$$R^2=R^2-2R\sqrt{k^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}+k^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2, \qquad (7)$$

$$-2R\sqrt{k^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}+k^2=0. \qquad (8)$$

Найдем R:

$$R=\frac{k^2}{2\sqrt{k^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}. \qquad (9)$$

3. Искомый радиус нами определен и для второго случая. Он тот же, что и для первого случая.

Задача 4. Найдите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием a и боковой стороной k.

Решение. 1. Пусть радиус окружности, вписанной в треугольник ABC, равен r (рис. 102).

2. Соединим центр O вписанной окружности с точками касания D, M, E, тогда $OD\perp AB$, $OM\perp BC$, $OE\perp AC$, где $OD=OE=$ $=OM=r$.

3. Искомый радиус окружности явно входит в прямоугольный треугольник OMB. Но ни одна из сторон этого треугольника нам неизвестна.

4. Ключом для решения данной задачи является теорема: «Если из какой-либо точки проведены две касательные к окружности, то отрезки касательных равны, а центр окружности лежит на биссектрисе угла, образованного этими касательными». Следовательно, $CE=CM=\frac{a}{2}$, $BM=k-\frac{a}{2}$ и $OB=BE-r$. Из треугольника BEC найдем высоту BE (по теореме Пифагора): $BE=\sqrt{k^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}$. Следовательно, $OB=\sqrt{k^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}-r$.

5. Треугольник OMB прямоугольный с прямым углом OMB, следовательно, OB — гипотенуза. По теореме Пифагора

$$OB^2=OM^2+BM^2. \qquad (1)$$

Сделав подстановку в равенство (1), получим:

$$\left(\sqrt{k^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}-r\right)^2=r^2+\left(k-\frac{a}{2}\right)^2. \qquad (2)$$

Упростив равенство (2), получим:

$$k^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2-2r\sqrt{k^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}+r^2=$$

$$=r^2+k^2-2k\cdot\frac{a}{2}+\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

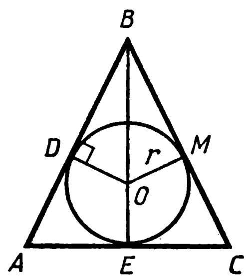


Рис. 102

$$-2r\sqrt{k^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=2\left(\frac{a}{2}\right)^2-ak, \text{ или}$$

$$2r\sqrt{k^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}=ak-\frac{a^2}{2}. \qquad (3)$$

Найдем r из уравнения (3):

$$r=\frac{2ak-a^2}{4\sqrt{k^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}}=\frac{a}{2}\sqrt{\frac{2k-a}{2k+a}}.$$

Контрольные вопросы

1. Может ли проекция отрезка быть равной самому отрезку? Может ли она быть больше отрезка?
2. При каком условии проекция отрезка вдвое меньше самого отрезка?
3. В каком треугольнике одна из его сторон является проекцией другой стороны?
4. В каком треугольнике имеет место равенство $AB^2=AC^2+$ $+BC^2$, если AB, AC и BC его стороны?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Стороны прямоугольника равны 60 и 91 м. Чему равна его диагональ? [109 м.]

2. Сторона квадрата равна a. Чему равна его диагональ? [$a\sqrt{2}$.]

3. Стороны прямоугольника равны a и k. Найдите радиус окружности, описанной около этого прямоугольника. [$0{,}5\sqrt{a^2+k^2}$.]

4. Катеты прямоугольного треугольника равны 8 дм и 18 см. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника. [41 см.]

5. В равнобедренном треугольнике боковая сторона равна 17 м, а основание 16 м. Найдите высоту. [15 м.]

6. В равностороннем треугольнике найдите высоту по данной стороне a. $\left[\frac{a\sqrt{3}}{2}.\right]$

7. В прямоугольном треугольнике один из углов равен 30°, а больший катет равен 6 м. Найдите две другие стороны этого треугольника. [$2\sqrt{3}$ м и $4\sqrt{3}$ м.]

8. Диагонали ромба равны 24 и 70 м. Найдите его сторону. [37 м.]

9. В равнобедренной трапеции основания равны 10 и 24 м, боковая сторона 25 м. Найдите высоту трапеции. [24 м.]

10. К окружности радиуса 36 м проведена касательная из точки, удаленной от центра на 85 м. Найдите отрезок касательной от данной точки до точки касания. [77 м.]

11. Найдите острые углы прямоугольного треугольника, зная, что они относятся как 1:2. [30° и 60°.]

12. Вычислите периметр прямоугольного треугольника, если его катеты равны 5 и 12 м. [30 м.]

13. Вычислите периметр прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 10 м, а один угол равен 30°. [$5(3+\sqrt{3})$ м.]

14. Вычислите периметр равнобедренного прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 20 м. [$20(1+\sqrt{2})$ м.]

Б. 1. Требуется выточить квадратную головку со стороной 32 мм. Чему должен быть равен диаметр цилиндрической заготовки? [Примерно 45 мм.]

2. Найдите сторону квадрата, если она меньше диагонали на 2 м. [$2(\sqrt{2}+1)$ м.]

3. Диаметр бревна 12 см. Можно ли из этого бревна вытесать квадратный брус со стороной 10 см? [Нет.]

4. В круг вписан прямоугольник, стороны которого относятся как 8:15. Найдите эти стороны, если радиус круга равен 34 м. [32 м и 60 м.]

5. Катеты прямоугольного треугольника равны 16 и 12 м. Найдите медиану, проведенную к гипотенузе. [10 м.]

6. Найдите стороны равнобедренного треугольника, если его высота равна 35 м, а основание относится к боковой стороне как 48:25. [125 м, 125 м и 240 м.]

7. В равностороннем треугольнике определите сторону по данной высоте h. $\left[\frac{2\sqrt{3}\,h}{3}.\right]$

8. Из общей точки проведены к окружности две касательные. Радиус окружности равен 11 м, а сумма отрезков касательных равна 120 м. Найдите расстояние от центра до общей точки касательных. [61 м.]

9. В равнобедренном треугольнике основание равно 30 м, а высота 20 м. Найдите высоту, опущенную на боковую сторону. [24 м.]

10. В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 3 м, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 4 м. Найдите стороны этого треугольника. [$2{,}4\sqrt{5}$ м и $1{,}8\sqrt{5}$ м.]

В. **1.** Круг радиуса c окружен четырьмя равными кругами, касающимися данного и попарно друг друга. Вычислите радиус одного из этих кругов. $[c(1+\sqrt{2}).]$

2. В прямоугольном треугольнике дан катет a и радиус r вписанной в него окружности. Найдите гипотенузу и второй катет. $\left[\frac{a^2-2r(a-r)}{a^2-2r} \text{ и } \frac{2r(a-r)}{a-2r}.\right]$

3. В равносторонний треугольник вписаны три равных круга так, что каждый касается двух сторон треугольника и двух других кругов. Найдите радиус каждого из этих кругов, если сторона треугольника равна a. $[0{,}25a(\sqrt{3}-1).]$

4. К двум окружностям радиусов R и r, находящихся в положении внешнего касания, проведены их обшие касательные — внутренняя и две внешние. Определите длину отрезка внутренней касательной, заключенного между внешними касательными. $[2\sqrt{Rr}.]$

5. Центр круга, вписанного в прямоугольную трапецию, отстоит от концов боковой стороны на 2 м и на 4 м. Найдите радиус круга и бо́льшую боковую сторону трапеции. $\left[\frac{4\sqrt{5}}{5} \text{ м и } 2\sqrt{5} \text{ м.}\right]$

6. Дан угол 60° с вершиной в точке O. В плоскости этого угла взята точка A, лежащая внутри угла и отстоящая от его сторон на расстоянии 1 и 2 м. Найдите расстояние OA. $\left[\frac{2\sqrt{21}}{3} \text{ м.}\right]$

7. Две окружности с радиусами 3 и 1 м касаются извне в точке A. К окружностям проведена общая касательная. Найдите отрезок касательной, заключенный между точками касания. $[2\sqrt{3}$ м.$]$

8. Окружность касается двух смежных сторон квадрата и делит каждую из двух других его сторон на отрезки, равные 2 и 23 м. Найдите радиус окружности. [17 м.]

9. В пересечение двух равных кругов вписан ромб с диагоналями 12 и 6 см. Найдите радиус каждого круга. [7,5 см.]

10. К окружности радиуса R проведены 4 касательные, образующие ромб, бо́льшая диагональ которого равна $4R$. Найдите углы, вторую диагональ и сторону ромба. $\left[60° \text{ и } 120°, \frac{4\sqrt{3}R}{3} \text{ и } \frac{4\sqrt{3}R}{3}.\right]$

11. Окружность радиусом 13 см касается двух смежных сторон квадрата со стороной 18 см. На какие два отрезка делит окружность каждую из двух других сторон квадрата? [1 см и 17 см.]

§ 3. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Пусть ABC — прямоугольный треугольник с прямым углом C и острым углом при вершине A, равным α (рис. 103).

1. *Синусом угла* α (обозначается $\sin\alpha$) называется отношение противолежащего катета BC к гипотенузе AB:

$$\sin\alpha=\frac{BC}{AB}, \text{ или } AB\cdot\sin\alpha=BC.$$

2. *Тангенсом угла* α (обозначается $\operatorname{tg}\alpha$) называется отношение противолежащего катета BC к прилежащему катету AC:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BC}{AC}, \text{ или } AC\cdot\operatorname{tg}\alpha=BC.$$

3. *Котангенсом угла* α (обозначается $\operatorname{ctg}\alpha$) называется отношение прилежащего катета AC к противолежащему катету BC:

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{AC}{BC}, \text{ или } BC\cdot\operatorname{ctg}\alpha=AC.$$

4. Синус, косинус, тангенс и котангенс угла зависят только от величины угла.

5. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

6. Используя тригонометрические функции и зная одну из сторон прямоугольного треугольника и острый угол, можно найти две другие стороны, а также острые углы.

7. Из вершины прямого угла прямоугольного треугольника опущен перпендикуляр на гипотенузу. Обозначим элементы прямоугольного треугольника так (рис. 104): катеты b и c, гипотенуза a, проекции катетов на гипотенузу c' и b', а также высота h. Они связаны следующими четырьмя основными равенствами:

$$b'+c'=a, \qquad (1)$$

$$c^2=c'a, \qquad (2)$$

$$b^2=b'a, \qquad (3)$$

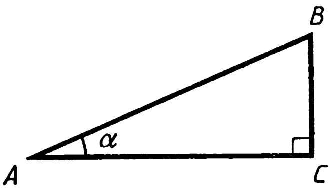


Рис. 103

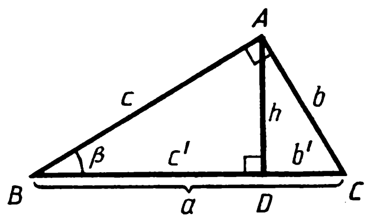


Рис. 104

$$h^2 = c'b'. \qquad (4)$$

Соотношения (2), (3) и (4) можно записать соответственно так:

$$c = \sqrt{c'a}, \qquad (5)$$
$$b = \sqrt{b'a}, \qquad (6)$$
$$h = \sqrt{c'b'}. \qquad (7)$$

Соотношения (5), (6) можно сформулировать следующим образом: катет прямоугольного треугольника есть среднее пропорциональное между гипотенузой и его проекцией на гипотенузу (рис. 104).

Соотношение (7) сформулируется так: высота прямоугольного треугольника, опущенная из вершины прямого угла, есть среднее пропорциональное между проекциями катетов на гипотенузу (рис. 104).

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. В прямоугольном треугольнике ABC даны гипотенуза a и острый угол β. Найдите катеты, их проекции на гипотенузу и высоту, опущенную на гипотенузу.

Решение. 1. Для решения данной задачи используем рисунок 104, где $\angle CBA = \beta$.

2. По определению $\cos \beta = \frac{c}{a}$, откуда $c = a \cos \beta$.

3. По определению $\sin \beta = \frac{b}{a}$, откуда $b = a \sin \beta$.

4. Из прямоугольного треугольника ABD найдем:

а) $\cos \beta = \frac{c'}{c}$, т. е. $c' = c \cos \beta$;

б) $\sin \beta = \frac{h}{c}$, т. е. $h = c \sin \beta$.

5. Из равенства $c' + b' = a$ найдем $b' = a - c'$, или $b' = a - c \cos \beta$.

6. В результате получили $c = a \cos \beta$, $b = a \sin \beta$, $c' = c \cos \beta$, $b' = a - c \cos \beta$, $h = c \sin \beta$.

Задача 2. В прямоугольном треугольнике ABC проекции b' и c' катетов b и c на гипотенузу равны соответственно $\frac{3}{2}$ и $\frac{8}{3}$. Найдите катеты, гипотенузу и высоту треугольника.

Решение. 1. Для решения и этой задачи используем рисунок 104.

2. $h^2 = c'b'$, $h = \sqrt{b'c'} = \sqrt{\frac{3}{2} \cdot \frac{8}{3}} = 2$.

3. $c' + b' = a$, $a = \frac{3}{2} + \frac{8}{3} = \frac{9+16}{6} = \frac{25}{6} = 4\frac{1}{6}$.

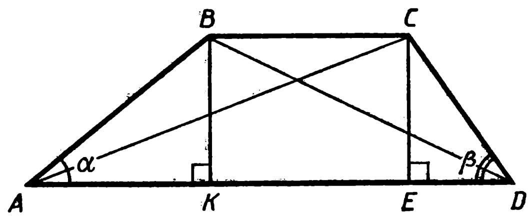


Рис. 105

4. $c^2=ac'$, $c=\sqrt{ac'}$, $c=\sqrt{\frac{25}{6}\cdot\frac{8}{3}}=\frac{10}{3}=3\frac{1}{3}$.

5. $b^2=ab'$, $b=\sqrt{ab'}$, $b=\sqrt{\frac{25}{6}\cdot\frac{3}{2}}=\frac{5}{2}=2{,}5$.

Задача 3. Дана трапеция с острыми углами при основании α и β. Меньшее ее основание равно 4 м, а высота равна 3 м. Найдите боковые стороны, большее основание и диагонали трапеции.

Решение. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 105.

2. Из прямоугольного треугольника ABK имеем:

а) $\sin\alpha=\frac{3}{AB}$, т. е. $AB=\frac{3}{\sin\alpha}$;

б) $\operatorname{tg}\alpha=\frac{3}{AK}$, т. е. $AK=\frac{3}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{3\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

3. Из прямоугольного треугольника CED имеем:

а) $\sin\beta=\frac{3}{CD}$, т. е. $CD=\frac{3}{\sin\beta}$;

б) $\operatorname{tg}\beta=\frac{3}{ED}$, т. е. $ED=\frac{3}{\operatorname{tg}\beta}=\frac{3\cos\beta}{\sin\beta}$.

4. $AD=AK+KE+ED=\frac{3\cos\alpha}{\sin\alpha}+4+\frac{3\cos\beta}{\sin\beta}=$

$=\frac{3\cos\alpha\sin\beta+4\sin\alpha\sin\beta+3\sin\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta}$.

5. Из прямоугольного треугольника KBD найдем гипотенузу, которая является в трапеции диагональю:

$$BD^2=BK^2+KD^2 \quad \text{или} \quad BD^2=9+(4+ED)^2=9+$$

$$+\left(4+\frac{3\cos\beta}{\sin\beta}\right)^2=9+16+24\frac{\cos\beta}{\sin\beta}+\frac{9\cos^2\beta}{\sin^2\beta}=25+24\operatorname{ctg}\beta+9\operatorname{ctg}^2\beta;$$

$$BD=\sqrt{25+24\operatorname{ctg}\beta+9\operatorname{ctg}^2\beta}.$$

6. Из прямоугольного треугольника ACE найдем гипотенузу, которая является в трапеции диагональю.

$$AC^2=AE^2+CE^2 \text{ или } AC^2=9+(AK+4)^2,$$

$$AC=\sqrt{9+(4+3\operatorname{ctg}\alpha)}.$$

Контрольные вопросы

1. Дайте определение синуса и тангенса острого угла.
2. Как выражается катет прямоугольного треугольника через острый угол и другой катет?
3. В прямоугольном треугольнике ABC угол A больше угла B. Какой из катетов больше: AC или BC?
4. Что определяет выражение: $x=\sqrt{ab}$?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. Используя обозначения на рис. 104, заполните таблицу:

Номер задачи	a	b	c	b'	c'	h
1		20	15			
2				18	2	
3	3			2		

[1) $a=25$, $b'=16$, $c'=9$, $h=12$; 2) $a=20$, $b=6\sqrt{10}$, $c=2\sqrt{10}$, $h=6$; 3) $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{3}$, $c'=1$, $h=\sqrt{2}$.]

Б. 1. Катеты треугольника относятся как 5:6, гипотенуза равна 122 см. Найдите отрезки гипотенузы, на которые она делится основанием высоты. [50 см и 72 см.]

2. Катеты треугольника относятся как 3:2, а высота делит гипотенузу на отрезки, из которых один на 2 м больше другого. Найдите гипотенузу. [5,2 м.]

3. Катеты треугольника относятся как 3:7, а высота, проведенная на гипотенузу, равна 42 см. Найдите отрезки гипотенузы. [18 см и 98 см.]

В. 1. Может ли синус угла быть равным $\frac{3}{4}$ см? [Нет, так как синус есть отношение — число отвлеченное, а не именованное.]

2. Может ли синус угла быть равным $a+\frac{1}{a}$? $\left[\text{Нет, так как } a+\frac{1}{a}>1 \text{ при любом } a\neq 0.\right]$

3. Даны отрезки a и b. Как построить отрезки:

а) $\sqrt{a^2+b^2}$ [формула $x=\sqrt{a^2+b^2}$ выражает гипотенузу прямоугольного треугольника, у которого катеты a и b];

б) $\sqrt{a^2-b^2}$ [формула $x=\sqrt{a^2-b^2}$ выражает катет прямоугольного треугольника, у которого гипотенуза равна a, а другой катет b]?

§ 4. ОСНОВНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ТОЖДЕСТВА. ЗНАЧЕНИЯ СИНУСА, КОСИНУСА И ТАНГЕНСА НЕКОТОРЫХ УГЛОВ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Основные тригонометрические тождества:*

$$\sin^2 x+\cos^2 x=1;\ 1+\operatorname{tg}^2 x=\frac{1}{\cos^2 x};$$
$$1+\operatorname{ctg}^2 x=\frac{1}{\sin^2 x}.$$

2. Для любого острого угла x имеет место равенство:

$$\sin(90°-x)=\cos x;\ \cos(90°-x)=\sin x;$$
$$\operatorname{tg}(90°-x)=\operatorname{ctg} x;\ \operatorname{ctg}(90°-x)=\operatorname{tg} x.$$

3. Значения синуса, косинуса, тангенса и котангенса некоторых углов.

Если $x=30°$, то

$$\sin 30°=\frac{1}{2};\ \cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2};\quad \operatorname{tg} 30°=\frac{1}{\sqrt{3}};\ \operatorname{ctg} 30°=\sqrt{3}.$$

Если $x=45°$, то

$$\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2};\ \cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \operatorname{tg} 45°=\operatorname{ctg} 45°=1.$$

Если $x=60°$, то

$$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \cos 60°=\frac{1}{2};\quad \operatorname{tg} 60°=\sqrt{3};\ \operatorname{ctg} 60°=\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. В треугольнике больший угол при основании 45°, а высота делит основание на части, равные 20 и 21. Найдите периметр треугольника.

Решение. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 106.

2. Рассмотрим треугольник ABD. Он прямоугольный и равнобедренный, $AD=BD$.

Найдем AB — гипотенузу треугольника ABD:

$$\sin 45°=\frac{BD}{AB}=\frac{20}{AB},$$

откуда $AB=\frac{20}{\sin 45°}=\frac{20\cdot 2}{\sqrt{2}}=20\sqrt{2}$.

3. Рассмотрим треугольник BCD. Он прямоугольный, и известно, что $BD=20$, $DC=21$. Найдем гипотенузу $BC=\sqrt{BD^2+DC^2}$, откуда $BC=\sqrt{400+441}=29$.

4. Периметр треугольника ABC равен сумме трех сторон, найдем его: $P=20\sqrt{2}+29+41=70+20\sqrt{2}$.

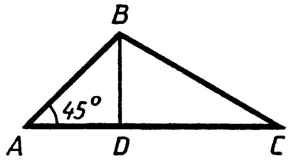


Рис. 106

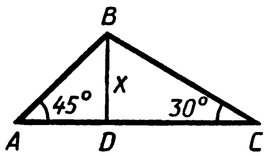


Рис. 107

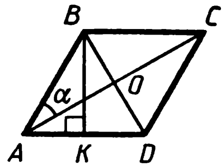


Рис. 108

Задача 2. У треугольника одна из сторон равна 1, а прилежащие к ней углы равны 30° и 45°. Найдите периметр данного треугольника.

Решение. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 107.

2. Проведем высоту BD. Обозначим AD через x, а так как треугольник ABD прямоугольный и равнобедренный, то $AD = BD = x$.

3. Из прямоугольного треугольника BDC с углом 30° найдем DC:

$$\operatorname{tg} 30° = \frac{BD}{DC}, \text{ откуда } DC = \frac{BD}{\operatorname{tg} 30°} = \frac{x}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = x\sqrt{3}.$$

4. По условию $AC = 1$, но $AC = AD + DC$, сделаем подстановку и найдем x:

$$1 = x + x\sqrt{3} = x(1+\sqrt{3}) \text{ откуда } x = \frac{1}{1+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

5. Найдем AB из треугольника ABD: $\cos 45° = \frac{AD}{AB}$, откуда $AB = \frac{AD}{\cos 45°} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2}$.

6. Из прямоугольного треугольника BDC с углом 30° найдем BC:

$$BC = 2BD = 2x = \frac{2(\sqrt{3}-1)}{2} = \sqrt{3}-1.$$

7. Найдем периметр треугольника ABC:

$$P = AB + BC + AC,\ P = \frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{2} + \sqrt{3} - 1 + 1 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2\sqrt{3}}{2}.$$

Задача 3. Диагонали ромба равны a и $a\sqrt{3}$. Найдите углы ромба, его периметр и высоту.

Решение. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 108.

2. $OB = OD = \frac{a}{2}$; $AO = OC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$; пусть $\angle BAO = \angle OAD = \alpha$; $\angle BOA$ прямой.

3. Рассмотрим треугольник BOA. Он прямоугольный с острым углом α. Найдем градусную меру угла α:

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{BO}{AO} \text{ или } \operatorname{tg}\alpha=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{3}}, \text{ следовательно,}$$

$\alpha=30°$, а $\angle BAD=60°$. Тогда $\angle ABC=180°-60°=120°$

4. Из прямоугольного треугольника ABO найдем гипотенузу, она же является и стороной ромба:

$$\sin\alpha=\frac{BO}{AB} \text{ или } AB=\frac{BO}{\sin 30°}=\frac{\frac{a}{2}}{\frac{1}{2}}=a.$$

Таким образом, периметр ромба равен $4a$.

5. Из вершины B треугольника ABD опустим высоту BK. Найдем ее:

$$\sin 60°=\frac{BK}{AB}, \text{ откуда } BK=a\sin 60°=a\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

6. Итак, углы ромба $\angle A=\angle C=60°$ и $\angle B=\angle D=120°$. Высота ромба $BK=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, а периметр равен $4a$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. В прямоугольном треугольнике даны гипотенуза a и угол 60°. Найдите периметр данного треугольника. [$0{,}5a(3+\sqrt{3})$.]

2. Диагональ прямоугольника в два раза больше одной из его сторон. Найдите углы между диагоналями. [60° и 120°.]

3. Катет, лежащий против угла 30°, равен 4. Найдите второй катет этого треугольника. [$4\sqrt{3}$.]

4. Найдите высоту равностороннего треугольника со стороной 6. [$3\sqrt{3}$.]

5. Основание равнобедренного треугольника с углом при вершине 120° равно 6. Определите периметр этого треугольника. [$6+4\sqrt{3}$.]

Б. 1. Один из углов прямоугольного треугольника равен среднему арифметическому двух других его углов. Найдите его катеты, если гипотенуза равна c. [$0{,}5c$ и $0{,}5c\sqrt{3}$.]

2. Дан остроугольный треугольник ABC, у которого угол A равен 60°, а заключающие его стороны — b и c. Найдите высоту CC_1 и отрезок BC_1. [$0{,}5b\sqrt{3}$ и $c-0{,}5b$.]

3. В равнобедренной трапеции высота равна меньшему основанию, острый угол α. Найдите периметр трапеции, если высота равна k. $\left[2k\left(1+\sin\alpha+\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right).\right]$

В. 1. Какой угол больше α или β, если:

а) $\sin\alpha=\frac{1}{3}$, а $\sin\beta=\frac{1}{4}$ $[\alpha>\beta]$;

б) $\sin\beta=\frac{3}{4}$, а $\sin\alpha=\frac{2}{3}$ $[\beta>\alpha]$;

в) $\operatorname{tg}\alpha=2{,}1$, $\operatorname{tg}\beta=2{,}5$ $[\beta>\alpha]$?

2. Постройте острый угол, синус которого равен $\frac{4}{9}$.

3. Установите, могут ли иметь место следующие равенства для одного и того же значения угла α:

а) $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, $\cos\alpha=\frac{2}{3}$ [нет];

б) $\sin\alpha=\frac{5}{13}$, $\cos\alpha=\frac{12}{13}$ [да].

4. Основание равнобедренного треугольника равно k, угол при вершине α. Найдите высоту и боковую сторону. $\left[0{,}5k\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},\ \frac{k}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.\right]$

5. Диагональ k прямоугольной трапеции перпендикулярна к боковой стороне и образует с основанием острый угол α. Найдите стороны трапеции. $\left[\frac{k}{\cos\alpha},\ k\operatorname{tg}\alpha,\ k\sin\alpha,\ k\cos\alpha.\right]$

§ 5. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СИНУСА, КОСИНУСА, ТАНГЕНСА И КОТАНГЕНСА ЛЮБОГО УГЛА ОТ 0° ДО 180°

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Изобразим окружность на плоскости xy с центром в точке $O(0, 0)$ и радиусом R (рис. 109), α — острый угол, который образует радиус OA с положительной полуосью x, где x и y — координаты точки A.

2. Значения $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ для острого угла (рис. 109) выражаются через координаты точки A так: $\sin\alpha=\frac{y}{R}$, $\cos\alpha=\frac{x}{R}$, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$ и $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$.

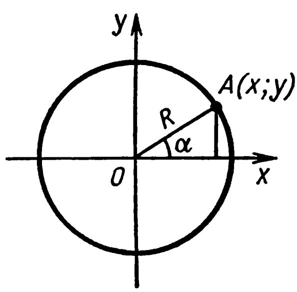


Рис. 109

3. Отметим значения тригонометрических функций в некоторых точках:

а) Будем считать, что угол 0° образуют совпадающие лучи. Если луч OM_1 совпадает с положительной полуосью x (рис. 110), то точка M_1 лежит на положительной полуоси x, а так как $OM_1=R$, то точка M_1 имеет координаты $(R; 0)$.

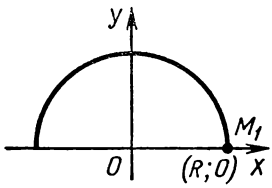


Рис. 110

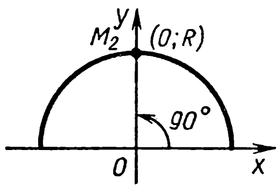


Рис. 111

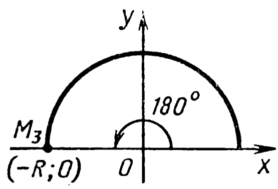


Рис. 112

Для $\alpha=0°$ получаем $\sin 0°=\frac{0}{R}=0$, $\cos 0°=\frac{R}{R}=1$, $\operatorname{tg} 0°=$ $=\frac{\sin 0°}{\cos 0°}=\frac{0}{1}=0$.

Значение формулы $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$ для $\alpha=0°$ не определено, так как на нуль делить нельзя, и, следовательно, для угла 0° котангенса не существует.

б) Если луч OM_2 образует с положительной полуосью x угол 90°, то точка M_2 лежит на положительной полуоси y (рис. 111) и имеет координаты $(0;\ R)$.

Для $\alpha=90°$ получаем $\sin 90°=\frac{R}{R}=1$, $\cos 90°=\frac{0}{R}=0$, $\operatorname{ctg} 90°=\frac{\cos 90°}{\sin 90°}=\frac{0}{1}=0$.

Значение формулы $\operatorname{tg}\alpha=\frac{x}{y}$ для $\alpha=90°$ не определено, так как на нуль делить нельзя, и, следовательно, для угла 90° тангенса не существует.

в) Если луч OM_3 образует с положительной полуосью x угол, равный 180°, то точка M_3 лежит на отрицательной полуоси x и имеет координаты $(-R;\ 0)$ (рис. 112).

Для $\alpha=180°$ получаем $\sin 180°=\frac{0}{R}=0$, $\cos 180°=\frac{-R}{R}=-1$, $\operatorname{tg} 180°=\frac{0}{R}=0$.

Значение формулы $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$ для $\alpha=180°$ не определено, так как на нуль делить нельзя, и, следовательно, для угла 180° котангенса не существует.

4. Для любого угла α, $0°<\alpha<180°$, верно, что

$$\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha,\quad \cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(180°-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,\ \text{где}\ \alpha\neq 90°,\quad \operatorname{ctg}(180°-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс угла 120°.

Р е ш е н и е. 1. Так как $0° < 120° < 180°$, то для нахождения синуса, косинуса, тангенса и котангенса используем пункт 4 справочного материала.

2. $\sin 120° = \sin(180° - 60°) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

$\cos 120° = \cos(180° - 60°) = -\cos 60° = -\frac{1}{2}$;

$\mathrm{tg}\, 120° = \mathrm{tg}(180° - 60°) = -\mathrm{tg}\, 60° = -\frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = -\sqrt{3}$;

$\mathrm{ctg}\, 120° = \mathrm{ctg}(180° - 60°) = -\mathrm{ctg}\, 60° = -\frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Задача 2. Найдите $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если $\cos\alpha = \frac{-1}{\sqrt{2}}$.

Р е ш е н и е. 1. Так как $\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, то угол α тупой, т. е. $90° < \alpha < 180°$.

2. Найдем $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha} = \sqrt{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

3. Найдем $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}}{-\frac{1}{\sqrt{2}}} = -1$.

4. Аналогично найдем $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = -1$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Найдите синус, косинус, тангенс и котангенс углов:

$135°$ $\left[\frac{1}{\sqrt{2}};\ -\frac{1}{\sqrt{2}};\ -1;\ -1\right]$;

$150°$ $\left[0{,}5;\ -0{,}5\sqrt{3};\ -\frac{1}{\sqrt{3}};\ -\sqrt{3}\right]$.

2. Найдите значения $\sin\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если:

а) $\cos\quad = \frac{1}{3}$ $\left[\frac{2\sqrt{2}}{3};\ 2\sqrt{2};\ \frac{1}{2\sqrt{2}}\right]$;

б) $\cos\alpha\quad -0{,}5$ $\left[0{,}5\sqrt{3};\ -\sqrt{3};\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right]$;

$\cos\alpha\quad -0{,}5\sqrt{3}$ $\left[0{,}5;\ -\frac{1}{\sqrt{3}};\ -\sqrt{3}\right]$.

3. Найдите значения $\cos\alpha$, $\mathrm{tg}\,\alpha$ и $\mathrm{ctg}\,\alpha$, если:

) $\sin\alpha = 0{,}6$, $0° < \alpha < 90°$ $\left[\frac{4}{5};\ \frac{3}{4};\ \frac{4}{3}\right]$;

б) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$, $90° < \alpha < 180°$ $\left[-\frac{2\sqrt{2}}{3};\ -\frac{1}{2\sqrt{2}};\ -2\sqrt{2}\right]$.

ГЛАВА VI

§ 1. ВВЕДЕНИЕ КООРДИНАТ НА ПЛОСКОСТИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. На рисунке 113 проведены на плоскости через точку O две взаимно перпендикулярные прямые x и y — *оси координат*. Ось x (она обычно горизонтальна) называется *осью абсцисс*, а ось y — *осью ординат*. Точка O пересечения осей координат называется *началом координат*, каждая из осей разбивается точкой O на две полуоси. Условились одну из них называть положительной, отмечая ее стрелкой (рис. 113), а другую — отрицательной.

2. Оси координат делят плоскость на четыре части, называемые четвертями,— I, II, III, IV (рис. 114). В пределах одной четверти знаки обеих координат сохраняются и имеют значения, указанные на рисунке 114.

3. Каждой точке M плоскости ставится в соответствие пара чисел — *координаты точки*. Если через точку M проведем прямую, параллельную оси ординат (рис. 115), она пересечет ось абсцисс в некоторой точке M_x. Абсциссой точки M будем называть число x, абсолютная величина которого равна расстоянию от точки O до M_x. Это число будет положительным, если M_x принадлежит положительной части оси x, отрицательным, если M_x принадлежит отрицательной части оси x.

4. Если точка M лежит на оси ординат, то считаем x равным нулю.

5. Ордината (y) точки M определяется аналогично (рис. 115).

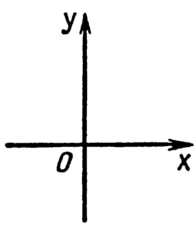


Рис. 113

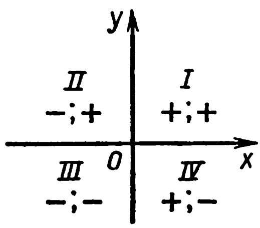


Рис. 114

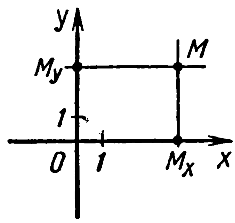


Рис. 115

6. Если точка M лежит на оси абсцисс, то y считаем равным нулю.

7. Координаты точки записываются в скобках рядом с буквенным обозначением точки, например $M(x;\ y)$ (на первом месте абсцисса, на втором — ордината).

8. Точки оси x (оси абсцисс) имеют ординаты, равные нулю ($y=0$), а точки оси y (оси ординат) имеют абсциссы, равные нулю ($x=0$).

9. Точка O — начало координат — имеет абсциссу и ординату, равные нулю: $O(0;\ 0)$.

10. Плоскость, на которой координаты точек $M(x;\ y)$ введены описанным способом, будем называть *плоскостью xy*.

11. Координаты x, y называются *декартовыми* по имени французского ученого Р. Декарта, который впервые применил их в своих исследованиях.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Найдите расстояние от точки $(-3;\ 4)$ до начала координат.

Решение. 1. Построим оси координат (рис. 116).

2. Построим точку $M(-3;\ 4)$ в плоскости xy (рис. 117).

3. Получили прямоугольник $OBMC$ (рис. 118), где OM — искомое расстояние. Найдем его по теореме Пифагора. $OM^2=$ $=OC^2+CM^2$ или $OM=\sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{25}=5$.

Задача 2. На биссектрисе I четверти взята точка с ординатой $y=2$. Чему равна абсцисса этой точки?

Решение. 1. На рисунке 119 построена биссектриса угла xOy, на которой находится точка M, ордината которой равна 2 (рис. 120), т. е. $M(x;\ 2)$.

2. Из точки M (рис. 121) опустим перпендикуляр MK на ось абсцисс. Треугольник OMK (рис. 121) прямоугольный с углом 45°, т. е. $OK=KM=2$.

Контрольные вопросы

1. Объясните, как определяются координаты точки.
2. Какие знаки у координат точки, если она принадлежит I (II, III, IV) четверти?

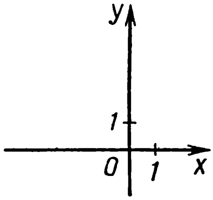


Рис. 116

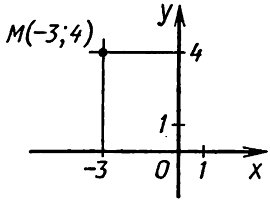


Рис. 117

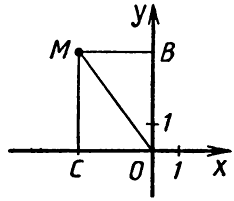


Рис. 118

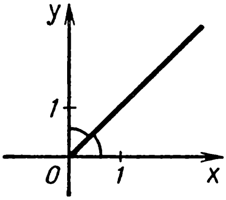


Рис. 119

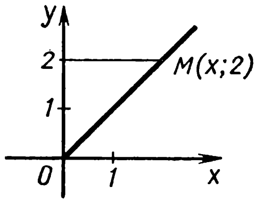


Рис. 120

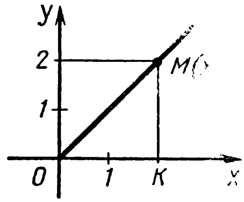


Рис. 121

3. Чему равны абсциссы точек, лежащих на оси ординат?
4. Чему равны координаты начала координат?
5. Чему равны ординаты точек, лежащих на оси абсцисс?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Проведите оси координат, выберите единицу длины на осях, постройте точки с координатами $A\,(2;\ 3)$, $B\,(-2;\ 3)$, $C\,(-2;\ -3)$.

2. На прямой, параллельной оси x, взяты две точки. У одной из них ордината 2. Чему равна ордината другой точки? [2.]

3. Из точки $A\,(2;\ 3)$ опущен перпендикуляр на ось x. Найдите координаты основания перпендикуляра. [(2; 0).]

Б. 1. Найдите геометрическое место точек плоскости xy, для которых абсцисса равна 3. [Прямая $x=3$.]

2. Найдите геометрическое место точек плоскости xy, для которых $x=y$. [Прямая, содержащая биссектрисы I и III четвертей.]

В. 1. Найдите геометрическое место точек плоскости xy, для которых $|x|=5$. [Две прямые $x=-5$ и $x=5$.]

2. На плоскости xy укажите точки, координаты которых удовлетворяют уравнению $x^2+y^2=0$. [$O\,(0;\ 0)$.]

3. Найдите геометрическое место точек плоскости xy, для которых $x+y=0$. [Прямая, содержащая биссектрисы II и IV четвертей.]

§ 2. КООРДИНАТЫ СЕРЕДИНЫ ОТРЕЗКА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

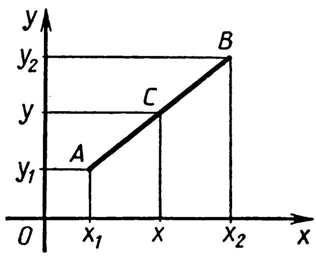


Рис. 122

1. Пусть $A\,(x_1;\ y_1)$ и $B\,(x_2;\ y_2)$ — две произвольные точки и $C\,(x;\ y)$ — середина отрезка AB (рис. 122).

2. Координаты точки C определяются формулами $x=\frac{x_1+x_2}{2}$, $y=\frac{y_1+y_2}{2}$. *Коорди-*

наты середины отрезка равны полусумме соответствующих координат концов этого отрезка.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Даны три вершины $A(1;\ 0)$, $B(2;\ 3)$, $C(3;\ 2)$ параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты четвертой вершины D и точки пересечения диагоналей.

Решение. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 123.

2. Отрезок AC — диагональ параллелограмма $ABCD$. Точка пересечения диагоналей является серединой каждой из них. Поэтому она является серединой отрезка AC, а значит, имеет координаты:

$$x=\frac{1+3}{2}=2,\ y=\frac{0+2}{2}=1.$$

Итак, координаты середины диагонали (2; 1).

3. Теперь, зная координаты точки пересечения диагоналей, находим координаты четвертой вершины D. Учитывая то, что точка пересечения диагоналей является серединой отрезка BD, имеем

$$2=\frac{2+x_D}{2},\ 1=\frac{3+y_D}{2},$$

откуда $x_D=2$, $y_D=-1$, или $D(2;\ -1)$.

Задача 2. Даны координаты конца отрезка $A(1;\ 1)$ и его середины $B(2;\ 2)$. Найдите координаты второго конца отрезка.

Решение. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 124.

2. Из условия задачи точка B является серединой отрезка AC. Используя формулы координат середины отрезка, найдем: $2=\frac{1+x_C}{2}$ и $2=\frac{1+y_C}{2}$, откуда $x_C=3$ и $y_C=3$.

3. Таким образом, точка C имеет координаты (3; 3).

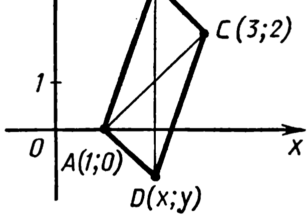


Рис. 123

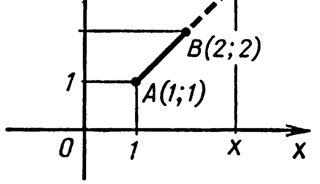


Рис. 124

Контрольные вопросы

1. Напишите формулы координат середины отрезка.
2. Найдите координаты середины отрезка с концами (2; 0) и (0; 2).
3. Даны координаты конца отрезка (1; 1) и его середины (2; 2). Можно ли найти координаты второго конца отрезка?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. **1.** Найдите координаты середины отрезка с концами:
а) (2; 0) и (0; 2) [(1; 1)];
б) (1; 1) и (4; 4) [(2,5; 2,5)];
в) (1; 1) и (−4; −4) [(−1,5; −1,5)].

2. Проверьте, является ли точка M (4; 2) серединой отрезка AB, если: а) A (3; −1), B (5; 5) [да]; б) A (3; 6), B (−5; −2) [нет].

Б. **1.** На отрезке AB найдите координаты точки C, которая в три раза ближе к точке A, чем к точке B, если координаты точки A (11; −7) и B (7; −15). [(10; −9).]

2. Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках A (−1; −2), B (2; −5), C (1; −2), D (−2; 1) является параллелограммом. Найдите точку пересечения его диагоналей. [(0; −2).]

3. AB — диаметр окружности, C — ее центр. Найдите:
а) координаты точки C, если A (−6; −1), B (1; 4) [(−2,5; 1,5)];
б) координаты точки A, если C (0; 3), B (3; 0) [(−3; 6)].

В. **1.** В треугольнике OAB проведена медиана OC. Определите координаты точки C, если точки A и B имеют координаты:
а) A (−5; 0), B (0; −3) [(−2,5; −1,5)];
б) A (0; −4), B (5; −2) [(2,5; −3)];
в) A (−1; 3), B (5; 4) [(2; 3,5)].

2. Дан треугольник с вершинами в точках A (7; −4), B (−4; 3) и C (5; 0). Найдите координаты концов средней линии треугольника, параллельной стороне AB. [(6; −2) и (0,5; 1,5).]

§ 3. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ ТОЧКАМИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

Пусть на плоскости xy даны две точки A $(x_1; y_1)$ и B $(x_2; y_2)$ (рис. 125). Применяя к прямоугольному треугольнику CAB теорему Пифагора, определяем *расстояние между точками* A и B через координаты этих точек: $AB^2=d^2=(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2$ или

$$d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2},$$

где d — расстояние между точками A и B.

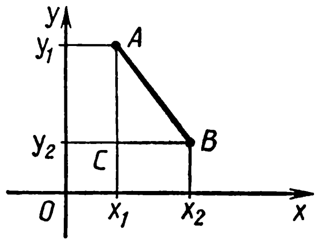


Рис. 125

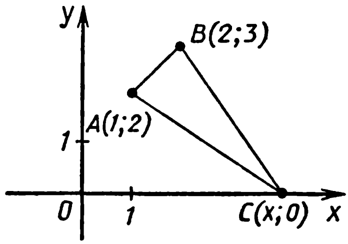


Рис. 126

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Найдите на оси абсцисс точку, равноудаленную от точек (1; 2) и (2; 3).

Решение. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 126.

2. Точка C — искомая точка, координаты которой (x; 0).

3. Расстояние от точки C до A и от C до B должно быть одинаковым, т. е. $CA = CB$.

4. Найдем эти расстояния:

$$CA^2 = (x-1)^2 + (0-2)^2,$$
$$CB^2 = (x-2)^2 + (0-3)^2.$$

Так как $CA^2 = CB^2$, то и

$$(x-1)^2 + (0-2)^2 = (x-2)^2 + (0-3)^2.$$

Из уравнения находим $x = 4$. Следовательно, искомая точка C имеет координаты (4; 0).

Задача 2. Докажите, что четырехугольник с вершинами в точках A(4; 1), B(0; 4), C(−3; 0), D(1; −3) является квадратом (рис. 127).

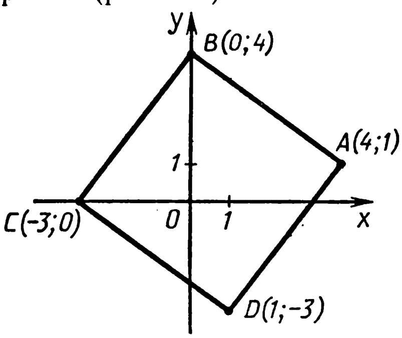


Рис. 127

Решение. 1. Найдем длины всех сторон четырехугольника $ABCD$:

$$AB^2 = (0-4)^2 + (4-1)^2$$
или $AB = \sqrt{16+9} = 5$,
$$BC^2 = (-3-0)^2 + (0-4)^2$$
или $BC = \sqrt{9+16} = 5$,
$$CD^2 = (1-(-3))^2 + (-3-0)^2$$
или $CD = \sqrt{16+9} = 5$,
$$DA^2 = (4-1)^2 + (-3-1)^2$$
или $DA = \sqrt{9+16} = 5$.

Таким образом, мы определили, что четырехугольник $ABCD$ имеет равные стороны. Но этого нам недостаточно, чтобы утверждать, что четырехугольник $ABCD$ — квадрат.

2. Найдем длины диагоналей четырехугольника $ABCD$:

$$BD^2=(1-0)^2+(-3-4)^2 \text{ или } BD=\sqrt{1+49}=\sqrt{50},$$

$$CA^2=(4+3)^2+(1-0)^2 \text{ или } CA=\sqrt{49+1}=\sqrt{50}.$$

Таким образом, мы определили, что четырехугольник $ABCD$ имеет равные диагонали и равные стороны. Следовательно, $ABCD$ — квадрат.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Найдите расстояние между точками: а) (1; 0) и (3; 0); б) (1; 0) и (—3; 0). [а) 2, б) 4.]
2. Даны три точки A (4; —2), B (1; 2), C (—2; 6). Найдите расстояния между каждой парой точек. [$AB=5$, $AC=10$, $BC=5$.]
3. Докажите, что четыре точки (1; 0), (—1; 0), (0; 1) и (0; —1) являются вершинами квадрата.
4. Даны точки A (0; —3), B (2; 3) и C (6; —1). а) Докажите, что треугольник ABC равнобедренный с основанием BC. б) Найдите медиану BM. [$\sqrt{26}$.] в) Найдите биссектрису AK. [$4\sqrt{2}$.]

§ 4. УРАВНЕНИЕ ОКРУЖНОСТИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Уравнением фигуры* на плоскости в декартовых координатах называется уравнение с двумя неизвестными x и y, которому удовлетворяют координаты любой точки этой фигуры и только они.

2. И обратно: любые два числа, удовлетворяющие этому уравнению, являются координатами некоторой точки фигуры.

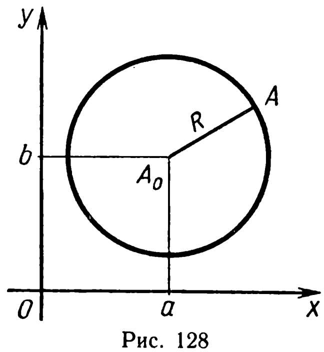


Рис. 128

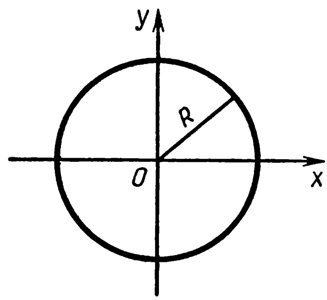


Рис. 129

Уравнение окружности с центром в точке $A_0(a;\ b)$ и радиу- R (рис 128)·

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \qquad (1)$$

4. Если центром окружности является начало координат (рис. 129), то уравнение окружности имеет вид:

$$x^2+y^2=R^2. \qquad (2)$$

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Даны точки $A\ (2;\ 0)$ и $B\ (-2;\ 6)$. Напишите уравне- окружности, диаметром которой является отрезок AB.

Решение. 1. Из условия задачи следует, что центр окружности лежит в середине отрезка AB. Найдем координаты центра окружности — точки C, являющейся серединой отрезка.

Координаты точки C определяем по известным нам формулам:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \text{ и } y=\frac{y_1+y_2}{2}, \text{ т. е. } x=\frac{2-2}{2}=0, \text{ а } y=\frac{0+6}{2}=3.$$

Таким образом, центр окружности находится в точке C, координаты которой $x=0$, $y=3$, т. е. $C\ (0;\ 3)$.

2. Теперь надо найти квадрат расстояния AC или BC, т. е. квадрат радиуса окружности.

Квадрат расстояния определяем по известной нам формуле:

$$d^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2,$$

$$AC^2=R^2=(0-2)^2+(3-0)^2=4+9=13.$$

3. Уравнение этой окружности имеет вид $x^2+(y-3)^2=13$.

Задача 2. Найдите координаты центра окружности, лежащего оси абсцисс, если известно, что окружность проходит через точку (1; 4) и радиус окружности равен 5.

Решение. 1. Из условия нам известно, что центр окружности A_0 лежит на оси абсцисс, значит, его координаты можно записать так: $(a;\ 0)$. Радиус окружности равен 5.

2. Составим уравнение окружности:

$$(x-a)^2+(y-0)^2=5^2, \text{ или } (x-a)^2+y^2=25. \qquad (1)$$

3. Чтобы определить центр окружности, нужно в уравнении 1) найти a. Для этого используем еще одно условие задачи: окружность проходит через точку (1; 4).

4. Так как точка (1; 4) принадлежит окружности, то ее координаты удовлетворяют уравнению окружности:

$$(1-a)^2+4^2=25. \qquad (2)$$

Решая уравнение (2), получаем $a_1=-2$, $a_2=4$.

5. Следовательно, условию задачи отвечают две окружности центрами в точках с координатами $(-2;\ 0)$ и $(4;\ 0)$.

Задача 3. Найдите координаты точек пересечения окружности $x^2+y^2-8x-8y+7=0$ с осью абсцисс.

Решение. 1. Приведем уравнение окружности $x^2+y^2-8x-8y+7=0$ к виду $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$:

$$x^2+y^2-8x-8y+7=0,$$
$$(x^2-8x+16-16)+(y^2-8y+16-16)+7=0;$$
$$(x-4)^2-16+(y-4)^2-16+7=0.$$

После упрощения получаем уравнение окружности:

$$(x-4)^2+(y-4)^2=5^2. \qquad (1)$$

2. В условии задачи сказано, что окружность пересекает ось абсцисс, а это значит, что $y=0$. Сделаем подстановку значения $y=0$ в уравнение (1) и, решив его, получим $x_1=1$, $x_2=7$.

3. Точки пересечения окружности с осью абсцисс (1; 0) и (7; 0).

Контрольные вопросы

1. Что определяет уравнение $x^2+y^2=0$?
2. Напишите уравнение окружности, центр которой находится в начале координат.
3. Напишите уравнение окружности, центр которой находится в точке $A\ (a;\ b)$.
4. Что определяет уравнение $x^2+y^2=6$?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Составьте уравнение окружности с центром в начале координат и радиусом R, если:

а) $R=2$ $[x^2+y^2=2^2]$;

б) $R=3$ $[x^2+y^2=3^2]$;

в) $R=6$ $[x^2+y^2=6^2]$.

2. Найдите координаты центра и радиус окружности, заданной уравнением:

а) $(x-2)^2+(y-3)^2=7^2$ [(2; 3), $R=7$];

б) $(x+2)^2+(y+3)^2=7^2$ [(−2; −3), $R=7$].

3. Составьте уравнение окружности с центром A и радиусом R, если:

а) $A\ (2;\ 3)$, $R=5$ $[(x-2)^2+(y-3)^2=25]$;

б) $A\ (-2;\ 3)$, $R=1$ $[(x+2)^2+(y-3)^2=1]$.

Б. 1. Найдите на окружности, заданной уравнением $x^2+y^2=169$, точки: а) с абсциссой $x=5$ [(5; 12) и (5; −12)]; б) с ординатой $y=-12$ [(5; −12) и (−5; −12)].

2. Даны точки $A\ (-1;\ -1)$ и $C\ (-4;\ 3)$. Составьте уравнение окружности с центром в точке C, проходящей через точку A. $[(x+4)^2+(y-3)^2=25.]$

3. Составьте уравнение окружности с центром в точке $B(-3;\ 4)$, проходящей через начало координат. [$(x+3)^2+(y-4)^2=25$.]

В. **1.** Составьте уравнение окружности с центром в точке $A(1;\ 2)$, касающейся оси абсцисс. [$(x-1)^2+(y-2)^2=4$.]

2. Найдите координаты точек пересечения двух окружностей: $x^2+y^2+8x-8y=8$ и $x^2+y^2-8x+8y=8$. [$(2;\ 2)$; $(-2;\ -2)$.]

§ 5. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ. РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ ОТНОСИТЕЛЬНО СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Любая *прямая* в декартовых координатах x и y имеет *уравнение* вида

$$ax+by+c=0, \tag{1}$$

где a и b — *коэффициенты* при неизвестных, а c — *свободный член.*

2. Частные случаи уравнения прямой (1):

а) Если $a=0$, $b\neq 0$. В этом случае уравнение прямой (1) принимает вид:

$$y=-\frac{c}{b}. \tag{2}$$

Таким образом, все точки прямой (2) имеют одну и ту же ординату $\left(-\frac{c}{b}\right)$, следовательно, прямая $y=-\frac{c}{b}$ параллельна оси абсцисс (рис. 130). Если и $c=0$, то прямая $y=-\frac{c}{b}$ примет вид $y=0$, а это означает, что прямая совпадает с осью абсцисс.

б) Если $b=0$, $a\neq 0$. В этом случае уравнение прямой (1) принимает вид:

$$x=-\frac{c}{a}. \tag{3}$$

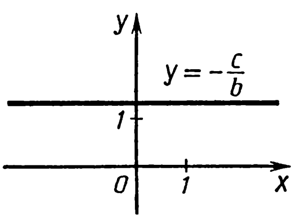


Рис. 130

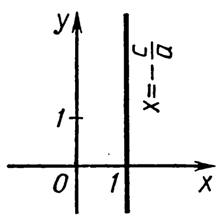


Рис. 131

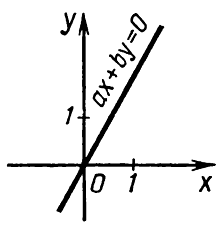


Рис. 132

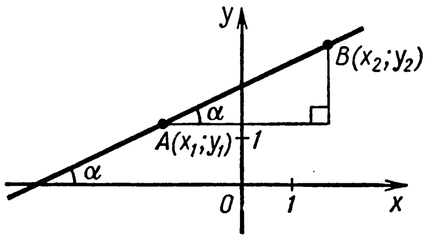


Рис. 133

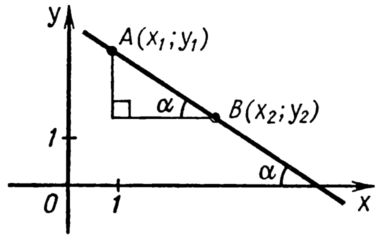


Рис. 134

Прямая, заданная уравнением (3), параллельна оси ординат (рис. 131). Если и $c=0$, то прямая совпадает с осью ординат.

в) Если $c=0$, $a\neq 0$, $b\neq 0$. В этом случае уравнение (1) примет вид:

$$ax+by=0. \tag{4}$$

Прямая (4) проходит через начало координат, так как координаты (0; 0) удовлетворяют уравнению этой прямой (рис. 132).

3. Если в уравнении прямой $ax+by+c=0$ коэффициент при y не равен 0, то это уравнение можно разрешить относительно y так:

$$y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}. \tag{5}$$

Если обозначить $-\frac{a}{b}=k$, $-\frac{c}{b}=q$, то уравнение (5) примет иной вид:

$$y=kx+q. \tag{6}$$

Коэффициент k в уравнении прямой называется *угловым коэффициентом прямой.*

4. Геометрический смысл коэффициента k уравнения (6) прямой, проходящей через точки $A(x_1;\ y_1)$ и $B(x_2;\ y_2)$:

а) В случае, изображенном на рисунке 133,

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

б) В случае, изображенном на рисунке 134,

$$-\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \text{ или } \operatorname{tg}\alpha=-\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}.$$

Таким образом, коэффициент k в уравнении прямой равен тангенсу острого угла, который образует прямая с осью абсцисс.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Составьте уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух данных точек $A\ (0;\ 1)$ и $B\ (1;\ 2)$.

Решение. 1. Координаты любой точки $M\ (x;\ y)$, равноудаленной от точек $A\ (0;\ 1)$ и $B\ (1;\ 2)$ (рис. 135), удовлетворяют уравнению

$$(x-0)^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y-2)^2. \quad (1)$$

2. Верно и обратное: если координаты точки M удовлетворяют уравнению (1), то эта точка равноудалена от точек $A\ (0;\ 1)$ и $B\ (1;\ 2)$, так как в правой части уравнения (1) квадрат расстояния до второй точки, а в левой части уравнения (1) квадрат расстояния до первой данной точки.

3. Решим уравнение (1):

$$x^2+(y-1)^2=(x-1)^2+(y-2)^2,$$
$$x^2+y^2-2y+1=x^2-2x+1+y^2-4y+4,$$
$$-2y+1=-2x+5-4y \text{ или}$$
$$x+y-2=0. \quad (2)$$

Замечание. Полученное уравнение (2) является уравнением геометрического места точек, равноудаленных от данных нам точек $A\ (0;\ 1)$ и $B\ (1;\ 2)$. Кроме того, уравнение (2) является уравнением прямой, перпендикулярной к отрезку AB и проходящей через его середину.

Задача 2. Составьте уравнение прямой, которая проходит через точки $A\ (-1;\ 1)$ и $B\ (1;\ 0)$.

Решение. 1. Любая прямая в декартовых координатах x, y имеет уравнение вида

$$ax+by+c=0, \quad (1)$$

где a и b не могут быть одновременно равными нулю.

2. Точки A и B лежат на прямой, а значит, их координаты удовлетворяют этому уравнению (1).

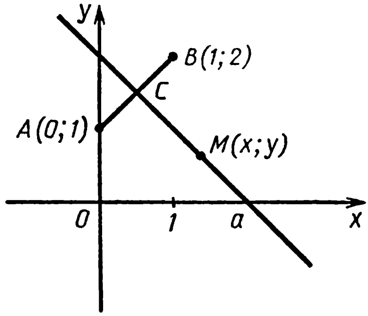


Рис. 135

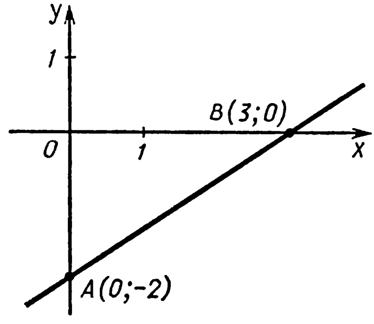


Рис. 136

3. Подставляя в уравнение (1) координаты точки A, а потом координаты точки B, получим систему двух уравнений:

$$\begin{cases} a(-1)+b\cdot 1+c=0, \\ a\cdot 1+b\cdot 0+c=0. \end{cases}$$

4. Выразим из этих уравнений a и b через c, получим $a=-c$, $b=-2c$.

5. Теперь, подставляя эти значения a и b в уравнение прямой (1), получим $-cx-2cy+c=0$.

6. После сокращения на c получим $-x-2y+1=0$.

7. Это уравнение и есть уравнение прямой, проходящей через данные точки.

Задача 3. Найдите точки пересечения с осями координат прямой, заданной уравнением $2x-3y=6$, и постройте эту прямую в координатной плоскости.

Решение. 1. Чтобы построить прямую $ax+by+c=0$ в координатной плоскости, достаточно знать координаты любых двух ее точек.

2. На практике, как правило, поступают так: находят координаты точек пересечения прямой $ax+by+c=0$ с осями координат, полагая равной 0 сначала одну из координат, затем другую.

3. Пусть в уравнении $2x-3y=6$ данной прямой $x=0$, тогда $2\cdot 0-3y=6$, $y=-2$, т. е. прямая $2x-3y=6$ пройдет через точку $A\ (0;\ -2)$, которая является точкой пересечения прямой с осью x.

4. Пусть $y=0$, тогда из уравнения прямой $x=3$, т. е. прямая $2x-3y=6$ пройдет через точку $B\ (3;\ 0)$, которая является точкой пересечения прямой с осью y.

5. По точкам $A\ (0;\ -2)$ и $B\ (3;\ 0)$ построим прямую $2x-3y=6$ (рис. 136).

Задача 4. Под каким углом прямая $y=x+2$ пересекает ось x?

Решение. 1. Прямая, заданная уравнением $y=x+2$, имеет угловой коэффициент, равный единице: $k=1$.

2. Следовательно, тангенс угла α, который прямая составляет с положительным направлением оси x, равен единице.

3. Значит, $\alpha=45°$.

Задача 5. Как будут располагаться относительно координатных осей прямые, заданные уравнениями: а) $2x-5y=0$; б) $3x-2=0$; в) $7y+12=0$; г) $5x=0$?

Решение. а) Прямая $2x-5y=0$ проходит через начало координат, так как ее уравнение не содержит свободного члена, т. е. $c=0$ (рис. 137).

б) Прямая $3x-2=0$ параллельна оси y, так как уравнение не содержит переменной y (рис. 138).

в) Прямая $7y+12=0$ параллельна оси x, так как уравнение не содержит переменной x (рис. 139).

г) Прямая $5x=0$ совпадает с осью y, ее уравнение можно переписать в виде $x=0$ (рис. 140).

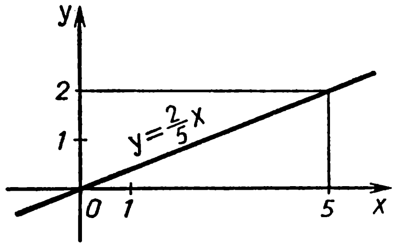


Рис. 137

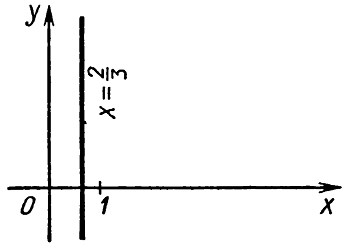


Рис. 138

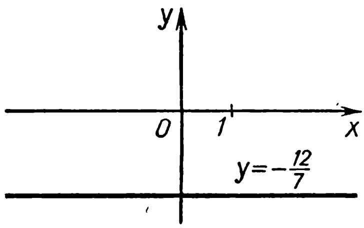


Рис. 139

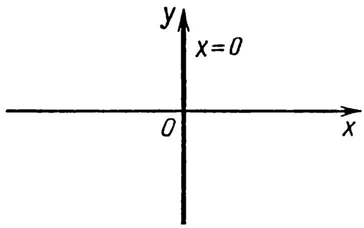


Рис. 140

Задача 6. Составьте уравнение прямой, зная, что она проходит через начало координат и точку $B\,(2;\ 3)$.

Р е ш е н и е. 1. Прямая, проходящая через начало координат, имеет уравнение $ax+by=0$ или $y=kx$.

2. Подставим координаты точки B в уравнение $y=kx$, получим $3=k\cdot 2$, или $k=\frac{3}{2}$.

3. Уравнение прямой: $y=\frac{3}{2}x$, или $3x-2y=0$.

Задача 7. Составьте уравнение прямой, пересекающей ось ординат в точке $A\,(0;\ -3)$ и образующей с положительным направлением оси абсцисс угол $\alpha=30°$.

Р е ш е н и е. 1. Угловой коэффициент $k=\operatorname{tg}\alpha$, $\alpha=30°$, значит, $k=\operatorname{tg}30°=\frac{1}{\sqrt{3}}$.

2. Подставив в уравнение прямой $y=kx+b$ значения $k=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $b=-3$, получим $y=\frac{1}{\sqrt{3}}x-3$.

3. Преобразуем полученное уравнение к виду $x-\sqrt{3}y-3\sqrt{3}=0$.

Контрольные вопросы

1. Что такое уравнение фигуры в декартовых координатах?
2. Какую фигуру определяет уравнение $ax+by+c=0$?

3. Как расположена прямая относительно осей координат, если в ее уравнении $ax+by+c=0$ коэффициент $a=0$ (коэффициент $b=0$, коэффициент $c=0$)?
4. Какой геометрический смысл имеет коэффициент k в уравнении прямой $y=kx+b$?
5. Какую фигуру определяет уравнение $ax+by+c=0$, если $x=0$ и $y=0$ одновременно?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. На прямой, перпендикулярной оси x, взяты две точки. Абсцисса одной из них $x=3$. Чему равна абсцисса другой точки? [3.]

2. Найдите точки пересечения с осями координат прямой, заданной уравнениями:

а) $x+2y+3=0$ [(—3; 0), (0; —1,5)];

б) $3x+4y=12$ [(4; 0), (0; 3)];

в) $3x-2y+6=0$ [(—2; 0), (0; 3)].

3. Укажите, как располагаются относительно координатных осей прямые:

а) $2y-5x=0$ [проходит через начало координат];

б) $3y-2=0$ [параллельна оси абсцисс];

в) $7x+12=0$ [параллельна оси ординат];

г) $6y=0$ [совпадает с осью x].

4. Под каким углом прямые пересекают ось x:

а) $y=x+1$ [45°]; б) $y=x-1$ [45°]; в) $y=x+3$ [45°]; г) $y=-x+1$ [135°]?

5. Приведите уравнение прямой $12x-5y-65=0$ к виду $y=kx+b$. $\left[y=\frac{12}{5}x-13.\right]$

Б. 1. Составьте уравнение прямой, проходящей через две точки с координатами:

а) (2; 3) и (3; 2) [$x+y-5=0$];

б) (4; —1) и (—6; 2) [$10y+3x-2=0$];

в) (5; —3) и (—1; —2) [$x+6y+13=0$].

2. Найдите точку пересечения прямых, заданных уравнениями:

а) $x+2y+3=0$ и $4x+5y+6=0$ [(1; —2)];

б) $3x-y-2=0$ и $2x+y-8=0$ [(2; 4)].

3. Составьте уравнение прямой, зная, что она параллельна оси x и проходит через точку B (2; 3). [$y=3$]

4. Чему равен коэффициент c в уравнении прямой $x+y+c=0$, если она проходит через точку A (1; 2)? [—3.]

5. Дано уравнение прямой $(x+2\sqrt{5})\cdot 0{,}25+(y-2\sqrt{5})\cdot 0{,}5=0$. Приведите уравнение этой прямой к виду: а) $ax+by+c=0$; б) $y=kx+b$. [$x+2y-2\sqrt{5}=0$; $y=-0{,}5x+\sqrt{5}$.]

В. 1. Напишите уравнение биссектрисы первого и третьего координатных углов. [$x-y=0$.]

2. Чему равны коэффициенты a и b в уравнении прямой $ax+by=1$, если известно, что она проходит через точки $A(1;\ 2)$ и $B(2;\ 1)$? $\left[a=b=\frac{1}{3}.\right]$

3. Докажите, что прямые $x+2y=3$ и $2x+4y=3$ не пересекаются.

4. Какой угол образует с положительным направлением оси абсцисс прямая $2x+2y-5=0$? [135°.]

5. Докажите, что прямые $-2x-2y+6=0$ и $2x+5y-12=0$ пересекаются, и найдите координаты точки пересечения. [(1; 2).]

§ 6. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПРЯМОЙ С ОКРУЖНОСТЬЮ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Пусть R — радиус окружности, а k — расстояние от центра окружности до прямой a. Примем центр окружности за начало координат, а прямую, перпендикулярную к прямой a, за ось x.

2. Возможны три случая взаимного расположения окружности и прямой:

а) окружность и прямая имеют две общие точки, т. е. прямая пересекает окружность, в этом случае $R>k$ (рис. 141, *а*);

б) окружность и прямая имеют одну общую точку, т. е. прямая и окружность касаются, когда $R=k$ (рис. 141, *б*);

в) окружность и прямая не имеют ни одной общей точки, когда $R<k$ (рис. 141, *в*).

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Составьте уравнение окружности с центром в точке $B(1;\ 2)$, касающейся оси x.

Р е ш е н и е. 1. Так как окружность касается оси x, то расстояние от точки $B(1;\ 2)$ до оси x равно радиусу окружности (рис. 142).

2. Если $R=2$, то уравнение окружности имеет вид

$$(x-1)^2+(y-2)^2=2^2.$$

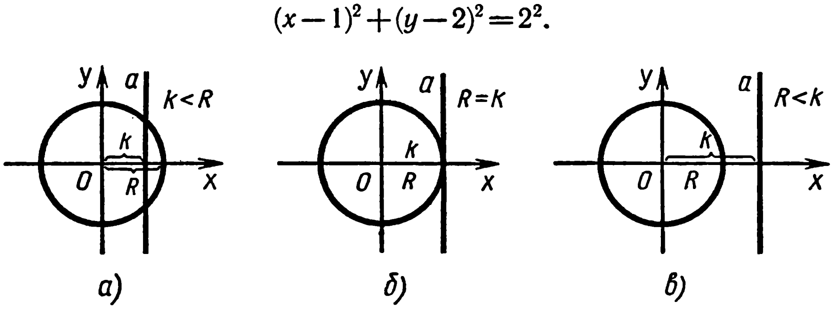


Рис. 141

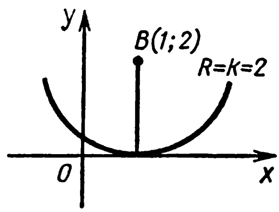


Рис. 142

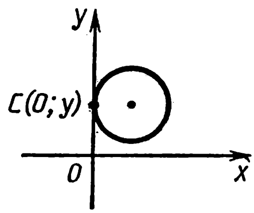


Рис. 143

Задача 2. Докажите, что окружность $x^2+y^2+2ax+1=0$ не пересекается с осью y.

Решение. 1. Если окружность имеет с осью y общую точку C (рис. 143), то координаты этой точки $(0;\ y)$ должны удовлетворять уравнению окружности $x^2+y^2+2ax+1=0$.

2. Подставив $x=0$ в уравнение окружности, получим $y^2+1=0$.

Так как полученное уравнение не имеет решений, то окружность не имеет с осью y общих точек.

Задача 3. При каком значении c прямая $x+y+c=0$ касается окружности $x^2+y^2=1$?

Решение. 1. Так как прямая касается окружности, т. е. они имеют одну общую точку, то система

$$\begin{cases} x+y+c=0 \\ x^2+y^2=1 \end{cases}$$

должна иметь единственное решение. Решим систему

$$\begin{cases} y=-x-c \\ x^2+(-x-c)^2-1=0 \end{cases} \quad \begin{cases} y=-x-c \\ 2x^2+2cx+c^2-1=0. \end{cases}$$

2. Квадратное уравнение $2x^2+2cx+(c^2-1)=0$ имеет единственное решение, если $D=0$.

$D=(2c)^2-4\cdot 2\,(c^2-1)$, т. е. $4c^2-8c^2+8=0$, откуда $c^2=2$, $c=\pm\sqrt{2}$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Докажите, что окружность $x^2+y^2+2ax=0$ касается оси y.

2. Докажите, что окружность $(x-5)^2+(y+3)^2=25$:

а) касается оси y;

б) пересекается с осью x;

в) не пересекается с прямой $y=4$.

3. Докажите, что окружность $x^2+y^2=2$ касается прямой $x+y+2=0$.

ГЛАВА VII

§ 1. ПРИМЕРЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФИГУР

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Если каждую точку данной фигуры сместить каким-нибудь образом, то мы получим новую фигуру. В этом случае говорят, что эта фигура получена *преобразованием* из данной.

2. Точка X' называется *симметричной* точке X относительно точки O, если $OX=OX'$ и точки X, O и X' лежат на одной прямой (рис. 144). Точка, симметричная точке O, есть сама точка O. Точка, симметричная точке X', есть точка X.

Фигуры F и F' являются *симметричными* относительно точки O (рис. 145).

Если преобразование симметрии относительно точки O переводит фигуру F в себя, то она называется *центрально-симметричной,* а точка O называется *центром симметрии.*

Например, параллелограмм является центрально-симметричной фигурой. Его центром симметрии является точка пересечения диагоналей (рис. 146).

3. Преобразование фигуры F в фигуру F', при котором каждая ее точка X переходит в точку X', симметричную относительно данной прямой a, называется *преобразованием симметрии* относительно прямой a. При этом *фигуры* F и F' называются *симметричными относительно прямой* a (рис. 147 и 148).

4. Пусть F — данная фигура и O — некоторая фиксированная точка (рис. 149). На луче OX отложим отрезок OX', равный $k \cdot OX$, где k — положительное число. Преобразование фигуры F,

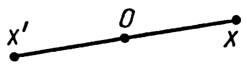


Рис. 144

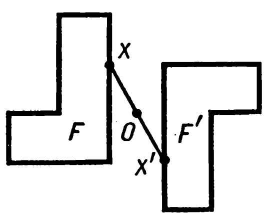


Рис. 145

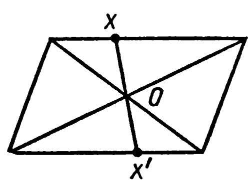


Рис. 146

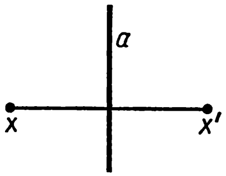


Рис. 147

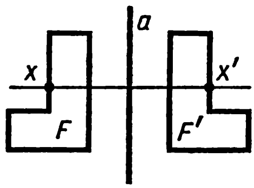


Рис. 148

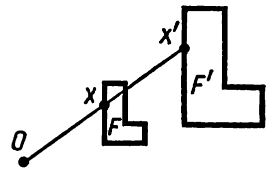


Рис. 149

при котором каждая ее точка X переходит в точку X', построенную указанным способом, называется *гомотетией* относительно центра O. Число k называется *коэффициентом гомотетии*. Фигуры F и F' называются *гомотетичными*.

§ 2. ДВИЖЕНИЕ. СВОЙСТВА ДВИЖЕНИЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Преобразование одной фигуры в другую называется *движением*, если оно сохраняет расстояния между точками, т. е. переводит любые две точки A и B одной фигуры в точки A', B' другой фигуры так, что $AB = A'B'$ (рис. 150).

2. Преобразование симметрии относительно точки является движением.

3. Преобразование симметрии относительно прямой является движением (рис. 151).

4. *Поворотом плоскости около данной точки* называется такое движение, при котором каждый луч, исходящий из этой точки, поворачивается на один и тот же угол в одном и том же направлении. Преобразование фигур при повороте плоскости также называется поворотом (рис. 152).

5. Точки, лежащие на прямой, при движении переходят в точки, лежащие на прямой, и сохраняется порядок их взаимного расположения.

6. При движении прямые переходят в прямые, полупрямые — в полупрямые, отрезки — в отрезки.

7. Два движения, выполненные последовательно, дают снова движение.

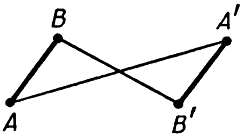


Рис. 150

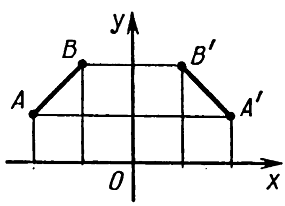


Рис. 151

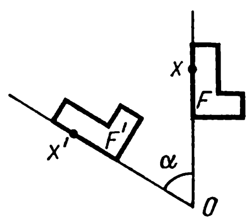


Рис. 152

§ 3. РАВЕНСТВО ФИГУР

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Две фигуры* называются *равными*, если они движением переводятся одна в другую.

2. Для обозначения равенства фигур используется знак равенства. Запись $F=F'$ означает, что фигура F равна F'.

§ 4. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ И ЕГО СВОЙСТВА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Преобразование фигуры F в фигуру F' называется *преобразованием подобия*, если при этом преобразовании расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз (рис. 153), т. е. если произвольные точки X и Y фигуры F при этом преобразовании переходят в точки X' и Y' фигуры F', то $X'Y'=kXY$, причем k одно и то же для всех точек X, Y. Число k называется *коэффициентом подобия.* При $k=1$ преобразование подобия, очевидно, является движением.

2. Гомотетия есть преобразование подобия.

§ 5. ПОДОБИЕ ФИГУР

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Две фигуры называются *подобными*, если они переводятся одна в другую преобразованием подобия.

2. Для обозначения подобия фигур используется специальный знак $\backsim$.

3. Запись $F \backsim F'$ читается так: «Фигура F подобна фигуре F'».

4. В записи подобия треугольников $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ предполагается, что вершины, совмещаемые преобразованием подобия, стоят на соответствующих местах, т. е. A переходит в A_1, B — в B_1 и C — в C_1.

5. У подобных фигур соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки пропорциональны. Например, если треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ подобны, то

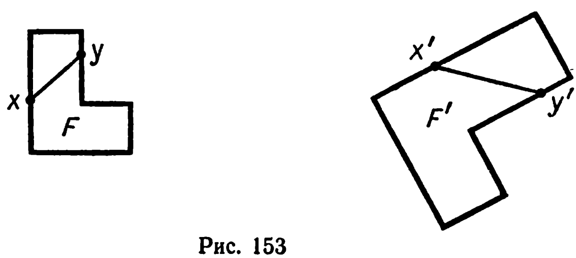


Рис. 153

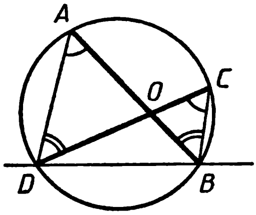


Рис. 154

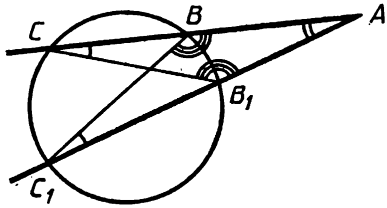


Рис. 155

$$\angle A=\angle A_1,\ \angle B=\angle B_1,\ \angle C=\angle C_1 \text{ и } \frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}.$$

6. Признаки подобия треугольников. Два треугольника подобны, если:

1) два угла одного треугольника соответственно равны двум углам другого;

2) две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого и углы, образованные этими сторонами, в этих треугольниках равны;

3) три стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого.

7. Пропорциональные линии в круге:

если две хорды AB и CD пересекаются внутри круга в точке O, то произведение отрезков одной хорды равно произведению отрезков другой хорды, т. е. $AO \cdot OB = DO \cdot OC$ (рис. 154);

если из точки, взятой вне окружности, проведены две секущие AC и AC_1, то справедливо равенство $AB \cdot AC = AB_1 \cdot AC_1$ (рис. 155);

если из точки, лежащей вне круга, проведены секущая MB и касательная MC, то справедливо равенство $MC^2 = MB \cdot MA$ (рис. 156).

8. Биссектриса любого внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на части, пропорциональные сторонам треугольника: $\frac{AB}{AD}=\frac{BC}{DC}$ (рис. 157).

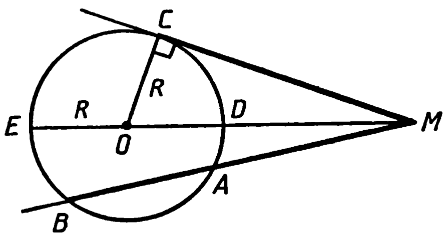


Рис. 156

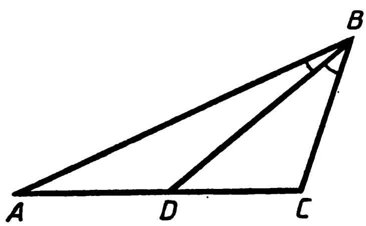


Рис. 157

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Стороны треугольника равны 51, 85 и 104 см. Проведена окружность, которая касается двух меньших сторон треугольника, а центр ее лежит на большей стороне. На какие части бóльшая сторона треугольника делится центром окружности.

Р е ш е н и е. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 158.

2. Так как окружность касается двух сторон данного треугольника ABC, то центр окружности D лежит на биссектрисе угла ABC.

3. Тогда, обозначив AD через x, по свойству биссектрисы угла треугольника имеем $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$, или $\frac{x}{104-x}=\frac{51}{85}$.

Решая это уравнение, получим $x=39$. Следовательно, $AD=39$ см, а $DC=65$ см.

Задача 2. Стороны треугольника относятся как 4:5:6. Найдите стороны треугольника, подобного данному, если меньшая сторона второго треугольника равна 0,8 м.

Р е ш е н и е. 1. Стороны треугольника, подобного данному, тоже пропорциональны числам 4:5:6 по определению подобных треугольников.

2. Пусть x — коэффициент подобия треугольников, тогда меньшая сторона, равная 0,8 м, содержит $4x$, т. е. $4x=0{,}8$, откуда $x=0{,}2$.

3. Остальные стороны треугольника содержат $5x$ и $6x$. Их можно найти, зная, что $x=0{,}2$.

4. Стороны треугольника равны 0,8 м, 1 м, 1,2 м.

Задача 3. Стороны треугольника относятся как 2:5:4. Найдите стороны треугольника, подобного данному, если его периметр равен 55 м.

Р е ш е н и е. 1. Стороны треугольника, подобного данному, тоже относятся как 2:5:4.

2. Пусть x — коэффициент подобия треугольников, тогда $P=2x+5x+4x=11x$. Зная, что периметр равен 55, получим уравнение $11x=55$, $x=5$.

3. Стороны треугольника соответственно равны 10 м, 25 м, 20 м.

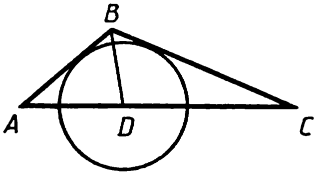


Рис. 158

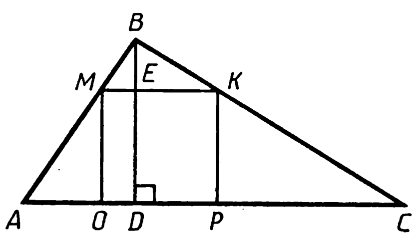


Рис. 159

Задача 4. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ известно, что $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B_1$, $AB=5$ м, $BC=7$ м, $A_1B_1=10$ м, $A_1C_1=8$ м. Найдите неизвестные стороны треугольников.

Решение. 1. Треугольники, определенные условием задачи, подобны по первому признаку подобия.

2. Из подобия треугольников следует:

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}. \qquad (1)$$

3. Подставив в (1) данные из условия задачи, получим:

$$\frac{5}{10}=\frac{7}{B_1C_1}=\frac{AC}{8}. \qquad (2)$$

4. Из (2) составим две пропорции и решим их:

а) $\frac{5}{10}=\frac{7}{B_1C_1}$, откуда $B_1C_1=14$ м;

б) $\frac{5}{10}=\frac{AC}{8}$, откуда $AC=4$ м.

Задача 5. В треугольник с основанием a и высотой h вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а другие две — на боковых сторонах. Найдите сторону квадрата.

Решение. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 159.

2. Треугольники MBK и ABC подобны ($\angle B$ общий, $\angle BMK=\angle BAC$ как соответственные при $MK \parallel AC$ и секущей AB).

3. BE и BD — высоты этих подобных треугольников, т. е. они пропорциональны соответствующим сторонам:

$$\frac{BE}{BD}=\frac{MK}{AC}. \qquad (1)$$

4. Пусть сторона квадрата $OMKP$ равна x, тогда $BE=h-x$, подставляя эти значения в полученную пропорцию (1), имеем $\frac{h-x}{h}=\frac{x}{a}$, откуда $x=\frac{ah}{a+h}$.

Задача 6. Углы B и B_1 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ равны. Стороны AB и BC треугольника ABC в 2,5 раза больше сторон A_1B_1 и B_1C_1 треугольника $A_1B_1C_1$. Найдите AC и A_1C_1, если их сумма равна 4,2 м.

Решение. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 160.

2. Из условия задачи:

1) $\angle B=\angle B_1$;

2) $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=2{,}5$;

3) $AC+A_1C_1=4{,}2$ м.

Следовательно, $\triangle ABC \sim \triangle A_1B_1C_1$. Из подобия этих треугольников следует $\frac{AC}{A_1C_1}=2{,}5$, или $AC=2{,}5\cdot A_1C_1$.

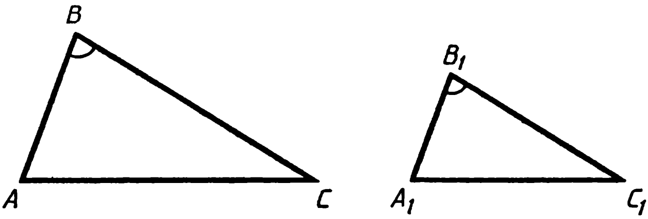


Рис. 160

3. Так как $AC=2{,}5\cdot A_1C_1$, то $AC+A_1C_1=2{,}5\cdot A_1C_1+A_1C_1=$ $=4{,}2$, откуда $A_1C_1=1{,}2$ м, $AC=3$ м.

Задача 7. Прямая, параллельная стороне треугольника ABC, пересекает сторону AC в точке P, а сторону BC в точке M. Докажите, что треугольники ABC и PMC подобны.

Решение. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 161.

2. $\angle CPM=\angle CAB$ как соответственные при параллельных прямых PM и AB и секущей AC.

3. $\angle C$ общий для треугольников ABC и PMC.

4. Следовательно, треугольники ABC и PMC подобны по первому признаку.

Задача 8. Найдите отношение отрезков диагонали трапеции, на которые она разбивается другой диагональю, если основания трапеции относятся как $a:k$.

Решение. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 162.

2. $\angle BCO=\angle OAD$ как внутренние накрест лежащие при параллельных BC и AD и секущей AC, $\angle BOC=\angle AOD$ как вертикальные. Следовательно, треугольники BCO и DAO подобны по первому признаку подобия.

3. Из подобия названных треугольников следует:

$$\frac{AO}{OC}=\frac{AD}{BC}=\frac{a}{k} \text{ и } \frac{OD}{BO}=\frac{AD}{BC}=\frac{a}{k},$$

т. е. отношение отрезков каждой диагонали равно отношению оснований трапеции.

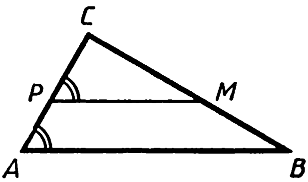


Рис. 161

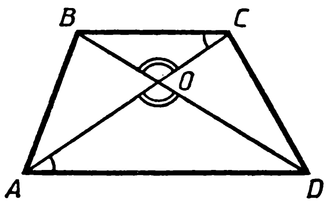


Рис. 162

Контрольные вопросы

1. Какие точки называются симметричными относительно данной точки?
2. Какая фигура называется центрально-симметричной?
3. Какое преобразование называется симметрией относительно данной прямой?
4. Какое преобразование называется гомотетией? Что такое центр гомотетии? коэффициент гомотетии?
5. Какое преобразование фигуры называется движением?
6. Объясните, что такое поворот.
7. Верно ли, что при движении сохраняются углы?
8. Какие фигуры называются равными?
9. Какие фигуры называются подобными?
10. Сформулируйте признаки подобия треугольников.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Две хорды окружности пересекаются в точке O. Отрезки одной хорды равны 3 и 12 м. Отрезки второй хорды равны между собой. Найдите отрезки второй хорды. [6 м.]

2. Две хорды AB и CD окружности пересекаются в точке M, $AM=16$ м, $MB=8$ м, $CD=36$ м. Найдите отрезки CM и MD. [4 м и 32 м.]

3. Как далеко видно из самолета, летящего на высоте 4 км над землей, если радиус Земли 6370 км? [Примерно 225,8 км.]

4. Из точки P проведены к окружности касательная $PA=12$ м и секущая $PB=16$ м. Найдите внешнюю часть секущей PB. [9 м.]

5. Углы при вершинах двух равнобедренных треугольников равны. Боковая сторона и основание одного треугольника равны 17 и 10 м, основание другого равно 8 м. Найдите его боковую сторону. [13,6 м.]

6. В треугольнике ABC проведен отрезок DE, параллельный стороне AC (точка D лежит на стороне AB, а E — на стороне BC). Найдите AD, если $AB=16$ м, $AC=20$ м и $DE=15$ м. [4 м.]

7. BD — биссектриса угла в треугольнике ABC. Найдите:

а) AD и DC, если $AB=10$ м, $BC=15$ м и $AC=20$ м [8 м и 12 м];

б) BC, если $AD:DC=8:5$ и $AB=16$ м [10 м];

в) AC, если $AB:BC=2:7$ и $DC-AD=1$ м [1,8 м].

Б. 1. Из двух пересекающихся хорд одна разделилась точкой пересечения на части 12 м и 18 м, а другая — в отношении $3:8$. Найдите вторую хорду. [33 м]

2. MAB и MCD — две секущие к одной окружности. Найдите:

а) CD, если $MB=1$ м, $MD=15$ дм и $CD=MA$ [9 дм];

б) MD, если $MA=18$ см, $AB=12$ см и $MC:CD=5:7$ [36 см];

в) AB, если $AB=MC$, $MA=20$ и $CD=11$ [25].

3. Из внешней точки к окружности проведены касательная и секущая. Найдите длину касательной, если она на 2 м больше длины внутреннего отрезка секущей и на 4 м больше длины ее внешнего отрезка. [12 м.]

4. В треугольнике ABC проведена прямая DE параллельно стороне AC (точка D лежит на стороне AB, а E — на стороне BC). Найдите отношение $AD:BD$, если известно, что $AB=16$ м, $AC=20$ м, $DE=15$ м. [3:1.]

5. В треугольник ABC вписан ромб $ADEK$ так, что угол A у них общий, а вершина E находится на стороне BC. Найдите сторону ромба, если $AB=c$, $AC=a$. $\left[\frac{ac}{a+c}.\right]$

6. В треугольник ABC вписан ромб $ADEK$ так, что вершины D, E, K лежат соответственно на сторонах AB, BC и AC. Найдите отрезки BE и EC, если $AB=14$ м, $BC=12$ м и $AC=10$ м. [7 м и 5 м.]

7. В равнобедренном треугольнике высота равна 20 м, а основание относится к боковой стороне как 4:3. Найдите радиус круга, вписанного в этот треугольник. [8 м.]

8. В равнобедренном треугольнике центр вписанного круга делит высоту в отношении 12:5, а боковая сторона равна 60 м. Найдите основание. [50 м.]

9. В равнобедренном треугольнике радиус вписанного круга составляет $\frac{2}{7}$ высоты, а периметр этого треугольника равен 56 м. Определите его стороны. [16 м, 20 м и 20 м.]

В. **1.** Продолжения боковых сторон AB и CD трапеции $ABCD$ пересекаются в точке E. Найдите стороны треугольника AED, если $AB=5$ м, $BC=10$ м, $CD=6$ м, $AD=15$ м. [15 м, 18 м.]

2. В прямоугольный треугольник с катетами a и k вписан квадрат, имеющий с треугольником общий прямой угол. Найдите периметр квадрата, если его вершина лежит на гипотенузе. $[4ak:(a+k).]$

3. На боковых сторонах CA и CB равнобедренного треугольника ABC отложены равные отрезки CM и CK. Найдите эти отрезки, зная периметр $2P$ треугольника ABC, его основание $AB=2a$ и периметр $2k$ четырехугольника $AMKB$, отсеченного прямой MK. $\left[CM=CK=\frac{(P-a)(P-k)}{P-2a}.\right]$

4. Дана прямоугольная трапеция с основаниями a и k, меньшей боковой стороной c. Найдите расстояния от точки пересечения диагоналей трапеции до основания a и до меньшей боковой стороны c. $\left[\frac{ac}{a+k} \text{ и } \frac{ak}{a+k}.\right]$

5. Из точки A, лежащей вне окружности, проведены две секущие. Внутренний отрезок первой равен 47 м, а внешний 9 м;

внутренний отрезок второй секущей на 72 м больше внешнего ее отрезка. Найдите вторую секущую. [84 м.]

6. Внутри окружности, радиус которой 13 м, дана точка M, отстоящая от центра окружности на 5 м. Через точку M проведена хорда AB, равная 25 м. Найдите отрезки, на которые хорда AB делится точкой M. [16 м и 9 м.]

7. В треугольнике ABC сторона $AB=15$ м и $AC=10$ м, AD — биссектриса угла A. Из точки D проведена прямая, параллельная AB и пересекающая AC в точке E. Найдите AE, EC, DE. [6 м, 4 м и 6 м.]

8. В равнобедренном треугольнике ABC сторона $AC=k$, $BA=BC=a$, AD и CM — биссектрисы углов A и C. Найдите MD. $[ak:(a+k).]$

9. В прямоугольник со сторонами 3 и 4 м вписан другой прямоугольник, стороны которого относятся как 1:3. Найдите стороны этого прямоугольника. $\left[\frac{\sqrt{106}}{8}\text{ м и }\frac{3\sqrt{106}}{8}\text{ м.}\right]$

ГЛАВА VIII

§ 1. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ ПЕРЕНОС И ЕГО СВОЙСТВА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Введем на плоскости декартовы координаты x, y. Преобразование некоторой фигуры E, при котором произвольная ее точка A (x; y) переходит в другую точку A' ($x+a$; $y+b$), где a и b постоянные, называется *параллельным переносом* (рис. 163).

2. Параллельный перенос задается формулами

$$x'=x+a,\ y'=y+b. \tag{1}$$

3. Параллельный перенос есть движение.

4. Название «параллельный перенос» оправдывается тем, что при параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние.

5. Каковы бы ни были две точки A и A', существует, и притом единственный, параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A'.

6. Преобразование, обратное параллельному переносу, есть параллельный перенос. Два параллельных переноса, выполненные один за другим, дают снова параллельный перенос.

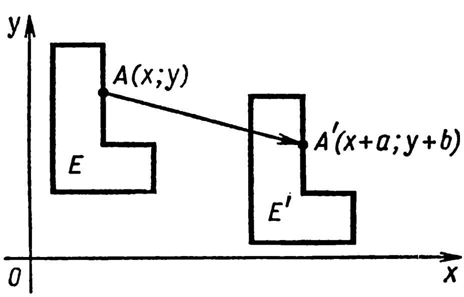


Рис. 163

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Найдите a и b в формулах параллельного переноса $x'=x+a$ и $y'=y+b$, если известно, что точка $A(-1;\ -3)$ переходит в точку $A'(0;\ -2)$.

Решение. 1. Для решения данной задачи достаточно подставить в формулы параллельного переноса координаты данных точек и найти из полученных уравнений значения a и b:

$$0=-1+a,\quad -2=-3+b,\ \text{откуда}\ a=1,\ b=1.$$

Задача 2. При параллельном переносе точка $A(2;\ 2)$ переходит в точку $A'(-1;\ 3)$. В какую точку переходит начало координат?

Решение. 1. Любой параллельный перенос задается формулами

$$x'=x+a,\quad y'=y+b. \tag{1}$$

2. Так как точка $A(2;\ 2)$ переходит в точку $A'(-1;\ 3)$, то $-1=2+a$, $3=2+b$, откуда $a=-3$, $b=1$.

3. Таким образом, параллельный перенос, переводящий точку $A(2;\ 2)$ в точку $A'(-1;\ 3)$, задается формулами

$$x'=x-3,\quad y'=y+1. \tag{2}$$

4. Подставляя в формулы (2) координаты начала ($x=0$, $y=0$), получим $x'=-3$, $y'=1$.

Таким образом, начало координат переходит в точку $(-3;\ 1)$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. При параллельном переносе точка $A(1;\ 1)$ переходит в точку $A'(-1;\ 0)$. В какую точку перейдет начало координат при этом параллельном переносе? $[-2;\ -1.]$
2. Найдите величины a и b в формулах параллельного переноса $x'=x+a$, $y'=y+b$, если известно, что:
   а) точка $A(1;\ 2)$ переходит в точку $A'(3;\ 4)$ $[a=b=2]$;
   б) точка $B(2;\ -3)$ переходит в точку $B'(-1;\ 5)$ $[a=-3,\ b=8]$.

§ 2. ПОНЯТИЕ ВЕКТОРА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Величины, которые характеризуются не только числом, но еще и направлением, называются векторными величинами или просто векторами.

2. К векторным величинам относятся, например, скорость, ускорение, сила и т. д.

3. Геометрически векторы изображаются направленными отрезками (рис. 164).

4. Направленный отрезок называется вектором.

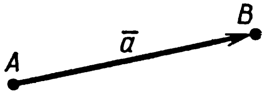


Рис. 164

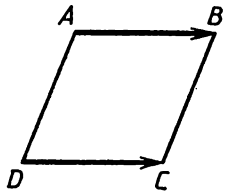


Рис. 165

5. Вектор вполне характеризуется следующими элементами:
   1) начальной точкой («точкой приложения»);
   2) направлением;
   3) длиной («модулем вектора»).

6. Если начало вектора есть A, а его конец B (рис. 164), то вектор обозначается символом $\overline{AB}$ или $\overrightarrow{AB}$.

7. Иногда вектор обозначают одной буквой жирного шрифта (***a***, ***b***, ***c*** и т. д.) или такой же буквой светлого шрифта с черточкой наверху ($\bar{a}$, $\bar{b}$), либо со стрелкой наверху ($\vec{a}$, $\vec{b}$ и т. д.)

Контрольные вопросы

1. Что такое вектор?
2. Какие из следующих величин являются векторными: скорость, масса, ускорение, время, температура, работа?
3. Объясните, что такое направленный отрезок.
4. Дан треугольник ABC. Сколько различных направленных отрезков можно образовать из сторон треугольника?

§ 3. АБСОЛЮТНАЯ ВЕЛИЧИНА И НАПРАВЛЕНИЕ ВЕКТОРА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Две полупрямые называются *одинаково направленными*, если они совмещаются параллельным переносом.

2. Две полупрямые называются *противоположно направленными*, если каждая из них одинаково направлена с полупрямой, дополнительной к другой.

3. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ называются *одинаково направленными*, если полупрямые AB и CD одинаково направлены.

4. *Абсолютной величиной* (или модулем) *вектора* называется длина отрезка, изображающего вектор. Абсолютная величина вектора $\bar{a}$ обозначается $|\bar{a}|$.

5. *Два вектора* называются *равными*, если они совмещаются параллельным переносом.

6. Начало вектора может совпадать с его концом. Такой вектор называется *нулевым вектором*, который обозначается $\bar{0}$.

О направлении вектора $\bar{0}$ не говорят. Абсолютная величина нулевого вектора считается равной нулю.

7. Из свойств параллельного переноса следует, что от любой точки можно отложить вектор, равный данному вектору, и только один.

ЗАДАЧА С РЕШЕНИЕМ

Задача. $ABCD$ — ромб. Докажите равенство векторов $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$.

Решение. 1. Подвергнем вектор $\overline{AB}$ параллельному переносу, при котором точка A переходит в точку D (рис. 165). При этом точка A смещается по прямой AD, а значит, точка B смещается по параллельной прямой BC.

2. Прямая AB переходит в параллельную прямую, а значит, в прямую DC, причем $AB=CD$. Следовательно, точка B переходит в точку C.

3. Таким образом, наш параллельный перенос переводит вектор $\overline{AB}$ в вектор $\overline{DC}$, а значит, эти векторы равны.

Контрольные вопросы

1. Какие полупрямые называются одинаково направленными?
2. Какие полупрямые называются противоположно направленными?
3. Что значит: векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ одинаково направлены?
4. Что такое абсолютная величина вектора?
5. Какие векторы называются равными?

§ 4. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Пусть некоторый вектор $\bar{a}$, отличный от нулевого вектора, имеет началом точку $A_1(x_1;\ y_1)$, а концом — точку $A_2(x_2;\ y_2)$. *Координатами вектора* $\bar{a}$ называют числа $a_1=x_2-x_1$, $a_2=y_2-y_1$.

2. Координаты вектора ставят рядом с буквенным обозначением вектора, в данном случае $\bar{a}(a_1;\ a_2)$. Иногда вектор обозначают так: $\overline{(a_1;\ a_2)}$.

3. Координаты нулевого вектора равны нулю: $\bar{0}(0;\ 0)$.

4. Из формулы, выражающей расстояние между двумя точками через их координаты, следует, что абсолютная величина вектора с координатами a_1, a_2 равна $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$.

5. Равные векторы имеют равные соответствующие координаты. И обратно: если у векторов соответствующие координаты равны, то векторы равны.

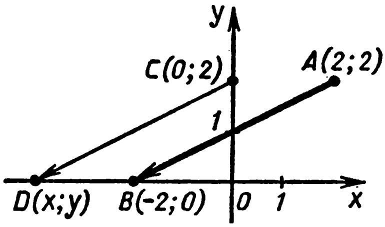


Рис. 166

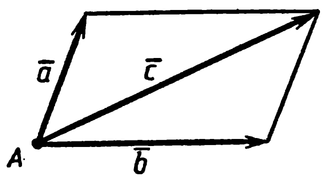


Рис. 167

ЗАДАЧА С РЕШЕНИЕМ

Задача. Даны три точки $A\,(2;\ 2)$, $B\,(-2;\ 0)$, $C\,(0;\ 2)$. Найдите такую точку $D\,(x;\ y)$, чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ были равны (рис. 166).

Решение. 1. Находим координаты вектора $\overline{AB}$. По условию $A\,(2;\ 2)$, $B\,(-2;\ 0)$, поэтому $\overline{AB}\,(-2-2;\ 0-2)$, или $\overline{AB}\,(-4;\ -2)$.

2. Находим координаты вектора $\overline{CD}$. По условию $C\,(0;\ 2)$, $D\,(x;\ y)$, поэтому $\overline{CD}\,(x-0;\ y-2)$.

3. Так как $\overline{AB}=\overline{CD}$, то равны и их координаты: $x-0=-4$, или $x=-4$; $y-2=-2$, $y=0$.

4. $D\,(-4;\ 0)$ — искомая точка.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Даны три точки: $A\,(1;\ 1)$, $B\,(-1;\ 0)$, $C\,(0;\ 1)$. Найдите такую точку $D\,(x;\ y)$, чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ были равны. [$D\,(-2;\ 0)$.]
2. Даны три точки: $A\,(3;\ 1)$, $B\,(-3;\ 1)$, $D\,(-3;\ -1)$. Найдите такую точку $C\,(x;\ y)$, чтобы векторы $\overline{BA}$ и $\overline{DC}$ были равны. [$C\,(3;\ -1)$.]
3. Даны три точки: $A\,(0;\ 3)$, $B\,(4;\ 0)$, $D\,(-4;\ 0)$. Найдите такую точку $C\,(x;\ y)$, чтобы векторы $\overline{DA}$ и $\overline{CB}$ были равны. [$C\,(0;\ -3)$.]

§ 5. СЛОЖЕНИЕ И ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Суммой векторов* $\overline{a}\,(a_1;\ a_2)$ и $\overline{b}\,(b_1;\ b_2)$ называется вектор $c\,(a_1+b_1;\ a_2+b_2)$, т. е. $\overline{a}\,(a_1;\ a_2)+\overline{b}\,(b_1;\ b_2)=\overline{c}\,(a_1+b_1;\ a_2+b_2)$.

2. Каковы бы ни были точки A, B, C, имеет место векторное равенство $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ *(правило треугольника)*.

3. Векторы складываются геометрически по *правилу параллелограмма:* сумма двух векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$, имеющих общее начало,

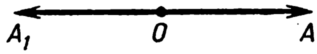


Рис. 168

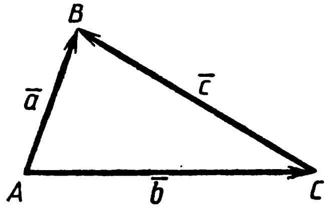


Рис. 169

изображается диагональю параллелограмма, построенного на этих векторах (рис. 167). Обозначают так:

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{c}.$$

4. Два вектора $\overline{OA}$ и $\overline{OA_1}$, имеющие равные длины, но противоположные направления, называются *противоположными* векторами (рис. 168).

5. Если вектор $\overline{OA_1}$ противоположен вектору $\overline{OA}$, то

$$\overline{OA_1}=-\overline{OA}.$$

6. Сумма противоположных векторов равна нуль-вектору:

$$\overline{OA}+\overline{OA_1}=\overline{OA}+(-\overline{OA})=\bar{0}.$$

7. Для векторов выполняются переместительный и сочетательный законы сложения:

$$\bar{a}+\bar{b}=\bar{b}+\bar{a} \text{ и } \bar{a}+(\bar{b}+\bar{c})=(\bar{a}+\bar{b})+\bar{c}.$$

8. *Разностью векторов* $\bar{a}\,(a_1;\ a_2)$ и $\bar{b}\,(b_1;\ b_2)$ называется такой вектор $\bar{c}\,(c_1;\ c_2)$, который в сумме с вектором $\bar{b}$ дает вектор $\bar{a}$, т. е. $\bar{b}+\bar{c}=\bar{a}$ (рис. 169).

Координатами вектора $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$ будут $c_1=a_1-b_1$, $c_2=a_2-b_2$.

9. Чтобы построить вектор, равный разности векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, надо при помощи параллельного переноса совместить их начала, тогда вектор $\bar{c}$, начало которого совпадет с концом вектора $\bar{b}$, а конец — с концом вектора $\bar{a}$, и будет разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, т. е. $\bar{a}-\bar{b}=\overline{AB}-\overline{AC}=\overline{CB}=\bar{c}$.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. *ABCD* — параллелограмм. Докажите векторное равенство $\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}$.

Решение. 1. По правилу сложения векторов имеем $\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$ (рис. 170).

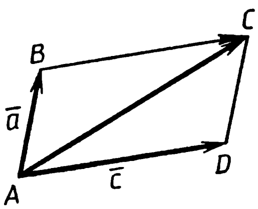


Рис. 170

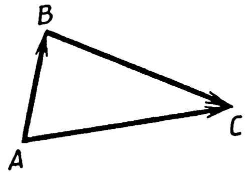


Рис. 171

2. Векторы $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$ равны по свойству параллелограмма, поэтому $\overline{AB}+\overline{AD}=\overline{AC}$.

Задача 2. Даны векторы с общим началом $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (рис. 171). Докажите, что $\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$.

Р е ш е н и е. Для векторов с общим началом справедливо, что $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{BC}$, из этого равенства находим $\overline{AC}-\overline{AB}=\overline{BC}$.

Задача 3. Даны векторы $\bar a\,(2;\ 3)$, $\bar b\,(-1;\ 0)$, $\bar d\,(-2;\ -3)$. Найдите суммы векторов: а) $\bar a$ и $\bar b$; б) $\bar a$ и $\bar d$; в) $\bar b$ и $\bar d$.

Р е ш е н и е. а) Для векторов с известными координатами сумму находим по формуле

$$\bar a\,(a_1;\ a_2)+\bar b\,(b_1;\ b_2)=\bar c\,(a_1+b_1;\ a_2+b_2).$$

Подставляя в эту формулу координаты векторов $\bar a$ и $\bar b$, получим:

$$\bar a+\bar b=\overline{(2;\ 3)}+\overline{(-1;\ 0)}=\overline{(2-1;\ 3+0)}=\overline{(1;\ 3)},$$

т. е. $\bar c\,(1;\ 3)$.

Геометрическая иллюстрация решения данного примера дана на рисунках 172—174.

б) $\bar a+\bar d=\overline{(2;\ 3)}+\overline{(-2;\ -3)}=\overline{(2-2;\ 3-3)}=\bar 0$;

в) $\bar b+\bar d=\overline{(-1;\ 0)}+\overline{(-2;\ -3)}=\overline{(-1-2;\ 0-3)}=\overline{(-3;\ -3)}$.

Задача 4. Найдите абсолютную величину вектора $\bar a-\bar b$, если: а) $\bar a\,(1;\ -4)$ и $\bar b\,(-4;\ 8)$; б) $\bar a\,(-2;\ 7)$ и $\bar b\,(4;\ -1)$.

Р е ш е н и е. а) 1. Зная координаты векторов $\bar a$ и $\bar b$, находим

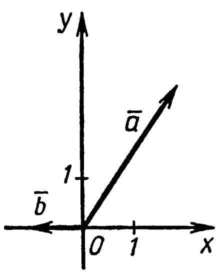


Рис. 172

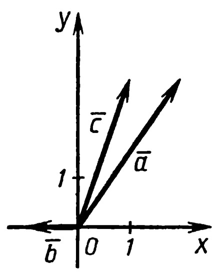


Рис. 173

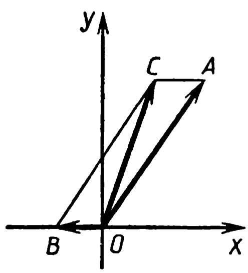


Рис. 174

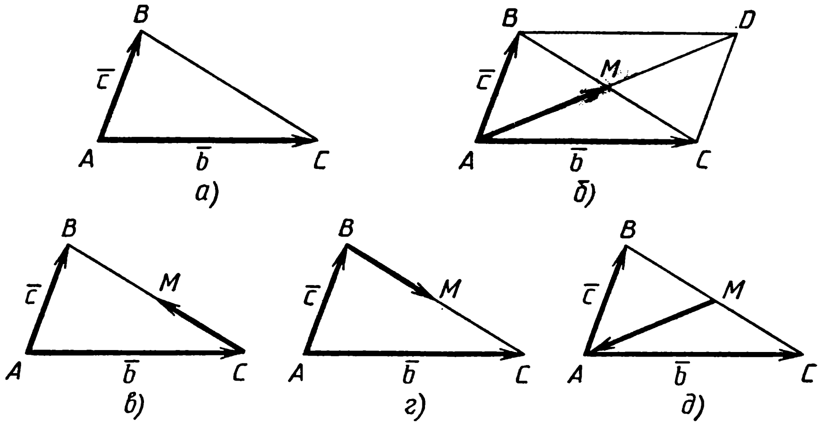


Рис. 175

вектор $\bar{c}$, равный их разности, по формуле

$$\bar{a}(a_1;\ a_2)-\bar{b}(b_1;\ b_2)=\bar{c}(a_1-b_1;\ a_2-b_2),\ \text{т. е.}$$

$$\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}=(1;\ -4)-(-4;\ 8)=(1+4;\ -4-8)=(5;\ -12).$$

2. Абсолютная величина вектора вычисляется по формуле

$$|\bar{c}|=\sqrt{c_1^2+c_2^2}.$$

В данном случае $|\bar{c}|=\sqrt{5^2+(-12)^2}=13$;

б) 1. $\bar{a}-\bar{b}=(-2;7)-(4;-1)=(-2-4;7+1)=(-6;8)$.

2. $|\bar{a}-\bar{b}|=\sqrt{(-6)^2+8^2}=10$.

Задача 5. В треугольнике ABC вектор $\overline{AB}=\bar{c}$ и вектор $\overline{AC}=\bar{b}$. Постройте каждый из следующих векторов: а) $\frac{\bar{b}+\bar{c}}{2}$; б) $\frac{\bar{c}-\bar{b}}{2}$; в) $\frac{\bar{b}-\bar{c}}{2}$; г) $-\frac{\bar{b}+\bar{c}}{2}$.

Решение. Дан треугольник ABC (рис. 175,*а*). Для построения заданных векторов воспользуемся правилом параллелограмма.

а) Искомый вектор $\overline{AM}$ изображен на рисунке 175, *б*. Заметим, что длина этого вектора будет равна половине диагонали параллелограмма, построенного на векторах $\bar{b}$ и $\bar{c}$, или медиане треугольника ABC, проведенной из вершины A.

б) Искомый вектор $\overline{CM}$ изображен на рисунке 175, *в*. Заметим, что длина этого вектора будет равна половине стороны BC заданного треугольника.

в) Искомый вектор $\overline{BM}$ изображен на рисунке 175, *г*. Заметим, что длины векторов $\overline{CM}$ и $\overline{BM}$ равны, а направления их противоположны.

г) Искомый вектор $\overline{MA}$ изображен на рисунке 175,*д*. Заметим, что длины векторов $\overline{MA}$ и $\overline{AM}$ равны, а направления их противоположны.

Контрольные вопросы

1. Дан ненулевой вектор $\overline{AB}$. Можно ли утверждать, что $\overline{AB}=\overline{BA}$?
2. Известно, что $\overline{AB}=\overline{CD}$. Можно ли утверждать, что $|\overline{AB}|=|\overline{CD}|$?
3. $|\overline{AB}|=|\overline{CD}|$, $|CD|\neq 0$. Можно ли утверждать, что $\overline{AB}=\overline{CD}$?
4. Какие два вектора называются противоположными?
5. Какой вектор называется разностью векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$?
6. Как построить вектор $\bar{c}=\bar{a}-\bar{b}$?
7. Как сложить два вектора по правилу треугольника? правилу параллелограмма?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Даны векторы $\bar{a}\,(2;\ 3)$, $\bar{b}\,(-1;\ 0)$, $\bar{c}\,(-2;\ -3)$. Найдите сумму векторов:

а) $\bar{a}+\bar{b}$ $[\overline{(1;\ 3)}]$; б) $\bar{a}+\bar{c}$ $[\overline{(0;\ 0)}]$.

2. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Найдите сумму векторов $\overline{OA}$ и $\overline{OC}$; $\overline{OB}$ и $\overline{OD}$; $\overline{OA}$, $\overline{OC}$, $\overline{OB}$ и $\overline{OD}$. $[\overline{OA}+\overline{OC}=\bar{0}$; $\overline{OB}+\overline{OD}=\bar{0}$; $\overline{OA}+\overline{OC}+\overline{OB}+\overline{OD}=\bar{0}.]$

Б. 1. В параллелограмме $ABCD$ точка O — пересечение диагоналей. Выразите векторы $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$ и $\overline{DA}$ через $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$. $[\overline{AB}=\overline{OB}-\overline{OA}$; $\overline{BC}=-\overline{OA}-\overline{OB}$; $\overline{CD}=-\overline{OB}+\overline{OA}.]$

2. Докажите, что векторы $\bar{a}\,(1;\ 2)$ и $\bar{b}\,(0{,}5;\ 1)$ одинаково направлены, а векторы $\bar{c}\,(-1;\ 2)$ и $\bar{k}\,(0{,}5;\ -1)$ противоположно направлены.

В. Точка O является центром тяжести треугольника ABC. Докажите, что $\overline{OA}+\overline{OB}+\overline{OC}=\bar{0}$.

§ 6. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА ЧИСЛО

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Произведением вектора* $\overline{(a_1;\ a_2)}$ *на число* λ называется вектор $\overline{(\lambda a_1;\ \lambda a_2)}$, т. е. $\overline{(a_1;\ a_2)}\,\lambda=\overline{(\lambda a_1;\ \lambda a_2)}$.

2. Из определения операции умножения вектора на число следует, что для любого вектора $\bar{a}$ и чисел λ и μ справедливо равенство $(\lambda+\mu)\bar{a}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{a}$.

3. Для любых двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ и числа λ справедливо равенство $\lambda\,(\overline{a+b})=\lambda\bar{a}+\lambda\bar{b}$.

4. Абсолютная величина вектора $\lambda\bar{a}$ равна $|\lambda|\cdot|\bar{a}|$. Направление вектора $\lambda\bar{a}$ при $\bar{a}\neq\bar{0}$ совпадает с направлением вектора $\bar{a}$, если $\lambda>0$, и противоположно направлению вектора $\bar{a}$, если $\lambda<0$.

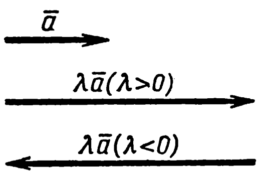


Рис. 176

5. Два отличных от нуля вектора называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

6. При умножении вектора $\bar{a}$ на число λ получаем новый вектор $\bar{c}$, коллинеарный с вектором $\bar{a}$ и имеющий длину $\lambda|\bar{a}|$. Этот вектор $\bar{c}$ имеет одинаковое направление с вектором $\bar{a}$, если $\lambda>0$, и противоположное с ним направление, если $\lambda<0$ (рис. 176).

7. У коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны. И обратно: если у двух векторов соответствующие координаты пропорциональны, т. е. $\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}$, то эти векторы коллинеарны.

8. Следует иметь в виду, что составленная пропорция из координат коллинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ теряет смысл при одновременном равенстве нулю либо первых, либо вторых координат этих векторов (т. е. в случаях, когда оба вектора параллельны оси ординат или оси абсцисс).

9. Вектор называется *единичным*, если его абсолютная величина равна единице.

10. Единичные векторы, направления которых совпадают с направлениями положительных координатных полуосей, называются *координатными векторами* или *ортами*. В данном пособии их будем обозначать $\bar{e}_1\,(1;\,0)$ и $\bar{e}_2\,(0;\,1)$.

11. Любой вектор $\bar{a}\,(a_1;\ a_2)$ можно представить в виде $\bar{a}=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2$. Это равенство называется разложением вектора по осям координат (или по ортам).

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Известно, что векторы $\bar{a}\,(3;\ -1)$ и $\bar{b}\,(-2;\ k)$ коллинеарны. Найдите k.

Решение. 1. У коллинеарных векторов координаты пропорциональны, т. е.

$$\frac{b_1}{a_1}=\frac{b_2}{a_2}.$$

2. Составим пропорцию $\frac{-2}{3}=\frac{k}{-1}$, откуда $k=\frac{2}{3}$.

Задача 2. Даны три вектора $\bar{a}(1; 0)$, $\bar{b}(1; 1)$, $\bar{c}(-1; 0)$. Найдите такие числа λ и μ, чтобы выполнялось векторное равенство $\bar{c}=\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}$.

Решение. 1. Приравнивая соответствующие координаты векторов $\bar{c}$ и $\lambda\bar{a}+\mu\bar{b}$, составим систему из двух уравнений:

$$\begin{cases} -1=\lambda\cdot 1+\mu\cdot 1, \\ 0=\lambda\cdot 0+\mu\cdot 1. \end{cases}$$

2. Решим полученную систему относительно λ и μ, получим $\mu=0$, $\lambda=-1$.

Задача 3. Даны векторы $\bar{a}(3; 2)$ и $\bar{b}(0; -1)$. Найдите вектор $-2\bar{a}+4\bar{b}$.

Решение. 1. Решение опирается на определения произведения вектора на число и суммы векторов.

2. $-2\bar{a}=-2\,\overline{(3; 2)}=\overline{(-6; -4)}$, $4\bar{b}=4\,\overline{(0; -1)}=\overline{(0; -4)}$,

$-2\bar{a}+4\bar{b}=\overline{(-6; -4)}+\overline{(0; -4)}=\overline{(-6; -8)}$.

Задача 4. Даны векторы $\bar{a}(3; 2)$ и $\bar{b}(0; -1)$. Найдите абсолютную величину вектора $-2\bar{a}+4\bar{b}$.

Решение. 1. Координаты вектора $-2\bar{a}+4\bar{b}$ нами уже найдены в предыдущей задаче: $\overline{(-6; -8)}$.

2. По формуле для вычисления абсолютной величины вектора по его координатам имеем:

$$|4\bar{b}-2\bar{a}|=\sqrt{36+64}=10.$$

Задача 5. Абсолютная величина вектора $\lambda\bar{a}$ равна 5. Найдите λ, если $\bar{a}(-6; 8)$.

Решение. 1. Найдем $|\bar{a}|=\sqrt{36+64}=10$.

2. Из соотношения $|\lambda\bar{a}|=|\lambda|\cdot|\bar{a}|$ найдем $|\lambda|$. Имеем $5=|\lambda|\cdot|\bar{a}|$, откуда $|\lambda|=\frac{5}{|\bar{a}|}$ или $\lambda=\pm\frac{1}{2}$.

Задача 6. При каком значении k векторы $\bar{a}(k; 1)$, $\bar{b}(4; k)$: а) коллинеарны; б) одинаково направлены?

Решение. 1. Для коллинеарности векторов достаточно, чтобы соответствующие координаты были пропорциональны, т. е. выполнялось равенство $\frac{k}{4}=\frac{1}{k}$, откуда $k=\pm 2$.

б) При $k=2$ векторы одинаково направлены, так как $2>0$.

Задача 7. Найдите единичный вектор, коллинеарный вектору $\bar{a}(6; 8)$ и одинаково направленный с ним.

Решение. 1. Представим искомый единичный вектор $\bar{b}$ в виде

$$\bar{b}(x; y)=\lambda\bar{a}(6; 8)$$

где $\lambda>0$, так как $\bar{a}$ и $\bar{b}$ одинаково направлены.

2. Из полученного равенства имеем:

$$x=6\lambda; \qquad y=8\lambda.$$

3. Так как $|\bar{b}|=1$, то $\sqrt{x^2+y^2}=1$ или

$$\sqrt{(6\lambda)^2+(8\lambda)^2}=1,\ \sqrt{100\lambda^2}=1,\ 10\lambda=1,\ \lambda=\frac{1}{10}.$$

4. Подставив значение λ в равенства $x=6\lambda$ и $y=8\lambda$, получим $x=6\cdot\frac{1}{10}=\frac{3}{5}$; $y=8\cdot\frac{1}{10}=\frac{4}{5}$.

5. Следовательно, $\bar{b}\left(\frac{3}{5};\ \frac{4}{5}\right)$.

Задача 8. В параллелограмме $ABCD$ $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AD}=\bar{c}$. Выразите векторы $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{AC}$, $\overline{BD}$, $\overline{DB}$, $\overline{CA}$ через $\bar{a}$ и $\bar{c}$.

Решение. 1. Векторы $\overline{BC}$ и $\overline{AD}$ имеют равные длины (противоположные стороны параллелограмма равны и параллельны) и одинаково направлены (рис. 177,*а*), т. е. $\overline{BC}=\overline{AD}=\bar{c}$.

2. Векторы $\overline{CD}$ и $\overline{AB}$ противоположно направлены и имеют равные длины, т. е. $\overline{CD}=-\bar{a}$.

3. Вектор $\overline{AC}$ (рис. 177,*б*) — сумма векторов $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$, но $\overline{BC}=\overline{AD}$, поэтому $\overline{AC}=\bar{a}+\bar{c}$.

4. Далее, $\overline{CA}=-\overline{AC}=-(\bar{a}+\bar{c})=-\bar{a}-\bar{c}$.

5. $\overline{BD}=\overline{AD}-\overline{AB}$, или $\overline{BD}=\bar{c}-\bar{a}$.

6. $\overline{DB}=\bar{a}-\bar{c}$.

Задача 9. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A\,(1;\ 0)$, $B\,(3;\ 3)$, $C\,(-1;\ 2)$, $D\,(3;\ 8)$ — трапеция.

Решение. 1. $\overline{AB}=(2;\ 3)$, $\overline{BC}=(-4;\ -1)$, $\overline{CD}=(4;\ 6)$, $\overline{DA}=(-2;\ -8)$.

2. $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ коллинеарны, так как их координаты пропорциональны: $\frac{4}{2}=\frac{6}{3}$, следовательно, $AB\parallel CD$.

3. $\overline{BC}$ и $\overline{DA}$ не коллинеарны, так как их координаты не пропорциональны: $\frac{-2}{-4}\neq\frac{-8}{-1}$, следовательно, BC и DA не параллельны.

4. Четырехугольник $ABCD$ — трапеция.

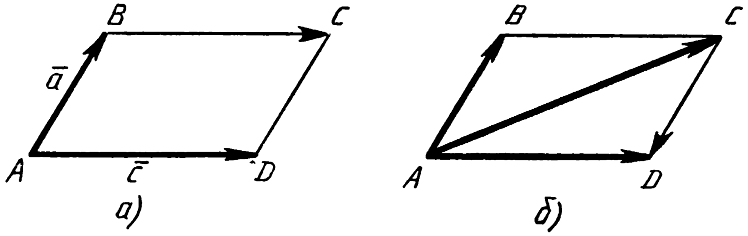


Рис. 177

Задача 10. $\bar{e}_1 (1;\ 0)$ и $\bar{e}_2 (0;\ 1)$ — координатные векторы. Чему равны координаты вектора $2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2$?

Решение. 1. Пусть $2\bar{e}_1 - 3\bar{e}_2 = \bar{a}\,(a_1;\ a_2)$.

2. Тогда $a_1 = 2\cdot 1 - 3\cdot 0 = 2$; $a_2 = 2\cdot 0 - 3\cdot 1 = -3$.

3. Искомый вектор $\overline{(2;\ -3)}$.

Контрольные вопросы

1. Дайте определение умножения вектора на число.
2. Какие векторы называются коллинеарными?
3. Какой вектор называется единичным?
4. Каков признак коллинеарности двух векторов?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Даны векторы $\bar{a}\,(3;\ 2)$ и $\bar{b}\,(0;\ -1)$. Найдите векторы:

а) $3\bar{a} - \bar{b}$ $[\overline{(9;\ 7)}]$; б) $4\bar{a} + \bar{b}$ $[\overline{(12;\ 7)}]$.

2. Даны векторы $\bar{a}\,(3;\ 2)$ и $\bar{b}\,(0;\ -1)$. Найдите абсолютную величину векторов:

а) $4\bar{a} + 3\bar{b}$ [13]; б) $5\bar{a} + 10\bar{b}$ [15].

3. Известно, что векторы $\bar{a}\,(1;\ -1)$ и $\bar{b}\,(-2;\ k)$ коллинеарны. Найдите, чему равно k. [2.]

4. В квадрате $ABCD$ (рис. 178) $\overline{MK} = \bar{a}$. Какой из векторов $\overline{CB}$, $\overline{DC}$, $\overline{AD}$ равен:

а) $2\bar{a}$ $[\overline{AD}]$; б) $-2\bar{a}$ $[\overline{CB}]$?

Б. 1. Абсолютная величина вектора $\lambda\bar{a}$ равна 5. Найдите λ, если: а) $\bar{a}\,(3;\ -4)$ $[\pm 1]$; б) $\bar{a}\,(5;\ 12)$. $\left[\pm\frac{5}{13}\right]$.

2. В треугольнике ABC (рис. 179) MK — средняя линия. Найдите координаты $\overline{BA}$, если $\overline{MK} = \overline{(3;\ -4)}$. $[\overline{(-6;\ 8)}.]$

3. В трапеции $ABDC$ (рис. 180) MK — средняя линия, $AB = 12$, $CD = 8$. Найдите такое λ, что: а) $\overline{AB} = \lambda\overline{KM}$ $\left[\lambda = -\frac{6}{5}\right]$; б) $\overline{DC} = \lambda\overline{KM}$ $\left[\lambda = \frac{4}{5}\right]$.

В. 1. Даны векторы $\bar{a}\,(2;\ -4)$, $\bar{b}\,(1;\ 2)$, $\bar{c}\,(1;\ -2)$, $\bar{k}\,(-2;\ -4)$.

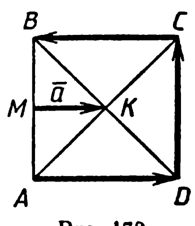


Рис. 178

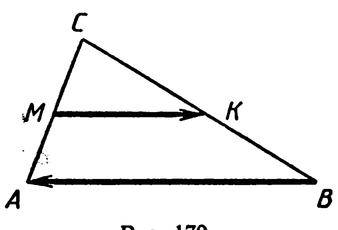


Рис. 179

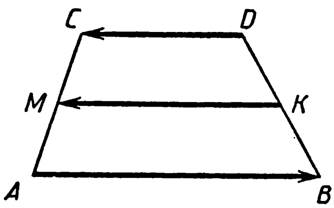


Рис. 180

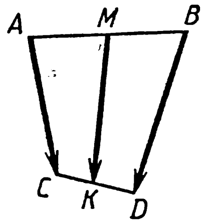


Рис. 181

Какие из этих векторов одинаково направлены, а какие противоположно направлены? Какие из них имеют равные абсолютные величины? [Указание. Одинаково или противоположно направленными могут быть только коллинеарные векторы. Выбрав пары коллинеарных векторов, найдите для них λ как отношение соответствующих координат; по знаку λ можно дать ответ на первый вопрос задачи. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ одинаково направлены, векторы $\bar{b}$ и $\bar{k}$ противоположно направлены; $|\bar{a}|=|\bar{k}|$, $|\bar{b}|=|\bar{c}|$.]

2. Точки M и K — середины отрезков AB и CD (рис. 181). Докажите векторное равенство $\overline{MK}=\frac{\overline{AC}+\overline{BD}}{2}$.

§ 7. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Те из физических величин, которые при выбранной системе единиц характеризуются только числом, носят название *скалярных*. Например, плотность, масса тела, его температура, электрический заряд и т. д. — скалярные величины.

2. Углом между любыми двумя векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется угол между равными им векторами с общим началом.

3. Угол между векторами, как и угол между лучами, может принимать значения от 0° до 180°. Угол между сонаправленными векторами равен 0°, а угол между противоположно направленными векторами равен 180°.

4. Если угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{c}$ равен 90°, то векторы $\bar{a}$ и $\bar{c}$ называются перпендикулярными (или ортогональными).

5. *Скалярным произведением векторов* $\bar{a}(a_1;\ a_2)$ и $\bar{b}(b_1;\ b_2)$ называется число $a_1b_1+a_2b_2$.

6. Скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между ними:

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cdot\cos\alpha. \qquad (1)$$

7. Скалярное произведение векторов положительно, если угол между ними острый.

8. Скалярное произведение отрицательно, если угол между векторами тупой.

9. Если угол между векторами равен 90° (т. е. косинус угла равен нулю), то скалярное произведение этих векторов равно нулю.

10. Верно и обратное утверждение: если скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю, то эти векторы перпендикулярны.

11. Свойства скалярного произведения:

$$\bar{a}\cdot\bar{a}=|\bar{a}|^2;\ \bar{a}\cdot\bar{b}=\bar{b}\cdot\bar{a};\ (\lambda\bar{a})\,\bar{b}=\lambda\,(\bar{a}\cdot\bar{b});$$
$$(\bar{a}+\bar{c})\cdot\bar{b}=\bar{a}\cdot\bar{b}+\bar{c}\cdot\bar{b}.$$

12. Пусть $\bar{a}\,(a_1;\ a_2)$, $\bar{b}\,(b_1;\ b_2)$, тогда косинус угла α между этими векторами вычисляется по формуле

$$\cos\alpha=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}. \qquad (2)$$

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Найдите длину диагонали AC ромба $ABCD$, у которого длины сторон равны 1 и угол BAD равен 30° (рис. 182).

Решение. 1. $\overline{AC}=\overline{AB}+\overline{AD}$ (свойство параллелограмма).

2. Возведем это равенство в квадрат и, применив формулу квадрата суммы, получим:

$$\overline{AC}^2=|\overline{AC}|^2;\ \overline{AB}^2=|\overline{AB}|^2=1;\ \overline{AD}^2=|\overline{AD}|^2=1;$$

3. По условию $|\overline{AB}|=|\overline{AD}|=1$ и $\angle ABD=30°$, тогда по свойству скалярного произведения векторов имеем:

$$\overline{AC}^2=|\overline{AC}|^2;\ \overline{AB}^2=|\overline{AB}|^2=1;\ \overline{AD}^2=|\overline{AD}|^2=1;$$
$$2\overline{AB}\cdot\overline{AD}=2\cdot|\overline{AB}|\cdot|\overline{AD}|\cdot\cos 30°=2\cdot1\cdot1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{3}.$$

4. Следовательно, $|\overline{AC}|^2=2+\sqrt{3}$ или $AC=\sqrt{2+\sqrt{3}}$.

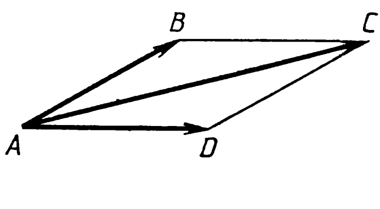


Рис. 182

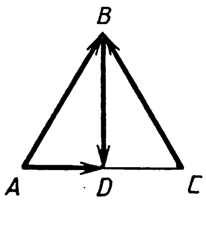


Рис. 183

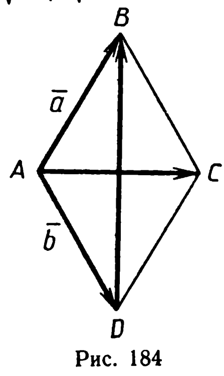


Рис. 184

Задача 2. На рисунке 183 изображен равносторонний треугольник ABC со стороной, равной a. Найдите скалярное произведение векторов: а) $\overline{AB}$ и $\overline{AD}$; б) $\overline{AD}$ и $\overline{BD}$; в) $\overline{AD}$ и $\overline{CB}$.

Решение. а) $\overline{AB}\cdot\overline{AD}=|\overline{AB}|\cdot|\overline{AD}|\cdot\cos 60^\circ=a\cdot\frac{a}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{a^2}{4}$;

б) $\overline{AD}\cdot\overline{BD}=|\overline{AD}|\cdot|\overline{DB}|\cdot\cos 90^\circ=0$;

в) $\overline{AD}\cdot\overline{CB}=|\overline{AD}|\cdot|\overline{CB}|\cdot\cos 120^\circ=\frac{a}{2}\cdot a\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{a^2}{4}$.

Задача 3. Найдите угол α между векторами $\bar{a}(1;\ \sqrt{3})$ и $\bar{b}(-0{,}5;\ 0{,}5\sqrt{3})$.

Решение. 1. Косинус угла между двумя векторами равен:

$$\cos\alpha=\frac{\bar{a}\cdot\bar{b}}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}.$$

2. Подставим в формулу координаты векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\cos\alpha=\frac{1\cdot(-0{,}5)+\sqrt{3}\cdot 0{,}5\sqrt{3}}{\sqrt{1+3}\cdot\sqrt{0{,}25+0{,}75}}=\frac{1}{2}.$$

3. $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$, следовательно, $\alpha=60^\circ$.

Задача 4. Даны векторы $\bar{a}(1;\ 0)$ и $\bar{b}(1;\ 1)$. Найдите такое число λ, чтобы вектор $\bar{a}+\lambda\bar{b}$ был перпендикулярен вектору $\bar{a}$.

Решение. 1. Если скалярное произведение ненулевых векторов равно нулю, то векторы перпендикулярны.

2. Следовательно, $\bar{a}(\bar{a}+\lambda\bar{b})=0$. Раскроем скобки и получим $\bar{a}^2+\lambda(\bar{a}\,\bar{b})=0$, откуда $\lambda=-\frac{\bar{a}^2}{\bar{a}\cdot\bar{b}}=-\frac{\bar{a}\cdot\bar{a}}{\bar{a}\cdot\bar{b}}=-\frac{1\cdot 1+0\cdot 10}{1\cdot 1+0\cdot 1}=-1$.

Задача 5. Докажите с помощью векторов, что диагонали ромба перпендикулярны.

Решение. 1. Пусть в ромбе $ABCD$ (рис. 184) $\overline{AB}=\bar{a}$, $\overline{AD}=\bar{b}$, тогда $\overline{AC}=\bar{a}+\bar{b}$, $\overline{DB}=\bar{a}-\bar{b}$.

2. Найдем $\overline{AC}\cdot\overline{DB}=(\bar{a}+\bar{b})(\bar{a}-\bar{b})=\bar{a}^2-\bar{b}^2=|\bar{a}|^2-|\bar{b}|^2$, но так как $|\bar{a}|=|\bar{b}|$, то $|\bar{a}|^2-|\bar{b}|^2=0$.

3. Следовательно, диагонали AC и DB перпендикулярны.

Контрольные вопросы

1. Что называется углом между ненулевыми векторами?
2. Дайте определение скалярного произведения векторов.
3. Чему равно скалярное произведение вектора на этот же вектор?
4. Чему равно скалярное произведение двух перпендикулярных векторов?
5. Каков угол между двумя ненулевыми векторами, если их скалярное произведение равно нулю?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Найдите угол α между векторами $\bar{a}(2;\ 0)$ и $\bar{b}(-2;\ 2)$. [$\alpha=135°$.]

2. Найдите скалярное произведение векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$, если $|\bar{a}|=5$, $|\bar{b}|=3$ и они образуют угол $\alpha=120°$. [$-7{,}5$.]

Б. 1. Найдите угол A в треугольнике с вершинами $A(1;\ 2\sqrt{3})$, $B(-1;\ 0)$, $C(1;\ 0)$. [30°.]

2. Даны вершины треугольника $A(1;\ 1)$, $B(4;\ 1)$, $C(4;\ 5)$. Найдите косинусы углов треугольника. [$\cos A=0{,}6$, $\cos B=0$, $\cos C=0{,}8$.]

3. Даны векторы $\bar{a}(3;\ 4)$ и $\bar{b}(k;\ 2)$. При каком значении k эти векторы перпендикулярны? $\left[-\frac{8}{3}.\right]$

4. В треугольнике ABC даны векторы $\overline{BC}=\bar{a}$ и $\overline{BM}=\bar{k}$, где BM — медиана. Выразите векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ через векторы $\bar{a}$ и $\bar{k}$. [$\overline{AC}=2\bar{a}-2\bar{k}$, $\overline{AB}=\bar{a}-2\bar{k}$.]

В. 1. Даны векторы $\bar{a}(1;\ 0)$ и $\bar{b}(1;\ 1)$. При каком значении λ вектор $\bar{a}+\lambda\bar{b}$ перпендикулярен вектору $\bar{b}$? [$-0{,}5$.]

2. Докажите, что медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая делит их в отношении 2:1, считая от соответствующих вершин.

3. Дан треугольник с вершинами в точках $A(1;\ 1)$, $B(-4;\ 3)$ и $C(2;\ 2)$. Найдите длину медианы AK. [2,5.]

4. Стороны параллелограмма $AB=\sqrt{3}$, $AD=1$, угол между ними равен 30°. Найдите косинус угла между диагоналями параллелограмма. $\left[\frac{2}{7}.\right]$

ГЛАВА IX

§ 1. ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Квадрат любой стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон без удвоенного произведения этих сторон на косинус угла между ними (теорема косинусов).

2. В треугольнике ABC (рис. 185) по теореме косинусов

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cdot\cos\alpha.$$

3. Квадрат стороны треугольника равен сумме квадратов двух других сторон «$\pm$» удвоенное произведение одной из них на проекцию другой. Знак «$+$» надо брать, когда противолежащий угол тупой, а знак «$-$» — когда угол острый.

4. Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон (рис. 186), т. е.

$$d_1^2+d_2^2=a^2+a^2+b^2+b^2$$

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Даны диагонали параллелограмма c и k и угол между ними. Найдите стороны параллелограмма.

Решение. 1. Из треугольника OCD (рис. 187) имеем:

$$DC^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{k}{2}\right)^2-2\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{k}{2}\cos\alpha.$$

2. После упрощения получим $DC=0{,}5\sqrt{c^2+k^2-2ck\cdot\cos\alpha}$.

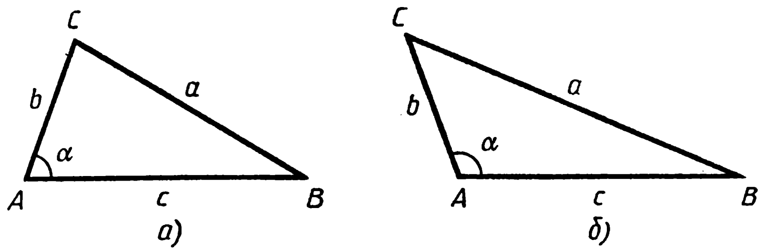


Рис. 185

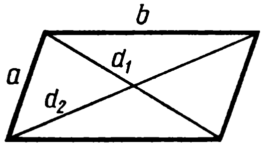


Рис. 186

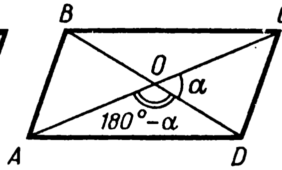


Рис. 187

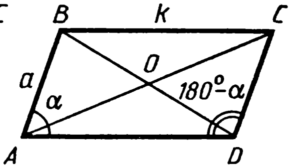


Рис. 188

3. Аналогично из треугольника AOD имеем:

$$AD^2=\left(\frac{c}{2}\right)^2+\left(\frac{k}{2}\right)^2-2\cdot\frac{c}{2}\cdot\frac{k}{2}\cdot\cos(180°-\alpha),$$

$$AD=0{,}5\sqrt{c^2+k^2+2c\cdot k\cdot\cos\alpha}.$$

4. В параллелограмме противолежащие стороны равны, следовательно, $DC=AB$ и $AD=BC$.

Задача 2. Даны стороны параллелограмма a и k и острый угол α. Найдите диагонали параллелограмма.

Решение. 1. Из треугольника ABD (рис. 188) имеем:

$$BD^2=a^2+k^2-2a\cdot k\cdot\cos\alpha$$
$$BD=\sqrt{a^2+k^2-2a\cdot k\cdot\cos\alpha}.$$

2. Из треугольника ACD имеем:

$$AC^2=a^2+k^2-2a\cdot k\cdot\cos(180°-\alpha),$$
$$AC=\sqrt{a^2+k^2+2a\cdot k\cdot\cos\alpha}.$$

Задача 3. В треугольнике две стороны 20 м и 21 м, а синус угла между ними равен 0,6. Найдите третью сторону.

Решение. Данная задача имеет два решения, так как если $\sin\alpha=0{,}6$, то угол α может быть как острым, так и тупым.

1-й случай. 1. Угол α острый (рис. 189), следовательно, $\cos\alpha>0$. Найдем его:

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-0{,}36}=0{,}8.$$

2. Найдем третью сторону треугольника ABC:

$$BC^2=AB^2+AC^2-2\cdot AB\cdot AC\cdot\cos\alpha,$$
$$BC^2=20^2+21^2-2\cdot20\cdot21\cdot0{,}8=169,$$

откуда $BC=13$ м.

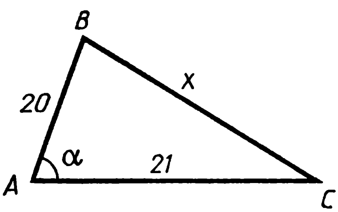


Рис. 189

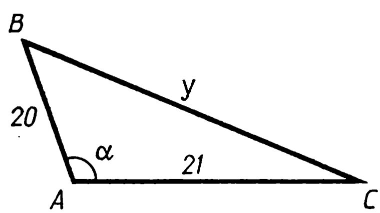


Рис. 190

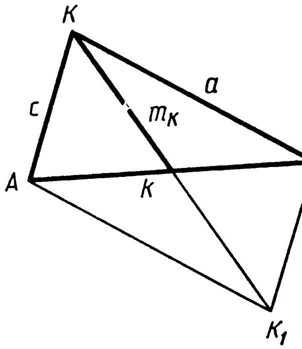


Рис. 191

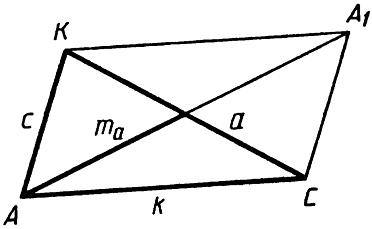


Рис. 192

2-й случай. 1. Угол α тупой (рис. 190), следовательно, $\cos\alpha < 0$. Найдем его:

$$\cos\alpha = -\sqrt{1-\sin^2\alpha} = -0{,}8.$$

2. Найдем третью сторону треугольника ABC:

$$BC^2 = 20^2 + 21^2 - 2\cdot 20\cdot 21\cdot(-0{,}8) = 1513,$$

откуда $BC = \sqrt{1513}$ м.

Задача 4. Даны стороны треугольника a, k, c. Найдите медианы m_a, m_k, m_c, проведенные к этим сторонам.

Решение. 1. Достроим треугольник AKC до параллелограмма так, чтобы AK и KC были его сторонами (рис. 191), тогда $KK_1 = 2m_k$.

2. По следствию из теоремы косинусов имеем

$$AC^2 + K_1K^2 = 2(a^2 + c^2), \text{ или } k^2 + (2m_k)^2 = 2(a^2 + c^2).$$

3. Из полученного равенства найдем медиану m_k:

$$m_k = \frac{\sqrt{2a^2 + 2c^2 - k^2}}{2}.$$

4. Чтобы найти вторую медиану треугольника AKC, достроим его до параллелограмма так, чтобы AK и AC были его сторонами, тогда $AA_1 = 2m_a$ (рис. 192).

5. По следствию из теоремы косинусов имеем

$$KC^2 + A_1A^2 = 2(c^2 + k^2), \text{ или } a^2 + (2m_a)^2 = 2(c^2 + k^2).$$

6. Из полученного равенства найдем медиану:

$$m_a = \frac{\sqrt{2c^2 + 2k^2 - a^2}}{2}.$$

7. Аналогично находим и третью медиану.

Задача 5. Как изменится сторона AB треугольника ABC, если угол C увеличится, а стороны AC и BC останутся без изменений?

Решение. 1. Согласно теореме косинусов имеем:

$$AB^2=AC^2+BC^2-2AC\cdot BC\cdot\cos C. \qquad (1)$$

2. Проанализировать соотношение (1) достаточно легко: косинус — функция убывающая, значит с возрастанием угла C уменьшается $\cos C$, значение выражения $AC\cdot BC\cdot\cos C$ уменьшается, а AC^2+BC^2 остается прежним. Следовательно, AB увеличивается.

Контрольные вопросы

1. Какие основные элементы треугольника можно определить с помощью теоремы косинусов?
2. Сформулируйте теорему косинусов.
3. Дан треугольник со сторонами a, b, c, причем угол α, противолежащий стороне c: а) острый; б) прямой; в) тупой. В каком из этих трех случаев длина стороны c будет наибольшей? наименьшей?
4. Как с помощью теоремы косинусов, зная стороны треугольника, можно найти его углы? Покажите, как это делается, на конкретном примере.
5. Как по трем сторонам треугольника установить, будет он прямоугольный, остроугольный или тупоугольный?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Стороны треугольника 13 м, 14 м, 15 м. Найдите косинусы углов треугольника. $\left[\frac{5}{13};\ \frac{33}{65};\ 0{,}6.\right]$

2. Стороны треугольника равны a и k. Найдите третью сторону, если угол между известными сторонами равен: а) 60°; б) 45°; в) 120°. $[\sqrt{a^2+k^2-ak};\ \sqrt{a^2+k^2-ak\sqrt{2}};\ \sqrt{a^2+k^2+ak}.]$

3. В треугольнике ABC стороны $a=7$, $b=8$, $c=5$. Вычислите угол A. [60°.]

4. В треугольнике ABC стороны $a=7$ м, $b=11$ м, $c=14$ м. Найдите медиану, проведенную к стороне c. [6 м.]

Б. 1. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

2. Найдите меньшую диагональ правильного шестиугольника, если сторона его равна 2 м. $[2\sqrt{3}$ м.]

В. 1. Найдите медиану треугольника ABC, проведенную из вершины C, если стороны, лежащие против вершин A, B, C, равны соответственно a, b, c. $\left[\sqrt{\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}-\frac{c^2}{4}}.\right]$

2. В равнобедренной трапеции диагонали пересекаются под углом 60°. Найдите диагонали и нижнее основание трапеции, если верхнее основание 3 м, а боковая сторона трапеции 4 м. $\left[\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{55}}{2};\ 0{,}5\sqrt{3}\,(\sqrt{3}+\sqrt{55}).\right]$

§ 2. ТЕОРЕМА СИНУСОВ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Для произвольного треугольника, стороны которого соответственно равны a, b, c, а противолежащие им углы — α, β, γ, справедлива теорема, устанавливающая соотношения между сторонами и углами треугольника (теорема синусов):

Во всяком треугольнике стороны пропорциональны синусам противолежащих углов:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}. \qquad (1)$$

2. В теореме синусов каждое из трех отношений равно $2R$, где R — радиус окружности, описанной около треугольника:

$$\frac{a}{\sin\alpha}=\frac{b}{\sin\beta}=\frac{c}{\sin\gamma}=2R.$$

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. В треугольнике ABC угол A равен 30°, угол B равен 30°. Найдите отношение $a:c$.

Решение. 1. По теореме синусов

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C}. \qquad (1)$$

2. Используя теорему о сумме внутренних углов треугольника, имеем $\angle C=180°-(30°+30°)=120°$.

3. Так как

$$\sin 120°=\sin(180°-60°)=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

то $\dfrac{a}{\frac{1}{2}}=\dfrac{c}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$,

или $a:c=1:\sqrt{3}$.

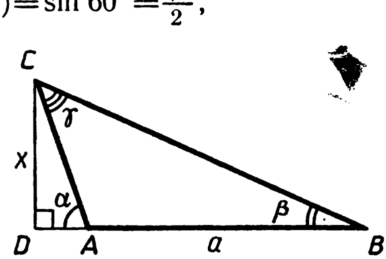


Рис. 193

Задача 2. Найдите высоту CD треугольника ACB по углам α и β и стороне AB, равной a (рис. 193).

Решение. 1. Угол α — внешний угол треугольника ABC, следовательно, $\alpha=\gamma+\beta$, откуда $\gamma=\alpha-\beta$. По условию $AB=a$.

2. Используем теорему синусов для треугольника ABC:

$$\frac{AB}{\sin\gamma}=\frac{AC}{\sin\beta}, \text{ откуда } AC=\frac{AB\sin\beta}{\sin\gamma}=\frac{a\sin\beta}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

3. Из прямоугольного треугольника ADC найдем:

$$\sin\alpha=\frac{CD}{AC}, \text{ или } CD=AC\cdot\sin\alpha.$$

4. Подставив найденное значение AC, найдем высоту:

$$h=\frac{a\cdot\sin\beta\cdot\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)}.$$

Контрольные вопросы

1. В треугольнике ABC известно, что $a:b:c=2:3:4$. Как относятся синусы углов треугольника?
2. Синусы углов треугольника относятся как $3:4:5$. Как относятся стороны? Какой это треугольник?
3. Могут ли синусы углов треугольника относиться как: а) $3:4:5$; б) $5:7:13$?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. **1.** В треугольнике две стороны равны 5 и 6 м. Может ли угол, противолежащий стороне 5 м, быть тупым? [Не может, так как если бы этот угол был тупым, то противолежащая сторона была бы наибольшей.]

2. В треугольнике ABC $AB=15$ м, $AC=10$ м. Может ли $\sin B=\frac{3}{4}$? [Не может.]

3. В треугольнике ABC стороны $AB=5{,}1$ м, $BC=6{,}2$ м, $AC=7{,}3$ м. Какой из углов треугольника наибольший, какой — наименьший?

Б. **1.** В треугольнике ABC даны сторона, равная a, и углы A и B. Найдите угол C, стороны b и c. $\left[b=\frac{a\cdot\sin B}{\sin A},\ \angle C=180°-(\angle A+\angle B),\ c=\frac{a\cdot\sin(\angle A+\angle B)}{\sin A}.\right]$

2. Даны сторона a и два угла α и β треугольника. Найдите третий угол и остальные две стороны, если $a=20$, $\alpha=75°$, $\beta=60°$. [$\gamma=45°$, $b\approx17{,}9$, $c\approx14{,}6$.]

В. В равнобедренном треугольнике ABC длины боковых сторон AB и AC равны k, угол при вершине A равен 2α. Прямая, проходящая через вершину B и центр O описанной около треугольника ABC окружности, пересекает сторону AC в точке D. Найдите отрезки BD и CB. $\left[k\frac{\sin 2\alpha}{\sin 3\alpha};\ 2k\sin\alpha.\right]$

§ 3. ВЫПУКЛЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Ломаной* $A_1A_2A_3...A_k$ называется фигура, которая состоит из точек A_1, A_2, ..., A_k и соединяющих их отрезков A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{k-1}A_k$. Точки A_1, A_2, ..., A_k называются *вершинами* ломаной, а отрезки A_1A_2, A_2A_3, ..., $A_{k-1}A_k$ — *звеньями* ломаной.

2. Длиной ломаной называется сумма длин ее звеньев.

3. *Длина ломаной* не меньше длины отрезка, соединяющего ее концы.

4. Ломаная называется *простой*, если она не имеет самопересечений.

5. Ломаная называется *замкнутой*, если у нее концы совпадают.

6. Простая замкнутая ломаная называется *многоугольником*, если ее соседние звенья не лежат на одной прямой.

7. Многоугольник называется *выпуклым*, если он лежит в одной полуплоскости относительно любой прямой, содержащей его сторону (рис. 194).

8. На рисунке 195 многоугольник невыпуклый.

9. *Углом выпуклого многоугольника* при данной вершине называется угол, образованный его сторонами, выходящими из этой вершины.

10. *Внешним углом выпуклого многоугольника* при данной вершине называется угол, смежный внутреннему углу многоугольника при этой вершине.

11. Сумма всех внутренних углов выпуклого k-угольника равна $180° (k-2)$, а внешних, взятых по одному при каждой вершине, равна $360°$.

12. Выпуклый многоугольник называется *правильным*, если у него все стороны равны и все углы равны. На рисунке 196, *а* изображен правильный шестиугольник.

13. Отрезок OM называется *апофемой* правильного многоугольника $ABCDEF$ (O — центр многоугольника и $OM \perp AF$, рис. 196, *б*).

14. Многоугольник называется *вписанным* в окружность, если все его вершины лежат на окружности. В этом случае также говорят: «Окружность описана около многоугольника» (рис. 197, *а*).

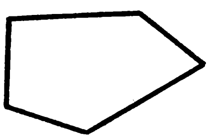


Рис. 194

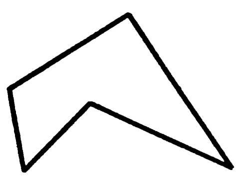


Рис. 195

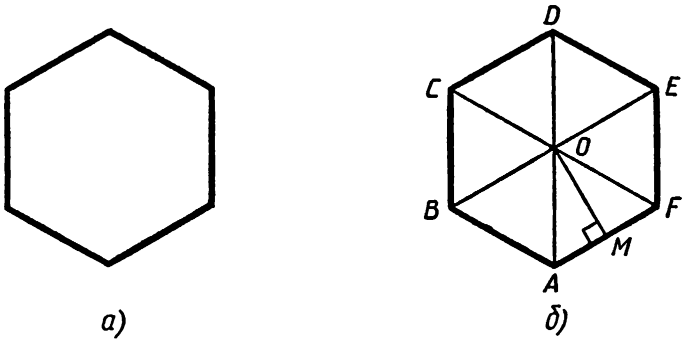


Рис. 196

15. Многоугольник называется *описанным* около окружности, если все его стороны касаются этой окружности. В этом случае также говорят: «Окружность вписана в многоугольник» (рис. 197, *б*).

16. Если четырехугольник описан около окружности, то суммы противоположных сторон равны между собой.

17. Если четырехугольник вписан в окружность, то сумма противоположных углов равна 180°.

18. Радиус R описанной окружности и радиус r вписанной окружности для правильного многоугольника со стороной a и числом сторон k определяются так:

$$R=\frac{a}{2\sin\frac{180^\circ}{k}},\quad r=\frac{a}{2\operatorname{tg}\frac{180^\circ}{k}}.$$

19. Для правильного (равностороннего) треугольника

$$R=\frac{a}{\sqrt{3}},\quad r=\frac{a}{2\sqrt{3}}.$$

20. Для правильного четырехугольника (квадрата)

$$R=\frac{a}{\sqrt{2}},\quad r=\frac{a}{2}.$$

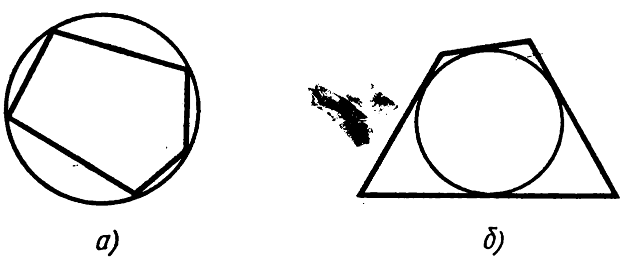


Рис. 197

21. Для правильного шестиугольника

$$R=a,\ r=\frac{a\sqrt{3}}{2}.$$

22. *Плоским многоугольником* называется часть плоскости, ограниченная многоугольником.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Сколько сторон имеет правильный многоугольник, каждый из внутренних углов которого равен 135°?

Решение. 1. Сумма внутренних углов многоугольника определяется формулой $180°(k-2)$, где k — количество сторон многоугольника.

2. По условию задачи составим уравнение

$$135\cdot k=180(k-2),\ \text{откуда}\ k=8.$$

Задача 2. Сторона правильного вписанного в окружность треугольника равна 3. Найдите сторону квадрата, вписанного в эту окружность.

Решение. 1. Пусть $a_3=3$ — сторона правильного треугольника BEK, вписанного в окружность радиуса $OE=OB=R$ (рис. 198). Тогда

$$R=\frac{a_3}{\sqrt{3}}=\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}.$$

2. Если a_4 — сторона квадрата, вписанного в ту же окружность, то

$$R=\frac{a_4}{\sqrt{2}}.$$

3. Подставив значение радиуса в эту формулу, находим, что $a_4=\sqrt{6}$.

Задача 3. В окружность, радиус которой 4 м, вписан правильный треугольник, на стороне которого построен квадрат. Найдите радиус окружности, описанной около квадрата.

Решение. 1. Так как треугольник ABC правильный и вписан в окружность с $R_3=4$ м (рис. 199), то из формулы $R=\frac{a_3}{\sqrt{3}}$ получаем, что $a_3=4\sqrt{3}$, т. е. $BC=4\sqrt{3}$ м.

2. Квадрат $BDEC$ вписан в другую окружность с радиусом R_4. Так как BC — сторона этого квадрата, то $a_4=a_3=4\sqrt{3}$.

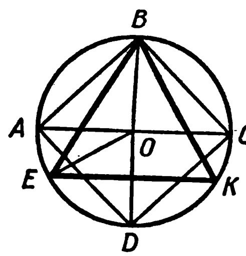


Рис. 198

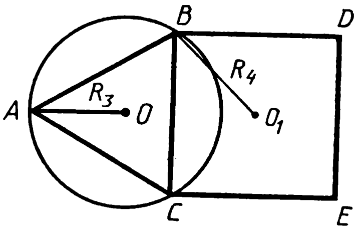


Рис. 199

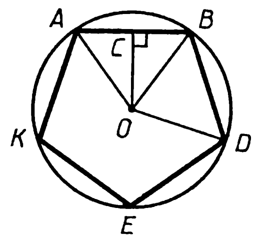


Рис. 200

Тогда по формуле $R_4=\frac{a_4}{\sqrt{2}}$ получаем, что искомый $R_4=\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=$ $=2\sqrt{6}$ м.

Задача 4. Найдите сторону и апофему правильного пятиугольника, вписанного в окружность радиуса R.

Решение. 1. Пусть AB — сторона вписанного пятиугольника $ABDEK$, OC — его апофема, т. е. $OC\perp AB$ (рис. 200).

2. Так как сумма внутренних углов правильного пятиугольника равна $180°(5-2)=540°$, а сами эти углы равны между собой, то $\angle ABD=\frac{540°}{5}=108°$.

3. OB — биссектриса угла ABD, тогда $\angle ABO=108°:2=54°$.

4. Из прямоугольного треугольника OBC найдем:

$$\cos 54°=\frac{CB}{R},\text{ или } CB=R\cos 54°;\ AB=2CB=2R\cos 54°;$$

$$\sin 54°=\frac{OC}{R},\text{ или } OC=R\sin 54°.$$

5. Таким образом, сторона пятиугольника равна $2R\cos 54°$, а апофема $OC=R\sin 54°$.

Контрольные вопросы

1. Что такое ломаная? длина ломаной?
2. Верно ли, что длина ломаной меньше длины отрезка, соединяющего ее концы? Приведите примеры.
3. Что такое многоугольник? выпуклый многоугольник?
4. Напишите формулу суммы углов выпуклого многоугольника. Проверьте эту формулу для квадрата.
5. Напишите формулы радиусов вписанной и описанной окружностей правильного треугольника, квадрата и шестиугольника.
6. Приведите пример выпуклого многоугольника, у которого:
   а) все стороны равны, но он не является правильным;
   б) все углы равны, но он не является правильным.
7. Назовите выпуклый четырехугольник, у которого внешние углы прямые.
8. Сколько сторон имеет выпуклый многоугольник, если сумма его внутренних углов равна сумме внешних?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. **1.** Могут ли стороны пятиугольника равняться 3 м, 4 м, 6 м, 8 м, 25 м? [Не могут.]

2. Найдите сумму внутренних углов выпуклого: а) пятиугольника [540°]; б) десятиугольника [1440°].

3. Сколько сторон имеет k-угольник, если сумма его внутренних углов равна: а) 1260° [9]; б) 1980° [13]?

4. Сторона квадрата 3 м. Найдите радиус вписанной и радиус описанной окружностей. [1,5 м, $1{,}5\sqrt{2}$ м.]

5. Найдите сторону правильного двадцатиугольника, если его апофема равна a. [$2a \operatorname{tg} 9°$.]

6. Найдите апофему правильного десятиугольника по его стороне, равной $2a$. [$a \operatorname{tg} 72°$.]

7. Радиус круга, описанного около правильного десятиугольника, равен R. Найдите периметр этого десятиугольника. [$20R \sin 18°$.]

8. Найдите сторону правильного треугольника, описанного около окружности радиуса r. [$2r\sqrt{3}$.]

Б. **1.** В k-угольнике все внутренние углы равны между собой. Может ли сумма внутренних углов k-угольника равняться: а) 360° [может, при $k=4$]; б) 380°? [Не может, так как уравнение $180°(k-2)=380°$ не имеет натурального корня.]

2. Найдите углы выпуклого четырехугольника, если их градусные меры пропорциональны числам 1, 2, 2, 4. [40°, 80°, 80°, 160°]

3. У правильного треугольника радиус вписанной окружности в два раза меньше радиуса описанной окружности. Докажите.

4. Конец валика диаметром 4 см опилен под квадрат. Найдите наибольший размер, который может иметь сторона квадрата. [$2\sqrt{2}$ см.]

5. Катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4 м. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей. [2,5 м, 1 м]

6. Около круга описана равнобокая трапеция, периметр которой равен 20 м. Найдите среднюю линию. [5 м]

7. Около круга описана равнобокая трапеция, периметр которой равен 20 м. Найдите боковую сторону. [5 м]

В. **1.** Катеты прямоугольного треугольника равны a и k. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей. $\left[\frac{\sqrt{a^2+k^2}}{2},\ 0{,}5\left(a+k-\sqrt{a^2+k^2}\right).\right]$

2. Центр круга, вписанного в прямоугольную трапецию, отстоит от концов боковой стороны на 2 м и 4 м (рис. 201, a). Докажите, что $\angle COD=90°$, а $BC+AD=\frac{18\sqrt{5}}{5}$ м.

3. В окружность вписан равнобедренный треугольник ABC с основанием $AC=k$ и углом при основании α. Вне треугольника проведена окружность, которая касается первой окружности и

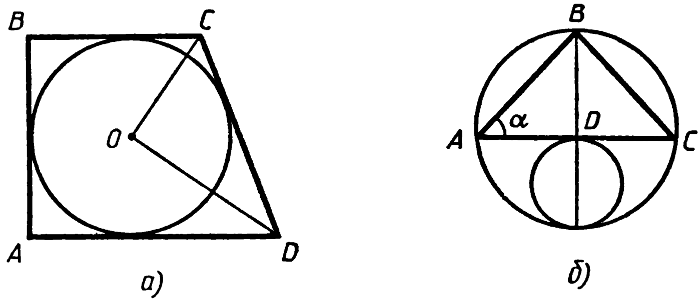


Рис. 201

основания треугольника в его середине D. Найдите радиус второй окружности (рис. 201, *б*). $\left[\frac{R}{4}\text{ctg }\alpha.\right]$

§ 4. ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ. ЦЕНТРАЛЬНЫЙ УГОЛ И ДУГА ОКРУЖНОСТИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Отношение длины окружности к своему диаметру есть величина постоянная для всех окружностей.

2. Отношение длины окружности к диаметру принято обозначать греческой буквой π (читается «пи»).

3. Число π иррациональное. Приблизительное значение $\pi \approx \approx 3{,}1416$.

4. Длина окружности вычисляется по формуле $C = 2\pi R$.

5. *Плоским углом* называется часть плоскости, ограниченная двумя различными лучами, исходящими из одной точки. Эти лучи называются сторонами угла. Существуют два плоских угла с данными сторонами. Они называются *дополнительными* (рис. 202, *а*).

6. *Центральным углом* в окружности называется плоский угол с вершиной в ее центре.

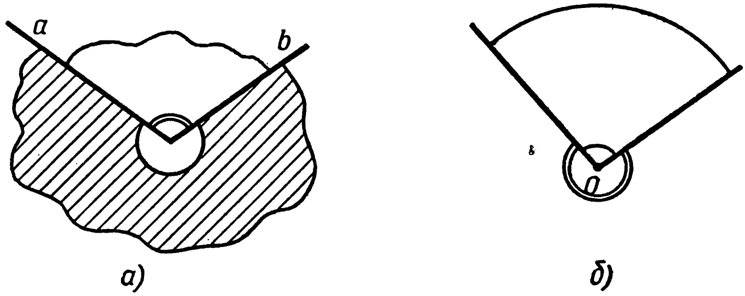


Рис. 202

7. Часть окружности, расположенная внутри плоского угла, называется *дугой* окружности, соответствующей этому центральному углу (рис. 202,*б*).

8. Градусная мера дуги окружности равна градусной мере соответствующего центрального угла.

9. Отношение длины дуги окружности l к ее радиусу называется радианной мерой a этой дуги:

$$a=\frac{l}{R}. \qquad (1)$$

10. При радианном измерении дуг за единицу измерения принимается дуга, длина которой равна ее радиусу (рис. 203).

11. При радианном измерении углов за единицу измерения принимается центральный угол, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу. Этот угол называется *радианом.*

12. Из формулы (1) следует, что окружность имеет радианную меру 2π радиан, т. е. $360°=2\pi$.

13. Радианная мера угла 180° равна π, а радианная мера прямого угла равна $\frac{\pi}{2}$.

14. Градусная мера угла в один радиан равна $\frac{180°}{\pi}\approx 57°$.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. На сколько изменится длина окружности, если радиус увеличится на 1 м?

Решение. 1. Радиус первоначальной окружности был R_1, тогда длина этой окружности $C=2\pi R_1$.

2. По условию радиус первоначальной окружности увеличивается на 1 м, т. е. $R_2=(R_1+1)$, тогда длина новой окружности $C_2=2\pi R_2=2\pi(R_1+1)$.

3. Найдем разность $C_2-C_1=2\pi(R_1+1)-2\pi R_1=2\pi$.

4. $C_2-C_1=6{,}28$ м.

Задача 2. Найдите длину окружности, если высота вписанного в нее правильного треугольника равна $3k$.

Решение 1. Пусть треугольник ABC — правильный впи-

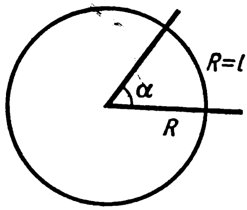


Рис. 203

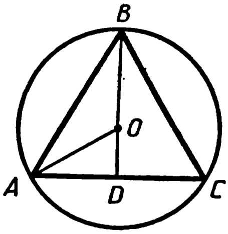


Рис. 204

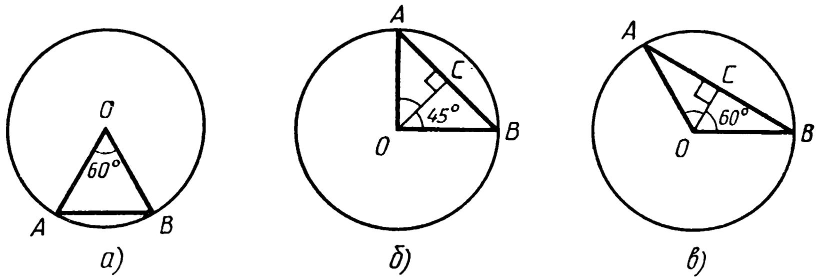


Рис. 205

санный в окружность с центром в точке O (рис. 204). Значит, O — это точка пересечения высот треугольника ABC, следовательно, $\angle BDA = 90°$.

2. В прямоугольном треугольнике ABD сторона $BD = 3k$ и $\angle BAD = 60°$. Тогда

$$\sin A = \frac{BD}{AB},\ AB = \frac{BD}{\sin A},\ AB = \frac{3k}{\sin 60°} = \frac{3k \cdot 2}{\sqrt{3}} = 2k\sqrt{3}.$$

Зная, что $R = \frac{a_3}{\sqrt{3}}$, получим $R = \frac{2k\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = 2k$.

3. Следовательно, $C = 2\pi R$, или $C = 4\pi k$.

Задача 3. По данной хорде k найдите длину ее дуги, если она соответствует центральному углу: а) 60°; б) 90°; в) 120°.

Решение. а) $\angle AOB = 60°$ (рис. 205, *а*):

1. $\angle AOB = 60°$; $AB = k$. Треугольник AOB равносторонний, $R = AO = k$.

2. $l = \frac{\pi R}{180°} \cdot 60° = \frac{\pi k}{3}$.

б) $\angle AOB = 90°$ (рис. 205, *б*):

1. $\angle AOB = 90°$; $AB = k$, $OC \perp AB$, $\angle COB = 45°$, $CB = \frac{k}{2}$.

2. Из прямоугольного треугольника OCB

$$\sin 45° = \frac{CB}{OB}, \text{ или } OB = R = \frac{CB}{\sin 45°} = \frac{2k}{2\sqrt{2}} = \frac{k}{\sqrt{2}}.$$

Следовательно, $l = \frac{\pi R}{180°} \cdot 90° = \frac{\pi k}{2\sqrt{2}}$.

в) $\angle AOB = 120°$ (рис. 205, *в*):

1. $\angle AOB = 120°$; $OC \perp OB$; $\angle COB = 60°$; $CB = \frac{k}{2}$.

2. Из прямоугольного треугольника OCB

$$\sin 60° = \frac{CB}{OB}, \text{ или } OB = R = \frac{CB}{\sin 60°} = \frac{k}{\sqrt{3}}.$$

Следовательно, $l = \frac{\pi R}{180°} \cdot 120° = \frac{2\pi k}{3\sqrt{3}}$.

Контрольные вопросы

1. По какой формуле вычисляется длина окружности?
2. Что такое плоский угол?
3. Что такое центральный угол?
4. По какой формуле вычисляется длина дуги окружности?
5. Что такое радианная мера угла?
6. Какой наибольший центральный угол может быть у правильного многоугольника?
7. Чему равен наименьший внутренний угол правильного многоугольника?
8. У какого правильного многоугольника центральный угол равен его внутреннему углу?
9. Может ли вписанный в окружность многоугольник иметь все равные стороны, но неравные углы?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Вычислите длину окружности, если радиус равен: а) 10 м; б) 15 м. [20π м; 30π м.]

2. На сколько удлинился бы земной экватор, если бы радиус земного шара увеличился на 1 см? [$\approx 6{,}3$ см.]

3. По данной длине дуги k найдите ее хорду, если дуга содержит: а) 60°; б) 90°; в) 120°. $\left[\frac{3k}{\pi};\ \frac{2\sqrt{2}k}{\pi};\ \frac{3\sqrt{3}k}{2\pi}.\right]$

4. Длина окружности равна 7π м. Найдите радиус окружности. [3,5 м.]

5. В круг вписан прямоугольник со сторонами 3 и 4 м. Найдите длину окружности. [5π м.]

Б. 1. Найдите радианную меру углов: а) 30°; б) 45°; в) 60°. $\left[\frac{\pi}{6};\ \frac{\pi}{4};\ \frac{\pi}{3}.\right]$

2. Окружность разделена двумя точками на 2 дуги. Найдите градусную меру каждой дуги, если одна из них в девять раз больше другой. [36°, 324°.]

3. Колесо машины при равномерном вращении делает 40 оборотов за 5 мин. Найдите его угловую скорость в радианах в секунду. $\left[\frac{4\pi}{15}\ с^{-1}.\right]$

В. 1. Шкив имеет в диаметре 1,4 м и делает 80 оборотов в минуту. Найдите скорость вращения точки на окружности шкива. [$1{,}4\pi \cdot 80$ м/мин.]

2. С вала сняли слой стружки толщиной 0,5 см. Найдите длину окружности вала до обработки, если длина окружности вала после обработки стала равной 28,25. [$\approx 31{,}4$.]

3. В окружность вписан прямоугольный треугольник. Две бóльшие высоты в треугольнике равны 7 и 24 м. Найдите наименьшую высоту этого треугольника и длину окружности. [6,27 м, 25π м.]

ГЛАВА X

§ 1. ПОНЯТИЕ ПЛОЩАДИ. ПЛОЩАДЬ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Непосредственное измерение площадей на практике затруднительно, поэтому используются косвенные методы, наиболее употребительным из которых является вычисление площадей по формулам.

2. За единицу *измерения площади* принимается площадь квадрата со стороной, равной единице.

3. Основание и высоту прямоугольника называют также его *измерениями.*

4. Число, равное произведению измерений прямоугольника, будем называть его площадью. Обозначают это число буквой S, тогда

$$S=a\cdot b,$$

где a и b — измерения прямоугольника.

5. Для определения площади прямоугольника существует вторая формула:

$$S=\frac{1}{2}d^2\sin\alpha,$$

где α — угол между диагоналями, d — диагональ.

6. Два многоугольника, имеющие равные площади, называются *равновеликими.*

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Как изменится площадь прямоугольника, если его основание увеличить на 50%, а высоту уменьшить на 50%?

Решение. 1. Если основание прямоугольника принять за x, а высоту за y, то его площадь будет равна $S=xy$.

2. Основание увеличили на 50%, т. е. оно стало $1{,}5x$. Высоту уменьшили на 50%, т. е. она стала $0{,}5y$. Поэтому

$$S_1 = 1{,}5x \cdot 0{,}5y = 0{,}75xy.$$

3. Следовательно, площадь прямоугольника уменьшится на 25%.

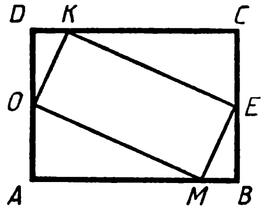


Рис. 206

Задача 2. В прямоугольник со сторонами 3 и 4 м вписан другой прямоугольник, стороны которого относятся как 1:3. Найдите площадь этого прямоугольника (рис. 206).

Решение. 1. Чтобы определить площадь прямоугольника $OKEM$, требуется найти его стороны OM и ME.

2. Обозначим MB через x и BE через y. Так как $AB=4$, то $AM=4-x$.

3. Треугольники DKO и BEM равны (по гипотенузе и острому углу), следовательно, $DO=BE=y$, т. е. $OA=3-y$.

4. Прямоугольные треугольники OAM и MEB подобны, так как их острые углы AOM и EMB равны (как углы со взаимно перпендикулярными сторонами), следовательно, стороны этих треугольников пропорциональны, т. е. $AM:BE=AO:MB=OM:ME$. По условию $OM:ME=3:1$, поэтому $OA=3MB$, а также $AM=3BE$, т. е. $3-y=3x$ и $4-x=3y$.

5. Так как оба уравнения должны выполняться одновременно, составим систему и решим ее:

$$\begin{cases} 3-y=3x, \\ 4-x=3y, \end{cases}$$

откуда находим $x=\frac{5}{8}$, $y=\frac{9}{8}$.

6. Из прямоугольного треугольника BME имеем:

$$ME=\sqrt{\left(\frac{5}{8}\right)^2+\left(\frac{9}{8}\right)^2}=\frac{\sqrt{106}}{8}, \text{ так как } MO=3ME, \text{ то}$$

$$MO=\frac{3\sqrt{106}}{8}.$$

7. Площадь прямоугольника $OKME$ будет равна $\frac{159}{32}$ м^2.

Контрольные вопросы

1. Что называется площадью прямоугольника?
2. Какие многоугольники называются равновеликими?
3. Какие вы знаете формулы площади прямоугольника?
4. Справедливо ли утверждение, обратное следующему: две равные фигуры равновелики?

5. Площади квадратных сечений двух стержней соответственно равны 100 см^2 и 64 см^2. Как относятся стороны сечений?
6. Могут ли быть равновеликими два неравных: а) прямоугольника; б) квадрата?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. **1.** Стороны двух участков земли квадратной формы равны 100 и 150 м. Найдите сторону квадратного участка, равновеликого им. [$50\sqrt{13}$ м.]

2. Найдите площадь квадрата по его диагонали, равной 4 м. [8 м^2.]

3. Как изменится площадь квадрата, если каждую его сторону увеличить в 3 раза? [Увеличится в 9 раз.]

4. Чему равны стороны прямоугольника, если они относятся как 4:9, а его площадь 144 м^2? [8 м и 18 м.]

5. В прямоугольнике $ABCD$ одна из сторон равна 24 см, диагональ 2,5 дм. Вычислите периметр и площадь этого прямоугольника. [62 см, 168 см^2.]

Б. **1.** Во сколько раз площадь квадрата, описанного около окружности, больше площади квадрата, вписанного в ту же окружность? [В 2 раза.]

2. Во сколько раз надо уменьшить сторону квадрата, чтобы его площадь уменьшилась в 25 раз? [В 5 раз.]

3. Чему равны стороны прямоугольника, если его периметр 74 дм, а площадь 3 м^2? [12 дм и 25 дм.]

4. Определите периметр прямоугольника, если его диагональ равна $2\sqrt{10}$ м, а площадь 12 м^2. [16 м.]

5. В прямоугольнике $ABCD$ биссектриса угла A пересекает сторону BC в точке E, причем $BE=a$, $EC=k$. Найдите площадь прямоугольника. [$a(a+k)$.]

6. Как изменится площадь квадрата и его периметр, если диагональ квадрата уменьшить: а) в два; б) в три раза? [а) Уменьшится в 4 раза, в 2 раза; б) уменьшится в 9 раз, в 3 раза.]

В. **1.** Найдите площадь квадрата, вписанного в правильный треугольник со стороной k. $\left[\dfrac{3k^2}{(2+\sqrt{3})^2}.\right]$

2. Площадь прямоугольника равна 9 м^2, а один из углов, образованных при пересечении диагоналей, равен 120°. Найдите стороны прямоугольника. [$3\cdot 3^{0,25}$, $3^{0,75}$.]

3. В параллелограмме проведены биссектрисы внутренних углов до взаимного пересечения. Докажите, что четырехугольник, образованный этими биссектрисами,— прямоугольник.

§ 2. ПЛОЩАДЬ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА. ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Площадь параллелограмма равна произведению его основания на высоту, т. е.

$$S = ah.$$

2. Площадь параллелограмма равна произведению двух смежных его сторон на синус угла, заключенного между ними, т. е.

$$S = ab \sin \alpha.$$

3. Площадь треугольника равна половине произведения его стороны на высоту, проведенную к этой стороне, т. е.

$$S = \frac{1}{2} a h_a.$$

4. Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон на синус угла, заключенного между ними, т. е.

$$S = \frac{1}{2} ab \sin \gamma.$$

5. Если треугольник равносторонний, то площадь его определяется формулой

$$S = \frac{a^2 \sqrt{3}}{4},$$

где a — сторона треугольника.

6. Формула Герона. Это формула, выражающая площадь треугольника через три его стороны a, b и c:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

где $\frac{a+b+c}{2} = p$ — полупериметр.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. В равнобедренном треугольнике основание равно 30 м, а высота, опущенная на основание, равна 20 м. Найдите высоту, опущенную на боковую сторону.

Решение. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 207 Тогда в треугольнике ABC основание $AC = 30$ м, высота $BD = 20$ м, следовательно, можно найти площадь этого треугольника:

$$S = \frac{1}{2} AC \cdot BD, \quad S = \frac{20 \cdot 30}{2}.$$

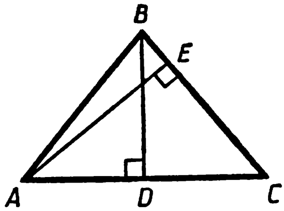


Рис. 207

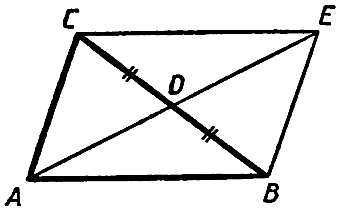


Рис. 208

2. Площадь этого треугольника можно найти и по-другому: $S=\frac{1}{2}BC\cdot AE$, откуда $AE=\frac{2S}{BC}$ (BC можно найти из прямоугольного треугольника BDC по теореме Пифагора).

$$AE=\frac{20\cdot 30}{\sqrt{20^2+\left(\frac{30}{2}\right)^2}},\ AE=24 \text{ м}.$$

Задача 2. Найдите площадь треугольника, если две его стороны соответственно равны 27 и 29 м, а медиана, проведенная к третьей стороне, равна 26 м.

Решен 1. Треугольник ACB достроим до параллелограмма $ACEB$, стороны которого 27 и 29 (рис. 208).

2. Площадь треугольника ABC составляет половину площади полученного параллелограмма, но и площадь треугольника ABE также составляет половину площади параллелограмма $ABEC$.

3. Следовательно, площадь треугольника ABC равна площади треугольника ABE, стороны которого равны: $AB=27$, $BE=29$, $AE=52$.

4. Площадь треугольника ABE можно вычислить по формуле Герона:

$$S_{\triangle ABE}=\sqrt{54\,(54-27)\,(54-29)(54-52)}=270.$$

Следовательно, $S_{\triangle ABC}=270$ м^2.

Задача 3. В параллелограмме угол между высотами α. Найдите высоты и площадь параллелограмма, если стороны его равны b и c (см. рис. 209).

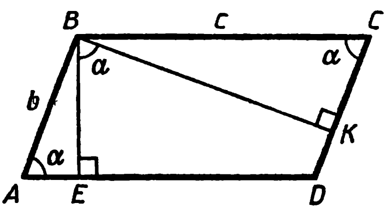


Рис. 209

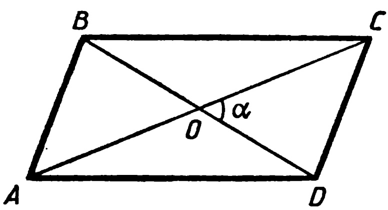


Рис. 210

Решение. 1. Сумма внутренних углов четырехугольника $BKDE$ равна 360°. Следовательно, $360° = 90° + 90° + \alpha + \angle EDK$, откуда $\angle EDK = 180° - \alpha$, т. е. $\angle ADC = 180° - \alpha$.

2. Сумма углов, прилежащих к одной стороне параллелограмма, равна 180°, т. е. $\angle BAD + \angle ADC = 180°$, откуда $\angle BAD = 180° - (180° - \alpha) = \alpha$. Следовательно, и $\angle BCD = \alpha$.

3. Из прямоугольного треугольника ABE находим BE:

$$\sin \alpha = \frac{BE}{b}, \text{ или } BE = b \sin \alpha.$$

4. Из прямоугольного треугольника BKC находим BK:

$$\sin \alpha = \frac{BK}{c}, \text{ или } BK = c \sin \alpha.$$

5. Площадь параллелограмма

$$S = AD \cdot BE = cb \sin \alpha.$$

Задача 4. **Найдите площадь параллелограмма по его диагоналям a, c и углу между ними α.**

Решение. 1. Пусть $ABCD$ — параллелограмм, где $BD = a$, $AC = c$ и $\angle COD = \alpha$ (рис. 210). Найдем площадь треугольника COD:

$$S_{\triangle COD} = \frac{1}{2} OC \cdot OD \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{2} \sin \alpha = \frac{ac}{8} \sin \alpha.$$

Треугольники COD и ABO равны, следовательно, $S_{\triangle ABO} = \frac{ac}{8} \sin \alpha$.

2. Найдем площади равных треугольников BOC и AOD:

$$S_{\triangle AOD} = \frac{1}{2} \cdot AO \cdot OD \cdot \sin (180° - \alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{c}{2} \cdot \frac{a}{2} \sin \alpha = \frac{ac}{8} \sin \alpha.$$

3. Площадь параллелограмма равна

$$S = \frac{2ac}{8} \sin \alpha + \frac{2ac}{8} \sin \alpha = \frac{4ac}{8} \sin \alpha = \frac{ac}{2} \sin \alpha.$$

Контрольные вопросы

1. Какие вам известны формулы для вычисления площади параллелограмма?
2. Какие вам известны формулы для вычисления площади треугольника?
3. Какие многоугольники называются равновеликими?
4. Докажите, что медианы равностороннего треугольника рассекают его на шесть равновеликих треугольников.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Стороны параллелограмма равны 7 и 9 м, а площадь его равна 126 $м^2$. Найдите обе высоты. [14 м, 18 м]

2. Стороны параллелограмма a и c, один из углов равен 150°. Найдите площадь параллелограмма. [$0{,}5ac$]

3. Основание параллелограмма равно 52,5 см, а боковая сторона 3 дм. Найдите площадь параллелограмма, если боковая сторона его образует с высотой, опущенной на основание, угол, равный 60°. [787,5 $см^2$]

4. Найдите площадь равнобедренного прямоугольного треугольника, если его гипотенуза равна 3,4 м. [2,89 $м^2$]

5. Найдите площадь параллелограмма, если его стороны равны a и c, а угол между ними: а) 30°; б) 45°; в) 120°. [$0{,}5ac$; $0{,}5ac\sqrt{2}$; $0{,}5ac\sqrt{3}$]

6. Найдите площадь равностороннего треугольника, если: а) сторона его равна a; б) высота его равна h; в) радиус описанного круга равен R. $\left[0{,}25a^2\sqrt{3};\ \frac{1}{3}h^2\sqrt{3};\ 0{,}75R^2\sqrt{3}\right]$

7. Площадь параллелограмма равна 96 $м^2$, а высоты его равны 6 и 8 м. Найдите периметр параллелограмма. [56 м.]

8. Найдите площадь треугольника ABC, если $AB=8$ м, $AC=6$ м и $\angle A=30°$. [12 $м^2$]

9. Катет прямоугольного треугольника равен 20 м, а высота, опущенная на гипотенузу, 12 м. Найдите площадь треугольника. [150 $м^2$.]

Б. 1. Площадь параллелограмма равна 720 $м^2$, его периметр равен 138 м, а расстояние между большими сторонами составляет 16 м. Найдите расстояние между меньшими сторонами. [30 м.]

2. Найдите площадь параллелограмма, у которого: а) две высоты равны 5 и 6 м, а угол между высотами равен 30°; б) периметр равен 21 м, а высоты 4 и 3 м. [60 $м^2$; 18 $м^2$.]

3. Площадь параллелограмма равна 64 $м^2$, а расстояния от точки пересечения диагоналей до сторон равны 2,5 и 5 м. Найдите стороны параллелограмма. [12,8 м, 8 м.]

4. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если радиус описанного около него круга равен R и высота, опущенная на гипотенузу, равна h. [Rh.]

5. Найдите площадь прямоугольного треугольника, если проекции катетов на гипотенузу равны 5 и 7,2 м. [36,6 $м^2$.]

6. По сторонам треугольника $a=15$, $b=14$, $c=13$ найдите его: а) площадь; б) высоты. $\left[84;\ h_a=11{,}2,\ h_b=12,\ h_c=12\frac{12}{13}.\right]$

7. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 м, а площадь его равна 24 $м^2$. Найдите стороны этого треугольника. [6 м, 8 м, 10 м.]

В. **1.** Определите площадь параллелограмма по данным его сторонам a и c, причем $a > c$, и углу между его диагоналями α. $[0{,}5\,(a^2-c^2)\operatorname{tg}\alpha.]$

2. Найдите площадь параллелограмма, если известны его острый угол α и диагонали d_1 и d_2, причем $d_2 > d_1$, $[0{,}25\,(d_1^2 - d_2^2)\operatorname{tg}\alpha.]$

3. Каким построением можно разбить любой треугольник на равновеликие треугольники?

4. Две стороны остроугольного треугольника равны 13 и 14 м, его площадь равна 84 м^2. Найдите третью сторону. [15 м.]

5. В треугольник со сторонами 10, 17, 21 вписан прямоугольник, периметр которого 24, так, что основание лежит на большей стороне. Найдите стороны прямоугольника. $\left[6\frac{6}{13} \text{ и } 5\frac{7}{13}.\right]$

6. Найдите площадь равнобедренного треугольника, если основание его 12 м, а высота, опущенная на основание, равна отрезку, соединяющему середины основания и боковой стороны. [$12\sqrt{3}$ м^2.]

7. Докажите, что сумма расстояний от произвольной точки, взятой внутри равностороннего треугольника, до его сторон постоянна. Найдите эту постоянную. [H — высота равностороннего треугольника.]

§ 3. ПЛОЩАДЬ РОМБА. ПЛОЩАДЬ ТРАПЕЦИИ. ОТНОШЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ ПОДОБНЫХ ФИГУР

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Площадь ромба равна половине произведения диагоналей, т. е.

$$S=\frac{d_1d_2}{2}.$$

2. Площадь ромба равна произведению основания на высоту т. е.

$$S=ah.$$

3. Площадь ромба равна квадрату его стороны, умноженному на синус угла ромба, т. е.

$$S=a^2\sin\alpha.$$

4. Площадь трапеции равна произведению половины суммы его оснований на высоту, т. е.

$$S=\frac{a+b}{2}h.$$

5. Площадь трапеции равна произведению средней линии трапеции на высоту.

6. Площадь любого четырехугольника равна половине произведения его диагоналей на синус угла между ними.

7. Площади подобных треугольников относятся как квадраты соответственных сторон.

8. Площади подобных многоугольников относятся как квадраты соответственных сторон.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Найдите площадь ромба, если его высота 10 м, а острый угол 30°.

Решение. 1. Пусть $ABCD$ — ромб, где $\angle BAD = 30°$, $BE \perp AD$ и $BE = 10$ м (рис. 211).

2. Из прямоугольного треугольника ABE найдем AB:

$$\sin 30° = \frac{BE}{AB}, \text{ или } AB = \frac{10}{\sin 30°} = 20.$$

3. Так как $AB = AD$, то площадь ромба

$$S = BE \cdot AD = 200 \text{ м}^2.$$

Задача 2. Найдите сторону ромба, зная, что его диагонали относятся как 1:2 и площадь ромба равна 12 м².

Реш ние. 1. Пусть условию задачи отвечает рисунок 212. Обозначим BD через x, а AC через y. Тогда по условию $y = 2x$.

2. Площадь ромба равна полупроизведению диагоналей $\frac{xy}{2}$. Составим систему уравнений и решим ее:

$$\begin{cases} \frac{xy}{2} = 12, \\ y = 2x, \end{cases}$$

откуда $2x^2 = 24$, $x = 2\sqrt{3}$, $y = 4\sqrt{3}$.

3. Найдем сторону ромба из прямоугольного треугольника ABK:

$$AB = \sqrt{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2} = \sqrt{15} \text{ м}.$$

Задача 3. Периметр ромба равен $2p$, сумма диагоналей его c. Найдите площадь ромба.

Решение. 1. Пусть $ABCD$ — ромб, удовлетворяющий условию задачи (рис. 212).

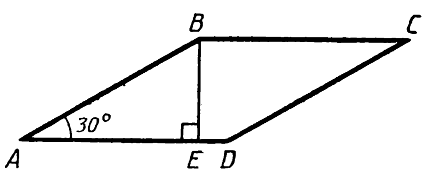


Рис. 211

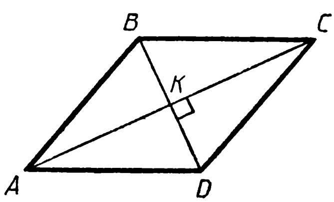


Рис. 212

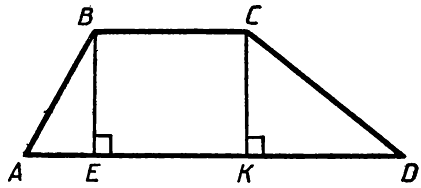


Рис. 213

2. Обозначим BK через x, а AK через y, тогда соответственно диагонали ромба будут равны $2x$ и $2y$. Площадь ромба можно найти по формуле $S=\frac{d_1 d_2}{2}$, т. е. $S=\frac{2x2y}{2}=2xy$.

3. По условию $x+y=\frac{c}{2}$. Кроме того, из прямоугольного треугольника ABK, где $AB=\frac{1}{4}\cdot 2p=\frac{p}{2}$, найдем $x^2+y^2=\left(\frac{p}{2}\right)^2$.

4. Получили систему уравнений:

$$\begin{cases} x+y=\frac{c}{2}, \\ x^2+y^2=\frac{p^2}{4}. \end{cases}$$

Возведем в квадрат обе части первого уравнения системы и, вычтя из полученного уравнения второе уравнение, найдем, что $2xy=\frac{c^2-p^2}{4}$.

5. Следовательно, площадь ромба равна $S=\frac{c^2-p^2}{4}$.

Задача 4. Найдите площадь трапеции, параллельные стороны которой равны 16 и 44 м, а непараллельные — 17 и 25 м.

Решение. 1. Пусть $ABCD$ — трапеция, отвечающая условию задачи, тогда $AD=44$, $BC=16$ (рис. 213). Следовательно, $AE+KD=28$ (BE и CK — высоты).

2. Обозначим AE через x, тогда $KD=28-x$.

3. По условию $AB=17$, $CD=25$. Значит, $BE^2=17^2-x^2$ из прямоугольного треугольника ABE и $CK^2=25^2-(28-x)^2$ из прямоугольного треугольника CKD.

4. Так как $BE=CK$, то $17^2-x^2=25^2-(28-x)^2$, откуда $x=8$.

5. Высота $BE=\sqrt{17^2-x^2}=15$ м.

6. Площадь трапеции $S=\frac{16+44}{2}\cdot 15=450$ м^2.

Задача 5. В прямоугольном треугольнике ABC проведен отрезок KE, пересекающий один из катетов и гипотенузу и перпендикулярный к гипотенузе. Найдите отношение площадей треугольников ABC и EKB, если $KE:AC=2:3$ (рис. 214).

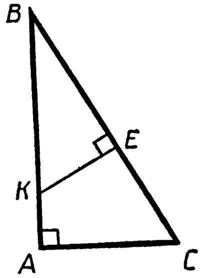


Рис. 214

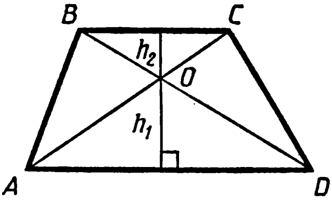


Рис. 215

Решение. 1. Треугольники ABC и EBK подобны, так как $\angle ABC$ общий, а $\angle BAC \quad \angle KEB=90°$.

2. Площади подобных треугольников относятся как квадраты сходственных сторон. Следовательно,

$$\frac{S_{\triangle EBK}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{KE^2}{AC^2}=\frac{4}{9}.$$

Задача 6. В трапеции основания $AD=a$, $BC=k$, диагонали пересекаются в точке O (рис. 215). а) Найдите отношение площадей треугольников BCO и DAO; б) найдите площади треугольников BCO и DAO, если высота трапеции равна H.

Решение. а) 1. Треугольники BCO и DAO подобны по двум углам.

2. BC и DA — сходственные стороны, поэтому

$$\frac{S_{\triangle BCO}}{S_{\triangle DAO}}=\frac{BC^2}{AD^2}=\frac{k^2}{a^2}.$$

б) 1. Обозначим высоту треугольника ADO, проведенную к стороне AD, через h_1, высоту треугольника BCO, проведенную к стороне BC, через h_2, тогда $h_1+h_2=H$ и $\frac{h_1}{h_2}=\frac{a}{k}$ (как отношение высот в подобных треугольниках BOC и AOD).

2. Так как $h_2=H-h_1$, то $\frac{h_1}{H-h_1}=\frac{a}{k}$, откуда $h_1=\frac{aH}{a+k}$ и

$$S_{\triangle AOD}=\frac{AD\cdot h_1}{2}=\frac{a\cdot aH}{2(a+k)}=\frac{a^2H}{2(a+k)}.$$

3. Так как $h_2=H-h_1$, а $h_1=\frac{aH}{a+k}$, то $h_2=H-\frac{aH}{a+k}$,

$$h_2=\frac{Hk}{a+k},\quad S_{\triangle BOC}=\frac{BC\cdot h_2}{2}=\frac{k\cdot kH}{2(a+k)}=\frac{k^2H}{2(a+k)}.$$

Контрольные вопросы

1. Какие вам известны формулы площади ромба?
2. Какие вам известны формулы площади трапеции?
3. Как относятся площади подобных треугольников?
4. Как относятся площади подобных многоугольников?
5. Найдите отношение площадей двух квадратов, если отношение их сторон 1:3.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. **1.** Найдите площадь ромба, если его высота 10 см, а острый угол: а) 45°; б) 60°. $\left[100\sqrt{2}\text{ см}^2;\ \frac{200}{\sqrt{3}}\text{ см}^2\right]$

2. Диагонали ромба 24 и 7 м. Найдите площадь ромба. [84 $м^2$]

3. Сторона ромба равна 8 м, а острый угол равен 30°. Найдите площадь ромба. [32 $м^2$]

4. Площадь трапеции равна 60 $м^2$, а основания 8 и 12 м. Найдите высоту трапеции. [6 м]

5. У равнобочной трапеции меньшее основание равно 10 м, боковая сторона 6 м, острый угол 60°. Найдите площадь трапеции. [$39\sqrt{3}$ $м^2$]

6. Найдите площадь ромба, если его сторона равна a, а радиус вписанного круга k. [$2ak$.]

7. Около круга радиуса k описан ромб с углом 150°. Найдите площадь ромба. [$8k^2$.]

8. Найдите площадь равнобедренной трапеции, если: а) нижнее основание равно 20 м, боковая сторона 12 м, а угол при верхнем основании 120°; б) верхнее основание равно 15 м, боковая сторона 10 м, а угол при нижнем основании 60°. [а) $84\sqrt{3}$ $м^2$; б) $100\sqrt{3}$ $м^2$.]

9. Стороны двух участков земли квадратной формы равны 100 и 150 м. Найдите сторону квадратного участка земли, равновеликого обоим. [$\sqrt{32\,500}$ м.]

10. Средняя линия разбивает треугольник на две фигуры. Найдите отношение их площадей. [1:4]

Б. **1.** Сторона ромба равна 8 см, а острый угол 30°. Найдите диагонали ромба. $\left[8\sqrt{2-\sqrt{3}}\text{ см и }\frac{8}{\sqrt{2-\sqrt{3}}}\text{ см.}\right]$

2. Найдите площадь ромба по меньшей диагонали k и острому углу α. $\left[0{,}5k^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right]$

3. Найдите площадь равнобедренной трапеции, в которой даны основания a и k $(a>k)$ и угол α при большем основании. [$0{,}25(a^2-k^2)\operatorname{tg}\alpha$]

4. В равнобедренной трапеции меньшее основание равно боковой стороне и угол при этом основании равен α. Найдите площадь трапеции. [$a^2\sin\alpha(1-\cos\alpha)$]

5. В равнобедренной трапеции диагональ равна 16 м и образует с большим основанием угол 60°. Найдите площадь трапеции. [$64\sqrt{3}$ м^2]

6. Найдите площадь равнобочной трапеции, описанной около круга с диаметром 2 м, если ее боковая сторона равна 3 м. [6 м^2]

7. В трапеции $ABCD$ боковые стороны AB и CD продолжены до взаимного пересечения в точке K. Вычислите отрезок CK, если $AB=1{,}5$ м, $CD=22{,}5$ дм и $BK=12$ дм. [18 дм]

8. Сторона треугольника равна 5 м. Найдите соответствующую сторону подобного ему треугольника, площадь которого больше площади данного треугольника в 9 раз. [15 м]

9. В равнобокой трапеции большее основание равно 44 м, боковая сторона 17 м и диагональ 39 м. Найдите площадь трапеции. [540 м^2]

10. Найдите площадь ромба, если его высота 12 см, а меньшая диагональ 13 см. [202,8 см^2]

В. **1.** Основания трапеции a и k. Как относятся площади частей, на которые делится трапеция ее средней линией? $\left[\frac{3a+k}{3k+a}\right]$

2. В равнобедренной трапеции средняя линия равна k, а диагонали взаимно перпендикулярны. Найдите площадь трапеции. [k^2]

3. Найдите площадь трапеции, если ее основания равны 6 и 11 м, одна из боковых сторон равна 4 м и сумма углов при нижнем основании равна 90°. [20,4 м^2]

4. Из вершины тупого угла ромба опущены перпендикуляры на его стороны. Длина каждого перпендикуляра равна a, расстояние между их основаниями равно k. Найдите площадь ромба. $\left[\frac{2a^4}{k(4a^2-k^2)^{0,5}}\right]$

5. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна k. Найдите боковую сторону этой трапеции, если известно, что острый угол при основании трапеции равен 30°. [$\sqrt{2k}$]

6. Около круга радиуса k описана прямоугольная трапеция, наименьшая из сторон которой равна $1{,}5k$. Найдите площадь трапеции. [$4{,}5k^2$]

7. Центр круга, вписанного в прямоугольную трапецию, отстоит от концов боковой стороны на 2 и 4 м. Найдите площадь трапеции. [14,4 м^2]

8. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна k, а высота трапеции в 2 раза меньше ее боковой стороны. Найдите радиус вписанного круга. $\left[\frac{\sqrt{2k}}{4}.\right]$

9. Диагональ равнобочной трапеции делит ее тупой угол пополам. Меньшее основание трапеции равно 8 м, периметр равен 44 м. Найдите площадь трапеции. [$20\sqrt{35}$ м^2.]

10. Найдите боковые стороны равнобочной трапеции, если ее основания и площадь равны соответственно 8 см, 14 см, 44 см^2. [5 см.]

11. Центр окружности, вписанной в прямоугольную трапецию, удален от концов боковой стороны на расстоянии 8 и 4 см. Найдите среднюю линию трапеции. $\left[\frac{18\sqrt{5}}{5}\text{ см}\right]$

12. Найдите площадь прямоугольной трапеции с острым углом α, если радиус вписанного в нее круга равен k. $\left[2k^2\,\frac{1+\sin\alpha}{\sin\alpha}.\right]$

§ 4. ПЛОЩАДЬ КРУГА. ПЛОЩАДЬ СЕКТОРА. ПЛОЩАДЬ СЕГМЕНТА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Кругом* называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки. Эта точка называется *центром круга*, а данное расстояние — *радиусом круга*.

2. Площадь круга вычисляется по формуле

$$S=\pi R^2.$$

3. *Круговым сектором* называется часть круга, лежащая внутри соответствующего центрального угла (рис. 216).

4. Площадь кругового сектора вычисляется по формуле

$$S=\frac{\pi R^2}{360}\cdot\alpha,$$

где R — радиус круга, а α — градусная мера соответствующего центрального угла.

5. *Круговым сегментом* называется общая часть круга и полуплоскости, граница которой содержит хорду этого круга (рис. 217).

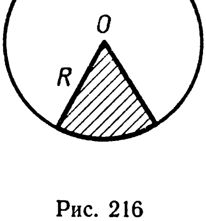
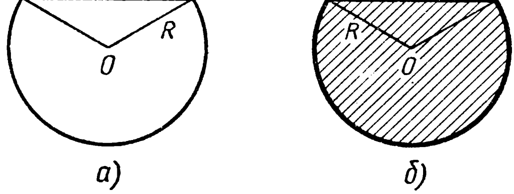


Рис. 216



а) б)

Рис. 217

6. Площадь сегмента, не равного полукругу, вычисляется по формуле

$$S=\frac{\pi R^2}{360}\cdot\alpha\pm S_\triangle,$$

где α — градусная мера центрального угла, который содержит дугу этого кругового сегмента, а $S_\triangle$ — площадь треугольника с вершинами в центре круга и концах радиусов, ограничивающих соответствующий сектор. Знак «—» надо брать, когда $\alpha<180°$, а знак «+» надо брать, когда $\alpha>180°$.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Найдите площадь круга, если длина окружности равна k.

Решение. 1. Длина окружности находится по формуле $C=2\pi R$. Так как $C=k$, то $k=2\pi R$, или $R=\frac{k}{2\pi}$.

2. Найдем площадь круга:

$$S=\pi R^2=\pi\left(\frac{k}{2\pi}\right)^2=\frac{\pi k^2}{4\pi^2}=\frac{k^2}{4\pi}.$$

Задача 2. Найдите площадь кругового сегмента с основанием $a\sqrt{3}$ и высотой $\frac{a}{2}$.

Решение. 1. $AB=a\sqrt{3}$, $OC\perp AB$, $CD=\frac{a}{2}$ (рис. 218).

2. В треугольнике ACD $AD=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, тогда $\operatorname{tg} ACO=$ $=\frac{a\sqrt{3}\cdot 2}{2a}=\sqrt{3}$. Следовательно, $\angle ACO=60°$.

3. В треугольнике AOC $AO=CO=R$ и $\angle ACO=60°$, значит, этот треугольник равносторонний, и, следовательно, $\angle COA=60°$.

4. OC — биссектриса $\angle AOB$, значит, он равен 120°, и тогда хорда AB является стороной вписанного правильного треугольника, а это значит, что $R=\frac{AB}{\sqrt{3}}=\frac{a\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=a$.

5. Площадь треугольника AOB вычисляется по формуле $S=\frac{1}{2}\cdot AO\cdot OB\cdot\sin AOB$, т. е. $S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot a\cdot\sin 120°=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$.

6. Площадь сегмента

$$S_{\text{сегм.}}=S_{\text{сек.}}-S_{\text{треуг.}}=\frac{\pi a^2\cdot 120°}{360°}-\frac{a^2\sqrt{3}}{4},$$

$$S_{\text{сегм.}}=a^2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\right).$$

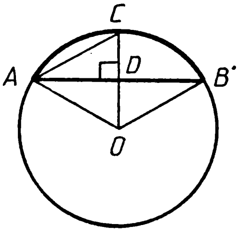


Рис. 218

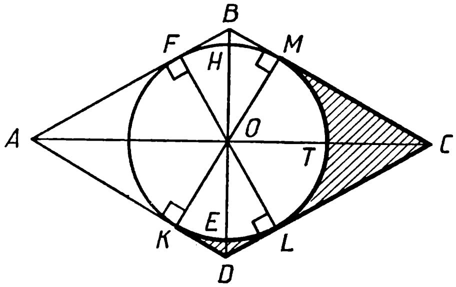


Рис. 219

Задача 3. К окружности радиуса R проведены 4 касательные, образующие ромб, большая диагональ которого равна $4R$. Найдите площадь каждой из фигур, ограниченных двумя касательными, проведенными из общей точки, и дугой окружности, лежащей между соседними точками касания (рис. 219).

Решение. 1. Требуется определить площадь каждой из заштрихованных на рисунке фигур: площадь S_1 фигуры $MCLT$ и площадь S_2 фигуры $KELD$.

2. Треугольник MOC прямоугольный. По условию $AC=4R$, тогда $OC=2R$ и $OM=R$, следовательно, гипотенуза OC в 2 раза больше катета OM, это значит, что $\angle OCM=30°$.

3. В четырехугольнике $MOLC$ $\angle CMO=\angle CLO=90°$, $\angle MCL=2\angle MCO=60°$, а значит, $\angle LOM=360°-180°-60°=$ $=120°$ и $\angle KOL=60°$ ($\angle LOM$ и $\angle KOL$ смежные).

4. Площадь четырехугольника $CMOL$ равна сумме площадей двух равных между собой прямоугольных треугольников OMC и OCL, т. е.

$$S_{CMOL}=2S_{OMC}=2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot MO\cdot CO\cdot\sin 60°\right),$$

$$S_{CMOL}=R\cdot 2R\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=R^2\sqrt{3}.$$

5. Площадь сектора $MOLT$ равна $\frac{\pi R^2}{3}$.

6. Следовательно, $S_1=S_{MCLO}-S_{OMTL}$, т. е.

$$S_1=R^2\sqrt{3}-\frac{\pi R^2}{3}=\frac{R^2(3\sqrt{3}-\pi)}{3}.$$

7. Аналогично находится $S_2=\frac{R^2(2\sqrt{3}-\pi)}{6}$.

Задача 4. В круге радиуса R по одну сторону от центра проведены две параллельные хорды, одна из которых стягивает дугу в 120°, а другая — в 60°. Найдите площадь части круга, заключенной между хордами (рис. 220).

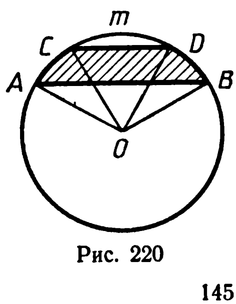


Рис. 220

Р е ш е н и е. 1. Искомая площадь равна разности площадей сегментов AmB и CmD.

2. Найдем каждую из этих площадей:

а) $\smile CmD=60°$, следовательно, $\angle COD=60°$, поэтому $CD=a_6=R$;

$$S_{CmD}=S_{OCmD}-S_{\triangle OCD}=\frac{\pi R^2}{6}-\frac{R^2\sqrt{3}}{4};$$

б) $\smile AmB=120°$, следовательно, $\angle AOB=120°$;

$$S_{AmB}=S_{OAmB}-S_{\triangle OAB}=\frac{\pi R^2}{3}-\frac{R^2\cdot\sin 120°}{2}=\frac{\pi R^2}{3}-\frac{\sqrt{3}R^2}{4}.$$

3. Окончательно находим:

$$S_{ACDB}=\left(\frac{1}{3}\pi R^2-\frac{\sqrt{3}R^2}{4}\right)-\left(\frac{\pi R^2}{6}-\frac{\sqrt{3}R^2}{4}\right)=\frac{\pi R^2}{6}.$$

Контрольные вопросы

1. Что такое круг?
2. По какой формуле вычисляется площадь круга?
3. Что такое круговой сектор?
4. Как вычислить площадь сектора?
5. Может ли сектор круга быть его сегментом?
6. Радиусы двух кругов относятся как 3:5. Как относятся их площади?
7. Площади двух кругов относятся как 9:4. Как относятся их радиусы?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. **1.** В круг вписан прямоугольник со сторонами 3 и 4 м. Найдите площадь этого круга. [6,25π м^2.]

2. Вокруг клумбы, имеющей форму круга, проложена дорожка. Вычислите площадь дорожки, если радиус клумбы равен 2,8 м, а ширина дорожки 1,1 м. [23 м^2.]

3. Вычислите площадь кольца, образованного концентрическими окружностями, если радиус меньшей окружности равен 1,2 дм, а большей — 21 см. [$\approx$9 дм^2.]

4. Дерево имеет 1,884 м в обхвате. Чему равна площадь его поперечного сечения, имеющего (приблизительно) форму круга? [$\approx$0,2926 м^2.]

5. Определите площадь круга, если длина окружности равна 8 м. [$\approx$5,1$\cdot$ м^2.]

6. Определите длину окружности, если площадь круга равна 18 м^2. [$\approx$15 м.]

7. Определите площадь сегмента, если радиус круга равен T, а дуга содержит: а) 90°; б) 60°; в) 45°; г) 30°. $\left[\text{а) } 0{,}25T^2(\pi-2);\right.$ б) $\frac{T^2}{12}(2\pi-3\sqrt{3})$; в) $\frac{T^2}{8}(\pi-2\sqrt{2})$; г) $\left.\frac{T^2}{12}(\pi-3).\right]$

Б. 1. В пересечение двух равных кругов вписан ромб с диагоналями 12 и 6 м. Найдите площадь одного из кругов. [176,5 м^2.]

2. Общая хорда двух кругов стягивает дуги в 60° и 120°. Найдите отношение площадей этих кругов. [3:1.]

3. В круге радиуса T проведена хорда, равная стороне вписанного квадрата. Найдите площади двух полученных сегментов. [$0{,}25T^2(\pi-2)$; $0{,}25T^2(3\pi+2)$.]

4. Как относятся площади вписанного и описанного около равностороннего треугольника кругов? [1:4.]

5. В кольце, образованном двумя концентрическими окружностями, хорда большей окружности касается меньшей и равна k. Найдите площадь кольца. [$0{,}25\pi k^2$.]

В. 1. В сектор AOB с радиусом k и углом 90° вписана окружность. Найдите радиус окружности. [$k(2^{0,5}-1)$.]

2. В круговой сектор с центральным углом 120° вписан круг. Найдите радиус вписанного круга, если радиус данного круга равен k. $\left[\frac{k\cdot\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}.\right]$

3. Найдите площадь круга, вписанного в равнобочную трапецию, если ее большее основание равно k, а угол при меньшем основании 120°. $\left[\frac{a^2\pi}{12}.\right]$

4. В круговой сектор, дуга которого содержит 60°, вписан круг. Найдите отношение площади этого круга к площади сектора. [2:3.]

5. Площадь кольца равна k. Радиус большей окружности равен длине меньшей окружности. Найдите радиус последней. $\left[\frac{k}{\pi(4\pi^2-1)^{0,5}}.\right]$

6. Найдите площадь круга, вписанного в прямоугольный треугольник, если высота, опущенная на гипотенузу, делит ее на отрезки, равные 25,6 и 14,4 м. [64π м^2.]

§ 5. ПЛОЩАДЬ ОПИСАННОГО МНОГОУГОЛЬНИКА. ФОРМУЛЫ ДЛЯ РАДИУСОВ ОПИСАННОЙ И ВПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТЕЙ ТРЕУГОЛЬНИКА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Для любого многоугольника, описанного около окружности, существует удобная формула для нахождения его площади:

$$S=pr,$$

где p — полупериметр многоугольника, r — радиус окружности (рис. 221).

2. Площадь треугольника равна произведению его полупериметра на радиус вписанной окружности (рис. 222, a):

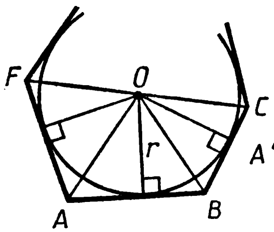


Рис. 221

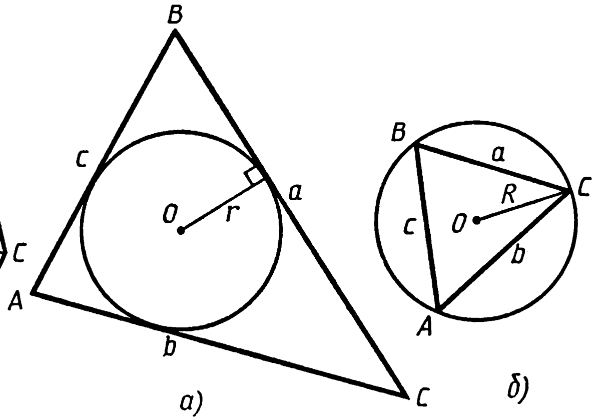


Рис. 222

$$S=pr, \text{ откуда } r=\frac{S}{p}.$$

3. Площадь треугольника равна произведению всех его сторон, деленному на учетверенный радиус описанной окружности (рис. 222, *б*):

$$S_\triangle=\frac{abc}{4R}, \text{ откуда } R=\frac{abc}{4S_\triangle}.$$

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. В равнобедренном треугольнике и основание, и высота равны 4. Найдите площадь круга, описанного около этого треугольника.

Решение. 1. Для нахождения радиуса круга воспользуемся формулой

$$R=\frac{abc}{4S_\triangle}.$$

2. Площадь треугольника ABC (рис. 223) равна:

$$S_\triangle=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 4=8.$$

3. Из прямоугольного треугольника ABD имеем:

$$AB=\sqrt{AD^2+BD^2}=\sqrt{16+4}=2\sqrt{5}.$$

4. Радиус круга, описанного около треугольника ABC, будет равен:

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{2\sqrt{5}\cdot 2\sqrt{5}\cdot 4}{4\cdot 8}=2{,}5.$$

5. $S=\pi R^2=6{,}25\pi$.

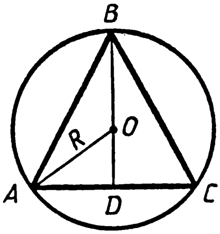


Рис. 223

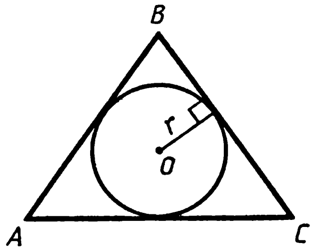


Рис. 224

Задача 2. В равнобедренный треугольник ABC, у которого основание равно 6 м и боковая сторона 5 м, вписан круг. Найдите площадь этого круга.

Решение. 1. Для отыскания радиуса круга найдем p — полупериметр: $p=16:2=8$.

2. Найдем площадь треугольника ABC по формуле Герона (рис. 224):

$$S_{\triangle}=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}=\sqrt{8\cdot3\cdot2\cdot3}=12.$$

3. Найдем радиус вписанного круга:

$$r=\frac{S_{\triangle}}{p}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}.$$

4. Найдем площадь вписанного круга:

$$S=\pi r^2=2{,}25\pi.$$

Задача 3. В равнобедренной трапеции, описанной около круга, острый угол при основании равен α. Найдите отношение площади круга к площади трапеции.

Решение. 1. В трапеции $ABCD$ $\angle CDA=\alpha$ (рис. 225). Примем CD за x.

2. Диаметр круга ME равен высоте трапеции CK. Из прямоугольного треугольника CKD

$$\sin\alpha=\frac{CK}{CD},\text{ или } CK=CD\sin\alpha.$$

3. $CK=2r$, откуда $2r=x\sin\alpha$, или $r=\frac{x\cdot\sin\alpha}{2}$.

4. Тогда площадь круга

$$S_{\text{кр.}}=\pi R^2=\frac{\pi x^2\sin^2\alpha}{4}.$$

5. По свойству сторон описанного четырехугольника имеем:

$$BC+AD=AB+CD=2x.$$

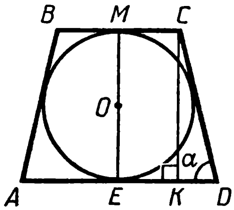


Рис. 225

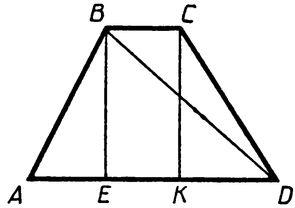


Рис. 226

6. Площадь трапеции

$$S_{\text{трап.}}=\frac{BC+AD}{2}\cdot CK=\frac{2x}{2}\cdot x\cdot\sin\alpha=x^2\cdot\sin\alpha.$$

7. $\dfrac{S_{\text{кр.}}}{S_{\text{трап.}}}=\dfrac{\pi x^2\sin^2\alpha}{4x^2\sin\alpha}=\dfrac{\pi\sin\alpha}{4}.$

Задача 4. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей для треугольника со сторонами 4, 5 и 7.

Р е ш е н и е. 1. Для нахождения обоих радиусов по известным формулам нам нужно найти площадь треугольника по формуле Герона:

$$S=\sqrt{8(8-4)(8-5)(8-7)}=\sqrt{8\cdot4\cdot3\cdot1}=\sqrt{96}=4\sqrt{6}.$$

2. Найдем радиус описанной окружности R:

$$R=\frac{abc}{4S}=\frac{4\cdot5\cdot7}{4\cdot4\sqrt{6}}=\frac{35}{4\sqrt{6}}.$$

3. Найдем радиус вписанной окружности r:

$$r=\frac{S}{p}=\frac{4\sqrt{6}}{8}=\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

Задача 5. Основания трапеции равны 4 и 16. Найдите радиусы окружностей, вписанной в трапецию и описанной около нее, если известно, что эти окружности существуют.

Р е ш е н и е. 1. Описать окружность около трапеции можно только при условии, что трапеция является равнобедренной, т. е. $AB=CD$ (рис. 226).

2. Вписать окружность в трапецию $ABCD$ можно только при условии, что $AB+CD=BC+AD$.

3. В трапеции $ABCD$ BE и CK высоты. По условию $BC=4$, $AD=16$. Тогда $AB=CD=\frac{16+4}{2}=10$, $AE=KD=\frac{16-4}{2}=6$, $BE=$ $=\sqrt{AB^2-AE^2}=\sqrt{100-36}=8$, $BD=\sqrt{BE^2+DE^2}=\sqrt{64+100}=$ $=2\sqrt{41}$.

4. Из рисунка 226 видно, что $BE=2r=8$, откуда радиус вписанной окружности $r=4$.

5. Найдем площадь S треугольника ABD:

$$S=\frac{BE\cdot AD}{2}=\frac{8\cdot 16}{2}=64.$$

6. По формуле радиуса окружности, описанной около треугольника ABD:

$$R=\frac{abc}{4S}, \quad R=\frac{16\cdot 10\cdot 2\sqrt{41}}{4\cdot 64}=\frac{5\sqrt{41}}{4}.$$

7. Радиус окружности, описанной около треугольника ABD, и есть радиус окружности, описанной около трапеции $ABCD$.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей для треугольника со сторонами: а) 13, 14, 15; б) 15, 13, 4; в) 35, 29, 8. $\left[\text{а) } R=\frac{65}{8},\ r=4;\ \text{б) } R=\frac{65}{8},\ r=1{,}5;\ \text{в) } R=\frac{145}{6},\ r=\frac{7}{3}.\right]$

2. Катеты прямоугольного треугольника равны 40 и 42 м. Найдите радиусы описанной и вписанной окружностей. [$R=29$ м, $r=12$ м.]

3. Около окружности, радиус которой равен r, описан прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной k. Найдите периметр треугольника. [$2(r+k)$.]

4. Найдите диаметр окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник, катет которого равен a. [$a(2-\sqrt{2})$.]

5. Докажите, что сумма диаметров двух окружностей: вписанной в прямоугольный треугольник и описанной около него — равна сумме его катетов.

6. Катет прямоугольного треугольника равен a, радиус вписанного в треугольник круга равен r. Найдите расстояние от центра круга до концов данного катета. [$r\sqrt{2}$ и $\sqrt{a^2-2ar+2r^2}$.]

7. Основаниями трапеции, вписанной в круг, служат диаметр, равный D, и хорда, равная радиусу. Найдите углы и периметр этой трапеции. [60°, 120°, $2{,}5D$.]

8. Найдите сторону правильного многоугольника, если радиус описанной около него окружности равен R, а вписанной — r. [$2\sqrt{R^2-r^2}$.]

9. Докажите, что площадь круга, у которого диаметром служит гипотенуза прямоугольного треугольника, равна сумме площадей кругов, у которых диаметрами служат катеты этого треугольника.

СТЕРЕОМЕТРИЯ

ГЛАВА XI

§ 1. СТЕРЕОМЕТРИЯ. АКСИОМЫ. СЛЕДСТВИЯ ИЗ АКСИОМ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Стереометрия* — это раздел геометрии, в котором изучаются фигуры в пространстве.

2. В стереометрии, так же как и в планиметрии, свойства геометрических фигур устанавливаются путем доказательства соответствующих теорем.

3. Основными фигурами в пространстве являются точка, прямая и плоскость.

4. С введением нового геометрического образа (плоскости) появляется необходимость расширить систему аксиом.

5. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей (аксиома).

6. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку (аксиома).

7. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну (аксиома).

8. Через прямую и не лежащую на ней точку можно провести плоскость, и притом только одну.

9. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то вся прямая принадлежит этой плоскости.

10. Плоскость и не лежащая на ней прямая либо не пересекаются, либо пересекаются в одной точке.

11. Через три точки, не лежащие на одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

Контрольные вопросы

1. Что изучает стереометрия?
2. Каковы основные (простейшие) фигуры в пространстве?
3. Сформулируйте известные вам аксиомы стереометрии.
4. Сформулируйте теорему о плоскости, проходящей через прямую и не лежащую на ней точку.

5. Каково может быть взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве?
6. Сформулируйте теорему о существовании плоскости, проходящей через три данные точки.
7. Можно ли через три точки, лежащие на одной прямой, провести две различные плоскости?

§ 2. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ В ПРОСТРАНСТВЕ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Две прямые в пространстве называются *параллельными,* если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

2. Прямые, которые не пересекаются и не лежат в одной плоскости, называются *скрещивающимися.*

3. Через точку вне данной прямой можно провести прямую, параллельную этой прямой, и притом только одну.

4. Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны.

Контрольные вопросы

1. Каково может быть взаимное расположение двух различных прямых в пространстве?
2. Какие прямые в пространстве называются параллельными?
3. Какие прямые называются скрещивающимися?
4. Как через данную точку в пространстве построить прямую, параллельную данной прямой?

§ 3. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Прямая и плоскость называются *параллельными,* если они не пересекаются.

2. Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой в этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости (признак).

Контрольные вопросы

1. Каково может быть взаимное расположение прямой и плоскости в пространстве?
2. В каком случае прямая и плоскость называются параллельными?
3. Как через данную точку провести какую-нибудь прямую, параллельную данной плоскости?
4. Сформулируйте признак параллельности прямой и плоскости.

§ 4. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Две плоскости называются *параллельными,* если они не пересекаются.

2. Две плоскости параллельны, если одна из них параллельна двум пересекающимся прямым, лежащим в другой плоскости (признак).

3. Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.

4. Через точку вне данной плоскости можно провести плоскость, параллельную данной, и притом только одну.

5. Отрезки параллельных прямых, заключенные между двумя параллельными плоскостями, равны.

Контрольные вопросы

1. Каково может быть взаимное расположение двух плоскостей в пространстве?
2. В каком случае две плоскости называются параллельными?
3. Как через данную точку провести плоскость, параллельную данной плоскости?
4. Сформулируйте признак параллельности плоскостей.
5. Сформулируйте теорему о линиях пересечения двух параллельных плоскостей третьей плоскостью.
6. Что можно сказать о двух различных плоскостях, параллельных третьей плоскости?
7. Сформулируйте теорему об отрезках параллельных прямых, заключенных между параллельными плоскостями.

ГЛАВА XII

§ 1. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Так же как и на плоскости, две прямые называются *перпендикулярными* в пространстве, если они пересекаются под прямым углом.

2. Если две пересекающиеся прямые параллельны соответственно двум перпендикулярным прямым, то они тоже перпендикулярны.

3. Через любую точку прямой в пространстве можно провести перпендикулярную ей прямую.

4. Прямая, пересекающая плоскость, называется *перпендикулярной* этой плоскости, если она перпендикулярна любой прямой, которая лежит в данной плоскости.

5. Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум пересекающимся прямым в этой плоскости, то она перпендикулярна плоскости (рис. 227) (признак).

6. Через любую точку данной прямой можно провести перпендикулярную ей плоскость, и притом только одну.

7. Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

8. Через любую точку можно провести прямую, перпендикулярную данной плоскости, и притом только одну.

9. Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.

Контрольные вопросы

1. Какие прямые в пространстве называются перпендикулярными?
2. Сформулируйте теорему о прямых, параллельных перпендикулярным прямым.
3. Сформулируйте определение и признак перпендикулярности прямой и плоскости в пространстве.

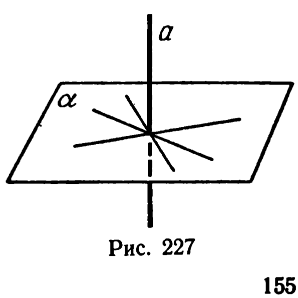


Рис. 227

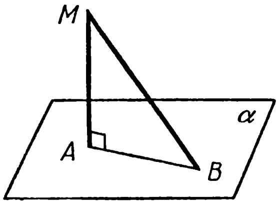


Рис. 228

4. Сформулируйте теорему о существовании и единственности перпендикуляра к данной прямой.
5. Можно ли утверждать, что прямая, пересекающая круг в его центре, перпендикулярна: а) диаметру; б) двум диаметрам; в) плоскости круга?
6. Справедливо ли утверждение, что прямая, пересекающая круг в его центре, перпендикулярна: а) радиусу; б) двум радиусам; в) плоскости круга?

§ 2. ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Опустим из точки M перпендикуляр на плоскость α (рис. 228). След A перпендикуляра называется его *основанием*. Отрезок, не перпендикулярный к плоскости, называется *наклонной*. След B наклонной называется ее *основанием*. Отрезок AB называется *проекцией* наклонной MB на плоскость α.

2. Если из точки M проведены перпендикуляр и наклонные к плоскости α (рис. 229), то:

— перпендикуляр короче наклонной ($AM < ME$);

— наклонные, имеющие равные проекции, равны ($MB = MD = MC$);

— из двух наклонных та больше, у которой больше проекция ($ME > MD$).

3. Длина перпендикуляра MA называется расстоянием от точки M до плоскости α (рис. 229).

4. Если прямая a лежит в плоскости α и перпендикулярна к проекции c_1 наклонной c, то прямая a перпендикулярна к наклонной c (рис. 230). И обратно, если прямая a лежит в плоскости α и перпендикулярна к наклонной c, то она перпендикулярна к проекции c_1 этой наклонной (теорема о трех перпендикулярах).

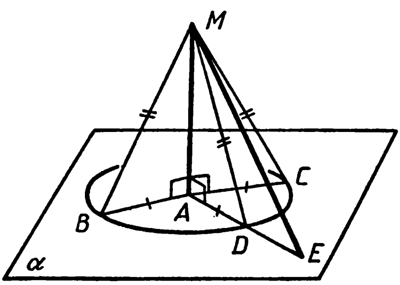


Рис. 229

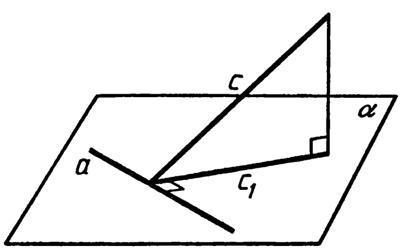


Рис. 230

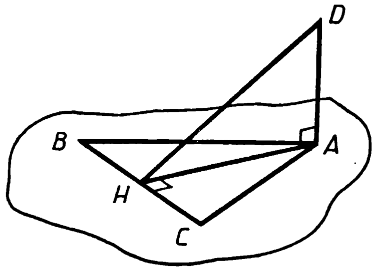


Рис. 231

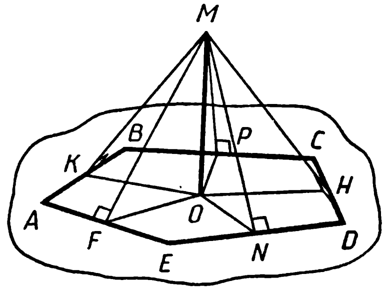


Рис. 232

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. В равнобедренном треугольнике ABC основание BC равно 12 м, боковая сторона 10 м. Из вершины A проведен отрезок AD, равный 6 м и перпендикулярный плоскости треугольника ABC. Найдите расстояние от точки D до стороны BC.

Решение. 1. В плоскости ABC проведем $AH \perp BC$, затем соединим точки D и H отрезком (рис. 231).

2. $DH \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах, так как $AH \perp BC$, DH — искомое расстояние.

3. Из прямоугольного треугольника ADH имеем:

$$DH^2 = AD^2 + AH^2, \qquad (1)$$

где $AD = 6$. Остается найти AH — высоту равнобедренного треугольника ABC.

4. Из прямоугольного треугольника ACH получаем, что

$$AH^2 = AC^2 - CH^2, \text{ т. е. } AH = \sqrt{10^2 - 6^2} = \sqrt{64} = 8 \text{ м.}$$

5. Значение AH подставим в (1), тогда $DH^2 = 6^2 + 8^2 = 100$, $DH = 10$ м.

Задача 2. Докажите, что если точка равноудалена от всех сторон многоугольника, то ее проекция совпадает с центром вписанного круга.

Решение. 1. $MK \perp AB$, $MP \perp BC$, $MH \perp CD$, ... (рис. 232).

2. $MK = MP = MH = \ldots$ и $MO \perp ABC$.

3. Докажем, что точка O — центр круга, вписанного в многоугольник $ABCD\ldots$. Для этого достаточно доказать, что точка O равноудалена от всех сторон этого многоугольника.

4. Соединим точку O с точками K, P, H, ... на сторонах многоугольника $ABCD\ldots$, тогда $OK \perp AB$, $OP \perp BC$, $OH \perp CD$, ... (теорема, обратная теореме о трех перпендикулярах).

5. $OK=OP=OH=...$ (как проекции равных наклонных MK, MP, ...).

6. Следовательно, точка O равноудалена от сторон многоугольника $ABCD...$, т. е. O — центр вписанного круга.

Контрольные вопросы

1. Сформулируйте теорему о трех перпендикулярах.
2. Где расположены точки, находящиеся на равном расстоянии от вершин некоторого прямоугольника?
3. Точка M равноудалена от всех точек окружности. Можно ли утверждать, что она лежит на перпендикуляре к плоскости окружности, проведенном через центр окружности?
4. Из точки M, не лежащей в плоскости α, проведены к этой плоскости перпендикуляр и наклонная. Как в плоскости α провести прямую, перпендикулярную наклонной?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. **1.** В треугольнике ABC угол C прямой. Из вершины A проведен отрезок AK, перпендикулярный плоскости треугольника. Покажите на чертеже расстояние от точки K до: а) гипотенузы AB; б) катета BC.

2. В треугольнике ABC угол B прямой и катет BC равен a. Из вершины A проведен отрезок AD, перпендикулярный плоскости треугольника, так, что расстояние между точками D и C равно k. Найдите расстояние от точки D до катета BC. [$\sqrt{k^2-a^2}$.]

3. Катеты прямоугольного треугольника ABC равны 15 и 20 м. Из вершины прямого угла C проведен отрезок CD, перпендикулярный плоскости этого треугольника; $CD=35$ м. Найдите расстояние от точки D до гипотенузы AB. [37 м.]

4. Стороны треугольника равны 10, 17, 21 м. Из вершины большего угла треугольника проведен отрезок, равный 15 м и перпендикулярный плоскости треугольника. Найдите расстояние от его концов до большей стороны. [8 м, 17 м.]

5. Из вершины A прямоугольника $ABCD$ проведен к его плоскости перпендикулярный отрезок AK, конец K которого отстоит от других вершин на расстояниях 6, 7 и 9 см. Найдите AK. [2 см.]

Б. **1.** К плоскости прямоугольного треугольника ABC проведены равные между собой перпендикуляры CM и BK. Найдите AK, если $BC=b$, $AM=a$ и $\angle ACB=90°$. [$\sqrt{a^2+b^2}$.]

2. В ромбе большая диагональ AC равна d, а его острый угол 2α. Точка O делит AC в отношении 1:3. К плоскости ромба восставлен перпендикуляр OK, равный $0{,}25d$. Найдите расстояния от точки K до сторон ромба или до их продолжений. $\left[0{,}25d\sqrt{1+\sin^2\alpha},\ \frac{d}{4}\sqrt{1+9\sin^2\alpha}.\right]$

3. На плоскость, содержащую прямоугольный треугольник ABC, опущен перпендикуляр CK, равный a. Найдите расстояние от точки K до стороны AB, если катет AC равен a, а угол A равен α. [$a\sqrt{1+\sin^2\alpha}$.]

4. В треугольнике ABC угол C прямой, CD — отрезок, перпендикулярный плоскости треугольника. Точка D соединена отрезками с точками A и B. Найдите площадь треугольника ADB, если $CA=3$ дм, $BC=2$ дм и $CD=1$ дм. [3,5 дм^2.]

В. 1. В плоскости β лежат две параллельные прямые и точка A, расположенная по одну сторону от этих прямых. Расстояние от точки A до одной прямой в 13 раз больше, чем до другой. К плоскости β восставлен перпендикуляр AK, равный 12 см. Найдите расстояние от точки K до каждой из прямых, если отношение этих расстояний 1:5. [$2\sqrt{42}$ см, $10\sqrt{42}$ см.]

2. Точка O лежит на высоте равнобедренного треугольника ABC, проведенной из вершины A, и делит эту высоту в отношении 1:3 (считая от точки A). К плоскости треугольника проведен перпендикуляр OK, равный a. Найдите расстояние от точки K до сторон треугольника ABC, если сторона BC равна a, угол A равен 2α. $\left[\frac{a}{8}\sqrt{64+9\operatorname{ctg}^2\alpha},\ \frac{a}{8}\sqrt{64+\cos^2\alpha}.\right]$

3. В ромбе большая диагональ AC равна a, острый угол 2α. Из середины стороны DC — точки O — к плоскости ромба восставлен перпендикуляр OK, равный $0{,}5a$. Найдите расстояние от точки K до сторон ромба или до их продолжений. [$0{,}5a$, $0{,}5a\sqrt{1+4\sin^2\alpha}$, $0{,}5a\sqrt{1+\sin^2\alpha}$ и $0{,}5a\sqrt{1+\sin^2\alpha}$.]

§ 3. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Две пересекающиеся плоскости называются *перпендикулярными*, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

2. Если плоскость проходит через пямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны (признак).

3. Если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна их линии пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Из точек A и B, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB, если $AC=6$ м, $BD=7$ м, $CD=6$ м (рис. 233).

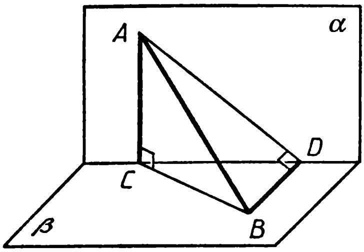


Рис. 233

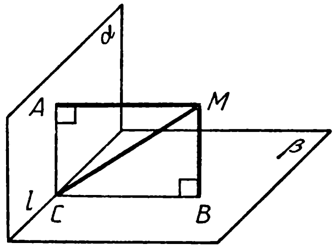


Рис. 234

Решение. 1. Основное в решении — построение наглядного чертежа. Для поиска удачного изображения полезно привлечь пространственную модель.

2. Отрезок AB лучше найти из треугольников ABC и ABD. Они прямоугольные, так как $AC \perp CB$ и $BD \perp AD$.

3. Так как $AC \perp CD$ и $\alpha \perp \beta$, то $AC \perp \beta$ и $AC \perp CB$.

4. Возьмем за основу для вычисления треугольник ABC. Последовательно найдем:

$$AB^2 = AC^2 + BC^2 = AC^2 + (BD^2 + CD^2),$$

$$AB = \sqrt{6^2 + 7^2 + 6^2}, \quad AB = 11 \text{ м}.$$

Задача 2. Точка M находится на расстояниях a и b от двух перпендикулярных плоскостей. Найдите расстояние от этой точки M до прямой l пересечения плоскостей.

Решение. 1. Проведем через точку M плоскость, перпендикулярную прямой l. Она пересечет прямую l в точке C. Опустим перпендикуляры MA и MB (рис. 234), тогда $MACB$ — прямоугольник со сторонами $MA = a$, $MB = b$, в котором CM — диагональ, т. е. искомое расстояние.

2. Найдем MC из прямоугольного треугольника AMC:

$$MC = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Контрольные вопросы

1. В каком случае плоскости α и β в пространстве называются перпендикулярными?
2. Сформулируйте признак перпендикулярности плоскостей.
3. Каким образом можно установить, что две плоскости перпендикулярны?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Из точек A и B, лежащих в двух перпендикулярных плоскостях, опущены перпендикуляры AC и BD на прямую пересечения плоскостей. Найдите длину отрезка AB, если: а) $AC=3$ м, $BD=4$ м, $CD=12$ м; б) $AD=4$ м, $BC=7$ м, $CD=1$ м; в) $AD=BC=5$ м, $CD=1$ м. [13 м; 8 м; 7 м.]

2. Перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой c. В плоскости α проведена прямая $a \parallel c$. В плоскости β проведена прямая $b \parallel c$. Найдите расстояние между прямыми a и b, если расстояние между прямыми a и c равно 1,5 м, а между прямыми b и c равно 0,8 м. [1,7 м.]

3. Отрезок AB соединяет точки A и B, лежащие в двух перпендикулярных плоскостях. Перпендикуляры, опущенные из точек A и B на линию пересечения плоскостей, соответственно равны a и b, а расстояние между их основаниями равно c. Найдите длину отрезка AB и длины его проекций на данные плоскости. [$\sqrt{a^2+b^2+c^2}$, $\sqrt{a^2+c^2}$, $\sqrt{b^2+c^2}$.]

4. Концы отрезка принадлежат двум перпендикулярным плоскостям, и с одной из плоскостей этот отрезок составляет угол 45°, а с другой — угол 30°. Длина этого отрезка равна a. Найдите длину отрезка, заключенного между перпендикулярами, опущенными на прямую пересечения плоскостей из концов данного отрезка. [0,5a.]

§ 4. РАССТОЯНИЕ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Общим перпендикуляром* двух скрещивающихся прямых называется отрезок с концами на этих прямых, являющийся перпендикуляром к каждой из них.

2. Две скрещивающиеся прямые имеют общий перпендикуляр, и притом только один. Он является общим перпендикуляром параллельных плоскостей, проходящих через эти прямые (рис. 235). Отрезок AB — общий перпендикуляр плоскостей α и β, а значит, и прямых a и b.

3. *Расстоянием между скрещивающимися прямыми* называется длина их общего перпендикуляра. Оно равно расстоянию между параллельными плоскостями, проходящими через эти прямые.

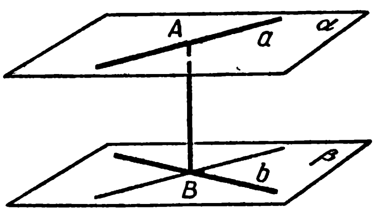


Рис. 235

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

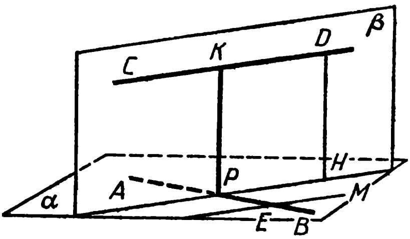


Рис. 236

Задача 1. Найдите общий перпендикуляр между двумя скрещивающимися прямыми.

Решение. 1. Пусть AB и CD (рис. 236) — данные скрещивающиеся прямые.

2. Возьмем на одной из них, например на AB, точку E и проведем $EM \parallel CD$.

3. Через две пересекающиеся прямые AB и EM проводим плоскость α. Эта плоскость содержит прямую AB и будет параллельна прямой CD.

4. Из произвольной точки D прямой CD опускаем на плоскость α перпендикуляр DH и через основание H этого перпендикуляра проводим прямую $HP \parallel EM$, пересекающую AB в точке P.

5. Так как $CD \parallel EM$ и $PH \parallel EM$, то $CD \parallel PH$, а потому прямые CD и PH лежат в одной плоскости β.

6. Проведем в плоскости β через точку P прямую PK, параллельную DH и пересекающую CD в точке K. Тогда PK и будет общим перпендикуляром к двум скрещивающимся прямым AB и CD.

7. В самом деле, мы проводили DH перпендикулярно плоскости α, следовательно, и прямая PK, параллельная DH, будет перпендикулярна к плоскости α. Значит, KP перпендикулярен к прямым AB и PH, проходящим на плоскости α через его основание.

8. Но $CD \parallel PH$, а потому $PK \perp CD$. Итак, прямая PK, пересекая обе данные прямые AB и CD, перпендикулярна к ним обеим.

9. Докажем, что отрезок PK есть действительно кратчайшее расстояние между AB и CD. В самом деле, пусть, например, DE есть отрезок какой-либо произвольной прямой, соединяющей AB и CD. Очевидно, что DH, будучи перпендикуляром к плоскости α, короче наклонной DE, а потому и отрезок PK, равный и параллельный DH, короче всякого другого отрезка, например DE, проведенного между данными прямыми.

Замечание. 1) В задачах по большей части бывает достаточно найти только длину перпендикуляра между двумя скрещивающимися прямыми, а вовсе не требуется находить его положение.

2) Так как CD параллельна плоскости α, то для нахождения PK достаточно определить расстояние от плоскости α до CD, т. е. можно опустить перпендикуляр на эту плоскость из любой точки прямой CD, например из D.

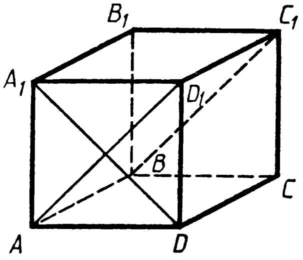


Рис. 237

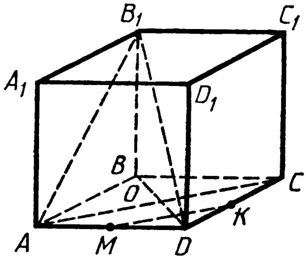


Рис. 238

3) Таким образом, чтобы найти длину кратчайшего расстояния между двумя скрещивающимися прямыми AB и CD, через произвольную точку одной из них (например, AB) проводят прямую, параллельную другой. Через две полученные прямые (AB и EM) проводят плоскость. Искомой длиной будет длина перпендикуляра, опущенного из любой точки прямой CD на эту плоскость.

Задача 2. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите расстояние между диагональю A_1D передней грани и диагональю BC_1 задней грани.

Решение. Так как эти диагонали лежат в параллельных гранях, то искомое расстояние является расстоянием между этими гранями и равно C_1D_1 (рис. 237).

Контрольные вопросы

1. Что принимают за расстояние между скрещивающимися прямыми?
2. Как можно найти расстояние между скрещивающимися прямыми a и b, не проводя перпендикуляра, концы которого лежат на обеих скрещивающихся прямых?
3. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 238).

а) Грани BB_1C_1C и DD_1C_1C имеют общую точку C. Назовите их пересечение.

б) Какие ребра данного куба принадлежат параллельным прямым? пересекающимся прямым? скрещивающимся прямым?

в) Какие ребра данного куба перпендикулярны его граням? Какие ребра данного куба параллельны его граням?

г) Назовите углы, величины которых 90° и 45°.

д) Какие прямые, изображенные на рисунке 238, пересекаются с прямой, которой принадлежит диагональ B_1D; скрещиваются с ней; параллельны ей?

е) Каким плоскостям куба принадлежат точки A, A_1, M, O?

ж) С какими плоскостями куба прямая MK имеет хотя бы одну общую точку?

з) Какой вид имеют треугольники B_1BD, ACD, MKD, ABD, AOB?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ребро равно a. Найдите расстояние между прямыми: а) AA_1 и BC; б) A_1B_1 и CC_1; в) B_1D_1 и AB; г) AC и BB_1; д) AA_1 и B_1D_1. [a; a; a; $0{,}5a\sqrt{2}$; $0{,}5a\sqrt{2}$.]

Б. 1. Постройте общий перпендикуляр диагонали куба и ребра, не пересекающего эту диагональ. [Рассмотрите плоскость, содержащую данную диагональ и параллельную данному ребру.]

2. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны a и b. Найдите расстояние между диагональю параллелепипеда и не пересекающим ее боковым ребром. $\left[\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}.\right]$

3. Ребро куба равно a. Найдите расстояние между непересекающимися диагоналями двух смежных граней. $\left[\dfrac{a\sqrt{3}}{3}\right.$. Искомое расстояние равно расстоянию между параллельными сечениями куба, содержащими данные диагонали граней.]

ГЛАВА XIII

§ 1. ВВЕДЕНИЕ ДЕКАРТОВЫХ КООРДИНАТ В ПРОСТРАНСТВЕ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Точка на прямой может быть задана одной координатой; точка на плоскости определяется уже двумя координатами; точка в пространстве будет определяться тремя координатами.

2. Чтобы говорить о координатах точки в пространстве, необходимо, прежде всего, ввести систему координат.

3. *Система координат в пространстве* состоит из трех попарно перпендикулярных осей:

а) возьмем три взаимно перпендикулярные прямые x, y, z, пересекающиеся в одной точке O (рис. 239);

б) проведем через каждую пару этих прямых плоскость;

в) плоскость, проходящая через прямые x и y, называется плоскостью xy;

г) две другие плоскости называются соответственно xz и yz;

д) прямые x, y, z называются *координатными осями* или осями координат, точка их пересечения O — *началом координат*, а плоскости xy, yz, xz — *координатными плоскостями*;

е) точка O разбивает каждую из осей координат на две полупрямые — *полуоси*. Условились одну из них называть *положительной*, а другую — *отрицательной*.

4. Точка, лежащая на координатных плоскостях, имеет одну из координат, равную 0.

5. Точки, лежащие на осях координат, имеют две координаты, равные 0.

6. Начало координат имеет все три координаты, равные 0.

7. Между тремя числами (x; y; z) и точками пространства устанавливается взаимно однозначное соответствие. Каждой тройке чисел соответствует одна и только одна точка пространства, и, наоборот, каждой точке пространства соответствует единственная тройка чисел.

8. Координаты точек записывают в скобках рядом с буквенным обозначением: $A(x;\ y;\ z)$. Иногда обозначают точку просто ее координатами (x; y; z).

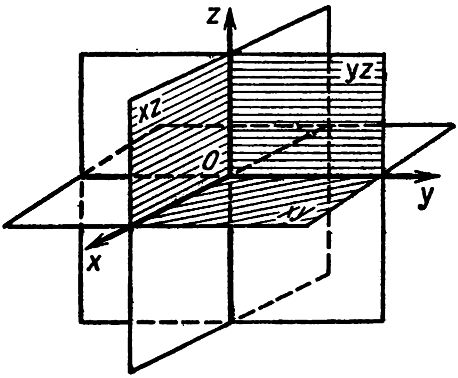


Рис. 239

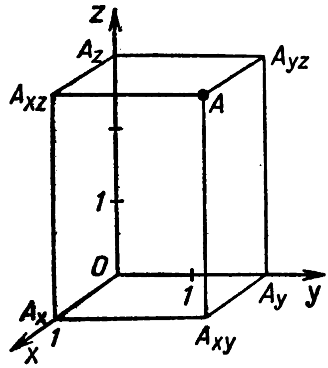


Рис. 240

9. ***Расстояние между двумя точками*** $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ определяется по формуле

$$M_1M_2=d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}.$$

10. В частном случае расстояние от начала координат до точки $M(x;\ y;\ z)$ равно:

$$d=\sqrt{x^2+y^2+z^2}.$$

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Даны точки $A(1;\ 2;\ 3)$, $B(0;\ 1;\ 2)$, $C(0;\ 0;\ 3)$ и $D(1;\ 2;\ 0)$. Какие из этих точек лежат: а) в плоскости xy; б) на оси z; в) в плоскости yz?

Решение. 1. У точек плоскости xy координата z равна нулю (см. рис. 239). Поэтому только точка D лежит в плоскости xy.

2. У точек плоскости yz координата x равна нулю. Поэтому точки B и C лежат в плоскости yz.

3. У точек оси z две координаты x и y равны нулю. Поэтому только точка C лежит на оси z.

Задача 2. Дана точка $A(1;\ 2;\ 3)$. Найдите координаты оснований перпендикуляров, опущенных из этой точки на координатные оси и координатные плоскости.

Решение. 1. Опишем подробно построение точки A, координаты которой нам даны (рис. 240).

а) От точки O откладываем единичный отрезок по оси x, получаем точку $A_x(1;\ 0;\ 0)$.

б) Далее от точки A_x параллельно оси y откладываем два единичных отрезка, получаем точку $A_{xy}(1;\ 2;\ 0)$.

в) Наконец, от точки A_{xy} «поднимаемся» вдоль оси z на три единичных отрезка, получаем точку $A(1;\ 2;\ 3)$.

2. Достраиваем построенные нами отрезки до параллелепипеда $OA_xA_{xz}A_zA_{yz}A_yA_{xy}A$.

3. Точки A_x, A_y, A_z имеют соответственно координаты (1; 0; 0), (0; 2; 0) и (0; 0; 3).

4. Перпендикулярами, опущенными из точки A на координатные плоскости, будут отрезки AA_{xy}, AA_{xz} и AA_{yz} (см. рис. 240).

5. Координаты оснований перпендикуляров A_{xy}, A_{xz}, A_{yz} будут (1; 2; 0), (1; 0; 3) и (0; 2; 3).

Задача 3. Докажите, что один из внутренних углов треугольника тупой, если A (3; 5; 3), B (2; -1; 4) и C (0; -2; 1).

Решение. 1. Найдем длины сторон треугольника по формуле расстояния между двумя точками:

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2};$$

$$AB=\sqrt{(2-3)^2+(-1-5)^2+(4-3)^2}=\sqrt{38},$$

$$AC=\sqrt{(0-3)^2+(-2-5)^2+(1-3)^2}=\sqrt{62},$$

$$BC=\sqrt{(0-2)^2+(-2+1)^2+(1-4)^2}=\sqrt{14}.$$

2. Рассмотрим соотношение между числами, выражающими квадраты сторон данного треугольника:

а) $38+14=52$, $62>52$, т. е. $AC^2>AB^2+BC^2$.

б) Следовательно, сторона AC лежит против тупого угла B.

Задача 4. На оси z найдите точку, равноудаленную от двух точек A (-2; 1; 4) и B (3; 0; 1).

Решение. 1. Точка M, лежащая на оси z, имеет координаты (0; 0; z).

2. Найдем расстояния AM и BM:

$$AM=\sqrt{(0+2)^2+(0-1)^2+(z-4)^2}=\sqrt{z^2-8z+21},$$
$$BM=\sqrt{(0-3)^2+0+(z-1)^2}=\sqrt{z^2-2z+10}.$$

3. Согласно условию $AM=BM$, тогда получим уравнение

$$\sqrt{z^2-8z+21}=\sqrt{z^2-2z+10}.$$

4. Решая это уравнение, найдем координату z точки M:

$$z^2-8z+21=z^2-2z+10,\ -6z=-11,\ z=\frac{11}{6},\ M\left(0;\ 0;\ \frac{11}{6}\right).$$

Задача 5. Найдите координаты вершины D параллелограмма $ABCD$, если координаты трех других его вершин известны: A (2; 3; 2), B (0; 2; 4) и C (4; 1; 0).

Решение. 1. Найдем координаты точки M середины AC по формулам

$$x=\frac{x_1+x_2}{2},\ y=\frac{y_1+y_2}{2},\ z=\frac{z_1+z_2}{2};$$

$$x=\frac{2+4}{2}=3,\ y=\frac{3+1}{2}=2,\ z=\frac{2+0}{2}=1,\ \text{или}\ M\,(3;\ 2;\ 1).$$

2. Диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам, т. е. точка $M \in BD$ и $BM = MD$, тогда, используя формулы для нахождения координат середины BD, получим:

$$3 = \frac{0 + x_D}{2},\ 2 = \frac{2 + y_D}{2},\ 1 = \frac{4 + z_D}{2},\ \text{т. е.}\quad x_D = 6,\ y_D = 2,\ z_D = -2.$$

3. Следовательно, $D(6;\ 2;\ -2)$.

Контрольные вопросы

1. Из чего состоит декартова система координат в пространстве?
2. Как определяются координаты точки в пространстве (в данной системе координат)?
3. Для любой ли тройки чисел $(x;\ y;\ z)$ существует точка с этими координатами?
4. Могут ли две различные точки иметь одинаковые соответственные координаты?
5. Чему равно расстояние от начала координат до данной точки $A(x;\ y;\ z)$?
6. Чему равны координаты середины отрезка с данными координатами концов?
7. Чему равно расстояние между двумя точками с заданными координатами?
8. Как по координатам четырех точек A, B, C, D установить, является ли четырехугольник $ABCD$ параллелограммом?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. **1.** Как расположены относительно системы координат точки $A(2;\ 0;\ 0)$, $B(0;\ -5;\ 0)$, $C(0;\ 0;\ -1)$, $D(0;\ 2;\ 2)$, $E(5;\ -5;\ 0)$? [Точка A лежит на оси x, B — на оси y, C — на оси z, D — на плоскости yz, E — на плоскости xy.]

2. Отметьте точки $A(-3;\ 5;\ 1)$, $B(1;\ -2;\ 4)$, $C(2;\ 6;\ -1)$, $D(4;\ 0;\ 3)$, $E(0;\ 7;\ 0)$.

3. На оси y найдите точку, равноудаленную от точек $A(1;\ -3;\ 7)$ и $B(5;\ 7;\ -3)$. $\left[\left(0;\ \frac{6}{5};\ 0\right).\right]$

4. На оси z найдите точку, равноудаленную от точек $A(4;\ -1;\ 2)$ и $B(0;\ 2;\ -1)$. $\left[\left(0;\ 0;\ \frac{8}{3}\right).\right]$

5. Найдите длину отрезка, начало которого в начале координат, а конец — в точке $(6;\ -2;\ 3)$. [7.]

6. Найдите длину отрезка, соединяющего точки $A(2;\ 0;\ -1)$ и $B(3;\ -2;\ 1)$. [3.]

Б. **1.** Проверьте, что точки $A(3;\ -1;\ 2)$, $B(1;\ 2;\ -1)$, $C(-1;\ 1;\ -3)$, $D(3;\ -5;\ 3)$ служат вершинами трапеции. Найдите длины ее параллельных сторон. [$AB = \sqrt{22}$, $DC = 2\sqrt{22}$.]

2. Даны три последовательные вершины параллелограмма $A(1;\ 1;\ 4)$, $B(2;\ 3;\ -1)$, $C(-2;\ 2;\ 0)$. Найдите четвертую вершину D. [(0; 0; 5).]

3. Докажите, что углы треугольника ABC острые, если $A(3;\ -2;\ 5)$, $B(-2;\ 1;\ -3)$, $C(5;\ 1;\ -1)$.

4. Отрезок AB разделен точками C, D, E, K на пять равных частей. Известны координаты точек $C(3;\ -5;\ 7)$ $K(-2;\ 4;\ -8)$. Найдите координаты остальных точек A, B, D, E. $\left[A\left(\frac{14}{3};\ -8;\ 12\right),\ B\left(-\frac{11}{3};\ 7;\ -13\right),\ D\left(\frac{4}{3};\ -2;\ 2\right),\ E\left(-\frac{1}{3};\ 1;\ -3\right).\right]$

5. Докажите, что четырехугольник $ABCD$ с вершинами $A(1;\ 3;\ 2)$, $B(0;\ 2;\ 4)$, $C(1;\ 1;\ 4)$, $D(2;\ 2;\ 2)$ — параллелограмм.

6. Даны координаты одного конца отрезка $A(2;\ 3;\ -1)$ и его середины $C(1;\ 1;\ 1)$. Найдите координаты второго конца отрезка $B(x;\ y;\ z)$. [(0; —1;3).]

В. **1.** Даны вершины $A(3;\ 2;\ -1)$, $B(5;\ -4;\ 7)$ и $C(-1;\ 1;\ 2)$ треугольника ABC. Вычислите длину медианы, проведенной из вершины C. [$\sqrt{30}$.]

2. В плоскости xy найдите точку $D(x;\ y;\ 0)$, равноудаленную от трех данных точек $A(0;\ 1;\ -1)$, $B(-1;\ 0;\ 1)$, $C(0;\ -1;\ 0)$. $\left[\left(-\frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ 0\right).\right]$

§ 2. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФИГУР В ПРОСТРАНСТВЕ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Понятие преобразования для фигур в пространстве определяется так же, как и на плоскости.

2. Кроме симметрии относительно точки и прямой в пространстве, рассматривается преобразование симметрии относительно плоскости. Это преобразование состоит в следующем (рис. 241). Пусть α — произвольная фиксированная плоскость. Из точки X фигуры опускаем перпендикуляр $X\bar{X}$ на плоскость α и на его продолжении за точку $\bar{X}$ откладываем отрезок $\bar{X}X'$, равный $X\bar{X}$.

3. Преобразование, которое переводит точку X в симметричную ей точку X', называется *преобразованием симметрии относительно плоскости* α.

4. Если преобразование симметрии относительно плоскости α переводит фигуру в себя, то такая фигура называется *симметричной* относительно плоскости α, а плоскость α называется *плоскостью симметрии*.

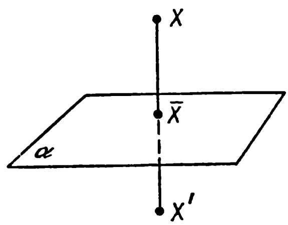


Рис. 241

5. *Движением* в пространстве называется преобразование, при котором сохраняются расстояния между точками.

6. Преобразования симметрии относительно точки, прямой и плоскости в пространстве являются движением.

7. При движении в пространстве прямые переходят в прямые, полупрямые — в полупрямые, плоскости — в плоскости, отрезки в отрезки сохраняются углы между полупрямыми.

8. *Параллельным переносом* в пространстве называется такое преобразование, при котором произвольная точка $(x; y; z)$ фигуры переходит в точку $(x+a; y+b; z+c)$, где a, b, c — постоянные числа для всех точек $(x; y; z)$.

9. Параллельный перенос в пространстве задается формулами

$$x'=x+a,\ y'=y+b,\ z'=z+c,$$

выражающими координаты x', y', z' точки, в которую переходит точка $(x; y; z)$ при параллельном переносе.

10. Свойства параллельного переноса:

— параллельный перенос есть движение;

— при параллельном переносе точки смещаются по параллельным (или совпадающим) прямым на одно и то же расстояние;

— при параллельном переносе каждая прямая переходит в параллельную ей прямую (или в себя);

— каковы бы ни были точки A и A', существует единственный параллельный перенос, при котором точка A переходит в точку A';

— два параллельных переноса, выполненные последовательно, дают параллельный перенос;

— преобразование, обратное параллельному переносу, есть параллельный перенос.

11. При параллельном переносе в пространстве каждая плоскость переходит либо в себя, либо в параллельную ей плоскость.

12. Преобразование подобия в пространстве определяется так же, как и на плоскости.

Контрольные вопросы

1. Какое преобразование фигур называется движением?
2. Что такое преобразование симметрии относительно плоскости?
3. Могут ли при преобразовании симметрии относительно плоскости некоторые точки фигуры оставаться неподвижными? Где лежат эти точки?
4. Дайте определение параллельного переноса. Перечислите его свойства.
5. Могут ли при параллельном переносе координаты точек оставаться без изменения?

§ 3. УГЛЫ МЕЖДУ ПРЯМЫМИ И ПЛОСКОСТЯМИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

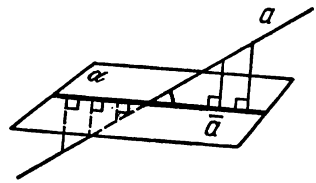


Рис. 242

1. Две пересекающиеся прямые образуют смежные и вертикальные углы. Вертикальные углы равны, а смежные углы дополняют друг друга до 180°. Угловая мера меньшего из них называется *углом между прямыми*.

2. Угол между перпендикулярными прямыми равен 90° по определению.

3. Угол между параллельными прямыми равен нулю.

4. *Углом между скрещивающимися прямыми* называется угол между пересекающимися параллельными им прямыми. Этот угол не зависит от того, какие взяты пересекающиеся прямые.

5. Скрещивающиеся прямые иногда называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90°.

6. Прямая $\bar{a}$, образованная из оснований перпендикуляров, опущенных из точек прямой a на плоскость, называется *проекцией прямой a на плоскость* (рис. 242).

7. *Углом между прямой и плоскостью* называется угол между этой прямой и ее проекцией на плоскости (рис. 242).

8. *Угол между параллельными прямой и плоскостью* считается равным нулю, а *угол между перпендикулярными прямой и плоскостью* — равным 90°.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Точка A отстоит от плоскости на расстоянии k. Найдите длины наклонных, проведенных из этой точки под следующими углами к плоскости: а) 30°; б) 35°; в) 60°.

Решение. Треугольник $AA'B$ прямоугольный (рис. 243). Острый угол этого треугольника, противолежащий катету $A_1A \leqslant k$, равен 30° (соответственно 35°, 60°). Поэтому

а) $AB=\frac{A'A}{\sin 30°}=2k$; б) $AB=\frac{k}{\sin 35°}$; в) $AB=\frac{k}{\sin 60°}=\frac{2k}{\sqrt{3}}$.

Задача 2. Отрезок длиной 10 м пересекает плоскость, концы его находятся на расстоянии 2 и 3 м от плоскости. Найдите угол между данным отрезком и плоскостью.

Решение. 1. $AA' \perp \gamma$, $BB' \perp \gamma$, значит, $AA' \parallel BB'$ (рис. 244). Проведем плоскость β, содержащую прямые AA' и BB'. Рассмотрим $\triangle BB'M$ в плоскости β. $BB'=3$, $\angle B=90°$, а $\angle BMB'=\alpha$ — искомый.

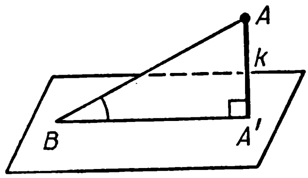


Рис. 243

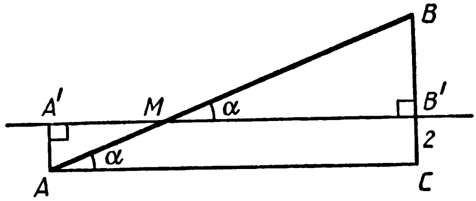


Рис. 244

2. Проводим $AC \perp BB'$. В прямоугольном треугольнике ABC $AB=10$, $BC=BB'+B'C=BB'+AA'=5$.

3. Искомый угол $\alpha=\angle BMB'=\angle BAC$, $\sin\alpha=\frac{BC}{AB}=0{,}5$. Следовательно, $\alpha=30^\circ$.

Задача 3. Две плоскости пересекаются под углом 40°. Точка A, лежащая в одной из этих плоскостей, отстоит от второй плоскости на расстоянии k. Найдите расстояние от этой точки до прямой пересечения плоскостей.

Решение. 1. Пусть α и β — данные плоскости и A — точка, лежащая в плоскости α (рис. 245). Опустим перпендикуляр AA_1 на плоскость β и перпендикуляр AB на прямую c, по которой пересекаются плоскости.

2. По теореме о трех перпендикулярах $A_1B \perp c$. Угол при вершине прямоугольного треугольника ABA_1 равен 40°. Имеем:

$$AB=\frac{AA_1}{\sin 40^\circ}=\frac{k}{\sin 40^\circ}.$$

3. Таким образом, расстояние от точки A до прямой c равно $\frac{k}{\sin 40^\circ}$.

Задача 4. Через сторону AB треугольника ABC проведена плоскость α, образующая с плоскостью треугольника угол φ. Из вершины C опущен перпендикуляр CC_1 на плоскость α. Найдите площадь треугольника ABC_1, если площадь треугольника ABC равна k.

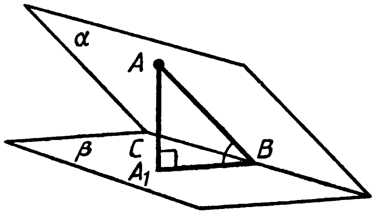


Рис. 245

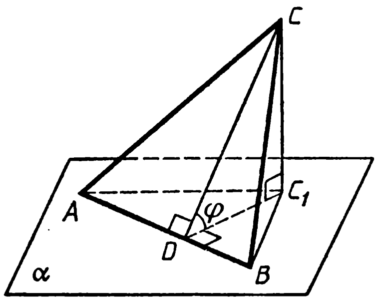


Рис. 246

Решение. 1. Проведем высоту CD треугольника ABC (рис. 246), тогда

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}AB\cdot CD=k.$$

2. По теореме о трех перпендикулярах проекция C_1D будет высотой треугольника ABC_1, а угол CDC_1 будет равен углу между плоскостями ABC и α, т. е. $CDC_1=\varphi$.

3. Из прямоугольного треугольника CDC_1 найдем высоту $C_1D=CD\cdot\cos\varphi$, поэтому площадь треугольника ABC_1 будет равна:

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot C_1D=\frac{1}{2}AB\cdot CD\cdot\cos\varphi=k\cos\varphi.$$

Контрольные вопросы

1. Как определяется угол между пересекающимися прямыми в пространстве?
2. Как определяется угол между скрещивающимися прямыми?
3. В каком случае скрещивающиеся прямые называются перпендикулярными?
4. Дайте определение угла между прямой и плоскостью.
5. Как построить угол между наклонной и плоскостью?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Точка A отстоит от плоскости на расстоянии k. Найдите длину наклонной, проведенной из этой точки под углом 60° к плоскости. $\left[\frac{2k}{\sqrt{3}}.\right]$
2. Из точки, отстоящей от плоскости на расстоянии a, проведены две наклонные, образующие с плоскостью углы 45° и 30°, а между собой прямой угол. Найдите расстояние между концами наклонных. [$a\sqrt{6}$.]
3. Через катет равнобедренного прямоугольного треугольника проведена плоскость под углом 45° ко второму катету. Найдите угол между гипотенузой и этой плоскостью. [30°.]
4. Из точки, отстоящей от плоскости на расстоянии a, проведены две наклонные, образующие с плоскостью угол 45°, а между собой угол 60°. Найдите расстояние между концами наклонных. [$a\sqrt{2}$.]

§ 4. ВЕКТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. В пространстве, как и на плоскости, *вектором* называется направленный отрезок.

2. Так же как и на плоскости, определяются основные понятия для векторов в пространстве: абсолютная величина вектора, направление вектора, равенство векторов.

3. *Координатами вектора* с началом в точке $A_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и концом в точке $A_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ называются числа x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1.

4. *Суммой векторов* $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и $\bar{b}(b_1;\ b_2;\ b_3)$ называется вектор $\bar{c}(a_1+b_1;\ a_2+b_2;\ a_3+b_3)$.

5. *Произведением вектора* $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ *на число* λ называется вектор $\lambda\bar{a}=(\lambda a_1;\ \lambda a_2;\ \lambda a_3)$.

6. *Скалярным произведением векторов* $\overline{(a_1;\ a_2;\ a_3)}$ и $\overline{(b_1;\ b_2;\ b_3)}$ называется число $a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$. Так же как и на плоскости, скалярное произведение векторов равно произведению их абсолютных величин на косинус угла между векторами.

7. Как для векторов на плоскости, в пространстве имеет место разложение $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)=a_1\bar{e}_1+a_2\bar{e}_2+a_3\bar{e}_3$, где $\bar{e}_1$, $\bar{e}_2$, $\bar{e}_2$ — единичные векторы, имеющие направления координатных осей.

8. Из определения координат вектора и из формулы для расстояния между точками с заданными координатами следует формула для абсолютной величины вектора:

$$|\overline{AB}|=AB=\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2+(z_B-z_A)^2},$$

или если $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$, то модуль вектора равен корню квадратному из суммы квадратов его координат:

$$|\bar{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}.$$

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Даны три точки $A(1;\ 0;\ 1)$, $B(-1;\ 1;\ 2)$, $C(0;\ 2;\ -1)$. Найдите точку $D(x;\ y;\ z)$, если известно, что: а) векторы $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равны; б) сумма векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$ равна нулевому вектору.

Решение. 1. $\overline{AB}=\overline{((-1-1);\ (1-0);\ (2-1))}=\overline{(-2;\ 1;\ 1)}$.

2. $\overline{CD}=\overline{((x-0);\ (y-2);\ (z+1))}=\overline{(x;\ y-2;\ z+1)}$.

а) $\overline{CD}=\overline{AB}$ означает, что $x=-2$, $y-2=1$, $z+1=1$; таким образом, искомая точка $D(-2;\ 3;\ 0)$;

б) $\overline{AB}+\overline{CD}=\bar{0}$ означает, что $x-2=0$, $x=2$; $(y-2)+1=0$, $y=1$; $(z+1)+1=0$, $z=-2$; следовательно, $D(2;\ 1;\ -2)$.

Задача 2. При каких значениях m и n данные векторы коллинеарны: а) $\bar{a}(2;\ n;\ 3)$ и $\bar{b}(3;\ 2;\ m)$; б) $\bar{a}(m;\ 2;\ 5)$ и $\bar{b}(1;\ -1\ n)$; в) $\bar{a}(m;\ n;\ 2)$ и $\bar{b}(6;\ 9;\ 3)$?

Решение. Из теоремы о коллинеарности векторов следует, что у коллинеарных векторов соответствующие координаты пропорциональны. Запишем соответствующие пропорции, из которых найдем m и n:

а) $\frac{2}{3}=\frac{n}{2}=\frac{3}{m}$, откуда $\frac{2}{3}=\frac{n}{2}$, $n=\frac{4}{3}$ и $\frac{2}{3}=\frac{3}{m}$, $m=\frac{9}{2}$;

б) $\frac{m}{1}=\frac{2}{-1}=\frac{5}{n}$, откуда $m=-2$, $n=-\frac{5}{2}$;

в) $\frac{m}{6}=\frac{n}{9}=\frac{2}{3}$, откуда $m=4$, $n=6$.

Задача 3. Найдите единичный вектор, коллинеарный вектору $\bar{a}(2;\ 1;\ -2)$.

Решение. 1. Единичными называются векторы, абсолютная величина которых равна 1.

2. В общем случае если дан вектор $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$ и коллинеарный ему единичный вектор $\bar{e}=\lambda\bar{a}$, то $|\bar{e}|=|\lambda|\cdot|\bar{a}|=1$, откуда $|\lambda|=\frac{1}{|\bar{a}|}$.

3. В данном случае $\bar{a}(2;\ 1;\ -2)$, следовательно,

$$|\bar{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}=\sqrt{4+1+4}=3 \text{ и}$$
$$|\lambda|=\frac{1}{3},\ \lambda=\pm\frac{1}{3}.$$

4. Найдем искомые векторы $\bar{e}=\pm\frac{1}{3}(2;\ 1;\ -2)$, т. е.

$$\overline{\left(\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{-2}{3}\right)} \text{ и } \overline{\left(-\frac{2}{3};\ -\frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)}.$$

Задача 4. Даны две точки $A(1;\ 0;\ 2)$ и $B(-1;\ 1;\ 1)$. Найдите координаты единичного вектора $\bar{e}(a;\ b;\ c)$, коллинеарного вектору $\overline{AB}$ и одинаково с ним направленного.

Решение. 1. Задача решается так же, как и задача 3, только нужно взять $\lambda>0$, тогда $\lambda=\frac{1}{|\overline{AB}|}$.

2. $\overline{AB}(-2;\ 1;\ -1)$, $|\overline{AB}|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$.

3. Тогда $\lambda=\frac{1}{|\overline{AB}|}=\frac{1}{\sqrt{6}}$.

4. Искомый вектор $\bar{e}=\lambda\overline{AB}=\overline{\left(-\frac{2}{\sqrt{6}};\ \frac{1}{\sqrt{6}};\ -\frac{1}{\sqrt{6}}\right)}$.

Задача 5. При каком значении n данные векторы $\bar{a}(2;\ -1;\ 3)$ и $\bar{b}(1;\ 3;\ n)$ перпендикулярны?

Решение. 1. Условие перпендикулярности двух векторов определяется формулой $\overline{ab}=0$.

2. Составим уравнение для n: $\overline{ab}=2\cdot 1+(-1)\cdot 3+3\cdot n=0$, откуда $n=\frac{1}{3}$.

Задача 6. Даны четыре точки $A(0;\ 1;\ -1)$, $B(1;\ -1;\ 2)$, $C(3;\ 1;\ 0)$, $D(2;\ -3;\ 1)$. Найдите косинус угла α между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$.

Решение. 1. На основании теоремы о скалярном произведении векторов найдем $\bar{a}\cdot\bar{b}$ по формуле

$$\bar{a}\cdot\bar{b}=|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|\cos\alpha. \qquad (1)$$

2. Координаты вектора $\overline{AB}$ $x=1-0=1$, $y=-1-1=-2$, $z=2-(-1)=3$, тогда $|\overline{AB}|=\sqrt{1^2+(-2)^2+3^2}=\sqrt{14}$.

3. Координаты вектора $\overline{CD}$ $x=2-3=-1$, $y=-3-1=-4$, $z=1-0=1$, тогда

$$|\overline{CD}|=\sqrt{(-1)^2+(-4)^2+1^2}=\sqrt{18}.$$

4. Из формулы (1) найдем:

$$\cos\alpha=\frac{\overline{AB}\cdot\overline{CD}}{|\overline{AB}|\cdot|\overline{CD}|},\ \text{т. е. } \cos\alpha=\frac{1\cdot(-1)+(-2)\cdot(-4)+3\cdot 1}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{18}}=$$

$$=\frac{5}{\sqrt{63}}=\frac{5\sqrt{7}}{21}.$$

Контрольные вопросы

1. Что называется вектором в пространстве?
2. Что такое нулевой вектор?
3. Что такое абсолютная величина вектора? направление вектора?
4. В каком случае векторы называются равными?
5. Как в координатах записать условие равенства векторов $\overline{AB}$ и $\overline{CD}$?
6. Как найти абсолютную величину вектора $\overline{AB}$? вектора $\bar{a}(a_1;\ a_2;\ a_3)$?
7. Как определяется сумма векторов $\bar{a}$ и $\bar{c}$?
8. Как геометрически связаны между собой векторы $\bar{a}$ и $\lambda\bar{a}$?
9. Как записать условие коллинеарности двух векторов в координатах?
10. Что такое скалярное произведение двух векторов?
11. Каков геометрический смысл скалярного произведения векторов?
12. Каким образом можно установить перпендикулярность векторов?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Дан вектор $\bar{a}(1;\ 2;\ 3)$. Найдите координаты конца коллинеарного ему вектора, если его начало в точке $A(1;\ 1;\ 1)$, а конец в плоскости xy. $\left[\left(\frac{2}{3};\ \frac{1}{3};\ 0\right).\right]$

2. При каких значениях k и c данные векторы коллинеарны: а) $\bar{a}(2;\ c;\ 3)$, $\bar{b}(3;\ 2;\ k)$; б) $\bar{a}(k;\ 2;\ 5)$, $\bar{b}(1;\ -1;\ c)$; в) $\bar{a}(k;\ c;\ 2)$, $\bar{b}(6;\ 9;\ 3)$? $\left[\text{а) } c=\frac{4}{3},\ k=\frac{9}{2};\ \text{б) } k=-2,\ c=-2{,}5;\ \text{в) } k=4,\ c=6.\right]$

3. Векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ образуют угол 60°, а вектор $\bar{c}$ им перпендикулярен. Найдите абсолютную величину вектора $\bar{a}+\bar{b}+\bar{c}$. $[\sqrt{a^2+b^2+c^2+|a|\cdot|b|}.]$

4. При каких значениях c данные векторы перпендикулярны: а) $\bar{a}(2;\ -1;\ 3)$, $\bar{b}(1;\ 3;\ c)$; б) $\bar{a}(c;\ -2;\ 1)$, $\bar{b}(c;\ 2c;\ 4)$; в) $\bar{a}(4;\ 2c;\ -1)$, $\bar{b}(-1;\ 1;\ c)$? $\left[\frac{1}{3};\ 2;\ 4.\right]$

5. Единичные векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ образуют попарно углы в 60°. Найдите угол α между векторами: а) $\bar{a}$ и $\bar{b}+\bar{c}$; б) $\bar{a}$ и $\bar{b}-\bar{c}$. $\left[\text{а) } \cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}};\ \text{б) } \alpha=90°.\right]$

6. Из вершины A треугольника ABC восставлен перпендикуляр AD к плоскости треугольника. Найдите косинус угла φ между векторами $\overline{BC}$ и $\overline{BD}$, если угол ABD равен α, а угол ABC равен β. $[\cos\varphi=\cos\alpha\cdot\cos\beta.]$

ГЛАВА XIV

§ 1. МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Двугранным* углом называется фигура, образованная двумя полуплоскостями с общей ограничивающей их прямой (рис. 247). Полуплоскости называются *гранями*, а ограничивающая их прямая — *ребром* двугранного угла.

2. Плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани по двум полупрямым. Угол, образованный этими полупрямыми, называется *линейным углом двугранного угла.*

3. За *меру двугранного угла* принимается мера соответствующего ему линейного угла.

4. *Трехгранным углом* (abc) называется фигура, составленная из трех плоских углов (ab), (bc), (ac) (рис. 248). Эти углы называются *гранями* трехгранного угла, а их стороны — *ребрами.*

5. Общая вершина плоских углов называется *вершиной* трехгранного угла.

6. Двугранные углы, образованные гранями трехгранного угла, называются *двугранными углами трехгранного угла.*

7. В трехгранном угле каждый плоский угол меньше суммы двух других плоских углов.

8. В выпуклом многогранном угле сумма всех плоских углов меньше 360°.

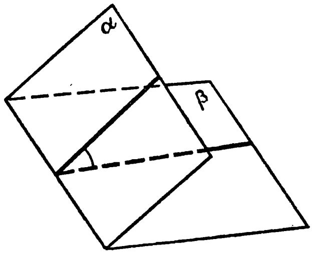


Рис. 247

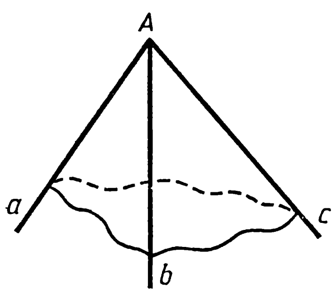


Рис. 248

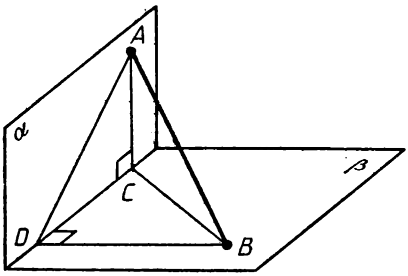


Рис. 249

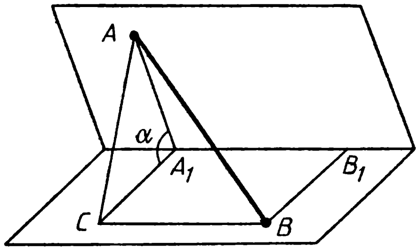


Рис. 250

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Прямая AB проходит через точки A и B, лежащие в двух взаимно перпендикулярных плоскостях α и β. Перпендикуляры, опущенные из точек A и B на линию пересечения плоскостей α и β, соответственно равны 2 и 3 см. Найдите отрезок AB и его проекции на данные плоскости, если расстояние между основаниями перпендикуляров равно a.

Решение. 1. Условию задачи отвечает рисунок 249.

2. Очевидно, AD — проекция отрезка AB на плоскость α, CB — проекция отрезка AB на плоскость β.

3. Для нахождения отрезков AD, AB и BC рассмотрим треугольники ACD и ADB.

4. В прямоугольном треугольнике ACD гипотенуза $AD=\sqrt{AC^2+CD^2}$, т. е. $AD=\sqrt{4+a^2}$.

5. В прямоугольном треугольнике ADB гипотенуза $AB=\sqrt{AD^2+BD^2}$, т. е. $AB=\sqrt{13+a^2}$.

6. BC находим из прямоугольного треугольника ACB (так как $AC \perp \beta$):

$$BC=\sqrt{AB^2-AC^2}=\sqrt{13+a^2-4}=\sqrt{9+a^2}.$$

Задача 2. Из точек A и B, лежащих в различных гранях двугранного угла, опущены перпендикуляры AA_1 и BB_1 на ребро угла. Найдите AB, если $AA_1=3a$, $BB_1=2b$, $A_1B_1=k$ и двугранный угол равен α.

Решение. 1. Условию задачи отвечает рисунок 250.

2. Проведем прямые $A_1C \parallel BB_1$ и $BC \parallel A_1B_1$; из этого построения следует, что $A_1C \perp A_1B_1$ и $\angle CA_1A=\alpha$.

3. Прямая A_1B_1 перпендикулярна плоскости треугольника AA_1C, так как она перпендикулярна двум прямым в этой плоскости AA_1 и CA_1. Следовательно, параллельная ей прямая BCтоже перпендикулярна плоскости треугольника AA_1C.

Таким образом, треугольник ABC прямоугольный с прямым углом C.

4. По теореме косинусов для треугольника CA_1A имеем $AC^2=AA_1^2+A_1C^2-2\cdot AA_1\cdot A_1C\cdot\cos\alpha=9a^2+4b^2-2\cdot 3a\cdot 2b\times\cos\alpha=9a^2+4b^2-12ab\cos\alpha$.

5. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника ABC имеем $AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=\sqrt{9a^2+4b^2-12ab\cdot\cos\alpha+k^2}$.

Задача 3. На грани двугранного угла величиной в 30° дана точка C, удаленная от ребра на расстояние k. Найдите расстояние от этой точки до другой грани.

Решение. 1. Условию задачи удовлетворяет рисунок 251.

2. Проведем $CB\perp\alpha$ и $CD\perp a$, где $B\in\alpha$, $D\in a$ (a — ребро двугранного угла).

3. По теореме о трех перпендикулярах отрезок BD перпендикулярен ребру a. Тогда $\angle BDC$ — линейный угол данного двугранного угла, и по условию $CD=k$, $\angle BDC=30°$.

4. Из прямоугольного треугольника BDC $BC=CD\cdot\sin 30°=\frac{k}{2}$ и есть искомое расстояние.

Задача 4. В трехгранном угле $EABC$ плоский угол BEC прямой, а два других угла AEB и AEC содержат по 60°. Плоскость α проведена так, что отсекает от ребер три равных отрезка EB, EA и EC. Найдите величину двугранного угла при ребре BC.

Решение. 1. Условию задачи отвечает рисунок 252.

2. Так как $BE=EA$ и $\angle BEA=60°$, следовательно, треугольник ABE равносторонний, значит, $BE=BA$. Аналогично доказывается, что $EA=AC$, тогда $EA=EB=EC=AB=AC$.

3. Построим линейный угол двугранного угла при ребре BC. Для этого из вершины E проведем $ED\perp BC$ и точку D соединим с точкой A. Так как $AD\perp BC$, то угол ADE и есть линейный угол искомого двугранного угла.

4. Обозначая $EA=EB=EC=AB=AC$ через k, имеем $ED=DA=DB$ и $ED^2+BD^2=k^2$.

Таким образом, $DE^2+AD^2=AE^2$, а это означает, что $\angle ADE=90°$.

Задача 5. Гипотенуза прямоугольного треугольника лежит в плоскости α, а катеты наклонены к ней под углами γ и φ. Найдите угол между плоскостью треугольника и плоскостью α.

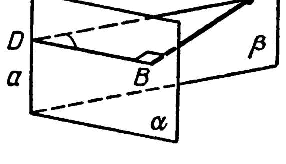


Рис. 251

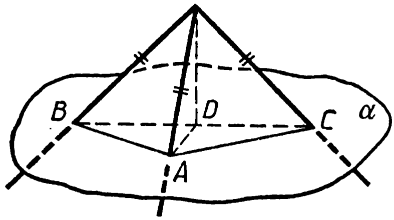


Рис. 252

Решение. 1. Условию задачи отвечает рисунок 253.

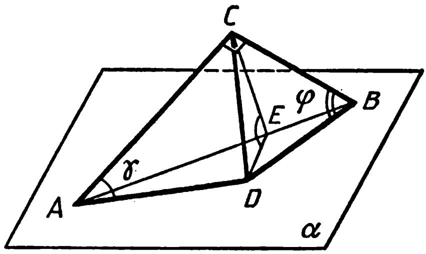


Рис. 253

2. Проведем в треугольнике ABC высоту $CE \perp AB$ и спроектируем треугольник ABC на плоскость α (см. рисунок).

3. По теореме о трех перпендикулярах $DE \perp AB$, следовательно, угол CED — линейный угол искомого двугранного угла при ребре AB. Он же является острым углом прямоугольного треугольника CED.

4. Обозначим CD через k. Тогда $AC = \frac{k}{\sin\gamma}$ из треугольника ACD, $BC = \frac{k}{\sin\varphi}$ из треугольника BCD и $AB = \frac{k}{\sin\gamma \cdot \sin\varphi} \times$ $\times \sqrt{\sin^2\gamma + \sin^2\varphi}$.

5. Так как $AB \cdot CE = AC \cdot BC$, то

$$CE = \frac{AC \cdot BC}{AB} = \frac{k^2 \sin\gamma \sin\varphi}{k \sin\gamma \sin\varphi \sqrt{\sin^2\gamma + \sin^2\varphi}} = \frac{k}{\sqrt{\sin^2\gamma + \sin^2\varphi}}.$$

6. Итак в треугольнике CED катет $CD = k$, гипотенуза $CE = \frac{k}{\sqrt{\sin^2\varphi + \sin^2\gamma}}$.

Следовательно, $\sin CED = CD : CE = \sqrt{\sin^2\gamma + \sin^2\varphi}$.

7. Из полученного равенства видно, что при любых $0 < \gamma < 90°$ и $0 < \varphi < 90°$ подкоренное выражение положительно; следовательно, решение при этих условиях существует и единственно. В частности, если $\gamma + \varphi = 90°$, то $\sqrt{\sin^2\gamma + \sin^2(90 - \gamma)} =$ $= \sqrt{\sin^2\gamma + \cos^2\gamma} = 1$ и $\sin CED = 1$. Это означает, что плоскость треугольника ABC перпендикулярна плоскости α.

Контрольные вопросы

1. Что называется двугранным углом, его ребром и гранями?
2. Что называется линейным углом двугранного угла?
3. Что называется трехгранным углом, его вершиной, ребрами и гранями?
4. Верны ли следующие утверждения:

   а) пересечение двугранного угла и плоскости, перпендикулярной его ребру, называется линейным углом двугранного угла;

   б) каждый двугранный угол ограничен двумя плоскостями, называемыми его гранями;

   в) величиной двугранного угла называется величина его линейного угла?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Расстояния от точки M до граней прямого двугранного угла равны 6 и 8 м. Найдите расстояние от точки M до ребра. [10 м.]

2. Двугранный угол равен 45°. Точка M лежит в одной грани на расстоянии k от другой грани. Найдите расстояние от точки M до ребра. [$a\sqrt{2}$.]

Б. 1. Концы отрезка AB лежат на гранях прямого двугранного угла. Проекции отрезка на грани равны $BA_1=13$ м, $AB_1=9$ м; его проекция на ребро равна $A_1B_1=5$ м. Найдите AB. [15 м.]

2. Треугольник ABC с прямым углом C образует с плоскостью M двугранный угол 45° (AC лежит в M). Катет $AC=2$ м, а гипотенуза AB относится к катету BC как 3:1. Найдите расстояние от вершины B до плоскости M. [5 дм.]

3. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание, а плоскости их образуют угол 60°. Общее основание равно 16 см, боковая сторона одного треугольника равна 17 см, а боковые стороны другого взаимно перпендикулярны. Найдите расстояние между вершинами треугольников. [13 см.]

В. 1. У трехгранного угла два плоских угла острые и равны α, а третий угол равен γ. Найдите двугранные углы φ, противолежащие плоским углам α, и угол β между плоскостью γ и противолежащим ребром. $\left[\cos\varphi=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\operatorname{tg}\alpha};\ \cos\beta=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\frac{\gamma}{2}}.\right]$

2. У трехгранного угла один плоский угол равен γ ($\gamma<\pi$), а прилежащие к нему двугранные углы равны $\varphi\left(\varphi<\frac{\pi}{2}\right)$. Найдите два других плоских угла α и угол β, который образует плоскость угла γ с противолежащим ребром. $\left[\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}}{\cos\varphi};\ \operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\varphi\sin\frac{\gamma}{2};\right.$ указание к задаче на рисунке 254.]

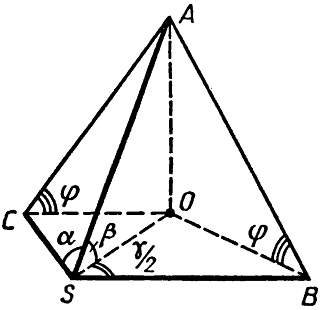


Рис. 254

§ 2. МНОГОГРАННИК

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Многогранник* — это такое тело, поверхность которого состоит из конечного числа плоских многоугольников (рис. 255).

2. Отрезок, соединяющий две вершины, не лежащие в одной грани, называется *диагональю* многогранника. Так, на рисунке 255 отрезок BD_1 — диагональ куба.

3. *Диагональной плоскостью* куба называется плоскость, проходящая через два боковых ребра куба, не лежащих в одной грани. Сечение, полученное от пересечения диагональной плоскости с гранями куба, называется *диагональным сечением*. На рисунке 255 BB_1D_1D — диагональное сечение.

4. Многогранник называется *выпуклым*, если он весь расположен по одну сторону от каждой из его граней.

Контрольные вопросы

1. Что называется многогранником?
2. Сколько граней, ребер, вершин, диагоналей имеет куб?
3. Какой многогранник называется выпуклым?

§ 3. ПРИЗМА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Призмой* называется многогранник, который состоит из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников (рис. 256). Многоугольники $ABCDE = A_1B_1C_1D_1E_1$ называются *основаниями* призмы. Многоугольники AA_1B_1B, BB_1C_1C, ... (параллелограммы) называются *боковыми гранями* призмы. Отрезки AA_1, BB_1, CC_1, ... называются *боковыми ребрами*. Перпендикуляр HH_1, опущенный

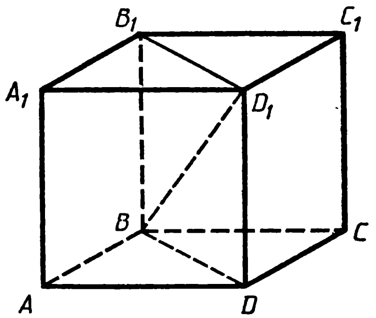


Рис. 255

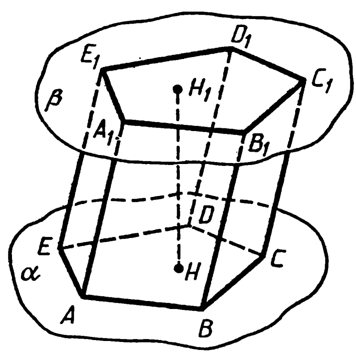


Рис. 256

из какой-нибудь точки верхнего основания на плоскость нижнего основания, называется *высотой* призмы.

2. Призма называется *треугольной, четырехугольной* и т. д., когда ее основание — треугольник, четырехугольник и т. д.

3. Призма называется *наклонной*, если ее боковые ребра не перпендикулярны к основаниям.

4. Призма называется *прямой*, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям.

5. Призма называется *правильной*, если она прямая и ее основания — правильные многоугольники.

6. *Площадь поверхности* призмы — это сумма площадей всех ее граней.

7. *Площадь боковой* поверхности — это сумма площадей всех боковых граней.

8. Плоскость, перпендикулярная к боковому ребру призмы, пересекает ее грани. Полученный в сечении многоугольник называется *перпендикулярным сечением* призмы.

9. Площадь боковой поверхности прямой призмы равна произведению периметра основания на высоту призмы (на длину бокового ребра), т. е. $S=PH$.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. В кубе с ребром a проведено сечение через середины ребер AD и B_1C_1 и вершины A_1 и C. Найдите площадь сечения (рис. 257).

Решение. 1. Из прямоугольного треугольника MCD, в котором $CD=a$, $MD=\frac{a}{2}$, найдем $CM=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

2. Но $A_1E=EC=CM=MA_1=\frac{a\sqrt{5}}{2}$.

3. Так как $A_1E\parallel MC$, значит, A_1ECM — ромб. Его диагональ $ME=DC_1$, и поэтому $ME=\sqrt{a^2+a^2}=a\sqrt{2}$.

4. Отрезок A_1C — диагональ куба, и, следовательно, $A_1C=$ $=\sqrt{a^2+a^2+a^2}=a\sqrt{3}$.

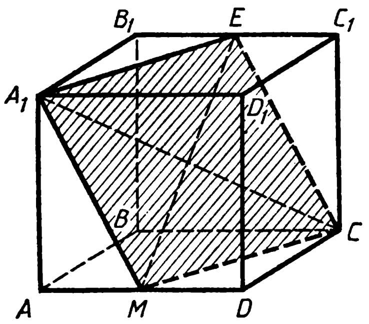


Рис. 257

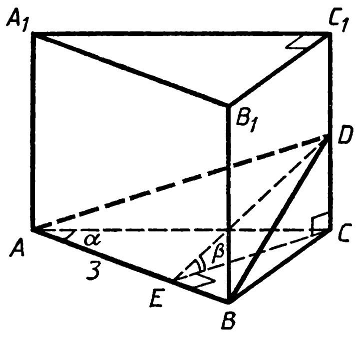


Рис. 258

5. Теперь находим, что $S_{A_1ECM}=\frac{1}{2}ME\cdot A_1C=\frac{a^2\sqrt{6}}{2}$.

Задача 2. Основанием прямой треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной 3 м, и острым углом α. Через гипотенузу проведена плоскость под углом β к плоскости основания. Эта плоскость пересекает боковое ребро призмы, выходящее из вершины прямого угла основания. Найдите площадь сечения (рис. 258).

Решение. 1. Из прямоугольного треугольника ABC ($\angle C=90°$) $BC=3\sin\alpha$.

2. Из прямоугольного треугольника ECB имеем $EC=BC\sin(90°-\alpha)=3\sin\alpha\cos\alpha=1{,}5\sin 2\alpha$.

3. Из прямоугольного треугольника EDC находим $ED=\frac{EC}{\cos\beta}=\frac{3\sin 2\alpha}{2\cos\beta}$.

4. Находим площадь сечения:

$$S=\frac{1}{2}AB\cdot ED=\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{3\sin 2\alpha}{2\cos\beta}=\frac{9\sin 2\alpha}{4\cos\beta}.$$

Задача 3. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна k и наклонена к боковой грани под углом α. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Решение. 1. Условию задачи отвечает рисунок 259.

2. По условию задачи $D_1B=k$.

3. Так как D_1C_1 перпендикулярна к грани BCC_1B_1, то BC_1 является проекцией диагонали D_1B, поэтому $\angle D_1BC_1=\alpha$, а треугольник D_1C_1B прямоугольный с прямым углом C_1.

4. $S_{бок}=4aH$, где a — сторона основания, H — высота призмы.

5. Из прямоугольного треугольника D_1BC_1 находим $D_1C_1=a=k\sin\alpha$, $C_1B=k\cos\alpha$.

6. Из прямоугольного треугольника BB_1C_1 находим $BB_1=H=\sqrt{BC_1^2-B_1C_1^2}=\sqrt{k^2\cos^2\alpha-k^2\sin^2\alpha}=k\sqrt{\cos 2\alpha}$.

7. Следовательно, $S_{бок}=4aH=4k\sin\alpha\cdot k\sqrt{\cos 2\alpha}=4k^2\sin\alpha\times\sqrt{\cos 2\alpha}$.

8. Замечание. $\operatorname{tg}\alpha=\frac{D_1C_1}{BC_1}=\frac{B_1C_1}{BC_1}<1$, т. е. B_1C_1 — катет, а BC_1 — гипотенуза, следовательно, $\alpha<45°$, и поэтому $\cos 2\alpha$ всегда положителен.

Задача 4. Основанием прямой призмы служит прямоугольник. Найдите площадь боковой поверхности призмы, если диагональ призмы, равная k, составляет с боковыми гранями углы α и β.

Решение. 1. Условию задачи отвечает рисунок 260.

2. По условию $BD_1=k$. Так как призма прямоугольная, то BC перпендикулярна к грани DCC_1D_1. Следовательно, D_1C — проекция диагонали D_1B, а $\angle BD_1C=\alpha$ и $\angle BCD_1=90°$. Аналогично $AD_1B=\beta$ и $\angle D_1AB=90°$.

3. $S_{бок}=2(x+y)H$, где $x=BC$, $y=AB$ и $H=D_1D$.

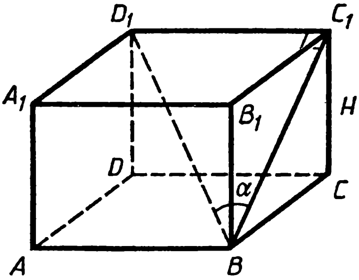


Рис. 259

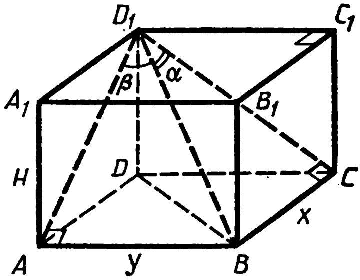


Рис. 260

4. Из прямоугольного треугольника BD_1C находим $BC = k \sin \alpha$.

5. Из прямоугольного треугольника AD_1B находим $AB = k \sin \beta$.

6. Квадрат диагонали данной призмы равен сумме квадратов его измерений, т. е. $BD_1^2 = BC^2 + AB^2 + D_1D$, откуда

$$H = \sqrt{k^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{k^2 - k^2 \sin^2 \alpha - k^2 \sin^2 \beta} =$$
$$= k\sqrt{\cos^2 \alpha - \sin^2 \beta} = k\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2} - \frac{1-\cos 2\beta}{2}} =$$
$$= k\sqrt{\frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2}} = k\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

7. Следовательно,

$$S_{\text{бок}} = 2(x+y)H = 2(k \sin \alpha + k \sin \beta)\, k\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)} =$$
$$= 4k^2 \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cos\frac{\alpha-\beta}{2}\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

8. Замечание. По свойству трехгранного угла $\angle ABD_1 + \angle D_1BC > \angle ABC$, т. е. $90° - \beta + 90° - \alpha > 90°$, или $\alpha + \beta < 90°$.

Контрольные вопросы

1. Может ли одна из боковых граней наклонной призмы быть перпендикулярной плоскости основания?
2. Может ли существовать наклонная призма, две боковые грани которой перпендикулярны плоскости основания?
3. Сколько диагональных сечений можно провести в кубе?
4. Имеем модель наклонной призмы. Какие размеры необходимо определить, чтобы вычислить площадь боковой поверхности призмы?
5. Что такое высота призмы?
6. Что такое диагональ призмы?
7. Что такое диагональное сечение призмы?
8. Какая призма называется прямой, наклонной?
9. Какая призма называется правильной?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Ребро куба равно a. Найдите расстояние от вершины куба до его диагонали. $\left[\frac{a\sqrt{6}}{3}.\right]$

2. В правильной четырехугольной призме площадь основания равна 144 см^2, а высота равна 14 см. Найдите диагональ этой призмы. [22 см.]

3. Найдите диагональ правильной четырехугольной призмы, если диагональ основания равна 8 см, а диагональ боковой грани равна 7 см. [9 см.]

4. В прямой треугольной призме стороны основания равны 10, 17 и 21 см, а высота призмы 18 см. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и меньшую высоту основания. [144 см^2.]

5. Основанием прямой призмы служит ромб, диагонали призмы равны 8 и 5 см, высота 2 см. Найдите сторону основания. [4,5 см.]

Б. 1. В треугольной призме (наклонной) расстояния между боковыми ребрами 37, 13, 40 см. Найдите расстояние между большей боковой гранью и противоположным боковым ребром. [12 см.]

2. В прямой треугольной призме стороны основания относятся как 17:10:9, а боковое ребро равно 16 см, площадь полной поверхности этой призмы содержит 1440 см^2. Найдите стороны основания. [34 см, 20 см, 18 см.]

3. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, у которого боковая сторона относится к основанию как 5:6. Высота призмы равна высоте основания, опущенной на его боковую сторону; площадь полной поверхности содержит 2520 см^2. Найдите ребра призмы. [25 см, 25 см, 30 см, 24 см.]

4. Площадь наибольшего диагонального сечения правильной шестиугольной призмы равна 1 м^2. Найдите площадь боковой поверхности призмы. [3 м^2.]

В. 1. В правильной треугольной призме проведена плоскость через сторону нижнего основания и через середину противоположного бокового ребра. Площадь полученного сечения равна k, а угол при его вершине равен α. Найдите площадь боковой поверхности призмы. $\left[\frac{24k\sqrt{\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}}{\cos\frac{\alpha}{2}}.\right]$

2. Высота правильной треугольной призмы равна H. Прямая, соединяющая центр верхнего основания с серединой стороны нижнего основания, наклонена к плоскости нижнего основания под углом α. Найдите площадь полной поверхности призмы. $\left[\frac{6\sqrt{6}H^2\operatorname{ctg}\alpha\sin(45^\circ+\alpha)}{\sin\alpha}.\right]$

3. Высота правильной треугольной призмы равна H. Через одно из ребер нижнего основания и противоположную ему вершину верхнего основания проведена плоскость. Найдите площадь сечения, если угол его при заданной вершине призмы равен α. $\left[\dfrac{H^2 \sin\alpha}{8\sin\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}.\right]$

4. В правильной треугольной призме угол между диагональю боковой грани и другой боковой гранью равен α. Найдите площадь боковой поверхности призмы, зная, что ребро основания равно k. $\left[\dfrac{3k^2\sqrt{\sin(60^\circ+\alpha)\sin(60^\circ-\alpha)}}{\sin\alpha}.\right]$

§ 4. ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Параллелепипедом* называется призма, у которой основаниями служат параллелограммы. Параллелепипеды, как и всякие призмы, могут быть прямые и наклонные.

2. Из определений следует:

— у параллелепипеда все шесть граней — параллелограммы;

— у прямого параллелепипеда четыре боковые грани — прямоугольники, а два основания — параллелограммы;

— у прямоугольного параллелепипеда все шесть граней — прямоугольники.

3. В любом параллелепипеде:

— противоположные грани равны и параллельны;

— диагонали пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

4. Квадрат длины диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

5. Все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. В прямом параллелепипеде стороны основания 3 и 6 см, а одна из диагоналей основания 4 см. Найдите бóльшую диагональ параллелепипеда, зная, что меньшая диагональ образует с плоскостью основания угол 60°.

Решение. 1. Условию задачи отвечает рисунок 261.

2. Так как основанием прямого параллелепипеда служит параллелограмм, а у параллелограмма сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов его сторон, то неизвестная диагональ равна

$$A_1C_1=\sqrt{2\cdot3^2+2\cdot6^2-4^2}=\sqrt{74}>4.$$

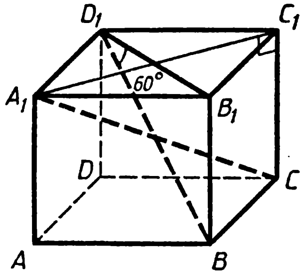


Рис. 261

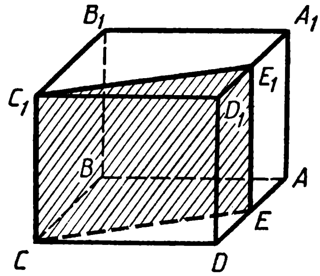


Рис. 262

3. Из прямоугольного треугольника D_1B_1B найдем ребро

$$B_1B = 4 \operatorname{tg} 60° = 4\sqrt{3}.$$

4. Бо́льшая диагональ параллелепипеда A_1C является гипотенузой прямоугольного треугольника A_1C_1C, тогда

$$A_1C = \sqrt{A_1C_1^2 + C_1C^2} = \sqrt{74 + 16 \cdot 3} = \sqrt{122} \text{ см.}$$

Задача 2. В прямоугольном параллелепипеде $AD = 3$, $DC = 4$, $CC_1 = k$. Через ребро C_1C и середину AD проведена плоскость сечения. Найдите площадь сечения параллелепипеда (рис. 262).

Решение. 1. Пусть E — середина отрезка AD. Плоскость EE_1C_1C перпендикулярна плоскости $ABCD$ (она проходит через прямую CC_1, а CC_1 перпендикулярна плоскости основания). Следовательно, EE_1C_1C — прямоугольник.

2. Найдем площадь прямоугольника EE_1C_1C:

$$S = EC \cdot CC_1.$$

Треугольник EDC прямоугольный с прямым углом EDC, $ED = 1{,}5$, найдем EC:

$$EC = \sqrt{4^2 + 1{,}5^2} = \sqrt{18{,}25}.$$

Тогда площадь EE_1C_1C

$$S = k \cdot \sqrt{18{,}25}.$$

Задача 3. Найдите площадь боковой поверхности прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого равна k и составляет с плоскостью основания угол α, а с большей боковой гранью угол β (рис. 263).

Решение. 1. По условию $BD_1 = k$. Проекцией BD_1 на плоскость основания является BD, поэтому $\angle DBD_1 = \alpha$.

2. Если DC — бо́льшая сторона основания, то DCC_1D_1 — бо́льшая грань.

3. Так как параллелепипед прямоугольный, то $BC \perp DCC_1D_1$, и,

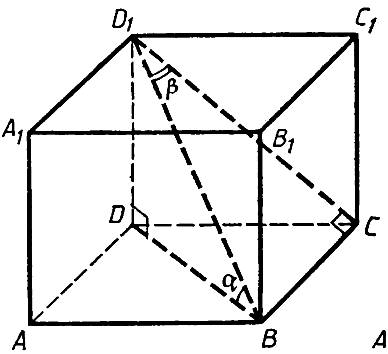


Рис. 263

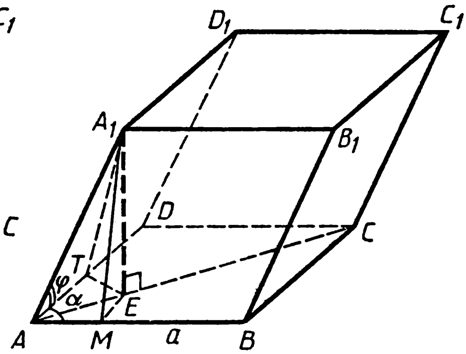


Рис. 264

следовательно, D_1C — проекция BD_1 на плоскость DCC_1D_1, а $\angle BD_1C=\beta$.

4. Из прямоугольного треугольника BD_1C находим:

$$BC=k\sin\beta \text{ и } CD_1=k\cos\beta.$$

5. Из прямоугольного треугольника DD_1B находим $H=k\sin\alpha$.

6. Из прямоугольного треугольника CDD_1 находим:

$$DC=\sqrt{D_1C^2-D_1D^2}=\sqrt{k^2\cos^2\beta-k^2\sin^2\alpha}=$$
$$=k\sqrt{\cos(\beta-\alpha)\cos(\alpha+\beta)}.$$

7. Находим площадь боковой поверхности:

$$S_{\text{бок}}=(2BC+2DC)\cdot H=2k^2\left(\sin\beta+\sqrt{\cos(\beta-\alpha)\cos(\alpha+\beta)}\right)\sin\alpha.$$

8. Замечание. $\sin\alpha=\frac{H}{k}$, $\cos\beta=\frac{CD_1}{k}$, но $CD_1>H$, поэтому $\cos\beta>\sin\alpha$, или $\sin(90°-\beta)>\sin\alpha$; $90°-\beta>\alpha$; $\alpha+\beta<90°$.

Задача 4. Основанием параллелепипеда служит ромб со стороной a и острым углом α. Боковое ребро, проходящее через вершину этого угла, равно k и образует со сторонами основания, проходящими через эту вершину, углы φ ($\varphi<90°$). Найдите высоту параллелепипеда и площадь основания (рис. 264).

Решение. 1. Из условия задачи сторона ромба $AB=a$, острый угол $DAB=\alpha$ и боковое ребро $AA_1=k$.

2. Из вершины A_1 опускаем перпендикуляры A_1E на основание, A_1M и A_1T на стороны ромба. Точки M и T соединены с E.

3. По условию $\angle A_1AT=\angle A_1AM=\varphi$. Из равенства треугольников A_1AT и A_1AM (по гипотенузе k и углу φ) вытекает, что $AM=AT$. По теореме о трех перпендикулярах $AM\perp ME$ и $AT\perp TE$, и, значит, треугольники AEM и ATE прямоугольные и равны (по гипотенузе AE и $MA=TA$). Поэтому AE делит угол α пополам, т. е. высота A_1E падает на диагональ ромба AC.

4. Из прямоугольного треугольника A_1AT имеем $AT = A_1A\cos\varphi = k\cos\varphi$. Из прямоугольного треугольника ATE имеем:

$$AE = \frac{AT}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{k\cos\varphi}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Из прямоугольного треугольника AA_1E имеем:

$$A_1E = H = \sqrt{A_1A^2 - AE^2} = \sqrt{k^2 - \frac{k^2\cos^2\varphi}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{k}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\varphi} = \frac{k}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2} - \frac{1+\cos 2\varphi}{2}} =$$

$$= \frac{k}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)\sin\left(\varphi-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

5. Площадь основания $S_{осн} = a^2 \cdot \sin\alpha$.

6. Замечание. По свойству плоских углов трехгранного угла A имеем $\angle A_1AB + \angle A_1AD > \angle BAD$, т. е. $\varphi + \varphi > \alpha$, $\varphi > \frac{\alpha}{2}$. Далее, $\angle A_1AM + \angle A_1AT + \angle TAM < 360°$, т. е. $2\varphi + \alpha < 360°$, $\varphi + \frac{\alpha}{2} < 180°$, поэтому подкоренное выражение больше 0.

Задача 5. В прямом параллелепипеде стороны основании равны a и $2a$, угол между ними 60°. Найдите его диагонали, зная, что меньшая из них составляет с основанием угол 45°.

Решение. 1. Условию задачи удовлетворяет рисунок 265.

2. Нам требуется найти A_1C и B_1D.

3. Из прямоугольного треугольника B_1BD имеем:

$$B_1D^2 = BD^2 + B_1B^2. \qquad (1)$$

BD найдем из треугольника ABD:

$$BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \cdot AD\cos 60° = 3a^2,$$

т. е. $BD = a\sqrt{3}$ — это меньшая диагональ, так как она лежит против острого угла. B_1B найдем из треугольника BB_1D:

$$BB_1 = BD \cdot \operatorname{tg} 45° = a\sqrt{3} \cdot 1 = a\sqrt{3}.$$

Подставим значения BD и B_1B в (1), тогда

$$B_1D^2 = 3a^2 + 3a^2 = 6a^2, \quad B_1D = a\sqrt{6}.$$

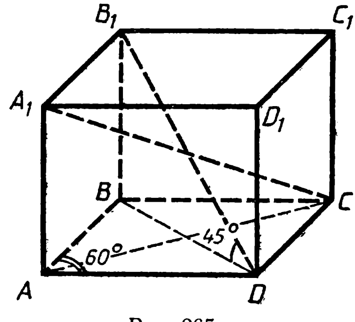


Рис. 265

4. Из прямоугольного треугольника AA_1C имеем:

$$A_1C^2 = AC^2 + A_1A^2. \qquad (2)$$

Из параллелограмма $ABCD$ имеем $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)$ (сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов сторон), подставим известные значения, тогда получим:

$$AC^2 + 3a^2 = 2(a^2 + 4a^2),\ AC^2 = 7a^2,$$
$$A_1A = B_1B = a\sqrt{3}.$$

Подставим значения AC и A_1A в (2) :

$$A_1C^2 = 7a^2 + 3a^2 = 10a^2,\ A_1C = a\sqrt{10}.$$

Контрольные вопросы

1. Что называется параллелепипедом?
2. Какое свойство у диагоналей параллелепипеда?
3. Какой параллелепипед называется прямым, прямоугольным?
4. Чему равны диагонали прямоугольного параллелепипеда, если известны его измерения?
5. Как изменится площадь полной поверхности куба, если увеличить его ребро в два раза?
6. Всякие ли два диагональных сечения параллелепипеда пересекаются по его диагоналям?
7. Можно ли утверждать, что в прямом параллелепипеде все диагональные сечения — прямоугольники?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. **1.** Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 6, 4 и 12 м. Найдите диагональ параллелепипеда. [14 м.]

2. Измерения комнаты равны 6, 8 и 3 м. Найдите площадь всех ее стен, пола и потолка. [180 м^2.]

3. Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда равна 352 м^2. Найдите его измерения, если они относятся как 1:2:3. [4 м, 8 м и 12 м.]

4. Боковое ребро прямого параллелепипеда равно 5 м, стороны основания равны 6 и 8 м, и одна из диагоналей основания равна 12 м. Найдите диагонали параллелепипеда. [13 м и 9 м.]

Б. **1.** В прямом параллелепипеде стороны основания 3 и 5 см, а одна из диагоналей основания 4 см. Меньшая диагональ параллелепипеда с плоскостью основания составляет угол 60°. Найдите диагонали параллелепипеда. [8 см, 10 см.]

2. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 2 и 5 см, расстояние между меньшими из них 4 см, боковое ребро равно $2^{1,5}$ см. Найдите диагонали параллелепипеда. [7 см и 5 см.]

3. Найдите диагонали прямого параллелепипеда, у которого каждое ребро равно a, а угол основания равен 60°. [$a\sqrt{2}$ и $2a$.]
4. В прямом параллелепипеде ребра, выходящие из одной вершины, равны 1, 2 и 3 м, причем два меньших образуют угол 60°. Найдите диагонали этого параллелепипеда. [4 м, $\sqrt{12}$ м.]
5. В прямоугольном параллелепипеде стороны основания относятся как 7:24, а площадь диагонального сечения равна 50 м^2. Найдите площадь боковой поверхности. [124 м^2.]

В. 1. Площадь диагонального сечения куба равна k. Найдите ребро куба, диагональ основания, диагональ куба, площадь его полной поверхности. $\left[\sqrt{\frac{k\sqrt{2}}{2}},\ \sqrt{k\sqrt{2}},\ \sqrt{\frac{3k\sqrt{2}}{2}},\ 3k\sqrt{2}.\right]$
2. Диагональ прямоугольного параллелепипеда образует с меньшей боковой гранью угол β. Через большие стороны верхнего и нижнего оснований проведено сечение, образующее с плоскостью основания угол α. Зная, что периметр этого сечения равен P, найдите измерения параллелепипеда. [Бо́льшая сторона $\frac{P\sin\beta}{2\sqrt{2}\sin(45°+\beta)}$, меньшая сторона $\frac{P\cos\beta\cos\alpha}{2\sqrt{2}\sin(45°+\beta)}$, $H=\frac{P\cos\beta\sin\alpha}{2\sqrt{2}\sin(45°+\beta)}$.]
3. Диагональная плоскость прямоугольного параллелепипеда и лежащая в ней диагональ k образуют с одной и той же боковой гранью соответственно углы α и β. Найдите измерения параллелепипеда. $\left[k\sin\beta,\ k\sin\beta\operatorname{ctg}\alpha,\ \frac{k\sqrt{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}}{\sin\alpha}\right.$, α, β — острые углы. $\Big]$

§ 5. ПИРАМИДА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Пирамидой* называется многогранник, который состоит из плоского многоугольника — *основания пирамиды*, точки, не лежащей в плоскости основания,— *вершины пирамиды* и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания. На рисунке 266 изображена пирамида $SABCD$, где $ABCD$ — основание, точка S — вершина. Треугольники SAB, SBC, SCD, SDA называются *боковыми гранями*. Прямые SA, SB, SC, SD называются *боковыми ребрами* пирамиды. Перпендикуляр SO, опущенный из вершины на основание, называется *высотой* пирамиды и обозначается H.

2. Сечение пирамиды, проходящее через вершину и диагональ основания, называется *диагональным сечением пирамиды*. Например, треугольник ASC — диагональное сечение пирамиды.

3. Пирамида называется *треугольной, четырехугольной* и т. д., если ее основание — треугольник, четырехугольник и т. д.

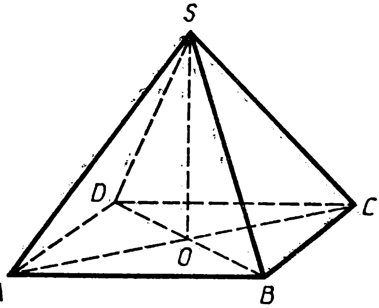


Рис. 266

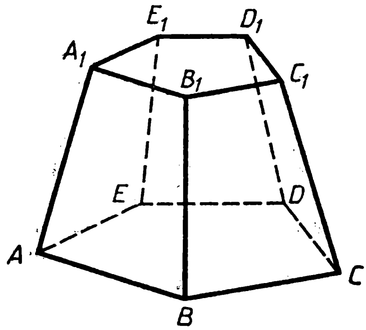


Рис. 267

4. Пирамида называется правильной, если основание ее — правильный многоугольник, а высота ее проходит через центр основания.

5. Боковые грани правильной пирамиды — равнобедренные треугольники, равные между собой.

6. Высота боковой грани правильной пирамиды называется *апофемой* пирамиды.

7. Треугольная пирамида называется также *тетраэдром.*

Если все четыре грани тетраэдра — правильные треугольники, то и тетраэдр называется правильным.

8. Если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию, то:

— боковые ребра и высота разделятся на пропорциональные части;

— в сечении получится многоугольник, подобный основанию;

— площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины.

9. Если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию, то получится новый многогранник, который называется *усеченной пирамидой* (рис. 267). Многоугольник $ABCDE$ — *нижнее основание*, многоугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$ — *верхнее основание.*

10. Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра основания на апофему.

11. Площадь боковой поверхности правильной усеченной пирамиды равна произведению полусуммы периметров ее оснований на апофему.

12. Если в пирамиде все боковые ребра равны, то вершина ее проектируется в центр описанной около основания окружности.

13. Если в пирамиде все двугранные углы при основании равны, то вершина проектируется в центр вписанной в основание окружности.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 3 и 4 м. Каждое боковое ребро пирамиды равно 13 м. Найдите высоту пирамиды и площадь боковой поверхности.

Решение. 1. Условию задачи удовлетворяет рисунок 268.

2. Так как по условию все боковые ребра равны, то вершина проектируется в центр описанной около основания окружности, т. е. в точку O пересечения диагоналей.

3. Следовательно, высота пирамиды равна катету прямоугольного треугольника OSD, у которого другой катет равен половине диагонали прямоугольника, а гипотенузой является боковое ребро.

4. Найдем диагональ прямоугольника $BD=\sqrt{3^2+4^2}=5$.

5. Высота пирамиды $SO=\sqrt{13^2-2{,}5^2}=\sqrt{162{,}75}$.

6. Для нахождения площади боковой поверхности нужно знать длины апофем SK и SM:
из прямоугольного треугольника SKD найдем

$$SK=\sqrt{13^2-1{,}5^2}=\sqrt{166{,}75};$$

из прямоугольного треугольника SMD найдем

$$SM=\sqrt{169-4}=\sqrt{165}.$$

Найдем площадь боковой поверхности:

$$S_{бок}=2S_{\triangle ASD}+2S_{\triangle DSC}=2\cdot\frac{4\sqrt{165}}{2}+2\cdot\frac{3\sqrt{166{,}75}}{2},$$

$$S_{бок}=4\sqrt{165}+3\sqrt{166{,}75}\ \text{м}^2.$$

Задача 2. В треугольной пирамиде стороны основания равны 13, 14, 15, все боковые ребра составляют с основанием углы, равные α. Найдите высоту пирамиды.

Решение. 1. Условию удовлетворяет рисунок 269.

2. Определим положение точки O относительно треугольника ABC. Так как прямоугольные треугольники AOD, COD и BOD имеют по равному катету OD и по равному острому углу α, то они рав-

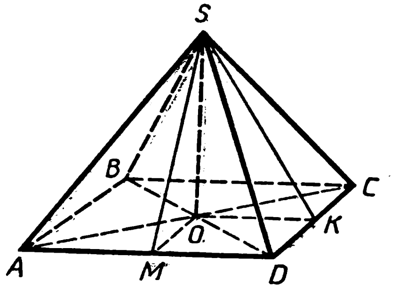


Рис. 268

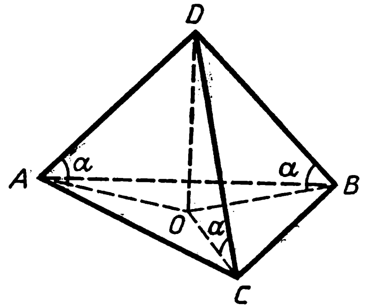


Рис. 269

ны. Следовательно, $AO=OC=OB$. А это значит, что точка O является центром описанной около основания окружности радиуса AO.

3. Найдем радиус описанной окружности из формулы $R=\frac{abc}{4S}$. Для этой цели нам необходимо найти S_{ABC}. Воспользуемся формулой Герона:

$$S=\sqrt{21\cdot(21-13)(21-14)(21-15)}=\sqrt{21\cdot 8\cdot 7\cdot 6}=84.$$

Тогда $R=\frac{abc}{4S}=\frac{13\cdot 14\cdot 15}{4\cdot 84}=\frac{65}{4\cdot 2}=\frac{65}{8}$.

4. Высоту пирамиды найдем из прямоугольного треугольника AOD с острым углом α.

Итак, $\operatorname{tg}\alpha=\frac{OD}{AO}$, или $AO\cdot\operatorname{tg}\alpha=OD$. Следовательно, $OD=$ $=\frac{65}{8}\operatorname{tg}\alpha$.

Задача 3. В основании треугольной пирамиды лежит равнобедренный треугольник ABC, угол C прямой. Длины боковых ребер пирамиды равны k, длина гипотенузы основания равна c. Найди углы, которые боковые ребра образуют с основанием, и двугранный угол при ребре CE (рис. 270).

Решение. 1. Из равенства боковых ребер вытекает равенство углов, которые боковые ребра образуют с плоскостью основания пирамиды.

2. При этом высота пирамиды проектируется в центр окружности, описанной вокруг основания, т. е. в середину гипотенузы прямоугольного треугольника ABC.

3. Итак, $EO\perp ABC$ и $\angle EAO=\angle EBO=\angle ECO=x$.

4. Для нахождения этих углов рассмотрим треугольник AEO, где $AE=k$, $AO=\frac{c}{2}$. Тогда $\cos x=\frac{c}{2k}$, а $x=\arccos\frac{c}{2k}$.

5. Для построения линейного угла двугранного угла при ребре EC проведем $AD\perp EC$ и точку D соединим с B (рис. 271). Так как треугольники AEC и BEC равны, то $BD\perp EC$ и, следовательно, $\angle ADB$, равный α, и есть искомый линейный угол.

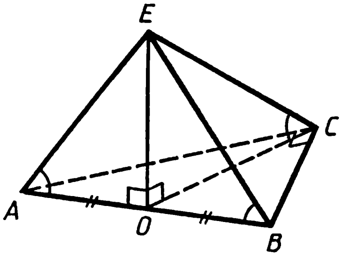


Рис. 270

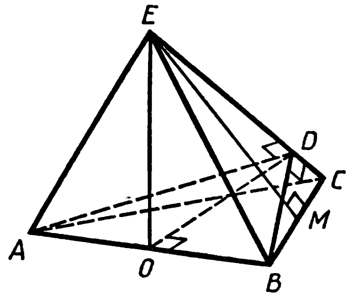


Рис. 271

6. Треугольник ABD равнобедренный, DO — его медиана, а значит, и высота, и биссектриса. Поэтому $\angle ODB = \frac{\alpha}{2}$.

7. В треугольнике ODB имеем $OB = \frac{c}{2}$, а сторону BD найдем из треугольника BEC, площадь которого, с одной стороны, равна $\frac{EC \cdot BD}{2}$, а с другой — $\frac{BC \cdot EM}{2}$. Таким образом,

$$\frac{EC \cdot BD}{2} = \frac{BC \cdot EM}{2}, \text{ или } EC \cdot BD = BC \cdot EM. \qquad (1)$$

Из равенства (1) имеем:

$$BD = \frac{BC \cdot EM}{ES} = \frac{BC \cdot EM}{k}. \qquad (2)$$

а) BC найдем из прямоугольного равнобедренного треугольника ABC с гипотенузой, равной c:

$$BC = \frac{c}{\sqrt{2}}.$$

б) EM найдем из прямоугольного треугольника EMC, где $BM = MC = \frac{c}{2\sqrt{2}}$. Таким образом, $EM = \sqrt{k^2 - \frac{c^2}{8}} = \frac{\sqrt{8k^2 - c^2}}{2\sqrt{2}}$.

8. Подставим в равенство (2) значения BC и EM, т. е.

$$BD = \frac{BC \cdot EM}{k} = \frac{\frac{c}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{8k^2 - c^2}}{2\sqrt{2}}}{k} = \frac{c\sqrt{8k^2 - c^2}}{4k}.$$

9. Из прямоугольного треугольника DOB (рис. 271)

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{OB}{BD} = \frac{c \cdot 4k}{2c\sqrt{8k^2 - c^2}} = \frac{2k}{\sqrt{8k^2 - c^2}},$$

откуда $\alpha = 2\arcsin\frac{2k}{\sqrt{8k^2 - c^2}}$.

Задача 4. В пирамиде сечение, параллельное основанию, делит высоту в отношении $a : c$ (считая от вершины к основанию). Найдите площадь сечения, зная, что она меньше площади основания на 20 квадратных единиц.

Решение. 1. Для наглядности на рисунке 272 изображена треугольная пирамида.

2. Все рассуждения в решении данной задачи будут аналогичны для пирамиды любого вида.

3. По теореме: «Площади сечения и основания относятся как квадраты их расстояний от вершины» — имеем:

$$\frac{S_{\text{сеч}}}{S_{\text{осн}}} = \frac{KD^2}{KO^2}.$$

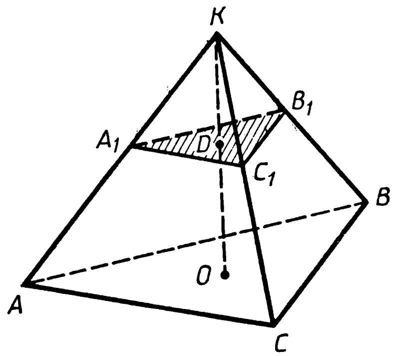


Рис. 272

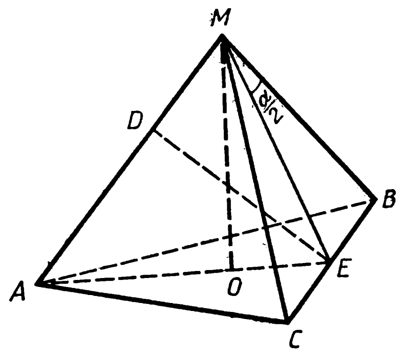


Рис. 273

По условию задачи $\frac{KD}{DO}=\frac{a}{c}$ или $\frac{KD}{KO}=\frac{a}{a+c}$.

4. Пусть $S_{\text{сеч}}=x$, тогда $S_{\text{осн}}=x+20$. Для нахождения x составим уравнение и решим его:

$$\frac{x}{x+20}=\frac{a^2}{(a+c)^2},\quad x=\frac{20a^2}{c\,(2a+c)}.$$

5. $S_{\text{сеч}}=\frac{20a^2}{c\,(2a+c)}$.

Задача 5. Найдите высоту правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен α, а кратчайшее расстояние между боковым ребром и противоположной стороной основания равно k.

Решение. 1. Пусть $AB=a$, $MO=H$, а $ED=k$ по условию (рис. 273).

2. Треугольник ABC равносторонний, его высота AE равна $\frac{a\sqrt{3}}{2}$, где a — сторона треугольника.

3. Из прямоугольного треугольника AOM, в котором длина катета $AO=\frac{2}{3}\cdot AE=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a}{\sqrt{3}}$, найдем длину ребра пирамиды $AM=\sqrt{H^2+\frac{a^2}{3}}$.

4. В плоскости грани CMB из вершины M опустим высоту ME на сторону BC. Из прямоугольного треугольника BME найдем:

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\frac{BE}{MB}=\frac{a}{2\sqrt{H^2+\frac{a^2}{3}}},\ \text{откуда}$$

$$a=\frac{2H\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}}.$$

5. Перпендикуляр ED, опущенный из точки E на ребро AM, по условию равен k. Прямоугольные треугольники ADE и AOM подобны, тогда

$$\frac{ED}{AE}=\frac{OM}{AM}, \text{ или } \frac{k}{\frac{a\sqrt{3}}{2}}=\frac{H}{\sqrt{H^2+\frac{a^2}{3}}}.$$

Упростим последнее равенство: $\frac{Ha\sqrt{3}}{2}=k\sqrt{H^2+\frac{a^2}{3}}$, и вернемся к значению a, составим систему

$$\begin{cases} \frac{Ha\sqrt{3}}{2}=k\sqrt{H^2+\frac{a^2}{3}}, \\ a=\frac{2H\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3-4\sin^2\frac{\alpha}{2}}} \end{cases}$$

и решим ее, откуда $H=\frac{k}{\sqrt{3}\sin\frac{\alpha}{2}}$.

Задача 6. В правильной четырехугольной пирамиде высота равна H, а двугранный угол между смежными боковыми гранями равен α. Найдите стороны основания.

Решение. 1. Условию задачи отвечает рисунок 274, тогда высота пирамиды $OK=H$.

2. Из точек B и D опускаем перпендикуляры BE и DE на ребро KC, тогда $\angle BED=\alpha$.

3. Обозначим сторону основания через x, тогда $OC=\frac{x\sqrt{2}}{2}$, а из прямоугольного треугольника KOC найдем $KC=\sqrt{H^2+\frac{x^2}{2}}$.

4. Прямоугольные треугольники OKC и EKO имеют общий угол φ, поэтому они подобны, тогда справедливо

$$\frac{H}{OE}=\frac{KC}{OC}. \qquad (1)$$

Из прямоугольного треугольника OEB найдем $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{OE}{OB}$, или $OE=$ $=OB\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$, т. е.

$$OE=\frac{x\sqrt{2}}{2}\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}. \qquad (2)$$

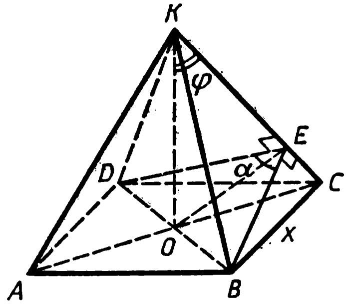


Рис. 274

5. Составим систему из (1) и (2) и решим ее:

$$\begin{cases} \dfrac{H}{OE}=\dfrac{KC}{OC}, \\ OE=OB\cdot\operatorname{ctg}\dfrac{\alpha}{2}. \end{cases}$$

6. $x=\dfrac{H\cdot\sqrt{-2\cos\alpha}}{\cos\frac{\alpha}{2}}$.

Замечание. Здесь $\alpha>90^\circ$, так как из треугольника OEB $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{OB}{OE}=\frac{OC}{OE}>1$ (OC — гипотенуза). Следовательно, $\frac{\alpha}{2}>45^\circ$ и $\alpha>90^\circ$. Тогда $\cos\alpha<0$.

Контрольные вопросы

1. Какой многогранник называется пирамидой?
2. Какая пирамида называется треугольной?
3. Какая пирамида называется правильной?
4. Что такое апофема правильной пирамиды?
5. Какая пирамида называется тетраэдром?
6. Какая пирамида называется усеченной?
7. Как относятся площади сечения пирамиды и основания, если пирамиду пересечь плоскостью, параллельной основанию?
8. Чему равна площадь боковой поверхности правильной пирамиды?
9. Чему равна площадь боковой поверхности усеченной пирамиды?
10. Что такое высота пирамиды?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Высота правильной четырехугольной пирамиды равна 7 м, а сторона основания равна 8 м. Найдите боковое ребро и боковую поверхность. [9 м, $16\sqrt{65}$ м^2.]

2. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна 2 м, а ее высота 4 м. Найдите площадь полной поверхности и боковое ребро. $\left[8\sqrt{3}\text{ м}^2,\ \frac{2}{3}\sqrt{39}\text{ м.}\right]$

3. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 18 м, а ее высота 14 м. Найдите сторону основания и площадь диагонального сечения. [$16\sqrt{2}$ м, 112 м^2.]

4. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 14 м, а площадь диагонального сечения 14 м^2. Найдите боковое ребро пирамиды и апофему. [10 м, $\sqrt{51}$ м.]

5. Высота пирамиды 16 м, площадь основания равна 512 м^2. Найдите площадь сечения пирамиды плоскостью, проведенной параллельно основанию на расстоянии 11 м от него. [50 м^2.]

Б. 1. Основание пирамиды — ромб, диагонали которого 12 и 16 м. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей и равна 6,4 м. Найдите площадь полной поверхности пирамиды. [256 $м^2$.]

2. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 3 и 7 м, а одна из диагоналей 6 м. Высота пирамиды, проходящая через точку пересечения диагоналей основания, равна 4 м. Найдите боковые ребра. [5 м и 6 м.]

3. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого основание равно 6 м и высота 9 м; боковые ребра равны между собой, и каждое содержит 13 м. Найдите высоту пирамиды. [12 м.]

4. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12 м, а боковая сторона 10 м. Боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы, содержащие по 45°. Найдите высоту пирамиды. [3 м.]

5. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 6 и 8 м, каждое боковое ребро пирамиды равно 13 м. Найдите высоту пирамиды. [12 м.]

6. Высота пирамиды разделена на четыре равные части, а через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Площадь основания равна 400 $м^2$. Найдите площади полученных сечений. [25 $м^2$, 100 $м^2$, 225 $м^2$.]

7. Высота пирамиды равна 16 м, площадь основания равна 512 $м^2$. На каком расстоянии от основания находится сечение, параллельное основанию, содержащее 50 $м^2$? [11 м.]

8. Основанием пирамиды служит треугольник со сторонами 13, 14, 15 м. Боковое ребро, противолежащее средней по величине стороне основания, перпендикулярно к плоскости основания и равно 16 м. Найдите площадь полной поверхности пирамиды. [448 $м^2$.]

9. Основанием пирамиды служит равносторонний треугольник со стороной a; одна из боковых граней — также равносторонний треугольник и перпендикулярна к плоскости основания. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды. [$\approx 1{,}4a^2$.]

10. Найдите стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее высота равна 7 м, боковое ребро 9 м и диагональ 11 м. [2 м и 10 м.]

В. 1. Найдите площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды, если ее боковое ребро равно l, а плоский угол при вершине равен α. $\left[4l^2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}\cos\left(45°-\frac{\alpha}{2}\right)\right]$

2. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна a, плоский угол при вершине пирамиды равен α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

$$\left[\frac{a^2\sqrt{2}\sin\left(45°+\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}\right]$$

3. В правильной четырехугольной пирамиде даны апофема c и двугранный угол α при основании. Найдите площадь полной поверхности пирамиды. $\left[8c^2 \cos\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}.\right]$

4. Найдите высоту правильной четырехугольной пирамиды, если площадь полной поверхности пирамиды равна S, а плоский угол при вершине равен α. $\left[\left(\dfrac{S\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{2\sqrt{2}\sin\frac{\alpha}{2}}\right)^{0,5}.\right]$

5. Периметр боковой грани правильной четырехугольной пирамиды равен $2P$, плоский угол при вершине равен α. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды. $\left[\dfrac{P^2\sin\alpha}{2\cos^4\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}\right]$

6. В правильной треугольной пирамиде даны сторона основания a и угол α между боковым ребром и стороной основания. Найдите площадь полной поверхности. $\left[\dfrac{\sqrt{3}a^2\sin(\alpha+30^\circ)}{2\cos\alpha}.\right]$

7. В правильной треугольной пирамиде даны высота H и двугранный угол α при основании. Найдите площадь полной поверхности. $\left[3\sqrt{3}H^2\operatorname{ctg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.\right]$

8. Площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды равна S. Зная, что угол между боковой гранью и основанием пирамиды равен α, найдите сторону основания. $\left[\dfrac{\sqrt{2S\cos\alpha}}{3^{0,25}\cos\frac{\alpha}{2}}.\right]$

9. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник с радиусом вписанного круга r. Боковые грани наклонены к основанию под одним и тем же углом α. Найдите площадь полной поверхности пирамиды. $\left[\dfrac{6\sqrt{3}r^2\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.\right]$

10. Найдите площадь полной поверхности правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при основании боковой грани равен α, а радиус круга, вписанного в боковую грань, r $\left[\dfrac{2\sqrt{3}r^2\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}\sin(30^\circ+\alpha)}{\cos\alpha}.\right]$

11. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a составляет с боковым ребром угол α. Найдите пло-

щадь сечения, проведенного через боковое ребро и высоту пирамиды. $\left[\frac{a^2\sqrt{\sin(\alpha-30^\circ)\sin(\alpha+30^\circ)}}{4\cos\alpha}.\right]$

§ 6. ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Выпуклый многогранник называется *правильным*, если все его грани являются правильными многоугольниками с одним и тем же числом сторон и в каждой вершине многогранника сходится одно и то же число ребер.

2. Существует несколько типов правильных многогранников. Некоторые из них, наиболее часто встречающиеся в условиях геометрических задач — правильный тетраэдр (рис. 275, *а*), куб (рис. 275, *б*) и октаэдр (рис. 275, *в*).

3. У правильного тетраэдра все грани — правильные треугольники, в каждой вершине сходится по три ребра. *Тетраэдр* представляет собой треугольную пирамиду, у которой все ребра равны.

4. У куба все грани — квадраты, в каждой вершине сходится по три ребра. *Куб* представляет собой прямоугольный параллелепипед с равными ребрами.

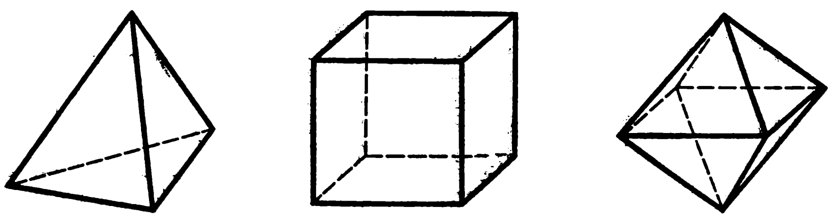
5. У *октаэдра* все грани — правильные треугольники, но в отличие от тетраэдра в каждой его вершине сходится по четыре ребра.

§ 7. ПОСТРОЕНИЕ ПЛОСКИХ СЕЧЕНИЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. В стереометрии часто приходится рассматривать сечения фигур, в частности многогранников, различными плоскостями.

2. *Сечение выпуклого многогранника* есть выпуклый плоский многоугольник, вершины которого в общем случае являются точками пересечения секущей плоскости с ребрами многогранника, а стороны — линиями пересечения секущей плоскости с гранями.



а) б) в)

Рис. 275

3. Для построения *прямой пересечения двух плоскостей* обычно находят две ее точки и проводят через них прямую.

4. Для построения *точки пересечения прямой и плоскости* находят в плоскости прямую, пересекающую данную. Тогда искомая точка получается в пересечении найденной прямой с данной.

5. Все сказанные соображения (**C**) можно обобщить так:

C_1. Для построения сечения нужно найти прямые, по которым плоскость сечения пересекается с плоскостями граней многогранника.

C_2. Для построения прямой пересечения плоскостей, как правило, находят две ее точки, через них и проводят прямую пересечения.

C_3. Точки прямой пересечения (из **C_2**) отыскиваются как точки пересечения известной прямой, лежащей в одной плоскости, со второй плоскостью.

C_4. Для построения такой точки пересечения (из **C_3**) данных прямой и плоскости в этой плоскости находят прямую, пересекающую данную,— искомая точка получается в пересечении этих прямых (на проекционном чертеже).

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Длина ребра куба равна a. Найдите площадь сечения, проведенного через диагональ AD_1 грани AA_1D_1D и середину M ребра BB_1 (рис. 276, *а*).

Решение. 1. Обозначим секущую плоскость через α. Отрезки AD_1 и AM принадлежат и плоскости α, и граням куба, поэтому являются сторонами сечения.

2. Построим сторону сечения в грани BB_1C_1C. Плоскости BB_1C_1C и AA_1D_1D параллельны, поэтому прямая пересечения плоскостей α и BB_1C_1C параллельна прямой AD_1.

3. Поскольку прямые BC_1 и AD_1 параллельны, то эта прямая пересечения параллельна и прямой BC_1. Проведем через точку M в плоскости BB_1C_1C прямую, параллельную прямой BC_1, ее пересечение с ребром B_1C_1 даст вершину сечения K (рис. 276, *б*). Сечение — трапеция $AMKD_1$.

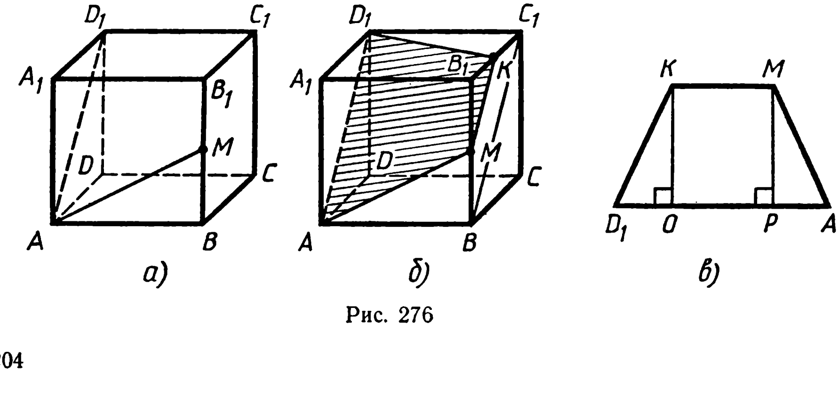


Рис. 276

4. Найдем стороны полученной в сечении трапеции:

а) $AD_1 = a\sqrt{2}$, отрезок MK — средняя линия в треугольнике BB_1C_1, поэтому $MK = \frac{1}{2} BC_1 = \frac{a}{\sqrt{2}}$.

б) Из равных прямоугольных треугольников ABM и D_1C_1K ($AB = C_1D_1 = a$, $BM = KC_1 = 0{,}5a$) находим $AM = D_1K = 0{,}5a\sqrt{5}$.

в) Значит, трапеция $AMKD_1$ равнобедренная.

г) Найдем ее высоту. Опускаем перпендикуляры MP и KO (рис. 276, *в*) на основание AD_1, получаем $PO = MK = \frac{a}{\sqrt{2}}$, $D_1O = PA = 0{,}5\,(D_1A - OP) = \frac{a}{2\sqrt{2}}$.

д) В прямоугольном треугольнике D_1OK имеем $D_1K = 0{,}5a\sqrt{5}$, $D_1O = \frac{a}{2\sqrt{2}}$. Находим $KO = \frac{3a}{2\sqrt{2}}$.

5. Вычислим площадь сечения: $S = \frac{1}{2}(MK + D_1A)\cdot KO = \frac{9a^2}{8}$

Задача 2. В правильной шестиугольной призме, у которой боковые грани — квадраты, проведите плоскость через сторону нижнего основания и противолежащую ей сторону верхнего основания.

Решение. 1. Сечение проходит через параллельные прямые AB и E_1D_1 (рис. 277).

2. Ребра AB и E_1D_1 являются сторонами многоугольника сечения.

3. Найдем сторону D_1X этого многоугольника, лежащую в грани CC_1D_1D:

а) На прямой D_1X мы знаем только одну точку D_1.

б) Другой точкой является точка K пересечения прямых AB и DC. Она лежит в плоскости грани CDD_1C_1 и в плоскости сечения, а значит, и на прямой их пересечения D_1X. Соединяя точки D_1 и K прямой, получим точку X.

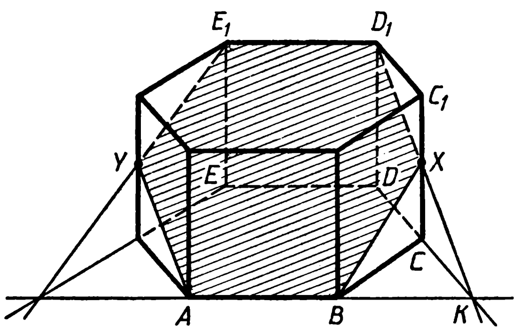


Рис. 277

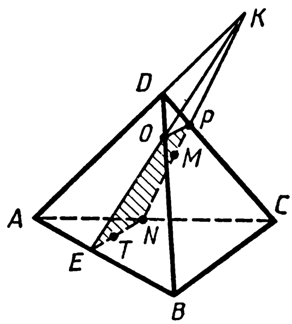


Рис. 278

в) Отрезок D_1X есть сторона сечения в грани CC_1D_1D.

4. Аналогично находим точку Y. Многоугольник $ABXD_1E_1Y$ есть искомое сечение.

Задача 3. Постройте сечение тетраэдра $DABC$ плоскостью, проходящей через точки P, M и T, если $T \in ABC$, $M \in ACD$, $P \in DC$ (рис. 278).

Р е ш е н и е. 1. Обозначим секущую плоскость через α. Точки P и M принадлежат как плоскости ACD, так и секущей плоскости α. Следовательно, плоскость α пересекает плоскость ACD по прямой PM.

2. Прямая PM пересекает ребро AC в некоторой точке N. Тогда пересечением секущей плоскости α и грани ACD является отрезок PN.

3. В плоскости ABC лежат точки N и T, принадлежащие секущей плоскости α. Следовательно, плоскости α и ABC пересекаются по прямой NT.

4. Прямая NT пересекает ребро AB в некоторой точке E. Тогда пересечением секущей плоскости и грани ABC является отрезок NE.

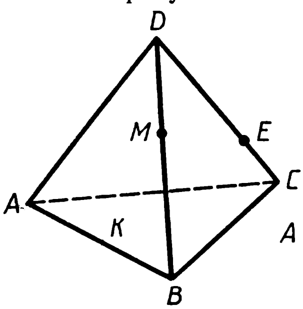
5. Плоскость α имеет с плоскостью ABD общую точку E. Следовательно, эти плоскости пересекаются по прямой, проходящей через эту точку. Но чтобы провести эту прямую, надо найти еще одну общую точку плоскостей α и ADB.

Прямая NP пересекает прямую AD в некоторой точке K, которая будет общей точкой плоскости α и плоскости ADB (она лежит на прямой AD, лежащей в этой плоскости). Таким образом, у нас имеются две общие точки K и E. Следовательно, плоскость α пересекает плоскость ABD по прямой EK.

6. Прямая EK пересекает ребро BD в некоторой точке O. Если имеем точку O на ребре BD, то тогда пересечением плоскости α и грани ADB является отрезок EO.

7. В плоскости BDC получили две точки O и P, принадлежащие плоскости α. Следовательно, плоскость α пересекает плоскость BDC по прямой OP. А пересечением плоскости α и грани BDC является отрезок OP.

8. Четырехугольник $EOPN$ — искомое сечение.



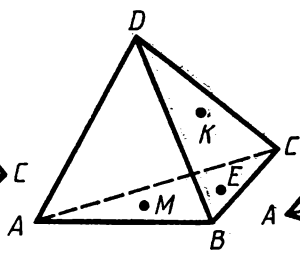


Рис. 280

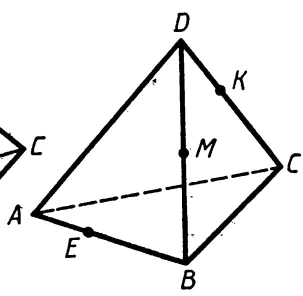


Рис. 281

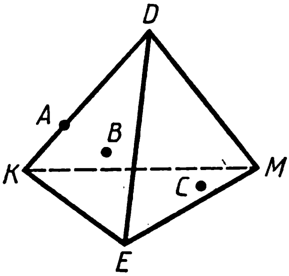


Рис. 282

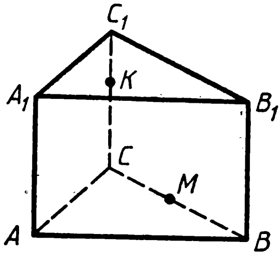


Рис. 283

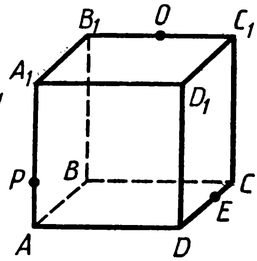


Рис. 284

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Постройте сечение тетраэдра $DABC$ плоскостью, проходящей через точки M, E и K, если точка K принадлежит грани ABC, точка M лежит на ребре BD, а точка E — на ребре DC (рис. 279).

2. Постройте сечение тетраэдра $DABC$ плоскостью, проходящей через точки M, E и K, если точки M и E принадлежат плоскости ABC, а точка K — плоскости BCD (рис. 280).

3. В тетраэдре $DABC$ $DK:KC=AE:EB=1:2$, точка M — середина ребра DB. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через точки K, E и M (рис. 281).

4. Постройте сечение тетраэдра $DKME$ плоскостью, проходящей через точки A, B, C, если точка A лежит на ребре KD, точка B на грани DKE, точка C — на грани KEM (рис. 282).

5. Точки K и M — внутренние точки ребер CC_1 и BC треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$. Постройте сечение этой призмы плоскостью, проходящей через точки K и M параллельно прямой AC (рис. 283).

6. На ребрах куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны точки P, O и E, такие, что $AP=\frac{1}{3}AA_1$, $B_1O=\frac{1}{2}B_1C_1$ и $CE=\frac{1}{3}CD$. Постройте сечение куба плоскостью POE (рис. 284).

ГЛАВА XV

§ 1. ЦИЛИНДР

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Цилиндром* (точнее, круговым цилиндром) называется тело, которое состоит из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов. Круги называются *основаниями цилиндра*, а отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов,— *образующими цилиндра*.

2. *Поверхность цилиндра* состоит из оснований цилиндра — двух равных кругов, лежащих в параллельных плоскостях, и боковой поверхности.

3. Цилиндр называется *прямым*, если его образующие перпендикулярны плоскостям оснований. (В настоящем пособии будем рассматривать только прямой цилиндр, называя его для краткости просто цилиндром.)

4. *Прямой цилиндр* можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольника вокруг его стороны как оси (рис. 285).

5. *Радиусом* цилиндра называется радиус его основания.

6. *Высотой* цилиндра называется расстояние между плоскостями оснований.

7. *Осью цилиндра* называется прямая, проходящая через центры оснований. Она параллельна образующим.

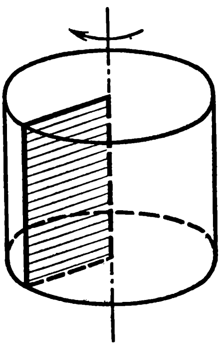


Рис. 285

8. Сечение цилиндра плоскостью, проходящей через ось цилиндра, называется *осевым сечением*.

9. Цилиндр, осевое сечение которого квадрат, называется *равносторонним*.

10. Плоскость, перпендикулярная оси цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания.

11. Плоскость, проходящая через образующую цилиндра и перпендикулярная осевому сечению, проведенному через эту образующую, называется *касательной плоскостью цилиндра*.

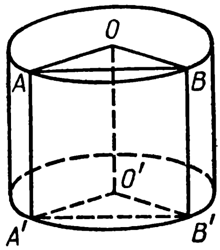


Рис. 286

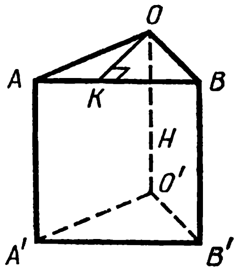


Рис. 287

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Высота цилиндра 8 м, радиус основания 5 м. Цилиндр пересечен плоскостью так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси.

Решение. 1. Сечение $ABB'A'$ — квадрат (рис. 286).

2. Фигура $OABO'A'B'$ — прямая треугольная призма, в которой боковые ребра равны по 8 м, стороны основания $OA=OB=$ $=R=5$ м, боковая грань $AA'B'B$ — квадрат.

3. На рисунке 287 призма $AOBA'O'B'$ вынесена из цилиндра. $OK\perp AB$. Найдем длину (h) перпендикуляра OK.

4. По условию $AB=A'B'=AA'=8$. В прямоугольном треугольнике AOK катет $AK=4$. Тогда по теореме Пифагора

$$h=OK=\sqrt{AO^2-AK^2}=\sqrt{25-16}=3 \text{ м.}$$

Задача 2. В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найдите угол между диагональю ее боковой грани и осью цилиндра, если радиус основания равен высоте цилиндра.

Решение. 1. Боковые грани призмы — квадраты, так как сторона правильного шестиугольника, вписанного в окружность, равна радиусу (рис. 288).

2. Ребра призмы параллельны оси цилиндра, поэтому угол

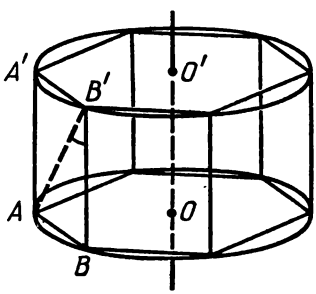


Рис. 288

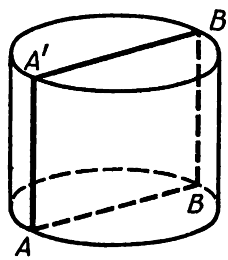


Рис. 289

между диагональю грани и осью цилиндра равен углу между диагональю и боковым ребром.

3. Так как грань призмы $AA'B'B$ — квадрат, то этот угол равен 45°.

Задача 3. Осевое сечение цилиндра — квадрат, площадь которого c. Найдите площадь основания цилиндра.

Решение. 1. Из условия задачи осевое сечение $AA'B'B$ — квадрат (рис. 289), сторона которого равна $x=\sqrt{c}$, так как $S_{\text{сеч}}=x^2=c$.

2. Так как $x=2R$, то $R=\frac{x}{2}=\frac{\sqrt{c}}{2}$. Поэтому площадь основания цилиндра равна $S=\pi R^2=\pi\frac{c}{4}$.

Задача 4. В цилиндре проведено сечение через две образующие. Высота цилиндра H, радиус r. Сечение отсекает от направляющей дугу в 60°. Найдите площадь сечения.

Решение. 1. Искомое сечение — прямоугольник $EDCK$ (рис. 290), площадь которого $S=ED\cdot CD=H\cdot ED$, где неизвестным является только ED.

2. Так как $\angle EOD=60°$, следовательно, треугольник EOD — равносторонний, $ED=r$, тогда $S=H\cdot ED=Hr$.

Задача 5. Плоскость, проходящая через центр нижнего основания цилиндра под углом α к основанию, пересекает верхнее основание по хорде, равной b и стягивающей дугу β. Найдите высоту цилиндра.

Решение. 1. По условию $C_1D_1=b$, градусная мера дуги $C_1A_1D_1$ и угла $C_1O_1D_1$ равна β. Сечение цилиндра — CDD_1C_1 (рис. 291).

2. Через центр O и середину K хорды C_1D_1 проводим плоскость, перпендикулярную C_1D_1. Точку O соединяем с K (OE — проекция OK). Тогда по теореме о трех перпендикулярах CD, перпендикулярная к OE, будет перпендикулярна и к OK, т. е. $\angle KOE=\alpha$.

3. Из прямоугольного треугольника D_1O_1K находим:

$$O_1K=\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}.$$

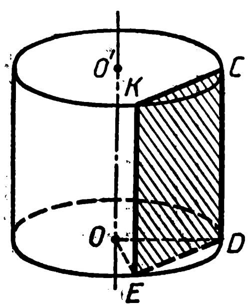


Рис. 290

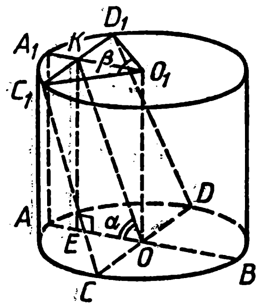


Рис. 291

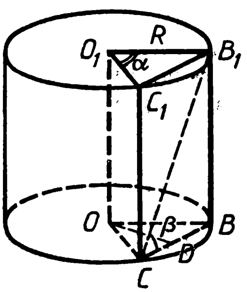


Рис. 292

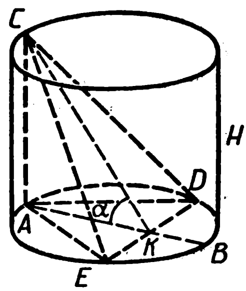


Рис. 293

4. Из прямоугольного треугольника OEK имеем $KE=H=$ $=OE\cdot \operatorname{tg}\alpha=\frac{b}{2}\operatorname{ctg}\frac{\beta}{2}\operatorname{tg}\alpha$.

Задача 6. Цилиндр пересечен плоскостью, параллельной оси и отсекающей на окружности основания дугу α. Диагональ сечения равна d и составляет с плоскостью основания угол β. Найдите высоту цилиндра и площадь основания.

Решение. 1. По условию градусная мера дуги CB и угла BOC равна α (рис. 292). Сечение — прямоугольник BCC_1B_1, диагональ сечения $CB_1=d$, BC — проекция B_1C, и поэтому $\angle B_1CB=\beta$, OD перпендикулярен к BC, D — середина BC.

2. Из прямоугольного треугольника CBB_1 имеем $BB_1=H=$ $=d\sin\beta$, $BC=d\cos\beta$.

3. Из прямоугольного треугольника COD имеем:

$$OC=\frac{CD}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{d\cos\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=R.$$

4. Тогда

$$S_{\text{осн}}=\pi R^2=\frac{\pi d^2\cos^2\beta}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 7. В цилиндр, образующая которого равна l, вписана пирамида так, что ее основание, являющееся правильным треугольником, вписано в основание цилиндра, а вершина находится на другом основании цилиндра. Зная, что две боковые грани пирамиды перпендикулярны к основанию, а третья образует с основанием двугранный угол α, найдите площадь боковой поверхности пирамиды (рис. 293).

Решение. 1. По условию образующая цилиндра равна l. Две боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, тогда и линия пересечения этих граней будет также перпендикулярна к основанию, т. е. $AC=l=H$.

2. Из точки A опускаем перпендикуляр AK на сторону ED и точку K соединяем с C.

3. По теореме о трех перпендикулярах ED будет перпендикулярна к CK, т. е. $\angle AKC = \alpha$ (линейный угол двугранного угла между третьей боковой гранью и основанием).

4. Для нахождения площади боковой поверхности пирамиды используем формулу

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2} AE \cdot AC + \frac{1}{2} AD \cdot CA + \frac{1}{2} ED \cdot CK.$$

1) Из прямоугольного треугольника AKC, где угол A прямой, имеем:

$$CK = \frac{AC}{\sin\alpha} = \frac{H}{\sin\alpha}.$$

2) С другой стороны, $AK = \frac{x\sqrt{3}}{2}$, где x — сторона основания пирамиды; тогда $\frac{x\sqrt{3}}{2} = H \cdot \operatorname{ctg}\alpha$, или $x = \frac{2H \cdot \operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{3}}$, т. е.

$$AE = AD = DE = \frac{2H \cdot \operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{3}}.$$

3) Тогда равенство (1) примет вид:

$$S_{\text{бок}} = \frac{xH}{2} + \frac{xH}{2} + \frac{xH}{2\sin\alpha} = xH\,\frac{\left(\sin\alpha + \frac{1}{2}\right)}{\sin\alpha} = xH\,\frac{(\sin\alpha + \sin 30^\circ)}{\sin\alpha} =$$

$$= \frac{2l^2 \operatorname{ctg}\alpha \sin\left(15^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(15^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{3}\sin\alpha}.$$

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Объясните, что такое круговой цилиндр (образующая цилиндра, основания и боковая поверхность цилиндра).
2. Какой цилиндр называется прямым?
3. Что такое радиус цилиндра, высота цилиндра, ось цилиндра, осевое сечение цилиндра, касательная плоскость цилиндра?
4. Какая фигура является осевым сечением цилиндра?
5. Какой цилиндр называется равносторонним?
6. Каково взаимное расположение оси цилиндра и плоскости, касающейся цилиндра?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. **1.** Высота цилиндра 6 см, радиус основания 5 см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 4 см от нее. [36 см^2.]

2. Высота цилиндра 8 дм, радиус основания 5 дм. Цилиндр пересечен плоскостью параллельно оси так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси. [3 дм.]

3. Радиус основания цилиндра 2 м, высота 3 м. Найдите диагональ осевого сечения. [5 м.]

4. В цилиндре проведена параллельно оси плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 120°. Высота цилиндра равна 10 см, расстояние от оси до секущей плоскости 2 см. Найдите площадь сечения. [$40\sqrt{3}$ см^2.]

5. В цилиндре радиуса 5 см проведено параллельное оси сечение, отстоящее от нее на расстоянии 3 см. Найдите высоту цилиндра, если площадь указанного сечения равна 64 см^2. [3 см.]

6. В цилиндре с высотой 6 см проведено параллельное оси сечение, отстоящее от нее на расстоянии 4 см. Найдите радиус цилиндра, если площадь указанного сечения равна 36 см^2 [5 см.]

Б. 1. Высота цилиндра 2 м, радиус основания 7 м. В этот цилиндр наклонно вписан квадрат так, что все вершины его лежат на окружностях оснований. Найдите сторону квадрата. [10 м.]

2. Радиус цилиндра равен R, высота H, площадь сечения, параллельного оси, равна S. На каком расстоянии от оси находится плоскость сечения? $\left[\sqrt{\left(R^2-\frac{S^2}{4H^2}\right)}.\right]$

3. Дан цилиндр радиуса R с высотой H. Плоскость α пересекает основания цилиндра по хордам, длины которых p и q ($p \neq q$). Вычислите тангенс угла между плоскостью α и плоскостью основания цилиндра, если $R=10$ см, $H=30$ см, $p=16$ см, $q=12$ см. $\left[15 \text{ или } 2\frac{1}{7}.\right]$

4. Высота цилиндра 6 дм, радиус основания 5 дм. Концы данного отрезка лежат на окружностях обоих оснований, длина его 10 дм. Найдите кратчайшее расстояние от отрезка до оси. [3 дм.]

5. Концы отрезка лежат на окружностях оснований равностороннего цилиндра; угол между радиусами, проведенными в его концы, равен 30°. Найдите угол между этим отрезком и осью цилиндра. [arctg (sin 15°).]

В. 1. Цилиндр и правильный октаэдр расположены так, что две вершины октаэдра — центры оснований цилиндра, а остальные принадлежат цилиндрической поверхности. Высота цилиндра равна h. Найдите площадь его осевого сечения. [h^2.]

2. Цилиндр и правильный тетраэдр с ребром x расположены так, что одна вершина тетраэдра — центр основания цилиндра, а три другие принадлежат окружности противоположного основания. Найдите образующую цилиндра. $\left[\frac{x\sqrt{6}}{3}.\right]$

§ 2. КОНУС

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Конусом* (точнее, круговым конусом) называется тело, которое состоит из круга — *основания конуса*, точки, не лежащей в плоскости этого круга — *вершины конуса*, и всех отрезков, соединяющих вершину конуса с точками основания. Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, называются *образующими конуса*.

2. Полная поверхность конуса состоит из основания и боковой поверхности.

3. Конус называется *прямым*, если прямая, соединяющая вершину конуса с центром основания, перпендикулярна плоскости основания. (В данном пособии будем рассматривать только прямой конус, называя его для краткости просто конусом.)

4. *Высотой конуса* называется перпендикуляр, опущенный из его вершины на плоскость основания. У прямого конуса основание высоты совпадает с центром основания.

5. *Осью* прямого *конуса* называется прямая, содержащая его высоту.

6. Сечение конуса плоскостью, проходящей через его ось, называется *осевым сечением*.

7. *Прямой конус* можно рассматривать как тело, полученное при вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета как оси. На рисунке 294 изображен прямой конус с его элементами, где: а) B — вершина конуса; б) $AB=BC=l$ — образующая конуса; в) $OB=H$ — высота, ось конуса; г) K — основание конуса — круг; д) $AO=OC=R$ — радиус основания; е) AC — диаметр основания; ж) треугольник ABC — осевое сечение конуса; з) $\angle AOB=90°$.

8. Плоскость, перпендикулярная оси конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность по окружности с центром на оси конуса.

9. Плоскость, перпендикулярная оси конуса, отсекает от него

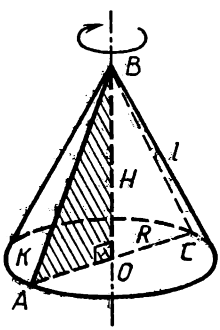


Рис. 294

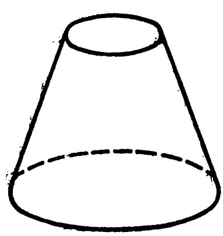


Рис. 295

меньший конус. Оставшаяся часть называется *усеченным конусом* (рис. 295).

10. *Пирамидой, вписанной в конус*, называется такая пирамида, основание которой есть многоугольник, вписанный в окружность основания конуса, а вершиной является вершина конуса. Боковые ребра пирамиды, вписанной в конус, являются образующими конуса.

11. *Пирамида* называется *описанной около конуса*, если ее основанием является многоугольник, описанный около основания конуса, а вершина совпадает с вершиной конуса.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Высота прямого кругового конуса равна радиусу основания R. Через его вершину проведена плоскость сечения, отсекающая дугу $60°$. Найдите площадь сечения.

Решение. 1. Секущая плоскость пересекается с поверхностью конуса по образующим EA и EB и хорде AB (рис. 296).

2. Искомая площадь есть площадь треугольника AEB.

3. Основание AB треугольника AOB стягивает дугу $60°$, следовательно, $AB=R$ (сторона правильного вписанного шестиугольника).

4. Высота сечения EC является гипотенузой треугольника EOC, в котором $EO=R$, а $OC=\frac{R\sqrt{3}}{2}$. Поэтому $EC=\sqrt{EO^2+CO^2}=$ $=\frac{R\sqrt{7}}{2}$, площадь треугольника $ABE=\frac{1}{2}AB\cdot EC=\frac{R^2\sqrt{7}}{4}$.

Задача 2. Через вершину конуса под углом φ к основанию проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу α; расстояние от плоскости сечения до центра основания равно k. Найдите радиус основания, высоту конуса и площадь сечения.

Решение. 1. Докажем, что основание M перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость ECA, лежит на высоте ED треугольника ECA (рис. 297).

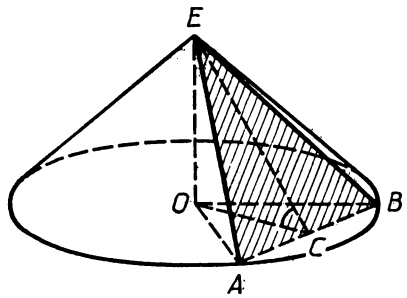


Рис. 296

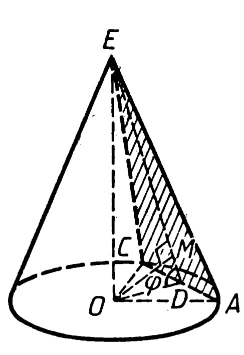


Рис. 297

2. Действительно, $ED \perp AC$ (так как ED — высота треугольника ACE), но этот треугольник равнобедренный ($EA = EC$), поэтому ED — медиана.

3. В равнобедренном треугольнике AOC OD — медиана, следовательно, и высота. Таким образом, $AC \perp ED$ и $AC \perp OD$, значит, AC перпендикулярна плоскости EOD.

4. Плоскость ECA проходит через AC, поэтому она перпендикулярна плоскости EDO (по признаку перпендикулярности двух плоскостей).

5. Перпендикуляр OM к плоскости EAC весь лежит в плоскости EDO.

6. Точка M принадлежит каждой из плоскостей EDO и AEC, следовательно, она принадлежит ED.

7. Угол EDO — линейный угол двугранного угла AC, так как $DO \perp AC$ и $DE \perp AC$. Значит, $\angle EDO = \varphi$.

8. Найдем R и H. Из треугольника OMD следует, что $OD = \frac{OM}{\sin\varphi} = \frac{k}{\sin\varphi}$.

9. Из треугольника EOD получаем $EO = H = OD \operatorname{tg}\varphi = \frac{k}{\sin\varphi}\operatorname{tg}\varphi = \frac{k}{\cos\varphi}$.

10. Учитывая, что $\angle AOD = \frac{\alpha}{2}$, из треугольника AOD находим:

$$OA = \frac{OD}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{k}{\sin\varphi\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

11. Найдем площадь треугольника CEA. Из треугольника ODA следует, что

$$AD = R\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{k}{\sin\varphi\cos\frac{\alpha}{2}}\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{k\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\varphi},$$

$$\text{но } AC = 2AD = \frac{2k\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\varphi}.$$

Из треугольника OED следует, что

$$ED = \sqrt{H^2 + OD^2} = \sqrt{\frac{k^2}{\cos^2\varphi} + \frac{k^2}{\sin^2\varphi}} = \frac{k}{\sqrt{\cos^2\varphi\sin^2\varphi}} = \frac{2k}{\sin 2\varphi}.$$

Площадь треугольника CEA равна:

$$S = \frac{AC \cdot ED}{2} = \frac{2k\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cdot 2k}{2\sin\varphi\sin 2\varphi} = \frac{2k^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sin\varphi\sin 2\varphi}.$$

Задача 3. В конус вписана пирамида $EABC$, основанием которой служит прямоугольный треугольник, а боковая грань, проходящая через один из его катетов, образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь основания пирамиды, если образующая конуса равна l и наклонена к плоскости основания под углом β.

Решение. 1. По условию пирамида $EABC$ вписана в конус, следовательно, прямоугольный треугольник ABC, лежащий в основании пирамиды, является вписанным в основание конуса (рис. 298).

2. Из этого следует, что гипотенуза AB этого треугольника — диаметр основания конуса.

3. Высота конуса EO, которая является и высотой пирамиды, проходит через середину гипотенузы.

4. Проведя $OD \perp AC$ и отрезок DE, получим $\angle EDO$ — линейный угол двугранного угла AC ($ED \perp AC$ по теореме о трех перпендикулярах), а значит, $\angle EDO = \alpha$.

5. В треугольнике EOB $\angle EBO = \beta$, гипотенуза EB равна l. Из этого треугольника имеем $OB = EB \cos \beta$, или $R = l \cos \beta$, а $EO = H = EB \sin \beta$, или $H = l \sin \beta$.

6. Из прямоугольного треугольника EOD находим $OD = EO \operatorname{ctg} \alpha$, или $OD = H \operatorname{ctg} \alpha = l \sin \beta \operatorname{ctg} \alpha$.

7. Так как OD — средняя линия треугольника ABC, то $BC = 2OD = 2l \sin \beta \operatorname{ctg} \alpha$.

8. Катет треугольника ABC определяем по теореме Пифагора, т. е.

$$AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4l^2 \cos^2 \beta - 4l^2 \sin^2 \beta \operatorname{ctg}^2 \alpha} = \frac{2l}{\sin \alpha} \sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}.$$

9. $$S_{ABC} = \frac{AC \cdot CB}{2} = \frac{2l^2 \sin \beta \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)}}{\sin \alpha}.$$

Задача 4. В усеченном конусе радиусы оснований 5 и 3, высота $\sqrt{2}$. Через две его образующие проведено сечение плоскостью, отсекающей от окружностей оснований дуги по 120°. Найдите площадь сечения.

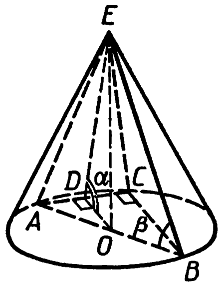


Рис. 298

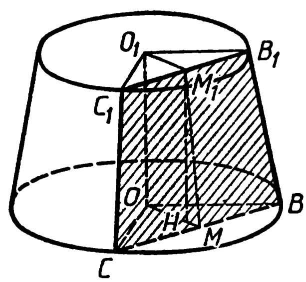


Рис. 299

Решение. 1. Проводим $OM \perp BC$, $O_1M_1 \perp B_1C_1$, тогда $BM=MC$, $B_1M_1=M_1C_1$ по теореме о радиусе, перпендикулярном хорде (рис. 299).

2. $MM_1 \perp BC$ (как ось симметрии трапеции CC_1B_1B).

3. Искомая площадь $S_{сеч}=\frac{BC+B_1C_1}{2}MM_1$ (формула площади трапеции).

4. $BC=R\sqrt{3}=5\sqrt{3}$, $B_1C_1=r\sqrt{3}=3\sqrt{3}$ (сторона вписанного правильного треугольника $BC=a_3=R\sqrt{3}$).

5. В трапеции OO_1M_1M проведем $M_1H \perp OM$. Из треугольника HM_1M получим $MM_1=\sqrt{HM_1^2+HM^2}$ (теорема Пифагора), $HM_1=OO_1=\sqrt{2}$.

6. $HM=OM-OH=OM-O_1M_1$, $\angle OCB=30°$.

7. Из треугольника COM имеем $OM=OC\sin 30°=2{,}5$.

8. Из треугольника $C_1O_1M_1$ имеем $O_1M_1=O_1C_1\sin 30°=1{,}5$.

9. Вернемся к пункту 6, получим $HM=2{,}5-1{,}5=1$.

10. $MM_1=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$.

11. Возвращаемся к пункту 3, площадь сечения

$$S_{сеч}=\frac{BC+B_1C_1}{2}MM_1=12.$$

Контрольные вопросы

1. Что такое круговой конус, вершина конуса, образующая конуса, боковая поверхность конуса?
2. Какой конус называется прямым?
3. Что такое высота конуса, ось конуса, осевое сечение конуса?
4. Что такое усеченный конус?
5. Какая пирамида называется вписанной в конус (описанной около конуса)?
6. Какую форму имеет осевое сечение усеченного конуса?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Радиус основания конуса 3 м, высота 4 м. Найдите образующую и площадь осевого сечения. [5 м, 12 м^2.]

2. Образующая конуса l наклонена к плоскости основания под углом 30°. Найдите высоту и площадь осевого сечения. [$0{,}5l$, $0{,}25l^2\sqrt{3}$.]

3. Радиусы оснований усеченного конуса равны 4 и 1 см, образующая 5 см. Найдите его высоту. [4 см.]

4. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 и 6 см, высота 4 см. Найдите образующую. [5 см.]

5. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r, образующая составляет с плоскостью основания 45°. Найдите площадь осевого сечения. [R^2-r^2.]

6. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 и 7 м, образующая 5 м. Найдите площадь осевого сечения. [30 $м^2$.]

Б. 1. Высота конуса 20, радиус его основания 25. Найдите площадь сечения, проведенного через вершину, если расстояние от него до центра основания конуса равно 12. [500.]

2. В усеченном конусе радиусы оснований R и r, через две его образующие проведено сечение плоскостью, отсекающей от окружностей оснований дуги в 90° и наклоненной к основанию под углом 60°. Найдите площадь сечения. [R^2-r^2.]

3. В равностороннем конусе (в осевом сечении правильный треугольник) радиус основания R. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен α. [$2R^2 \sin \alpha$.]

4. Радиус основания R, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. Через вершину конуса проведена плоскость под углом φ к его высоте. Найдите площадь полученного сечения. $\left[\frac{R^2 \operatorname{tg} \alpha \sqrt{1-\operatorname{tg}^2 \alpha \cdot \operatorname{tg}^2 \varphi}}{\cos \varphi}\right.$, если $\left.\alpha+\varphi<90°.\right]$

5. В конусе даны радиус R и высота H. Найдите ребро вписанного в него куба. $\left[\frac{RH\sqrt{2}}{H+R\sqrt{2}}.\right]$

6. Угол при вершине осевого сечения конуса с высотой 1 м равен 60°. Чему равна площадь сечения конуса, проведенного через две образующие, угол между которыми равен 45°? $\left[\frac{\sqrt{2}}{3} м^2.\right]$

7. Угол при вершине осевого сечения конуса с высотой 1 м равен 120°. Чему равна площадь сечения конуса, проведенного через две образующие, угол между которыми равен 60°? [$\sqrt{3}$ $м^2$.]

8. В усеченном конусе диагональ осевого сечения равна 10, радиус меньшего основания 3, высота 6. Найдите радиус большего основания. [5.]

9. В усеченном конусе диагональ осевого сечения равна 10, радиусы оснований 2 и 4. Найдите высоту конуса. [8.]

В. 1. У пирамиды все боковые ребра равны. Докажите, что она является вписанной в некоторый конус.

2. В конусе проведено сечение плоскостью, проходящей через вершину конуса. Найдите его площадь, если радиус конуса r, угол между сечением и основанием 60°, угол между образующей и основанием 45°. $\left[\frac{2}{3} r^2 \sqrt{2}.\right]$

3. Образующая конуса равна l и составляет с основанием угол 60°. В конус вписана правильная треугольная призма, боковое ребро которой в 2 раза больше стороны основания. Найдите ребра призмы. $\left[\frac{l\sqrt{3}}{6}, \frac{l\sqrt{3}}{3}.\right]$

4. Высота конуса H. На каком расстоянии от вершины надо провести плоскость, параллельную основанию, чтобы площадь сечения была равна половине площади основания? $\left[\frac{H}{\sqrt{2}}.\right]$

5. Через середину высоты конуса проведена прямая параллельно образующей l. Найдите длину отрезка прямой, заключенного внутри конуса. $[0{,}75l.]$

6. В конусе даны радиус основания R и высота H. В него вписана правильная треугольная призма, у которой боковые грани — квадраты. Найдите ребро призмы. $\left[\frac{RH\sqrt{3}}{H+R\sqrt{3}}.\right]$

7. Площади оснований усеченного конуса 4 и 16 м^2. Через середину высоты проведена плоскость, параллельная основаниям. Найдите площадь сечения. [9 м^2.]

8. Образующая усеченного конуса равна $2k$ и наклонена к основанию под углом 60°. Радиус одного основания вдвое больше радиуса другого основания. Найдите каждый из радиусов. [k и $2k$.]

9. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α, а сумма длин его высоты и образующей равна k. Найдите радиус конуса. $\left[k\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.\right]$

10. Высота конуса равна H, угол между образующими в осевом сечении равен α. Через середину высоты под углом β проведена прямая, пересекающая конус в двух точках. Найдите ее отрезок, заключенный внутри конуса.

$$\left[\frac{H\sin\alpha\sin\beta}{2\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)}.\right]$$

11. Два конуса имеют общую высоту H и параллельно расположенные основания. Образующие одного конуса наклонены к плоскости основания под углом α, образующие другого — под углом β. Найдите длину линии, по которой пересекаются их боковые поверхности. $\left[\frac{2\pi H\cos\alpha\cos\beta}{\sin(\alpha+\beta)}.\right]$

§ 3. ШАР

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Шаром* называется тело, которое состоит из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного, от данной точки. Эта точка называется *центром шара*, а данное расстояние — *радиусом шара.*

2. Граница шара называется шаровой поверхностью или *сферой.*

3. Отрезок, соединяющий две точки шаровой поверхности и проходящий через центр шара, называется *диаметром.*

4. Шар, так же как и цилиндр, конус, является телом вращения. Он получается при вращении полукруга вокруг его диаметра как оси.

5. Всякое сечение шара плоскостью есть круг. Центр этого круга есть основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость.

6. Плоскость, проходящая через центр шара, называется *диаметральной плоскостью.*

7. Сечение шара диаметральной плоскостью называется *большим кругом*, а сечение сферы — *большой окружностью.*

8. Касательная плоскость имеет с шаром только одну общую точку — точку касания.

9. *Многогранник* называется *вписанным в сферу* (а сфера — *описанной около многогранника*), если все вершины многогранника лежат на сфере.

10. Для того чтобы около пирамиды можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы около основания пирамиды можно было описать окружность.

11. Для того чтобы около призмы можно было описать сферу, необходимо и достаточно, чтобы призма была прямая и чтобы около ее основания можно было описать окружность.

12. Центр сферы, описанной около пирамиды, лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр окружности, описанной около основания.

13. Центр сферы, описанной около призмы, является серединой отрезка, соединяющего центры окружностей, описанных около оснований призмы.

14. Из указанных выше утверждений следует, что около любой правильной пирамиды и около любой правильной призмы можно описать сферу.

15. *Сфера* называется *вписанной в многогранник* (многогранник — *описанным около сферы*), если она касается всех его граней.

16. Центр вписанной сферы является общей точкой биссекторов всех внутренних двугранных углов многогранников. Отсюда следует, что если вписанная сфера существует, то только одна.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Через середину радиуса шара проведена перпендикулярная ему плоскость. Как относится площадь полученного сечения к площади большего круга?

Решение. 1. Пусть радиус шара R, радиус круга в сечении AO_1 (рис. 300).

2. Треугольник OO_1A прямоугольный, $\angle OO_1A = 90°$. Найдем радиус сечения:

$$AO_1 = \sqrt{R^2 - \left(\frac{R}{2}\right)^2} = R\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

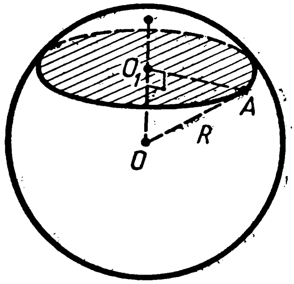


Рис. 300

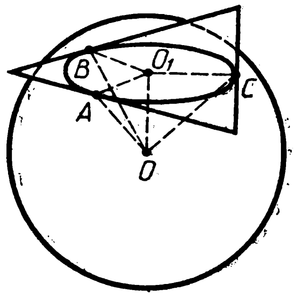


Рис. 301

3. Отношение площади этого круга к площади большего круга равно:

$$\frac{\pi\left(R\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}{\pi R^2}=\frac{3}{4}.$$

Задача 2. Шар радиуса R касается всех сторон правильного треугольника со стороной a. Найдите расстояние от центра шара до плоскости треугольника.

Решение. 1. По существу, равносторонний треугольник положили на шар, который касается треугольника в точках A, B и C (рис. 301).

2. Опустим из центра шара O перпендикуляр OO_1 на плоскость треугольника.

3. Отрезки OA, OB и OC перпендикулярны сторонам.

4. По теореме о трех перпендикулярах отрезки O_1A, O_1B, O_1C тоже перпендикулярны соответствующим сторонам.

5. Треугольники OO_1A, OO_1B и OO_1C прямоугольные и равны (у них катет OO_1 общий, а гипотенузы равны радиусу шара). Из равенств названных треугольников следует равенство сторон: $O_1A=O_1B=O_1C$. Таким образом, O_1 — центр окружности, вписанной в треугольник.

6. Радиус окружности, вписанной в правильный треугольник, как мы знаем, равен $\frac{a\sqrt{3}}{6}$, т. е. $O_1A=O_1B=O_1C=\frac{a\sqrt{3}}{6}$.

7. По теореме Пифагора находим искомое расстояние O_1O, т. е.

$$O_1O=\sqrt{OA^2-O_1A^2}=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{12}}.$$

Задача 3. Все плоские углы при вершине E пирамиды $EABC$ прямые, $EA=a$, $EB=b$, $EC=c$. Найдите радиус сферы, описанной около пирамиды $EABC$.

Решение. 1. Центр окружности, описанной около треугольника EAB, есть середина O_1 гипотенузы AB (рис. 302).

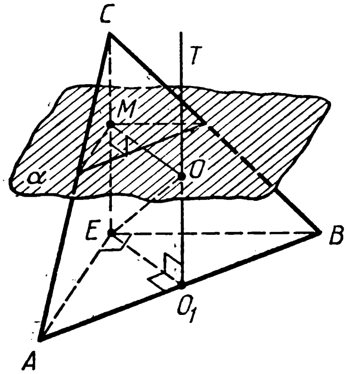


Рис. 302

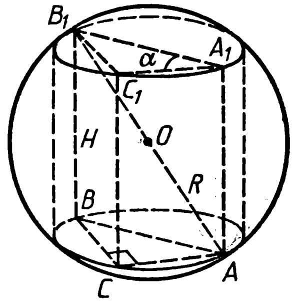


Рис. 303

2. Через точку O_1 проведем прямую O_1T перпендикулярно плоскости треугольника EAB. Заметим, что $O_1T \| EC$, поскольку прямые O_1T и EC перпендикулярны плоскости треугольника EAB. Все точки прямой O_1T равноудалены от точек A, B и E.

3. Через середину M отрезка EC перпендикулярно ему проведем плоскость α, точки которой равноудалены от точек E и C. Тогда точка O пересечения плоскости α и прямой O_1T равноудалена от всех вершин пирамиды, а следовательно, является центром сферы (шара), описанной около пирамиды.

4. В прямоугольном треугольнике EOO_1 имеем $OO_1 = ME = 0{,}5c$, $EO_1 = 0{,}5AB = 0{,}5\sqrt{a^2+b^2}$. Таким образом, радиус описанной сферы равен:

$$EO = \sqrt{OO_1^2 + EO_1^2} = 0{,}5\sqrt{a^2+b^2+c^2}.$$

Задача 4. В шар радиуса 4 см вписана прямая треугольная призма. Основанием призмы служит прямоугольный треугольник с острым углом α, и наибольшая ее боковая грань есть квадрат. Найдите площадь боковой поверхности призмы.

Решение. 1. Плоскости, содержащие основания BAC и $B_1A_1C_1$ призмы, пересекают сферу по окружностям (рис. 303).

2. Прямоугольные треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ вписаны в эти окружности. Поэтому гипотенузы AB и A_1B_1 являются диаметрами окружностей.

3. Плоскость ABB_1A_1 проходит через центр шара. Так как по условию ABB_1A_1 есть квадрат, то $H = AA_1 = AB = R\sqrt{2} = 4\sqrt{2}$.

4. Из прямоугольного треугольника ABC найдем BC и CA соответственно:

$$\sin\alpha = \frac{BC}{AB}, \text{ или } BC = AB\sin\alpha = 4\sqrt{2}\sin\alpha;$$

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB}, \text{ или } AC = AB\cos\alpha = 4\sqrt{2}\cos\alpha.$$

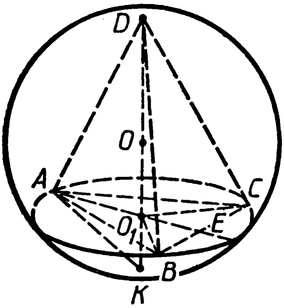


Рис. 304

5. Найдем площадь боковой поверхности призмы:

$$S_{\text{бок}}=(BC+CA+AB)\cdot AA_1=$$
$$=(4\sqrt{2}\sin\alpha+4\sqrt{2}\cos\alpha+4\sqrt{2})\,4\sqrt{2}=$$
$$=4\sqrt{2}\,(\sin\alpha+\cos\alpha+1)\,4\sqrt{2}=$$
$$=16\cdot 2\left(2\cos^2\frac{\alpha}{2}+2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$=64\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\right)=$$
$$=64\cos\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\left(90^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\right)=$$
$$=64\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\alpha}{2}-45^\circ\right).$$

Задача 5. В шаре радиуса R из точки его поверхности проведены три равные хорды под углом α друг к другу. Найдите их длину.

Решение. 1. Обозначим длины равных хорд DA, DB, DC через x (рис. 304).

2. Из равнобедренного треугольника DBC находим $BC=2x\sin\frac{\alpha}{2}$. Также найдем, что $AB=AC=2x\sin\frac{\alpha}{2}$. Следовательно, треугольник ABC равносторонний.

3. Опустив перпендикуляр DO_1 на плоскость треугольника ABC и установив равенство треугольников DO_1A, DO_1B, DO_1C, докажем, что $AO_1=BO_1=CO_1$, т. е. что O_1 есть центр основания (так что пирамида $ABCD$ правильная).

4. Так как точки A, B, C лежат на поверхности шара, то $OA=OB=OC$ (O — центр шара).

5. Опустив перпендикуляр из точки O на плоскость ABC, докажем, что основание перпендикуляра есть центр треугольника ABC, т. е. совпадает с точкой O_1. Следовательно, OO_1 (и значит, DO_1) лежит на диаметре шара DK.

6. Из прямоугольного треугольника DAK, где $DK=2R$, находим $x^2=AD^2=2R\cdot O_1D$. Отрезок O_1D можно связать с x еще одним соотношением, а именно $O_1D=\sqrt{AD^2-O_1A^2}$, где $AD=x$, а

$$O_1A=\frac{2}{3}AE=\frac{2}{3}\frac{BC\sqrt{3}}{2}=\frac{BC}{\sqrt{3}}=\frac{2x\sin\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{3}}.$$

7. Вернемся к $O_1D=\sqrt{AD^2-O_1A^2}=\sqrt{x^2-\dfrac{4x^2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}}$.

Приведем это выражение к виду, удобному для логарифмирования:

$$O_1D=x\sqrt{1-\frac{2(1-\cos\alpha)}{3}}=\frac{x}{\sqrt{3}}\sqrt{1+2\cos\alpha}=$$

$$=\frac{x}{\sqrt{3}}\sqrt{2(\cos 60°+\cos\alpha)}=\frac{2x}{\sqrt{3}}\sqrt{\cos\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30°-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

8. Вернемся к пункту 6:

$$x^2=2R\cdot O_1D=2R\cdot\frac{2x}{\sqrt{3}}\sqrt{\cos\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30°-\frac{\alpha}{2}\right)},\text{ или}$$

$$x=\frac{4R}{\sqrt{3}}\sqrt{\cos\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30°-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

Контрольные вопросы

1. Что такое шар (шаровая поверхность или сфера)?
2. Что такое радиус шара, диаметр шара?
3. Какие точки шара называются диаметрально противоположными?
4. Какая плоскость называется диаметральной плоскостью шара?
5. Какая плоскость называется касательной к шару?
6. В каком случае многогранник называется вписанным в сферу?
7. Любой ли многогранник можно вписать в сферу?
8. В каком случае сфера называется вписанной в многогранник?
9. В любой ли многогранник можно вписать сферу?
10. В любую ли правильную k-угольную: а) призму; б) пирамиду можно вписать сферу? Если можно вписать сферу, то где (на какой прямой) будет находиться ее центр?
11. Около любой ли правильной k-угольной: а) призмы; б) пирамиды можно описать сферу? Если можно это сделать, то где будет лежать ее центр?
12. Чему равен радиус шара, вписанного в куб, ребро которого 3 дм; описанного около этого куба?
13. Можно ли утверждать, что через две точки шаровой поверхности проходит один большой круг?
14. Сколько общих точек может иметь шаровая поверхность и прямая?
15. Сколько общих точек могут иметь две шаровые поверхности?
16. Можно ли к любым двум шарам провести общую касательную прямую?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. **1.** Шар, радиус которого 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Найдите площадь сечения. [16π м^2.]
2. Радиус шара R. Через конец радиуса проведена плоскость под углом 60° к нему. Найдите площадь сечения. [$0{,}25\pi R^2$.]
3. Радиус земного шара R. Чему равна длина параллели, если ее широта 60°? [πR.]

4. Найдите радиус шара, описанного около куба со стороной a. [$0{,}5a\sqrt{3}$.]

5. Измерения прямоугольного параллелепипеда 2, 3 и 6 см. Найдите радиус описанного около него шара. [3,5 см.]

Б. 1. Радиус шара 7 см. На его поверхности даны две равные окружности, имеющие общую хорду длиной 2 см. Найдите радиусы окружностей, зная, что их плоскости перпендикулярны. [5 см.]

2. Найдите радиус шара, описанного около правильного тетраэдра с ребром a. [$0{,}25a\sqrt{6}$.]

3. Шар радиуса R вписан в усеченный конус. Угол наклона образующей к плоскости нижнего основания конуса равен α. Найдите радиусы оснований и образующую усеченного конуса.

$$\left[R \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2},\ R\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},\ \frac{2R}{\sin\alpha}.\right]$$

4. Дан шар радиуса R. Через одну точку его поверхности проведены две плоскости: первая — касательная к шару, вторая — под углом 30° к первой. Найдите площадь сечения. [$0{,}25\pi R^2$.]

5. В правильной четырехугольной призме сторона основания равна 4 см, высота 2 см. Найдите радиус описанной около призмы сферы. [3 см.]

6. У правильной треугольной призмы высота равна 2 дм, радиус описанной около нее сферы тоже равен 2 дм. Найдите сторону основания призмы. [3 дм.]

В. 1. На поверхности шара даны три точки. Прямолинейные расстояния между ними 6, 8 и 10 см. Радиус шара 13 см. Найдите расстояние от центра до плоскости, проходящей через эти точки. [12 см.]

2. Стороны треугольника 13, 14 и 15 см. Найдите расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касающегося всех сторон треугольника, если радиус шара 5 см. [3 см.]

3. Диагонали ромба 15 и 20 см. Шаровая поверхность касается всех его сторон. Радиус шара 10 см. Найдите расстояние от центра шара до плоскости ромба. [8 см.]

4. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, а плоский угол при вершине равен α. Найдите радиусы вписанного и описанного шаров. $\left[R = \frac{a}{4\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos\alpha}},\right.$

$$\left.= \frac{a\sqrt{2\cos\alpha}}{\cos\left(\quad\right)}.\right]$$

5. В шар радиуса R вписана правильная треугольная пирамида с плоскими углами α при ее вершине. Найдите высоту пирамиды $\left[2R\left(1 - \frac{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}{3}\right).\right]$

6. Шар вписан в прямую призму, основанием которой служит прямоугольный треугольник, в котором перпендикуляр, опущенный из вершины прямого угла на гипотенузу, равен k и составляет с одним из катетов угол α. Найдите радиус шара. $\left[\dfrac{k\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sqrt{2}\cos\alpha\cos\frac{\alpha}{2}}.\right]$

7. В шаре из точки его поверхности проведены три равные хорды под углом α друг к другу. Найдите их длины, если радиус шара равен R. $\left[\frac{4}{3}R\sqrt{3\cos\left(30^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}.\right]$

8. В шар радиуса R вписан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите высоту конуса. $[2R\sin^2\alpha.]$

§ 4. УРАВНЕНИЕ СФЕРЫ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Пусть центр сферы находится в точке $A\,(a;\ b;\ c)$, а радиус сферы R, тогда уравнение сферы имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2.$$

2. Если центром сферы является начало координат, то уравнение сферы имеет вид:

$$x^2+y^2+z^2=R^2.$$

3. Линия пересечения двух сфер есть окружность.

ЗАДАЧА С РЕШЕНИЕМ

Задача. Найдите уравнение сферы радиуса 3, проходящей через точки (0; 0; 0), (0; 0; 1), (4; 0; 0), (0; 4; 0).

Решение. 1. Так как $R=3$, то $R^2=9$ и уравнение имеет вид:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=9, \qquad (1)$$

где неизвестные параметры a, b, c найдем из системы трех уравнений, получающихся при подстановке в уравнение (1) координат трех данных точек:

для точки (0; 0; 0): $a^2+b^2+c^2=9$; (2)

для точки (4; 0; 0): $(4-a)^2+b^2+c^2=9$; (3)

для точки (0; 4; 0): $a^2+(4-b)^2+c^2=9$. (4)

2. Почленно вычитая из уравнений (3) и (4) уравнение (2), получаем:

$(4-a)^2+b^2+c^2-(a^2+b^2+c^2)=9-9$, или $16-8a=0$;

$a^2+(4-b)^2+c^2-(a^2+b^2+c^2)=9-9$, или $16-8b=0$. Откуда $a=b=2$.

3. Значение третьей переменной c найдем подстановкой найденных значений a и b в уравнение (2):

$$4+4+c^2=9,\ c^2=1 \text{ и } c_1=1,\ c_2=-1.$$

4. Так как получили два значения c, то существуют две сферы, удовлетворяющие условию задачи: их центры будут $O_1(2;\ 2;\ 1)$ и $O_2(2;\ 2;\ -1)$, а уравнения

$$(x-2)^2+(y-2)^2+(z-1)^2=9 \text{ и } (x-2)^2+(y-2)^2+(z+1)^2=9.$$

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

1. Найдите уравнение сферы, которая проходит через точки $(0;\ 0;\ 0)$, $(0;\ 0;\ 1)$, $(0;\ 1;\ 0)$, $(1;\ 0;\ 0)$. $[(x-0{,}5)^2+(y-0{,}5)^2+(z-0{,}5)^2=0{,}75.]$

2. Два равных шара радиуса R расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Найдите длину линии, по которой пересекаются их поверхности. $[\pi R\sqrt{3}.]$

3. Составьте уравнение сферы с центром A и радиусом R, если: а) $A(2;\ -1;\ 3)$, $R=4$; б) $A(-5;\ 0;\ 7)$, $R=\sqrt{3}$. $[(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=16;\ (x+5)^2+y^2+(z-7)^2=3.]$

4. Найдите центр и радиус сферы, заданной уравнением: а) $x^2+y^2+z^2=2$; б) $(x-2)^2+(y+2)^2+z^2=6$; в) $x^2+y^2+z^2+2y-6z-6=0$. $[A(0;\ 0;\ 0),\ R=\sqrt{2};\ A(2;\ -2;\ 0),\ R=\sqrt{6};\ A(0;\ -1;\ 3),\ R=4.]$

ГЛАВА XVI

§ 1. ОБЪЕМ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА
§ 2. ОБЪЕМ ПРИЗМЫ
§ 3. ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ
§ 4. ОБЪЕМЫ ЦИЛИНДРА И КОНУСА
§ 5. ОБЪЕМ ШАРА И ЕГО ЧАСТЕЙ

---

§ 1. ОБЪЕМ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Объемом прямоугольного параллелепипеда* будем называть число, равное произведению трех его измерений, взятых в одних и тех же единицах. Если измерения прямоугольного параллелепипеда равны a, b, c, то

$$V=abc.$$

2. Если $a=b=c$, то прямоугольный параллелепипед будет кубом, тогда его объем будет:

$$V_{\text{куб}}=a^3.$$

3. Объемы геометрических тел выражаются в кубических единицах.

4. Объем любого прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади его основания на высоту: $V=S\cdot H$.

5. Два многогранника, имеющие равные объемы, называются *равновеликими*.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и составляет с основанием угол α, а с боковой гранью угол β. Найдите объем параллелепипеда.

Решение. 1. Имеем $B_1B\perp ABCD$, поэтому BD — проекция B_1D, значит $\angle B_1DB=\alpha$ (рис. 305).

2. Любую грань прямоугольного параллелепипеда можно принять за основание, поэтому DC_1 — проекция B_1D и $\angle B_1DC_1=\beta$.

3. Итак, $B_1D=d$, $\angle B_1DB=\alpha$, $\angle B_1DC_1=\beta$.

4. Измерения a, b и c нам неизвестны. Найдем их.

а) Из прямоугольного треугольника B_1BD имеем $c=B_1B=$ $=B_1D\sin\alpha=d\sin\alpha$.

б) Из прямоугольного треугольника B_1DC_1 имеем $b=B_1C_1=$ $=B_1D\sin\beta=d\sin\beta$.

в) Из прямоугольного треугольника ABD имеем $a=AB=$ $=\sqrt{BD^2-AD^2}$.

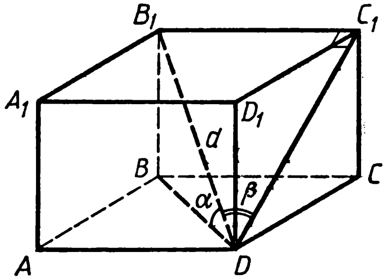


Рис. 305

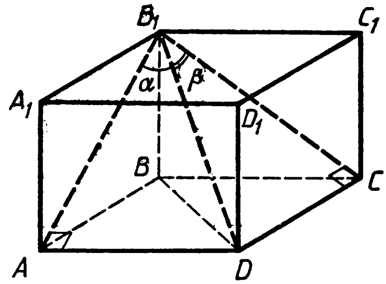


Рис. 306

г) Из треугольника B_1BD найдем $BD = B_1D \cos\alpha = d\cos\alpha$, а $AD = d\sin\beta$, поэтому $a = \sqrt{d^2\cos^2\alpha - d^2\sin^2\beta} =$

$$= d\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2} - \frac{1-\cos 2\beta}{2}} = d\sqrt{\frac{\cos 2\alpha + \cos 2\beta}{2}} =$$

$$= d\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

5. $V = abc = d\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}\, d\sin\beta\ d\ \sin\alpha =$

$= d^3 \sin\alpha\sin\beta\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

Задача 2. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна d и составляет с боковыми гранями углы α и β. Найдите объем параллелепипеда.

Решение. 1. Так как данный параллелепипед прямоугольный, то $DA \perp AB$ и $DA \perp AA_1$, поэтому DA перпендикулярно плоскости AA_1B_1B и B_1A — проекция диагонали B_1D на плоскость AA_1B_1B, а $\angle AB_1D$ — угол между B_1D и боковой гранью AA_1B_1B (рис. 306).

2. Аналогично можно показать, что $\angle DB_1C$ — угол между B_1D и гранью BB_1C_1C.

3. Пусть $\angle AB_1D = \alpha$, $\angle DB_1C = \beta$.

4. Вычислим длины ребер этого параллелепипеда.

а) Угол B_1AD прямой, так как ребро AD является перпендикуляром к плоскости AA_1B_1B и перпендикулярно к AB_1.

б) Из прямоугольного треугольника AB_1D находим $AD = B_1D\sin\alpha = d\sin\alpha$ и $AB_1 = B_1D\cos\alpha = d\cos\alpha$.

в) Аналогично из прямоугольного треугольника DB_1C получаем CD $d\sin\beta$.

г) Ребро B_1B находим из прямоугольного треугольника AB_1B:

$$B_1B = \sqrt{AB_1^2 - AB^2} = \sqrt{d^2\cos^2\alpha - d^2\sin^2\beta} =$$

$$= d\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}.$$

Таким образом, $V = AB \cdot BC \cdot BB_1 = CD \cdot BB_1 \cdot AD$,

$= d^3$ α sir $\beta\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)}$.

Задача 3. Основанием параллелепипеда (наклонного) служит ромб со стороной a и острым углом α. Боковое ребро, проходящее через вершину этого угла, равно c и образует со сторонами основания, проходящими через эту вершину, углы φ ($\varphi < 90°$). Найдите объем параллелепипеда.

Р е ш е н и е. 1. Сторона ромба $AB = a$, острый угол $DAB = \alpha$, боковое ребро $AA_1 = c$, $\angle A_1AB = \angle A_1AD = \varphi$ (рис. 307).

2. Из A_1 опускаем перпендикуляры A_1E на основание и A_1M и A_1K на стороны ромба. Точки M и K соединяем с E.

3. По условию $\angle A_1AK = \angle A_1AM = \varphi$.

4. Из равенства треугольников A_1AK и A_1AM (по стороне c и углу φ) вытекает, что $AM = AK$. По теореме о трех перпендикулярах $AM \perp ME$ и $AK \perp KE$. Следовательно, треугольники AEM и AKE прямоугольные и равны (по гипотенузе AE и $AM = AK$). Поэтому AE делит угол α пополам, т. е. высота AE пересекает диагональ ромба.

5. Из треугольника A_1AK имеем $AK = AA_1 \cos\varphi = c\cos\varphi$.

6. Из треугольника AKE находим:

$$AE = \frac{AK}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{c\cos\varphi}{\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

7. Из треугольника AA_1E находим:

$$A_1E = H = \sqrt{AA_1^2 - AE^2} = \sqrt{c^2 - \frac{c^2\cos^2\varphi}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} =$$

$$= \frac{c}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \cos^2\varphi} =$$

$$= \frac{c}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2} - \frac{1+\cos 2\varphi}{2}} =$$

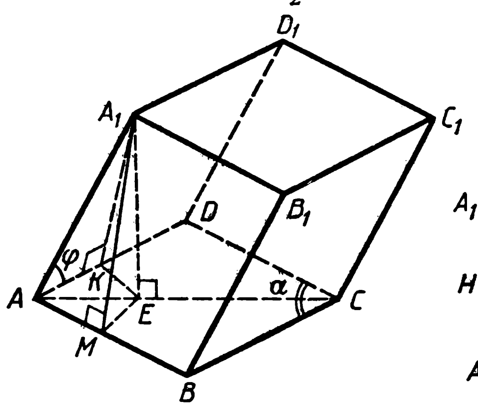


Рис. 307

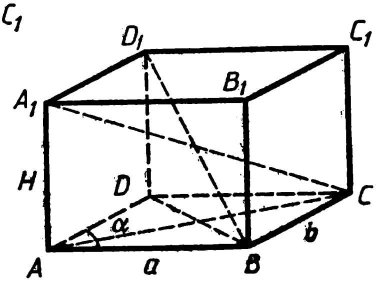


Рис. 308

$$=\frac{c}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)\sin\left(\varphi-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

8. Площадь основания $S=a^2\sin\alpha$. Следовательно,

$$V=S_{\text{осн}}H=\frac{a^2c\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}\sqrt{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\varphi\right)\sin\left(\varphi-\frac{\alpha}{2}\right)}=$$
$$=2a^2c\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\left(\varphi+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\varphi-\frac{\alpha}{2}\right)}.$$

9. Замечание. По свойству плоских углов трехгранного угла A имеем $\angle A_1AB+\angle A_1AD>\angle BAD$, т. е. $\varphi+\varphi>\alpha$, $\varphi>\frac{\alpha}{2}$, и $\angle A_1AM+\angle A_1AK+\angle KAM<2\pi$, т. е. $\varphi+\varphi+\alpha<2\pi$, $\varphi+\frac{\alpha}{2}<\pi$, поэтому подкоренное выражение больше 0.

Задача 4. Измерения прямоугольного бруска 3, 4 и 5 см. Если увеличить каждое ребро на x сантиметров, то площадь полной поверхности увеличится на 54 см^2. Как изменится его объем?

Решение. 1. Площадь полной поверхности прямоугольного параллелепипеда с линейными размерами a, b и c равна $S=2ab+2ac+2bc$.

2. Для искомого значения x получаем уравнение

$$2(3+x)(4+x)+2(3+x)(5+x)+2(4+x)(5+x)=$$
$$=2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot5+2\cdot4\cdot5+54,$$

или $3x^2+24x-27=0$, или $x^2+8x-9=0$, откуда $x_1=-9$, $x_2=1$. Так как по условию $x>0$, то $x=1$.

3. Находим, во сколько раз увеличится объем:

$$\frac{V_{\text{нов}}}{V_{\text{стар}}}=\frac{4\cdot5\cdot6}{3\cdot4\cdot5}=\frac{6}{3}=2.$$

Значит, объем увеличится вдвое.

Задача 5. Диагонали прямого параллелепипеда равны 9 и $\sqrt{33}$ см. Периметр его основания равен 18 см. Боковое ребро равно 4 см. Найдите площадь полной поверхности и объем параллелепипеда.

Решение. 1. В отличие от прямоугольного параллелепипеда, все грани которого — прямоугольники, в прямом параллелепипеде в основании находится параллелограмм, а прямоугольниками являются только четыре боковые грани.

2. Обозначим бóльшую сторону основания $AB=a$, меньшую $BC=b$ (рис. 308).

3. По условию $a+b=9$.

4. Чтобы найти a, b, а также острый угол α, найдем диагонали основания.

Меньшая диагональ параллелепипеда $BD_1=\sqrt{33}$ имеет проекцию BD на плоскость $ABCD$. Поэтому $BD^2=BD_1^2-DD_1^2=33-16=17$.

Аналогично найдем $AC^2=65$. Получили два уравнения:

$$a^2+b^2-2ab\cos\alpha=17 \text{ и } a^2+b^2+2ab\cos\alpha=65.$$

Складывая их, находим $a^2+b^2=41$.

Составим систему и решим ее: $\begin{cases} a+b=9, \\ a^2+b^2=41, \end{cases}$ откуда $a=5$, $b=4$.

5. Вернемся к уравнениям $a^2+b^2-2ab\cos\alpha=17$ и $a^2+b^2+2ab\cos\alpha=65$.

Вычитая из второго первое, находим $4ab\cos\alpha=48$, т. е.

$$\cos\alpha=\frac{48}{4\cdot5\cdot4}=0{,}6, \text{ а } \sin\alpha=0{,}8.$$

Следовательно, $S_{осн}=ab\sin\alpha=4\cdot5\cdot0{,}8=16$ см^2, $S=104$ см^2.
6. $V=64$ см^3.

Контрольные вопросы

1. Чему равен объем параллелепипеда?
2. Какие два тела называются равновеликими?
3. Что служит единицей измерения объемов?
4. Во сколько раз увеличится объем куба, если его ребро увеличить в 2 раза?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. **1.** Площадь полной поверхности куба равна 6 м^2. Найдите его объем. [1 м^3.]

2. Объем куба равен 8 м^3. Найдите площадь полной поверхности. [24 м^2.]

3. Диагональ куба равна k. Найдите его объем. $\left[\frac{k^3\sqrt{3}}{9}.\right]$

4. Объем куба равен V. Найдите его диагональ. [$\sqrt[3]{V}\cdot\sqrt{3}$.]

5. Если каждое ребро куба увеличить на 2 см, то его объем увеличится на 98 см^3. Чему равно ребро куба? [3.]

6. Если каждое ребро куба увеличить на 1 м, то его объем увеличится в 125 раз. Найдите ребро куба. [25 см.]

7. Три куба, сделанные из свинца, имеют ребра 3, 4 и 5 см. Они переплавлены в один куб. Найдите его ребро. [6 см.]

8. Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда равны 2, 3 и 6 м^2. Найдите объем параллелепипеда. [6 м^3.]

9. В прямом параллелепипеде основание — ромб со стороной 4 см и с углом между сторонами 60°. Меньшая диагональ параллелепипеда равна 5 см. Найдите объем параллелепипеда. [$24\sqrt{3}$ см^3.]

Б. 1. Объем куба равен A. Найдите площадь его диагонального сечения. [$\sqrt{2}\sqrt[3]{A^2}$.]

2. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна k и составляет с одной гранью угол 30°, а с другой — угол 45°. Найдите его объем. $\left[\frac{k^3\sqrt{2}}{8}.\right]$

3. Диагональ прямоугольного параллелепипеда составляет с основанием угол α, двугранный угол между диагональным сечением и боковой гранью равен β. Найдите объем параллелепипеда, если диагональ основания равна k. [$0{,}5k^3 \sin 2\beta \operatorname{tg} \alpha$.]

4. В цилиндр радиуса k вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого составляет с основанием цилиндра угол α, угол между диагоналями основания параллелепипеда 60°. Найдите объем параллелепипеда. [$2\sqrt{3}k^3 \operatorname{tg} \alpha$.]

5. В шар радиуса R вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого составляет с одной гранью угол α, а с другой — угол 60°. Найдите объем параллелепипеда.
[$4\sqrt{3}R^3 \sin \alpha \sqrt{\sin(30°+\alpha)\sin(30°-\alpha)}$, $\alpha<30°$.]

6. В шар радиуса R вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого составляет с одной из граней угол α, угол между диагональю этой грани и стороной основания 60°. Найдите объем параллелепипеда. [$R^3\sqrt{3}\cos\alpha \sin 2\alpha$.]

7. Около шара радиуса k описан прямоугольный параллелепипед. Определите его вид. Найдите его объем. [$8k^3$.]

8. Основание прямого параллелепипеда — ромб, площадь которого 1 м², площади диагональных сечений 3 и 6 м². Найдите объем параллелепипеда. [3 м³.]

9. В прямом параллелепипеде стороны основания $2\sqrt{2}$ и 5 см образуют угол 45°. Меньшая диагональ параллелепипеда равна 7 см. Найдите его объем. [60 см³.]

10. Грани параллелепипеда — равные ромбы со стороной a и острым углом 60°. Найдите его объем. $\left[\frac{\sqrt{2}a^3}{2}.\right]$

В. 1. В прямоугольном параллелепипеде помещены два шара радиуса k так, что каждый касается другого шара и пяти граней параллелепипеда. Найдите объем параллелепипеда. [$16k^3$.]

2. Основание наклонного параллелепипеда — квадрат, сторона которого равна 1 Одно из боковых ребер равно 2 м и образует с каждой прилежащих сторон основания угол 60°. Найдите его объем [$2^{0,5}$ м³.]

3. Найдите объем прямоугольного параллелепипеда, диагональ которого, равная k, составляет с плоскостью основания угол α, а с боковой гранью угол β. [$k^3 \sin\alpha \sin\beta \sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta-\alpha)}$.]

4. Диагональная плоскость прямоугольного параллелепипеда и лежащая в ней диагональ, равная k, образуют с одной и

той же боковой гранью соответственно углы α и β. Найдите его объем. $\left[\frac{k^3 \sin^2 \beta \operatorname{ctg} \alpha \sqrt{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}}{\sin \alpha}.\right]$

§ 2. ОБЪЕМ ПРИЗМЫ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Наклонная призма равновелика такой прямой призме, у которой основанием служит перпендикулярное сечение наклонной призмы, а высотой — боковое ребро данной наклонной призмы.

2. Объем призмы равен произведению площади ее основания на высоту:

$$V=SH.$$

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. В правильной шестиугольной призме площадь наибольшего диагонального сечения 4 м², а расстояние между двумя противоположными боковыми гранями 2 м. Найдите объем призмы.

Решение. 1. Рассмотрим лежащий в основании данной призмы шестиугольник $ABCDEK$ (рис. 309).

2. Меньшая диагональ AC перпендикулярна ребрам CD и KA, а значит, она перпендикулярна боковым граням, которым принадлежат ребра AK и CD. Следовательно, ее длина и есть данное в условии расстояние между противолежащими боковыми гранями, значит, $AC=2$ м.

3. Так как $ABCDEK$ — правильный шестиугольник, то $AO=$ $=OC=CB=AB=R$, а следовательно, четырехугольник $ABCO$ (точка O — центр основания) является ромбом. По свойству диагоналей ромба $AM=0{,}5AC=1$ м и $\angle ABO=120:2=60°$. Из треугольника AMB найдем сторону основания $a=AB=$ $=\frac{AM}{\sin 60°}=\frac{2\cdot 1}{\sqrt{3}}$.

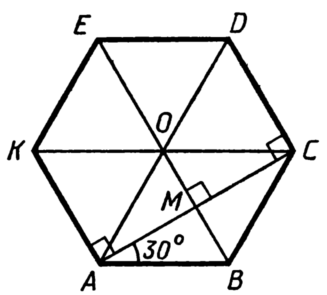


Рис. 309

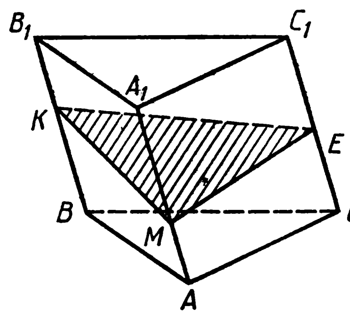


Рис. 310

4. Большее диагональное сечение призмы содержит бо́льшую диагональ основания, например AD.

5. Так как $AD=2a$, а если H — высота призмы, то из условия задачи имеем:

$$S_{\text{сеч}}=2aH=4, \text{ откуда } H=\frac{S_{\text{сеч}}}{2a}=\frac{4}{2\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}}=\sqrt{3}.$$

6. Найдем площадь основания призмы:

$$S_{\text{осн}}=6\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=2\sqrt{3}.$$

7 Искомый объем призмы

$$V=S_{\text{осн}}\cdot H=2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}, \text{ т. е. } V=6 \text{ м}^3.$$

Задача 2. Боковые ребра наклонной треугольной призмы равны 15, а расстояния между ними 26, 25 и 17. Найдите ее объем.

Решение. 1. Проведем перпендикулярное сечение KME, причем его стороны будут равны расстояниям между боковыми ребрами (рис. 310), т. е. $KE=26$, $ME=25$ и $KM=17$.

2. Найдем площадь перпендикулярного сечения по формуле Герона:

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},\quad S_{KME}=\sqrt{34\cdot8\cdot9\cdot17}=204.$$

3. $V_{\text{призмы}}=S_{KME}\cdot AA_1=204\cdot15=3060.$

Задача 3. Площадь основания прямой треугольной призмы равна 4 м^2, а площади боковых граней 9, 10 и 17 м^2. Найдите объем призмы.

Решение. 1. Пусть H — высота призмы, a, b, c — стороны ее основания.

2. Используя условие задачи, выразим стороны основания через высоту призмы H:

$$aH=9,\ bH=10,\ cH=17, \text{ или } a=\frac{9}{H},\ b=\frac{10}{H},\ c=\frac{17}{H}.$$

3. Найдем высоту H, выразив известную нам площадь основания призмы через H с помощью формулы Герона:

$$p=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{H}+\frac{10}{H}+\frac{17}{H}\right)=\frac{18}{H},$$

$$S=\sqrt{\frac{18}{H}\cdot\frac{9}{H}\cdot\frac{8}{H}\cdot\frac{1}{H}}=\frac{36}{H^2}.$$

Так как $S=4$, то $H^2=36:4=9$, $H=3$ и искомый объем равен:

$$V=S\cdot H=4\cdot3,\ V=12 \text{ м}^3.$$

Задача 4. Основание прямой призмы — прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим углом α. Плоскость, проведенная через данный катет и противолежащую вершину другого основания, составляет с основанием угол β. Найдите объем призмы.

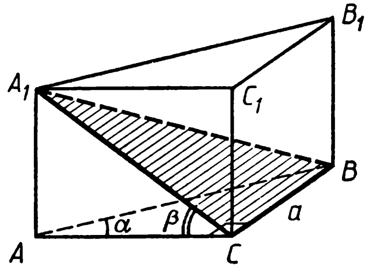


Рис. 311

Решение. 1. Из условия задачи $\angle BAC = \alpha$, $CB = a$, $\angle BCA = 90°$ (рис. 311).

2. Из прямоугольного треугольника ABC катет $AC = BC \operatorname{ctg} \alpha = a \operatorname{ctg} \alpha$, тогда $S_{ABC} = 0{,}5 AC \cdot BC = 0{,}5a^2 \operatorname{ctg} \alpha$.

3. Для нахождения объема призмы следует определить ее высоту, т. е. ребро $AA_1 = H$.

а) AA_1 перпендикулярно плоскости ABC, значит, AC — проекция A_1C на плоскость ABC, но по условию $AC \perp BC$, следовательно, $A_1C \perp BC$ (теорема о трех перпендикулярах).

б) $\angle A_1CA$ — линейный угол двугранного угла BC, т. е. $\angle A_1CA = \beta$.

в) Из прямоугольного треугольника AA_1C находим $A_1A = H = AC \operatorname{tg} \beta = a \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta$.

г) $V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн}} \cdot H = 0{,}5a^2 \operatorname{ctg} \alpha \cdot a \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{tg} \beta = 0{,}5a^3 \operatorname{ctg}^2 \alpha \operatorname{tg} \beta$.

Контрольные вопросы

1. Напишите формулу объема прямой призмы и объясните смысл входящих в нее букв.
2. В призме проводятся сечения, параллельные ее основаниям. В каком отношении находятся объемы данной и вновь полученных призм?
3. Призма деформируется, оставаясь призмой, так, что одно из ее оснований перемещается в содержащей ее плоскости, а положение второго основания закреплено. Будут ли призмы, получаемые в результате такой деформации, равновеликими?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. **1.** Требуется установить резервуар для воды емкостью 10 м^3 на площадке размером $2{,}5 \times 1{,}75$ м, служащей для него дном. Найдите высоту резервуара. [$\approx 2{,}29$ м.]

2. По стороне основания a и боковому ребру k найдите объем правильной призмы: а) треугольной; б) четырехугольной; в) шестиугольной. [$0{,}25\sqrt{3}a^2k$; a^2k; $1{,}5\sqrt{3}a^2k$.]

3. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 3,5 см, а диагональ боковой грани 2,5 см. Найдите объем призмы. [3 см^2.]

4. Сторона основания правильной треугольной призмы равна a, площадь боковой поверхности равна сумме площадей оснований. Найдите объем призмы. $\left[\frac{a^3}{8}.\right]$

5. В прямой треугольной призме стороны оснований равны 4, 5 и 7 см, а боковое ребро равно большей высоте основания. Найдите объем призмы. [48 см^3.]

6. Поперечное сечение канала имеет форму трапеции с основаниями 22 и 8 м, высота равна 4 м. Длина канала 100 м. Сколько кубических метров земли вынуто? [6000 м^3.]

1. Основание призмы — треугольник, у которого одна сторона равна 2 см, а две другие — по 3 см. Боковое ребро равно 4 см и составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите ребро равновеликого куба. [2 см.]

2. Чему равен объем прямой четырехугольной призмы, если ее высота k, диагонали наклонены к плоскости основания под углами α и β и острый угол между диагоналями основания равен φ? $\left[\frac{R^3 \sin\varphi}{2\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.\right]$

3. Основанием прямой призмы служит прямоугольный треугольник с катетами 6 и 8 м. В призму вписан шар. Найдите объем призмы. [96 м^3.]

4. Высота прямой треугольной призмы равна 5 м, ее объем равен 24 м^3, а площади боковых граней относятся как 17:17:16. Найдите стороны основания. [3,4 м, 3,4 м и 3,2 м.]

5. В наклонной треугольной призме стороны основания равны 5, 6 и 9 м, боковое ребро равно 10 м и составляет с плоскостью основания угол 45°. Найдите объем призмы. [100 м^3.]

6. Основанием наклонной призмы служит равносторонний треугольник со стороной a; одна из боковых граней перпендикулярна плоскости основания и представляет собой ромб, у которого меньшая диагональ равна c. Найдите объем призмы. $\left[\frac{1}{8}ac\sqrt{12a^2-3c^2}.\right]$

7. В наклонной призме основание — прямоугольный треугольник, гипотенуза которого равна c, один острый угол 30°, боковое ребро равно k и составляет с плоскостью основания угол 60°. Найдите объем призмы. $\left[\frac{3}{16}kc^2\right]$

В. 1. Самая большая диагональ правильной шестиугольной призмы, имеющая длину k, составляет с боковым ребром призмы угол α. Найдите объем призмы. $\left[\frac{3}{8}\sqrt{3}k^3\sin^2\alpha\cos\alpha.\right]$

2. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник с основанием k и углом при основании α. Найдите объем призмы, если площадь ее боковой поверхности равна сумме площадей ее оснований. $\left[\frac{1}{8}k^3\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.\right]$

3. Найдите объем правильной четырехугольной призмы, если ее диагональ образует с боковой гранью угол α, а сторона основания равна k. $\left[\frac{k^3\sqrt{\cos 2\alpha}}{\sin \alpha}.\right]$

4. В основании прямой призмы лежит четырехугольник, в котором два противоположных угла прямые. Диагональ основания, соединяющая вершины непрямых углов, имеет длину k и делит один из этих углов на части α и β. Площадь сечения, проведенного через другую диагональ основания перпендикулярно к нему, равна S (рис. 312). Найдите объем призмы. $[0{,}5Sk\cos(\alpha-\beta).]$

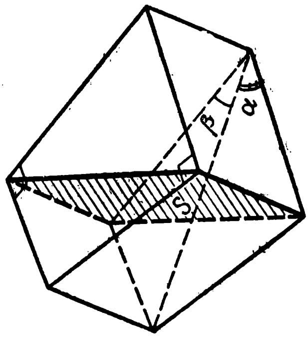


Рис. 312

5. В основании прямой призмы лежит трапеция, вписанная в полукруг радиуса R так, что большее основание не совпадает с диаметром, а меньшее стягивает дугу, равную 2α. Найдите объем призмы, если диагональ грани, проходящей через боковую сторону основания, наклонена к основанию под углом α. $\left[R^3 \sin 2\alpha \cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).\right]$

6. В основании прямой призмы лежит прямоугольный реугольник с острым углом α и катетом c. Диагональ боковой грани призмы, проходящей через гипотенузу, образует с боковой гранью, проходящей через катет c, угол β. Найдите объем призмы. $\left[\frac{c^3 \sin\alpha\sqrt{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha+\beta)}}{2\sin\beta\cos^2\alpha}.\right]$

§ 3. ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Объем* любой *пирамиды* равен $\frac{1}{3}$ произведения площади основания на высоту:

$$V=\frac{1}{3}SH.$$

2. Две пирамиды *равновелики*, если равновелики их основания и равны их высоты.

3. Формула для вычисления *объема усеченной пирамиды:*

$$V=\frac{1}{3}H\left(S_1+S_2+\sqrt{S_1\cdot S_2}\right),$$

где H — высота пирамиды, S_1 и S_2 — площади оснований.

4. Объемы подобных многогранников относятся как кубы сходственных ребер.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Одно ребро тетраэдра равно 4, каждое из остальных равно 3. Найдите объем тетраэдра.

Решение. 1. Пусть $BC=4$, $AB=AC=EA=EB=EC=3$ (рис. 313).

2. $V=\frac{1}{3}SH$, где $H=EO$.

3. $S=\frac{1}{2}BC\cdot AD$, где $AD\perp BC$ и $BC=4$. Из прямоугольного треугольника ADC найдем $AD=\sqrt{AC^2-DC^2}=\sqrt{9-4}=\sqrt{5}$. Таким образом, $S=\frac{1}{2}\cdot 4\cdot\sqrt{5}=2\sqrt{5}$.

4. $AE=EB=EC$, следовательно, точка O — центр описанной окружности около основания ABC и $AO=R$.

5. Из прямоугольного треугольника AEO находим $H=EO=$ $=\sqrt{AE^2-AO^2}$, где $AE=3$. Так как $AO=R$, то $AO=\frac{abc}{4S}=$ $=\frac{4\cdot 3\cdot 3}{4\cdot 2\sqrt{5}}=\frac{9}{2\sqrt{5}}$, тогда

$$H=EO=\sqrt{3^2-\left(\frac{9}{2\sqrt{5}}\right)^2}=\sqrt{\frac{99}{20}}.$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot 2\sqrt{5}\cdot\sqrt{\frac{99}{20}}=\sqrt{11}.$$

Задача 2. Основание пирамиды равнобедренный треугольник, боковая сторона которого равна k, а угол при вершине α. Боковые грани, проходящие через равные стороны основания, перпендикулярны основанию пирамиды, а третья грань составляет с ним угол φ. Найдите объем пирамиды.

Решение. 1. Пусть $AB=AC=k$, $\angle BAC=\alpha$ (рис. 314).

2. $V=\frac{1}{3}\cdot SH$.

3. Проведем $AM\perp BC$, так как AE перпендикулярно плос-

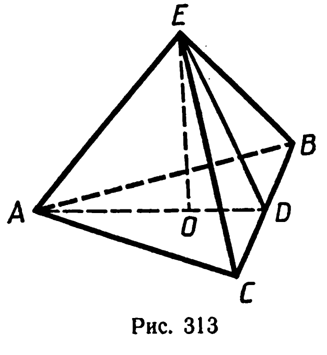


Рис. 313

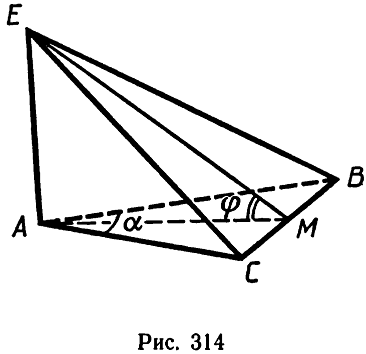


Рис. 314

кости ABC, то AM будет проекцией EM на плоскость ABC, значит, $EM \perp BC$ (теорема о трех перпендикулярах), т. е. $\angle AME = \varphi$.

4. Из прямоугольного треугольника AMC найдем

$$AM = AC \cdot \cos \frac{\alpha}{2} = k \cos \frac{\alpha}{2}.$$

5. Из прямоугольного треугольника AEM найдем $H = AE = AM \cdot \operatorname{tg} \varphi = k \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi$.

6. $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot AC \cdot \sin \alpha = \frac{1}{2} k^2 \sin \alpha$.

7. Объем пирамиды $V = \frac{1}{6} k^3 \sin \alpha \cos \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi$.

Задача 3. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, в которой длина стороны основания равна a, двугранный угол между боковыми гранями равен α.

Решение. 1. Из точки B опускаем перпендикуляр BE на сторону KC и точку E соединяем с D. Так как $BC = CD$, $\angle KCD = \angle KCB$ и EC — общая сторона, то треугольники BCE и DCE будут равны, и, следовательно, $\angle BEC = \angle DEC = 90°$, т. е. $DE \perp KC$ (рис. 315).

2. Согласно определению угол BED является линейным углом двугранного угла между боковыми гранями пирамиды, значит, $\angle BED = \alpha$.

3. $ABCD$ — квадрат со стороной a, следовательно, $AC = a\sqrt{2}$ и $OC = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

4. Обозначив $\angle KCO$ через φ, из прямоугольного треугольника KOC найдем $H = KO = OC \operatorname{tg} \varphi = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \varphi$.

5. Из прямоугольного треугольника EOC и треугольника OEB найдем:

$$\sin \varphi = \frac{OE}{OC}, \ \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = \frac{OE}{OC}, \text{ т. е. } \sin \varphi = \operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}.$$

Тогда

$$H = \frac{a\sqrt{2}}{2} \operatorname{tg} \varphi = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sin \varphi}{\sqrt{1 - \sin^2 \varphi}} = \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 - \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2}}},$$

$$H = \frac{a\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{2\sqrt{-\cos \alpha}}.$$

6. Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H = \frac{a^3 \sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{6\sqrt{-\cos \alpha}}.$$

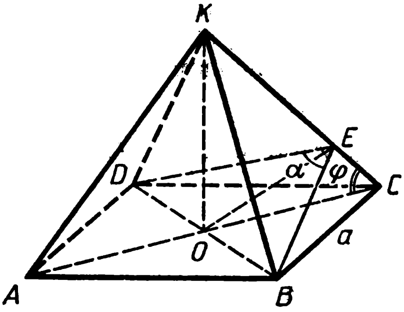


Рис. 315

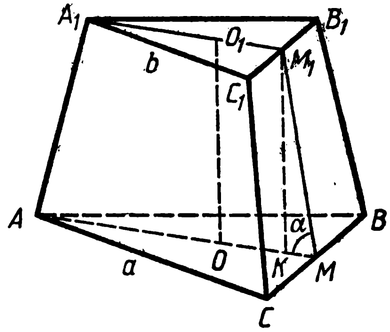


Рис. 316

7. Замечание. Здесь $\alpha > 90°$, так как из треугольника OEB $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{OB}{OE} = \frac{OC}{OE} > 1$ (OC — гипотенуза). Следовательно, $\frac{\alpha}{2} > 45°$ и $\alpha > 90°$.

Задача 4. В правильной треугольной усеченной пирамиде стороны оснований a и b ($a > b$), двугранный угол при основании α. Найдите ее объем.

Решение. 1. Условию задачи отвечает рисунок 316.

2. $V = \frac{1}{3} H (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$, где S_1 — площадь треугольника ABC, S_2 — площадь треугольника $A_1B_1C_1$, H — высота пирамиды, т. е.

$$S_1 = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}, \quad S_2 = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}, \quad \sqrt{S_1 S_2} = \frac{ab}{4}\sqrt{3}.$$

3. M и M_1 — середины сторон BC и B_1C_1, следовательно, $A_1M_1 \perp B_1C_1$ и $AM \perp BC$, $MM_1 \perp BC$ (MM_1 — отрезок оси симметрии равнобедренной трапеции C_1B_1BC). Следовательно, $\angle M_1MO$ — линейный угол двугранного угла при основании, т. е. $\angle M_1MO = \alpha$.

4. Проведем $KM_1 \parallel OO_1$. Из прямоугольного треугольника KM_1M находим $H = KM_1 = OO_1 = KM \operatorname{tg}\alpha$, где $KM = OM - O_1M_1$.

5. Из правильного треугольника ABC, где $AM \perp BC$, $AM = a \sin 60° = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, тогда $OM = \frac{a\sqrt{3}}{6}$.

6. Из правильного треугольника $A_1B_1C_1$ аналогично находим $O_1M_1 = \frac{b\sqrt{3}}{6}$.

7. Следовательно, $KM = \frac{a\sqrt{3}}{6} - \frac{b\sqrt{3}}{6} = \frac{\sqrt{3}(a-b)}{6}$ и $H = \frac{\sqrt{3}(a-b)}{6}\operatorname{tg}\alpha$.

8. Объем пирамиды

$$V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(a-b)\sqrt{3}}{6} \operatorname{tg}\alpha \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}(a^2 + b^2 + ab),$$

$$V = \frac{(a^3 - b^3)\operatorname{tg}\alpha}{24}.$$

Задача 5. В треугольной усеченной пирамиде высота равна 10 м, стороны одного основания 27, 29 и 52 м, а периметр другого равен 72 м. Найдите объем усеченной пирамиды.

Решение. 1. По формуле Герона найдем площадь нижнего основания: $S=\sqrt{54\cdot 2\cdot 25\cdot 27}=270$.

2. Площади подобных многоугольников относятся как квадраты сходственных сторон или как квадраты их периметров, т. е. $\frac{S}{s}=\frac{P^2}{p^2}$, где S и P — площадь и периметр нижнего основания, s и p — площадь и периметр верхнего основания, значит,

$$\frac{270}{s}=\frac{108^2}{72^2}, \text{ откуда } s=120.$$

3. $V=\frac{1}{3}\,10\,(270+120+\sqrt{270\cdot 120})=1900$ м^3.

Задача 6. Через середину высоты пирамиды проведена плоскость, параллельная основанию. В каком отношении она делит объем пирамиды?

Решение. 1. Плоскость, проведенная параллельно основанию, отсекает подобную пирамиду.

2. Коэффициент подобия равен отношению высот, т. е. $\frac{1}{2}$. Поэтому объемы пирамид относятся как $\left(\frac{1}{2}\right)^3:1$.

3. Следовательно, плоскость делит нашу пирамиду на части, объемы которых относятся как $\frac{1}{8}:\left(1-\frac{1}{8}\right)=1:7$.

Контрольные вопросы

1. Напишите формулу объема пирамиды и объясните смысл входящих в формулу букв.
2. Напишите формулу объема усеченной пирамиды и объясните смысл входящих в формулу букв.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. По ребру k правильного тетраэдра найдите его объем. $\left[\frac{1}{12}k^3\sqrt{2}.\right]$

2. По ребру k октаэдра найдите его объем. $\left[\frac{1}{3}k^3\sqrt{2}.\right]$

3. Основание пирамиды — прямоугольник со сторонами 9 и 12 м, все боковые ребра равны 12,5 м. Найдите объем пирамиды. [360 м^3.]

4. Боковое ребро правильной шестиугольной пирамиды равно

1,4 м. Сторона основания ее равна 0,2 м. Найдите объем пирамиды. [48 $дм^3$.]

5. Диагональ квадрата, лежащего в основании правильной пирамиды, равна 8 дм, а ее высота 12 дм. Найдите объем пирамиды. [128 $дм^3$.]

Б. 1. Основание пирамиды — равнобедренный треугольник со сторонами 6, 6 и 8 м. Все боковые ребра равны 9 м. Найдите объем пирамиды. [48 $м^3$.]

2. Чему равен объем правильной треугольной пирамиды, у которой сторона основания a, боковые ребра взаимно перпендикулярны? $\left[\frac{a^3\sqrt{2}}{24}.\right]$

3. Найдите объем усеченной пирамиды с площадями оснований A_1 и A_2 $(A_1 > A_2)$ и высотой H. $\left[\frac{H}{3}(A_1 + A_2 + \sqrt{A_1 \cdot A_2}).\right]$

4. В основании пирамиды лежит прямоугольник. Каждое боковое ребро пирамиды равно a и составляет со смежными сторонами прямоугольника углы α и β. Найдите объем пирамиды. $\left[\frac{4}{3}a^3 \cos\alpha \cos\beta \cdot \sqrt{\sin^2\alpha - \cos^2\beta}.\right]$

5. Высота пирамиды H. На каком расстоянии от вершины находится сечение, параллельное основанию и делящее ее объем пополам? $\left[\frac{H}{\sqrt[3]{2}}.\right]$

6. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований a и b, двугранный угол при большем основании α. Найдите ее объем. $\left[\frac{1}{6}(a^3 - b^3)\operatorname{tg}\alpha.\right]$

7. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, двугранный угол при боковом ребре равен α. Найдите ее объем. $\left[\frac{a^3 \cos\frac{\alpha}{2}}{3\sqrt{-2\cos\alpha}}.\right]$

8. От куба отрезаны его углы плоскостями, проходящими через середины ребер, выходящих из отрезанных вершин. Ребро куба равно a. Найдите объем оставшегося тела. $\left[\frac{5}{6}a^3.\right]$

9. Пирамида, высота которой равна H, разделена плоскостью, параллельной основанию, на две равновеликие части. Найдите расстояние от этой плоскости до вершины пирамиды. $\left[\frac{\sqrt[3]{4}\,H}{2}.\right]$

В. 1. Найдите объем пирамиды, имеющей основанием треугольник, два угла которого α и β, радиус описанной около основания окружности равен R. Боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости ее основания под углом φ. $\left[\frac{2}{3} R^3 \sin \alpha \times \right.$ $\left.\times \sin \beta \sin (\alpha+\beta) \operatorname{tg} \varphi.\right]$

2. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, если площадь боковой грани равна P, а плоский угол при вершине пирамиды равен α. $\left[\frac{4P\sqrt{P \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \cos \alpha}}{3 \cos \frac{\alpha}{2}}.\right]$

3. Площадь полной поверхности правильной четырехугольной пирамиды равна A. Угол наклона плоскости боковой грани к основанию равен α. Найдите объем пирамиды. $\left[\frac{A \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \sqrt{A \cos \alpha}}{6\sqrt{2} \cos \frac{\alpha}{2}}.\right]$

4. Сторона основания правильной треугольной пирамиды равна a, каждый из плоских углов при вершине равен α. Найдите объем пирамиды. $\left[\frac{a^3\sqrt{\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}}{12 \sin \frac{\alpha}{2}}.\right]$

5. Дана правильная треугольная пирамида. Плоский угол при вершине равен 2α, а высота пирамиды равна H. Найдите объем пирамиды. $\left[\frac{\sqrt{3}H^3 \sin^2 \alpha}{4 \sin (60^\circ-\alpha) \sin (60^\circ+\alpha)}.\right]$

6. В правильной треугольной пирамиде даны сторона основания a и угол α между боковым ребром и стороной основания. Найдите площадь полной поверхности и объем пирамиды. $\left[\frac{a^3\sqrt{\sin(\alpha-30^\circ)\sin(\alpha+30^\circ)}}{12 \cos \alpha}, \frac{\sqrt{3}a^2 \sin(\alpha+30^\circ)}{2 \cos \alpha}.\right]$

7. В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник, в который вписан круг радиуса r. Боковые грани наклонены к основанию под одним и тем же углом α. Найдите объем и площадь полной поверхности пирамиды. $\left[\sqrt{3}r^3 \operatorname{tg} \alpha, \frac{6\sqrt{3}r^2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos \alpha}.\right]$

8. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, у которой плоский угол при вершине равен α, площадь круга, описанного около основания, равна A. $\left[\frac{A\sqrt{3A\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}}{4\pi\sqrt{\pi} \sin \frac{\alpha}{2}}.\right]$

9. Найдите объем правильной треугольной пирамиды, если плоский угол при вершине равен α, а радиус окружности, описанной около боковой грани, равен R.

$$\left[\frac{4}{3}R^3 \sin^2\alpha \cos\frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)}.\right]$$

§ 4. ОБЪЕМЫ ЦИЛИНДРА И КОНУСА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Объем цилиндра равен произведению площади его основания на высоту, т. е.

$$V=\pi R^2 H.$$

2. Объем конуса равен $\frac{1}{3}$ произведения площади основания на высоту, т. е.

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H.$$

3. Объем усеченного конуса равен:

$$V=\frac{1}{3}\pi H\cdot(R_1^2+R_2^2+R_1R_2),$$

где R_1 и R_2 — радиусы оснований, H — высота конуса.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Найдите объем цилиндра, вписанного в правильную шестиугольную призму, у которой каждое ребро равно a.

Решение. 1. Высота цилиндра равна боковому ребру призмы, т. е. $H=a$.

2. Радиус основания цилиндра равен радиусу окружности, вписанной в правильный шестиугольник со стороной a, т. е. $r=\frac{a}{2\,\mathrm{tg}\,30^\circ}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$.

3. Объем цилиндра

$$V=\pi r^2 H=\pi\cdot\frac{a^2\cdot 3}{4}\cdot a=\frac{3}{4}\pi a^3.$$

Задача 2. Цилиндр пересечен плоскостью, параллельной оси и отсекающей на окружности основания дугу α. Диагональ сечения равна a и составляет с плоскостью основания угол β. Найдите объем цилиндра.

Решение. 1. По условию сечение цилиндра $CC_1B_1B \parallel OO_1$ (рис. 317), следовательно, BB_1 перпендикулярно плоскости основания цилиндра, а значит, $BB_1 \perp CB$, т. е. CB — проекция CB_1 и $\angle B_1CB=\beta$.

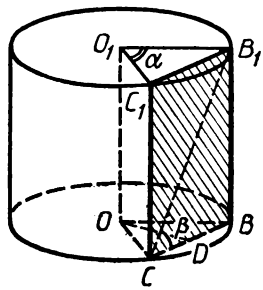


Рис. 317

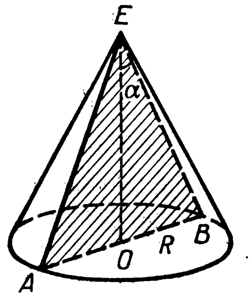


Рис. 318

2. Из прямоугольного треугольника CB_1B находим $H=BB_1=$ $=CB_1 \sin\beta = a\sin\beta$ и $CB=a\cos\beta$.

3. Проведем $OD\perp CB$. Рассмотрим равнобедренный треугольник COB $(OC=OB=R)$. По условию $\smile CB=\alpha$, следовательно, и $\angle COB=\alpha$.

4. Из прямоугольного треугольника COD найдем:

$$R=OC=\frac{CD}{\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{a\cos\beta}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

5. Площадь основания цилиндра

$$S=\pi R^2=\frac{\pi a^2\cos^2\beta}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

6. Объем цилиндра

$$V=SH=\frac{\pi a^3\sin\beta\cos^2\beta}{4\sin^2\frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 3. Угол при вершине осевого сечения конуса равен 2α, а сумма длин его высоты и образующей равна k. Найдите объем конуса.

Решение. 1. По условию $\angle AEB=2\alpha$, $EO+EB=k$ (рис. 318), тогда $H=EO$, $R=OA$, $l=EB$.

2. Из прямоугольного треугольника OBE имеем $H=EO=$ $=l\cos\alpha$, $R=OB=l\sin\alpha$.

3. Так как $H+l=k$, то $l\cos\alpha+l=k$, откуда $l=\frac{k}{1+\cos\alpha}=$ $=\frac{k}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$.

4. Тогда $H=l\cos\alpha=\frac{k\cos\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}$, а $R=l\sin\alpha=\frac{k\sin\alpha}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=$ $=k\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

5. Объем конуса

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2 H=\frac{\pi k^3 \sin^2\frac{\alpha}{2}\cos\alpha}{6\cos^4\frac{\alpha}{2}}.$$

Задача 4. Усеченный конус, у которого радиусы оснований 4 и 22 см, требуется превратить в равновеликий цилиндр такой же высоты. Чему равен радиус основания этого цилиндра?

Решение. 1. Пусть H — общая высота усеченного конуса и равновеликого ему цилиндра, R_1 и R_2 — радиусы оснований усеченного конуса, R — радиус искомого цилиндра.

2. Объем цилиндра $V=\pi R^2 H$, объем усеченного конуса $V=$ $=\frac{1}{3}\pi H(R_1^2+R_2^2+R_1R_2)$.

3. По условию усеченный конус и цилиндр равновелики, тогда, приравнивая их объемы, после сокращения на πH получим значение R:

$$R^2=\frac{1}{3}(R_1^2+R_2^2+R_1R_2).$$

4. Так как $R_1=4$ см, $R_2=22$ см, то

$$R^2=\frac{1}{3}(4^2+4\cdot 22+22^2)=196,\ R=14 \text{ см}.$$

Задача 5. Сечение конуса, параллельное его основанию, проходит через центр описанного около конуса шара и делит объем конуса пополам. Найдите угол наклона образующей конуса к плоскости его основания.

Решение. 1. Рассмотрим осевое сечение данного конуса, где $\angle BAC=x$ искомый (рис. 319).

2. Пусть CK — высота конуса, O — центр описанного около конуса шара, а DE — отрезок, по которому данное сечение конуса пересекается с осевым сечением ABC.

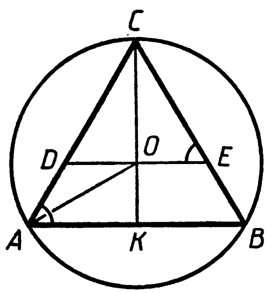


Рис. 319

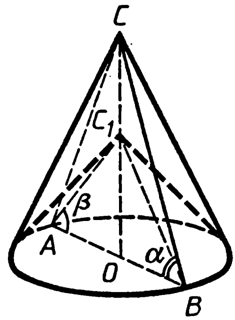


Рис. 320

3. Положим $OE=y$, объем конуса V, а объем отсеченного конуса V_1. По условию $V=2V_1$. Выразим V_1 и V через x и y.

4. Треугольник ACB равнобедренный ($AC=CB$), следовательно, $\angle A=\angle B=x$. Так как $DE \parallel AB$, то $\angle DEC=\angle B=x$.

5. Из треугольника COE найдем:

$$OC=OE \operatorname{tg} x=y \operatorname{tg} x.$$

6. Из прямоугольного треугольника AOK найдем:

$$AK=AO \sin AOK=AO \sin(180°-2x)=AO \sin 2x=OC \sin 2x=$$
$$=y \operatorname{tg} x \sin 2x=2y \sin^2 x.$$

7. $V_1=\frac{1}{3}\pi \cdot OE^2 \cdot OC, \quad V_1=\frac{1}{3}\pi y^3 \operatorname{tg} x; \quad V=\frac{1}{3}\pi \cdot AK^2 \cdot CK,$

$V=\frac{8}{3}\pi y^3 \sin^6 x \operatorname{tg} x.$

8. Подставляя значения V и V_1 в равенство $V=2V_1$, получим:

$$\frac{8}{3}\pi y^3 \sin^6 x \operatorname{tg} x=\frac{2}{3}\pi y^3 \operatorname{tg} x, \text{ т. е.}$$
$$4 \sin^6 x=1, \ \sin x=\frac{1}{\sqrt[3]{2}},$$
$$x=\arcsin \frac{1}{\sqrt[3]{2}}.$$

Задача 6. Два конуса имеют общее основание, причем один из них находится внутри другого. Образующие этих конусов составляют с плоскостью основания углы α и β ($\alpha>\beta$). Найдите объем тела, заключенного между боковыми поверхностями этих конусов, если известно, что сумма высот обоих конусов равна A (рис. 320).

Решение. 1. По условию $\angle CAO=\angle CBO=\alpha$, $\angle C_1AO=\beta$.

2. Если обозначить высоты конусов $CO=x$, а $C_1O=y$, то $x+y=A$.

3. Объем тела, заключенного между боковыми поверхностями конусов, найдем по формуле

$$V=V_{CAB}-V_{C_1AB}=\frac{1}{3}\pi R^2 x-\frac{1}{3}\pi R^2 y=\frac{1}{3}\pi R^2 (x-y),$$

где R — радиус основания.

4. Из прямоугольного треугольника CAO находим $x=CO=$ $=R \operatorname{tg} \alpha$.

5. Из прямоугольного треугольника C_1AO находим $y=C_1O=$ $=R \operatorname{tg} \beta$.

6. По условию $x+y=A$, т. е. $R \operatorname{tg} \alpha+R \operatorname{tg} \beta=A$, откуда

$$R=\frac{A}{\operatorname{tg} \alpha+\operatorname{tg} \beta}=\frac{A \cos \alpha \cos \beta}{\sin(\alpha+\beta)}.$$

7. Из пунктов 4 и 5 находим $x-y=R(\operatorname{tg} \alpha-\operatorname{tg} \beta)$.

8. Найдем объем:

$$V=\frac{1}{3}\pi R^2(x-y)=\frac{1}{3}\pi R^3(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta),$$

$$V=\frac{\pi A^3\cos^2\alpha\cos^2\beta\sin(\alpha-\beta)}{3\sin^3(\alpha+\beta)}.$$

Задача 7. Около шара радиуса R описан усеченный конус, площадь одного из оснований которого вдвое больше площади другого. Найдите объем усеченного конуса.

Решение. 1. Пусть R_1 и r — радиусы оснований конуса, отношение их площадей 2:1, следовательно,

$$\frac{R_1^2}{r^2}=2,\ R_1=r\sqrt{2}.$$

2. Образующая усеченного конуса (используя свойство сторон описанного четырехугольника, что $2R_1+2r=2l$) равна $l=R_1+r=r(\sqrt{2}+1)$. Высота конуса $H=2R$. Проекция образующей на основание конуса равна $R_1-r=r(\sqrt{2}-1)$. Следовательно, $(r(\sqrt{2}+1))^2=4R^2+(r(\sqrt{2}-1))^2$, откуда $r^2=\frac{R^2\sqrt{2}}{2}$.

3. Искомый объем усеченного конуса $V=\frac{\pi R^3}{3}(3\sqrt{2}+2)$.

Задача 8. Ромб со стороной a и острым углом α вращается около оси, проходящей через вершину острого угла перпендикулярно его стороне. Найдите объем полученного тела вращения (рис. 321).

Решение. 1. Объем тела равен объему усеченного конуса ABB_1A_1 без объема полного конуса DCD_1, т. е.

$$V=\frac{1}{3}\pi OC\cdot(AO^2+AO\cdot BC+BC^2)-\frac{1}{3}\pi OD^2\cdot OC=$$
$$=\frac{1}{3}\pi OC(AO^2+AO\cdot BC+BC^2-OD^2).$$

2. Из прямоугольного треугольника OCD найдем $OC=a\sin\alpha$, $OD=a\cos\alpha$, тогда $AO=a+a\cos\alpha=a(1+\cos\alpha)$.

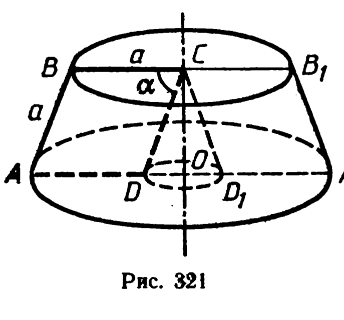


Рис. 321

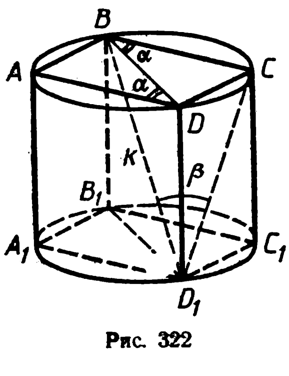


Рис. 322

3. В результате подстановки и упрощений получаем:

$$V=2\pi a^3 \sin\alpha \cos^2\frac{\alpha}{2}.$$

Задача 9. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого равна k и образует с меньшей боковой гранью угол β. Найдите объем цилиндра, если известно, что диагональ основания параллелепипеда составляет с большей стороной основания угол α.

Решение. 1. По условию диагональ параллелепипеда $BD_1=k$, $AB=DC$ — меньшая сторона основания, $AD=BC$ — бо́льшая сторона, $\angle ADB=\alpha$ (рис. 322).

2. Так как параллелепипед прямоугольный, то BC перпендикулярна к грани DCC_1D_1, D_1C — проекция диагонали BD_1 на эту грань, и, следовательно, $\angle BD_1C=\beta$.

3. Из прямоугольного треугольника BD_1C ($\angle C=90°$) находим $BC=k\sin\beta$.

4. Из прямоугольного треугольника ABD ($\angle A=90°$) находим $AB=AD \operatorname{tg}\alpha=k\sin\beta \operatorname{tg}\alpha$, а $BD=2R=\frac{AD}{\cos\alpha}=\frac{k\sin\beta}{\cos\alpha}$, откуда $R=\frac{k\sin\beta}{2\cos\alpha}$.

5. Высоту цилиндра H найдем из прямоугольного треугольника BDD_1 ($\angle D=90°$, так как D_1D перпендикулярна плоскости $ABCD$):

$$H=DD_1=\sqrt{BD_1^2-BD^2}=\sqrt{k^2-\frac{k^2\sin^2\beta}{\cos^2\alpha}}=$$

$$=\frac{k}{\cos\alpha}\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}=\frac{k}{\cos\alpha}\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta-\alpha)}.$$

6. Объем цилиндра

$$V=\pi R^2 H=\frac{\pi k^3\sin^2\beta\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta-\alpha)}}{4\cos^3\alpha}.$$

Замечание. $\cos\alpha=\frac{BC}{BD}$, $\sin\beta=\cos(90°-\beta)=\frac{BC}{BD_1}$, но $BD<BD_1$, поэтому $\cos\alpha>\cos(90°-\beta)$, т. е. $\alpha<90°-\beta$, или $\alpha+\beta<90°$.

Контрольные вопросы

1. Напишите формулу объема цилиндра и объясните смысл входящих в нее букв.
2. Как изменится объем цилиндра, если его высоту и диаметр его основания увеличить в 2 раза?
3. Напишите формулы объемов конуса и усеченного конуса.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. В цилиндр вписан шар радиуса r. Найдите объем цилиндра. [$2\pi r^3$.]

2. Высота цилиндра равна диаметру его основания. Радиус основания равен 1 м. Найдите объем цилиндра. [2π м^3.]

3. Образующая конуса l составляет с плоскостью основания угол α. Найдите объем конуса. $\left[\frac{1}{6}\pi l^3 \cos\alpha \sin 2\alpha.\right]$

4. Радиус основания цилиндра равен 4 см, площадь осевого сечения 72 см^2. Найдите объем цилиндра. [144π см^3.]

5. Куча щебня имеет форму конуса с углом откоса 33°. Какой высоты должна быть куча, чтобы ее объем был равен 10 м^3? [$\approx 1{,}6$ м.]

Б. 1. Прямоугольный треугольник, катеты которого 12 и 16 см, вращается вокруг гипотенузы. Найдите объем тела вращения. [$614{,}4\pi$ см^3.]

2. Радиусы оснований усеченного конуса R и r, образующая наклонена к плоскости основания под углом 45°. Найдите его объем. $\left[\frac{1}{3}\pi (R^3 - r^3).\right]$

3. Найдите объем усеченного конуса, у которого радиусы оснований R_1 и R_2 ($R_2 < R_1$), а высота H. $\left[\frac{1}{3}\pi H (R_1^2 + R_2^2 + R_1R_2).\right]$

4. По данным радиусам R и r оснований найдите отношение объемов усеченного конуса и полного конуса. $\left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^3\right.$, если $\left. r < R.\right]$

5. В цилиндр вписана правильная треугольная призма, а в призму вписан цилиндр. Найдите отношение объемов цилиндров. [4:1.]

6. Площадь осевого сечения усеченного конуса равна разности площадей оснований, а радиусы оснований R и r. Найдите объем этого конуса. $\left[\frac{\pi^2 (R^3 - r^3)}{3}.\right]$

7. Осевым сечением конуса является равнобедренный прямоугольный треугольник, площадь которого 9 м^2. Найдите объем конуса. [9π м^3.]

8. Длина образующей конуса равна l, а длина окружности основания C. Найдите объем конуса. $\left[\frac{C^2}{12\pi}\sqrt{l^2 - \frac{C^2}{4\pi^2}}.\right]$

В. 1. Плоскость, проходящая через центр нижнего основания цилиндра под углом α к основанию, пересекает верхнее основание по хорде, равной A и стягивающей дугу β. Найдите объем цилиндра. $\left[\frac{\pi A^3 \operatorname{tg}\alpha \operatorname{ctg}\alpha}{8\sin^2\frac{\beta}{2}}.\right]$

2. Два конуса имеют концентрические основания и общую высоту H. Разность углов, которые составляют образующие с осью, равна β. Угол наклона образующей внутреннего конуса с плоскостью основания равен α. Определите объем части пространства, заключенного между поверхностями конусов. $\left[\frac{\pi H^3 \sin\beta \sin(2\alpha-\beta)}{3\sin^2(\alpha-\beta)\sin^2\alpha}.\right]$

3. В основание конуса вписан квадрат, сторона которого равна a. Через вершину конуса и сторону квадрата проведена плоскость, пересекающая боковую поверхность конуса по двум образующим, угол между которыми равен α. Найдите объем конуса. $\left[\frac{\pi a^3\sqrt{\cos\alpha}}{12\sin\frac{\alpha}{2}}.\right]$

4. Гипотенуза прямоугольного треугольного равна c, острый угол α. Треугольник вращается около прямой, которая параллельна гипотенузе, не имеет с треугольником общих точек и удалена от гипотенузы на расстояние, равное расстоянию от вершины прямого угла до гипотенузы. Найдите объем полученного тела вращения. $\left[\frac{\pi}{3}c^3\sin^2 2\alpha.\right]$

5. В правильную четырехугольную пирамиду, сторона основания которой равна a и двугранный угол при основании равен α, вписан цилиндр. Найдите объем цилиндра, зная, что его высота и радиус основания равны между собой. $\left[\frac{\pi a^3\sqrt{2}\sin^3\alpha}{32\sin^3(45^\circ+\alpha)}.\right]$

6. Цилиндрическое тело образовано из двух равных прямых круговых цилиндров с высотой H и с радиусами оснований R, пересекающихся так, что образующая одного цилиндра совпадает с осью другого. Найдите объем этого тела. $\left[\frac{1}{6}R^2H(8\pi+3\sqrt{3}).\right]$

§ 5. ОБЪЕМ ШАРА И ЕГО ЧАСТЕЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Шаровым сегментом* называется часть шара, отсекаемая от него плоскостью (рис. 323, *а, в*).

2. *Шаровым слоем* называется часть шара, расположенная между двумя параллельными плоскостями, пересекающими шар (рис. 323, *б*).

3. *Шаровым сектором* называется тело, которое получается из шарового сегмента и конуса (рис. 324).

4. *Объем шара* определяется формулой $V=\frac{4}{3}\pi R^3$.

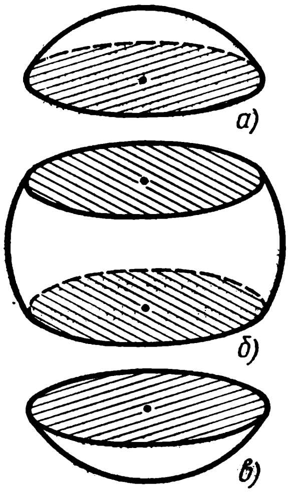


Рис. 323

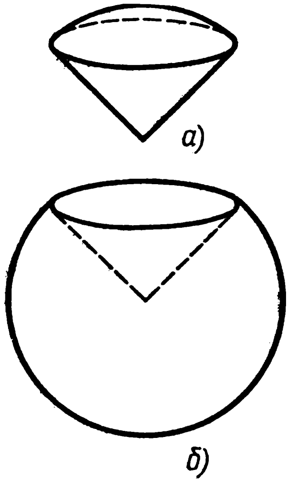


Рис. 324

5. *Объем шарового сегмента* определяется формулой

$$V=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right),$$

где H — высота шарового сегмента.

6. *Объем шарового сектора* определяется формулой

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2 H,$$

где H — высота соответствующего шарового сегмента.

7. Объемы шаров относятся как кубы радиусов.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Чему равен объем шарового сектора, если радиус окружности его основания равен 60 см, а радиус шара равен 75 см?

Решение. 1. Под основанием сектора в задаче понимается основание соответствующего сектору сегмента. Пусть R — радиус шара, r — радиус основания сегмента.

2. Наша задача сводится к отысканию высоты этого сегмента: $H=PO_1$ (рис. 325). OP — радиус шара, перпендикулярный основанию сегмента.

3. Из прямоугольного треугольника OO_1M ($\angle MO_1O=90°$) найдем:

$$OO_1=\sqrt{OM^2-O_1M^2}=\sqrt{R^2-r^2}=\sqrt{75^2-60^2}=45,$$

поэтому $H=PO_1=OP-OO_1=R-OO_1=75-45=30.$

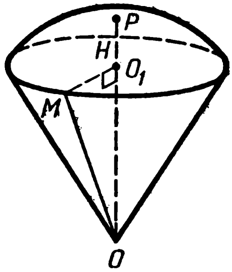


Рис. 325

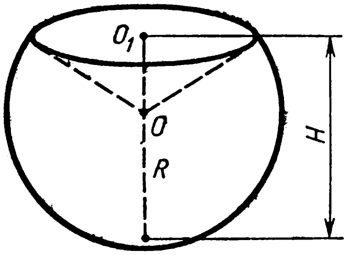


Рис. 326

4. Объем шарового сектора

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2 H=\frac{2}{3}\pi 75^2\cdot 30=112\,500\pi \text{ см}^3.$$

5. Примечание. Поставленная задача имеет два решения:

1) Шаровой сектор, который мы рассматривали, называется выпуклым, и его высота равна $R-OO_1$.

2) Шаровой сектор, высота которого равна $R+OO_1$, называется невыпуклым (рис. 326). Найдем его объем.

6. Рассмотрим *второй случай*, где высота сектора $H=R+$ $+OO_1=120$, так что полученный объем будет в 4 раза больше, чем вычисленный: $V=\pi 45\cdot 10^4$ см^3.

7. Таким образом, искомый объем равен либо $112\,500\pi$ см^3, либо $450\,000\pi$ см^3.

Задача 2. В шаре радиуса R выделен шаровой сектор с углом α в осевом сечении. Найдите его объем.

Решение. 1. Объем сектора

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2 H.$$

2. Так как R — известная величина, то остается нам найти $H=AO_1$ (рис. 327).

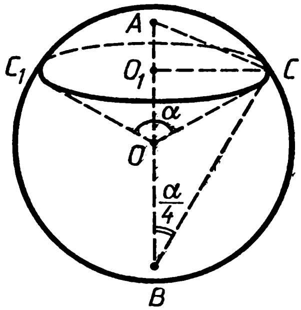


Рис. 327

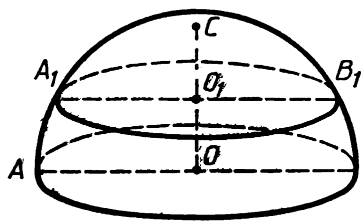


Рис. 328

3. Из условия $\angle C_1OC=\alpha$, значит, $\angle AOC=\frac{\alpha}{2}$ и соответственно $\smile AC=\frac{\alpha}{2}$, тогда $\angle ACO_1=\angle ABC=\frac{\alpha}{4}$.

4. Из прямоугольного треугольника AO_1C получаем $AO_1=AC\sin\frac{\alpha}{4}$.

5. Из прямоугольного треугольника ABC находим $AC=AB\sin\frac{\alpha}{4}$, или $AC=2R\sin\frac{\alpha}{4}$, следовательно, $H=2R\sin^2\frac{\alpha}{4}$.

6. Таким образом,

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2\cdot 2R\sin^2\frac{\alpha}{4}=\frac{4}{3}\pi R^3\sin^2\frac{\alpha}{4}.$$

Задача 3. В полусфере радиуса R через середину высоты проведено сечение, параллельное основанию полушара. Найдите объем полученного шарового пояса.

Решение. 1. $A_1O_1B_1 \parallel AOB$, $AO=OC=R$, $OO_1=O_1C=\frac{R}{2}$ (рис. 328).

2. Объем шарового слоя найдем из равенства

$$V=V_{\text{полушара}}-V_{\text{сегм.}}.$$

3. $V_{\text{полушара}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{2}{3}\pi R^3$.

4. У сегмента $H=\frac{R}{2}$, $V_{\text{сегм.}}=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)=\frac{5\pi R^3}{24}$.

5. Следовательно,

$$V=\frac{2}{3}\pi R^3-\frac{5\pi R^3}{24}=\frac{11\pi R^3}{24}.$$

Задача 4. Круговой сектор радиуса R с дугой 120° вращается около прямой, проходящей через центр и составляющей с сектором угол 30°. Найдите объем тела вращения (рис. 329).

Решение. 1. Дано: $AO=R$, $\smile AB=120°$, $\angle BOD=30°$.

2. $\smile AB=120°$, $\angle AOB=120°$, тогда $\angle AOO_1=180°-(120°+30°)=30°$. Следовательно, объемы двух полученных секторов будут равны. Тогда

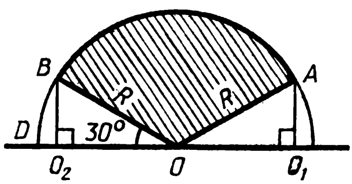


Рис. 329

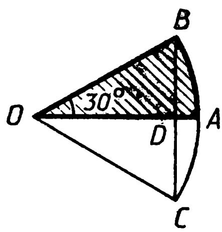


Рис. 330

$$V_{\text{т. в}}=V_{\text{шара}}-2V_{\text{сект.}}.$$

3. Из прямоугольного треугольника OO_2B найдем:

$$OO_2=R\cos 30^\circ=\frac{R\sqrt{3}}{2}.$$

4. $V_{\text{т. в}}=\frac{4}{3}\pi R^3-2\cdot\frac{2}{3}\pi R^2(R-OO_2)=\frac{4}{3}\pi R^2(R-R+OO_2)=$ $=\frac{4}{3}\pi R^2\frac{R\sqrt{3}}{2}$, $V_{\text{т. в}}=\frac{2\pi R^3\sqrt{3}}{3}$.

Задача 5. Круговой сектор с углом 30° и радиусом R вращается около одного из боковых радиусов. Найдите объем полученного тела (рис. 330).

Решение. 1. По условию $\angle BOA=30^\circ$, значит, $\angle BOC=60^\circ$, $OB=OC=R$, поэтому треугольник BOC правильный, причем его сторона BC отсекает от радиуса OA отрезок DA, равный высоте H соответствующего шаровому сектору сегмента.

2. $H=AD=AO-OD=R-R\frac{\sqrt{3}}{2}=R\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. Объем сектора

$$V=\frac{2}{3}\pi R^2H=\frac{1}{3}\pi R^3(2-\sqrt{3}).$$

Задача 6. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит диаметр на части 3 и 9 см. На какие части делится объем шара?

Решение. 1. Радиус шара $\frac{3+9}{2}=6$.

2. Высота меньшего сегмента $H=3$, объем его

$$V_1=\pi H^2\left(R-\frac{H}{3}\right)=45\pi\ \text{см}^3.$$

3. Объем всего шара $V_3=\frac{4}{3}\pi R^3=288\pi\ \text{см}^3$.

4. Объем второго сегмента

$$V_2=V_3-V_1=288\pi-45\pi=243\pi\ \text{см}^3.$$

Задача 7. Из деревянного равностороннего цилиндра выточен наибольший возможный шар. Сколько процентов материала сточено?

Решение. 1. Из условия вытекает, что высота цилиндра $H=2R$, подставим значение H в формулу объема цилиндра:

$$V_{\text{ц}}=\pi R^2H=2\pi R^3.$$

2. Объем шара $V_{\text{ш}}=\frac{4}{3}\pi R^3$.

3. Найдем, сколько сточено материала:

$$V_{\text{ц}}-V_{\text{ш}}=2\pi R^3-\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{2}{3}\pi R^3.$$

4. Найдем, сколько процентов составляет сточенный материал:

$$\frac{\frac{2}{3}\pi R^3\cdot 100\%}{2\pi R^3}=\frac{100\%}{3}=33\frac{1}{3}\%.$$

Контрольные вопросы

1. Напишите формулу объема шара.
2. Как относятся объемы шаров?
3. Как изменится объем шара, если радиус увеличить в 2 раза?
4. Напишите формулу объема шарового сегмента.
5. Как найти объем шарового слоя?
6. Напишите формулу объема шарового сектора.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. **1.** Внешний диаметр полого шара 18 см, толщина стенок 3 см. Найдите объем материала, из которого изготовлен шар. [684π см^3.]

2. Шар радиуса R пересечен плоскостью, отстоящей от его центра на расстоянии $\frac{R}{3}$. Какую часть всего объема шара составляет объем меньшего из получившихся шаровых сегментов? $\left[\frac{7}{27}.\right]$

3. Диаметр свинцового шара равен 30 см. Сколько шариков, диаметр которых 3 см, можно сделать из этого свинца? [1000.]

4. Радиусы трех шаров 3, 4, 5 см. Найдите радиус шара, объем которого равен сумме их объемов. [6 см.]

5. Из куба выточен наибольший шар. Сколько процентов материала сточено? [$\approx 47,6\%$.]

6. Радиус шарового сектора R, угол в осевом сечении 120°. Найдите объем. $\left[\frac{\pi R^3}{3}.\right]$

Б. **1.** Какую часть объема шара составляет объем шарового сегмента, у которого высота равна 0,1 диаметра шара? [2,8%.]

2. Докажите, что если радиусы трех шаров относятся как 1:2:3, то объем большего шара в 3 раза больше суммы объемов меньших шаров.

3. Высота шарового сегмента составляет 0,4 радиуса шара. Какую часть составляет объем этого сегмента от объема цилиндра, имеющего те же основания и высоту? $\left[\frac{13}{24}.\right]$

4. Два равных шара расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Как относится объем общей части шаров к объему целого шара? [5:16.]

5. Диаметр шара, равный 30 см, служит осью цилиндра, у которого радиус основания равен 12 см. Найдите объем части шара, заключенной внутри цилиндра. [3528π см^3.]

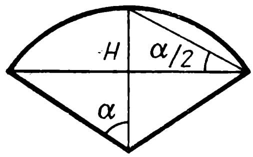


Рис. 331

6. Какая фигура имеет больший объем: шар радиуса 1 дм или правильная треугольная призма, каждое ребро которой равно 2 дм? [Объем шара больше.]

7. Сечение шара плоскостью, перпендикулярной его радиусу, делит радиус пополам. Найдите отношение объемов частей шара. [5:27.]

8. Сечение шара плоскостью, перпендикулярной его диаметру, делит диаметр в отношении 1:2. Найдите отношение объемов частей шара. [20:7.]

В. 1. Высота конуса равна A, наибольший угол между его образующими α. Найдите объем шарового сектора, полученного дополнением данного конуса соответствующим шаровым сегментом. $\left[\dfrac{\frac{4}{3}\pi A^3 \sin^2\frac{\alpha}{4}}{\cos^3\frac{\alpha}{2}}.\right]$

2. Дуга сегмента в осевом сечении шарового сектора равна 2α, высота сегмента равна H (указание к решению — рисунок 331). Найдите объем шарового сектора. $\left[\dfrac{\pi H^3}{6\sin^4\frac{\alpha}{2}}.\right]$

3. Объем шарового сектора V, а центральный угол в его осевом сечении 2α. Найдите высоту сегмента. $\left[\sin\frac{\alpha}{2}\sqrt[3]{\dfrac{6V\sin\frac{\alpha}{2}}{\pi}}.\right]$

4. В шаровой сегмент радиуса R вписан конус, имеющий общую высоту и общее основание с сегментом. Зная, что наибольший угол между образующими конуса равен 2α, найдите, на сколько объем конуса меньше объема сегмента. $\left[\frac{4}{3}\pi R^3\cos^4\alpha.\right]$

5. Найдите объем шарового сегмента, зная, что дуга его осевого сечения α, радиус шара, от которого отделен сегмент, равен R. $\left[\frac{4}{3}\pi R^3\sin^4\frac{\alpha}{4}\left(2+\cos\frac{\alpha}{2}\right).\right]$

6. Шар вписан в шаровой сектор, имеющий в осевом сечении угол α. Вычислите отношение объема шарового сектора к объему шара при $0° < \alpha < 180°$. $\left[\dfrac{\left(1+\sin\frac{\alpha}{2}\right)^3 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}}{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}.\right]$

ГЛАВА XVII

§ 1. ПОВЕРХНОСТЬ ЦИЛИНДРА
§ 2. ПОВЕРХНОСТЬ ШАРА (СФЕРЫ) И ЕГО ЧАСТЕЙ
§ 3. ПОВЕРХНОСТЬ КОНУСА

§ 1. ПОВЕРХНОСТЬ ЦИЛИНДРА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. Площадь боковой поверхности цилиндра равна длине окружности основания, умноженной на высоту, т. е.

$$S=2\pi RH,$$

где R — радиус цилиндра, а H — высота.

2. Чтобы найти площадь полной поверхности цилиндра, достаточно прибавить к площади боковой поверхности сумму площадей двух оснований, поэтому площадь полной поверхности цилиндра будет равна:

$$S_п=2\pi R(R+H).$$

3. *Цилиндр* называют *вписанным в шар,* если окружности оснований лежат на поверхности шара (рис. 332). Если цилиндр вписан в шар, то центр шара лежит на оси цилиндра.

4. *Шар* называют *вписанным в цилиндр*, если его поверхность касается боковой поверхности и оснований цилиндра (рис. 333). Центр шара, вписанного в цилиндр, лежит на оси цилиндра.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. В цилиндре площадь основания равна A, а площадь осевого сечения M (рис. 334). Чему равна площадь полной поверхности цилиндра?

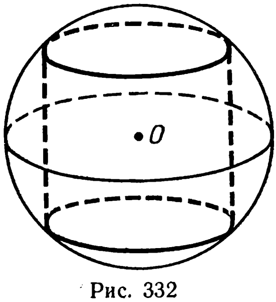


Рис. 332

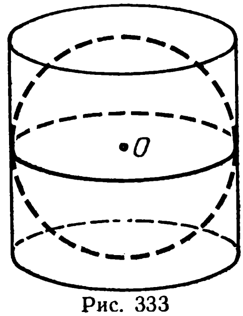


Рис. 333

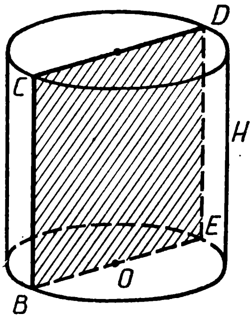


Рис. 334

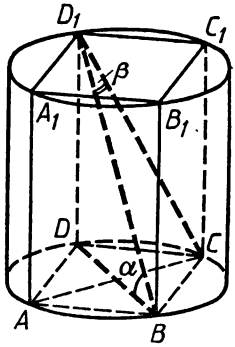


Рис. 335

Решение. 1. Искомую площадь полной поверхности цилиндра можно вычислить по формуле

$$S_{\text{цил}}=2S_{\text{осн}}+S_{\text{бок}}=2\pi R^2+2\pi RH. \qquad (1)$$

2. Таким образом, задача будет решена, если найдем R и H.

3. $S_{\text{осн.}}=\pi R^2=A$, $S_{\text{сеч.}}=BE\cdot ED=2RH=M$, тогда $S_{\text{цил.}}=$ $=2\pi R^2+\pi 2RH=2A+\pi M$ — искомая площадь поверхности.

Задача 2. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед, бо́льшая сторона основания которого равна a. Диагональ параллелепипеда составляет с его большей боковой гранью угол β, а с плоскостью основания угол α. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра.

Решение. 1. По условию $AB=DC=a$, BD_1 — диагональ параллелепипеда, BD — проекция диагонали на основание, $\angle D_1BD=\alpha$ (рис. 335).

2. Так как параллелепипед прямоугольный, то BC перпендикулярна к большей боковой грани DD_1C_1C, D_1C — проекция диагонали на эту грань и $\angle BD_1C=\beta$.

3. $S_{\text{б. п}}=2\pi RH$, где R — радиус основания и H — высота цилиндра.

4. $BD=AC=2R$.

5. Из прямоугольного треугольника ACB ($\angle B=90°$) находим $BC=\sqrt{4R^2-a^2}$.

6. Из прямоугольного треугольника BD_1C ($\angle C=90°$) находим $BD_1=\frac{BC}{\sin\beta}=\frac{\sqrt{4R^2-a^2}}{\sin\beta}$.

7. Из прямоугольного треугольника BDD_1 ($\angle D=90°$) находим $BD=2R=BD_1\cos\alpha=\frac{\cos\alpha\sqrt{4R^2-a^2}}{\sin\beta}$, откуда

$$4R^2\sin^2\beta=4R^2\cos^2\alpha-a^2\cos^2\alpha \text{ или}$$

$$R=\frac{a\cos\alpha}{2\sqrt{\cos^2\alpha-\sin^2\beta}}=\frac{a\cos\alpha}{2\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta-\alpha)}}.$$

8. Из прямоугольного треугольника BDD_1 находим:

$$H=2R\operatorname{tg}\alpha=\frac{a\sin\alpha}{\sqrt{\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta-\alpha)}}.$$

9. Площадь боковой поверхности цилиндра

$$S_{б.\,п}=2\pi RH=\frac{2\pi a^2\sin\alpha\cos\alpha}{2\cos(\alpha+\beta)\cos(\beta-\alpha)},$$

$$S_{б.\,п}=\frac{\pi a^2\sin 2\alpha}{2\cos(\beta+\alpha)\cos(\beta-\alpha)}.$$

Контрольные вопросы

1. Какой вид имеет развертка боковой поверхности цилиндра?
2. Центр шара лежит на оси цилиндра. Какую фигуру образуют общие точки шаровой и цилиндрической поверхностей?
3. Можно ли описать шар вокруг цилиндра?
4. Во всякий ли цилиндр можно вписать шар? Какими свойствами должен обладать цилиндр, в который можно вписать шар?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. **1.** Чему равно отношение площадей боковой поверхности и осевого сечения цилиндра? [π.]

2. Радиус основания цилиндра 2 м, высота 3 м. Найдите диагональ осевого сечения. [5 м.]

3. Высота цилиндра на 10 см больше радиуса основания, а площадь полной поверхности равна 144π см^2. Найдите радиус основания и высоту. [4 см и 14 см.]

4. Полуцилиндрический свод подвала имеет 6 м в длину и 5,8 м в диаметре. Найдите площадь полной поверхности подвала. [≈ 116 м^2.]

5. Стороны прямоугольника a и b. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра, полученного от вращения этого прямоугольника вокруг стороны, равной a. [$2\pi ab$.]

6. Радиус основания цилиндра равен R, площадь боковой поверхности равна сумме площадей оснований. Найдите высоту. [R.]

7. Какой высоты должен быть цилиндр, чтобы площадь его боковой поверхности была в 3 раза больше площади основания? $\left[H=\frac{3}{2}R.\right]$

8. Во сколько раз площадь боковой поверхности цилиндра больше площади его осевого сечения? [π.]

9. Вычислите площадь боковой поверхности цилиндра, вписанного в куб с ребром a. [πa^2.]

Б. **1.** Осевое сечение цилиндра — квадрат. Найдите угол в его развертке между образующей и диагональю развертки. [$\operatorname{arctg} \pi$.]

2. Боковая поверхность цилиндра развертывается в квадрат, диагональ которого $\sqrt{2}$. Найдите его объем. $\left[\frac{1}{4\pi}.\right]$

3. Цилиндрическая дымовая труба с диаметром 65 см имеет высоту 18 м. Сколько квадратных метров жести нужно для ее изготовления, если на заклепку уходит 10% всего требующегося количества жести? [≈ 40 м^2.]

4. Диагональ развертки боковой поверхности цилиндра образует угол α с основанием развертки, длина диагонали d. Найдите площадь полной поверхности цилиндра и вычислите угол α, при котором площадь полной поверхности цилиндра имеет наибольшее значение. $\left[\frac{d^2 \cos\alpha\,(2\pi \sin\alpha + \cos\alpha)}{2\pi},\ \approx 40°30'.\right]$

5. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, описанного около куба с ребром a (вершины куба находятся на окружностях оснований цилиндра). [$\pi a^2(\sqrt{2}+1)$.]

6. В цилиндр вписан прямоугольный параллелепипед. Найдите отношение площади боковой поверхности цилиндра к площади диагонального сечения параллелепипеда. [π.]

В. **1.** Плоскость, проходящая через центр нижнего основания цилиндра под углом α к основанию, пересекает верхнее основание по хорде, равной k и стягивающей дугу β. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра. $\left[\frac{\pi k^2 \operatorname{ctg}\frac{\beta}{2} \operatorname{tg}\alpha}{2\sin\frac{\beta}{2}}.\right]$

2. Через образующую цилиндра проведена плоскость под углом α к плоскости его осевого сечения, содержащего ту же образующую. Диагональ прямоугольника, полученного в сечении, образует угол β с плоскостью основания и равна k. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра. $\left[\frac{\pi k^2 \sin 2\beta}{2\cos\alpha}.\right]$

3. Два цилиндра, высоты которых a и b, имеют равные развертки боковых поверхностей. Найдите отношение $\frac{a}{b}$, при котором площадь полной поверхности первого цилиндра вдвое больше площади полной поверхности второго. [$0{,}5(\sqrt{\pi^2+2}-\pi)$.]

4. Около правильного октаэдра описан цилиндр. Две вершины октаэдра лежат в центрах оснований цилиндра, а остальные четыре — на его боковой поверхности. Ребро октаэдра 10 см. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра. [200π см^2.]

5. Найдите площадь полной поверхности цилиндра, осевое сечение которого есть квадрат и площадь боковой поверхности которого равна S [$1{,}5S$.]

§ 2. ПОВЕРХНОСТЬ ШАРА (СФЕРЫ) И ЕГО ЧАСТЕЙ

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Площадь поверхности шара* (сфера) находится по формуле

$$S=4\pi R^2,$$

где R — радиус шара.

2. *Усеченный конус* называется *вписанным в шар*, если окружности его оснований лежат на поверхности шара (рис. 336).

3. *Конус* называется *вписанным в шар*, если его вершина и окружность основания лежат на поверхности шара (рис. 337).

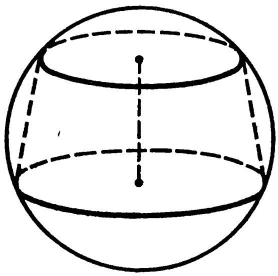


Рис. 336

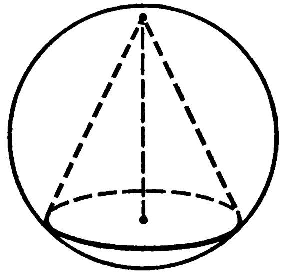


Рис. 337

4. Если конус или усеченный конус вписан в шар, то центр шара лежит на оси конуса или усеченного конуса.

5. *Шар* называется *вписанным в конус* (или *усеченный конус*), если его поверхность касается боковой поверхности и оснований названных тел (рис. 338, 339).

6. Центр шара, вписанного в конус или усеченный конус, лежит на оси этого тела.

7. *Площадь поверхности сферического сегмента* равна:

$$S=2\pi RH,$$

где R — радиус сферы, а H — высота сегмента.

8. Площади сфер относятся как квадраты их радиусов.

9. Площадь сферического пояса равна произведению длины

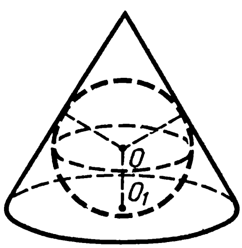


Рис. 338

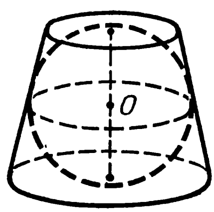


Рис. 339

окружности большего круга на высоту пояса:

$$S=2\pi RH,$$

где R — радиус шара, а H — высота пояса.

10. Если шар описан около параллелепипеда, то все его грани должны быть прямоугольниками, т. е. параллелепипед должен быть прямоугольным, а центр этого шара должен лежать в точке пересечения его диагоналей.

11. Если шар описан около призмы, то эта призма прямая, а ее основаниями служат такие многоугольники, около которых можно описать окружность.

12. Если шар описан около правильной пирамиды, то его центр лежит на перпендикуляре к плоскости основания, проведенном через центр окружности, описанной около основания.

13. *Шар* называется *вписанным в многогранник,* если его поверхность касается всех граней многогранника.

14. Радиусы шара, проведенные в точки касания, перпендикулярны соответствующим граням многогранника.

15. *Центр шара, вписанного в многогранник,* равноудален от всех его граней.

16. Если шар вписан в правильную четырехугольную призму, то эта призма есть куб.

17. Центр шара, вписанного в правильную пирамиду, лежит на высоте в точке пересечения высоты с биссектрисой угла, образованного апофемой пирамиды и ее проекцией на плоскость основания.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. Высота сферического пояса равна 7 см, а радиусы оснований 16 и 33 см. Найдите площадь поверхности этого пояса.

Решение. 1. По условию задачи $HA=33$ см, $H_1A_1=16$ см, $H_1H=7$ см (рис. 340).

2. Площадь шарового пояса находится по формуле $S=2\pi RH$, значит, необходимо найти R.

3. Пусть радиус сферы $OA=R$.

4. Из прямоугольного треугольника OAH находим $OH=\sqrt{R^2-33^2}$.

5. Из прямоугольного треугольника A_1H_1O находим $H_1O=\sqrt{R^2-16^2}$.

6. Так как $H_1H=H_1O-OH=7$, то можно составить уравнение $\sqrt{R^2-16^2}-\sqrt{R^2-33^2}=7$.

Решив данное иррациональное уравнение, получим, что $R=65$ см.

7. Площадь шарового пояса

$$S=2\pi RH=2\pi\cdot 65\cdot 7=910\pi \text{ см}^2.$$

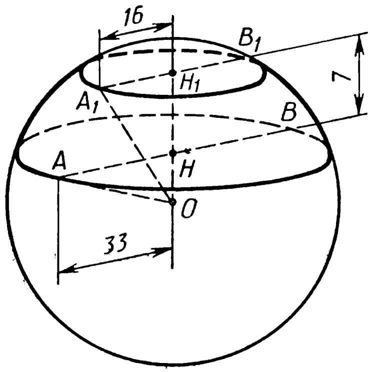


Рис. 340

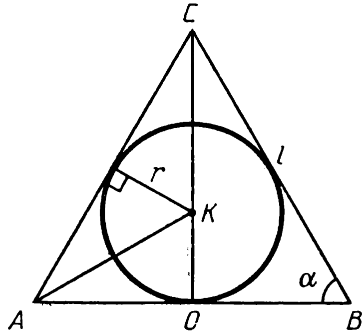


Рис. 341

Задача 2. Найдите площадь поверхности шара, вписанного в конус, образующая которого равна l и составляет с основанием угол α.

Решение. 1. Рассмотрим осевое сечение конуса ACB, где $AC=CB=l$, $\angle CAB=\angle ABC=\alpha$ (рис. 341).

2. Центр K вписанного шара — точка пересечения высоты OC конуса и биссектрисы AK угла OAC.

3. Из прямоугольного треугольника AKO находим

$$OK=OA \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=r. \qquad (\mathrm{I})$$

4. Из прямоугольного треугольника AOC находим $OA=$ $=AC\cos\alpha=l\cos\alpha$.

Подставим значение OA в (I), получим $r=l\cos\alpha \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

5. Площадь шара $S=4\pi r^2=4\pi l^2\cos^2\alpha \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}$.

Задача 3. Радиус основания шарового сегмента равен r, дуга в осевом сечении 60°. Найдите площадь его полной поверхности.

Решение. 1. По условию задачи $HA=r$, $\smile ABC=60°$ (рис. 342).

2. Площадь полной поверхности сегмента

$$S=S_{\text{осн.}}+S_{\text{сегм.}}, \qquad (1)$$

где

$$S_{\text{осн.}}=\pi r^2, \qquad (2)$$

$$S_{\text{сегм.}}=2\pi R\cdot BH \qquad (3)$$

(R — радиус шара, BH — высота сегмента).

3. Из прямоугольного треугольника AOH находим:

$$AO=\frac{AH}{\sin 30^\circ} \text{ или } R=2r.$$

4. $\angle CAB=\frac{1}{2}\smile BC=\frac{1}{2}\cdot 30^\circ=15^\circ$.

5. Из прямоугольного треугольника ABH найдем $BH=r \operatorname{tg} 15^\circ$.

6. Равенство (3) примет вид:

$$S_{\text{сегм.}}=2\pi R\cdot BH=2\pi\cdot 2r\cdot r\cdot \operatorname{tg} 15^\circ=4r^2\pi \operatorname{tg} 15^\circ.$$

7. Равенство (1) примет вид:

$$S=S_{\text{осн.}}+S_{\text{сегм.}}=\pi r^2+4r^2\pi \operatorname{tg} 15^\circ=\pi r^2(1+4 \operatorname{tg} 15^\circ).$$

Задача 4. В шар вписан конус с высотой H. Объем конуса равен 0,25 объема шара. Найдите площадь поверхности шара.

Решение. 1. Рассмотрим осевое сечение конуса с шаром, имеем окружность, описанную около треугольника ABC. Ее центр O принадлежит высоте CO равнобедренного треугольника ACB (рис. 343).

2. Обозначим через x радиус шара, т. е. $CO_1=AO_1=x$, через y радиус основания конуса, т. е. $AO=y$.

3. По условию $V_{\text{к}}=\frac{1}{4}V_{\text{ш}}$, тогда $\frac{1}{3}\pi y^2H=\frac{1}{4}\cdot\frac{4}{3}\pi x^3$, откуда

$$y^2H=x^3. \qquad (1)$$

4. Выразим y через H и x из прямоугольного треугольника ADC. Заметим, что $BO\perp CD$, поэтому $BO^2=CO\cdot OD$, или $y^2=H(2x-H)$.

Равенство (1) примет вид:

$$H^2(2x-H)=x^3, \text{ или } x^3-2H^2x+H^3=0.$$

Полученное уравнение решим путем разложения левой части

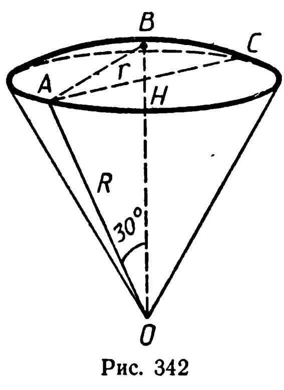


Рис. 342

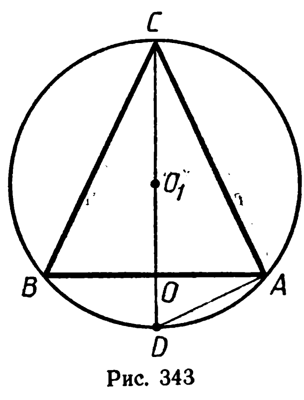


Рис. 343

на множители:

$$(x^3-H^2x)-(H^2x-H^3)=0,\ (x-H)(x^2+Hx-H^2)=0,$$

откуда $x_1=H$, $x_{2,3}=\frac{-H\pm H\sqrt{5}}{2}$. Так как $x>0$, то задача имеет два решения:

1) $S_{ш.}=4\pi x^2=4\pi H^2$;

2) $S_{ш.}=4\pi x^2=4\pi\left(\frac{H\sqrt{5}-H}{2}\right)^2=2\pi H^2(3-\sqrt{5})$.

Контрольные вопросы

1. Как относятся между собой поверхности двух шаров?
2. Напишите формулы площади сферы (поверхности шара), площади сферического сегмента, площади сферического пояса.
3. Во всякий ли конус можно вписать шар? Как определить положение центра шара, вписанного в конус?
4. Какими свойствами должен обладать усеченный конус, чтобы в него можно было вписать шар?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Площадь большего круга равна 1 м^2. Найдите площадь поверхности шара. [4 м^2.]

2. Дан полушар радиуса R. Найдите площадь его полной поверхности [$3\pi R^2$.]

3. Площадь поверхности шара равна 225π м^2. Найдите его объем. [$562{,}5\pi$ м^3.]

4. По объему шара, равному A, найдите площадь его поверхности. [$\sqrt[3]{36\pi A^2}$.]

5. Как изменятся площадь поверхности и объем шара, если радиус его увеличить в 4 раза? в 5 раз? [Увеличится в 16 раз и в 64 раза; в 25 раз и в 125 раз.]

6. Кусок металла, имевший сначала форму равностороннего цилиндра, перелит в шар. Как изменилась величина его площади поверхности? [$S_ш : S_ц = \sqrt[3]{18} : 3$.]

7. Вокруг шара описан цилиндр. Найдите отношение площадей их поверхностей и их объемов. [2:3 в обоих случаях.]

8. Радиусы оснований усеченного конуса 3 и 4 м, высота 7 м. Найдите радиус описанного около него шара. [5 м.]

Б. 1. Гипотенуза и катеты служат радиусами трех шаров. Какая существует зависимость между площадями их поверхностей? [Площадь бо́льшей поверхности равновелика сумме двух других площадей.]

2. В шаре проведены по одну сторону от центра два параллельных сечения; площади их равны 49π дм^2 и 4π м^2, а расстояние между ними 9 дм. Найдите площадь поверхности шара. [25π м^2.]

3. По радиусу шара, равному A, найдите высоту шарового слоя, одно из оснований которого — большой круг шара и площадь боковой поверхности шарового слоя равновелика сумме оснований. [$A(\sqrt{3}-1)$.]

4. Круговой сегмент с дугой в 120° и площадью k вращается вокруг своей высоты. Найдите площадь полной поверхности полученного тела. $\left[\frac{94k\pi}{4(4\pi-3\sqrt{3})}.\right]$

5. В шар радиуса k вписан равносторонний цилиндр. На какие части делят поверхность шара основания цилиндра? [$S_{\text{сегм.}}=\pi k^2(2-\sqrt{2})$, $S_{\text{пояса}}=2\pi k^2\sqrt{2}$.]

6. Высота конуса H, образующая k. Найдите радиус описанного около него шара. $\left[\frac{k^2}{2H}.\right]$

7. Во сколько раз нужно увеличить радиус сферы, чтобы увеличить площадь сферы в 10 раз? [В $\sqrt{10}$ раз]

8. Отношение площадей двух сфер равно 2. Найдите отношение диаметров этих сфер. [$\sqrt{2}$.]

9. Отношение площадей двух сфер равно $\frac{1}{3}$. Найдите отношение длин больших окружностей этих сфер. [$1:\sqrt{3}$.]

В. 1. Радиус шара равен 15 м. Найдите часть его поверхности, видную из точки, удаленной от центра на 25 м. [180π м^2.]

2. На каком расстоянии от центра шара радиуса k должна быть светящаяся точка, чтобы она освещала $\frac{1}{3}$ его поверхности? [$3k$.]

3. Радиус сферического сектора k, дуга в осевом сечении 60°. Найдите радиус вписанной в него сферы и длину окружности, по которой они касаются. $\left[\frac{k}{3}, \frac{\pi k\sqrt{3}}{3}.\right]$

4. Площадь поверхности шара, вписанного в данный конус, равновелика площади его основания. Какую часть объема конуса составляет объем шара? $\left[\frac{3}{8}.\right]$

§ 3. ПОВЕРХНОСТЬ КОНУСА

СПРАВОЧНЫЙ МАТЕРИАЛ

1. *Площадь боковой поверхности конуса* равна половине произведения длины окружности основания конуса на его образующую, т. е.

$$S=\pi Rl,$$

где R — радиус основания конуса, l — образующая конуса.

2. Чтобы найти площадь полной поверхности конуса, достаточно к площади его боковой поверхности прибавить площадь основания, т. е.

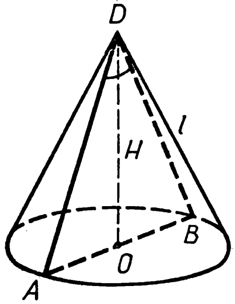


Рис. 344

$$S=\pi Rl+\pi R^2=\pi R\,(R+l).$$

3. *Площадь боковой поверхности усеченного конуса* равна:

$$S=\pi l\,(R_1+R_2),$$

где l — образующая, R_1 и R_2 — радиусы оснований.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ

Задача 1. В конусе сумма высоты и образующей равна k, наибольший угол между образующими равен α. Найдите площадь полной поверхности конуса.

Решение. 1. По условию задачи $BD+OD=k$, $\angle ADB=\alpha$ (рис. 344).

2. $S=\pi R\,(l+R)$. (1)

3. $\angle ADO=\frac{\alpha}{2}$, так как высота, проведенная из вершины равнобедренного треугольника, есть биссектриса угла при вершине.

4. Пусть $BD=l$, $OD=H$, тогда из прямоугольного треугольника ODB находим $H=DB\cos\frac{\alpha}{2}$, или $H=l\cos\frac{\alpha}{2}$.

5. Так как $H+l=k$, то $l\cos\frac{\alpha}{2}+l=k$, или $l\left(1+\cos\frac{\alpha}{2}\right)=k$, т. е. $l=\dfrac{k}{1+\cos\frac{\alpha}{2}}=\dfrac{k}{2\cos^2\frac{\alpha}{4}}$.

6. Из того же треугольника ODB найдем R: $R=OB=$ $=DB\sin\frac{\alpha}{2}$, т. е. $R=l\sin\frac{\alpha}{2}=k\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}$.

7. Вернемся к равенству (1):

$$S=\pi R\,(R+l)=\pi k\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\left(k\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}+\frac{k}{2\cos^2\frac{\alpha}{4}}\right)=$$

$$=\pi k^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\left(\frac{\sin\frac{\alpha}{4}}{\cos\frac{\alpha}{4}}+\frac{1}{2\cos^2\frac{\alpha}{4}}\right)=\pi k^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\cdot\frac{1+\sin\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{4}}=$$

$$=\frac{\pi k^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{4}\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}{\cos^2\frac{\alpha}{4}}.$$

Задача 2. В шар радиуса R вписан конус, образующая которого составляет с плоскостью основания угол α. Найдите площадь полной поверхности конуса.

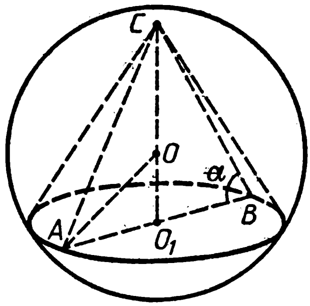


Рис. 345

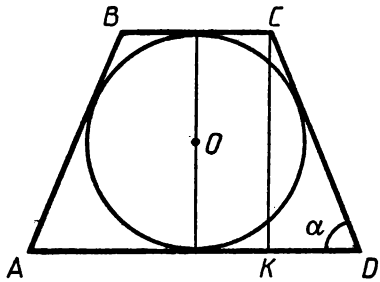


Рис. 346

Решение. 1. Центр шара лежит на оси конуса O_1C. Проводя осевое сечение данной комбинации тел, получаем треугольник ACB, вписанный в окружность большого круга шара.

2. По условию задачи $\angle CAB = \alpha$, следовательно, $\angle ACO_1 = 90^\circ - \alpha$ (рис. 345).

3. Так как треугольник AOC равнобедренный ($AO = OC = R$), то $\angle CAO = 90^\circ - \alpha$, поэтому $\angle AOO_1 = 180^\circ - 2\alpha$ (внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, несмежных с ним).

4. Из прямоугольного треугольника AO_1O находим $AO_1 = AO \sin(180^\circ - 2\alpha)$ или $AO_1 = R \sin 2\alpha$.

5. Из прямоугольного треугольника CO_1A следует, что $CA = \frac{AO_1}{\cos\alpha}$ или $CA = \frac{R\sin 2\alpha}{\cos\alpha} = 2R\sin\alpha$.

6. Находим площадь полной поверхности конуса:

$$S = \pi AO_1 (AO_1 + CA) = \pi R \sin 2\alpha (R \sin 2\alpha + 2R \sin\alpha) = 4\pi R^2 \sin 2\alpha \sin\alpha \cos^2 \frac{\alpha}{2}.$$

Задача 3. В усеченный конус вписан шар, площадь поверхности которого равна s. Образующая конуса наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса.

Решение. 1. Центр шара лежит на оси усеченного конуса, поэтому рассмотрим осевое сечение данной комбинации тел — трапецию $ABCD$ с вписанным в нее большим кругом шара (рис. 346).

2. Обозначим через r_1 и r_2 соответственно радиусы нижнего и верхнего оснований усеченного конуса и через l образующую, имеем:

$$S_{бок.} = \pi l (r_1 + r_2). \qquad (1)$$

3. Выразим через l сумму $r_1 + r_2$, не находя r_1 и r_2 отдельно.

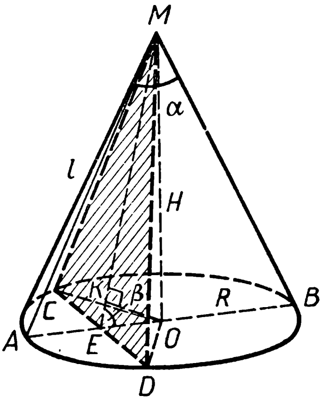


Рис. 347

В соответствии со свойством сторон описанного четырехугольника $BC+$ $+AD=AB+CD$, или $2(r_1+r_2)=2l$, откуда $r_1+r_2=l$, поэтому равенство (1) примет вид:

$$S_{\text{бок.}}=\pi l^2. \qquad (2)$$

4. Проведя $CK \perp AD$, замечаем, что $CK=2R$, где R — радиус шара.

5. Из прямоугольного треугольника CKD находим:

$$CD=\frac{CK}{\sin\alpha}, \text{ или } l=\frac{2R}{\sin\alpha}.$$

6. Таким образом, равенство (2) примет вид:

$$S_{\text{бок.}}=\pi\left(\frac{2R}{\sin\alpha}\right)^2=\frac{4\pi R^2}{\sin^2\alpha}.$$

7. Но так как по условию задачи площадь поверхности шара равна s, то

$$S_{\text{бок.}}=\frac{s}{\sin^2\alpha}.$$

Задача 4. В конусе через вершину проведено сечение под углом β к плоскости основания. Плоскость сечения удалена от центра основания конуса на расстояние a. Найдите площадь полной поверхности конуса, если наибольший угол между образующими конуса равен α.

Решение. 1. По условию $\angle AMB=\alpha$, искомое сечение MCD, $OK=a$ (рис. 347).

2. Из центра O опускаем перпендикуляр OE на сторону CD и точку E соединяем с M. По теореме о трех перпендикулярах CD, перпендикулярная к OE, будет перпендикулярна и к EM, т. е. $\angle MEO=\beta$; OK лежит в плоскости треугольника MOE.

3. Обозначим радиус основания через R, высоту через H, образующую через l.

4. Из прямоугольного треугольника MKO, где $\angle MKO=90°$, находим

$$H=OM=\frac{OK}{\sin KMO}=\frac{OK}{\sin(90°-\beta)}=\frac{a}{\cos\beta}.$$

5. Из прямоугольного треугольника AMO находим:

$$l=AM=\frac{H}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{a}{\cos\beta\cos\frac{\alpha}{2}} \qquad \text{и}$$

$$R=AO=H\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{a\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos\beta}.$$

6. Находим площадь полной поверхности конуса:

$$S=S_{\text{осн.}}+S_{\text{бок.}}=\pi R^2+\pi Rl=$$

$$=\frac{\pi a^2\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\beta}+\frac{\pi a^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\beta\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\pi a^2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{4}\right)}{\cos^2\beta\cos\frac{\alpha}{2}}.$$

Контрольные вопросы

1. Напишите формулу площади боковой поверхности конуса. Объясните смысл входящих в формулу букв.
2. Напишите формулу площади боковой поверхности усеченного конуса. Объясните смысл входящих в формулу букв.
3. Какой вид имеет развертка боковой поверхности конуса?

ДИДАКТИЧЕСКИЙ МАТЕРИАЛ

А. 1. Найдите площадь полной поверхности тела, полученного от вращения около меньшего катета прямоугольного треугольника, гипотенуза которого равна 14 см, а один из катетов равен 10 см. [240π см^2.]

2. Образующая конуса l составляет с основанием угол α. Найдите площади боковой поверхности, полной поверхности и объем конуса.

$\left[S_{\text{бок.}}=\pi l^2\cos\alpha,\ S=2\pi l^2\cos\alpha\cos^2\frac{\alpha}{2},\ V=\frac{1}{6}\pi l^3\sin 2\alpha\cos\alpha.\right]$

3. Высота усеченного конуса 6 см, радиусы оснований 10 и 2 см. Найдите площади его боковой и полной поверхностей. [≈ 377 см^2, ≈ 704 см^2.]

4. Радиусы оснований усеченного конуса R и r. Образующая наклонена к основанию под углом: а) 60°; б) 45°. Найдите площадь боковой поверхности.

[а) $2\pi(R^2-r^2)$; б) $\sqrt{2}\pi(R^2-r^2)$.]

Б. 1. Вычислите центральный угол в развертке боковой поверхности равностороннего конуса. [180°.]

2. Площадь боковой поверхности конуса равна 40 дм^2. Через середину высоты проведена плоскость параллельно основанию. На какие части разделилась площадь боковой поверхности конуса этой плоскостью? [10 дм^2 и 30 дм^2.]

3. Найдите отношение площади полной поверхности равностороннего конуса к площади его боковой поверхности. [3:2.]

4. Равнобедренный тупоугольный треугольник, у которого боковая сторона равна b, а угол при основании равен α, вращается вокруг данной стороны. Найдите объем и площадь полной поверхности тела вращения.

$$\left[\frac{1}{3}\pi b^3 \sin^2 2\alpha,\ 4\pi b^2 \sin 2\alpha \cos\left(30°+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(30°-\frac{\alpha}{2}\right).\right]$$

5. Около шара радиуса r описан конус. Наибольший угол между образующими конуса прямой. Найдите площадь полной поверхности конуса. $[\pi r^2(5\sqrt{2}+7).]$

6. Найдите площадь боковой поверхности и объем усеченного конуса, описанного около шара, если его образующая равна 13 см, а радиус шара 6 см. [169π см^2, 532π см^3.]

7. Высота усеченного конуса равна h, радиусы оснований относятся как 1:3, угол между образующей и плоскостью основания равен 45°. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса. $[2\sqrt{2}\pi h^2.]$

8. Прямоугольная трапеция вращается вокруг меньшей из непараллельных сторон. Найдите площадь полной поверхности полученного тела вращения, если меньшее основание трапеции равно 2 см, а боковая сторона длиной 12 см образует с основанием угол 60°. [188π см^2.]

В. 1. Шар, площадь поверхности которого равна S, вписан в усеченный конус. Угол образующей конуса с бо́льшим основанием равен 60°. Найдите площадь боковой поверхности этого конуса. $\left[\frac{4}{3}S.\right]$

2. Около шара радиуса R описан конус, образующая которого наклонена к плоскости основания под углом α. Найдите объем и площадь полной поверхности конуса.

$$\left[\frac{\pi R^3 \operatorname{ctg}^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg}\alpha}{3},\ \frac{2\pi R^2 \operatorname{ctg}^2 \frac{\alpha}{2} \cos^2 \frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.\right]$$

3. В конус вписан шар, площадь большого круга которого равна S. Найдите площадь полной поверхности конуса, если известно, что угол его осевого сечения равен α.

$$\left[\frac{2S \operatorname{ctg}^2\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right)\cos^2\left(45°-\frac{\alpha}{4}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}.\right]$$

4. В усеченный конус вписан шар радиуса r. Образующая конуса наклонена к основанию под углом α. Найдите площадь боковой поверхности усеченного конуса. $\left[\frac{4\pi r^2}{\sin^2\alpha}.\right]$

5. Около шара описан усеченный конус, у которого образующие наклонены к основанию под углом α. Найдите площадь полной поверхности этого усеченного конуса, если радиус шара равен r. $[2\pi r^2(4\operatorname{cosec}^2\alpha-1).]$

ПРИЛОЖЕНИЯ

1. КОНТРОЛЬНЫЕ РАБОТЫ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

Контрольная работа № 1

Тема: *Центральные и вписанные углы*

1. Хорда делит окружность в отношении 11:16. Найдите угол между касательными, проведенными через концы этой хорды.
2. Угол, образованный касательными к окружности, проведенными из одной точки, равен 73°25′. Определите величины дуг, заключенных между его сторонами.
3. Из точки M, лежащей вне окружности, проведены к ней две секущие, образующие угол 45°. Меньшая дуга окружности, заключенная между сторонами угла, равна 30°. Найдите величину большей дуги.
4. Секущая ABC отсекает от окружности дугу BC, содержащую 112°. Касательная AD точкой касания D делит эту дугу в отношении 7:9. Найдите угол BAD.
5. Два равных круга внутренне касаются большего, третьего и касаются между собой. Соединив три центра кругов отрезками, получим треугольник с периметром 18 см. Определите радиус большего круга.
6. Две хорды AB и AC образуют угол BAC, равный 74°24′. Через точки B и C проведены касательные до пересечения в точке M. Найдите угол BMC.
7. Пусть M — середина высоты BD равнобедренного треугольника ABC, где $AB=BC$. Опишем окружность радиуса MD с центром в точке M. Определите величину дуги в градусах, расположенной внутри треугольника, если известно, что угол BAC равен 62°17′.
8. Около окружности радиуса 4 м описан прямоугольный треугольник с гипотенузой 26 м. Найдите периметр треугольника.
9. Найдите стороны равнобедренного прямоугольного треугольника, если известен радиус описанного круга R.
10. Дуга AB содержит 40°24′. На продолжении радиуса OA отложен отрезок AC, равный хорде AB, и точка C соединена с B. Найдите угол ABC.
11. Хорды AB и AC лежат по разные стороны от центра и об-

разуют угол BAC, равный $72°30'$. Найдите величины дуг AB и AC, если их отношение равно 19:24.

12. Вершины четырехугольника $ABCD$ расположены на окружности, причем сторона AB является диаметром, а противолежащая ей сторона CD равна радиусу. Найдите угол между продолжениями двух других сторон.
13. Периметр прямоугольного треугольника равен 48 см, а диаметр вписанного в него круга равен 8 см. Найдите стороны треугольника.
14. Окружность разделена тремя точками в отношении 7:11:6. Найдите углы треугольника с вершинами в точках деления окружности.
15. Диаметр AB окружности равен 6 см. Через точку A проведена касательная, а через точку B — секущая к этой окружности, которые пересекаются в точке M. Известно, что секущая MB пересекает окружность в точке C и делит ее дугу AB на равные части. Найдите $\angle ABM$ и AM.
16. В круг радиуса 30 см вписано 6 равных кругов, каждый из которых помимо касания с большим кругом касается двух соседних малых кругов. Найдите радиус малого круга.
17. Из точки, отстоящей от окружности на расстоянии, равном ее радиусу, проведены две касательные к этой окружности. Найдите угол между касательными.
18. Сумма катетов прямоугольного треугольника равна 17 см, а гипотенуза 13 см. Найдите диаметр вписанного в него круга.
19. Вне круга радиуса 4 дм построено 6 равных кругов так, что каждый из них касается двух соседних, а также первоначального круга. Найдите их радиусы.
20. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 40°. Одна из боковых сторон служит диаметром окружности, а две другие стороны делят окружность на три части. Найдите их градусные величины.
21. Хорда разбивает окружность на две дуги: большую и малую. Из одного конца хорды восставлен перпендикуляр до пересечения с большей дугой, причем точка пересечения перпендикуляра и окружности делит бóльшую дугу в отношении 5:2. Сколько градусов содержит меньшая дуга окружности?
22. Две равные окружности пересекаются в точках A и B. Из точки C одной окружности проведены прямые через A и B до пересечения в точках D и E с другой окружностью. Найдите величину дуги DE, не содержащей дугу AB, если угол ACB равен $36°15'$.
23. Точки A и B соединены двумя дугами окружностей, содержащими соответственно $117°23'$ и $42°37'$. Середины этих дуг — точки C и D — соединены с A. Найдите угол CAD.
24. Острый угол прямоугольного треугольника равен 25°. Под каким углом виден каждый его катет из центра описанной около треугольника окружности?

25. Найдите углы прямоугольного треугольника ABC, если, соединяя вершину C прямого угла с центрами O и O_1 описанной и вписанной окружностей, получим угол OCO_1, равный α.
26. Стороны треугольника равны 8, 16, 20 см. С центрами в его вершинах построены окружности, касающиеся между собой внешним образом. Найдите их радиусы.
27. В окружность вписан четырехугольник $ABCD$, углы которого при вершинах A, B и C относятся как 5:9:7. Найдите угол D.
28. Около окружности описана равнобедренная трапеция с углом 150° и средней линией 10 см. Найдите радиус окружности.
29. Периметр трапеции, описанной около окружности, равен 36 м. Найдите среднюю линию трапеции.
30. Найдите величины углов вписанной в круг трапеции, диагональ которой стягивает дугу 150°.

Контрольная работа № 2

Тема: *Подобие*

1. Стороны треугольника относятся как 2:5:6, а меньшая сторона подобного ему треугольника равна 6. Найдите остальные стороны второго треугольника.
2. Стороны треугольника равны 6, 9 и 12 см, а произведение сторон подобного ему треугольника равно 24 см^3. Найдите стороны второго треугольника.
3. Стороны треугольника относятся как 2:5:4, а периметр подобного ему треугольника равен 55 см. Найдите стороны второго треугольника.
4. В двух равнобедренных треугольниках углы при вершинах равны. Боковая сторона и основание одного треугольника равны соответственно 17 и 10 см, основание другого — 8 см. Найдите боковую сторону второго треугольника.
5. В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ углы B и B_1 равны, а стороны, образующие угол B, в 2,5 раза больше сторон, образующих угол B_1. Найдите AC и A_1C_1, если их сумма равна 4,2 м.
6. В треугольниках ABC и DEK углы B и D равны, $AB = \frac{4}{3}DE$, $DK = 0{,}75BC$. Найдите AC и EK, если их разность равна 5 см.
7. В треугольнике ABC дано: $AB = 15$ м, $AC = 20$ м. На стороне AB отложен отрезок $AD = 100$ см, а на стороне AC — отрезок $AE = 12$ м. Подобны ли треугольники ABC и ADE?
8. В треугольнике ABC дано: $AB = 15$ м, $AC = 20$ м. На стороне AB отложен отрезок $AD = 9$ м, а на AC — отрезок $AE = 12$ м. Подобны ли треугольники ABC и ADE?
9. AB — диаметр одной окружности, AC — ее хорда. Другая окружность имеет диаметр $KE = \frac{13}{17}AB$, и в ней проведена

хорда $KM=\frac{13}{17}AC$. Найдите EM, если $BC=3{,}4$ м.

10. Стороны треугольника равны 0,8, 1,6, 2 м, а периметр подобного ему треугольника равен 5,5 м. Найдите стороны второго треугольника.

11. Периметр треугольника составляет $\frac{11}{13}$ периметра подобного ему треугольника. Разность двух сходственных сторон этих треугольников равна 1 м. Найдите эти стороны.

12. В треугольнике ABC отрезок DE параллелен AC ($D\in AB$, $E\in BC$). Найдите DE, если $AC=20$ см, $AB=17$ см, $BD=11{,}9$ см.

13. В треугольнике ABC отрезок DE параллелен AC ($D\in AB$, $E\in BC$). Найдите DE, если $AC=18$ дм, $AB=15$ дм, $AD=1$ м.

14. В треугольнике ABC отрезок DE параллелен AC ($D\in AB$, $E\in BC$). Найдите AD, если $AB=16$ см, $AC=2$ дм, $DE=15$ см.

15. В треугольнике ABC отрезок DE параллелен AC ($D\in AB$, $E\in BC$). Найдите отношение $AD:BD$, если $AC:DE=\frac{5}{7}:\frac{4}{11}$.

16. В треугольнике ABC, стороны которого равны a, b и c, проведен отрезок MK, параллельный AC, причем $AM=BK$. Найдите MK.

17. Через вершину B треугольника ABC проведена прямая BD, которая делит сторону AC на отрезки $AD=7$ см, $DC=9$ см. Найдите сторону BC и отношение $BD:BA$, если $\angle BDC=\angle ABC$.

18. Через вершину B треугольника ABC проведена прямая BD, которая пересекает AC в точке D так, что $\angle ABD=\angle BCA$. Найдите AD и DC, если $AB=2$ м, $AC=4$ м.

19. В трапеции $ABCD$ сторона AB параллельна CD, точка O — пересечение диагоналей и $OA=8$ см, $OC=1$ дм, $BD=27$ см. Найдите OD и OB.

20. В параллелограмме $ABCD$ сторона AB равна 420 м. На стороне BC взята точка E так, что $BE:EC=5:7$, и проведена прямая DE, пересекающая продолжение AB в точке M. Найдите BM.

21. Точка M лежит на продолжении стороны AB параллелограмма $ABCD$. Точка E — пересечение DM и AC, $AE:EC=m:n$, $AB=a$. Найдите BM.

22. Через точку пересечения диагоналей параллелограмма $ABCD$ проведена прямая, перпендикулярная к BC и пересекающая BC в точке E, а продолжение AB в точке M. Найдите BE, если $AB=a$, $BC=b$, $BM=c$.

23. В треугольник вписан параллелограмм, угол которого совпадает с углом треугольника. Стороны треугольника, составляющие этот угол, равны 20 и 25 м, параллельные им стороны параллелограмма относятся как 6:5. Найдите стороны параллелограмма.

24. В треугольник ABC вписан ромб $ADEM$. Вершина E находится на BC. Найдите сторону ромба, если $AB=c$, $AC=b$.
25. В треугольнике CBA проведен отрезок DE, соединяющий точки D и E, лежащие соответственно на сторонах BA и BC, и параллельный AC. Найдите DE, если $AB=24$ см, $BC=32$ см, $AC=28$ см и $AD+CE=16$ см.
26. В параллелограмм вписан ромб так, что его стороны параллельны диагоналям параллелограмма. Найдите сторону ромба, если диагонали параллелограмма равны l и k.
27. Стороны угла пересечены четырьмя параллельными прямыми, расстояния между которыми относятся как 2:3:4 (считая от вершины угла). Из четырех параллельных отрезков прямых, заключенных внутри угла, крайние равны 60 и 96 дм. Найдите два других отрезка.
28. В остроугольный треугольник с основанием a и высотой b вписан квадрат так, что две его вершины лежат на основании треугольника, а другие две — на боковых сторонах. Найдите сторону квадрата.
29. В остроугольный треугольник с основанием 48 см и высотой 16 см вписан прямоугольник с отношением сторон 5:9, причем бо́льшая сторона лежит на основании треугольника. Найдите стороны прямоугольника.
30. В треугольник с основанием 30 м и высотой 10 м вписан прямоугольный равнобедренный треугольник так, что его гипотенуза параллельна основанию данного треугольника, а вершина прямого угла лежит на основании первого. Найдите гипотенузу.

Контрольная работа № 3

Тема: *Свойство биссектрисы и медианы в треугольнике*

1. В равнобедренном треугольнике центр вписанного круга делит высоту в отношении 12:5, боковая сторона равна 60 см. Найдите основание.
2. В прямоугольной трапеции основания равны 17 и 25 дм, а бо́льшая боковая сторона равна 10 дм. Из середины этой стороны восставлен перпендикуляр до пересечения с продолжением другой боковой стороны. Найдите длину этого перпендикуляра.
3. Высота равнобедренного треугольника равна 20 см, а основание относится к боковой стороне как 4:3. Найдите радиус вписанного круга.
4. Радиус вписанного в равнобедренный треугольник круга составляет $\frac{2}{7}$ высоты, а его периметр равен 56 см. Найдите стороны.
5. В треугольнике ABC со сторонами a, b, c отрезок BD —

биссектриса угла B. Найдите отношение $OD:OB$, если O — точка пересечения BD и биссектрисы угла C.

6. В треугольнике основание равно 60 м, высота 12 м и медиана, проведенная к основанию, 13 м. Определите боковые стороны.

7. В треугольнике ABC дано: $AB=15$ см, $AC=10$ см, AD — биссектриса угла A. Из точки D проведена прямая, параллельная AB, до пересечения с AC в точке E. Найдите AE и EC.

8. В равнобедренном треугольнике ABC сторона $AC=b$, $AB=BC=a$. Отрезки AK и CM — биссектрисы углов A и C. Найдите MK.

9. В каком отношении центр вписанной в треугольник ABC окружности делит биссектрису AD, если стороны треугольника равны a, b, c?

10. Внутри разностороннего треугольника взята произвольная точка, из которой опущены перпендикуляры на все его стороны. Докажите, что сумма этих трех перпендикуляров равна высоте треугольника.

11. В треугольнике сумма двух сторон равна 14 см, а третья сторона делится биссектрисой противолежащего угла на отрезки, равные 3 и 4 см. Найдите стороны треугольника.

12. Периметр треугольника ABC равен $2P$, сторона AC равна b, биссектриса BD равна a. Точка O — центр вписанной в этот треугольник окружности. Найдите отношение $OD:BD$.

13. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если биссектриса прямого угла делит гипотенузу на части 15 и 20 см.

14. Диагонали ромба равны 14 и 48 дм. Найдите его высоту.

15. В равнобедренном треугольнике высота, опущенная на основание, равна 3 м, а высота, опущенная на боковую сторону, равна 4 м. Найдите стороны этого треугольника.

16. В прямоугольном треугольнике с катетами, равными 15 дм и 2 м, проведены высота из вершины прямого угла и биссектрисы обоих углов, образованных высотой с катетами. Найдите отрезок гипотенузы, заключенный между биссектрисами.

17. В равнобедренном треугольнике ABC боковая сторона $AB=10$ см и основание $AC=12$ см. Биссектрисы углов A и C пересекаются в точке D. Найдите BD.

18. Зная углы треугольника, определите угол между медианой и высотой, проведенными из вершины какого-нибудь угла.

19. BD — биссектриса угла в треугольнике ABC. Определите отрезки AD и BC, если $AB=10$ м, $BC=15$ м, $AC=20$ м.

20. Основание треугольника равно 60 см, высота и медиана, проведенные к основанию, равны соответственно 12 и 13 см. Найдите боковые стороны.

21. Основания трапеции равны 21 и 20 см, диагонали 9 и 40 см. Найдите угол между диагоналями.

22. Найдите отношение катетов прямоугольного треугольника,

если высота и медиана, выходящие из вершины прямого угла, относятся как 40:41.

23. Найдите наименьшую медиану треугольника со сторонами 11, 7 и 12 см.
24. BD — биссектриса угла в треугольнике ABC. Определите сторону BC, если $AD:DC=8:5$ и $AB=16$ м.
25. Одна из сторон треугольника равна 21 см, а две другие стороны образуют угол 60° и относятся как 3:8. Найдите эти стороны.
26. Стороны треугольника равны 51, 85 и 104 м. Окружность касается обеих меньших сторон, а центр ее находится на большей стороне. На какие части бо́льшая сторона делится центром?
27. Стороны параллелограмма равны 23 и 11 см, а диагонали относятся как 2:3. Найдите диагонали.
28. Основание треугольника равно 13 см, угол при вершине 60°, сумма боковых сторон 22 см. Найдите боковые стороны и высоту.
29. В треугольнике ABC сторона $AC=12$ см, один из прилежащих к нему углов 120°, сторона, противолежащая этому углу, 28 см. Найдите третью сторону и высоту, проведенную из вершины B.
30. В треугольник со сторонами 45, 48 и 39 см вписан параллелограмм так, что одна сторона его лежит на основании треугольника, а диагонали соответственно параллельны сторонам треугольника. Найдите стороны параллелограмма.

Контрольная работа № 4

Тема: *Свойства касательной и окружности*

1. Из точки, взятой вне круга, проведены к нему касательная и секущая, проходящая через центр. Найдите радиус окружности, если длина касательной равна a, а длина секущей b.
2. Из одной точки проведены касательная и секущая к окружности. Касательная больше внутреннего отрезка секущей на 2 см, а внешней на 4 см. Найдите длину секущей.
3. Две хорды, равные 8 и 6 см, пересекаются. Найдите отрезки первой хорды, если вторая делится в отношении 1:2.
4. Секущая к окружности больше своего внешнего отрезка в 2,25 раза. Во сколько раз она больше касательной, проведенной к окружности из той же точки?
5. Две хорды одной окружности продолжены до их пересечения. Найдите длины отрезков, на которые продолжены эти хорды, если хорды равны a и b, а их продолжения относятся как $m:n$.

6. Радиус окружности равен 7 см. Из точки, удаленной от центра на расстояние 9 см, проведена секущая так, что она делится окружностью пополам. Найдите длину этой секущей.

7. Из данной точки проведены к окружности касательная и секущая. Найдите их длины, если касательная на 20 см меньше внутреннего отрезка секущей и на 8 см больше ее внешнего отрезка.

8. Из точки вне круга проведены две секущие. Внутренний отрезок первой равен 47 м, а внешний — 9 м, внутренний отрезок второй секущей на 72 м больше внешнего ее отрезка. Найдите длину второй секущей.

9. Касательная и секущая к окружности, выходящие из одной точки, соответственно равны 20 и 40 см. Секущая удалена от центра окружности на 8 см. Найдите радиус круга.

10. Через внешнюю точку к окружности проведены секущая, проходящая через центр, и касательная, отрезок которой от данной точки до точки касания равен половине секущей. Найдите отношение отрезка касательной к радиусу.

11. В круг радиуса r вписан равнобедренный треугольник, у которого сумма длин высоты и основания равна диаметру. Найдите высоту и основание треугольника.

12. Из одной точки к окружности проведены две секущие. Сумма длин их внешних отрезков равна 35 дм, внутренние отрезки равны 25 и 45 дм. Найдите длину секущих.

13. Через один из концов хорды к окружности проведена касательная, расстояние от которой до другого конца равно 8 см. Найдите радиус окружности, если длина хорды равна 12 см.

14. Из точки A, не лежащей на окружности, проведены к ней касательная и секущая. Касательная равна 16 см, а расстояние от A до одной из точек пересечения секущей с окружностью равно 32 см. Секущая удалена от центра на 5 см. Найдите радиус окружности.

15. Из точки, удаленной от центра на 17 см, проведена секущая так, что она делится окружностью в отношении 3:2, считая от внешней точки. Найдите длину секущей, если радиус равен 7 см.

16. К окружности радиуса r из внешней точки проведены секущая, проходящая через центр, и касательная, равная половине секущей. Найдите длину касательной.

17. Из одной точки проведены секущая и касательная к окружности. Сумма их равна 30 см, а внутренний отрезок секущей на 2 см меньше касательной. Найдите длины касательной и секущей.

18. В окружности радиуса r проведена хорда длиной $r/2$. Через один конец хорды проведена касательная, а через другой — секущая, параллельная касательной. Найдите расстояние между касательной и секущей.

19. Найдите радиус круга, описанного около равнобедренного треугольника, если боковая сторона равна 12 см, а высота — 9 см.
20. Из одной точки проведены к окружности касательная и секущая. Их сумма равна 15 см, а внешний отрезок секущей на 2 см меньше касательной. Найдите касательную и секущую.
21. Точка A удалена от прямой MH на 5 см. Радиусом 10 см описана окружность так, что она проходит через A и касается MH. Найдите расстояние между полученной точкой касания и точкой A.
22. Один конец диаметра полуокружности совпадает с вершиной угла при основании равнобедренного треугольника, а другой принадлежит этому основанию. Найдите радиус полуокружности, если она касается одной боковой стороны и делит другую на отрезки длиной 5 и 4 см, считая от основания.
23. Между двумя параллельными прямыми, находящимися на расстоянии 15 см друг от друга, взята точка M на расстоянии 3 см от одной из них. Через точку M проведена окружность, касающаяся обеих прямых. Найдите расстояние между проекциями центра и точки M на одну из данных прямых.
24. Из одной точки проведены секущая и касательная к окружности. Секущая равна a, внутренний ее отрезок больше внешнего на длину касательной. Найдите длину касательной.
25. Как далеко можно видеть на поверхности земли с наблюдательного пункта высотой H (радиус Земли R)?
26. Секущая, проведенная из точки M и проходящая через центр окружности радиуса r, равна l. Найдите длину касательной, проведенной из той же точки.
27. Из внешней точки проведены к окружности касательная и секущая. Найдите длину касательной, если она на 5 м больше внешнего отрезка и на столько же меньше внутреннего отрезка секущей.
28. Из некоторой точки, взятой вне окружности, проведены две секущие. Их внутренние части равны 9 и 40 см, а внешние соответственно относятся как 4:3. Найдите длины внешних отрезков секущих.
29. Из точки A, отстоящей на расстоянии 11 м от центра круга радиуса 5 м, проведена секущая AB так, что отношение внешней части AC к внутренней BC равно 2:1. Найдите длину секущей.
30. Радиус окружности равен 8 см. Хорда AB равна 12 см. Через A проведена касательная, а через B — хорда BC, параллельная касательной. Найдите расстояние между касательной и хордой BC.

Контрольная работа № 5

Тема: *Вписанная и описанная окружности в треугольнике и трапеции*

1. Катеты прямоугольного треугольника равны 20 и 21 см. Найдите радиус описанного круга.
2. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 6 см, высота 4 см. Найдите радиус описанной окружности.
3. Найдите катеты прямоугольного треугольника, если они относятся как 20:21, а разность между радиусами описанной и вписанной окружностей равна 17 см.
4. В прямоугольный треугольник вписан полукруг так, что диаметр его лежит на гипотенузе и центр его делит гипотенузу на отрезки, равные 15 и 20 см. Найдите радиус полукруга.
5. Катеты прямоугольного треугольника равны 40 и 42 см. Найдите радиус вписанной окружности.
6. Основание равнобедренного треугольника равно 60 см, а высота 40 см. Найдите радиус вписанной окружности.
7. Площадь равнобедренной трапеции, описанной около круга, равна 18 см^2, а острый угол при основании равен 30°. Найдите боковую сторону трапеции.
8. Около круга радиуса 2 см описана равнобедренная трапеция, площадь которой 20 см^2. Найдите основания трапеции.
9. Около круга радиуса 4 см описана прямоугольная трапеция, наименьшая из сторон которой равна 6 см. Найдите площадь трапеции.
10. Центр круга, вписанного в прямоугольную трапецию, отстоит от концов боковой стороны трапеции на 4 и 8 см. Найдите площадь трапеции.
11. В треугольник вписан круг радиуса 4 см. Одна из его сторон разделена точкой касания на части, равные 8 и 6 см. Найдите длины двух других сторон.
12. Стороны треугольника равны 25, 24 и 7 см. Найдите радиусы вписанного и описанного кругов.
13. Площадь ромба равна 32 м^2, а площадь вписанного в него круга равна 4 м^2. Найдите углы ромба.
14. В равнобедренную трапецию вписан круг. Меньшее основание равно 2 см, а угол при большем основании равен 60°. Найдите площадь круга.
15. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 17 см. Основание равно 16 см. Найдите расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей.
16. В круг радиуса 2 см вписан треугольник, два угла которого равны 45° и 60°. Найдите площадь треугольника.
17. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см. Найдите радиус описанного около него круга, если площадь треугольника равна 24 см^2.

18. Найдите радиус круга, вписанного в прямоугольный треугольник, если проекции катетов на гипотенузу равны 9 и 16 см.
19. Периметр прямоугольного треугольника равен 24 см, а его гипотенуза 10 см. Найдите радиус вписанного круга и площадь треугольника.
20. В окружность радиуса 5 см вписан прямоугольный треугольник так, что один из его катетов вдвое ближе к центру, чем другой. Найдите стороны треугольника.
21. Центр вписанной окружности делит высоту равнобедренного треугольника на отрезки 5 и 3 см. Найдите стороны треугольника.
22. В ромб с острым углом 60° вписана окружность радиуса 2 см. Найдите сторону ромба.
23. Из одной точки проведены к окружности две касательные длиной 12 см. Расстояние между точками касания 14,4 см. Найдите радиус окружности.
24. В угол, равный 60°, вписаны две окружности, касающиеся между собой. Найдите радиус большей окружности, если радиус меньшей равен 7 см.
25. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольного треугольника, если радиус вписанной в него окружности равен 3 см, а меньший катет равен 10 см.
26. Радиусы вписанной и описанной окружностей прямоугольного треугольника равны 2 и 5 см. Найдите стороны треугольника.
27. Один катет прямоугольного треугольника равен 15 см, а проекция другого катета на гипотенузу равна 16 см. Найдите радиус вписанной окружности.
28. В равнобедренную трапецию вписана окружность радиуса 3 см. Верхнее основание трапеции в 2 раза меньше ее высоты. Найдите площадь трапеции.
29. В окружность радиуса 2 м вписана трапеция, нижнее основание которой больше каждой из остальных сторон вдвое. Найдите площадь трапеции.
30. В окружность радиуса 2 м вписан треугольник с углами 15° и 60°. Найдите площадь треугольника.

2. ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ ПО ПЛАНИМЕТРИИ

§ 1. ИЗМЕРЕНИЕ ЛИНИЙ И УГЛОВ

1. В прямоугольном треугольнике биссектриса прямого угла пересекает гипотенузу в точке K. Найдите расстояния от точки K до катетов, если острый угол треугольника α, а радиус круга, описанного около треугольника, R. $\left[\dfrac{R\sqrt{2}\sin 2\alpha}{2\sin(45^\circ+\alpha)}.\right]$

2. В прямоугольном треугольнике проведена биссектриса острого угла α. Найдите радиус окружности, описанной около этого треугольника, если отрезок, соединяющий середину биссектрисы с вершиной прямого угла, равен a. $\left[\dfrac{a\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}.\right]$

3. В круг радиуса r вписан косоугольный треугольник, у которого одна сторона вдвое больше другой, а угол между ними α. Найдите отрезки, на которые биссектриса угла α делит третью сторону. $\left[\frac{2}{3}r\sin\alpha,\ \frac{4}{3}r\sin\alpha.\right]$

4. Найдите периметр равнобочной трапеции, описанной около круга, если ее большее основание равно a, острый угол α. $\left[\dfrac{2a}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}.\right]$

5. В равнобочной трапеции из вершины острого угла β проведена диагональ, которая образует с боковой стороной угол α. Найдите биссектрису угла α и те отрезки, на которые она делит большее основание a. $\left[\dfrac{a\sin\beta}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\cos\frac{\alpha}{2}};\ \dfrac{a\sin(\alpha+\beta)}{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\cos\frac{\alpha}{2}};\ \dfrac{a\sin\beta\sin(\alpha+\beta)}{\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\sin\alpha}.\right]$

6. В круг вписана трапеция, у которой боковая сторона равна c и равна меньшему основанию, а один из углов $60°$. Найдите радиус круга, вписанного в треугольник, сторонами которого служат диагональ трапеции, боковая сторона и большее основание трапеции. $[0{,}25c(1+\sqrt{3}).]$

7. Две окружности, разность радиусов которых равна 1 м, касаются внешним образом. Касательная к одной из них, проведенная из центра другой, составляет с линией центров углы: а) $45°$; б) $60°$. Найдите расстояние между центрами. $[(\sqrt{2}+1)$ м; $0{,}5(\sqrt{3}+1)$ м.$]$

8. Найдите радиус круга, вписанного в прямоугольный треугольник, у которого один угол $15°$, а длина медианы, проведенной из вершины прямого угла, $\sqrt{2}$ м. $[(\sqrt{3}-\sqrt{2})$ м.$]$

9. Найдите углы прямоугольного треугольника, если радиус окружности, вписанной в него, равен r, а гипотенуза a. $\left[\cos(45°-x)=\dfrac{\sqrt{2}(2r+a)}{2a}.\right)$

§ 2. ИЗМЕРЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ

10. Найдите площадь и углы прямоугольного треугольника, если его высота и медиана, проведенные из вершины прямого угла, равны соответственно h и a. $\left[\sin 2x=\frac{h}{a},\ S=ah.\right]$

11. Чему равен угол A треугольника ACB, если его основание AB является диаметром окружности, проходящей через середину стороны CB? Площадь треугольника ACB равна 4. $\left[\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=3,\ x\approx 37°.\right]$

12. Основание AC равностороннего треугольника ABC является диаметром окружности, пересекающей стороны треугольника AB и BC в точках D и E. Площадь треугольника ABC равна S. Найдите площадь треугольника ADE. [0,25S.]

13. К кругу радиуса r, равного 2,2 м, в точках A и C проведены две параллельные касательные, затем проведена третья касательная BD, пересекающая первые две в точках B и D. Найдите площадь трапеции $ABDC$, если угол CDB равен 52°18′. [12,232 м^2.]

14. Найдите отношение площадей двух касающихся извне окружностей, если угол, образованный линией центров с радиусом большего круга, проведенным в точку касания их общей внешней касательной, равен α. $\left[\operatorname{ctg}^4\frac{\alpha}{2}.\right]$

15. Трапеция вписана в круг. Найдите площадь трапеции, если ее диагональ d образует с основанием угол α. [$0{,}5d^2\sin 2\alpha$.]

3. ЗАДАЧИ ПОВЫШЕННОЙ ТРУДНОСТИ ПО СТЕРЕОМЕТРИИ

§ 1. ЛИНИИ И ПЛОСКОСТИ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Отрезки двух прямых линий, заключенные между двумя параллельными плоскостями, относятся как 2:3, а их углы с плоскостью как 2:1. Найдите эти углы. [41°24′ и 82°49′.]

2. Из внешней точки проведены к плоскости две наклонные, их проекции на эту плоскость равны a и b ($a>b$), а разность углов наклона к плоскости равна 45°. Найдите расстояние от общей точки наклонных до плоскости, если $a=6$, $b=1$. [3 или 2.]

3. Из внешней точки A проведены к плоскости прямые AB и AC, составляющие с плоскостью углы β и $90°-\beta$, а между собой угол α. Найдите углы B и C в треугольнике ABC, если $\alpha=90°-2\beta$. [$\angle B=\beta$, $\angle C=90°+\beta$.]

4. Из точки A плоскости μ проведена наклонная AB под углом α к плоскости, через AB проведена плоскость p под углом β к плоскости μ. Найдите угол между AB и линией пересечения плоскостей μ и p. $\left[\sin\varphi=\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.\right]$

5. В прямоугольном треугольнике даны гипотенуза a и острый угол α. Найдите расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол φ с плоскостью треугольника. [$0{,}5a \sin 2\alpha \sin \varphi$.]

6. Прямая AB параллельна плоскости p. Прямая CD пересекает AB под углом α и образует с плоскостью p угол φ. Найдите угол между плоскостью p и плоскостью прямых AB и CD. $\left[\sin x = \frac{\sin \varphi}{\sin \alpha}.\right]$

7. Параллелограмм и плоскость p расположены так, что одна из меньших сторон параллелограмма находится в плоскости p, а противоположная ей удалена от плоскости p на расстояние, равное расстоянию между бóльшими сторонами параллелограмма. Найдите угол между плоскостью p и плоскостью параллелограмма, если стороны параллелограмма относятся как 3:5. [$\sin \varphi = 0{,}6$, $\varphi = 36°52'$.]

8. На ребре двугранного угла φ взят отрезок c и из его концов восставлены к нему в различных гранях перпендикуляры a и b. Найдите длину отрезка прямой, соединяющей концы этих перпендикуляров, если $\varphi = 120°$, $a = 1$, $b = 2$, $c = 3$. [$x = 4$.]

§ 2. УГЛЫ, ЛИНИИ И ПЛОСКОСТИ В МНОГОГРАННИКАХ

9. В треугольной призме площади боковых граней относятся как 40:37:13. Найдите углы между ними. [93°41′, 67°22′, 18°55′.]

10. Основанием пирамиды служит правильный треугольник, одна из боковых граней перпендикулярна к основанию, а две другие наклонены к нему под углом α. Как наклонены к плоскости основания боковые ребра? [$\operatorname{tg} \varphi_1 = 0{,}5\sqrt{3} \operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{tg} \varphi_2 = 0{,}5 \operatorname{tg} \alpha$.]

11. Основанием пирамиды служит квадрат, двугранные углы при нем относятся как 1:2:4:2. Найдите эти углы. [30°, 60°, 120°, 60°.]

12. В правильной четырехугольной пирамиде даны апофема c и площадь диагонального сечения p. Найдите в этой пирамиде угол между боковой гранью и основанием и сторону основания, если $c = 5$, $p = 15$. $\left[\sin 2\varphi = \frac{p\sqrt{2}}{c^2}\right.$, $a = 2c \cos \varphi$. Эти формулы дают два решения: $\varphi_1 = 29°1'$ и $a_1 = 8{,}744$; $\varphi_2 = 60°58'$ и $\left.a_2 = 4{,}85211.\right]$

13. Найдите двугранный угол в правильном тетраэдре. [70°31′.]

14. Найдите двугранный угол в правильном октаэдре. [109°28′.]

15. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a и составляет с боковым ребром угол α. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро, и высоту пирамиды. $\left[\frac{a^2\sqrt{\sin(\alpha + 30°)\sin(\alpha - 30°)}}{4 \cos \alpha}.\right]$

16. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a, боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. Найдите площадь сечения, проведенного через сторону основания и середину бокового ребра. $\left[\frac{a^2\sqrt{4+\operatorname{tg}^2\alpha}}{4\sqrt{3}}.\right]$

17. В правильной треугольной пирамиде даны сторона основания a и двугранный угол при основании α. Найдите площадь сечения, проведенного через центр основания параллельно двум непересекающимся ребрам пирамиды. $\left[\frac{a^2\sqrt{3}\,(4+\operatorname{tg}^2\alpha)}{27}\right.$, в сечении получается прямоугольник.$\left.\right]$

18. В правильной четырехугольной пирамиде двугранный угол при основании равен α; через сторону основания проведена внутри пирамиды плоскость, составляющая с основанием угол β. Найдите площадь сечения, если сторона основания равна a. $\left[\frac{a^2\sin^2\alpha\cos\beta}{\sin^2(\alpha+\beta)}.\right]$

19. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна a, боковое ребро образует с плоскостью основания угол α. В эту пирамиду вписан куб так, что четыре из его вершин лежат на апофемах пирамиды. Найдите ребро куба. $\left[\frac{a\sin\alpha}{2\sin(45^\circ+\alpha)}.\right]$

§ 3. ПОВЕРХНОСТЬ И ОБЪЕМ ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДОВ И ПРИЗМ

20. Основанием прямой призмы служит равнобедренный треугольник, боковые стороны которого равны b и угол между ними α. Площадь боковой поверхности этой призмы равновелика сумме площадей ее оснований. Найдите ее объем. $\left[\frac{1}{8}b^3\sin\alpha\sec^2(45^\circ-0{,}25\alpha).\right]$

21. В параллелепипеде длины трех ребер, выходящих из общей вершины, равны a, b, c; ребра a и b взаимно перпендикулярны, а ребро c образует с каждым из них угол α. Найдите объем параллелепипеда и угол между ребром c и плоскостью прямоугольника. $[abc\sqrt{-\cos 2\alpha}$, $\sin x=\sqrt{-\cos 2\alpha}$.]

22. В основании прямого параллелепипеда острый угол равен α, стороны равны a и b. Меньшая диагональ параллелепипеда равна большей диагонали основания. Найдите объем параллелепипеда. $[2ab\sin\alpha\sqrt{ab\cos\alpha}$.]

23. Через ребро куба проведена плоскость, делящая его объем в отношении 2:3. На какие части она делит двугранный угол? [38°39′ и 51°20′.]

24. В правильной треугольной призме две вершины верхнего основания соединены с серединами противоположных им сторон нижнего основания. Угол между полученными линиями, опирающийся на сторону основания, равен α; сторона основания равна a. Найдите объем призмы. $\left[\dfrac{3a^3 \sin\left(60^\circ + \frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(60^\circ - \frac{\alpha}{2}\right)}{8 \sin \frac{\alpha}{2}}.\right]$

§ 4. ПОВЕРХНОСТЬ И ОБЪЕМ ПИРАМИДЫ

25. В правильной четырехугольной пирамиде даны сторона основания a и плоский угол при вершине α. Найдите объем и площадь ее полной поверхности. $\left[\dfrac{a^3\sqrt{\cos\alpha}}{6 \sin \frac{\alpha}{2}}, \ \dfrac{a^2\sqrt{2}\sin\left(45^\circ + \frac{\alpha}{2}\right)}{\sin \frac{\alpha}{2}}.\right]$

26. В треугольной пирамиде плоские углы при вершине равны α, α и β; боковое ребро, служащее общей стороной равных углов, перпендикулярно к плоскости основания и равно a. Найдите объем и площадь боковой поверхности этой пирамиды.

$$\left[\frac{a^3 \sin\frac{\beta}{2}\sqrt{\sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}}{3\cos^2\alpha}, \ \frac{a^2 \sin\left(\alpha+\frac{\beta}{2}\right)\cos\left(\alpha-\frac{\beta}{2}\right)}{\cos^2\alpha}.\right]$$

27. Основанием пирамиды служит ромб со стороной a и острым углом α, двугранные углы при основании равны φ. Найдите объем и площадь полной поверхности.

$$\left[\frac{1}{6}a^3 \sin^2\alpha \operatorname{tg}\varphi, \ \frac{2a^2 \sin\alpha \cos^2\frac{\varphi}{2}}{\cos\varphi}.\right]$$

28. Основанием пирамиды служит прямоугольник; из боковых граней две перпендикулярны к основанию, а две другие образуют с ним угол α. Найдите объем, площади боковой поверхности и полной поверхности этой пирамиды.

$$\left[\frac{a^3 \operatorname{tg}\alpha}{3}; \ a^2 \operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right); \ \frac{a^2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}.\right]$$

29. Основанием пирамиды служит прямоугольник; из боковых граней две перпендикулярны к основанию, а две другие образуют с ним углы α и β; высота пирамиды равна H. Найдите ее объем и площадь боковой поверхности.

$$\left[\frac{H^3}{3}\operatorname{ctg}\alpha \operatorname{ctg}\beta, \ \frac{2H^2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\beta}{2}\right)}{\sin\alpha\sin\beta}.\right]$$

30. Найдите объем правильной четырехугольной пирамиды, в которой боковое ребро равно b, а плоский угол при вершине равен α. $\left[\frac{4}{3}b^3 \sin^2 \frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos \alpha}.\right]$

31. Найдите объем пирамиды, если ее высота равна H, боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом φ и в основании треугольник с углами α и β.
$\left[\frac{2}{3}H^3 \operatorname{ctg}^2 \varphi \sin \alpha \sin \beta \sin (\alpha+\beta).\right]$

32. В треугольной пирамиде две боковые грани — равнобедренные прямоугольные треугольники, гипотенузы которых равны b и образуют между собой угол α. Найдите объем этой пирамиды.
$\left[\frac{1}{6}b^3 \sin \frac{\alpha}{2}\sqrt{\cos \alpha}.\right]$

33. Основанием пирамиды служит параллелограмм, диагонали которого пересекаются под углом φ. Высота пирамиды проходит через точку пересечения диагоналей основания и равна H. Неравные боковые ребра образуют с плоскостью основания углы α и β. Найдите объем этой пирамиды, если $\alpha+\beta=90°$. $\left[\frac{2}{3}H^3 \sin \varphi.\right]$

34. Основанием пирамиды служит трапеция, в которой боковая сторона и меньшая из параллельных сторон имеют длину a, острые углы равны α, боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания угол φ. Найдите объем этой пирамиды.
$\left[\frac{2}{3}a^3 \cos^3 \frac{\alpha}{2} \operatorname{tg} \varphi.\right]$

35. В треугольной пирамиде все боковые ребра и две стороны основания имеют длину a, угол между равными сторонами основания равен α. Найдите объем этой пирамиды.
$\left[\frac{a^3}{3}\sin \frac{\alpha}{2}\sqrt{\sin\left(60°+\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(60°-\frac{\alpha}{2}\right)}.\right]$

36. Найдите объем усеченной правильной четырехугольной пирамиды, если даны стороны a и b нижнего и верхнего оснований и острый угол α в боковой грани. $\left[\frac{a^3-b^3}{6 \cos \alpha}\sqrt{-\cos 2\alpha},\right.$ $\left.\alpha>45°.\right]$

§ 5. КОМБИНАЦИИ ЦИЛИНДРА И КОНУСА С ЛИНИЯМИ, ПЛОСКОСТЯМИ И МНОГОГРАННИКАМИ

37. Радиус основания конуса равен r, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. В этом конусе проведена плоскость через его вершину под углом φ к его высоте. Найдите площадь полученного сечения.
$\left[\left(\frac{r}{\cos \alpha \cos \varphi}\right)^2 \sin \alpha\sqrt{\cos (\alpha+\varphi) \cos (\alpha-\varphi)}.\right]$

38. В усеченном конусе через две образующие проведена плоскость, которая наклонена к плоскости основания под углом φ. Найдите площадь полученного сечения, если радиусы оснований усеченного конуса R и r, а его образующая наклонена к плоскости нижнего основания под углом α.
$\left[\frac{(R^2-r^2)\operatorname{tg}\alpha\sqrt{\sin(\alpha+\varphi)\sin(\varphi-\alpha)}}{\sin^2\varphi\cos\alpha}.\right]$

39. Боковое ребро правильной треугольной пирамиды равно a и образует с плоскостью основания угол α. В эту пирамиду вписан равносторонний цилиндр так, что его основание лежит в плоскости основания пирамиды. Найдите высоту цилиндра. $\left[\frac{\sqrt{2}a\cos 2\alpha}{4\sin(45^\circ+\alpha)}.\right]$

40. Найдите ребро куба, вписанного в конус, образующая которого l и наклонена к плоскости основания под углом α. $\left[\frac{l\sin\alpha\sqrt{2}}{\sqrt{2}+\operatorname{tg}\alpha}.\right]$

41. В конусе даны радиус основания r и угол α между образующей и плоскостью основания. В этот конус вписана прямая треугольная призма с равными ребрами так, что ее основание лежит в плоскости основания конуса. Найдите длину ее ребра. $\left[\frac{\sqrt{3}r\sin\alpha}{2\sin(60^\circ+\alpha)}.\right]$

42. Радиус основания конуса равен r, а образующая наклонена к плоскости основания под углом φ. Около этого конуса описана пирамида, имеющая в основании прямоугольный треугольник с острым углом α. Найдите объем и площадь боковой поверхности этой пирамиды. $\left[\frac{r^3}{3}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\operatorname{tg}\varphi,\right.$
$\left.r^2\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\operatorname{ctg}\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\varphi.\right]$

§ 6. ПОВЕРХНОСТЬ И ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА И КОНУСА

43. Высота конуса H, а образующая наклонена к плоскости основания под углом α. Площадь полной поверхности этого конуса разделена пополам плоскостью, перпендикулярной к высоте. Найдите: а) расстояние от секущей плоскости до вершины конуса; б) отношение частей боковой поверхности. [а) $H\cos\frac{\alpha}{2}$; б $\operatorname{ctg}^2\frac{\alpha}{2}$.]

44. В усеченном конусе высота равна H; образующая составляет с плоскостью нижнего основания угол α и перпендикулярна к линии, соединяющей верхний конец ее с нижним концом противоположной образующей. Найдите площадь боковой поверхности этого усеченного конуса. $\left[\frac{\pi H^2}{\cos\alpha}.\right]$

45. В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая составляет с плоскостью нижнего основания угол α и равна A. Найдите объем, площади боковой поверхности и полной поверхности этого усеченного конуса. $\left[\frac{\pi A^3(2-\cos 2\alpha)\sin\alpha}{12}, \pi A^2\sin\alpha, 2\pi A^2\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\times\right.$ $\left.\times\cos\left(\frac{\alpha}{2}-15^\circ\right).\right]$

§ 7. ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

46. Равнобедренный треугольник с углом α при основании вращается около перпендикуляра к основанию, проведенного через одну из вершин при основании. Найдите площадь поверхности тела вращения, если площадь треугольника равна p. $\left[4\pi p\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}.\right]$

47. В треугольнике даны сторона a и углы B и C, прилежащие к этой стороне. Найдите площадь поверхности и объем тела, полученного от вращения треугольника около данной стороны. $\left[\frac{\pi a^2\sin B\sin C\cos(0{,}5(B-C))}{\sin(B+C)\cos(0{,}5(B+C))}, \frac{\pi a^3\sin^2 B\sin^2 C}{3\sin^2(B+C)}.\right]$

48. В полукруге радиуса R проведена хорда, параллельная диаметру и стягивающая дугу α; концы ее соединены с концами диаметра. Найдите объем и площадь поверхности тела, образуемого вращением полученной трапеции около диаметра.

$$\left[\frac{8}{3}\pi R^3\cos^2\frac{\alpha}{2}\sin\left(15^\circ+\frac{\alpha}{4}\right)\cos\left(15^\circ-\frac{\alpha}{4}\right),\right.$$
$$\left.8\pi R^2\cos\frac{\alpha}{2}\sin\left(\frac{\pi}{8}+\frac{\alpha}{8}\right)\cos\left(\frac{\pi}{8}-\frac{3\alpha}{8}\right).\right]$$

§ 8. КОМБИНАЦИЯ ШАРА С ЛИНИЯМИ И ПЛОСКОСТЯМИ

49. В шаре из точки его поверхности проведены три равные хорды под углом α друг к другу. Найдите их длину, если радиус шара R. $\left[\frac{2R\sqrt{\sin\left(60^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(60^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}}{\sqrt{3}}.\right]$

§ 9. ПОВЕРХНОСТЬ И ОБЪЕМ ШАРА И ЕГО ЧАСТЕЙ

50. В шаровом сегменте дуга осевого сечения равна α. Найдите в этом сегменте разность между площадью сферической части сегмента и площадью его основания, если поверхность всего шара равна A. $\left[A\sin^4\frac{\alpha}{4}.\right]$

51. В некотором сферическом поясе, имеющем равные основания, площадь боковой поверхности равновелика сумме площадей оснований. Найдите величину дуги в осевом сечении этого пояса. $\left[\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{2}-1,\ \alpha=48°56'.\right]$

52. Найдите площадь боковой поверхности сферического сегмента, если в его осевом сечении дуга равна α, длина хорды равна a. $\left[\frac{\pi a^2 \sec^2\frac{\alpha}{4}}{4}.\right]$

53. Найдите центральный угол в осевом сечении сферического сектора, если его сферическая поверхность равновелика конической. $\left[\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{2},\ \alpha=106°16'.\right]$

§ 10. КОМБИНАЦИИ ШАРА С МНОГОГРАННИКАМИ

54. Основанием пирамиды служит ромб со стороной, равной a, и острым углом α; двугранные углы при основании равны φ. Найдите радиус шара, вписанного в эту пирамиду. $\left[0{,}5a\sin\alpha\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}.\right]$

55. Около шара описана усеченная правильная четырехугольная пирамида, в которой стороны большего и меньшего оснований относятся как $a:k$. Как наклонены к плоскости большего основания боковая грань и боковое ребро? $\left[\cos\alpha=\frac{a-k}{a+k},\right.$ $\left.\operatorname{tg}\beta=\frac{\sqrt{2ak}}{a-k}.\right]$

56. Основанием пирамиды служит прямоугольник с углом α между диагоналями, а боковые ребра образуют с плоскостью основания угол φ. Найдите объем этой пирамиды, если радиус описанного около нее шара равен R. $\left[\frac{2}{3}R^3\sin^3 2\varphi\operatorname{tg}\varphi\sin\alpha.\right]$

§ 11. КОМБИНАЦИИ ШАРА И ЕГО ЧАСТЕЙ С ТЕЛАМИ ВРАЩЕНИЯ

57. В конусе даны длина окружности основания C и угол α между образующей и основанием. Найдите длину линии, по которой взаимно касаются боковая поверхность конуса и поверхность вписанного в него шара. $\left[2C\sin\frac{\alpha}{2}.\right]$

58. Найдите в конусе угол между образующей и плоскостью основания, если числа, выражающие площадь основания, поверхность вписанного шара и боковую поверхность конуса, составляют арифметическую прогрессию. $\left[8\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}=1+\frac{1}{\cos\alpha},\ \alpha=70°32'.\right]$

59. Найдите радиус шара, описанного около усеченного конуса, в котором радиусы оснований R и r, а образующая наклонена к плоскости нижнего основания под углом α. [Обозначая через z, y и x соответственно радиус описанного шара, половину образующей и расстояние от центра шара до образующей, получим $x=\frac{R+r}{2\sin\alpha}$, $y=\frac{R-r}{2\cos\alpha}$, $z^2=x^2+y^2$, $z=\frac{\sqrt{R^2+r^2+2Rr\cos 2\alpha}}{\sin 2\alpha}$.]

4. ПРИМЕРНЫЕ ВАРИАНТЫ ПИСЬМЕННОГО ВСТУПИТЕЛЬНОГО ЭКЗАМЕНА

I тип (для гуманитарных институтов)

Вариант 1

1. Сумма двух чисел равна 33, а их произведение равно 252. Найти разность квадратов большего и меньшего чисел.

2. Упростить выражение

$$\frac{x}{ax-2a^2}-\frac{2}{x^2+x-2ax-2a}\left(1+\frac{3x+x^2}{3+x}\right)-\frac{1-2a}{a^2}$$

3. Решить уравнение

$$16^{\frac{1}{x}}-5\cdot 4^{\frac{1}{x}}+4=0.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_1+4x_2+2x_3=2, \\ x_2+3x_3=4, \\ x_1+3x_2+4x_3=3. \end{cases}$$

5. Вычислить $y=5\sin 2\alpha+3\sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha=0{,}75$, а $\cos\alpha=-0{,}8$.

6. Найти наибольшее и наименьшее значения функции

$$y=2x^4-x+3$$

на отрезке $[0;\ 2]$. Вычислить сумму найденных значений.

7. Решить уравнение

$$\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0.$$

Указать число корней, принадлежащих отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \pi\right]$.

8. Решить неравенство $\log_2^2(3-x)+2\log_2(3-x)-24\leqslant 0$. Указать наибольшее целое число, являющееся решением этого неравенства.

9. Центр вписанной окружности делит высоту равнобедренного треугольника, опущенную на основание, на отрезки длиной

5 и 3 см, считая от вершины. Определить бо́льшую сторону треугольника.

10. В прямой треугольной призме все ребра равны. Боковая поверхность равна $10\sqrt{3}$ м^2. Найти площадь основания призмы.

Вариант 2

1. Найти наибольший общий делитель чисел: 42, 154, 315.

2. Решить уравнение

$$2^{12x}=\frac{1}{32}\cdot 2^{-7}\cdot 17^{\log_{17}8}\cdot\left(\frac{1}{8}\right)^{9}\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{-3}.$$

3. Найти $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если $\operatorname{tg}\alpha=2$, $\operatorname{tg}\beta=3$.

4. Вычислить производную функции $y=(3x-1)^{15}+(2x+2)^4$ в точке $x_0=0$.

5. В равнобокой трапеции с острым углом 60° сумма оснований равна 86 см, боковая сторона трапеции равна 22 см. Определить меньшее основание трапеции.

6. Найти сумму корней уравнения $\log_{x^2+3}\sqrt{3x+1}=3^{\log_3\frac{1}{2}}$.

7. Боковое ребро и высота боковой грани правильной треугольной пирамиды соответственно равны 11 и 7. Вычислить высоту пирамиды.

8. Решить неравенство $4^{x+1}-5\cdot 4^{2x}+4^{3x}\leqslant 0$.

9. Бригада рабочих должна была изготовить 360 деталей. Изготовляя ежедневно на 4 детали больше, чем предполагалось по плану, бригада выполнила задание на один день раньше срока. Сколько дней затратила бригада на выполнение задания?

10. Сколько корней уравнения $4\cos^3 x+\cos^2 3x+\sin^2 3x-3\cos x=8\sin(270°+x)$ принадлежит отрезку $\left[0;\ \frac{\pi}{2}\right]$?

Вариант 3

1. Найти $\operatorname{tg}(\alpha+45°)$, если $\operatorname{tg}\alpha=7^{\log_7 3}$.

2. Найти наименьшее общее кратное чисел: 175, 375, 735.

3. Решить уравнение

$$2^{24x}=\left(\frac{1}{4}\right)^{2}\cdot 4^{-4}\cdot 2^{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{27}\cdot 6^{\log_6 256^{1,5}}.$$

4. Вычислить производную функции $y=\frac{\cos x}{1+\sin x}$ в точке $x=\frac{\pi}{2}$.

5. Биссектриса угла между стороной и диагональю ромба пересекает другую диагональ его под углом 75°. Определить меньший угол ромба.

6. Решить уравнение $\log_{x-1}(x^3+x^2-10x+2)=2^{\log_2 3}$.

7. Решить неравенство $5^{x^2-x+3}<\left(\frac{1}{5}\right)^{5x}$ и найти середину промежутка, на котором оно выполняется.

8. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны $\sqrt{12}$ и 4 см. Его диагональ составляет с меньшей боковой гранью угол 30°. Найти высоту параллелепипеда.

9. Мотоциклист задержался у шлагбаума на 24 мин. Увеличив после этого скорость на 10 км/ч, он наверстал опоздание на перегоне в 80 км. Найти первоначальную скорость мотоциклиста.

10. Сколько корней уравнения

$$\sin^2 2x+\sin^2 6x+\cos^2 2x+8\sin^2 3x=1$$

принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$?

Вариант 4

1. Упростить выражение $\sqrt{\frac{a^0a^{-3,5}b^2}{a^{0,5}b^{-1}}}$ и вычислить его значение при $a=10$, $b=4$.

2. Найти меньший корень уравнения

$$\frac{x}{x+1}+\frac{4x+1}{4x+6}=\sin^2(-90°).$$

3. Увеличив цену раннего картофеля по сравнению с его первоначальной ценой на $^3/_{20}$, совхоз получил от продажи картофеля 2300 р. Сколько выручил бы совхоз, продав этот картофель по первоначальной цене?

4. Вычислить производную функции $y=x+\sin x\cos x$ в точке $x_0=\frac{\pi}{6}$.

5. Решить уравнение $2^{2\lg x}+3\cdot 2^{\lg x+1}=6^{\log_6 7}$.

6. В остроугольном треугольнике ABC сторона AB равна 8 см, CD — высота треугольника, причем $AD=BC=6{,}25$ см. Найти высоту AE треугольника ABC.

7. Найти сумму четырех первых членов геометрической прогрессии, если разность первого и второго членов равна 200, а разность второго и третьего равна 40.

8. Плоскость пересекает шар по окружности длиной 16π см. Найти расстояние от центра шара до плоскости, если радиус шара равен 10 см.

9. Сколько корней уравнения $\cos(90°-3x)-\sin x+3\cos 2x=0$ принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ \frac{\pi}{2}\right]$?

10. Решить неравенство $\log_2\frac{3x-1}{2x+1}\leqslant\log_7 1$ и найти наибольшее значение x, удовлетворяющее этому неравенству.

Вариант 5

1. Катер прошел 10 км по течению реки, а затем 4 км по озеру, затратив на весь путь 1 ч. Найти скорость течения реки, если собственная скорость катера 12 км/ч.

2. Вычислить $3^{0,5\log_9 16+\log_3 6}$.

3. Решить уравнение $\log_2(x+1)=\log_4(5-x)$.

4. Вычислить $13(\cos\alpha-2\sin\alpha)$, если $\operatorname{tg}\alpha=\frac{12}{5}$ и $\alpha\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$.

5. Найти наименьшее значение функции $f(x)=x+\frac{8}{x^4}$ на промежутке $[1; 3]$.

6. Решить уравнение

$$\sin\frac{x}{2}=\sqrt{2}\sin\frac{3x}{2}-\sin\frac{5x}{2}.$$

Указать количество корней, принадлежащих промежутку $\left[-\frac{\pi}{5};\frac{\pi}{3}\right]$.

7. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_{\frac{1}{\sqrt{3}}}(x+y)=-2,\\ 5^x=(0{,}04)^{y-2}.\end{cases}$$

8. Решить неравенство $5^{x^2-x+3}\leqslant\left(\frac{1}{5}\right)^{5x}$.

9. Площадь диагонального сечения правильной четырехугольной пирамиды равна 12 см^2, а сторона основания $3\sqrt{2}$ см. Найти объем пирамиды.

10. В параллелограмме $ABCD$ точка K — середина BC. Разложить вектор $\overrightarrow{EM}$ по векторам $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{AD}$, если $\overrightarrow{AE}={}^3/_2\,\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AM}={}^5/_8\,\overrightarrow{AD}$.

Вариант 6

1. Моторная лодка, скорость которой в стоячей воде равна 10 км/ч, проплыла по течению 91 км и вернулась обратно, затратив на весь путь 20 ч. Какова скорость лодки по течению?

2. Вычислить $\dfrac{\log_4 5-3\log_{16}625+\log_2\sqrt{5}}{\frac{3}{\log_5 16}+\frac{4}{\log_{25}64}}$.

3. Решить уравнение $\log_3(3^{2x}-6)=x$.

4. Решить неравенство $3\cdot5^{2x-1}-2\cdot5^{x-1}-0{,}2>0$ и назвать наименьшее целое число, которое является решением неравенства.

5. Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=2$.

6. Найти точки экстремума функции $y=2x^3-3x^2-4$. Вычислить квадрат расстояния между точками экстремума.

7. Решить уравнение $\cos 5x+\cos 3x=3\cos 4x$. Сколько корней на отрезке $[0;\ 2\pi]$ имеет уравнение?

8. Найти множество значений k, при которых трехчлен $(k+3)\,x^2-5x+\frac{5}{8}k>0$ при любом значении x. Указать наименьшее целое число из найденного множества.

9. В сектор радиуса $R=\frac{3}{\pi}$ вписан круг радиуса $r=\frac{R}{3}$. Найти длину дуги сектора.

10. Угол между высотой правильной треугольной пирамиды и апофемой равен 30°, а длина апофемы 12 см. Найти объем пирамиды.

Вариант 7

1. Мотоциклист задержался у шлагбаума на 24 мин. Увеличив после этого скорость на 10 км/ч, он наверстал опоздание на перегоне в 80 км. Какова первоначальная скорость мотоциклиста?

2. Вычислить $\log_3 5+\log_9 5+\log_{27} 125-\frac{1}{\log_{5^6} 9}+2\cdot 3^{\frac{2}{\log_2 3}}$.

3. Решить уравнение $32^{\frac{x+5}{x-7}}=0{,}25\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$.

4. Решить неравенство $16^{x+\frac{1}{2}}<15\cdot 4^x+4$. Указать наибольшее целое число, которое является решением неравенства.

5. Вычислить $y=\sqrt{40}\sin\beta\cos 2\beta$, если $\cos\beta=-\frac{1}{\sqrt{10}}$, $\operatorname{tg}\beta=-3$.

6. Найти точки экстремума функции $y=\frac{1}{4}(x-2)^2(x+4)$. Вычислить квадрат расстояния между точками экстремума.

7. Решить уравнение $\sin 6x-\sin 8x=4\cos 7x$. Сколько корней имеет уравнение на отрезке $[0;\ \pi]$?

8. Найти множество значений k, при которых уравнение

$$(k-12)\,x^2+2\,(k-12)\,x+2=0$$

не имеет корней. Вычислить среднее арифметическое целых значений k из этого множества.

9. В круговой сектор, дуга которого содержит 60°, вписан круг. Радиус сектора равен $\frac{9}{\sqrt{\pi}}$ см. Найти площадь вписанного круга.

10. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 45°. Найти плоский угол при вершине пирамиды.

Вариант 8

1. Расстояние 8 км катер проходит по течению реки на 10 мин быстрее, чем против течения. Найти скорость течения реки, если собственная скорость катера 14 км/ч.

2. Вычислить $\dfrac{2^{\log_{\sqrt{2}} 4}-3^{\log_{27} 17^3}-8}{7^{4\log_{49} 4}-5}$.

3. Решить уравнение $\frac{1}{8}\cdot 4^{2x-3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$.

4. Решить неравенство $4\cdot 3^x-6<2\cdot 9^x-12$. Указать наименьшее целое число, которое является решением неравенства.

5. Вычислить $\sin 2\alpha$, если $\sin\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{2\sqrt{10}}{5}$, $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$.

6. Найти точки экстремума функции $y=\frac{x}{2}+\frac{2}{x}$. Вычислить квадрат расстояния между точками экстремума.

7. Решить уравнение $\cos 4x+\sin 8x=4\sin\left(\frac{\pi}{4}+2x\right)$. Сколько корней на отрезке $[0;\ \pi]$ имеет уравнение?

8. Найти множество значений c, при которых уравнение $(c-2)x^2+2(c-2)x+2=0$ не имеет корней. Вычислить среднее арифметическое целых значений c из этого множества.

9. Сектор круга радиуса 6 имеет площадь, равную 12π. Найти отношение длины дуги этого сектора к числу π.

10. Объем правильной треугольной пирамиды равен $3\sqrt{3}$ см^3, двугранный угол при основании равен 30°. Определить сторону основания пирамиды.

Вариант 9

1. Не доехав 10 км до конечного пункта, велосипедист остановился на 10 мин. Затем, увеличив скорость на 5 км/ч, он прибыл в конечный пункт без опоздания. С какой скоростью он ехал после остановки?

2. Вычислить $\dfrac{3^{\log_{\sqrt{3}} 5}-2^{\log_8 (26)^3}-10}{4^{4\log_{16} 5}-6}$.

3. Решить уравнение $2^{x-1}+2^{x-2}+2^{x-3}=448$.

4. Решить неравенство $\left(\frac{1}{2}\right)^x-2^{x+1}<1$. Назвать наименьшее целое число, которое является решением неравенства.

5. Вычислить $84\,\mathrm{tg}\,(\alpha-\beta)$, если $\cos\alpha=0{,}6$, $\sin\beta=0{,}8$, α, β — острые углы.

6. Найти точки экстремума функции $y=\frac{x^2-6x+13}{x-3}$. Вычислить квадрат расстояния между точками экстремума.

7. Решить уравнение $\sin 4x+\sin 2x=3\sin 3x$. Сколько корней на отрезке $[0;\ 2\pi]$ имеет уравнение?

8. Найти множество значений k, при которых уравнение

$$x^2-(8k-2)x+(15k^2-2k-7)=0$$

имеет неравные корни. Найти целое значение k, которое принадлежит найденному множеству.

9. Площадь сектора равна 49 см^2, а длина дуги сектора равна 14 см. Определить радиус сектора.

10. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна $4\sqrt{3}$ см, а угол наклона боковой грани к основанию равен 60°. Найти объем пирамиды.

Вариант 10

1. Скорость парохода по течению реки в 1,5 раза больше его скорости против течения. Найти скорость течения, если расстояние 8 км по течению пароход проходит на 10 мин быстрее, чем против течения.

2. Вычислить $\dfrac{\log_4 25-\log_{16} 5+\log_2 \frac{1}{125}}{\frac{1}{\log_5 4}+\frac{2}{\log_{25} 16}}$.

3. Решить уравнение $0{,}5^{x^2}\cdot 2^{2x+2}=64^{-1}$. Назвать меньший корень уравнения.

4. Решить неравенство $2^x-2<2^{3-x}$. Назвать наибольшее лое число, которое является решением неравенства.

5. Вычислить $y=\sqrt{5}\left(2\cos\frac{\alpha}{2}+3\sin\frac{\alpha}{2}\right)$, если $\sin\alpha=-0{,}8$, $\pi<\alpha<\frac{3}{2}\pi$.

6. Найти точки экстремума функции $y=\frac{x^4}{4}-2x^2$. Вычислить площадь треугольника, вершины которого находятся в этих точках.

7. Решить уравнение $\sin 3x-3\sin 2x+\sin x=0$. Сколько корней принадлежит отрезку $\left[-\frac{\pi}{2};\ 0\right]$?

8. Найти множество значений k, при которых уравнение

$$(k-1)x^2+(k+4)x+(k+7)=0$$

не имеет корней. Найти сумму целых значений k, не принадлежащих найденному множеству.

9. Найти площадь сектора, если его центральный угол равен $\frac{\pi}{3}$, а длина дуги сектора равна $\sqrt{\pi}$.

10. В правильной четырехугольной пирамиде боковое ребро равно 4 см и наклонено к плоскости основания под углом 30°. Найти объем пирамиды.

Вариант 11

1. Два туриста выезжают одновременно из городов A и B навстречу друг другу. Первый проезжает в час на 2 км больше второго и приезжает в B на час раньше, чем второй в A. Расстояние между A и B равно 24 км. Какова скорость первого туриста?

2. Вычислить $\frac{1}{\log_5 3}+\frac{1}{\log_{125} 3}-\log_9 625-\log_3 225$.

3. Решить неравенство $2^x<3+4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^x$. Назвать наибольшее целое число, которое является решением неравенства.

4. Решить уравнение $(\sqrt{2})^{2x}\cdot 5^x=0{,}1\cdot(10^{x-1})^5$.

5. Вычислить $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$, если $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{4}{5}$.

6. Найти точки экстремума функции $y=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$. Вычислить квадрат расстояния между точками экстремума.

7. Решить уравнение $\sin 3x+\cos 5x=5\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$. Сколько корней на отрезке $[0;\ 4\pi]$ имеет уравнение?

8. Найти множество значений p, при которых неравенство $\frac{2-(p-3)x-x^2}{1+x^2}<3$ верно при любых значениях x. Найти сумму целых значений p, принадлежащих найденному множеству.

9. Круг, радиус которого равен $\frac{4}{\sqrt{\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}}}$, разделен на два сегмента хордой, равной стороне вписанного квадрата. Определить площадь меньшего из этих сегментов.

10. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро равно 6 см и наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найти объем пирамиды.

Вариант 12

1. За 30 мин моторная лодка проходит по течению реки такое же расстояние, какое за 40 мин против течения. Найти собственную скорость лодки, если 1 км против течения она проходит за 5 мин.

2. Вычислить $\frac{2}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_8 9}-\log_9 16-3\log_3 9\sqrt{2}$.

3. Решить уравнение $\sqrt{2^x}\cdot\sqrt{3^x}=2^{2\log_2 6}$.

4. Решить неравенство $2^x(1+2^x)<20$. Назвать наибольшее целое число, которое является решением неравенства.

5. Вычислить $36\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$, если $\sin\alpha=\frac{3}{5}$, $\cos\beta=\frac{15}{17}$, α, β — острые углы.

6. Найти точки экстремума функции $y=\frac{3-x^2}{x+2}$. Вычислить квадрат расстояния между точками экстремума.

7. Решить уравнение $\cos 3x-\sin 5x=3\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$. Сколько корней на отрезке $[0;\ 2\pi]$ имеет уравнение?

8. Найти множество значений p, при которых неравенство

$$\frac{x^2-(p-2)x+3}{2x^2+3}<2$$

верно при любых значениях x. Найти сумму целых значений p, принадлежащих найденному множеству.

9. Через одну и ту же точку окружности проведены две хорды, равные 3 и 4 см. Соединив концы этих хорд, получили треугольник, площадь которого равна 6 см^2. Определить радиус окружности.

10. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна $3\sqrt{6}$ см. Противоположные боковые ребра образуют угол 120°. Найти объем пирамиды.

Вариант 13

1. Знаменатель геометрической прогрессии равен -2, четвертый член этой прогрессии 32, а сумма всех ее членов равна -44. Найти число членов прогрессии.

2. Упростить выражение $\left(\frac{a^2-9}{a-3}-\frac{a^3-27}{a^2-9}\right):\frac{4a}{a+3}$.

3. Решить уравнение $\log_5(x+2)+\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(x+2)=-1$.

4. Вычислить $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta-\cos^2\beta\cdot\sin^2\alpha$.

5. Решить неравенство $(0{,}25)^{\frac{x+2}{x-1}}\leqslant\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{x-4}}$. Записать наибольшее целое число из множества решений.

6. Найти множество значений a, для которых корень уравнения $a^2-ax=x-a-1$ меньше -3. Записать наибольшее целое a из этого множества.

7. Решить уравнение $\frac{x-3}{x-2}=\frac{3x+1}{x+1}$. Найти корень, удовлетворяющий неравенству

$$\log_{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{2}\right)-\log_2 x\geqslant 1.$$

8. Найти наименьшее значение функции $y=x+\frac{4}{(x-2)^2}$ на отрезке $[3;\ 6]$.

9. Площадь прямоугольного треугольника равна 24 см^2, а один из катетов равен 8 см. Найти медиану, проведенную из вершины прямого угла.

10. В правильной четырехугольной призме площадь боковой грани равна $6\sqrt{2}$ м^2. Найти площадь диагонального сечения.

Вариант 14

1. Найти знаменатель геометрической прогрессии, если известно, что ее второй член равен 14, а сумма второго и пятого членов равна 126.

2. Упростить выражение

$$\left(\frac{4}{(1-a^2)^{-1}}+\frac{8}{a^{-2}}\right):\left(\frac{a^{-2}}{1+a^{-2}}\right)^{-1}.$$

3. Решить уравнение $\log_8 x+9\log_x 2=\frac{7}{2}$. Записать больший корень.

4. Вычислить $\sin^4\frac{\pi}{8}+\sin^4\frac{5\pi}{8}$.

5. Решить неравенство $\left(\frac{7}{4}\right)^{\frac{x-1}{x+5}}\leqslant\left(\frac{4}{7}\right)^{\frac{x}{3-x}}$. Записать наименьцелое число из множества решений.

6. Найти множество значений c, для которых корень уравнения $xc+2c=c^2+2x+1$ больше 4. Записать наименьшее целое число, принадлежащее этому множеству.

7. Найти наименьшее значение функции $y=\frac{1}{4}x^4-x^2+5$.

8. Решить уравнение $\frac{2x-1}{7x-6}=\frac{2}{x+3}$. Записать корень, удовлетворяющий неравенству $\log_{\frac{1}{3}}(x+\sqrt{x-1})>-1$.

9. Высота, опущенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, равна 12 см, а один из катетов равен 20 см. Найти площадь треугольника.

10. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда 4 3 см. Диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью основания угол α, так что $\operatorname{ctg}\alpha=35$. Определить площадь полной поверхности параллелепипеда.

Вариант 15

1. Найти пятый член арифметической прогрессии, у которой сумма второго и шестого членов равна 28, а разность прогрессии равна 3.

2. Упростить выражение

$$\left(\frac{1}{\sqrt{a^{-1}}\,(\sqrt{a}-6)}-\frac{3}{\sqrt{a}-6}+\frac{a}{36-a}\right)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{a}-6}\right)^{-1}.$$

3. Решить уравнение $\log_3(x^2-1)-\log_{\sqrt{3}}(x+1)=-1$.

4. Вычислить $\sin\alpha+\sin\left(\alpha-\frac{8\pi}{3}\right)+\sin\left(\alpha+\frac{14\pi}{3}\right)$.

5. Решить неравенство $\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{x+3}{x-1}} \geqslant \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{5+x}{2-x}}$. Указать наибольшее целое число из множества решений.

6. Определить множество значений m, для которых уравнение

$$1{,}5x+2m=\frac{1}{3}\,mx-2$$

имеет положительный корень ($x>0$). Записать наименьшее целое положительное m из этого множества.

7. Найти наименьшее значение функции

$$y=x^2(2x-3)-12(3x-2)$$

на отрезке $[-3;\ 6]$.

8. Решить уравнение $\frac{x+3}{x-1}=\frac{9x}{x+6}$. Записать корень, удовлетворяющий неравенству

$$\log_{\frac{1}{2}} \log_8 \frac{x^2-2x}{x+2}>0.$$

9. Площадь прямоугольного треугольника равна 54 см^2, а гипотенуза равна 15 см. Найти больший катет.

10. Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 7 см, а диагональ основания $2\sqrt{10}$ см. Определить объем призмы.

II тип (для экономических факультетов институтов)

Вариант 1

1. Найдите наименьший корень уравнения

$$(x^2-x-6)\lg(x+2)=0.$$

2. Решите уравнение $\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+5x\right)=\sin^2 x\cos 9x+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+4x\right)$. Сколько корней удовлетворяет неравенству $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$?

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} |x-1|+|y-5|=1, \\ y=5+|x-1|. \end{cases}$

4. Решите уравнение $\log_3\frac{3}{x}+\log_3^2 x=1$. Запишите наименьший целый корень.

5. При каких значениях a уравнение $(2-a)x^2-3ax+2a=0$ имеет корни x_1 и x_2, такие, что $x_1<\frac{1}{2}$, $x_2>\frac{1}{2}$?

6. Решите неравенство $|x-2|+|x|\leqslant 4$. Запишите наибольшее целое решение.

7. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 70 км, выехал велосипедист, а через некоторое время — мотоциклист, двигавшийся со скоростью 50 км/ч. Мотоциклист догнал

велосипедиста на расстоянии 20 км от пункта A. Прибыв в пункт B, мотоциклист через 48 мин выехал обратно в пункт A и встретился с велосипедистом спустя 2 ч 40 мин после выезда велосипедиста из пункта A. Найдите скорость велосипедиста.

8. Высота и биссектриса прямоугольного треугольника, опущенные из вершины прямого угла, равны соответственно 3 и 4. Найдите площадь треугольника.

Вариант 2

1. Найдите меньший корень уравнения $(x^2+2x)\sqrt{x+1}=0$.

2. Решите уравнение $(x^2-x+1)^{\frac{x-2}{x}}=1$.

3. Найдите решения системы, являющиеся рациональными числами:

$$\begin{cases} 2x^2-y=3, \\ 2y^2-x=3. \end{cases}$$

4. Решите уравнение $\log_{2x} x=\log_{4x} x$.

5. При каких значениях a уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x=a$ имеет решение?

6. Решите неравенство $x^2-7x+12<|x-4|$. В ответе записать целое решение.

7. Два бегуна стартовали один за другим с интервалом в две минуты. Второй бегун догнал первого на расстоянии 1 км от старта, а пробежав от старта 5 км, он повернул обратно и встретился с первым бегуном. Эта встреча произошла через 20 мин после старта первого бегуна. Найдите скорость второго бегуна.

8. В прямоугольном треугольнике ABC (C — прямой угол) CD — высота. Найдите расстояние между центрами окружностей, вписанных в треугольники CDB и ADC, если $BC=4$, $AC=3$.

Вариант 3

1. Найдите наибольший корень уравнения $(x-4)\sqrt{3+2x-x^2}=$ $=0$.

2. Решите уравнение $\sin^2\frac{3}{2}x+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{5}{2}x\right)=\sin^2\frac{11}{2}x+$ $+\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{13}{2}x\right)$. Сколько корней удовлетворяет неравенству $0<x<\frac{\pi}{4}$?

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=17, \\ x+xy+y=9. \end{cases}$

4. Решите уравнение $\log_{1-x} 3-\log_{1-x} 2=\frac{1}{2}$.

5. При каком значении a хотя бы одно число, большее 1, удовлетворяет неравенству $x^2-ax+2a\leqslant 0$?

6. Найдите целочисленные решения неравенства

$$\log_2\left(1+\frac{1}{x}\right)+\log_{\frac{1}{2}}\left(1+\frac{x}{4}\right)>1.$$

7. Пешеход вышел из пункта A в пункт B. Через 3/4 ч из A в B выехал велосипедист. Когда велосипедист прибыл в пункт B, пешеходу оставалось пройти 3/8 всего пути. Сколько времени потратил пешеход на весь путь, если известно, что велосипедист догнал пешехода на половине пути из пункта A в пункт B, а скорости велосипедиста и пешехода постоянны?

8. Найдите сторону квадрата, вписанного в прямоугольный треугольник с катетами, равными 3 и 4. Одна сторона квадрата лежит на гипотенузе.

Вариант 4

1. Найдите наибольший корень уравнения
$$(x-5)\lg(3x-x^2-1)=0.$$
2. Решите уравнение $5^x-4=5^{\frac{x-1}{2}}$.
3. Решите систему $\begin{cases}\log_{xy}(x+y)=0,\\ \log_{xy}(x-y)=0.\end{cases}$
4. Решите уравнение $\log_2 x\log_{2x}4x=\frac{3}{2}$.
5. Сколько корней уравнения $|\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x|=\frac{4}{\sqrt{3}}$ попадает на отрезок $\left[0;\ \frac{2}{3}\pi\right]$?
6. Решите неравенство $\sqrt{3x^2-2x-1}\geqslant 2x-2$. В ответе запишите сумму целых положительных корней.
7. Два лыжника стартовали на дистанции 10 км друг за другом с интервалом в 6 мин. Второй лыжник догнал первого в двух километрах от старта. Дойдя до поворота на отметке 5 км, второй лыжник повернул обратно и встретил первого на расстоянии 1 км от поворота. Найдите скорость первого лыжника.
8. Катеты прямоугольного треугольника равны 15 и 20. Найдите расстояние от высоты, опущенной из вершины прямого угла, до центра вписанной окружности.

Вариант 5

1. Найдите наименьший корень уравнения
$$(x+2)\sqrt{3+2x-x^2}=0.$$
2. Решите уравнение $9\cos^4 x-\sin^4 x=2\sin^2 x$. В ответе запишите сумму корней, удовлетворяющих неравенству $-1<x<3$.
3. Найдите целочисленные решения системы уравнений
$$\begin{cases}x+xy-y=13,\\ x^2y-xy^2=30.\end{cases}$$
4. Решите уравнение $\lg(2^x+x-13)=x-x\lg 5$.

5. Действительные числа x и y таковы, что $x+y=a-1$, $xy=a^2-7a+14$. При каком значении a сумма x^2+y^2 принимает наибольшее значение?

6. Решите неравенство $(|x|-3)(|x|+7)<0$. В ответе запишите сумму целых корней.

7. Пассажирский поезд вышел из пункта A в пункт B. Через 3 ч вслед за ним из A вышел скорый поезд. Скорый поезд догнал пассажирский на половине пути между пунктами A и B. В момент прибытия скорого поезда в пункт B пассажирский поезд прошел 13/16 расстояния от A до B. Сколько времени потратил пассажирский поезд на весь путь от A до B, если скорости движения пассажирского и скорого поездов постоянны?

8. Стороны AB и AC треугольника ABC равны соответственно 3 и 6. Длина высоты, опущенной из вершины A, равна полусумме высот, опущенных из вершин B и C. Найдите длину стороны CB.

Вариант 6

1. Найдите наименьший корень уравнения $(x^2-x-2)\lg x=0$.

2. Решите уравнение

$$2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}+3x\right)=1+\sin 4x+2\sin 5x\cos^2 x.$$

Сколько корней удовлетворяет неравенству $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$?

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} x^2+y+\frac{1}{4}=0, \\ x+y^2+\frac{1}{4}=0. \end{cases}$

4. Решите уравнение $\log_4\log_2 x+\log_2\log_4 x=2$.

5. При каких значениях a уравнение $\sin^4 x+\cos^4 x+\sin 2x+a=0$ имеет решение?

6. Решите неравенство $\log_2\left|\frac{x-1}{x+1}\right|>1$. В ответе запишите наименьшее целое решение.

7. Два пловца стартовали один за другим в пятидесятиметровом бассейне на дистанцию 100 м. Второй пловец плыл со скоростью 1,5 м/с и догнал первого на отметке 21 м, а затем, доплыв до противоположной стенки бассейна, повернул обратно и встретил первого пловца через 2/3 с после момента поворота. Найдите интервал времени между моментами старта пловцов.

8. Центр вписанной окружности делит высоту равнобедренного треугольника на отрезки, равные 5 и 3. Найдите стороны треугольника.

Вариант 7

1. Найдите наибольший корень уравнения $(x-5)\sqrt{5x-4-x^2}=$ $=0$.

2. Решите уравнение $5\sin x+6\sin 2x+5\sin(\pi-3x)+$

$+\cos\left(\frac{3}{2}\pi+4x\right)=0$. Сколько корней удовлетворяет неравенству $\frac{\pi}{2}<x\leqslant 5$?

3. Решите систему уравнений $\begin{cases} 2\lg\sqrt{x}+2^y+1=0, \\ \lg x^3+4^y-1=0. \end{cases}$

4. Найдите сумму корней уравнения $x^{1+\lg x}=100$.

5. При каких значениях a оба корня уравнения $ax^2-2(2a-1)x+2-3a=0$ больше 1?

6. Решите неравенство $2^{x^2-3}-0{,}01\frac{(10^{x-1})^3}{5^{x^2-3}}\leqslant 0$.

7. Теплоход отплыл из порта A в порт B. Через 7,5 ч вслед за ним из порта A вышел катер. На половине пути от A до B катер догнал теплоход. Когда катер прибыл в B, теплоходу осталось плыть 3/10 всего пути. Сколько времени потребовалось теплоходу на весь путь от A до B, если скорости катера и теплохода были постоянны на протяжении всего пути?

8. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Найдите ее радиус, если основания равны 2 и 3.

Вариант 8

1. Решите уравнение $\log_{\frac{x+3}{x-3}}4=2\left(\log_{\frac{1}{2}}(x-3)-\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}\sqrt{x+3}\right)$.

2. Решите уравнение $\cos(2\pi-5x)+2\sin 2x\cdot\sin 3x=\frac{3}{\pi}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ и запишите в ответе $x\in(270°;\ 420°)$.

3. Найдите середину отрезка, на котором выполняется неравенство $4x^2+4x+2(\sqrt{2x+1})^2\leqslant 34$.

4. Найдите сумму всех целых решений неравенства $2^x+\frac{9}{2^x}<10$.

5. Найдите значение выражения $\log_{\sqrt{a}}\sqrt{b}-\log_{\sqrt{b}}\sqrt{a}+\log_a\sqrt[4]{ab}$, если $\log_a b=0{,}5$.

6. В трапеции углы при одном из оснований имеют величины 20° и 70°, а длина отрезка, соединяющего середины оснований, равна 2. Найдите длину меньшего основания трапеции, если длина средней линии трапеции равна 4.

7. При каком значении параметра a уравнение $|x^2-2x-3|=a$ имеет ровно три решения?

8. В банке находится 81%-ный раствор. Из нее выливают 1/3 раствора и доливают водой до прежнего объема. Сколько раз надо повторить эту операцию, чтобы получить 16%-ный раствор?

Вариант 9

1. Решите уравнение $0{,}125\cdot 4^{2x-3}=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\right)^{-x}$.

2. Решите уравнение $\cos 3x+\sin\left(x+\frac{7}{2}\pi\right)=\sqrt{3}\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ и в ответе запишите решение, удовлетворяющее условию $90^\circ < x < 150^\circ$.

3. Решите неравенство $\log_x \frac{15}{1-2x} \leqslant -2$ и в ответе запишите наименьшее число, удовлетворяющее ему.

4. Найдите решение уравнения $(2|x|-1)^2=|x|$, принадлежащее области определения функции $y=\log_2(4x-1)$.

5. Найдите значение $\cos(\alpha-\beta)$, если $\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}$ и $\alpha+\beta=\frac{3}{2}\pi$.

6. Через концы дуги окружности, содержащей 120°, проведены касательные и в фигуру, ограниченную этими касательными и данной дугой, вписана окружность. Вычислите отношение длины исходной окружности к длине этой (вписанной) окружности.

7. При каком наибольшем целом значении параметра a уравнение $|2x^2-15x-8|=a$ имеет ровно четыре решения?

8. В банке находится 64%-ный раствор. Из нее выливают 1/4 раствора и доливают водой до прежнего объема. Сколько раз надо повторить эту операцию, чтобы получить 27%-ный раствор?

Вариант 10

1. Решите уравнение $\log_{\frac{x}{16}} 2+2\log_{\frac{x}{2}} 2\log_{\frac{x}{4}} 2=0$ и в ответе запишите меньший корень.

2. Решите уравнение $\sin 2x-2\cos^2 x+4(\sin x-\cos x+\operatorname{tg} x-1)=0$ и в ответе запишите $x\in(0^\circ;\ 90^\circ)$.

3. Найдите середину промежутка, на котором выполняется неравенство $x^2+7<6x+y^2$, где $y=(7-2x)^{\frac{1}{2}}$.

4. Найдите сумму всех четных решений неравенства $\frac{4^{\sqrt{x}+1}}{x}>2^{2\sqrt{x}-2}$.

5. Вычислите $\left(-\log_{\frac{a}{6}}\sqrt{a}+\log_{\frac{a^2}{b^2}} b+\log_b a^2\right)$, если $\log_b a=5$.

6. Найдите отношение диагонали к боковой стороне равнобедренной трапеции с основаниями 20 и 12 см, если известно, что центр описанной окружности лежит на большем основании трапеции.

7. При каком значении параметра a уравнение $|2x^2-5x+3|=a$ имеет ровно три решения?

8. В банке находится 32%-ный раствор. Из нее выливают 3/4 раствора и доливают водой до прежнего объема. Эту операцию повторяют столько раз, пока концентрация раствора не станет ниже 1%. Сколько раз нужно повторить эту операцию?

Вариант 11

1. Решите уравнение $4^{3x^2+x}-8=2\cdot 8^{x^2+\frac{x}{3}}$.

2. Решите уравнение $5\sin^2 x+3\sin 2x-3\cos^2 x=4$. В ответе запишите корень, удовлетворяющий условию $2\pi<x<\frac{5}{2}\pi$.

3. Решите неравенство $\log_{2x}(x^2-5x+6)<1$. В ответе запишите сумму целых его решений.

4. Найдите решение уравнения $(x-2)^2-6=|x-2|$, принадлежащее области определения функции $y=\operatorname{ctg}(x^2-25)$.

5. Найдите значение $\operatorname{tg} x$, если $6\operatorname{tg} x+\sin x-5\cos x=30$.

6. В прямоугольный треугольник, периметр которого равен 36 см, вписана окружность. Точка касания с окружностью делит гипотенузу в отношении 2:3. Найдите длину гипотенузы этого треугольника.

7. При каком наибольшем целом значении параметра a уравнение $|3x^2-11x-4|=a$ имеет ровно четыре корня?

8. В банке находится 33%-ный раствор. Из нее выливают половину раствора и доливают водой до прежнего объема. Эту операцию повторяют до тех пор, пока концентрация не станет меньше 1%. Сколько раз нужно повторить эту операцию?

Вариант 12

1. Решите уравнение $\frac{\lg(3x^2-25^{\log_5\sqrt{7}})-\lg(3x-7)}{\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{2}+1}=\sqrt[3]{2}-1$ и в ответе запишите больший корень.

2. Решите уравнение $\sin 2t\cos 2t(\sin^4 2t+\cos^4 2t-1)=\frac{1}{2}\sin^2 4t$ и в ответе запишите $t\in(45°;\ 60°)$.

3. Найдите наибольшее значение x, при котором справедливо неравенство $x^2+4(\sqrt{4-x})^2-21\leqslant 0$.

4. Найдите наименьшее нечетное положительное x, при котором справедливо неравенство $\frac{5^x}{2^{x-1}-5^x}<8-\frac{2^{x+1}}{5^x}$.

5. Найдите числовое значение выражения, предварительно упростив его: $\frac{2\log_2^2 3-\log_2^2 12-\log_2 3\cdot\log_2 12}{2\log_2 3+\log_2 12}$.

6. В шар объема 10 куб. ед. вписан конус, осевое сечение которого прямоугольный треугольник. Найдите объем конуса.

7. При каком значении параметра a уравнение $|-x^2+4x-5|=a$ имеет ровно три решения?

8. В банке находится 65%-ный раствор. Из нее выливают 3/4 раствора и доливают водой до прежнего объема. Сколько раз нужно повторить эту операцию, чтобы концентрация раствора не стала меньше 1,5%?

Вариант 13

1. Решите уравнение

$$\sin 6x - \cos\left(4x + \frac{3}{2}\pi\right) = \frac{4\sqrt{2}}{\pi} \operatorname{arctg} 1 \sin\left(5x - \frac{\pi}{2}\right)$$

и в ответе запишите решение, удовлетворяющее условию $0° < x < 50°$.

2. Решите уравнение $2^{4(x+1)^2} = \frac{1}{2} + 2 \cdot 4^{x(x+2)}$.

3. Решите неравенство $\log_{\frac{1}{2}}\left(\log_2 \frac{x}{1+x}\right) > 0$. В ответе запишите наибольшее целое решение.

4. Решите уравнение $(x+1)^2 + 2|x+1| = 3$. В ответе запишите корень, принадлежащий области определения функции $y = e^{\pi}$.

5. Найдите $\cos 2\alpha$, если $\operatorname{tg} \alpha = 2$.

6. Около шара объема 4 куб. ед. описан конус, осевое сечение которого равносторонний треугольник. Найдите объем конуса.

7. При каком наименьшем целом значении a уравнение $|2x^2 - 3x - 9| = -a$ имеет ровно четыре корня?

8. В резервуаре находится 49%-ный раствор. Из него выливают 6/7 раствора и доливают водой до прежнего объема. Сколько раз нужно повторить эту операцию, чтобы получить 1%-ный раствор?

III тип (для технических вузов и математических факультетов институтов)

Вариант 1

1. Решите уравнение $\sqrt{3x+7} + \sqrt{x-3} = 2\sqrt{x+1}$.

2. Из пункта A в пункт B отправился скорый поезд. Одновременно из B в A вышел товарный поезд, который встретился со скорым через 2/3 ч после отправления. Расстояние между пунктами A и B равно 80 км. С какой скоростью двигался скорый поезд, если 40 км он проходит на 3/8 ч дольше, чем товарный проходит 5 км?

3. Решите уравнение $\sin 2x + 2\sin\left(\frac{3}{2}\pi - 3x\right)\cos(\pi - 3x) = 1$.

4. Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству $\log_{x^2-1}(x+5) < 1$.

5. В равнобокой трапеции $ABCD$ основания $AD = 50$ см, $BC = 32$ см. Окружность проходит через точку пересечения продолжений боковых сторон, вершины B и C и касается основания AD. Найдите боковые стороны.

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$4(2a+1)(\sin^4 x + \cos^4 x) + 16(1-a)(\sin^6 x + \cos^6 x) + \\ + \cos 8x + a^2 - 9 = 0$$

имеет решение, принадлежащее отрезку $\left[0; \frac{\pi}{8}\right]$?

Вариант 2

1. Решите уравнение $\sqrt{x-2}+\sqrt{x+3}-\sqrt{6x-11}=0$.

2. Два пешехода вошли одновременно на мост длиной 0,9 км с противоположных сторон. Двигаясь навстречу друг другу, они встретились через 6 мин после того, как вошли на мост. Сколько километров в час проходит первый пешеход, если для преодоления 4 км ему требуется времени на полчаса больше, чем второму для преодоления 2,5 км?

3. Решите уравнение $\sin^6 x+\cos^6 x=\sin^2 x \cos^2 x$.

4. Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству $\log_{3x} 27x<\log_3 3x$.

5. В равнобокой трапеции $ABCD$ основания $AD=18$ см, $BC=14$ см. Найдите боковые стороны, если известно, что точка пересечения диагоналей, точка пересечения продолжений боковых сторон и точки B и C лежат на одной окружности.

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$4(a+4)(\sin^4 x+\cos^4 x)+8(1-2a)(\sin^6 x+\cos^6 x)+ \\ +\cos 8x+a^2+2a-16=0$$

имеет решение, принадлежащее отрезку $\left[0;\ \frac{\pi}{8}\right]$?

Вариант 3

1. Решите уравнение $\sqrt{-2(1+x)}-\sqrt{6-x}=1$.

2. Два автогонщика одновременно начали движение по шоссе в одном и том же направлении, причем второй гонщик в момент старта находился впереди первого на 20 км. Через час первый гонщик догнал второго. Какова скорость первого гонщика, если известно, что 50 км он преодолевает на 1/4 ч быстрее, чем второй 60 км?

3. Решите уравнение $\sin^3+\cos^3 x=1-0{,}5\sin 2x$.

4. Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{3x+4} x^2<1.$$

5. В равнобокой трапеции $ABCD$ основания $AD=8$ см, $BC=2$ см. Окружность проходит через вершины A и B боковой стороны и середину большего основания AD, причем центр окружности лежит на основании AD. Найдите площадь трапеции.

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$4(4a+1)(\sin^4 x+\cos^4 x)+8(a-1)(\sin^6 x+\cos^6 x)= \\ =\cos 8x+a^2+20a-5$$

имеет решение, принадлежащее отрезку $\left[0;\ \frac{\pi}{8}\right]$?

Вариант 4

1. Решите уравнение $\sqrt{5x+7}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}$.

2. Два жука, находящиеся на концах доски длиной 13 м, одновременно начинают ползти навстречу друг другу и встречаются через 1 ч после начала движения. Сколько метров проползает за час первый жук, если на путь в 10 м ему требуется времени на 1 ч больше, чем второму жуку на путь в 8 м?

3. Решите уравнение $\cos^6 x-\sin^6 x=3\sin^2 x\cos^2 x\cos 2x$.

4. Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству $\log_{x+5}(x^2-1)<1$.

5. В равнобокой трапеции $ABCD$ стороны $AD=18$ см, $AB=3$ см. Окружность с центром в точке пересечения диагоналей проходит через вершины B и C меньшего основания и касается боковых сторон. Найдите BC.

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$4a(\sin^4 x+\cos^4 x)+8(3-2a)(\sin^6 x+\cos^6 x)+\\+\cos 8x+a^2+4a-18=0$$

имеет решение, принадлежащее отрезку $\left[0;\ \frac{\pi}{8}\right]$?

Вариант 5

1. Решите уравнение $\sqrt{2x+5}-\sqrt{3x-5}=2$.

2. Легковой и грузовой автомобили движутся по шоссе навстречу друг другу. За 1/2 ч до того, как они встретились, расстояние между ними было 75 км. Найдите скорость легкового автомобиля, если на путь в 90 км ему требуется времени на 1/3 ч больше, чем грузовому на путь в 40 км.

3. Решите уравнение $\cos 3x-6\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3}{4}x\right)\sin\frac{3}{4}x=1$.

4. Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству $\log_{x^2-2x+1}(3-x)<1$.

5. В равнобокой трапеции $ABCD$ основания $AD=50$ см, $BC=18$ см. Окружность с центром в середине основания AD проходит через вершины B и C и касается боковых сторон. Найдите площадь трапеции.

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$8(2a+1)(\sin^4 x+\cos^4 x)+8(a-4)(\sin^6 x+\cos^6 x)+\\+\cos 8x+a^2-26a+15=0$$

имеет решение, принадлежащее отрезку $\left[0;\ \frac{\pi}{8}\right]$?

Вариант 6

1. Решите неравенство $\frac{2(4-x)}{x-3}-\frac{11(5-x)}{5(x-3)}\geqslant\frac{3(5-x)}{x-1}$.

2. Три больших и пять маленьких подъемных кранов, работая одновременно, разгружают баржу за 1 ч. За сколько времени

эту баржу разгрузят три больших крана, если известно, что один большой кран разгружает ее на 4 ч быстрее, чем один маленький?

3. Решите уравнение $(\cos 3x+\sin 3x)^2=1+\cos 2x$.

4. Решите уравнение $x^2-9^{\log_2(2x-1)}=x^2\cdot 9^{\log_2(2x-1)}-1$.

5. Центр окружности радиуса R, описанной вокруг трапеции, лежит на ее основании, а диагонали пересекаются под углом 60°. Найдите стороны трапеции.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $8(\sin^8 x+\cos^8 x)+a\cos^2 2x+3a-7=0$ имеет решение.

Вариант 7

1. Решите уравнение $\sqrt{x+4}+\sqrt{x-1}=\sqrt{4x+5}$.

2. Из пункта A в пункт B вышел пассажирский поезд. Одновременно из пункта C, находящегося между A и B, вышел в направлении B товарный поезд. Расстояние между A и C равно 40 км. Через 2 ч пассажирский поезд догнал товарный. Какова скорость пассажирского поезда, если на путь в 100 км он затрачивает на четверть часа больше, чем товарный на путь в 60 км?

3. Решите уравнение $\sin^3 x-\cos^3 x=1+0{,}5\sin 2x$.

4. Найдите все значения x, удовлетворяющие неравенству

$$\log_{x^2-x}(x+3)<1.$$

5. В равнобокой трапеции $ABCD$ основание $AD=25$ см, диагональ $AC=20$ см. Окружность с центром в точке пересечения продолжений боковых сторон AB и CD проходит через вершины меньшего основания B и C и касается диагоналей. Найдите площадь трапеции.

6. При каких значениях параметра a уравнение

$$4(9-a)(\sin^4 x+\cos^4 x)+8(4-a)(\sin^6 x+\cos^6 x)+$$
$$+\cos 8x+a^2-34=0$$

имеет решение, принадлежащее отрезку $\left[0;\ \frac{\pi}{8}\right]$?

Вариант 8

1. Решите неравенство $\frac{x+1}{x^2-9}-\frac{2}{x+3}\leqslant\frac{2x}{3x-x^2}$.

2. Большой экскаватор вырывает траншею на 4 ч быстрее, чем маленький. Работая одновременно, они могут вырыть ее за $2\frac{2}{3}$ ч. Сколько времени требуется большому экскаватору для рытья траншеи?

3. Решите уравнение $(\operatorname{ctg} x-1)\cos 2x=1+\operatorname{ctg} x$.

4. Решите уравнение $x\cdot 3^{\log_2(x^2-3)}-x+1=3^{\log_2(x-\sqrt{3})+\log_2(x+\sqrt{3})}$.

5. Окружность радиуса R, построенная на высоте AM треугольника ABC как на диаметре, пересекает стороны AB и AC в точках P и Q. $AP=3/4\,AB$, $AQ=1/4\,AC$. Найдите стороны треугольника.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $8(\sin^8 x+\cos^8 x)+a\cos 4x+2a+4=0$ имеет решение.

Вариант 9

1. Решите неравенство $\frac{1}{x+2}+\frac{1}{x^2-2x+4}\leqslant\frac{12}{x^3+8}$.

2. Двое рабочих выполнили вместе некоторую работу за 12 ч. Если бы сначала первый сделал половину этой работы, а затем другой — остальную часть, то вся работа была бы выполнена за 25 ч. За какое время мог выполнить эту работу каждый рабочий в отдельности?

3. Решите уравнение $\operatorname{tg} x=2\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)$.

4. Решите уравнение $x^2\cdot 2^{\log_x 2}-3\cdot 2^{\log_x 2+\log_2 x}=2x(x-3)$.

5. Окружность радиуса R, построенная на диагонали AC равнобокой трапеции $ABCD$ как на диаметре, касается боковой стороны CD и пересекает большее основание AD в точке M, так что $AM=3\,MD$. Найдите стороны трапеции.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $8(\sin^8 x+\cos^8 x)+a\sin^2 2x+5-3a=0$ имеет решение.

Вариант 10

1. Решите уравнение $\sqrt[3]{(x+3)(x-1)}=x+3$.

2. Из пунктов A и B навстречу друг другу выехали легковой и грузовой автомобили. Легковой автомобиль пришел в B на 1 ч раньше, чем грузовой в A, причем их встреча в пути произошла через 1 ч 12 мин после выезда. Сколько времени ехал из B в A грузовой автомобиль?

3. Решите уравнение $(1-\operatorname{tg} x)\cos 2x=1+\operatorname{tg} x$.

4. Решите уравнение $x\cdot 2^{\log_3(4x-x^2-2)}-x+4=4\cdot 2^{\log_3(4x-x^2-2)}$.

5. Равнобокая трапеция описана около окружности радиуса R. Боковая сторона трапеции вдвое длиннее меньшего основания. Найдите стороны трапеции.

6. Найдите все значения a, для которых уравнение

$$\sin^5 x+\cos^5 x=a(\sin x+\cos x)+(a-1)(\sin x+\cos x)\sin x\cos x$$

имеет хотя бы одно решение, принадлежащее интервалу $\left(-\frac{\pi}{4};0\right)$.

Вариант 11

1. Решите уравнение $\sqrt[3]{1-2x}+\sqrt[3]{2x+5}=\sqrt[3]{6}$.

2. Два насоса различной мощности, работая вместе, наполняют бассейн за 4/3 ч. Для наполнения бассейна наполовину первому насосу требуется времени на 2 ч меньше, чем второму для наполнения бассейна на 3/4. За какое время может наполнить бассейн второй насос?

3. Решите уравнение $(\cos 5x+\cos 7x)^2=(\sin 5x+\sin 7x)^2$.

4. Решите уравнение $x\cdot 3^{\log_2(x^2+4x+4)}+2=2\cdot 3^{\log_2(x^2-4x+4)}+x$.

5. В треугольнике ABC проведена медиана AM. Окружность радиуса R, построенная на AM как на диаметре, пересекает стороны AB и AC и отрезок MC в их серединах. Найдите стороны треугольника ABC.

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sin^5 x+\cos^5 x=a(\sin x+\cos x)$$

имеет решение на интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{4}\right)$.

Вариант 12

1. Решите уравнение $\sqrt[3]{3x+3}-\sqrt[3]{3x+1}=\sqrt[3]{2}$.

2. Два станка типа A и три станка типа B, работая одновременно, обрабатывают партию деталей за 1 ч. За какое время всю партию деталей может обработать один станок типа A, если один станок типа B выполняет эту работу на 2 ч медленнее?

3. Решите уравнение $(\cos 3x-\cos x)^2=(\sin 3x-\sin x)^2$.

4. Решите уравнение $x^2\cdot 2^{\log_3(x^2-x+1)}+4=9^{\log_3 x}+4\cdot 2^{\log_3(x^2-x+1)}$.

5. В равнобокую трапецию вписана окружность радиуса R, причем отрезок, соединяющий вершину большего основания с точкой касания окружности боковой стороны, проходит через центр окружности. Найдите стороны трапеции.

6. Найдите все значения a, при которых уравнение

$$\sin^5 x+\cos^5 x=a(\sin x+\cos x)^3$$

имеет решение на интервале $\left(0;\ \frac{\pi}{12}\right)$.

Вариант 13

1. Решите уравнение $\sqrt{x+12}-\sqrt{x+5}=\sqrt{4x-15}$.

2. В соревнованиях по бегу на дистанции 60 м участвуют три бегуна. Скорость первого из них больше скорости второго на 1 м/с, а скорость второго равна полусумме скоростей первого и третьего. Определите скорость третьего бегуна, если известно, что первый спортсмен пробежал дистанцию на 1,5 с быстрее третьего.

3. Решите уравнение

$$\sqrt{3}\sin^2(\pi+x)-(1+\sqrt{3})\cos x\cos\left(\frac{3}{2}\pi+x\right)+\cos^2 x=0.$$

4. Решите уравнение $16^{\log_x 2}x^{\log_2^2 x}=x^5$.

5. В трапеции $ABCD$ основания $AD=15$ см, $BC=10$ см и диагонали $AC=20$ см, $BD=15$ см. Найдите площадь треугольника ABQ, где Q — точка пересечения диагоналей трапеции.

6. Найдите все значения параметра a, для которых неравенство

$$\sin^5 x+\cos^5 x+a\sin x\cdot\cos x(\sin x+\cos x)\geqslant\frac{a^2+14}{16}(\sin x+\cos x)$$

выполнено при всех x, удовлетворяющих условию $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{12}$.

Вариант 14

1. Решите уравнение $\frac{\sqrt{9-x}}{\sqrt{4-x}}=\frac{3\sqrt{1-x}}{\sqrt{4-3x}}$.

2. Скорый поезд движется на 20 км/ч быстрее пассажирского, а скорость пассажирского поезда равна полусумме скоростей скорого и почтового поездов. Найдите скорость почтового поезда, если ему требуется для прохождения расстояния в 100 км 40 мин больше, чем скорому.

3. Решите уравнение

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=3\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right).$$

4. Решите уравнение $x^{\log_2 x}2^{\log_x^2 2}=4$.

5. Боковые стороны трапеции $ABCD$ равны $AB=6$ см, $CD=8$ см, а основания $BC=16$ см и $AD=26$ см. Найдите расстояние между серединами оснований.

6. Найдите все значения a, для которых неравенство

$$\sin^5 x+\cos^5 x+a(\sin^3 x+\cos^3 x)+\frac{a^2-4}{4}(\sin x+\cos x)\geqslant 0$$

выполнено при всех x, удовлетворяющих условию $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$.

Вариант 15

1. Решите уравнение $\sqrt{x+4}-\sqrt{2x+1}-\sqrt{3x+1}=0$.

2. На предприятии работают три машинистки разной квалификации. Первая печатает в час на 2 листа больше, чем вторая, у третьей на печатание листа уходит на 4 мин больше, чем у первой, и в 4/3 раза больше времени, чем у второй. Сколько листов в час печатает первая машинистка?

3. Решите уравнение $\sin^4 x-\cos^4 x=1$.

4. Решите уравнение $10^{(6\log_x 10)^2-13}x^{\lg x}=1$.

5. В треугольнике ABC сторона AC равна 26 см, а медианы, проведенные из вершин A и C, равны соответственно 36 и 15 см. Найдите третью медиану.

6. Найдите все значения параметра a, для которых неравенство

$$\sin^5 x+\cos^5 x-a(\sin x+\cos x)\geqslant\frac{a^2-11}{2}(\sin x+\cos x)\sin x\cos x$$

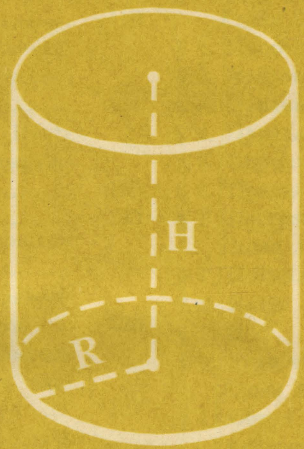
выполнено при всех x, удовлетворяющих условию $0\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{4}$.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Стереометрия

ЦИЛИНДР

(ПОВЕРХНОСТИ И ОБЪЕМЫ)



1. БОКОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ЦИЛИНДРА:

$$S = 2\pi RH$$

2. ПОЛНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ЦИЛИНДРА:

$$S = 2\pi R(H + R)$$

3. ОБЪЕМ ЦИЛИНДРА:

$$V = \pi R^2 \cdot H$$

4. ОБЪЕМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ТРУБКИ:

$$V = \pi H(R^2 - r^2)$$

КОНУС
(ПОВЕРХНОСТИ И ОБЪЕМЫ)

1. БОКОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ КОНУСА:

$$S = \pi R l$$

2. ПОЛНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ КОНУСА:

$$S = \pi R(l + R)$$

3. ОБЪЕМ КОНУСА:

$$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$$

4. БОКОВАЯ ПОВЕРХНОСТЬ УСЕЧЕННОГО КОНУСА:

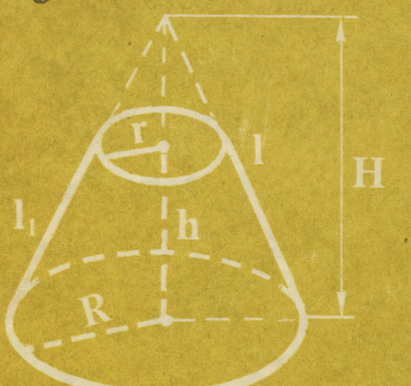
$$S = \pi l_1(R + r)$$

5. ПОЛНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ УСЕЧЕННОГО КОНУСА:

$$S = \pi (R + r) l_1 + \pi R^2 + \pi r^2$$

6. ОБЪЕМ УСЕЧЕННОГО КОНУСА:

$$V = \frac{1}{3}\pi h(R^2 + r^2 + Rr)$$



30-00