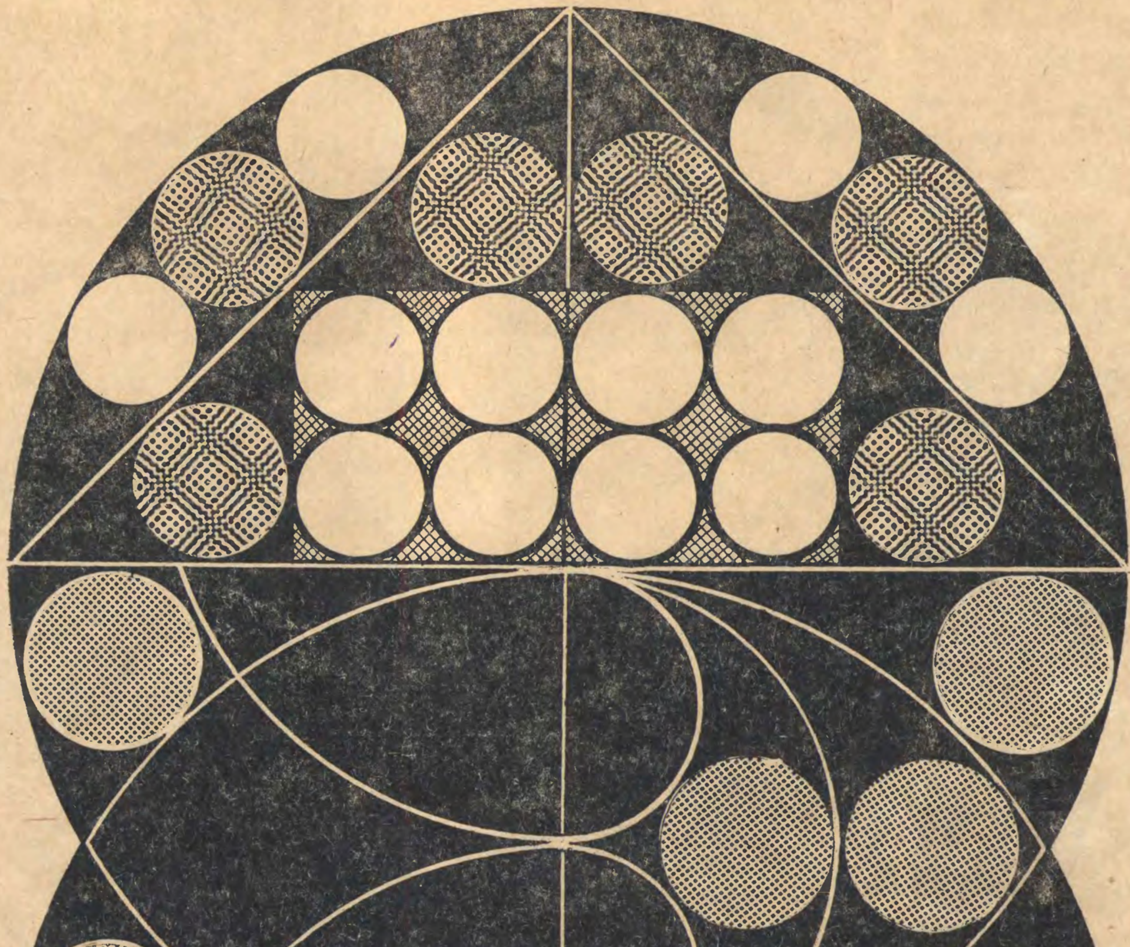
МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ

1·77



МАТЕМАТИКА В ШКОЛЕ

ЯНВАРЬ ФЕВРАЛЬ 1 · 1977

СОДЕРЖАНИЕ

Зав. редакцией *З. В. Шепелева* — Художественный редактор *Б. Ф. Рябов*
Технический редактор *Л. С. Владимирская* — Корректор *Э. М. Боклаженко*

Требование XXV съезда — повысить качество и эффективность всей нашей работы — это требование самой жизни. Оно должно быть выполнено. На этом сейчас должна быть сосредоточена вся энергия партии и народа.

(Из речи Генерального секретаря ЦК КПСС товарища Л. И. Брежнева при награждении его орденом Ленина и второй медалью «Золотая Звезда» Героя Советского Союза.)

Пятилетка — дело каждого

Советский народ встретил новый, 1977 г. славными трудовыми подвигами — успешным выполнением плана первого года десятой пятилетки.

Свой вклад в великое дело осуществления решений XXV съезда КПСС вносят учителя школ, сосредоточивая свои усилия на совершенствовании учебно-воспитательного процесса.

Учителя математики завершают огромный по своей значимости труд по введению новых программ во всех классах средней школы, овладевают методами развивающего обучения, осваивают накопленный передовой опыт.

В десятой пятилетке перед нами, работниками фронта народного образования, как и перед всеми трудящимися страны, стоит задача, указанная Генеральным секретарем ЦК КПСС Л. И. Брежневым в речи на пленуме ЦК КПСС 25 октября 1976 г.: «научиться более эффективно бороться за повышение эффективности».

Поставленная партией великая цель завершения перехода ко всеобщему среднему образованию молодежи как по продолжению обучения после окончания восьмилетней школы, так и по выпуску из средних учебных заведений в основном выполнена. Почти 97% выпускников восьмилетних школ в текущем учебном году продолжают занятия в различного рода средних учебных заведениях.

Однако осуществляемая впервые в истории грандиозная задача — дать всем детям полноценное среднее образование — необычайно сложна. Исходя из этого, необходимо рассматривать возникающие трудности, с этих позиций искать пути их преодоления объединенными усилиями ученых, педагогов-практиков, всех деятелей народного образования. Здесь нет легкого пути, простых решений.

В развернувшейся борьбе за повышение качества обучения и воспитания надо решительно пресекать все еще имеющиеся иногда попытки вместо необходимой серьезной работы с полным напряжением сил создавать картину мнимого благополучия за счет снижения требовательности, завышения оценок успеваемости. Все отрицательные последствия этой негодной практики с достаточной убедительностью раскрываются на страницах нашей центральной печати и справедливо встречают суровое осуждение.

Непрерывная работа учителя над пополнением своего идейного и научного багажа, повышением педагогического мастерства, правильное сочетание требовательности к учащимся с отзывчивостью и вниманием к каждому ученику, хорошая организация учебного процесса, умелое руководство детским коллективом и постоянная опора на широкую общественность — единственно верный путь для решения поставленных перед нами задач. Успешная учебно-воспитательная работа, сохранение контингента учащихся, решение задачи всеобщего среднего образования — это не только забота о всестороннем развитии каждого члена нашего общества. Здесь кроются и важные резервы для повышения производительности труда. Этот достаточно ясный для нашего времени факт находит все новые и весомые подтверждения.

Так, по данным обследования, проведенного на ЗИЛе, в среднем по мере увеличения школьного образования на один год тарифный разряд рабочего повышается на 2,7%. Другое обследование показало, что один год обучения в средней школе повышает производительность труда рабочего в среднем на 30%.

Как известно, в восьмидесятые годы прирост населения в трудоспособном возрасте значительно снизится, что связано с отдаленными последствиями войны. Поэтому уже сейчас перед нашей восьмилетней и средней школой с большей, чем в прошлые годы, остротой стоит важнейшая задача по воспитанию готовности учащихся к производительному труду, к овладению профессиями, нужными для нашей промышленности и сельского хозяйства, для сферы обслуживания.

Современное производство предъявляет повышенные требования и к общей культуре рабочего, и к его профессиональному мастерству. Поэтому из года в год возрастает значение подготовки квалифицированных рабочих кадров, особенно через систему профессионально-технического образования. В десятой пятилетке прием в дневные профессионально-технические училища будет увеличен по сравнению с девятой пятилеткой в 1,2 раза. При этом прием молодежи в профессионально-технические училища, дающие среднее общее образование, и технические училища увеличится более чем в два раза.

В связи с этим перед школой, перед каждым учителем стоит важная задача по профессиональной ориентации учащейся молодежи. Конечно, эта работа должна выполняться в тесном взаимодействии с местными организациями, деятелями промышленности и сельского хозяйства.

Воспитание готовности к труду, понимание его общественной значимости, формирование необходимых для трудовой деятельности устойчивых навыков выполнения полученных заданий проходит и в учебной и во внеучебной работе со школьниками. Учитель математики почти ежедневно встречается со своими питомцами, и это позволяет ему ближе войти в мир интересов, раздумий и желаний каждого из них. К тому же овладение таким предметом, как математика, требует от учащихся значительных усилий, постоянного внимания, привычки к самостоятельному труду, развивает стремление к творческим поискам. Поэтому правильная постановка преподавания математики не только может, но и должна способствовать выработке у учащихся ценных для трудовой деятельности качеств.

У каждого учителя много хороших помощников. Однако самые трудные задачи по творческому овладению новым содержанием учебного предмета, по оттачиванию своего методического мастерства, продумыванию путей индивидуального подхода к каждому ученику, подготовке к необходимым в воспитательной работе доверительным беседам учителю приходится решать одному, и это требует значительного времени. Поэтому бережное отношение к дорогому времени учителя должно стать нормой в работе каждой школы.

Наша молодежь, оканчивающая восьмилетнюю и среднюю школу, все более и более активно стремится к участию в творческом созидательном труде советского народа. Ярким свидетельством этого является широкий отклик среди выпускников школ, поддержанный партией, — славный почин молодых костромичей, вставших после окончания школы на трудовую вахту в родных селах.

Важным каналом получения всеобщего среднего образования молодежи в десятой пятилетке будет вечерняя (заочная) школа работающей молодежи. Резерв молодежи, работающей в народном хозяйстве и не имеющей среднего образования, для вовлечения в средние школы еще очень большой. Характерной особенностью последних лет является усиление в вечерних и заочных школах старшего контингента при снижении возрастного уровня учащихся. Так, в прошлом учебном году из 5 млн. молодых тружеников, обучающихся в этих школах, 90% обучалось в старших (IX—XI) классах, свыше 60% составляла молодежь в возрасте до 20 лет.

Все это ставит перед органами народного образования, перед учителями школ ряд новых задач по совершенствованию системы вечернего и заочного образования, особенно содержания и методов обучения.

В ряде случаев решение задач, стоящих перед вечерним (заочным) образованием работающей молодежи, требует объединенных усилий органов народного образования с общественными организациями и хозяйственными руководителями предприятий и учреждений. Уже сейчас приняты постановления по ряду принципиально важных вопросов. По 20 отраслям народного хозяйства соответствующие министерства рекомендовали предприятиям и организациям присваивать молодым рабочим разряды по некоторым профессиям с учетом наличия у них среднего образования или обучения в вечерней (заочной) школе.

В десятой пятилетке такие решения получат свое дальнейшее продолжение.

Развитое социалистическое общество, многообразные потребности современного производства, возрастающие духовные запросы советских людей предъявляют все более высокие требования к школе.

Пятилетка — кровное дело всего советского народа. Она требует полного напряжения сил в борьбе за эффективность и качество своего труда.

Учитель продолжает себя в своих учениках. Славные трудовые дела его питомцев, их честное служение Родине послужат дальнейшему развитию нашего советского общества.

Готовясь достойно встретить 60-летие Великого Октября, учителя математики добьются новых успехов в повышении качества обучения и воспитания молодого поколения!

МЕТОДИЧЕСКИЙ ОТДЕЛ

М. В. ПОТОЦКИЙ
(Москва)

СЛОВО УЧИТЕЛЯ В ПРЕПОДАВАНИИ МАТЕМАТИКИ

Известно, что *слово* — основное орудие в работе учителя. Однако широко распространено мнение, что поскольку в математике существует свой, особый язык формул, то роль обычной устной или письменной речи в преподавании математики значительно скромнее, чем во многих других областях человеческого знания. Но так ли это? Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Что значит «понимать математический текст»?

Когда речь идет о конкретных геометрических образах или об элементарных алгебраических понятиях, этот вопрос разрешается просто.

Пусть школьник слышит от учителя или читает в учебнике следующий текст: «Длина окружности радиуса R есть предел последовательности $p_3, p_4, p_5, \ldots, p_n, \ldots$ периметров правильных 3, 4, 5, ..., n...-угольников, вписанных в эту окружность». Если школьник знает, что обозначает слово «предел», «последовательность» и т. д., то он *понимает* и смысл этого определения, и вывод формулы, и саму эту формулу $C=2\pi R$.

Пусть школьник читает: «Всякое уравнение вида $ax^2+bx+c=0$, где a, b и c — некоторые числа, причем $a\neq 0$, а x — переменная, называется квадратным уравнением». Он сразу понимает, что такое квадратное уравнение.

Эти тексты или им подобные ясны потому, что здесь речь идет о конкретных математических образах или понятиях — «окружность», «квадратное уравнение» и т. д.

Однако дело резко меняется в связи с введением в школу общих понятий (множество, производная, вектор и т. д.), которые требуют от учащегося более высокого уровня абстрактного мышления.

Рассмотрим примеры. Пусть школьнику сказано только то, что записано ниже:

1. «Производная $f'(x_0)$ функции f в точке x_0 есть предел

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}»．$$

2. «Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное

$$|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\widehat{(\vec{a},\ \vec{b})}».$$

Понятны эти определения или нет? Как будто бы да. Что здесь можно не понимать? Все термины школьнику ясны, что такое $f(x_0)$ и $f(x_0+\Delta x)$, он знает. Он может даже на основе этих формул решать задачи. Например, если $y=x^5$, то ученик найдет, что $y'=5x^4$. Если ему сказать, что $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=4$, а угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 60°, то он найдет:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot 4\cdot\frac{1}{2}=6.$$

Обычно считается, что если школьник умеет решать задачи «на данную формулу», то он уж наверняка ее понимает. Однако в данном случае можно утверждать, что в двух последних определениях это не всегда так. Спросим школьника: «Откуда взялись эти формулы? Зачем они нам нужны? Что они нам дают?»

Школьник сможет ответить только одно: «Не знаю. Так сказал учитель. Так записано в учебнике». Можем ли мы это назвать пониманием?

Посмотрим, как определяет психология термин *понимание:* понимание — это раскрытие существенного в предметах и явлениях действительности. «Понять что-нибудь — значит выяснить *причину* явления, *следствие,* к которому оно ведет, т. е. включить его в систему *причинно-следственных* связей, раскрыть *происхождение* и *развитие* явления, ответить на вопросы: «Почему и как это произошло?», «Зачем это делается?» (Психология. Учебник для педагогических институтов. Под ред. А. А. Смирнова и др. М., 1956, с. 263). Отсюда вытекает, что для понимания формул и абстрактных понятий часто мало дать их определение или указать смысл входящих в них символов, надо дополнить их словесными разъяснениями. В преподавании это часто так и делается. Так, в случае с производной обычно разъясняется, что производная определяет мгновенную скорость, ускорение, тангенс угла наклона касательной и т. д. В отношении скалярного произведения говорят, что с его помощью вычисляется работа силы на определенном пути и т. д. После этого все приведенные выше вопросы отпадают и смысл термина выясняется [1].

Однако разъяснение смысла новых понятий делается далеко не всегда. Так, понятие векторного произведения даже в вузовских учебниках редко сопровождается объяснением того, почему оно введено и в чем его значение. Чрезвычайно важное понятие группы вводится определением. Но настоящего усвоения понятия группы у учащегося не будет без ответа на естественные вопросы: «Почему вообще надо вводить понятие группы? Почему группа определяется именно такими условиями, а не другими?» и т. д. В учебной литературе таких объяснений обычно не бывает.

Чрезвычайно показательным в отношении объясняющей роли слова является и следующий пример. В физике хорошо известны формулы, выражающие преобразования Лоренца. При одном и том же значении входящих в них букв Лоренц и Эйнштейн трактовали их по-разному. Лоренц понимал их в духе механики Ньютона, как указывающие на сокращение стержня в направлении его движения, а Эйнштейн — как основу специальной теории относительности, дающую представление о различном течении времени в различных системах координат. Итак, оба ученых пришли к одним и тем же математическим формулам из различных словесно сформулированных идей. И только знание этих *словесных* исходных формулировок позволяет понять и смысл самих формул.

Отсюда вывод: хотя в математике и считается часто, что «формулы говорят сами за себя», однако это далеко не всегда верно. Формулы чаще молчат. И только устное или письменное слово может заставить их заговорить.

Надо обстоятельно объяснить, *откуда* мы пришли к необходимости вывести данную формулу и *для чего* она служит, *как* мы ее будем применять и т. д. При этом желательно по возможности связывать эти разъяснения не с отдельными случайными единичными приложениями, а с большими проблемами реальной действительности.

Особенно важную и трудную для учителя роль играют общие методологические объяснения, которые в математике во многих случаях совершенно необходимы.

Так, например, чтобы сделать изучение математики сознательным, учитель должен в какие-то моменты преподавания объяснить школьнику, *почему* мы доказываем данные теоремы, а не какие-нибудь другие, каковы наши цели и задачи при изучении предмета и т. д.

О строгости, точности и краткости математической речи

Новые программы большое внимание уделяют характеру преподавания. Его нужно вести на более высоком уровне общности, абстрактности и строгости, что должно способствовать лучшему и более глубокому усвоению математики. Что же значит — излагать *строго* и как сделать, чтобы строгость способствовала лучшему пониманию и усвоению математики? Рассмотрим сначала два с виду парадоксальных положения.

Можно излагать предмет логично и строго, но он не будет понят школьником, хотя преподносится с формальной стороны на доступном ему уровне. Такое положение легко себе представить. Действительно, строгое изложение предполагает объяснение всех логических элементов, всех деталей рассуждений и выкладок, точный учет всех оговорок, исключительных случаев, условий применимости и т. д. В этих условиях мысль школьника, еще недостаточно привыкшего к такому изложению, легко может быть отвлечена всеми этими деталями в сторону от основной идеи. Ученик потеряет нить рассуждений и перестанет их понимать.

Объяснение может быть проведено не строго, часто в чем-то не логично и быть правильно понятым. Школьник усвоит его и сможет решать на этот материал задачи. Действительно, если рассуждение отчетливо выделяет основную мысль, использует хорошие, близкие к жизни примеры, то даже явное нарушение правил логики (в виде отсутствия упоминания о различных исключительных случаях, нестрогое обобщение частных случаев и т. д.) часто нисколько не вредит существу дела. Школьник правильно поймет материал и научится хорошо решать задачи.

Исходя из сказанного, мы можем утверждать, что *строгость и точность речи очень полезны, если они сопровождаются обстоя-*

[1] Здесь можно указать, например, такие книги, как «Алгебра. Учебное пособие для IX—X классов школ с математической специализацией» *Н. Я. Виленкина, Р. С. Гутера, С. И. Шварцбурда, Б. В. Овчинского, В. Г. Ашкинузе* или «Аналитическая геометрия» *М. М. Постникова*, где уделяется внимание выяснению методологических вопросов.

тельными словесными объяснениями. Для понимания вывода должно быть указано, *в чем* идея и цель вывода, *к чему* мы стремимся, *почему* употреблено то, а не иное слово или выражение, что будет, если мы заменим это выражение другим или не оговорим такое-то исключение, и т. д. Если все это объяснено, то строгий вывод очень полезен. Он даст возможность школьнику понять идею вывода, необходимость точного математического языка, роль каждого слова в точной математической формулировке и научит учащегося самого рассуждать строго. Но та точка зрения, что если дана строгая формулировка, то рядовой школьник всегда ее сам поймет, а если и не поймет, то все равно сам научится рассуждать логично,— по меньшей мере наивна.

Часто говорят, что математику надо излагать *кратко.* Верно. Но эту краткость не всегда понимают правильно. Иногда считают, что «кратко» — значит уложиться в минимальное число слов. Вряд ли с этим можно всегда согласиться. Конечно, в формулировке аксиомы, теоремы или определения не должно быть *ни одного слова,* которое можно было бы выбросить без изменения смысла формулировки. Однако, как мы видели, сплошь и рядом необходимо *объяснить* смысл всех слов, входящих в эти формулировки, объяснить идею доказательства и т. д. А это делается *словами.* Поэтому слово «кратко» мы будем понимать так: *сказать кратко — это значит сказать все, что нужно, и не говорить ничего лишнего.* (Заметим, что *лишние* слова не только не нужны, но и опасны: они могут отвлечь внимание школьника совсем в иную сторону и тем усложнить понимание материала). Сто́ит вспомнить слова Паскаля, который говорил, что как излишне сжатое, так и излишне растянутое изложение затемняют его смысл. (*Е. М. Кляус, И. Б. Погребысский, У. И. Франкфурт.* Паскаль. М., 1971, с. 249).

Но как узнать, что *«нужно»* и что *«лишнее»*? В этом учителю должны помочь понимание того, как мыслит учащийся, и его собственный такт педагога. Во всяком случае школьникам надо показать *истоки* нового понятия в практике и в предшествующих разделах курса, *объяснить мысль,* лежащую в основе вывода формулы, рассказать о ее применении.

Автору этой статьи во времена его студенчества пришлось слушать лекции и доклады двух замечательных математиков и лекторов: Н. Н. Лузина и А. Я. Хинчина. Их лекции, с точки зрения числа слов, были *крайне многословны,* но никто этого не замечал и никто на это не жаловался, потому что все их слова были нужными. Помню один из докладов А. Я. Хинчина в Математическом обществе. Огромная доска почти пуста: в середине ее записана лишь одна строчка формул. Но об этих формулах докладчик рассказал так, что казалось, они живые: мы знали, как они рождались, чем полезны и о чем говорят. Пусть это будет примером и для педагога, пусть математическая формула сопровождается содержательной речью учителя, объясняющей ее смысл.

Слово должно служить и «управлению» в преподавании, т. е. учитель должен объяснить ученику, что более важно и что менее важно, какую формулу нужно уметь вывести, какую достаточно только знать, что полезно запомнить надолго, какие задачи надо уметь решать быстро, может быть, в уме и т. д.

Звуковая сторона речи учителя

Остановимся еще на одной стороне работы учителя в классе. Хотя она и является одной из важнейших, но тем не менее ей, ввиду ее явной «очевидности», редко уделяется внимание в педагогической литературе.

Я имею в виду *живое звучащее слово* учителя на уроке, обращенное к ученикам. Именно эта *звуковая* сторона речи учителя играет часто решающую роль в усвоении ими математики. Иными словами, если бы все то, что учитель *говорит* на уроке, мы бы записали на листке бумаги и предъявили этот листок ученикам для *чтения,* то эффект этих записанных слов был бы неизмеримо ниже, чем эффект этих же слов, *произнесенных* учителем.

Напомним, какое огромное впечатление производит выступление артиста с чтением какого-нибудь художественного произведения по сравнению с чтением этого же произведения по книге.

Речь учителя на уроке обладает богатейшими возможностями. У него их даже больше, чем у артиста, который произносит чужой текст. Учитель всегда высказывает *свою* мысль. Он может выбирать любые слова для ее выражения и располагать их в любом порядке. И вот наблюдение показывает, что громкость или приглушенность речи учителя, ее быстрота или замедленность, все богатства ее интонаций, ее эмоциональная окраска обладают огромной впечатляющей силой, *речь учителя решительно влияет на усвоение или запоминание учениками даже чисто математических предложений.*

Мы не можем сейчас точно объяснить с психофизиологической стороны это воздействие звука устной речи на усвоение предмета, но несомненно одно, что никакой, даже самый лучший, учебник не может заменить живого слова учителя.

Какие выводы следуют отсюда?

Прежде всего отметим, чего *не должен делать учитель*. Он не должен подражать актеру и репетировать свою речь или жесты, готовясь к уроку. Актер репетирует свое выступление, так как он заранее знает, *что* и *как* он должен исполнять, независимо от реакции зрительного зала. Совсем другое положение у учителя. Он знает, *о чем* будет говорить в классе, но почти совсем не знает, в какой обстановке это будет происходить. Класс может быть спокоен или возбужден, он может сразу усваивать материал или нет, ученики могут по ходу объяснения задавать учителю вопросы или молча слушать его — и все это будет влиять на речь учителя. Поэтому заранее заготовленные фразы, жесты и мимика могут оказаться неуместными и только вызвать смех учеников.

Но что же *может* и *должен* сделать учитель в направлении улучшения своей речи? Прежде всего он *должен знать*, как велико влияние его речи, и с вниманием относиться к ней. Он должен говорить просто, понятно и отчетливо, не спеша. В речи учителя не должно быть никаких органических дефектов, если они устранимы. Учитель должен быть терпелив и сдержан, чтобы не раздражаться, даже отвечая на вопросы, которые ему кажутся заведомо несерьезными. Этого может и должен достигнуть любой учитель.

И, наконец, важнейшее. Учитель должен любить преподавание. Тогда в его речи сами собой появятся и та эмоциональная окраска, и та благожелательность, которые всегда привлекают учащихся к учителю и с большой силой влияют на успешность преподавания.

З. И. МОИСЕЕВА, Е. Г. ГЛАГОЛЕВА, Б. В. СОРОКИН
(Москва)

О НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ РАБОТЫ ДЕВЯТЫХ КЛАССОВ

В 1975/76 учебном году девятые классы школ с русским, украинским и белорусским языками обучения впервые работали по новой программе и учебным пособиям по математике.

Главное управление школ Министерства просвещения СССР и НИИ содержания и методов обучения АПН СССР с начала учебного года вели наблюдение за ходом работы девятых классов по новой программе. Массовые проверки состояния преподавания математики были проведены в школах Киргизии (ноябрь 1975 г.) и Белоруссии (февраль 1976 г.). Регулярные наблюдения проводились также в отдельных школах Москвы, Московской области и некоторых других территорий.

В данной статье, в основном, используются материалы проверки состояния преподавания и качества знаний учащихся в школах Гомельской области (Белорусская ССР). В ходе этой проверки учащиеся выполняли письменные контрольные работы по алгебре и началам анализа и по геометрии. Письменной проверке подверглись более 2500 учащихся IX класса школ г. Гомеля, райцентров Мозырь и Калинковичи и сельских школ Речицкого и Калинковичского районов; около 250 учеников было опрошено устно. В отличие от прошлых лет, каждый из отвечавших был опрошен практически по всему пройденному материалу либо по алгебре и началам анализа, либо по геометрии.

Алгебра и начала анализа

Письменная работа по алгебре и началам анализа была в основном посвящена центральной теме курса IX класса «Предел функции и производная». Она включала в себя четыре задания. Приводим текст одного из вариантов работы (в скобках указан процент учащихся, верно выполнивших задание).

1. Найдите предел:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^4-7x^2+5}{x^2+2x-2}$; (92%)

б) $\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{x^2+4}{x-2}+2x\right)$. (87%)

2. а) $f(x)=5-2x^2+7x^5$. Найдите $f'(x)$. (91%)

б) $g(x)=\dfrac{x^3-3}{2x}$. Найдите $g'(x)$ и $g'(5)$. (67%)

в) $h(x)=(1-x^2)\cdot x$. Найдите $h'(0)$. (58%)

3. Для функции $f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$:

а) найдите $f'(x)$; (77%)

б) постройте график функции $y=f(x)$; (63%)

в) пользуясь графиком функции $y=f(x)$, выясните, является ли она возрастающей на промежутке $]0;\ 1[$. Какой знак имеет $f'(x)$ на этом промежутке? (60%).

4. Изобразите на координатной прямой множество решений неравенства $|x-2|\leqslant 1$ и за-

пишите это множество в виде числового промежутка. (53%)

В отличие от письменной работы вопросы для устной беседы с учащимися охватывали практически весь материал, пройденный ко времени проверки. Приводим эти вопросы.

1. По определению производной найдите производные функций $f(x)=3x-2$ и $g(x)=x^2$. Вычислите скорость изменения каждой из этих функций при $x=5$.

2. а) Решите систему неравенств

$$\begin{cases} x>0,(72), \\ x>0,725. \end{cases}$$

б) Изобразите на координатной прямой множество решений неравенства $|x+1|<2$ и запишите это множество в виде числового промежутка.

3. На рисунках[1] изображены графики функций, каждая из которых задается одной из следующих формул:

1) $y=2x$, 2) $y=2x-1$, 3) $y=2x+1$, 4) $y=-x+2$, 5) $y=x^2$, 6) $y=x^3$, 7) $y=x^4$, 8) $y=\sqrt{x}$, 9) $y=2^x$, 10) $y=\lg x$, 11) $y=\frac{1}{x}$, 12) $y=\frac{1}{x^2}$, 13) $y=|x|$, 14) $y=\frac{x}{|x|}$.

Укажите, какой формуле соответствует какой график.

4. Сколько можно составить различных трехзначных чисел из цифр 6, 7, 8 и 9 так, чтобы в каждом числе цифры не повторялись?

5. а) Изобразите геометрически последовательность $x_n=\frac{n-1}{n}$. Имеет ли эта последовательность предел?

б) Укажите, какая из следующих последовательностей имеет предел: 1) $x_n=n-1$; 2) $y_n=\frac{1}{2n-1}$.

6. Известно, что функция $y=\sqrt[3]{x}$ непрерывна в точке с абсциссой $x=8$. Имеет ли эта функция предел при $x\to 8$? Если да, то чему он равен?

7. В учебнике алгебры для VIII класса приводится такое рассуждение:

«По определению арифметической прогрессии:

$a_2=a_1+d;$
$a_3=a_2+d=(a_1+d)+d=a_1+2d;$
$a_4=a_3+d=(a_1+2d)+d=a_1+3d;$
$a_5=a_4+d=(a_1+3d)+d=a_1+4d.$

Легко сообразить, что

$a_6=a_1+5d;$
$a_{10}=a_1+9d;$
$a_{23}=a_1+22d.$

Вообще $a_n=a_1+d(n-1)$».

Можно ли на основании приведенных рассуждений утверждать, что:

а) $a_5=a_1+4d$ — верно;

б) $a_n=a_1+d(n-1)$ — верно для всех $n\in N$?

С письменной работой справились 80,5% писавших, однако процент выполнения отдельных заданий имеет значительный разброс. Так, задание на нахождение пределов функций верно выполнили 76,4% учащихся, а задание, где требовалось построить график функции и по графику определить, является ли она монотонной, довели безошибочно до конца 52% писавших. При устном опросе ответили удовлетворительно 75% учащихся, из них 9% — на «5». Большинство девятиклассников обнаружили удовлетворительное знание основных вопросов изученного материала. Они умеют находить предел функции с использованием теорем, практически все учащиеся овладели навыками дифференцирования многочлена и степенной функции, обладают достаточно широким запасом представлений о графическом изображении числовых функций и т. д.

Анализ письменых работ и устного опроса, а также наблюдения на уроках выявили некоторые недостатки, возникшие при освоении нового курса алгебры и начал анализа IX класса. В ряде случаев причины этих недостатков довольно ясны, что позволяет наметить возможные пути их устранения. Так, например, первое задание письменной работы допускало два способа решения: первый основан на использовании теорем о пределах, он требует громоздких записей и отнимает много времени; второй основан на имеющейся в учебном пособии теореме о непрерывности дробно-рациональной функции. Второй способ более экономен, запись решения получается компактной:

«Так как дробно-рациональная функция $f(x)=\frac{x^4-7x^2+5}{x^2+2x-2}$ определена при $x=0$ $(0^2+2\cdot 0-2\neq 0)$, то $f(x)$ непрерывна при $x=0$ и

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^4-7x^2+5}{x^2+2x-2}=\frac{0^4-7\cdot 0^2+5}{0^2+2\cdot 0-2}=-\frac{5}{2}\text{ »}.$$

При анализе работ было выявлено, что в значительной части классов учащиеся не воспользовались вторым, более рациональным способом. Это указывает на то, что учитель, очевидно, не понял места теоремы о непрерывности дробно-рациональной функции в курсе и не сумел объяснить учащимся смысл поня-

[1] Каждый ученик получал дополнительно лист с графиками этих четырнадцати функций, расположенными в другом порядке.

тия непрерывности функции и особенно его связь с понятием предела. Это же подтверждают данные устного опроса и другие наблюдения. Так, при ответе на шестой вопрос лишь 25% учащихся смогли дать полный и обоснованный ответ: «Предел функции $y=\sqrt[3]{x}$ при $x \to 8$ существует и равен $\sqrt[3]{8}$, т. е. 2, потому что функция $y=\sqrt[3]{x}$ непрерывна при $x=8$».

В письменной работе подавляющее большинство девятиклассников справились с несложными упражнениями на нахождение производной. Заметим, что сравнительно невысокий процент верно выполнивших это задание зачастую связан с тем, что учащиеся ошибались не при дифференцировании, а в тождественных преобразованиях и в вычислениях.

Устный опрос подтвердил, что техника дифференцирования у большинства учащихся удовлетворительная. Однако нельзя сказать, что учащиеся получили четкие представления о производной и ее применении. Так, многие из отвечавших не понимали, что значит найти производную по определению, не знали, что скорость изменения функции в точке есть значение ее производной в этой точке. Наибольшие затруднения вызвал вопрос о скорости изменения линейной функции, хотя в учебном пособии, в п. 37 разобран пример, поясняющий, что производная линейной функции постоянна (см. также: Методическое письмо Министерства просвещения СССР. «Математика в школе», 1975, № 6, с. 17—26).

И в контрольной работе, и при устном опросе проверялось умение решать неравенства типа $|x-a|<b$. В учебном пособии такие неравенства рекомендуется решать, опираясь на понятие расстояния между числами. Указанный способ решения обеспечивает в дальнейшем более глубокое усвоение одного из главных, опорных понятий анализа — понятия окрестности точки, на котором базируется изучение предела функции, производной и т. д. Однако проверка показала, что значительная часть учителей требует от учащихся только аналитического способа решения таких неравенств, забывая о значении геометрического толкования этих неравенств для дальнейшего изложения курса.

Устный опрос показал также, что значительное число школьников не справляется с геометрическим изображением членов последовательности и с «угадыванием» предела, а также с решением вопроса о сходимости последовательностей (вопрос 5). По-видимому, причиной такого положения является излишняя формализация изложения этих вопросов. На наш взгляд, изучение последовательностей и их пределов должно опираться на геометрическую интерпретацию понятия предела, причем следует свести до минимума формальные определения и доказательства теорем. Такой характер изложения будет способствовать накоплению наглядных представлений о «поведении» последовательностей, которые явятся основой для изучения последующих тем курса (см. статью «Об изучении последовательностей и их пределов в IX классе». «Математика в школе», 1976, № 5). При этом будут повторяться и развиваться первоначальные представления о функциях, которые получены учащимися в восьмилетней школе. Без такой работы эти знания могут оказаться утраченными, что и обнаружилось при проверке знаний учащихся. Например, третье задание письменной работы выполнили верно 52% писавших, причем 36,6% ошиблись при построении графика функции вида $y=ax^2$. При устном опросе проверялись два уровня владения функциональными представлениями. Оказалось, что с третьим заданием справились примерно $^2/_3$ школьников. Более подробный анализ ответов учащихся показал, что характер знаний большинства отвечавших — пассивный; практически все девятиклассники узнают графики линейной и квадратичной функций, однако каждый третий не смог построить графики функций $y=ax^2$ и $y=x^2-1$, хотя при изучении этого материала в восьмилетней школе учащиеся строили такие графики практически безошибочно.

Геометрия

Контрольная работа по геометрии в отличие от работы по алгебре и началам анализа проверяла усвоение учащимися не только последних тем, но и вопросов, изученных в начале учебного года. Приводим текст одного из вариантов письменной работы.

1. Постройте сечение параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через ребро D_1C_1 и точку P — середину ребра AB.

2. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ точка M — середина ребра CC_1. Разложите вектор $\overrightarrow{AM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AA_1}$.

В первом задании проверялось наличие у учащихся наглядных представлений о взаимном расположении прямых и плоскостей в пространстве, умение выполнить, описать и обосновать построение. При решении этой задачи подавляющее большинство девятиклассников поняло постановку задачи и смогло на наглядном уровне выполнить построение (только 8,1% писавших не смогли построить требуемое сечение). Однако, как показал анализ, многие из них затруднялись при обосновании выполненных построений (только 32,5% учащихся решили задачу полностью, выполнив построение и правильно обосновав его). Выяснилось, что многие учащиеся и не понимают необходимости этих обоснований. Такое положение, как правило, наблюдалось у учащихся целого класса, а отсутствие обоснования обычно не было отмечено при проверке даже как недочет. Это дает основание считать, что некоторые учителя не объяснили ученикам, что обоснование построения является необходимой частью решения задачи на построение.

Задания, проверявшие понимание логической структуры геометрии, развитие пространственных представлений, знание основных фактов об отношениях фигур в пространстве и т. п., предлагались учащимся и при устной беседе. Приводим текст таких вопросов.

1. Прямые a и b параллельны плоскости α. Каково взаимное расположение прямых a и b? Сделайте чертеж.

2. Может ли сечение треугольной пирамиды быть: а) треугольником; б) четырехугольником; в) пятиугольником?

3. Прямые a и b перпендикулярны прямой c. Параллельны ли прямые a и b?

4. Верно ли, что все прямые, пересекающие две данные параллельные прямые, принадлежат одной плоскости? Почему?

5. Даны две пересекающиеся плоскости. Можно ли провести плоскость, пересекающую обе данные плоскости по параллельным прямым?

6. Постройте сечение тетраэдра плоскостью, проходящей через три данные точки.

В третьем, четвертом и пятом заданиях проверялось умение вообразить предложенную ситуацию, знание случаев взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве. Верно и с обоснованием на эти вопросы ответили около половины учащихся; примерно $^1/_3$ девятиклассников представляет ситуацию, но не может обосновать свой ответ. При ответах на 1-й и 3-й вопросы, где нужно было представить взаимное расположение двух прямых в пространстве, многие учащиеся пропускали случай скрещивающихся прямых; это говорит о том, что особенности трехмерного пространства не вполне осознаны ими.

Характерно, что большинство отвечавших не прибегало к простейшему моделированию ситуации, значительная часть их не могла изобразить требуемую пространственную фигуру. Все это указывает на оторванность теоретических знаний от наглядных представлений.

В шестом задании учащимся предлагалось построить три сечения тетраэдра. Сечение по трем точкам на пересекающихся ребрах строили практически все (92%). Выполнение построений в более сложных случаях, проверявших сообразительность учащихся и умение применять теорию, показало, что некоторые сведения усвоены ими формально. Так, часть учеников ошибочно полагали, что четырехугольное сечение тетраэдра всегда имеет две параллельные стороны.

Как в письменной работе, так и при устных ответах учащиеся допустили значительное число ошибок в употреблении символов, показали неумение кратко записывать условие задачи.

Первая половина письменной работы и устного опроса по геометрии была посвящена традиционному для школы материалу, вторая — проверяла усвоение учащимися новой для школы темы «Векторы». Приводим тексты вопросов для устной беседы, относящихся к этой теме.

7. Каким должен быть множитель k в равенстве $\vec{a} = k \cdot \vec{b}$, чтобы: а) векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ были коллинеарны; б) $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$; в) $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$?

8. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб. Точка M — точка пересечения диагоналей грани DCC_1D_1. Разложите вектор $\overrightarrow{DM}$ по векторам $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AA_1}$.

9. Докажите, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$.

10. $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Найдите $\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA_1} + \overrightarrow{DA_1}$.

Задание письменной работы проверяло умение разложить вектор по трем некомпланарным составляющим, что особенно важно для курса физики. Верно выполнили все задание 73,5% писавших, больше затруднений это упражнение вызвало у школьников сельских школ. Аналогичный по содержанию, но несколько более сложный вопрос предлагался учащимся при устной беседе (задание 8); с этой задачей справилось более половины отвечавших.

Анализ ошибок, допущенных при выполнении второго задания письменной работы, а также данные устного опроса по теме «Векторы» свидетельствуют о том, что около трех четвертей учащихся удовлетворительно усвоили эту тему, т. е. умеют оперировать с векторами: складывать и вычитать векторы, умножать вектор на число; знают законы операций с векторами и умеют их применять, понимают постановку задачи о разложении вектора и т. п. Однако тревожит тот факт, что в письменной работе около 25% девятиклассников не справились с заданием или допустили ошибки. Очевидно, отдельные учителя увлеклись решением сложных задач на применение векторов и не отработали необходимого минимума умений, определенного методическим письмом Министерства просвещения СССР (см.: «Математика в школе», 1975, № 6).

Наблюдения на уроках дали возможность в ряде случаев выявить причины обнаруженных при проверке недостатков знаний. Так, отсутствие необходимых наглядных представлений у учащихся может быть объяснено тем, что учитель недостаточно использует моделирование на уроках геометрии, геометрические иллюстрации вводимых понятий на уроках алгебры и начал анализа. Иногда это связано с тем, что содержание математического образования в IX классе претерпело существенные изменения и учитель, не владея достаточно свободно теоретическим содержанием курса, боится отступить от изложения материала, приведенного в учебном пособии, и основное внимание уделяет технической и формально-логической стороне изучаемого, а не разъяснению учащимся наглядного смысла вводимых понятий и теорем. Повышение научного уровня преподавания, являющееся характерной особенностью новой программы, не должно приводить к излишней формализации изложения. Не нужно забывать старые испытанные методические приемы, которые складывались десятилетиями и не потеряли своей значимости в новых условиях.

Учитель зачастую не может верно расставить акценты при изучении нового материала. С этим связан выявившийся при анализе результатов контрольной работы факт, что значительная часть учителей затрудняется в оценке знаний учащихся. Членам бригады часто приходилось не только понижать, но и повышать оценки школьникам, так как учитель не сумел выявить главную часть работы и не смог определить, в какой мере поставленная задача решена.

Как известно, изучение математики в VI и IX классах всегда было трудным для учащихся. Это связано с тем, что обучение в указанных классах проводится на более высоком уровне по сравнению с предыдущими классами и переход оказывается слишком резким. Проблема преемственности между курсами восьмилетней и средней школы не решена в должной мере и в новых учебниках математики. В этой связи следует особо отметить такой серьезный недостаток в работе части учителей, как отсутствие систематического повторения. В ряде случаев содержание урока требовало обращения к пройденному ранее, но учитель или совсем обходил эти вопросы, или ограничивался краткой ссылкой на них.

Обсудив итоги проверки знаний и умений учащихся девятых классов по математике, коллегия Министерства просвещения СССР отметила, что состояние преподавания по новой программе и учебным пособиям и качество знаний учащихся девятых классов в основном удовлетворительны. Все учителя, с работой которых знакомилась бригада, добросовестно относятся к своему делу, однако обнаруженные при проверке недостатки указывают на необходимость серьезной и кропотливой работы по дальнейшему совершенствованию методики преподавания предмета.

Посещение уроков и анализ ошибок учащихся приводят к мысли о том, что основным звеном в решении задачи освоения новой программы является повышение квалификации учителя, его математической и методической подготовки. Поэтому основной задачей органов народного образования, методистов, администрации школ следует считать выявление трудностей в работе учителя математики и организацию конкретной, действенной и своевременной помощи ему. Одной из форм такой помощи может служить обобщение и распространение опыта тех учителей, которые нашли эффективные методы изложения нового для школы материала.

Ф. М. БАРЧУНОВА, П. Б. РОЙТМАН (Москва)
Н. Н. ГУРОВА (Московская обл.)

ОРГАНИЗАЦИЯ ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНОГО ПОВТОРЕНИЯ МАТЕРИАЛА ГЕОМЕТРИИ В X КЛАССЕ

На заключительное повторение геометрии в X классе отводится 17 ч. Большая ответственность за эти уроки ложится на учителя. Независимо от того, будет ли ученик сдавать экзамен по геометрии в X классе или нет, будет ли он поступать в вуз или пойдет на работу, его знания необходимо привести в систему, повторив наиболее важные вопросы курса.

В данной статье приведена разработка 15 уроков заключительного повторения, в том числе 2 контрольные работы. Последние 2 урока из семнадцати мы оставили как резерв времени учителя; на них можно продолжить решение задач на комбинацию многогранников и фигур вращения и по усмотрению учителя доработать те вопросы, которые он считает нужным. Необходимо отметить, что результативность заключительного повторения во многом зависит от того, как проводилось систематическое повторение в течение всего учебного года. Мы приводим лишь один из возможных вариантов заключительного повторения. Учитель может его использовать частично или вообще взять свой вариант повторения с учетом конкретного коллектива класса, однако в любом случае это должно быть сочетанием повторения теории с решением задач.

Структура уроков повторения различна. На некоторых уроках учителем проводится обзорная лекция: 1) Логическое строение геометрии; 2) Прямые и плоскости в пространстве. Параллельность; 3) Отображения.

Урок 55 в статье приведен полностью, включая лекцию учителя и решение задачи с обоснованием. Для остальных лекций мы указали те вопросы и замечания, которые желательно в них отразить. Естественно, что материал лекции должен иллюстрироваться имеющимися таблицами, моделями, кадрами из диафильмов и кинофильмов и т. д. Все необходимые рисунки и записи к лекции должны быть заранее заготовлены на доске. В эти же уроки можно включить и доказательство отдельных предложений учащимися; чертежи и записи к ним тоже полезно заготовить заранее.

Можно рекомендовать отдельные наиболее трудные теоремы, например теорему об объеме пирамиды, рассказать самому учителю или поручить наиболее сильному ученику, предварительно прослушав его доказательство. Это важно: у учащихся будет образец хорошего четкого рассказа. Тему «Двугранные углы» тоже лучше рассказать самому учителю, так как она рассматривалась в конце IX класса и теория этого вопроса была учащимися усвоена недостаточно четко.

Для того чтобы повторение было эффективным, к каждому уроку составлены вопросы и темы сообщений, которые должны подготовить ученики. Это поможет учащимся правильно организовать работу по повторению. Все эти материалы следует вывесить на стенде в классе еще в III четверти для ознакомления с ними учащихся. Большинство вопросов взято из учебного пособия «Геометрия 10» из раздела «Вопросы для повторения» (с. 69—72). Давая тему небольшого сообщения для учащихся, мы фактически указываем и план ее раскрытия. В некоторых темах имеется несколько теорем, но доказательство требуется только для тех, которые в плане подчеркнуты; они же являются первым заданием одного из экзаменационных билетов. В домашнем задании указывается: «Подготовиться к уроку 55»; это означает подготовить вопросы, приведенные к этому уроку в плане, а для подчеркнутой теоремы подготовить и доказательство. Раскрывая тему, ученик остальные теоремы должен только сформулировать, но, учитывая, что часть учащихся будет поступать в вуз, надо разъяснить им, что для вступительных экзаменов в вуз доказательство этих теорем надо знать.

Устные упражнения в большинстве случаев проводятся во время подготовки учащихся к ответу. Они включают как вопросы, данные для подготовки к уроку, так и другие, необходимые для углубления материала темы, решения задач и т. д.

На каждом уроке решаются задачи. Задачи, предложенные для решения в классе, даны в основном не из учебного пособия. Краткая запись условия задачи должна быть заранее заготовлена на доске, и по этой записи учитель расскажет ее содержание учащимся. Решение этих задач проводится с использованием готовых рисунков тех фигур, которые даются в задаче. Нет необходимости каждый раз делать полный рисунок при решении задач на комбинацию многогранников и фигур вращения; можно показать соответствующие кадры из диафильмов «Изображение круглых тел» (автор И. Вейцман), «Изображение геометрических тел» (авторы В. Семаков и Г. Левитас) или готовые таблицы; для решения же достаточно ограничиться планиметрическим рисунком, на котором содержатся данные и искомые элементы задачи. В некоторых случаях можно обойтись и совсем без чертежа. Отдельные задачи следует решать с полным письменным обоснованием, записывая его по возможности кратко (учащиеся могут написать название теоремы, если оно имеется, краткую формулировку ее или ее номер, если они его помнят). Часть задач можно решать с устными обоснованиями, а иногда составить только план их решения.

Полезно в течение всего учебного года, а во время заключительного повторения особенно, помещать на стенде образцы оформления решения задач на вычисление, доказательство, построение, а также и решение задач, предлагаемых в качестве необязательных (в статье эти задания обозначены н. з.).

В статье приведены 4 таблицы, которые удобно использовать при повторении материала и для самоподготовки учащихся; их тоже следует поместить на стенде вместе с вопросами для повторения.

Приводим примерный план повторения (в последней графе этой таблицы указаны имеющиеся по темам диафильмы и кинофильмы; естественно, эту графу таблицы на стенде помещать не надо).

Примерный план повторения

№ урока	Вопросы и темы сообщений	Источник	Таблицы, диафильмы, кинофильмы
1	2	3	4
54	1. Схема построения курса геометрии	§ 1	
	2. Вопросы 1—8 из Г-10, с. 69	Г-9, с. 113, 114; Г-10, с. 91—92	
	3. Плоскость, касательная к сфере: определение, признак	§ 64	
55	1. Вопросы 37, 40, 38 (1) из Г-10, с. 70	Г-10, с. 96, 97	Табл. 1; д/ф «Параллельность прямых и плоскостей в пространстве» (автор А. Михайловская); д/ф «Проекции и построение пространственных фигур», кадры 6—9 (автор И. Вейцман); к/ф «Стереометрия», раздел 2 (автор А. Позак)
	2. Параллельные прямые: определение, доказательство существования, признаки		
	3. Теорема от трех параллельных прямых. Транзитивность параллельности прямых. Связка параллельных. Параллельное проектирование и его свойства	§ 8, 12	
	4. Скрещивающиеся прямые: определение, доказательство существования, признак	§ 6	
	5. Прямая и плоскость параллельные: определение, доказательство существования, признак	§ 7	
56	1. Параллельные плоскости: определение, доказательство существования, признак (теорема 6). Сформулировать другие признаки	§ 10, 33	То же, что на уроке 55
	2. Вопрос 34 из Г-10, с. 70		
	3. Задача о проведении параллельных плоскостей через две скрещивающиеся прямые	§ 11	
57	1. Вопросы 9—33 из Г-10, с. 69, 70	§ 14—27, 31, 32, 46	То же, что на уроке 55, и табл. 2
	2. Правило параллелепипеда. Теорема о разложении вектора по трем некомпланарным векторам	§ 23	
	3. Теорема о двух выпуклых углах с соответственно сонаправленными сторонами; угол между направлениями; угол между двумя ненулевыми векторами	§ 24	
58	1. Прямая и плоскость перпендикулярные: определение, признак, следствия	§ 28	К/ф «Стереометрия», раздел 2 (автор А. Позак)
	2. Задача о проведении через данную точку перпендикуляра к данной плоскости. Единственность решения	§ 29	
	3. Вопрос 48 из Г-10, с. 71		
59	1. Теорема о двух перпендикулярах к плоскости. Обратная теорема	§ 30	То же, что на уроке 58
	2. Ортогональное проектирование на плоскость	§ 30	
	3. Теорема о трех перпендикулярах	§ 36	
60	1. Угол между наклонной и плоскостью: доказательство существования угла с наименьшей величиной между наклонной к плоскости и прямыми плоскости; определение угла между наклонной и плоскостью	§ 37	То же, что и на уроке 58, и табл. 3
	2. Двугранный угол: определение, элементы двугранного угла; линейный угол, его определение и свойства; измерение двугранного угла	§ 38	
	3. Плоскости перпендикулярные: определение, признак, обратная теорема	§ 39	
	4. Вопросы 45 (4), 46 (4) и 49 из Г-10, с. 71		
62	1. Вопросы 55—59, 62 из Г-10, с. 71	§ 47, 54	Кинофрагмент «Призма»
	2. Призма: определение, доказательство существования, виды призм	§ 48	Д/ф «Правильные многогранники» (автор И. Вейцман)

1	2	3	4
	3. Параллелепипед: определение, теорема о свойстве середины его диагонали, следствия	§ 49	
	4. Прямоугольный параллелепипед: определение, теорема о свойстве квадрата длины его диагонали	§ 49	
63	1. Вопросы 79—81 из Г-10, с. 72	§ 55, 65	
	2. Объем прямой призмы	§ 56	
	3. Объем цилиндра	§ 65	
64	1. Объем наклонной призмы	§ 57	
	2. Вопросы 76, 77 (1) из Г-10, с. 72	§ 51	
65	1. Пирамида: определение, доказательство ее существования, правильная пирамида	§ 52	Кинофрагмент «Пирамида» (автор А. Пышкало), табл. 3
	2. Теорема о сечении пирамиды плоскостью, параллельной ее основанию; усеченная пирамида; правильная усеченная пирамида	§ 53	
	3. Объем пирамиды	§ 58	
	4. Площадь ортогональной проекции	§ 50	
66	1. Конус: определение; сечение конуса плоскостью. Площадь боковой поверхности конуса	§ 61	
	2. Объем конуса	§ 67	Табл. 4, кинофрагмент «Конус» (автор А. Пышкало), д/ф «Поверхность круглых тел», кадры 19—23, 31 (автор И. Вейцман)
67	1. Сфера и шар: определения; уравнение сферы и ее площадь. Объем шара	§ 62	Д/ф «Поверхность круглых тел», кадры 35, 36, 37 (автор И. Вейцман)
	2. Теорема о пересечении сферы и плоскости	§ 63	
	3. Вопросы 35, 36, 83 (1) из Г-10, с. 70, 72	§ 42, 43, 45	

Урок 54

Тема. *Логическое строение геометрии*

План урока

1. Беседа учителя о логическом строении геометрии.

2. Доказательство теоремы 37 (двумя учащимися).

3. Решение задачи.

1. Содержание беседы может определяться следующей системой вопросов и замечаний.

1) Геометрия представляет собой множество предложений, выражающих свойства отношений, в которых могут находиться в пространстве различные фигуры, и предложений, описывающих свойства этих фигур. В планиметрии эти вопросы рассматривались на подмножестве пространства — плоскости. Фигура в геометрии определяется как множество точек.

2) Геометрическая теория пространства строится аксиоматически. Привести схему логического строения геометрии, данную в § 1.

3) Отдельные теоремы в школьном курсе опускаются или не доказываются из-за их сложности, а некоторые отнесены в раздел «Решение задач». Необходимо понимать, что аксиома — это исходное предложение, а теорема — выводимое.

4) Раскрыть 4 пункта схемы логического строения курса геометрии на конкретных примерах.

5) Подробнее остановиться на составе теоремы и видах теорем: прямой и обратной и им противоположных.

2. В процессе доказательства теоремы о плоскости, касательной к шару (теорема 37), повторить понятие необходимого и достаточного условия.

3. Решить задачу № 347 из Г-10.

Обосновав положение центра шара, вписанного в пирамиду, решение задачи провести по рисунку прямоугольного треугольника, сторонами которого являются высота пирамиды, ее апофема и радиус окружности, вписанной в основание пирамиды.

На дом: подготовиться к уроку 55; Г-10, № 368; н. з. № 348.

Урок 55

Тема. *Прямые и плоскости в пространстве. Параллельность*

План урока

1. Лекция учителя по указанной теме. В процессе лекции привлекаются учащиеся для доказательства наиболее важных теорем.

2. Решение задачи.

1. *Конспект лекции учителя.* На прошлом

уроке мы рассмотрели свойства основных понятий, среди которых были прямая и плоскость. Сегодня рассмотрим взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве с помощью схемы, приведенной в табл. 1.

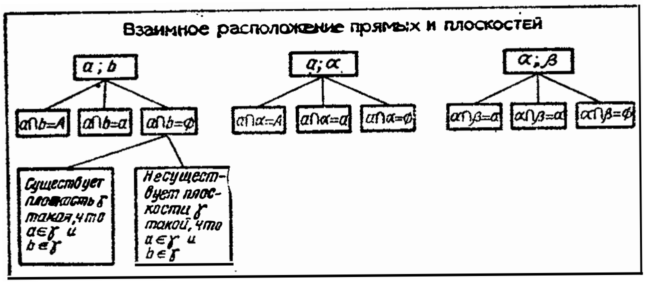


Таблица 1

В ней проведена классификация в зависимости от того, каким является пересечение каждой пары фигур. В трех рассмотренных случаях вы видите полную аналогию. Правда, множество пар прямых, пересечение которых пусто, разбивается на два подмножества в зависимости от того, существует или не существует плоскость, которой принадлежат обе прямые; в двух других случаях этого нет.

Для всех трех пар одинаково определяются две пересекающиеся фигуры (две прямые a и b, прямая a и плоскость α, две плоскости α и β); сформулируйте определение пересекающихся фигур для каждого случая.

Обратите внимание, что определение параллельных фигур для данных пар состоит из двух частей; сформулируйте их.

Таким образом, если взять две пары a, α и α, β, то имеется только два случая их взаимного расположения, а для двух прямых — три, так как существуют еще скрещивающиеся прямые; дайте их определение. Существование каждого случая взаимного расположения данных фигур в геометрии аксиоматизируется или доказывается. Например, для пары a, α существование прямой, лежащей в плоскости, аксиоматизируется (аксиома 3 из § 2, сформулировать ее), а два других случая доказываются (задачи из § 2 и 7). Существование параллельных пар данных фигур уже видно из самого существования этих фигур, так как в определение параллельности входит случай, когда пересечением фигур является одна из этих фигур. Однако особый интерес представляет вторая часть определения, т. е. когда пересечение этих фигур пусто. Для этого случая существование параллельных прямых доказывается с помощью теоремы о центрально-симметричных прямых; для прямой и плоскости это теорема 2 (сформулировать ее), а для плоскостей — теорема 6 (сформулировать ее). Каждая из этих теорем является признаком, с помощью которого можно установить, параллельны ли данные фигуры. Заслушаем доказательство признака параллельности прямой и плоскости (делает ученик по заранее заготовленным записям). Конечно, имеются и другие признаки параллельности пар этих фигур; вспомните их (говорят учащиеся).

Важным вопросом отношения параллельности является вопрос единственности, т. е. вопрос о том, сколько прямых (плоскостей) можно провести через заданную точку параллельно данной прямой (плоскости), не содержащей эту точку. Для прямых этот вопрос решен аксиомой параллельности; сформулируйте ее. Вы знаете, что эта аксиома принята в евклидовой геометрии, которую мы изучаем. Если ее заменить другой, например: «Через точку C, не лежащую на прямой AB, в плоскости ABC проходит бесконечное множество прямых, не пересекающихся с (AB)», а остальные аксиомы сохранить, то получим другую геометрию — геометрию Лобачевского.

Отношение параллельности прямых, а также плоскостей обладает свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности. Вот запись этих свойств (написать на доске заранее):

$$1)\ a\|a;\ 2)\ (a\|b) \Rightarrow (b\|a);$$
$$3)\ (a\|b \text{ и } b\|c) \Rightarrow (a\|c).$$
$$1)\ \alpha\|\alpha;\ 2)\ (\alpha\|\beta) \Rightarrow (\beta\|\alpha);$$
$$3)\ (\alpha\|\beta \text{ и } \beta\|\gamma) \Rightarrow (\alpha\|\gamma).$$

Рефлексивность и симметричность отношения параллельности рассматриваемых фигур следует из самого определения их параллельности; свойство транзитивности доказывается.

Для прямых, а также и для плоскостей доказывается теорема о трех параллельных:

$$(a\|b \text{ и } c\|b) \Rightarrow (a\|c).$$
$$(\alpha\|\beta \text{ и } \gamma\|\beta) \Rightarrow (\alpha\|\gamma).$$

Так как для них справедливо свойство симметричности, то следствием этих теорем и является транзитивность их параллельности. Послушаем доказательство теоремы о трех параллельных прямых (теорему 5 доказывает ученик). То обстоятельство, что отношение параллельности для прямых обладает тремя указанными свойствами, позволило ввести понятие связки параллельных. С помощью этого понятия мы ввели параллельное проектирование, которое используем при изображении фигур.

2. Решение задачи.

В правильной пирамиде $PABCD$ $|AP|=l$, $|AD|=a$. Через середину ребра PC проведена плоскость α, параллельная $[AP]$ и $[BD]$. Най-

дите площадь сечения пирамиды плоскостью α.

Дано: $PABCD$ — правильная пирамида (рис. 1), $|AP|=l$, $\alpha \parallel [BD]$, $\alpha \parallel [AP]$, $|AD|=a$, $K \in [PC]$, $|PK|=|KC|$, $K \in \alpha$.

Найти: $S_{сеч}$.

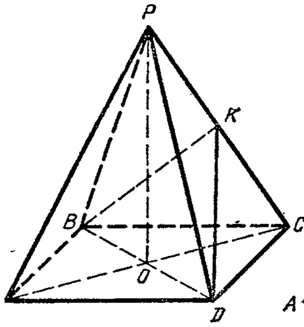


Рис. 1

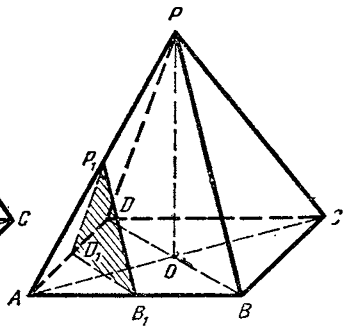


Рис. 2

Решение[1]. Строим $[KO]$;

$$[KO] \parallel [AP],\ |KO|=\frac{1}{2}|AP|=\frac{l}{2}$$

(свойство средней линии $\triangle APC$);

$([KO]\parallel[AP]$ и $[KO]\subset(KBD))\Rightarrow((KBD)\parallel[AP])$ (т. 2); $([BD]\subset(KBD))\Rightarrow((KBD)\parallel[BD])$ (по определению прямой, параллельной плоскости); $(KBD)=\alpha$, $\triangle BKD$ — сечение; $|BD|=a\sqrt{2}$;

$S_{BKD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\,al\sqrt{2}.$ Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{4}al$.

Дополнительные вопросы по решенной задаче:

1) Докажите, что (PO) и (KD) — скрещивающиеся.

2) Назовите еще пары скрещивающихся прямых.

3) Назовите какую-нибудь точку, относительно которой (AP) и (OK) центрально-симметричны.

4*) Назовите пары пирамид, которые имеют равные объемы; сделайте необходимые обоснования (при затруднении можно провести $[KE] \perp [OC]$).

5*) Как доказать, что точки P и C равноудалены от (BKD)?

На дом: подготовиться к уроку 56; Г-10, № 315, № 300 (только построение); н. з. № 312.

Урок 56

Тема. *Параллельные плоскости*

1. Доказательство учащимися теоремы 6 и решение задачи о проведении параллельных плоскостей через две скрещивающиеся прямые (§ 11).

2. *Устные упражнения* (во время подготовки учащихся к ответу):

1) Точка D лежит вне плоскости, проходящей через точки A, B и C. Может ли четырехугольник $ABCD$ быть трапецией?

2) Приведите несколько способов доказательства параллельности противолежащих граней параллелепипеда.

3) Могут ли пересекаться плоскости, параллельные одной и той же прямой?

4) Как найти расстояние между параллельными плоскостями; может ли оно равняться 0?

3. Решение задачи (после заслушивания ответов учащихся).

В основании пирамиды $PABCD$ ромб $ABCD$; $|AC|=d$ (рис. 2). *Через середину ребра AP — точку P_1 проведены в гранях, содержащих это ребро, $[P_1B_1]\parallel[PB]$ и $[P_1D_1]\parallel[PD]$. Площадь сечения пирамиды плоскостью $B_1P_1D_1$ равна Q. Найдите объем пирамиды.*

Дополнительные вопросы по решенной задаче:

1) Какие из известных вам преобразований отображают $(P_1D_1B_1)$ на (PDB)?

2) Чему равно расстояние между этими плоскостями?

3) Чему равен объем усеченной пирамиды $P_1D_1B_1PDB$, если объем данной пирамиды равен 2?

На дом: подготовиться к уроку 57; Г-10, № 342 (решить с обоснованиями на отдельных листках); н. з. № 304.

Урок 57

Тема. *Преобразования пространства. Векторы*

1. Беседа учителя об отображениях.

Содержание беседы может быть определено следующей системой вопросов и замечаний.

1) В курсе математики большую роль играют отображения. В алгебре область определения и множество значений отображений есть некоторые подмножества множества действительных чисел. В геометрии рассматриваются отображения, область определения и множество значений которых есть множество геометрических фигур. Рассматриваются здесь и другие отображения, где область определения — множество геометрических фигур, а множество значений — множество неотрицательных чисел (при рассмотрении вопросов измерения геометрических величин: длин, площадей, объемов).

2) По табл. 2 учитель может повторить последовательность подмножеств отображений,

[1] На доске и в тетрадях удобно решение оформить в две колонки: слева решение, справа обоснование.

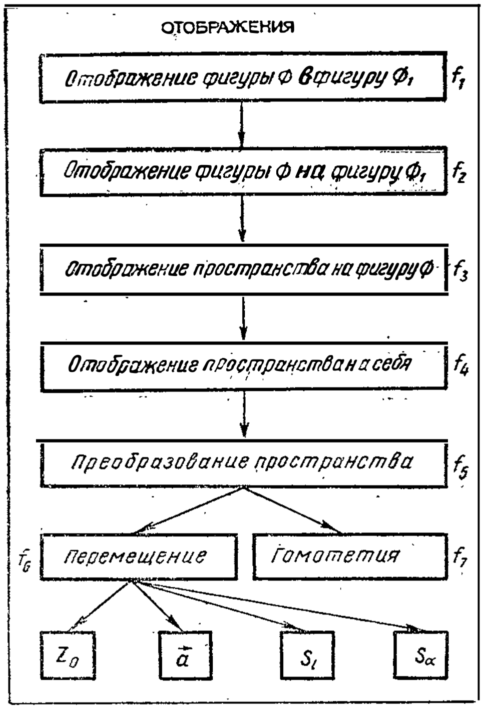


Таблица 2

которые изучались в школе, с иллюстрацией на конкретных примерах. Здесь же можно вспомнить определение конгруэнтных и подобных фигур; подчеркнуть, что эти два отношения обладают свойствами рефлексивности, симметричности и транзитивности (по заранее заготовленным записям).

3) Рассмотреть виды перемещений по плану: определение, способы задания, основные свойства, построение образа точки. Провести классификацию их по числу точек, отображающихся на себя.

4) Ввести понятие тождественного отображения.

5) Более подробно рассмотреть вектор, его характеристическое свойство. Вспомнить, что векторами удобно пользоваться для решения задач геометрии, касающихся расположения двух прямых, принадлежности трех точек одной прямой, отношения длин параллельных отрезков. В процессе решения таких задач используются операции сложения и вычитания векторов, умножения вектора на число.

Операция скалярного умножения позволяет решать метрические задачи: вычислять расстояния, величины углов, находить метрические соотношения между угловыми элементами многоугольников, отыскивать различные множества точек и т. д. Все это конкретно показать при выполнении устных упражнений, при решении задачи и рассмотрении дополнительных вопросов к ней.

2. *Устные упражнения* (по готовому рисунку четырехугольной пирамиды $PABCD$).

1) Представьте вектор $\overrightarrow{DC}$ в виде: а) разности векторов различными способами; б) в виде суммы четырех ненулевых векторов.

2) Чему равна сумма векторов $\overrightarrow{AK}$ и $\overrightarrow{KC}$ ($K \in [AC]$)? Как называются такие векторы? Каким правилом вы пользовались при их сложении?

3) Назовите признак коллинеарности двух ненулевых векторов; иллюстрируйте на рисунке.

4) Перечислите законы умножения вектора на число.

3. Решение задачи.

Дано: *$DABC$ — правильный тетраэдр, K и P — середины двух скрещивающихся ребер.*

Доказать: 1) *(KP) — ось симметрии тетраэдра.* 2) *Любая плоскость, содержащая (KP), делит тетраэдр на две части, имеющие равные объемы.*

Доказательство: 1) Достаточно показать, что $(KP) \perp [AB]$ и $(KP) \perp [DC]$ (рис. 3). Введем векторы $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{AB}$; длина их одинакова, обозначим ее через a. Разложим векторы $\overrightarrow{DC}$ и $\overrightarrow{KP}$ по этим векторам.

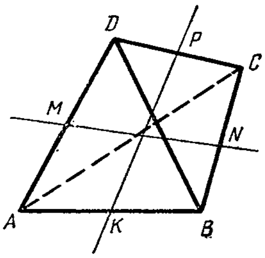


Рис. 3

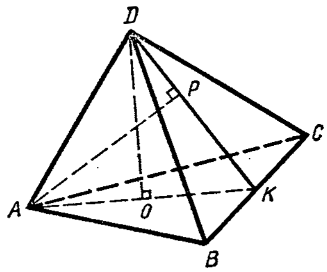


Рис. 4

$$\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD} \text{ (формула вычитания);}$$

$$\overrightarrow{KP} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} =$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} =$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$$ (по правилу многоугольника).

Найдем скалярные произведения векторов

$\overrightarrow{KP}$ и $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{KP}$ и $\overrightarrow{DC}$ (используя определение скалярного произведения векторов и его законы):

$$\overrightarrow{KP}\cdot\overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AB} =$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AB}^2) =$$

$$= \frac{1}{2}(a^2\cos 60^\circ + a^2\cos 60^\circ - a^2) = 0,$$

$$\overrightarrow{KP}\cdot\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}) =$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}^2 + \overrightarrow{AC}^2 - \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} -$$

$$- \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}) =$$

$$= \frac{1}{2}(-a^2 + a^2 - a^2\cos 60^\circ + a^2\cos 60^\circ) = 0.$$

Следовательно, $(KP)\perp[AB]$, $(KP)\perp[DC]$ и (KP) — ось симметрии тетраэдра.

2) Пусть $(KP)\subset\alpha$, $S_{(KP)}(\alpha)=\alpha$ (свойство осевой симметрии).

Плоскость α разбивает тетраэдр на 2 фигуры Φ_1 и Φ_2;

$\Phi_1 \cong \Phi_2$ (свойство осевой симметрии);

$V(\Phi_1) = V(\Phi_2)$ (свойство объемов).

Дополнительные вопросы по решенной задаче:

1) Имеет ли правильный тетраэдр плоскость симметрии? Ответ обосновать.

2) Назовите преобразование пространства, отображающее данный тетраэдр на тетраэдр, объем которого в 27 раз меньше.

На дом: подготовиться к уроку 58; Г-10, № 313 (составить план обоснования); н. з. «Доказать, что оси симметрии правильного тетраэдра пересекаются в одной точке и их отрезки внутри тетраэдра делятся ею пополам».

Указание. Достаточно показать это для двух осей, например для (KP) и (MN), и показать идею дальнейшего доказательства (рис. 3).

Решение. $(KN)\parallel[MP]$ и $|KN|=|MP|$ (свойство средней линии треугольников ADC, ABC и транзитивность параллельности и равенства);

$KNPM$ — параллелограмм (признак параллелограмма);

$|KO|=|OP|$, $|MO|=|ON|$ (свойство параллелограмма).

Урок 58

Тема. *Перпендикулярность в пространстве*

1. Вступление учителя. При рассмотрении различных случаев взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве мы обратили внимание на то, что определения пересекающихся пар фигур даются аналогично. Из множества этих пар выделим такие, в которых фигуры перпендикулярны: $a\perp b$, $a\perp\alpha$, $\alpha\perp\beta$. Вопрос перпендикулярности в геометрии очень важен. Вы знаете, что отрезок перпендикуляра, проведенного через точку к прямой (к плоскости), имеет наименьшую длину из всех отрезков, соединяющих данную точку с точками прямой (плоскости), это и позволило определить понятие расстояния от точки до прямой (до плоскости). Расстояние между параллельными прямыми (плоскостями) есть длина отрезка, перпендикулярного к ним. Так же определяем и расстояние между скрещивающимися прямыми. Большую роль играет перпендикуляр при нахождении площадей и объемов различных фигур (высота) и в целом ряде других вопросов.

Вы помните, что изложение вопросов перпендикулярности опирается на понятия векторной алгебры, в частности на скалярное произведение векторов. На этом уроке мы рассмотрим перпендикулярность прямой и плоскости и вспомним, как оно применяется.

Каждый раз, вводя определение какого-либо понятия, мы показываем, что это понятие существует. Докажем, что перпендикулярные прямая и плоскость существуют, и вспомним, как через точку провести перпендикуляр к плоскости. (Вызвать для ответа двух учеников.)

2. *Устные упражнения* (во время подготовки учащихся к ответу):

1) Расскажите, как через точку в пространстве провести три взаимно перпендикулярные прямые.

2) Найдите множество точек пространства, равноудаленных от трех данных точек, не лежащих на одной прямой.

3) Найдите множество точек пространства, равноудаленных от трех сторон треугольника.

4) Каково взаимное расположение прямой и плоскости, перпендикулярных к одной и той же прямой?

3. Решение задачи (после заслушивания ответов учащихся). *В тетраэдре $DABC$ (рис. 4) $[DA]\perp[BC]$, $|DA|=b$, $|BC|=a$. Расстояния от точки A до (DBC) и от точки D до (ABC) равны. Найдите объем пирамиды, если двугранный угол при ребре BC равен α.*

Дополнительные вопросы по решенной задаче:

1) Каков угол между прямыми AP и BC?

2) Чему равно скалярное произведение векторов $\overrightarrow{OD}$ и $\overrightarrow{AC}$?

3) Какая фигура является ортогональной проекцией боковой поверхности пирамиды на плоскость ABC; (BDC)?

На дом: подготовиться к уроку 59; Г-10, № 170; н. з. № 189.

Урок 59

Тема. *Перпендикулярность в пространстве* (продолжение)

1. Доказательство учащимися теорем 15 и 21.

2. *Устные упражнения* (во время подготовки учащихся к ответу, по готовому рисунку куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$):

1) Докажите, что диагональ куба перпендикулярна любой диагонали грани куба, не пересекающей ее.

2) Докажите, что $[A_1C]\perp(AB_1D_1)$.

3) Расскажите, как можно провести перпендикуляр к (BDC_1).

4) Что является ортогональной проекцией четырехугольника A_1B_1CD на каждую из плоскостей граней куба?

3. Решение задачи (после заслушивания ответов учащихся).

В основании пирамиды PABCD ромб ABCD (рис. 5). *Высота ее проходит через точку пересечения его диагоналей и образует с ребром PA угол α, а с ребром PB угол β. Найдите угол между плоскостями PAB и ABC.*

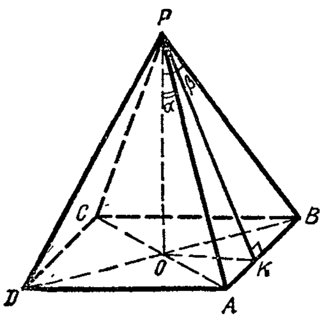


Рис. 5

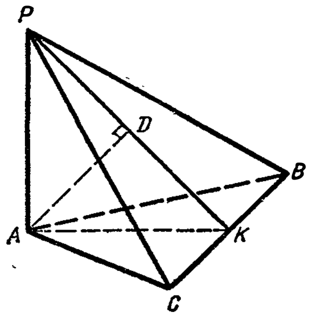


Рис. 6

Дополнительные вопросы по решенной задаче:

1) *Расскажите, как построить проекцию* $[PO]$ на (APB).

2) Назовите угол между высотой пирамиды и плоскостью грани APB.

3) В данную пирамиду вписан конус. Назовите радиус его основания.

На дом: подготовиться к уроку 60; Г-10, № 363; н. з. № 359.

Урок 60

Тема. *Перпендикулярные плоскости*

1. Рассказ учителя о двугранных углах и их измерении с использованием готовых рисунков и записей (в основу положить содержание § 38).

2. Доказательство учащимися теоремы 22 и существования угла с наименьшей величиной между наклонной к плоскости и прямыми плоскости.

3. *Устные упражнения* (во время подготовки учащихся к ответу):

1) Прямая пересекает плоскость. Расскажите, как провести через эту прямую плоскость, перпендикулярную данной плоскости. Сколько решений имеет задача?

2) Прямая параллельна плоскости. Расскажите, как через эту прямую провести плоскость, перпендикулярную данной плоскости. Сколько решений имеет задача?

4. Решение задачи (после заслушивания ответов учащихся).

В основании пирамиды треугольник со сторонами 13, 14 и 15. Боковое ребро, противолежащее средней по величине стороне основания, перпендикулярно основанию и образует с боковой гранью, проходящей через эту сторону, угол 45° (рис. 6). *Найдите:* а) *объем пирамиды;* б) *расстояние от основания ее высоты до боковой грани, не содержащей этой высоты.*

Дополнительные вопросы по решенной задаче:

1) Назовите не менее четырех пар взаимно перпендикулярных плоскостей.

2) На примере каких-либо двух взаимно перпендикулярных плоскостей в данной задаче покажите все возможные случаи взаимного расположения двух прямых, одна из которых лежит в одной плоскости, а другая — в другой.

3) Чему равна величина двугранного угла BC?

Подводя итог повторенного материала о параллельности и перпендикулярности в пространстве, полезно указать на их связь. В некоторых случаях параллельность одних элементов влечет за собой перпендикулярность других и обратно, из перпендикулярности одних можно сделать заключение о параллельности других. Этот факт доказывается в некоторых теоремах; вспомнить, какие это теоремы (теоремы 15, 16, 19).

Провести упражнения на проверку истинности высказываний.

Истинны ли высказывания:

1) Если две прямые (плоскости) перпендикулярны к одной и той же плоскости, то они параллельны.

2) Если две прямые (плоскости) перпендикулярны к одной и той же прямой, то они параллельны.

3) Если прямая и плоскость перпендикулярны к одной и той же прямой (плоскости), то они параллельны.

На дом: Г-10, № 342; проверить умение решить некоторые задачи по табл. 3; н. з. № 341.

Урок 61

Контрольная работа № 7

I вариант

1) *В правильной четырехугольной пирамиде расстояние от центра основания до боковой грани равно b, угол между высотой пирамиды и боковой гранью β. Найдите:*

а) *площадь полной поверхности конуса, вписанного в пирамиду;*

б) *отношение объема конуса к объему пирамиды.*

2) Н. з. *На рисунке к задаче постройте общий перпендикуляр ребра основания пирамиды и образующей конуса, расположенной в противолежащей грани.*

II вариант

1) *В правильной треугольной пирамиде расстояние от центра основания до боковой грани равно b. Угол между высотой пирамиды и боковой гранью α. Найдите:*

а) *площадь полной поверхности конуса, вписанного в пирамиду.*

б) *отношение объема пирамиды к объему конуса.*

2) Н. з. *На рисунке к задаче постройте общий перпендикуляр бокового ребра и противолежащего ребра основания.*

На дом: подготовиться к уроку 62; поменяться вариантами.

Урок 62

Тема. *Многогранники. Призма*

1. Анализ контрольной работы (если в этом имеется необходимость).

2. Доказательство учеником теоремы о свойстве середины диагонали параллелепипеда (по готовому рисунку параллелепипеда).

3. *Устные упражнения* (во время подготовки ученика к ответу):

1) Всякую ли четырехугольную призму можно назвать параллелепипедом?

2) Г-10, № 65 (1), 67 (1).

3) Могут ли две грани наклонного параллелепипеда быть перпендикулярными плоскости основания?

4) Три грани параллелепипеда, имеющие общую вершину, — прямоугольники. Является ли это свойство необходимым и достаточным признаком прямоугольного параллелепипеда?

3. Решение задачи (после заслушивания ответа ученика).

В основании призмы $ABCA_1B_1C_1$ (рис. 7) лежит правильный треугольник со стороной a, боковое ребро равно b и составляет равные углы со смежными сторонами основания, площадь грани CC_1B_1B равна Q. Найдите площадь сечения, проведенного через $[AA_1]$ и высоту основания призмы, если $[AA_1]$ составляет с плоскостью основания угол в 45°.

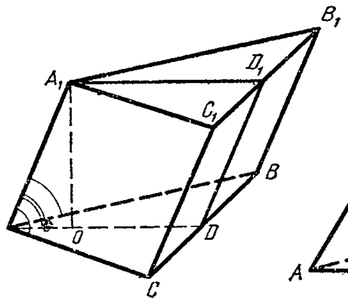


Рис. 7

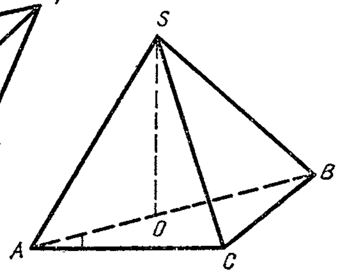


Рис. 8

Дополнительные вопросы по решенной задаче:

1) Расскажите, как построить линейные углы двугранных углов при $[A_1A]$, $[BC]$, $[AC]$.

2) Чему равна величина двугранного угла BC?

3) Чему равен угол между (ABC) и (C_1B_1B)?

4) Назовите два способа нахождения объема призмы.

На дом: подготовиться к уроку 63; Г-10, № 172, 292(1); н. з. № 301 (только построить сечение).

Урок 63

Тема. *Объем прямой призмы и цилиндра*

1. Опрос по карточкам.

I карточка

1) Доказать теорему об объеме прямой призмы.

2) Вопрос 78 (1) из Г-10, с. 72.

II карточка

1) Доказать теорему об объеме цилиндра.

2) Дать обоснования к задаче № 292(1) по готовому чертежу.

2. *Устные упражнения:*

1) Как формулируется задача об измерении объемов многогранников?

2) Объем куба и площадь его боковой поверхности имеют одно и то же числовое значение. Найдите длину ребра куба.

3) Радиус шара, описанного около куба, равен R. Найдите объем куба.

4) Можно ли описать сферу около любого прямоугольного параллелепипеда; любой прямой призмы? Ответ обосновать.

5) Можно ли вписать сферу в любой прямоугольный параллелепипед; в любую прямую призму?

6) Найдите объем фигуры, полученной от вращения квадрата со стороной a вокруг его средней линии.

3. Решение задачи.

Прямая призма, основание которой — прямоугольный треугольник с катетом a и противолежащим острым углом α, описана около шара. Найдите ее объем.

Для решения данной задачи достаточно составить план решения и ограничиться выполнением рисунка основания призмы, в который входит все необходимое для получения ответа ($\triangle ABC$, где $\hat{C} = 90°$, $|BC| = a$).

Дополнительные вопросы по решенной задаче:

1) Может ли шар, вписанный в призму, касаться какого-либо ее ребра?

2) Можно ли в данную призму вписать цилиндр?

3) Верно ли высказывание: объем данной призмы равен половине произведения площади боковой грани, проходящей через один из катетов, на длину другого катета?

На дом: подготовиться к уроку 65; Г-10, № 367; н. з. № 353 (1).

Урок 64

Тема. *Объем наклонной призмы*

1. Доказательство учеником теоремы об объеме наклонной призмы.

2. *Устные упражнения* (во время подготовки ученика к ответу):

1) Площадь основания наклонной призмы Q, высота H, боковое ребро a. Найти площадь сечения, перпендикулярного боковому ребру.

2) В наклонную треугольную призму вписан шар радиуса r. Найдите объем призмы, если площадь основания равна S.

3) Вопрос 77 (1) из Г-10, с. 72.

3. Решение задачи (после заслушивания ответа ученика).

В призму вписан шар радиуса R. Найдите объем призмы, если площадь боковой поверхности призмы равна S, а боковое ребро равно a.

До решения задачи обратить внимание учащихся на следующее: в призму можно вписать шар в том и только том случае, если в перпендикулярное сечение призмы можно вписать окружность и высота призмы равна диаметру этой окружности. Полезно сделать модель такой призмы. Чертеж можно не делать.

4. Подвести итог по теме «Объемы многогранников» можно путем решения устных задач:

1) Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны a, радиус вписанного в него шара равен r. Найдите объем параллелепипеда.

2) Основания прямой и наклонной призм лежат в параллельных плоскостях. Сравните объемы этих призм, если их основания равновелики.

3) В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найдите отношение их объемов.

4) Докажите, что если шар касается всех граней многогранника, то объем многогранника равен одной трети произведения радиуса шара на площадь полной поверхности многогранника.

На дом: подготовиться к уроку 66; Г-10, № 376, 177; н. з. № 370.

Урок 65

Тема. *Пирамида и ее объем*

1. Доказательство учеником теоремы о сечении пирамиды плоскостью, параллельной основанию.

2. *Устные упражнения* (во время подготовки ученика к ответу):

1) В основании пирамиды лежит равносторонний треугольник, одна из боковых граней перпендикулярна основанию. Правильная ли это пирамида?

2) Может ли в усеченной пирамиде верхнее основание быть ромбом, а нижнее — квадратом? Ответ обосновать.

3) Через середину бокового ребра пирамиды проведено сечение, параллельное основанию. Вычислите отношение площадей сечения и основания.

4) Какими свойствами обладает пирамида, все боковые ребра которой конгруэнтны?

5) Какими свойствами обладает пирамида, у которой двугранные углы при всех сторонах основания конгруэнтны?

6) Плоские углы при вершине треугольной пирамиды прямые, боковые ребра равны 1, 2 и 3 см. Найдите объем.

3. Доказательство учителем (или наиболее сильным учеником) теоремы об объеме пирамиды по готовому рисунку и записям.

4. Решение задач.

1) *В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, один из острых углов которого α. Каждое боковое ребро равно b и образует с плоскостью основания угол β* (рис. 8). *Определите объем пирамиды.*

2) *Площадь боковой грани правильной четырехугольной пирамиды равна Q. Определите объем пирамиды, если боковая грань ее образует с плоскостью основания угол α.* (Все данные задачи обозначить на готовом рисунке пирамиды. Задачу решить устно.)

Дополнительные вопросы по решенной задаче 1:

1) Что является ортогональной проекцией $\triangle ASC$ на (ABC)?

2) $\widehat{BAC} = 29°$, $\widehat{SAO} = 15°$. Указать границы величины угла SAC. Ответ обосновать.

При проведении урока можно использовать кинофрагмент «Пирамида» и табл. 3 для устного решения задач.

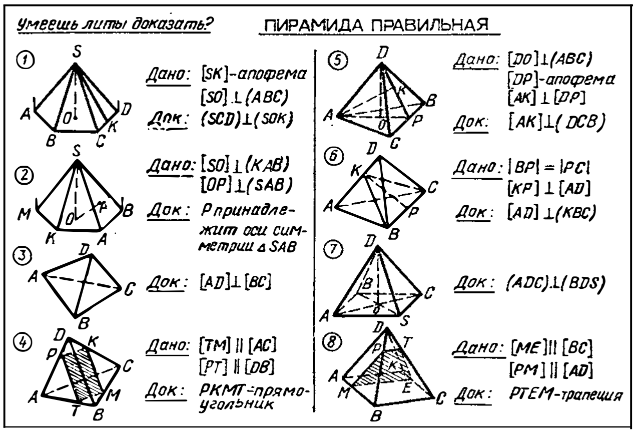


Таблица 3

На дом: подготовиться к уроку 64; Г-10, № 316; н. з. № 311.

Урок 66

Тема. *Конус и его объем*

1. Доказательство учеником теоремы об объеме конуса.

2. *Устные упражнения:*

1) Радиус основания конуса равен R. Через середину высоты конуса проведено сечение, параллельное основанию. Определите площадь сечения.

2) Осевое сечение конуса — правильный треугольник со стороной a. Определите объем конуса.

3) По табл. 4 расскажите, как найти объем фигуры, полученной при вращении заштрихованного многоугольника вокруг оси MN (рассмотреть рис. а, б, в).

3. Решение задачи.

С-23, вариант 3 (2-е задание из «Дидактических материалов по геометрии для 10 класса»).

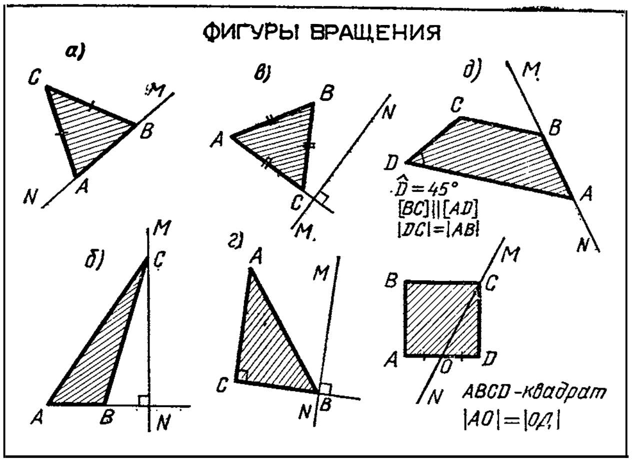


Таблица 4

Дополнительные вопросы по решенной задаче (рис. 9):

1) Какая фигура получится при вращении ломаной OBC вокруг оси $l = (OO_1)$; ломаной CAB вокруг оси l?

2) Расскажите, как найти площадь поверхности каждой из полученных фигур вращения? Найдите отношение $\frac{V_{цил\,AB}}{V_{кон\,BC}}$.

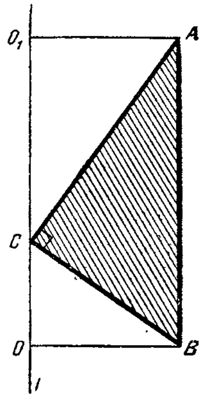


Рис. 9

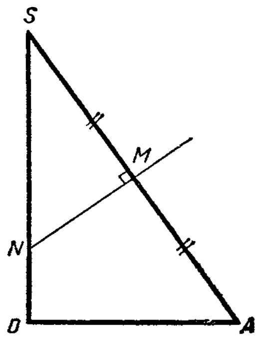


Рис. 10

Можно подвести итог урока, используя диафильмы, указанные в плане повторения.

На дом: подготовиться к уроку 67; Г-10, № 271 (2) и 251; н. з. № 288.

Урок 67

Тема. *Сфера и шар*

1. Опрос по карточкам.

I карточка

1) Сфера и шар. Их определение. Уравнение сферы.

2) Вопрос 35 (1, 3) из Г-10, с. 70.

II карточка

1) Теорема о пересечении сферы и плоскости.

2) Вопрос 35 (2, 4) из Г-10, с. 70.

2. *Устные упражнения:*

1) Все вершины многогранника принадлежат сфере. Сравните расстояния от вершин многогранника до центра сферы.

2) Все вершины пирамиды принадлежат сфере. Как найти центр сферы?

3) При каких условиях около пирамиды можно описать сферу?

3. Решение задачи.

В шар радиуса a вписана правильная четырехугольная пирамида, боковое ребро которой составляет с высотой угол α. Определите объем пирамиды.

Полезно показать модель к этой задаче, а решение провести по рис. 10, на котором изображен треугольник со сторонами: $[SO]$ — высота пирамиды, $[SA]$ — боковое ребро, $[AO]$ — радиус окружности, описанной около основания.

Дополнительные вопросы по решенной задаче:

1) Как может быть расположен центр шара относительно плоскости основания пирамиды?

2) Как расположен центр шара, если: а) $\triangle SOA$ — равнобедренный; б) $\widehat{OSA} = 40°$; в) $|SO| < |AO|$?

На дом: подготовиться к уроку 68; Г-10, № 340; н. з. № 344.

Урок 68

Контрольная работа № 8

(из книги «Дидактические материалы по геометрии для 10 класса»)

I вариант

1) К-6, вариант 1 (2-е задание).
2) С-23, вариант 1 (2-е задание).

II вариант

1) К-6, вариант 3 (2-е задание).
2) С-23, вариант 2 (2-е задание).

Уроки 69 и 70 — резерв времени учителя.

В. Д. БЕЛОУСОВ, И. Н. ВИКОВАН, Н. Х. СПАТАРУ
(Молдавская ССР)

ОБ УСТНОМ ЭКЗАМЕНЕ ПО АЛГЕБРЕ В VIII КЛАССЕ

В июне 1975 г. учащиеся восьмых классов школ Молдавии, в которых с 1968 г. было введено обучение по новым программам, сдавали устный экзамен по алгебре.

Введению новой формы проверки знаний учащихся по алгебре за весь курс восьмилетней школы в течение трех лет в школах с опережающим обучением предшествовала экспериментальная проверка ее эффективности.

До 1975 г. в Молдавии, как и в других союзных республиках, учащиеся, оканчивающие восьмилетнюю школу, сдавали письменный экзамен по алгебре. Подготовка к такому экзамену не требовала повторения всего теоретического материала и сводилась к совершенствованию навыков по довольно узкому кругу вопросов: на первый план выступали упражнения, направленные на формирование навыков. Упражнениям же, способствующим развитию мышления, устной речи, умению делать логические выводы, аргументировать заключения, не уделялось достаточного внимания.

Введение новой программы и новых учебников по математике внесло существенные изменения в содержание курса математики. Знания и навыки, которые должны приобрести учащиеся в результате изучения алгебры, весьма обширны: решение различных уравнений и систем уравнений; решение линейных и простейших нелинейных неравенств и их систем; тождественные преобразования выражений, в том числе степеней с отрицательными и дробными показателями; понятие арифметического корня; логарифмирование и потенцирование; построение и чтение графиков функций и т. д. Выяснить, насколько глубоко учащиеся усваивают такой разнообразный материал и как умеют применять теоретические знания при решении практических задач, возможно лишь в ходе устного экзамена. Устный экзамен позволяет также проверить владение учащимися теоретико-множественным языком, умение использовать современную математическую символику, проверить общую культуру устной речи и уровень развития учащихся, а также выявить, какие темы или разделы за курс VI—VIII классов усвоены ими более слабо, какие задачи они решают недостаточно хорошо или вообще не умеют решать.

Устный экзамен по алгебре проводился по билетам (всего их 24). Каждый билет состоит из трех вопросов: первый — теоретический, два других носят практический характер (их следует подбирать, исходя из подготовки учащихся данного класса).

Первые вопросы экзаменационных билетов охватывают основные темы курса VI—VIII классов.

В упражнения (ко второму и третьему вопросам) были включены задачи, решаемые с помощью составления уравнений и систем уравнений. Серьезное внимание уделялось проверке навыков выполнения тождественных преобразований, в частности выражений, содержащих степени с дробными показателями, вопросам, связанным с арифметической и геометрической прогрессиями, с логарифмами. Среди упражнений были и упражнения вычислительного характера, в частности связанные с оценкой значения выражения методом границ, с вычислениями с помощью логарифмической линейки.

Устный экзамен по алгебре показал, что многие темы программы восьмилетней школы учащиеся усвоили хорошо. Однако были вскрыты и некоторые недостатки. Так, например, у восьмиклассников отсутствуют навыки решения задач путем составления квадратного уравнения, нет твердых навыков тождественных преобразований дробных выражений; видимо, в VII классе учителя не обратили должное внимание учащихся на изучение этих вопросов. Плохо оказались усвоенными такие вопросы, как решение неравенств вида $(ax+b)(cx+d)>0$, где a, b, c, d — заданные числа; задачи, решаемые с использованием разложения квадратного трехчлена на множители. Недостаточно хорошо учащиеся выполняли вычисление значения выражения с помощью логарифмической линейки; вычисление и преобразование значения выражения, содержащего степени с рациональными показателями, действия с арифметическими корнями.

Приведем задачи, которые мы предлагали во вторых и третьих вопросах экзаменационных билетов (к каждому билету подобрано по 3—5 задач, в статье приводим только одну из них).

1. 2) Установите, принадлежит ли арифметической прогрессии 3, 10, ... число: а) 143, б) 551.

3) Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, задаваемое системой неравенств

$$\begin{cases} x^2+y^2<0{,}81, \\ y>0. \end{cases}$$

2. 2) Найдите корни уравнения

$$\frac{y+5}{y^2-5y}-\frac{y-5}{2y^2-10y}=\frac{y+25}{2y^2-50}.$$

3) Постройте график функции $y=0{,}7^x$. С помощью графика:

а) сравните выражения $0{,}7^{-32}$, $0{,}7^{-15}$ и $0{,}7^{1,5}$;

б) решите уравнения $0{,}7^x=2$, $0{,}7^x=0{,}6$ и $0{,}7^x=1$.

3. 2) Найдите целые решения системы неравенств

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2}-\frac{x-4}{3}>2x-1, \\ 2x-\frac{x-5}{3}>x-3. \end{cases}$$

3) Докажите, что функция $y=x^2$, где $x\in[0;2]$, обратима. Постройте в одной и той же системе координат графики данной функции и ей обратной. Пользуясь графиком, выясните характер монотонности (возрастание, убывание) этих функций.

4. 2) Найдите значение выражения

$$\frac{x^3+1}{2x^3}:\frac{2x^2-2x+2}{5x^2} \text{ при } x=-0{,}25.$$

3) Найдите сумму n первых членов арифметической прогрессии (x_n), у которой $x_n=-12n+7$.

5. 2) Упростите выражение

$$1+\frac{24}{(x-2)^2}\cdot\frac{4x-x^2-4}{3(x+6)}.$$

3) Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если

$$b_4=-12,\quad b_7=23\frac{7}{16}.$$

6. 2) Известны длины a и b (выраженные в мм) основания и боковой стороны равнобедренного треугольника: $26\leqslant a\leqslant 28$ и $41\leqslant b\leqslant 43$. Оцените периметр треугольника.

3) Используя график функции $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$, найдите значение y, соответствующее значению x, равному -2; 0; 1; 1,5.

7. 2) Вычислите:

а) $5^{\frac{1}{5}}\cdot 5^{-0,25}\cdot 5^{\frac{4}{5}}\cdot 5^{-0,75}$;

б) $\left(1\frac{9}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(2\frac{10}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$.

3) Постройте график функции $y=-2x-4$. При каком значении x значение y равно 0? Найдите множество значений x, при которых:

а) $-2x-4<0$; б) $-2x-4>0$.

8. 2) Представьте в виде суммы выражение

$$(2p^{\frac{1}{3}}+q^{-1})(2p^{\frac{1}{3}}-q^{-1}).$$

3) Выясните с помощью графиков, имеет ли решение система трех уравнений с двумя переменными:

$$\begin{cases} x + y = 2, \\ 2x + 3y = 0, \\ x - y = 10. \end{cases}$$

9. 2) За 6 м сатина и 5 м штапеля уплатили 19 р. Сколько стоит 1 м каждой ткани, если 4 м сатина стоят столько же, сколько 3 м штапеля?

3) Найдите основание z, если:

а) $\log_z 0{,}25 = -2$; б) $\log_z \sqrt[3]{3} = \frac{1}{6}$.

10. 2) Решите неравенство

$$\frac{x-4}{5x} < 0.$$

3) Постройте график функции $y = -0{,}5x^2$. Найдите по графику, при каких значениях x переменная y:

а) принимает значение, равное 0; -2; -5;

б) принимает значение, меньшее 0;

в) возрастает;

г) убывает.

11. 2) Выразите логарифм x через логарифмы положительных чисел a и b, если:

а) $x = \frac{a^2 b}{1000}$; б) $x = a\left(\frac{b}{100}\right)^{\frac{1}{2}}$.

3) Решите графически систему уравнений

$$\begin{cases} xy = 6, \\ x - y = 1. \end{cases}$$

12. 2) При каких значениях переменной верно неравенство

$$\frac{(-1)^{13}}{13 - y} < 0?$$

3) Решите графически систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 100, \\ y = \frac{1}{2} x^2. \end{cases}$$

13. 2) Найдите множество корней уравнения

$$\frac{2x+1}{2x-1} - \frac{3(2x-1)}{7(2x+1)} - \frac{8x}{4x^2-1} = 0.$$

3) Покажите штриховкой на координатной плоскости множество точек, задаваемое неравенством

$$5x + 2y - 4 < 0.$$

14. 2) Упростите выражение

$$\frac{ax + bx - ay - by}{7x - 7y}.$$

3) Функция задана формулой $y = \frac{8}{x}$, постройте ее график. Какому множеству принадлежит значение y, если значение x принадлежит множеству:

а) $\left[\frac{1}{8};\ 1\right]$; б) $[\ 4;\ -2]$?

15. 2) Найдите наибольшее целое число, удовлетворяющее неравенству

$$1{,}6 - (3{,}2 - 0{,}2y) < 5{,}1.$$

3) Постройте график функции $y = x^2 + 2x - 15$. Рассматривая построенный график, найдите:

а) множества значений x, на которых значения функции отрицательны, положительны;

б) множества значений x, на которых функция возрастает, убывает.

16. 2) Вычислите

$$y = \frac{2{,}25 \cdot 15{,}6 \cdot 2{,}58}{3{,}94 \cdot 12{,}5}.$$

3) Решите неравенство:

а) $\sqrt{x} < \sqrt{7}$; б) $\sqrt{x} \geqslant 10$.

17. 2) Найдите сумму первых пяти и n членов геометрической прогрессии, заданной формулой n-го члена: $b_n = 1{,}5 \cdot 4^n$.

3) Постройте график функции $y = -0{,}5x$.

а) Какое значение y соответствует $x = -2$; 0; 4?

б) Существует ли такое значение x, при котором $y = -150$? Найдите его.

в) Как изменяется значение y с возрастанием x?

18. 2) Моторная лодка прошла 45 км по течению реки и 22 км против течения, затратив на весь путь 5 ч. Найдите скорость лодки в стоячей воде, зная, что скорость течения реки равна 2 км/ч.

3) Разложите на множители многочлен

$$16a^2 - 20a + 35y - 49y^2.$$

19. 2) Решите неравенство

$$x - \frac{x-3}{5} + \frac{2x-1}{10} < 4.$$

3) Найдите t по его логарифму (a, b и t — положительные числа):

$$\lg t = \frac{1}{2} + \lg a - \frac{2}{5} \lg b.$$

20. 2) Упростите выражение

$$(\sqrt{15} - \sqrt{20}) \cdot 2\sqrt{5} + \sqrt{75}.$$

3) Решите уравнение

$$(y^2 + 2y + 4)^2 - 7(y^2 + 2y + 4) + 12 = 0$$

введением новой переменной.

21. 2) Составьте квадратное уравнение по его корням, $5 - 3\sqrt{2}$ и $5 + 3\sqrt{2}$; для проверки решите его.

3) Сравните значения выражений:

а) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^{-6}$ и $\frac{\sqrt{5}}{2}$; б) $0{,}78^{0{,}7}$ и $0{,}78^{0{,}6}$.

22. 2) Решите уравнение $(x+4)^2 = 3x + 40$.

3) На расстоянии 80 м переднее колесо повозки сделало на 8 оборотов больше заднего. Найдите длину окружности каждого колеса, если известно, что длина окружности переднего колеса на 0,5 м меньше длины окружности заднего колеса.

23. 2) Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 50, \\ x^2 - y^2 = 0. \end{cases}$$

3) Используя график функции $y=x^3$, найдите:

а) значения y, соответствующие значениям x, равным 1,4; —1,4; —1,8; 1,8;

б) значения x, которым соответствуют значения y, равные —5; 5.

24. 2) Сократите дробь

$$\frac{5a+10}{2a^2+13a+18}.$$

3) Турист, проплыв по течению реки на плоту 12 км, возвратился обратно на лодке, скорость которой в стоячей воде 5 км/ч. Найти скорость течения реки, если известно, что на все путешествие турист затратил 10 ч.

Ф. Ф. НАГИБИН

(г. Киров)

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ В VI — VIII КЛАССАХ

Решение геометрических задач в VI—VIII классах следует считать *как средством, так и целью обучения геометрии.* Это одно из наиболее важных средств сознательного и прочного усвоения учащимися геометрической теории, развития пространственных представлений учащихся, их логического мышления, эвристических и алгоритмических компонентов мыслительной деятельности, творческих способностей и самостоятельности мышления. Решение задач как важная цель обучения геометрии имеет в виду успешную подготовку учащихся к применению геометрических знаний в смежных дисциплинах, в практической деятельности.

Как видим, цели, достижению которых призвано служить решение геометрических задач, разнообразны. Это заставляет так сформировать систему школьных геометрических задач, чтобы ни одна из этих целей не выпала из поля зрения.

Одной из наиболее важных характеристик перестройки школьного курса математики является *переход к единой теоретико-множественной трактовке многих вопросов.* Это в полной мере относится и к его геометрической части. Поэтому в систему геометрических задач вводятся новые, отражающие теоретико-множественные подходы к вопросам геометрии. Это задачи на способы задания точечных множеств, на операции над геометрическими фигурами как точечными множествами, на использование в геометрии языка и символики теории множеств и в особенности *задачи на отображение точечных множеств (перемещения, гомотетия, подобное преобразование) и их применения.*

Существенной особенностью новой школьной геометрии является *повышение ее логического уровня.* Большое внимание, уделяемое учебным пособием логическому строению геометрии в VI и особенно в VIII классах, требует соответствующих задач. Это задачи, предназначенные для усвоения учащимися роли определений и аксиом, видов теорем и связей между ними, видов условий, на выяснение истинности или ложности геометрических утверждений и др.

Существенным источником новых задач являются вошедшие в курс новые теоремы.

Новая школьная геометрия *открывает значительно более благоприятные возможности для установления связей между школьными курсами геометрии и алгебры.* В этом отношении существенно следующее: величина и ее числовые значения, отображения, координатная прямая, перемещения координатной плоскости, элементы векторной алгебры, применения векторов, тригонометрические функции, метрические соотношения в треугольнике, некоторые элементы аналитической геометрии и т. д. Все эти вопросы должны найти отражение в системе задач.

В новой системе задач бо́льшее, чем ранее, внимание должно быть уделено *задачам на практические применения геометрических знаний,* в частности на использование теорем в конструкциях разнообразных приборов и средств измерений, в работах геодезического характера, в вычислениях длин, угловых величин, площадей, объемов и т. д. Может быть, часть этого материала в последующей трудовой деятельности выпускника средней школы и не найдет употребления. Но выяснение разнообразных возможностей применений свяжет геометрические знания с жизнью, возбудит бо́льший интерес к геометрии и внесет свой вклад в диалектико-материалистическое воспитание учащихся.

Обновленное содержание школьного курса геометрии вызывает *необходимость совершенствования его методики.* Это обстоятельство должно сказаться и на системе задач. Она должна существенно помогать развертыванию активной самостоятельной учебной деятельности учащихся, развивать творческие компоненты мышления, оптимизировать учебную работу. Необходимы задачи для устного решения, по готовым чертежам, задачи с элементами исследования, обобщающие и конкретизирующие.

Мы видим, что система геометрических задач существенно пополняется новыми задачами. *Из традиционных остаются в ней задачи с высоким познавательным и дидактическим значением.* При этом многие из них следует решать по-новому. Если раньше основным приемом решения было использование «равенства» треугольников, то теперь особенно широкое применение должны найти перемещения, гомотетия, подобное преобразование и векторы.

Хорошо известно традиционное разделение школьных геометрических задач на три основных вида: 1) задачи на вычисление, 2) на построение, 3) на доказательство. В современных условиях оно, в общем, остается в силе, но нуждается в уточнениях. Целесообразно в каждом из этих видов выделить некоторые особые «подвиды», представляющие интерес в связи с новыми установками курса геометрии.

Среди задач на вычисление особое место занимают: а) комбинаторные задачи, б) задачи, решаемые графически. Из задач на построение можно выделить: а) задачи на «восстановление» (построение) фигур по некоторым точкам и другим фиксированным (по положению и величине) элементам, б) задачи на построение с разного рода ограничениями (с «недоступными» частями фигур, с препятствиями, с ограничениями, накладываемыми на используемые инструменты, и др.), в) задачи на выполнение чертежей-рисунков с заданными свойствами фигур, г) задачи на построение некоторых геометрических экстремумов. Из задач на доказательство укажем задачи: а) на нахождение точечных множеств по определяющим их свойствам, б) на геометрические неравенства, в) на доказательства по готовым чертежам.

Система задач, предлагаемая учебными пособиями «Геометрия» для VI—VIII классов и методическими руководствами к ним, содержит все указанные виды. Особого внимания заслуживают задачи на доказательство. Это объясняется не только важностью прививаемых учащимся навыков доказательства, но и тем, что решение задач на вычисление и построение включает в себя доказательства. Меньшее, чем ранее, значение придается задачам на построение. Они, конечно, нужны, но усложнять их нет никакой необходимости. Достаточно ограничиться основными построениями и несложными задачами, сводящимися к основным. При этом заслуживают предпочтения задачи на построение фигур в заданных преобразованиях и на построение, решаемые с помощью преобразований.

Если мы обратимся к курсу геометрии VI класса, то обнаружим, что он богат новыми для учащихся понятиями и новыми подходами к уже известным понятиям. Учтем также необходимость более высокого логического уровня изучения геометрии. Эти обстоятельства обусловливают усиление внимания к задачам-вопросам. Цель решения таких задач — осознание, уточнение и конкретизация вводимых понятий и связей между ними. Задачи-вопросы ценны и в других отношениях: решения их предполагают не только нахождение, но и *обоснование ответов.* Поэтому учебная работа с ними связана с поисковой деятельностью учащихся и несложными дедуктивными рассуждениями, хорошо подготавливающими к проведению доказательств теорем. Задачи, о которых сейчас идет речь, необходимы также для усвоения учащимися вводимой символики и используемого языка. Примерами задач-вопросов могут служить задачи на усвоение нового важного понятия «лежать между», на уточнение представлений о центральной симметрии и др.

В дидактическом отношении система геометрических задач должна содержать «вводные» задачи, назначение которых — постановка подлежащих изучению вопросов, задачи, обеспечивающие усвоение этих вопросов, тренировочные, служащие закреплению изученного и отработке необходимого автоматизма в формируемых навыках, проверочные, необходимые для контроля за ходом учебной работы, и, наконец, задачи для повторения изученного.

Геометрические задачи для работы со всем составом класса должны быть посильными для учащихся. В противном случае у большой части школьников неизбежно возникает неверие в свои силы и способности, которое повлечет негативное отношение к изучению геометрии вообще.

Следует признать, что овладению необходимыми геометрическими и логическими понятиями, умению делать выводы и находить решения возникающих вопросов можно обучить на в меру простых задачах, полнее используя их развивающие функции. При этом нужно постоянно заботиться о необходимом разнообразии задач по их содержанию и приемам решения[1].

Система задач учебных пособий «Геометрия» для VI—VIII классов реализует высказанные нами соображения о содержании и назначении геометрических задач. Однако жесткое требование буквального следования ей в учебной работе интересами дела не вызывается. В конкретных условиях могут оказаться целесообразными отступления от нее. По отдельным пунктам учитель может дополнить набор задач. По другим пунктам может оказаться целесообразным сокращение предлагаемого набора. Возможны и некоторые перестановки задач внутри пунктов. Но все эти изменения могут быть вызваны лишь основательным учетом конкретных условий работы с данным составом класса и не должны затрагивать основ системы. Каждый раз в подобных случаях решение нужно принимать на основе выявления познавательных и дидактических возможностей конкретных задач.

Возьмем для примера задачу по готовому чертежу (рис. 1). Возможно следующее решение. Проведем через точку D перпендикуляр

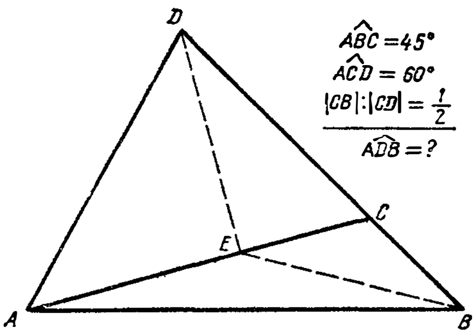


Рис. 1

к (AC) (E — точка пересечения его с (AC)) и построим отрезок EB; $\triangle DEC$ — прямоугольный,

$$\widehat{EDC} = 30°,\ |EC| = \frac{1}{2}|DC| = |CB|,$$

$\triangle ECB$ — равнобедренный (с вершиной C),

$$\widehat{ECB} = 120°,\ \ \widehat{EBC} = 30°,\ \ \widehat{ABE} = 15°$$

$$\widehat{BAE} = 15°,$$

$|AE| = |EB|$, $\triangle DEB$ — равнобедренный (с вершиной E), $|EB| = |DE|$, из двух последних равенств следует $|AE| = |ED|$, $\triangle AED$ — прямоугольный равнобедренный,

$$\widehat{ADE} = 45°,\ \widehat{ADB} = \widehat{ADE} + \widehat{EDC} =$$
$$= 45° + 30° = 75°.$$

Как видим, это решение опирается на свойства: суммы смежных углов, суммы углов треугольника, суммы острых углов прямоугольного треугольника, катета, противолежащего углу в 30°, на признак и свойство равнобедренного треугольника. Все эти вопросы изучают в VI классе, и поэтому задача может быть решена в этом классе. В познавательном отношении она особого интереса не представляет, в дидактическом отношении она содержательна, так как ее решение дает возможность вспомнить значительное число изученных ранее утверждений. Поэтому рассмотренная задача целесообразна для повторения. Что может затруднить учащихся при ее решении? Основных трудностей две: вспомогательное построение и составление цепочки последовательно рассматриваемых треугольников. Учащимся придется помочь преодолеть их. Примерно так следует поступать учителю при включении в систему или исключении из нее других задач.

Перейдем к рассмотрению основных общих методических принципов работы с учебными задачами по геометрии в VI—VIII классах.

Главным из них следует считать *принцип широкого использования задач для активизации учебной деятельности учащихся, для развития мыслительных способностей, самостоятельности мышления.*

Основные мыслительные процессы, приводящие к решению задачи, могут быть алгоритмическими или эвристическими. Соответственно условно можно говорить об алгоритмическом и эвристическом решениях, хотя в практике они выступают в связи. В школьном курсе геометрии алгоритмически решаются основные задачи на построение, на построение фигур-образов в заданных преобразованиях, на вычисление по готовым формулам площадей фигур, объемов тел, на решение треугольников и некоторые другие. Алгоритм (алгоритмическое предписание) особенно часто задается формулой, но в основе алгоритма может лежать и определение понятия, а также теорема. Для овладения этим приемом решения в соответствующих случаях следует начинать с составления алгоритма для задач данного вида. При этом важно уже в VI классе учить истолкованиям формул, определений, теорем.

[1] Сказанное не означает, что система геометрических задач для VI—VIII классов должна быть свободной от задач повышенной трудности. Такие задачи, углубляющие и расширяющие изученное в классе, необходимы для индивидуальной и кружковой работы с учащимися.

С формулами дело обстоит проще, так как учащиеся уже владеют вычислениями по формулам. Алгоритмы построений фигур на основе определений понятий и теорем нуждаются в отработке. Возьмем для примера построение касательной к окружности. Алгоритм этого построения может быть составлен на основе теоремы о том, что прямая, перпендикулярная диаметру окружности и проходящая через его конец, является касательной к этой окружности. Первый шаг: постройте радиус окружности, концом которого была бы данная на окружности точка (точка касания). Второй шаг: постройте с помощью чертежного треугольника прямую, перпендикулярную этому радиусу и проходящую через данную точку. Так алгоритмизировать следует, конечно, лишь более важные и трудные построения. Особенно существенно в подобных случаях привлечение учащихся к составлению алгоритмов, так как алгоритм, найденный самими учащимися, легко запоминается и поэтому легко воспроизводится.

Эвристические приемы решения геометрических задач являются основными. Это объясняется спецификой таких задач. Овладеть эвристическими приемами решения учащиеся могут только в практике самостоятельных поисков. Однако это не означает, что учащиеся в этом отношении должны быть предоставлены самим себе. Усвоением эвристических приемов решения задач можно и нужно руководить. Попытаемся выявить некоторые возможности этого руководства.

Хорошо известно, что учащихся весьма часто затрудняют вспомогательные построения, необходимые для решения задачи. Чтобы они могли догадаться, какие именно построения нужны, следует внимательно изучать, что дано в задаче и что требуется. Обычно содержание задачи подсказывает вспомогательное построение и часто не одно. Рассмотрим задачу 11 из п. 33 («Геометрия 6»).

Дано: $(MN) \parallel (KL)$ (*рис.* 2). *Доказать:* $\widehat{ABC} = \widehat{NAB} + \widehat{BCL}$.

Здесь возможны такие вспомогательные построения: а) продолжить $[BC]$ до пересечения с (MN) или $[AB]$ до пересечения с (KL),

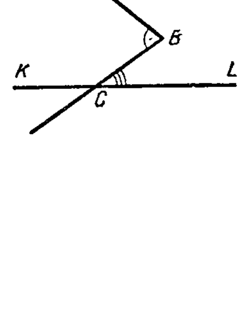


Рис. 2

б) построить прямую, проходящую через B и параллельную (MN). Каждое из них подсказывает искомое доказательство.

Рассмотрим еще интересную задачу по готовому чертежу (рис. 3). Сначала может показаться, что следует построить отрезок CD и рассмотреть равнобедренные треугольники BAD, CAD и BAC. Но этот путь оказывается

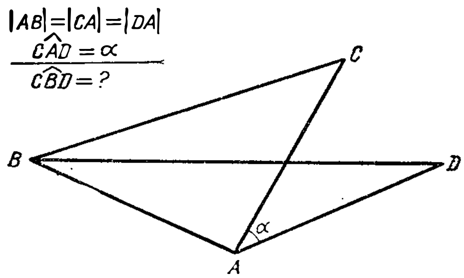


Рис. 3

бесперспективным. Вернувшись к условию, учтем, что точки B, C и D равноудалены от A. Может быть, стóит построить окружность $(A;\ |AB|)$? Построим и сразу же «видим» ответ: $\widehat{CBD} = \alpha/2$.

В задаче по рис. 1 выбор вспомогательного построения также затруднен, но возможен, если вдуматься в условие. Заданное отношение $|CB| : |CD| = {}^1/_2$ «подсказывает» догадку о построении прямоугольного треугольника с углом в 30°, так как для него отношение длины катета, противолежащего углу в 30°, к длине гипотенузы также равно ${}^1/_2$.

Приведенные примеры помогают сделать вывод о том, что учащимся следует внушать обращаться для выбора вспомогательного построения к более основательному изучению данных и искомого, при этом не теряться, если одна догадка не приведет к успеху, а искать и пробовать вторую, третью, проявляя настойчивость и изобретательность.

Освоению учащимися эвристических приемов решения задач помогают такие неоднократно повторяемые учителем «подсказки», как: «Не решали ли мы ранее задачу, аналогичную данной (или сходную с ней, или решением которой можно воспользоваться в данном случае)? Не изучали ли мы теорему, которая могла бы пригодиться в данной задаче? Не стóит ли рассмотреть некоторые частные случаи задачи?»

Необходимо накапливать и сохранять в памяти различные возможности применения изучаемых фактов при решении задач. Например, для доказательства конгруэнтности углов можно привлекать: а) вхождение их в конгруэнтные фигуры, б) сохранение их величин при перемещениях (величины углов сохраняются также при гомотетии и подобном преобразовании), в) теоремы о вертикальных углах, об углах с сонаправленными сторонами, об углах параллелограмма, о вписанных углах, опирающихся на одну и ту же дугу, и т. д.

При изучении теорем существенно выяснять, как и для чего их можно использовать. Например, теорему Фалеса особенно часто приходится применять в случае, когда конгруэнтные отрезки откладывают последовательно на стороне угла от его вершины. Поэтому указанный случай следует рассмотреть особо.

Овладение эвристическими приемами мышления особенно тесно связано с использованием в рассуждениях анализа и синтеза. Первые задачи VI класса таковы, что для решения их достаточно одного-двух «шагов» мысли. Поэтому в поисках их решений предпочтителен синтез. Но постепенно во все большей степени в решения включается анализ. Так что в работе с задачами учащиеся часто должны слышать от учителя и задавать самим себе вопросы: «Что можно доказать (вычислить, построить), располагая такими-то данными? Что достаточно доказать (построить, вычислить) для достижения определенной цели?»

Особое значение для привития учащимся навыков эвристического мышления имеют различные решения одной и той же задачи. Возьмем задачу 7, п. 34 («Геометрия 6»).

Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника параллельна основанию.

Наверное, учащиеся попытаются доказать конгруэнтность углов DBE и BAC (рис. 4) или углов EBC и ACB. Но можно, проведя биссектрису BF, «натолкнуть» школьников на иное решение, основой которого будет утверждение о перпендикулярности биссектрис смежных углов.

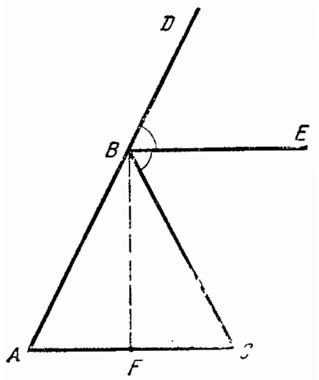


Рис. 4

В отдельных случаях задачи, интересные в познавательном отношении, можно решать повторно на основе нового материала.

В поисках различных способов решения одной и той же задачи существен не спортивный интерес — найти как можно больше способов, а сопоставление их. Именно поэтому во многих случаях предпочтительнее решить одну задачу несколькими способами, чем несколько задач — одним способом.

Основным приемом поиска различных способов решений задачи, наверное, следует считать рассмотрение разных объектов (углов, отрезков, прямых, фигур и т. д.) и различное толкование одних и тех же объектов, сводящееся к выявлению их новых связей и отношений. Так, при решении задачи о биссектрисе внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника в первом случае актуализируются соответственные углы DBE и BAC, а во втором луч BE рассматривается как биссектриса одного из смежных углов.

Добавим к сказанному, что успешные поиски будут убеждать учащихся в доступности решений (когда способов решения несколько, то найти хотя бы один из них легче).

Еще большую ценность для привития учащимся эвристических умений имеет заключительный этап работы с задачей (или серией задач). Во многих случаях его составной частью должно быть обсуждение решения, т. е. выявление основной его идеи, установление того, что помогло догадаться о ней, какими теоремами и ранее решенными задачами пришлось воспользоваться. Конечно, подобные вопросы можно ставить и решать далеко не по всем задачам, а только по особенно важным в познавательном и дидактическом отношениях и по некоторым сериям задач, объединяемых единой идеей решения.

Основным методическим приемом работы с задачами, поощряющим познавательную деятельность и создающим для нее особенно благоприятные возможности, следует признать самостоятельную работу учащихся [2]. Справедливо считается, что одна задача, решенная учеником самостоятельно, стóит десяти задач, решения которых даны готовыми. Действительно, систематическое проведение самостоятельных работ будет существенно помогать достижению всех целей, преследуемых работой с задачами. В частности, оно будет давать учителю богатую информацию о ходе и результатах учебной работы, а значит, возмож-

[2] Возможные тексты таких работ даны в дидактических материалах.

ность незамедлительно корректировать ее содержание и методику. Важно и то, что при выполнении самостоятельных работ (но не контрольных) учащиеся свободно могут обращаться к учебнику, к своим записям, к помощи товарищей и особенно учителя.

Испытанным и хорошо зарекомендовавшим себя средством активизации мыслительной деятельности учащихся являются задачи-вопросы. Для разрешения их особенно удобна классная беседа, но можно включать их и в индивидуальные задания учащимся. Для более сильных учащихся такие задачи можно несколько усложнять. Так, в VI классе могут быть, например, предложены вопросы: «Какие отрезки отображаются на себя при: а) осевой симметрии, б) центральной симметрии, в) повороте, г) параллельном переносе? При каких перемещениях прямая отображаются на параллельную ей прямую?»

Решая задачу-вопрос, учащиеся должны дать ответ и *обосновать его.* Это хорошая практика в нахождении и «проговаривании» *несложных доказательств.*

К задачам-вопросам примыкают задачи для устного решения (многие из них можно предлагать учащимся по готовым чертежам). В учебном пособии такие задачи выделяются знаком (°). Но учитель, хорошо знающий возможности своих учеников, может изменять их.

Значительным вкладом в развитие самостоятельности мышления учащихся могут служить задания на придумывание примеров и контрпримеров вводимых понятий. При этом не следует ограничивать учащихся лишь областью геометрии. Соответствующие примеры могут быть житейскими и арифметико-алгебраическими.

Особо остановимся на «перестройках» задач: они, как правило, должны входить в заключительный этап работы с задачей, о котором говорилось выше.

По вопросу о «перестройке» мы ограничимся лишь отдельными замечаниями. Нередко решенные задачи могут естественно перерастать в новые. Рассмотрим задачу:

Докажите, что высоты, проведенные из вершин при основании равнобедренного треугольника, конгруэнтны. Верно ли аналогичное свойство для медиан и биссектрис?

Ее можно дополнить предложением: докажите конгруэнтность соответствующих отрезков, отсекаемых на боковых сторонах треугольника, основаниями высот (медиан, биссектрис).

Для некоторых задач полезно составлять и решать «обратные» им. Например, для только что упомянутой задачи «обратными» будут такие:

Докажите, что треугольник равнобедренный, если: 1) *две его высоты конгруэнтны,* 2) *конгруэнтны две его медианы,* 3) *конгруэнтны две биссектрисы.*

Из них задачи 1) и 2) решаются несложно, а последняя вряд ли доступна даже способным учащимся VI класса.

В учебном пособии мало задач, задающих определенные соотношения между элементами фигур, но не содержащих требования (так называемых неполных задач). Сам учитель легко может некоторые обычные задачи превратить в неполные, сохранив данные и заменив требование вопросом: «Что можно доказать (вычислить)?»

Большой дидактический смысл неполных задач в том, что они приучают школьников не только доказывать (вычислять, строить) предлагаемое задачей, но и догадываться, «видеть», что может быть сделано. Такие навыки особенно ценны для поисков решений.

Для активизации учебной деятельности полезно также рассматривать задачи с недостающими данными и переопределенные. Определенной обычно называется такая задача, в которой данные элементы вполне определяют рассматриваемую фигуру и по ним (вообще говоря, однозначно) могут быть найдены (вычислены, построены) искомые элементы или сама фигура. Но может оказаться и так, что данных в условии элементов фигуры недостаточно для получения однозначного ответа на поставленный вопрос. Простой пример задач этого рода — построить ромб по его высоте. Такие задачи обычно имеют бесконечно много решений и называются неопределенными.

Переопределенные задачи (с избыточной информацией) содержат лишние данные, которые могут оказаться согласованными с остальными, но могут и противоречить им. В первом случае задача имеет решение, во втором — не имеет.

Задач, о которых мы сейчас говорим, в учебном пособии очень мало, но они нужны. Решая их, учащиеся будут накапливать знания об определяемости различных фигур (окружности, треугольника, четырехугольника и т. д.). Составление таких заданий учителя затруднить не может.

Второй принцип, тесно связанный с первым,— это *принцип возбуждения и поддержания интереса учащихся к решению задач.*

Что же возбуждает и делает устойчивым интерес учащихся к геометрическим задачам?

Прежде всего — вся постановка работы с задачами. Если ученик видит свои успехи, свое продвижение вперед, если имеются благоприятные возможности для проявления активности и самостоятельности, если работа удовлетворяет, то ученик будет считать решение задач нужным и интересным. А интерес — один из важнейших стимулов учения.

Благоприятная обстановка для работы с задачами создается прежде всего хорошей методикой, уважительным отношением учителя ко всем учащимся, увлеченностью делом. Но и здесь нельзя полагаться на формирование такой обстановки «самотеком». Из специальных мер, возбуждающих и поддерживающих интерес к задачам, можно назвать рассмотрение задач на практическое применение геометрии (нахождение недоступных для непосредственного измерения расстояний, высот предметов, осложненные препятствиями построения на местности и т. д.) и работу с задачами, более интересными по содержанию, форме и методам решений. Учащихся могут заинтересовать, например, задачи-вопросы:

1) *Существует ли точка круга, через которую проходит бесконечно много конгруэнтных между собою хорд?* 2) *Сколько получится всего треугольников, если в выпуклом четырехугольнике построить его диагонали?* 3) *Приведите примеры фигур, имеющих бесконечно много: а) центров симметрии, б) осей симметрии, в) центров и осей симметрии.*

Известен прием возбуждения большего интереса к задаче, состоящий в придании ей занимательной формы. Рассмотрим задачу:

Постройте точки, находящиеся на расстоянии a от данной точки A и на расстоянии b от другой данной точки B. Ее можно сформулировать иначе.

На спортивных соревнованиях два организатора имеют усилители речи. Команды одного из них слышны на расстоянии, не превышающем 40 *м от него, а команды другого — на расстоянии* 50 *м. Изобразите рисунками, где будут слышны команды: а) обоих организаторов, б) только первого; в) только второго; г) не слышны команды ни одного из них (если расстояние между ними:* 60 *м,* 40 *м,* 10 *м,* 0 *м).*

Практика обучения геометрии подсказывает также, что интерес возбуждают задания на нахождение ошибок в доказательствах и решениях задач, в частности разбор софизмов. В VI классе такие задания по необходимости должны быть очень элементарными. Разбор софизмов можно рекомендовать не ранее чем в VII классе.

Рассмотрим *принцип индивидуализации работы учащихся с задачами и сочетания коллективной работы класса с индивидуальной.*

Основное в организации индивидуальной работы с учащимися по решению задач — конкретное знание учителем состояния умений школьников и степени овладения изученным материалом. Только на этой основе можно с меньшими затратами сил и времени добиваться успешного продвижения вперед всего состава класса.

Хорошо известно, что у разных учащихся по-разному протекает усвоение изучаемого на уроках, различны быстрота «схватывания» и закрепления нового, предшествующая подготовка, владение навыками и умениями. Все это требует индивидуального подхода.

В учебном пособии, вообще говоря, даны задачи в расчете на так называемого «среднего» ученика. Но ничто не мешает изменять их условия так, чтобы получались однотипные задания для учащихся, которым требуется большее число упражнений. В качестве примера возьмем задачу 1 из п. 4 («Геометрия 6»).

Три различные точки K, L и M лежат на одной прямой. $|KL|=6$ см; $|LM|=10$ см. Каким может быть расстояние $|KM|$? Для каждого из возможных случаев сделайте соответствующий рисунок. Эта задача, как и многие другие, допускает составление в случае необходимости нескольких аналогичных ей. Достаточно изменить числовые данные.

Для индивидуализации учебной работы с задачами существенна также возможность во многих случаях понижать их сложность. Понятие сложной (трудной) задачи в значительной степени субъективно. Его обычно трактуют как синоним затрудненности поиска решения. Основная возможность понижения сложности — подбор (составление) более простых поясняющих задач, подготавливающих учащихся к решению сложной. Так, для задачи о биссектрисе внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника подготовительными могут быть, например, такие:

Сравните внешний угол при вершине равнобедренного треугольника с углом при его основании.

Докажите, что биссектрисы смежных углов перпендикулярны.

Возможны две последовательности рассмотрения подготовительных и породившей их задач. Можно постепенно «по ступенькам» подготовительных задач подойти к основной или начать с основной и для нее искать и решать подготовительные. Наверное, возможны оба пути. Отметим только, что второй из них учит школьников подступаться к решениям более сложных задач, вооружает их одним из наиболее сильных приемов поиска решений.

Коллективные поиски и осуществление решений обычно сменяются самостоятельной работой школьников, в ходе которой учитель имеет значительные возможности для оказания им помощи в преодолении возникающих затруднений. Наблюдая за их работой, учитель может тактично вмешиваться в ее ход, напоминать нужные теоремы, указывать на неиспользованные учеником данные, «подсказывать» возможные вспомогательные построения, короче говоря, консультировать. Для некоторых учащихся можно подбирать задачи более сложные, чем для основного состава класса.

Перейдем к *принципу рациональной организации учебной работы с задачами.*

Этот принцип стал особенно актуальным в современных условиях, в связи с определившимся «уплотнением» работы над содержанием учебного материала.

Экономное использование учебного времени, отводимого на решение задач, означает прежде всего достаточно тщательный их отбор. Учителю следует исходить из учебного значения и возможностей каждой из них. Нормально такое положение, когда преподаватель отчетливо представляет себе, зачем берется данная задача, что она даст учащимся. При этом не следует ориентироваться на разбор с учащимися возможно большего числа задач в ущерб основательности разбора каждой из них. Пусть здесь действует правильно «лучше меньше, да лучше».

Из специальных мер по экономии учебного времени укажем на следующие: более быстрое ознакомление учащихся с содержанием задач (в частности, отказ от многократных повторений условия и переписывания его в тетради), устные решения задач, решения по готовым чертежам, рационализация записей.

Более подробно рассмотрим вопрос о ведении записей. Рекомендации здесь могут быть такими.

1. Нет необходимости записывать в тетрадях и на классной доске условия задач. Если задачи взяты из учебного пособия, то достаточно ставить их номера и номера пунктов, а при самостоятельных работах записывать номер работы, варианта и задачи.

2. Следует заботиться об экономии времени при выполнении чертежей-рисунков. Параллельные и перпендикулярные прямые, конгруэнтные отрезки и углы, равные расстояния и т. д. для задач на вычисление и доказательство можно изображать «на глаз», пользуясь линовкой тетрадей. Все построения удобно выполнять карандашом: основные — линиями средней толщины, вспомогательные — тонкими или штриховыми. Такое графическое оформление позволяет в ряде случаев обходиться без письменного фиксирования хода решения. При разборе задач по готовым чертежам из учебного пособия не следует эти чертежи выполнять на доске и в тетрадях. Пусть перед глазами учащихся будет соответствующий рисунок пособия. Только в том случае, когда необходимы сложные вспомогательные построения или полная запись решения, такой рисунок можно сделать.

3. Записи решений могут быть краткими и полными. Для значительной части задач решения можно вообще не записывать, часто ограничиваясь одними чертежами-рисунками. Таковы, например, задачи на пересечение и объединение фигур, на построение образов при перемещениях и некоторые другие. Для несложных задач можно фиксировать лишь основную мысль доказательства (построения, вычисления) и ответ, а в ряде случаев ограничиваться лишь ответом.

4. Полная запись решений, включающая все необходимые ссылки и обоснования, в VI—VIII классах может применяться лишь для некоторых «типичных» задач. При этом для одних более целесообразна последовательная (линейная) запись используемых утверждений и их обоснований. Для других возможны записи в две колонки. В первой последовательно с использованием символики записываются утверждения, а во второй — их обоснования. Возможны и такие записи, которые содержат лишь последовательные фиксации утверждений без указаний их обоснований. В кратких и полных записях постоянно следует пользоваться принятой символикой, постепенно приучая к ней школьников. С VII класса удобно пользоваться общей схемой: $(...) \Rightarrow (...)$: в первых скобках символически записываются посылки, во второй — заключение (вывод); «$\Rightarrow$» знак логического следования. Можно таким же образом пользоваться знаком «$\Leftrightarrow$» логической эквивалентности (равносильности).

5. Не следует усложнять записи решений на построение. В VI классе для первых задач этого рода достаточно одних построений, а позднее можно ограничиваться краткой записью плана построения и самим построением. Традиционная запись по этапам (план построения, построение, доказательство, исследование) может практиковаться не ранее чем в VII классе.

6. Ученические записи решений не следует жестко регламентировать. Нет нужды в особом разучивании их форм. Ведь главное — решение, а не запись его. Запись бывает нуж-

на как одно из средств дополнительной самопроверки правильности решения, для быстрого повторения решения, если в этом возникает нужда. Однако общие требования к записям решений учащимся должны быть известны. Мы имеем в виду такие требования: а) краткость и понятность, б) безошибочное применение понятий и утверждений, в) правильное употребление символики, г) грамматическая и стилистическая корректность.

Приведем несколько примеров возможных записей решений задач из учебного пособия «Геометрия 6».

Задача 8 из п. 12.

Две пересекающиеся прямые разбивают плоскость на полуплоскости P_1 и P_2; P_3 и P_4 (*рис.* 5, *а*).

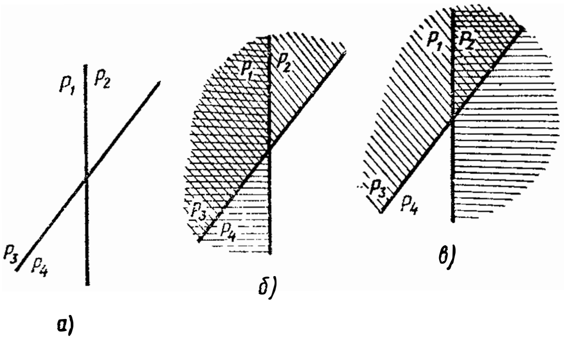


Рис. 5

а) *Найдите объединение полуплоскостей:* P_1 и P_3; P_2 и P_3; P_2 и P_4; P_1 и P_4.

б) *Найдите пересечение этих же полуплоскостей.* Здесь для фиксирования решений достаточно выполнить 4 рисунка (2 из них мы приводим на рис. 5, *б*, *в*) и записать пояснение к ним: заштрихованная фигура — объединение, а фигура с двойной штриховкой — пересечение (для штриховки удобно воспользоваться цветными карандашами).

Задача 2 из п. 27

На прямой, пересекающей стороны данного угла, найдите точку, лежащую внутри угла и равноудаленную от его сторон. Возможная запись: рассмотрим задачу для острого и тупого углов (рис. 6, *а*, *б*). Искомая точка должна принадлежать биссектрисе данного угла и данной прямой. Построение: 1) строим биссектрису BF угла ABC; 2) отметим точку K пересечения биссектрисы BF и данной прямой DE. K — искомая точка. Особый случай: данная прямая проходит через вершину B данного угла. Тогда искомая точка — B.

Задача 7 из п. 34

Дано: $\widehat{DBE}=\widehat{EBC}$, $|AB|=|BC|$ (*рис.* 4).
Доказать: $[BE)\parallel[AC]$.

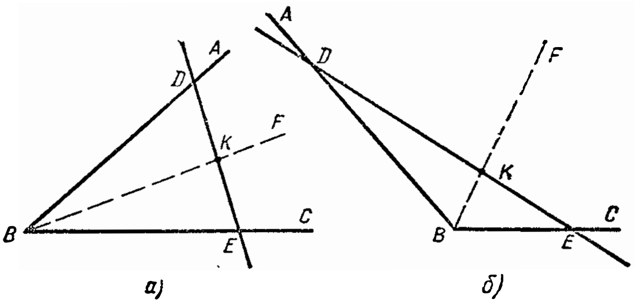


Рис. 6

$$(\widehat{BAC}=\widehat{BCA},\ \widehat{BAC}+\widehat{BCA}=\widehat{CBD})\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\widehat{BAC}=\tfrac{1}{2}\widehat{CBD}),$$

$$\left(\widehat{BAC}=\tfrac{1}{2}\widehat{CBD},\ \widehat{DBE}=\tfrac{1}{2}\widehat{CBD}\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(\widehat{BAC}=\widehat{DBE}),$$

$$(\widehat{BAC}=\widehat{DBE})\Rightarrow([BE)\parallel[AC]).$$

Задача 5 из п. 38

Дано: Четырехугольник $ABCD$; $|AC|=n$, $|BD|=m$, точки E, F, K, L — середины сторон AB, BC, CD и AD соответственно.

Найти: Периметр P четырехугольника $EFKL$ (рис. 7).

$P=\vert EF\vert+\vert FK\vert+$ $+\vert KL\vert+\vert LE\vert$	По определению
$[EF]$, $[FK]$, $[KL]$, $[LE]$ — средние линии треугольников BAC, BCD, CDA, DAB	По условию
$\vert EF\vert=\frac{n}{2}$, $\vert FK\vert=\frac{m}{2}$, $\vert KL\vert=\frac{n}{2}$, $\vert LE\vert=\frac{m}{2}$	Теорема о средней линии треугольника
$P=\frac{n}{2}+\frac{m}{2}+$ $+\frac{n}{2}+\frac{m}{2}=n+m$	

Задача 3 из п. 30

Дано: $a\perp p$, $b\perp p$, $a\neq b$ (рис. 8).
Доказать: $a\parallel b$.

Допущение: $a\nparallel b$; $(a\nparallel b)\Rightarrow(a\cap b=M)$.

Через точку M проходят два различных перпендикуляра к прямой p — противоречие теореме о единственности перпендикуляра. Вывод: $a\parallel b$. (В записях при доказательствах

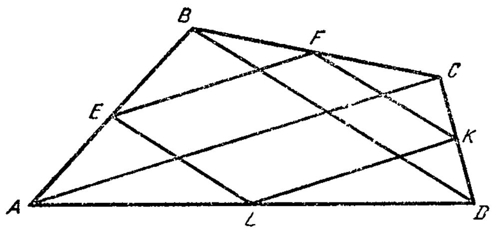


Рис. 7

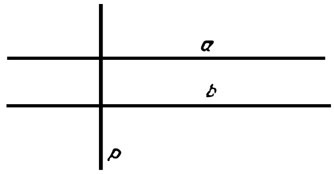


Рис. 8

приведением к противоречию следует отчетливо указывать, из какого допущения исходим, в чем противоречие, какой делаем вывод.) Обращаем внимание на то, что к этому доказательству желательно сделать рисунок.

В заключение мы рассмотрим одно из основных требований к решению задач — требование полноты. Под полнотой будем понимать: во-первых, достижимую на данном уровне обучения геометрии логическую обоснованность (аргументированность) решения и, во-вторых, исчерпывающий характер рассмотрения типичных случаев, охватываемых данной задачей.

Полнота в первом смысле в условиях средней школы недостижима. Это объясняется тем, что доказательства в школьной геометрии обычно используют интуитивные утверждения, часто «подсказываемые» чертежом-рисунком. Простой пример такого рода — доказательство теоремы о свойствах равнобедренного треугольника, для которого существенно обнаруживаемое на рисунке и принимаемое без обоснования утверждение: основание высоты, проведенной из вершины, лежит между концами основания треугольника. Кроме того, в школьной геометрии часть утверждений (не относимых к аксиомам) принимается без доказательства.

С неполнотой решений в смысле логической обоснованности нам приходится мириться. Она педагогически неизбежна, но ничто не мешает нам правильно разъяснять суть дела учащимся и, может быть, в особо важных случаях указывать те достоверные утверждения, которые приходится принимать на основе наглядности, без логических обоснований. При этом наш долг воспитывать у учащихся «осторожное» обращение с чертежами-рисунками. В необходимости этой «осторожности» хорошо убеждают многочисленные геометрические софизмы, основанные на ошибочных чертежах.

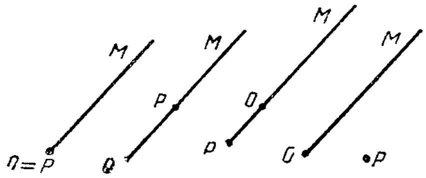
Методические рекомендации по усвоению учащимися второй части требования полноты — рассмотрения возможных типичных случаев — могут быть такими.

1) Первые задачи в VI классе и часть задач в последующих классах следует формулировать так, чтобы число возможных случаев было ограничено (угол — острый, треугольник — остроугольный или прямоугольный, четырехугольник — выпуклый и т. д.). Если задачи содержат явно несколько случаев, то на первых порах полезно включать в их условия требование рассмотреть все основные возможные случаи, изобразить их на рисунках, установить, сколько решений имеет задача, и т. д. Подобные напоминания будут приучать школьников давать полные решения, и потом надобности в таких напоминаниях уже не будет.

2) Если поясняющих напоминаний, о которых только что говорилось, в тексте задачи нет, но она охватывает несколько типичных случаев, то нужно, чтобы школьники привыкали видеть и рассматривать все эти случаи. К концу VI класса учащиеся уже должны знать о требовании полноты рассмотрения типичных случаев и руководствоваться им. Приведем в качестве примера задачу 5 из п. 31 («Геометрия 6»).

Даны луч OM и центр симметрии P. Постройте луч KL, центрально симметричный с лучом OM. Здесь следует рассмотреть несколько типичных случаев, показанных на рис. 9.

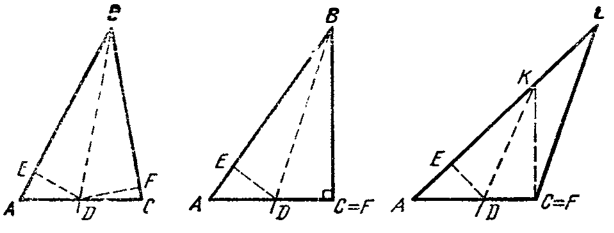
Рис. 9



3) Одна из особенностей многих геометрических задач состоит в том, что они охватывают несколько типичных случаев. Например, задача 4 из п. 27 («Геометрия 6»).

На стороне треугольника постройте точку, равноудаленную от двух других его сторон.

Полное решение складывается из рассмотрения трех случаев: а) углы, прилежащие к данной стороне, острые, б) один из них прямой, в) тупой. В случаях а) и б) задача решается просто. Искомая точка — точка пересечения данной стороны и биссектрисы про-



а) б) в)

Рис. 10

тиволежащего ей угла (рис. 10, *а*, *б*). Случай в) заметно трудней. Решение, пригодное в предшествующих случаях, здесь «не проходит». Но построением $[CK]\perp[AC]$ дело сводится к случаю б). (Отметим, что перед этой задачей было бы полезно для сопоставления решить задачу: построить на стороне треугольника точку, равноудаленную от *прямых*, которым принадлежат две другие стороны).

Как показывают эти задачи, рассмотрение некоторых из возможных типичных случаев может затруднить учащихся. Тогда учителю следует ввести в условия соответствующие ограничения. Приведем в качестве примера задачу 2 из п. 27 («Геометрия 6»).

На прямой, пересекающей стороны данного угла, найдите точку, лежащую внутри угла и равноудаленную от его сторон. Здесь можно ограничиться указанием угла, величина которого меньше 180°. Такого рода ограничения могут накладывать на свои решения и сами учащиеся (при выполнении самостоятельных работ). Исключенные из рассмотрения сложные случаи можно разобрать на кружке.

4) Требование полноты решения не следует распространять на задачи по готовым чертежам, на пересечение и объединение фигур. Для первых из них чертеж задает единственный типичный случай, для вторых — решений обычно бесконечно много.

5) Следует приучать учащихся выявлять, не были ли пропущены какие-либо типичные случаи. Часто полезен вопрос: «Все ли возможности рассмотрены?»

Подведем итог. Изменение содержания школьного курса геометрии привело к значительному обновлению системы задач и к необходимости разрабатывать соответствующую ей методику. Накопленный методический опыт позволил дать по указанным вопросам только основные рекомендации. Творческое участие широких кругов учителей в анализе и решении методических проблем работы с геометрическими задачами послужит базой для коллективной разработки методики этого вида учебной работы.

И. Л. НИКОЛЬСКАЯ
(Москва)

ИЗУЧЕНИЕ ЛОГИЧЕСКОГО СЛЕДОВАНИЯ И ЛОГИЧЕСКОЙ РАВНОСИЛЬНОСТИ В VII КЛАССЕ

В этой статье излагается ряд соображений методического характера, возникших в практике и при анализе опыта обучения понятиям «логическое следование» и «логическая равносильность».

В учебном пособии «Алгебра 7»[1] понятие «логическое следование» вводится на примере и его определение (в отличие от определения равносильности) в тексте не выделено. Опыт показывает, что эта, казалось бы, малозначительная деталь оборачивается формализмом в знаниях учащихся, которые бойко формулируют определение равносильности предложений («Если из первого предложения следует второе и из второго следует первое, то эти предложения называются равносильными»), но не могут ответить на вопрос, что значит «следует». К этому времени учащиеся уже имеют интуитивное представление о логическом следовании, знакомы с различными его примерами. Целесообразно после рассмотрения ряда таких примеров и выяснения их общей особенности — невозможности одновременной истинности первого предложения и ложности второго — сформулировать определение: «Из предложения $P(x)$ следует предложение $Q(x)$, если при всяком значении переменной, обращающем $P(x)$ в истинное высказывание, $Q(x)$ также обращается в истинное высказывание». Таким образом, следование определяется для предложения с одной и притом одной и той же переменной. Такое ограничение подразумевается, очевидно, авторами учебника. В противном случае утверждение «...равносильны те и только те уравнения или неравенства, множества решений которых совпадают» (с. 87) некорректно. Однако упоминание об этом ограничении содержится только в замечании на с. 87, касающемся уравнений и неравенств, не имеющих решений. Предлагаемое нами определение без осо-

[1] Алгебра. Учебное пособие для 7-го класса средней школы. Под ред. А. И. Маркушевича. М., «Просвещение», 1973 и позже.

бых трудностей усваивается учащимися, его легко обобщить, и, главное, оно обеспечивает естественность и корректность перевода на теоретико-множественный язык.

Однако умение правильно сформулировать определение и даже умение решать с его помощью задачи из учебника еще не свидетельствуют о ясном понимании сущности логического следования. В этом легко убедиться, предложив учащимся такое упражнение.

Задайте множество значений переменной так, чтобы на этом множестве из предложения «х — четное число» следовало предложение «х делится на 3».

Если предоставить учащимся решать эту задачу самостоятельно, то, как правило, элементами составленных ими множеств будут только числа, кратные 6; например, {6, 12, 18}. На вопрос, можно ли включить в искомое множество числа 1, 2 или 3, учащиеся дают отрицательные ответы, что для чисел 1 и 3 неверно. В самом деле, высказывания «1 — четное число» и «1 делится на 3» оба ложны, а это не противоречит определению логического следования, запрещающему лишь одновременную истинность первого предложения и ложность второго; при x, равном 3, первое высказывание («3 — четное число») ложно, а второе («3 делится на 3») истинно, что также допускается определением. Интересно, что, решая подобную задачу для равносильности, учащиеся включают в искомое множество как те значения переменной, при которых оба предложения истинны, так и те, которые дают ложные высказывания. По-видимому, несимметричность отношения следования является психологическим барьером, мешающим усмотреть непосредственное и, казалось бы, очевидное следствие из его определения, состоящее в том, что следование исключает только вторую возможность из четырех — «истина, истина», «истина, ложь», «ложь, истина», «ложь, ложь», допуская тем самым все остальные. Преодолеть эту трудность, как и ряд других, помогает теоретико-множественная трактовка следования. В учебнике такая трактовка дается только для равносильности, смысл которой постигается учащимися значительно легче, чем смысл следования.

Связь между логическим следованием и включением множеств устанавливается следующим утверждением:

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — два уравнения или неравенства; из $P(x)$ следует $Q(x)$ тогда и только тогда, когда множество решений $P(x)$ есть подмножество множества решений $Q(x)$. Справедливость этого утверждения почти очевидна:

1. Пусть $P(x) \Rightarrow Q(x)$; тогда всякое решение $P(x)$ является решением $Q(x)$, т. е. множество решений $P(x)$ является подмножеством множества решений $Q(x)$.

2. Пусть множество решений $P(x)$ — подмножество множества решений $Q(x)$; тогда всякое значение x, обращающее $P(x)$ в истинное высказывание, обращает $Q(x)$ также в истинное высказывание, т. е. $P(x) \Rightarrow Q(x)$.

Понятие «множество истинности предложения с переменной», воспринимаемое учащимися совершенно естественно, как обобщение понятия «множество решений уравнения (неравенства)», дает возможность обсуждать на теоретико-множественном языке вопросы логического следования для любых предложений с переменной, а не только для уравнений и неравенств. Так, рассматривая приведенный выше пример, учащиеся освобождаются от последних сомнений в том, что в искомое множество наряду с числами 6, 12, 18 можно включить числа 1 и 3, как только убеждаются, что на множестве {1, 3, 6, 12, 18} множество истинности предложения «x — четное число» есть подмножество множества истинности предложения «x делится на 3» ($\{6, 12, 18\} \subset \subset \{3, 6, 12, 18\}$).

Обращение к теоретико-множественной трактовке следования особенно полезно в тех случаях, когда речь идет о следовании, не являющемся «эффективным», т. е. таким, которое обеспечивается соответствующими преобразованиями предложения (например, возведением обеих частей уравнения в квадрат, умножением на одно и то же число и т. п.). Так, для решения № 326 из учебника («Среди данных неравенств укажите такое, из которого следуют все остальные») достаточно изобразить на координатной прямой множества решений данных неравенств, после чего ответ непосредственно считывается с рисунка. (Кстати говоря, теоретико-множественная иллюстрация следования с очевидностью обнаруживает его транзитивность, о которой в учебнике ничего не сказано.)

Подобным образом, т. е. с помощью рисунка, легко получить ответы на вопросы типа: «При каких значениях параметра из неравенства (уравнения), содержащего этот параметр, следует неравенство (уравнение) без параметра?» Таков, например, вопрос упражнения № 492(а) («При каких значениях a из неравенства $x>a$ следует неравенство $x>12$?» или аналогичный, но более трудный вопрос относительно неравенств $|x|>a$ и $|x|>3$. Ответ на последний вопрос: $a \geqslant 3$).

Тот же вопрос относительно неравенств $|x|<a$ и $|x|<3$ дает повод для естественного распространения определения следования на случай, когда множество истинности первого предложения пусто. (Нам кажется нелогичным отказываться от такого расширения определения, поскольку для равносильности это в учебнике сделано.) После того как учащиеся в качестве искомых значений a назовут все положительные числа, не превосходящие 3, перед ними следует поставить вопрос, каким будет множество решений первого неравенства при a, равном 0, при отрицательных значениях a. Выяснив, что это множество пустое, и вспомнив, что пустое множество считается подмножеством любого множества, учащиеся готовы к принятию следующего соглашения:

Для двух неравенств (уравнений, вообще — предложений) с одной и той же переменной будем считать, что из первого следует второе и в том случае, когда множество решений (множество истинности) первого пусто.

На основании этого соглашения в искомое множество кроме всех положительных чисел, не превосходящих 3, включаются все неположительные числа. Окончательный ответ: $(x<a) \Rightarrow (x<3)$ при $a \leqslant 3$.

Изучение логического следования описанным способом дает еще ряд преимуществ, сверх перечисленных. Теоретико-множественная трактовка равносильности предложений (в том числе — неравенств и уравнений, не имеющих решений) получается как очевидное следствие из определения равносильности и теоретико-множественного толкования следования и легко выводится учащимися самостоятельно. Сопоставление свойств логического следования и равносильности с помощью их теоретико-множественной интерпретации позволяет наглядно продемонстрировать учащимся сходство этих понятий (транзитивность) и различие (несимметричность первого и симметричность второго).

Выявив транзитивность следования и равносильности, мы получаем основание для записей в виде «цепочек» решений уравнений, неравенств, доказательств неравенств и пр. Культивировать такие записи, на наш взгляд, совершенно необходимо: во многих случаях они позволяют кратко, но со всей полнотой отразить ход рассуждения, дисциплинируют мысль учащегося, заставляя его задуматься над правомерностью переходов от одного звена «цепочки» к другому, дают учителю возможность легко обнаружить ошибку в рассуждении и определить ее характер. Приведем пример записи решения неравенства в виде «цепочки» равносильностей:

$$(|x|<1) \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ x<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in \,]-1;\, \infty[\\ x \in \,]-\infty;\, 1[\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x \in \,]-1;\, \infty[\, \cap \,]-\infty;\, 1[) \Leftrightarrow (x \in \,]-1;\, 1[).$$

Ответ: $]-1;\, 1[$

Разумеется, эту запись можно сократить, опустив некоторые или даже все промежуточные звенья; однако умение восстановить ее полностью мы рассматриваем как критерий осознанности решения.

Коснемся некоторых более мелких вопросов.

Вместо слов «не следует», «не равносильны» мы использовали символы следования и равносильности, перечеркивая их. Это существенно упростило работу над многими упражнениями, позволив сократить и упорядочить записи.

Выяснение вопроса о равносильности предложений в ряде случаев облегчается, если пользоваться утверждением: «Предложения P и Q равносильны тогда и только тогда, когда они одновременно (при одинаковых значениях переменных) истинны или ложны». Эквивалентность этого утверждения определению равносильности через следование очевидна.

В заключение нам хочется выразить удовлетворение тем, что логические понятия стали предметом специального изучения в школьном курсе математики, и, вместе с тем, некоторую неудовлетворенность: опыт показывает, что локальное их изучение в течение нескольких часов на уроках алгебры не дает заметного развивающего эффекта.

Нужны методические разработки по дальнейшему использованию и развитию понятий «логическое следование» и «логическая равносильность» в курсах алгебры и геометрии восьмилетней и средней школы.

Р. А. ХАБИБ
(Москва)

АКТИВИЗАЦИЯ УЧЕБНО-ПОЗНАВАТЕЛЬНОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ШКОЛЬНИКОВ НА УРОКЕ

Принципы развивающего и воспитывающего обучения, которые взяты на вооружение советской школой, все решительнее заявляют о себе при совершенствовании методической системы преподавания основ наук. В педагогической литературе в последние годы утверждается термин «учебно-познавательная работа школьников» вместо термина «учебная работа». Этим словосочетанием подчеркивается требование единства обучения и развития познавательных сил учащихся, воспитания у них творческих способностей и высокой умственной культуры.

Активизация самостоятельной деятельности школьников на уроке может рассматриваться в двух аспектах, касающихся их коллективной и индивидуальной учебно-познавательной работы, организуемой и направляемой учителем. Вместе с тем эти аспекты отнюдь не исчерпывают все многообразие педагогических проблем организации самостоятельной работы учащихся в процессе обучения математике.

В дополнение к тому, что известно учителям об индивидуализации обучения (без чего не может быть воспитания творческой активности и самостоятельности мышления каждого ученика), следует особо остановиться на значении и особенностях коллективной учебно-познавательной работы школьников на уроке.

Коллективная работа учащихся на уроке существенно отличается от обычной фронтальной работы: она в первую очередь характеризуется постоянным учебно-познавательным общением школьников на уроке.

Рассмотрим в качестве примера выполнение упражнений на этапе закрепления знаний. Нередко учителя применяют один и тот же прием организации фронтальной работы: очередное учебное задание дается всему классу, фаза индивидуальной работы практически отсутствует, так как искомое решение тотчас же рассматривается у доски одним или несколькими учениками. В данном случае обычно самостоятельно работают кроме опрашиваемых лишь самые сильные. Учителя не учитывают, однако, того, что при этом общее для всех задание не исключает фазы индивидуального его выполнения. Чтобы индивидуальная работа всех учащихся была успешной, целесообразно, во-первых, предварять ее коллективным обсуждением сущности задания, возможных путей решения, ожидаемых результатов и т. п.; во-вторых, завершать ее коллективным обсуждением полученных ответов, анализом ошибок и недочетов, установлением наиболее рационального способа решения и изучением возможности его применения.

Приведем пример. После изучения теоремы косинусов в VIII классе учащиеся могут вычислить длину стороны треугольника по данным длинам двух других сторон и величине угла, лежащего против неизвестной стороны. После выполнения задания такого типа учитель дает классу дополнительное задание: «Как провести вычисления, если известно, что величина данного угла, к примеру 3°, задана приближенно с точностью до 1°».

При обсуждении этого задания ученики коллективно выясняют, что косинус этого угла также приближенное число. Учитель может подсказать здесь, что точность искомого значения $\cos 3°$ можно определить при помощи четырехзначных математических таблиц В. М. Брадиса. Повторив определение верных цифр приближенного числа, установив, какие значения может принимать величина данного угла (от 2 до 4°), учащиеся выполняют индивидуальную работу, сводящуюся к нахождению и сравнению значений $\cos 2° \approx 0{,}9994$, $\cos 3° \approx 0{,}9986$, $\cos 4° \approx 0{,}9976$. (Из определения верных цифр и свойств тригонометрических функций следует, что $\cos 3° \approx 0{,}9986$ имеет три верных значащих цифры, что необходимо учесть при определении точности всех последующих вычислений по известным ученикам правилам.)

По вызову учителя учащиеся сообщают свои ответы, некоторые из них (до разбора правильности использованных путей решения) записывают на доске, «защищают» их. После этого класс коллективно оценивает их правильность и возможность обобщения решенной задачи. Такая работа находит свое продолжение при решении ряда важных практических задач на измерение и вычисление.

Предлагаемое на уроке индивидуальное задание должно быть доступным и интересным большинству учащихся класса, иначе его нет смысла делать предметом общей самостоятельной работы. Кроме того, по содержанию и форме решения оно должно быть удобным для быстрого перехода от коллективной работы к индивидуальной и от индивидуальной к коллективной. В тех случаях, когда часть урока систематически отводится на индивидуальную работу учащихся, необходимо обратить особое внимание на рациональное использование времени. Например, целесообразны в этом отношении математические диктанты или устное решение задач и упражнений (с записью одних ответов, вычерчиванием геометрических фигур, показом соответствующих моделей, карточек с изображением нужной цифры, буквы, значка). Лаконичность ответов при выполнении таких заданий, использование специальных карточек «обратной связи», графических средств и геометрических моделей — все это многократно увеличивает интенсивность работы учащихся.

Приведем пример задания, в котором рационально сочетается коллективная и индивидуальная учебно-познавательная работа учащихся.

Ученикам IV класса при закреплении приемов решения уравнений дается задание: «Изобразите графически число легковых и грузовых машин автопарка, если легковых машин в 4 раза меньше, чем грузовых». Каждый ученик должен начертить в своей тетради отрезок длиной в одну клетку (число легковых машин) и отрезок длиной в четыре клетки (число грузовых машин). Обходя класс, учитель смотрит, когда можно продолжить чтение задачи: «Найдите, сколько легковых и сколько грузовых машин имеет автопарк, если всего машин было 525».

Ученики записывают: $x+4x=525$, $5x=525$, $x=105$ и $4x=420$.

Ответ: 105 легковых и 420 грузовых машин.

Повышение эффективности самостоятельной работы может быть достигнуто рассмотрением новых задач, полученных из только что разобранной задачи. Например, по чертежу к предыдущей задаче целесообразно рассмотреть новую, но сходную по условию задачу: «В автопарке грузовых машин на 525, или в 4 раза, больше, чем легковых. Сколько грузовых и легковых машин имеет автопарк?» Перед индивидуальной работой учитель предлагает обсудить, что изменилось в условии задачи, и затем решить ее самостоятельно.

Полезно разобрать дополнительно еще и такую задачу: «В автопарке грузовых машин в 4 раза больше, чем легковых, а легковых в 4 раза меньше, чем грузовых. Сколько тех и других машин имеет автопарк?» Выясняется, что задача не может быть решена однозначно: буквенные выражения решений суть x и $4x$. Вторая часть условия новой информации не несет — это по-другому записанная первая часть условия. Учитель предлагает учащимся назвать в этом случае возможное количество тех и других машин. При этом выясняется, что по смыслу задачи число x может быть только положительным и целым.

Отвечает требованию рационального сочетания коллективной и индивидуальной работы учащихся также использование упражнений с набором готовых возможных ответов. Ученику достаточно указать соответствующий код ответа, который он считает правильным.

Например, на уроке в VI классе на доске записаны следующие уравнения:

$$1)\ x+x=2x;\ 2)\ x+x=2{,}5x;\ 3)\ y-y=0;\ 4)\ a+15=15+a;\ 5)\ b-4{,}2=5;\ 6)\ y+6=y+2{,}5.$$

Учитель ставит ряд вопросов. Ученики записывают в тетрадях только номера уравнений, которые являются ответом на поставленный вопрос. (Правильность решения может обсуждаться сразу же либо после выполнения всей серии из 4—5 упражнений.)

Какие из заданных уравнений:

1) не имеют решения; (2, 6)

2) имеют бесконечное множество решений; (1, 3, 4)

3) имеют единственное решение; (5)

4) имеют только отрицательные решения? (Нет.)

Весьма «экономичным» оказывается выполнение учебных заданий на материале иллюстраций и записей учебника, демонстрационных обучающих средств (настенные таблицы, диафильмы и др.).

Большое значение для активизации обучения математике имеет то обстоятельство, что учитель может использовать коллективные и индивидуальные работы учащихся во время объяснения нового материала. Это особенно необходимо в тех случаях, когда требуется тут же на уроке узнать, насколько успешным оказалось первичное осмысливание и закрепление новых знаний, как формируются умения по применению этих знаний к решению задач и т. п.

Даже немногочисленные примеры, рассмотренные выше, позволяют сделать вывод о тех полезных изменениях в структуре и содержании учебно-познавательной деятельности учащихся, к которым приводит введение в нее этапа коллективной работы. Прежде всего повышается эффективность индивидуальной работы учащихся, которая теперь организуется и корректируется их коллективной работой, а не только при помощи объяснений, вопросов, комментариев учителя. Постоянное чередование индивидуального и коллективного этапов работы учащихся содействует выявлению и исправлению возможных ошибок (притом часто без непосредственного участия учителя). Сами ошибки при этом становятся предметом обсуждений, что повышает познавательную роль выполняемых заданий. Школьники учатся критически осмысливать свои и чужие суждения, быстро разбираться в сущности задания.

Коллективная учебно-познавательная деятельность учащихся, организуя и корректируя их индивидуальную работу, осуществляет важную обучающую функцию, которая заключается в совершенствовании управления процессом обучения. Регулярная обратная связь — необходимый признак такого управления.

Не следует, однако, забывать, что в связи с постепенным усвоением новой темы (раздела) все большим числом учащихся класса организация коллективной (фронтальной или групповой) работы может стать нецелесообразной. В таких случаях для отставших от класса по тем или иным причинам учащихся определение учебных заданий, проверка правильности их работы, оказание необходимой помощи и т. п. осуществляются учителем путем индивидуальной работы. Существенная помощь здесь может быть оказана известными средствами индивидуализации обучения, в частности раздаточным дидактическим материалом. При переходе к изучению новых вопросов курса, которые необходимо усвоить всему классу, главную организационную роль в построении урока вновь начинает играть коллективная учебно-познавательная деятельность учащихся.

Эта совместная и согласованная деятельность учащихся организуется и направляется с помощью вопросов и других учебных заданий, предлагаемых учителем классу, с помощью его объяснений и резюмирующих заключений. Однако постепенно учитель привлекает к организации учебной работы на уроках математики самих учащихся, побуждая их ставить учебные проблемы, определять возможные пути их решения, проверять свои догадки и предположения, оценивать сделанное и возможности применения полученных знаний.

Новая программа средней школы по математике рекомендует использовать при изучении ряда теоретических вопросов индуктивные, в частности опытные, методы установления фактов, в том числе использование непосредственного практического опыта учащихся. Некоторые учителя ошибочно относят эту рекомендацию лишь к IV и V классам. Однако использование опыта, наблюдений, индукции в качестве полноправного компонента познавательной деятельности важно во всех классах, например, для активизации самостоятельной учебно-познавательной деятельности школьников. При этом необходимо поощрять осуществляемые учащимися без чьей-либо помощи попытки обобщения, попытки использования аналогий и т. д. Ясно, что в некоторых случаях ученики получают неверные утверждения, но «ошибаться и приучаться проверять результат — часть процесса обучения» [1]. Обращение к опыту и примеру экономит время учащихся, предупреждает их от грубых ошибок. Таким образом, со многими положениями и фактами школьного курса целесообразно знакомить учащихся при помощи сочетания индуктивных и дедуктивных методов. Повторяем, что это относится не только к IV—V, но и к последующим классам.

Следует отметить особо, что ряд дидактических преимуществ индуктивных и экспериментальных методов изучения математики проявляет себя только в условиях коллективной учебно-познавательной работы учащихся. Наблюдения, опыт, эксперимент естественным образом связаны с индивидуальной работой учащихся. А сравнение отдельных результатов, получение индуктивного вывода, обобщение опытных данных также естественно отвечают природе коллективной учебно-познавательной работы.

В условиях классно-урочной системы в ходе выполнения индивидуальной работы учащихся она неизбежно дифференцируется по результатам этой работы (по времени выполнения, осознанности действий, полноте и точности решения и т. д.). Задача последующей коллективной работы — дать ученикам общую картину их результатов, их оценку, показать пути исправления ошибок. В этом отношении она сильно отличается от предшествующей коллективной работы, однако природа у них одна и та же: совместная согласованная учебно-познавательная деятельность. К тому же, когда циклы в сочетании различных видов учебной работы следуют один за другим, этап завершения индивидуальной работы непосредственно перерастает в этап определения содержания целей последующей индивидуальной работы.

В некоторых случаях учителя дают ученикам различные индивидуальные задания, однако эта индивидуальная работа имеет все же определенный общий аспект (по полученным результатам, по применяемым умственным действиям и т. п.), что обеспечивает эффективность совместной работы учащихся. Например, практические работы по вычислению отношения длины окружности к диаметру, по вычислению числовых значений ряда тождественно равных друг другу выражений и т. п., несмотря на различные исходные объекты у

---

[1] *Клайн М.* Логика против педагогики. В кн.: Математика. Научно-методический сборник. Вып. III. М., «Высшая школа», 1973, с. 47.

учащихся, должны привести к одинаковым (или примерно одинаковым) результатам. Фактически мы имеем дело с единой индивидуальной учебной работой.

Определенные педагогические задачи, стоящие перед учителем, требуют в некоторых случаях организации промежуточной (между фронтальной и индивидуальной деятельностью) коллективной работы учащихся в форме работы групп. Групповая работа может быть единой, т. е. общей для всех групп, на которые разбивается класс, либо дифференцированной. Единая групповая работа является целесообразной тогда, когда перед ней ставятся цели: а) усиления взаимопомощи, взаимного контроля; б) организации творческого соревнования между группами (звеньями, рядами, парами или тройками учащихся — соседей по парте); в) увеличения учебных контактов учащихся (по сравнению с коллективной работой класса); г) формирование навыков работы в сравнительно маленьких коллективах, где значение индивидуальной работы каждого участника группы сильно возрастает. Вполне естественно возникает групповая работа, когда в школе организуются межпредметные практические работы (по математике и физике, по математике и химии и т. п.).

Н. А. ПРИДАТКО
(г. Киев)

ОБ АППЛИКАЦИЯХ НА ВЕРТИКАЛЬНОЙ ПЛОСКОСТИ

Демонстрация плоских моделей на вертикальной плоскости обычно осуществляется с помощью магнитной доски или фланелеграфа. В журнале «Математика в школе» рассказывалось и о способе изготовления для этой цели электретных пленок (1975, № 3). Мы расскажем о простом приспособлении, с помощью которого можно легко крепить и свободно перемещать в вертикальной плоскости демонстрационные модели из бумаги, кальки, целлофана, лавсана и триацетатной пленки.

Все указанные материалы хорошо крепятся под действием статического электричества к полиэтиленовой пленке (из которой, как известно, делаются пакеты, обложки для тетрадей и т. п.). Отсюда вытекает следующее конструктивное решение. Лист полиэтиленовой пленки 40×60 см с подложенным под него листом белой бумаги или куском белой ткани того же размера укрепляют на круглой деревянной палке, как географическую карту. Снизу к полиэтилену прикрепляют еще одну такую же палку, причем нижний край ткани (бумаги) к палке не прикрепляется. Для подвешивания к классной доске к верхней палке прикрепляется шнур.

Существует два способа крепления аппликаций на этом приспособлении: поверх пленки или между листом пленки и тканью (бумагой). Перед креплением аппликации пленка натирается сухой тряпкой, а по приложенной аппликации проводят рукой, как бы разглаживая ее.

Для совмещения нескольких аппликаций (например, вырезанного из бумаги транспортира и вырезанных из цветной бумаги измеряемых углов) используют оба способа крепления: подкладывают углы под пленку, а транспортир крепят поверх пленки. (Бумагу следует брать рисовальную или еще более тонкую.) Если же используется лавсановая пленка, то ее можно крепить поверх полиэтилена в 2—3 и более слоев. Эта пленка выпускается Кусковским химическим заводом комплектами из нескольких разноцветных листов большого формата и продается как материал для занятий по труду. Аппликации из нее очень красивы и прочны.

Бесцветная триацетатная пленка (из отмытых рентгеновских снимков и т. п.) большей толщины. Она может использоваться для изготовления подвижных деталей в моделях, демонстрируемых тем же способом. Таковы модели для демонстрации центральной симметрии и поворота. Подвижные детали в них крепятся к белой бумаге, в центре поворота, тонкой (0,3 мм) медной проволокой либо ниткой. Для этого в сложенных вместе бумаге и пленке прокалывается иглой отверстие, в которое протягивается проволока, закручиваемая затем с обеих сторон спиралью, виток к витку, причем витки лежат в одной плоскости. Бумажный слой этих пособий надежно крепится на полиэтиленовой пленке.

Изображения фигур на различных пленках выполняются полосками цветной бумаги, приклеенными клеем БФ-2.

Хранится приспособление в рулоне, а модели к нему — в папках.

К СОСТАВЛЕНИЮ ЗАДАЧ И УПРАЖНЕНИЙ ПО МАТЕРИАЛАМ РАЗВИТИЯ НАРОДНОГО ХОЗЯЙСТВА СССР [1]

Таблица 1

Политическая карта мира в 1919 г. и на середину 1975 г.

	1919 г.		1975 г.	
	Территория, млн. км²	Население, млн. человек	Территория, млн. км²	Население, млн. человек
Весь мир	135,8	1777	135,8	3967
В том числе:				
Социалистические страны	21,7	138	35,2	1274
Остальные страны	114,1	1639	100,6	2693

Таблица 2

Темпы роста производительности труда в промышленности (в расчете на одного работающего)

Страны	1950 г.	1965 г.	1970 г.	1975 г.
СССР	100	256	338	452
Болгария	100	264	367	508
Венгрия	100	205	243	327
ГДР	100	280	375	486
Польша	100	262	334	485
Румыния	100	343	488	665
Чехословакия	100	238	309	412
Югославия	100	185	238	281
США	100	172	192	220
Великобритания	100	144	164	188
Италия	100	293	385	384
ФРГ	100	192	251	293
Франция	100	195	259	285
Япония	100	433	756	828

Таблица 3

Темпы роста промышленной продукции

	1950 г.	1955 г.	1960 г.	1965 г.	1970 г.	1975 г.
Весь мир	100	147	206	285	388	494
Страны социализма	100	191	354	501	723	1100
Остальные страны	100	135	167	227	298	338
В том числе:						
Развитые капиталистические страны	100	132	162	218	284	309
Развивающиеся страны	100	156	234	329	459	647
По отдельным странам						
СССР	100	185	304	458	689	987
Болгария	100	190	397	691	1200	1800
Венгрия	100	185	267	386	523	713
ГДР	100	190	294	392	537	732
Польша	100	212	338	475	708	1200
Румыния	100	207	340	649	1100	2100
Чехословакия	100	170	282	364	505	699
Югославия	100	141	262	434	582	857
США	100	129	145	199	238	253
Великобритания	100	119	135	160	177	178
Италия	100	149	221	328	465	502
ФРГ	100	173	242	319	426	444
Франция	100	135	180	231	300	336
Япония	100	196	382	748	1500	1700

Рост доли стран социализма в мировой промышленной продукции: 1917 г.— менее 3%; 1922 г. — примерно 1%; 1937 г.—менее 10%; 1950 г.- примерно 20%; 1975 г.—более 40%.

[1] Материалы подобраны *К. П. Сикорским* из статистического ежегодника ЦСУ СССР «Народное хозяйство СССР в 1975 г.».

Таблица 4

Производство основных видов промышленной продукции в отдельных странах

	СССР 1940 г.	СССР 1975 г.	1975 г. Болгария	Венгрия	ГДР	Польша	Румыния	Чехословакия	Югославия	США	Великобритания	Италия	ФРГ	Франция	Япония
Электроэнергия, млрд. кВт·ч	48,6	1039	25,2	20,5	84,5	97,1	53,7	59,2	40,0	2100	282	146	286	184	460
Нефть (включая газовый конденсат), млн. т	31,1	491	0,1	2,0	...	0,6	14,6	0,1	3,7	412	1,1	1,0	5,7	1,0	0,6
Газ естественный, млрд. $м^3$	3,0	270	0,1	5,2	...	5,8	31,6	0,9	1,6	555	33,2	13,8	21,0	10,2	2,8
Уголь (товарн.), млн. т	163	645	27,8	24,9	247	211	27,1	114,4	35,5	585	128	1,3	216	25,5	19,1
Чугун, млн. т	14,9	103	1,6	2,2	2,5	7,8	6,6	9,3	2,1	73,8	12,2	11,4	30,1	17,9	86,6
Сталь, млн. т	18,3	141	2,3	3,7	6,5	15,0	9,5	14,3	2,9	109	19,8	21,9	40,4	21,5	102
Минеральные удобрения (в усл. ед.), млн. т	3,3	90,2	3,2	3,2	12,2	12,7	8,5	4,9	2,1	79,5	6,6	8,1	18,9	22,5	15,5
Химические волокна и нити, тыс. т	11,1	955	68,2	20,1	283	220	159	140	82,4	3000	600	400	800	300	1300
Тепловозы и электровозы магистральные, шт.	14	1770	—	37	147	496	333	475	...	1442	253	93	422	227	322
Тракторы, тыс. шт.	31,6	550	5,1	0,6	4,0	57,5	50,0	51,0	33,2	270	143	123	112	55	280
Цемент, млн. т	5,8	122	4,4	3,8	10,7	18,6	11,5	9,3	7,1	65,0	16,9	34,3	32,9	28,0	64,0
Сахар-песок (из отеч. сырья), млн. т	2,2	7,4	0,3	0,3	0,7	1,7	0,5	0,8	0,5	5,5	0,6	1,3	2,4	3,0	0,5
Мясо (в убойном весе), млн. т	4,7	15,0	0,7	1,5	1,7	3,0	1,3	1,3	1,3	23,7	3,3	2,5	4,5	5,4	...
Молоко, млн. т	33,6	90,8	1,8	1,8	8,2	16,4	4,5	5,6	3,8	52,4	14,0	10,5	21,6	29,8	5,0

Таблица 5

Производство основных видов промышленной продукции на душу населения в отдельных странах

	СССР 1940 г.	СССР 1975 г.	1975 г. Болгария	Венгрия	ГДР	Польша	Румыния	Чехословакия	Югославия	США	Великобритания	Италия	ФРГ	Франция	Япония
Электроэнергия, кВт·ч	249	4083	2893	1941	5015	2854	2527	4002	1875	9840	5023	2614	4767	3484	4149
Нефть (включая газовый конденсат), кг	159	1929	14	190	...	16	687	10	173	1931	20	18	96	19	5,5
Газ естественный, $м^3$	15	1060	13	491	...	170	1486	63	73	2603	592	247	351	193	25
Уголь (товарн.), кг	836	2535	3189	2361	14 673	6218	1275	7728	1664	2740	2282	23	3595	483	172
Сталь, кг	94	556	260	348	385	441	449	968	137	510	353	392	676	408	921
Минеральные удобрения (в усл. ед.), кг	16,8	355	363	300	722	374	402	328	97	372	118	146	316	425	140
Химические волокна и нити, кг	0,1	3,8	7,8	1,9	17	6,5	7,5	9,5	3,9	14	11	7	13	6	12
Цемент, кг	30	480	500	357	631	545	542	629	331	305	301	614	550	530	577
Сахар-песок (из отеч. сырья), кг	11,1	29,3	36	29	43	49	24	57	25	26	12	24	40	57	4
Мясо (в убойном весе), кг	24	59	76	140	102	90	62	91	61	111	59	45	75	102	...
Молоко, кг	172	357	206	174	487	482	213	376	178	245	250	188	361	565	45

Таблица 6

Основные показатели развития народного хозяйства СССР

	1940 г.	1950 г.	1960 г.	1965 г.	1970 г.	1971 г.	1972 г.	1973 г.	1974 г.	1975 г.
Вся продукция промышленности	100	172	520	786	1183	1274	1357	1459	1575	1694
В том числе:										
производство средств производства (группа А)	100	204	666	1053	1589	1713	1830	1980	2146	2316
производство предметов потребления (группа Б)	100	122	321	437	654	705	745	788	843	897
Валовая продукция сельского хозяйства	100	99	161	180	221	224	214	249	242	227
В том числе:										
земледелия	100	97	146	161	204	201	185	236	212	190
животноводства	100	104	192	223	265	275	273	290	305	297
Грузооборот всех видов транспорта	100	144	380	559	774	827	865	935	998	1052
В том числе железнодорожного	100	143	357	464	593	627	656	703	736	769
Розничный товарооборот государственной и кооперативной торговли	100	107	316	423	628	671	717	754	799	854
Численность рабочих и служащих	100	119	183	227	266	274	281	287	294	301
Производительность труда										
в промышленности	100	145	298	372	492	523	550	584	621	657
в колхозах, совхозах и прочих с.-х. производственных предприятиях	100	100	203	239	328	339	325	383	375	350
на ж.-д. транспорте	100	110	228	296	377	394	409	433	451	467
в строительстве	100	125	285	367	448	471	496	518	546	576
Реальные доходы на душу населения	100	134	250	298	398	416	432	454	472	493
Средняя денежная зарплата рабочих и служащих	100	194	244	292	368	380	393	408	426	440

А. Я. ХАЛАМАЙЗЕР
(Москва)

АЛЬТЕРНАТИВНО ИЛИ ИНТЕГРАЛЬНО?

Многочисленные наблюдения показали, что учитель математики большей частью оценивает письменные работы альтернативно: решено — не решено, верно — неверно. Так, если работа состоит из четырех отдельных заданий, то учитель может, например, за верное выполнение трех заданий поставить «4», двух заданий — «3». При этом задания, выполненные частично или с ошибкой, иногда не учитываются, если они не доведены до конца.

В упражнении, где требовалось представить данное выражение в стандартном виде многочлена («Алгебра 6», № 630д), ученик написал:

$$5x(a-3x+1)-4x(a-4x-3)=$$
$$=5ax-15x^2+5x-4ax+16x^2-12x=$$
$$=x^2+ax-7x,$$

т. е. в одном месте поставил неверный знак. Учитель не засчитал решение этого примера, хотя «рациональное зерно» в решении его учеником нетрудно обнаружить.

Для более точной оценки знаний и навыков школьника представляется целесообразным, чтобы учитель учитывал каждый этап выполнения задания. В приведенном примере несколько действий выполнено верно, и это следовало бы как-то учесть при оценке всей работы.

В некоторых странах предусматривается оценка каждого отдельного этапа решения даже для сравнительно несложных задач. Например, в Венгрии и ГДР к текстам экзаменационных работ прилагаются инструкции для учителя, в которых каждая экзаменационная задача разбивается на этапы, расцениваемые очками.

В одной из экзаменационных работ за курс средней (двенадцатилетней) школы ГДР была предложена следующая задача:

Заданы функции:
$y=f(x)=0{,}25x^2$;
$y=g(x)=-0{,}5x^2+1{,}5x+6$.

Графики этих функций пересекаются в точках P_1 и P_2.

а) Вычислите координаты точек P_1 и P_2.

б) Вычислите координаты точки графика функции $g(x)$, в которой функция достигает локального экстремума.

в) Графики этих двух функций ограничивают некоторую плоскую фигуру. Постройте схематический чертеж и определите величину площади этой фигуры.

В инструкции (только для учителя!) эта задача расценена восемью очками.

а) Приведение квадратного уравнения к нормальной форме	1	очко
Определение координат точек P_1 и P_2	1	»
б) Нахождение абсциссы точки эстремума	1	»
Нахождение ординаты точки экстремума	1	»
в) Схематическое изображение обеих парабол	1	»
Составление формулы для площади	1	»
Вычисление неопределенного интеграла	1	»
Определение искомой площади	1	»

Аналогично расценены и остальные 4 обязательные и 3 необязательные экзаменационные задачи (из необязательных задач ученик должен решить только одну)[1].

При правильном решении всех шести задач ученик может набрать 40 очков. Далее в инструкции приводится таблица, согласно которой за 39 или 40 очков ставится «очень хорошо», за 32 очка — «хорошо», за

[1] Об экзаменационных задачах в школах ГДР см. статью автора «Экзамены по математике в ГДР» («Квант», 1976, № 5, с. 69).

24 очка — «удовлетворительно», за 14 очков — «достаточно». Лишь тем, кто не набрал 14 очков, ставится оценка «недостаточно».

В венгерской школе аналогичная инструкция предусматривала оценку «достаточно» уже за 6 очков из 40 возможных, «удовлетворительно» — за 13 очков, «хорошо» — за 22 и «очень хорошо» — за 33 очка.

Оценку, при которой учитывается не только выполнение задания в целом, но и выполнение отдельных этапов решения, обычно называют интегральной; она является более объективной, так как позволяет более точно выявить знания и навыки школьника.

Нам представляется целесообразным в младших классах шире применять интегральную, а в старших классах — альтернативную оценку.

Остается лишь добавить, что ошибка ошибке рознь. За ошибку в сложении дробей

$$\frac{3}{4}+\frac{8}{9}=\frac{3+8}{4+9}=\frac{11}{13}$$

или за ошибку в примере

$$\lg 3+\lg 7=\lg 10=1$$

следует, как нам кажется, безоговорочно ставить неудовлетворительную оценку.

О вступительных экзаменах по математике в вузы и техникумы в 1976 г.

ЕСТЕСТВЕННЫЕ ФАКУЛЬТЕТЫ МОСКОВСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Подготовительная работа. Подготовка к приемным экзаменам на естественные факультеты Московского университета была начата уже в феврале. Были выработаны общие требования к характеру знаний поступающих и стилю задач для письменного экзамена. На письменном экзамене решили предложить пять задач. Первые три из них должны быть достаточно простыми, чтобы подавляющее большинство поступающих могло с ними справиться и тем самым обеспечить себе положительную оценку. Остальные же две должны быть повышенной трудности, чтобы по ним можно было судить не только о знаниях в объеме средней школы, но и об умении самостоятельно мыслить.

Большая работа проделана по составлению, обсуждению и отбору задач. Особое внимание мы уделяли тому, чтобы не было большого разброса по трудности между четырьмя вариантами письменных заданий по каждому факультету.

Естественно, самый высокий уровень задач был предложен на механико-математическом факультете, следующий — на биологическом и химическом и третий — на факультете почвоведения и географическом факультете.

Приводим по одному варианту письменных заданий, которые предлагались на каждом из естественных факультетов.

Биологический факультет

1. Решить уравнение

$$|\sin x+\cos x|=1+\sin 2x.$$

О т в е т: $\frac{\pi k}{2}$, $k\in Z$.

2. Решить неравенство

$$-3\log_{x-1}\frac{1}{3}+\log_{\frac{1}{3}}(x-1)>|\log_{\frac{1}{3}}(x-1)|.$$

О т в е т: $]2;\ 4[$.

3. Имеются две смеси № 1 и 2, составленные из одних и тех же веществ А, Б, В, но взятых в различных весовых соотношениях. В смеси № 1 вещества В в 9 раз меньше, чем вещества А, и в 2 раза меньше, чем вещества Б. Соединив 6 кг смеси № 1, 3 кг смеси № 2 и добавив 1 кг вещества А, получим новую смесь, в которой вещества А в 6 раз больше, чем вещества Б, а вещества В столько же, сколько вещества Б. Требуется определить весовое соотношение веществ А, Б, В в смеси № 2.

О т в е т: 8 : 1 : 3.

4. Дана трапеция $ABCD$, сторона AB которой перпендикулярна основаниям BC и AD. На стороне AB как на диаметре построена окружность радиуса $\sqrt{6}$, которая касается стороны CD. Другая окружность радиуса 2 касается сторон AD и CD и пересекается с первой окружностью, имея с ней общую хорду длины $\sqrt{6}$. Центры обеих окружностей расположены по разные стороны от общей хорды. Найти площадь трапеции $ABCD$.

О т в е т: $S=2\sqrt{6}(\sqrt{3}+1)\sqrt[4]{3}$.

5. Доказать, что уравнение

$$\sqrt{x}=-x^2+8x-15$$

не имеет решений.

Географический факультет

1. Большой насос перекачивает за час на 5 м^3 воды больше, чем малый насос. Резервуар объемом 120 м^3 наполнялся вначале пятью малыми насосами. Когда резервуар был наполнен наполовину, два малых насоса заменили двумя большими. Сколько кубических метров перекачивает малый насос, если известно, что резервуар наполнился за 5 ч?

О т в е т: 4.

2. Решить уравнение

$$3\sqrt{x-1}+|x-5|=6.$$

О т в е т: $\{2;\ 5\}$.

3. Решить уравнение

$$1+\sin 2x=\cos x-\sin x.$$

О т в е т: $\left\{2\pi l;\ \frac{\pi}{2}(4l-1)\,|\,l\in Z\right\}$.

4. Решить неравенство

$$\log_{\frac{x^2-12x+30}{10}}\left(\log_2\frac{2x}{5}\right)>0.$$

Ответ: $]2{,}5;\ 6-\sqrt{6}[\cup]10;\ \infty[$.

5. В трапеции $ABCD$ диагонали AC и BD взаимно перпендикулярны, $\widehat{ABD}=\widehat{ACD}$. На продолжениях боковых сторон AB и CD за большее основание AD отложены отрезки AM и DN так, что получается новая трапеция $MADN$, подобная трапеции $ABCD$. Найти площадь трапеции $MBCN$, если площадь трапеции $ABCD$ равна S, а сумма величин ее углов при большем основании равна 150°.

Ответ: $4S$.

Факультет почвоведения

1. Два насоса заполняют два одинаковых бака воды. Вместе они заполнили бы один бак за 3 ч. За сколько времени каждый из них заполняет свой бак, если известно, что первый насос делает это на 2,5 ч быстрее второго?

Ответ: 5 ч; 7,5 ч.

2. В прямоугольном треугольнике перпендикулярно гипотенузе через ее середину проведена прямая, отсекающая треугольник, площадь которого в три раза меньше площади исходного. Найти углы исходного треугольника.

Ответ: $\frac{\pi}{6}$ и $\frac{\pi}{3}$.

3. Решить уравнение

$$\sin 12x + 9\sin^2 3x - 3\cos^2 3x = 3.$$

Ответ: $\left\{\pm\frac{\pi}{12}+\frac{\pi k}{3}\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

4. Найти все значения параметра α, при которых меньший корень уравнения

$$x^2-(2+\sqrt{3}\sin 2\alpha)x+2\sqrt{3}\sin 2\alpha=0$$

равен сумме квадратов корней уравнения

$$x^2+x\sin\alpha+\frac{\cos^2\alpha-\sqrt{2}}{2}=0.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi k}{2}-\frac{\pi}{12}+(-1)^k\frac{\pi}{8}\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

5. Решить неравенство

$$3{,}5+\log_{\frac{1}{x^2}}(x^7+x^3-3)<0.$$

Ответ: $]\sqrt[3]{3};\ \infty[$.

Химический факультет

1. Две лодки отплыли одновременно от пристани A к пристани B (пристани расположены на берегу одного озера). Когда вторая лодка прошла третью часть пути, от пристани A в том же направлении отправилась третья лодка. Когда первой лодке оставалось пройти четвертую часть пути, третья лодка прибыла в B. Скорость второй лодки на 5 км/ч меньше, а скорость первой — на 7,5 км/ч меньше, чем скорость третьей лодки. Найти скорость третьей лодки.

Ответ: 15 км/ч.

2. Решить неравенство

$$2+(|x|-2)\log_2 17\geqslant x^2-4|x|+2\log_2 34.$$

Ответ: $[-\log_2 17;\ -4]\cup[4;\ \log_2 17]$.

3. В треугольнике ABC из вершины B проведены высота треугольника BD и биссектриса треугольника BE. Известно, что длина стороны AC равна 1, а величины углов BEC, ABD, ABE, BAC образуют арифметическую прогрессию (в указанном порядке). Найти длину стороны BC.

Ответ: 0,5.

4. Найти все решения уравнения

$$(2-\sqrt{3})(2-\sqrt{3}\sin x+\cos x)=4\cos^2\left(x-\frac{\pi}{6}\right),$$

которые являются и решениями уравнения

$$\operatorname{ctg} x+\left(2+\frac{\sqrt{3}}{12}\right)\cos x+\sin^3 x+1=0.$$

Ответ: $\left\{\frac{2\pi}{3}+2\pi k;\ -\frac{\pi}{2}+2\pi k\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

5. В кубе $ABCDA'B'C'D'$, где AA', BB', CC', DD' — параллельные ребра, плоскость π проходит через точку D и середины ребер $A'D'$ и $C'D'$. Найти расстояние от середины ребра AA' до плоскости π, если ребро куба равно 2 см.

Ответ: 1 см.

Механико-математический факультет

1. Решить уравнение

$$\frac{2}{\lg\left(\frac{1}{2}+\cos^2 x\right)}=\log_{\sin 2x}10.$$

Ответ: $\left\{\frac{\pi}{3}+\pi k\,\middle|\,k\in\mathbf{Z}\right\}$.

2. Решить неравенство

$$\frac{24}{1-25^{-y}}\leqslant\frac{1}{5^{-y}-6}.$$

Ответ: $]-\infty;\ -\log_5 6)\cup[-1;\ 0[$.

3. В прямоугольном треугольнике ABC угол C прямой, а величина угла A равна 30°. Длина высоты CC_1, проведенной из вершины прямого угла на гипотенузу AB, равна $5\sqrt{2}$. Из точки C_1 проведены биссектрисы углов CC_1A и CC_1B, пересекающие стороны AC и BC в точках B_1 и A_1 соответственно. Найти длину отрезка A_1B_1. Указать ее приближенное значение в виде десятичной дроби с точностью до 0,01.

Ответ: $|A_1B_1|=10(\sqrt{3}-1)\approx 7{,}32$.

4. Прямой круговой конус таков, что угол между его основанием и образующей равен $\arccos{}^5/_{13}$. Вне конуса, касаясь плоскости основания в точках B_1, B_2, B_3, лежат три шара, каждый из которых касается двух других шаров и некоторой образующей конуса. Радиус меньшего шара равен 1. Кроме того, известно, что радиусы двух шаров равны между собой. Известно также, что треугольник $B_1B_2B_3$ — прямоугольный. Найти радиус основания конуса.

Ответ: $^3/_4$.

5. Действительные числа a, b, c таковы, что $a<b<c$. Кроме того, известно, что если любое из них подставить вместо y в равенство

$$x^2+\frac{y-1}{y^2}x-\frac{1}{y}=0,$$

то по меньшей мере одно из двух оставшихся чисел будет содержаться среди корней получившегося квадратного уравнения. Доказать, что $0<b<1$.

Решение 4-й и 5-й задач варианта, предложенного на механико-математическом факультете. Так как к поступающим на мехмат были предъявлены более серьезные требования именно в двух последних задачах каждого варианта, то мы приведем решения этих задач.

Задача 4. Обозначим через x искомый радиус основания конуса, а через α — угол между образующей конуса и его основанием (по условию задачи $\cos\alpha=5/13$). Центры шаров обозначим соответственно через O_1, O_2, O_3, а их радиусы — через R_1, R_2, R_3. Допустим, что равны радиусы первых двух шаров. Пусть $R_1=R_2=r$, $R_3=\rho$ (по условию $\min(r, \rho)=1$).

Точки касания шаров с конусом обозначим через C_i ($i=1, 2, 3$), вершину конуса — через S, ее проекцию на плоскость основания — через O, точку пересечения образующей SC с плоскостью основания — через K. Обозначим, наконец, через B_i проекцию O_i на плоскость основания (рис. 1).

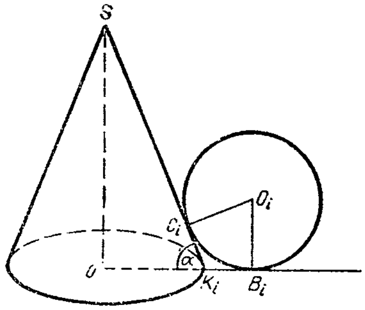


Рис. 1

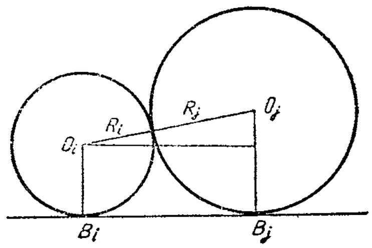


Рис. 2

Из рис. 2 видно, что

$$|B_iB_j| = \sqrt{(R_i+R_j)^2-(R_i-R_j)^2} = \\ = 2\sqrt{R_iR_j}.$$

Таким образом,

$$|B_1B_2| = 2r, \quad |B_1B_3| = |B_2B_3| = 2\sqrt{r\rho}.$$

Из условия, что треугольник $B_1B_2B_3$ прямоугольный, следует, что $r=2\rho$ и, следовательно, $\rho=1$, $r=2$. Таким образом, окончательно

$$|B_1B_2| = 4, \quad |B_1B_3| = |B_2B_3| = 2\sqrt{2}.$$

Если провести плоскость через ось конуса и центр i-го шара O_i, то образующая SC_i (а тем самым, и точка C_i) будет лежать в этой плоскости. В самом деле, если бы образующая SC_i не лежала в этой плоскости, то образующая, симметричная SC_i по отношению к этой плоскости, также касалась бы шара, что невозможно.

Аналогичными рассуждениями доказывается, что точка B_i также лежит в этой плоскости.

Теперь можно перейти к поиску соотношений между расстояниями $|OB_i|$. Из рис. 3 находим

$$|B_iK_i| = R_i \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

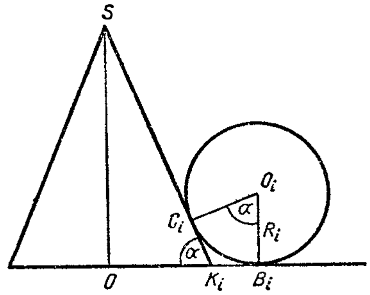


Рис. 3

Так как $\cos\alpha = 5/13$, то

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} = \frac{2}{3}.$$

Следовательно,

$$|B_iK_i| = \frac{2}{3}R_i.$$

Пусть x — радиус основания конуса, тогда в силу предыдущего

$$|OB_i| = |OK_i| + |B_iK_i| = x + \frac{2}{3}R_i.$$

Итак,

$$|OB_1| = |OB_2| = x + 4/3, \qquad |OB_3| = x + 2/3.$$

Мы видим, что точка O лежит на биссектрисе прямого угла треугольника $B_1B_2B_3$. Логически возможны три случая, все они изображены на рис. 4.

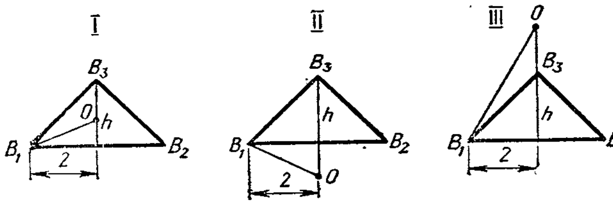


Рис. 4

Пусть h — высота, проведенная из вершины B_3 на гипотенузу. Тогда в первом случае

$$h = |OB_3| = \sqrt{|OB_1|^2-4}.$$

Но из предыдущего следует, что $h=2$, $|OB_1|=x+4/3$, поэтому предыдущее равенство принимает вид

$$\sqrt{\left(x+\frac{4}{3}\right)^2-4}=\frac{4}{3}-x.$$

Отсюда находим, что $x=\frac{3}{4}$.

Во втором случае

$$|OB_3|-h=\sqrt{|OB_1|^2-4}.$$

Приняв во внимание уже известные нам равенства, находим, что для определения x мы получаем уравнение

$$\sqrt{\left(x+\frac{4}{3}\right)^2-4}=x-\frac{4}{3}.$$

Легко убедиться, что это уравнение не имеет решений и, значит, второй случай невозможен.

В третьем случае имеет место равенство

$$|OB_3|+h=\sqrt{|OB_1|^2-4}.$$

После подстановки вместо $|OB_1|$, $|OB_3|$ и h их значений, приходим к уравнению

$$\sqrt{\left(x+\frac{4}{3}\right)^2-4}=x+\frac{8}{3}.$$

Легко убедиться, что решением этого уравнения является отрицательное число.

Итак, возможен только первый случай, и поэтому искомый радиус равен $3/4$.

Задача 5. Заметим, что

$$x^2+\frac{y-1}{y^2}x-\frac{1}{y}=\frac{1}{y^2}(x^2y^2+xy-x-y).$$

Положим

$$H(x, y)=x^2y^2+xy-x-y.$$

Очевидно, что $H(x, y)=H(y, x)$. Отсюда следует, что если уравнение $H(x, a)=0$ имеет корень $x=b$, то уравнение $H(x, b)=0$ имеет корень $x=a$, и т. д.

Рассмотрим уравнение $H(x, b)=0$, которое эквивалентно уравнению

$$x^2+\frac{b-1}{b^2}x-\frac{1}{b}=0.$$

Согласно условию, это уравнение имеет своим корнем по меньшей мере одно из чисел a, c. Докажем, что они оба являются его корнями.

Пусть, например, уравнение $H(x, b)=0$ имеет корни $x_1=a$ и $x_2\neq c$. Это означает, что $H(a, b)=0$ и $H(c, b)\neq 0$. Применим к уравнению $H(x, b)=0$ теорему Виета. Мы можем утверждать, что $ax_2=-\frac{1}{b}$, т. е. $abx_2=-1$ $(x_2\neq c)$.

Рассмотрим теперь уравнение $H(x, c)=0$. Число b не может быть его корнем, так как $H(b, c)\neq 0$ согласно предположению. Следовательно, его корнем является число a, т. е. $H(a, c)=0$. Мы пришли, таким образом, к выводу, что

$$H(b, a)=H(c, a)=0,$$

т. е. что уравнение $H(x, a)=0$ имеет своими корнями числа b и c.

Применим теперь теорему Виета к уравнению $H(x, a)=0$; в результате найдем, что $bc=-\frac{1}{a}$, т. е. что $abc=-1$.

Но это равенство противоречит ранее написанному равенству $bax_2=-1$ $(x_2\neq c)$.

Подобным же образом рассматривается случай $x_1=c$, $x_2\neq a$.

Поскольку a и c являются корнями уравнения $H(x, b)=0$, то имеет место равенство

$$x^2+\frac{b-1}{b^2}x-\frac{1}{b}=(x-a)(x-c).$$

Поскольку $a<b<c$, должно быть

$$(b-a)(b-c)<0.$$

Следовательно,

$$b^2+\frac{b-1}{b^2}b-\frac{1}{b}<0,$$

т. е.

$$\frac{b^3+b-2}{b}<0,$$

или иначе

$$\frac{(b-1)(b^2+b+2)}{b}<0.$$

Поскольку $b^2+b+2=(b+0{,}5)^2+7/4$, должно быть $\frac{b-1}{b}<0$.

Случай $b<0$ невозможен, поскольку при этом и $b-1<0$ и, значит, $\frac{b-1}{b}>0$. Остается одна возможность $b>0$. Но при этом должно быть $b<1$.

Утверждение доказано.

Заключительные замечания. Экзаменационная комиссия несколько переоценила возможности поступавших, поскольку их знания оказались по ряду разделов программы слабее, чем мы ожидали и чем они были в предыдущие годы. Имеются серьезные пробелы в знаниях по геометрии (в том числе по планиметрии), решении алгебраических и тригонометрических уравнений, составлении уравнений по условию задач, решении неравенств, проведении тождественных преобразований, обращении со знаком абсолютной величины.

Вызывает удивление, что с первыми тремя задачами (они были на всех факультетах несложные) не могли справиться многие поступавшие, были среди них и те, кто получил в школе аттестат с отличием.

В то же время заслуживает упоминания тот факт, что отличные оценки за письменные работы получили выпускники не только московских школ, но и школ других мест Советского Союза.

Хотелось бы выразить надежду, что переход средних школ на новую программу по математике не только повысит идейную сторону математической подготовки, но и не снизит формальных навыков.

Б. В. Гнеденко
(Москва)

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГПИ ИМ. В. И. ЛЕНИНА

На письменном экзамене по математике было предложено 10 вариантов, каждый вариант содержал пять заданий: 1) алгебраическая задача на составление уравнения или системы уравнений; 2) тригонометрическое уравнение; 3) показательное уравнение или логарифмическое неравенство; 4) стереометрическая задача; 5) планиметрическая задача.

Варианты были составлены так, что первые три задания были стандартными, рассчитанными на выпускника школы со средней подготовкой. Две последние задачи (геометрические) были также нетрудными, но требовали определенного уровня геометрического мышления.

Результаты работы следующие: из 307 поступавших (на 175 мест) оценку «5» получили 23, оценку «4» — 81, оценку «3» — 138, оценку «2» — 65. 209 абитуриентов не решили планиметрическую, 202 — стереометрическую задачу. Логарифмическое неравенство не решили 87 поступавших, тригонометрическое уравнение — 100, с алгебраической задачей не справились 83 человека. 27 абитуриентов не сумели выполнить ни одного из предложенных заданий.

Рассмотрим типичные ошибки, допущенные абитуриентами в письменных работах.

I. Абитуриенты неправильно называли угол, под которым образующая конуса видна из центра шара, вписанного в конус; вместо угла $SO'A$ чаще всего брали угол SAO (рис. 1).

II. Неверно строили линейный угол двугранного угла. Много ошибок было допущено в построении сечений куба или пирамиды заданной плоскостью.

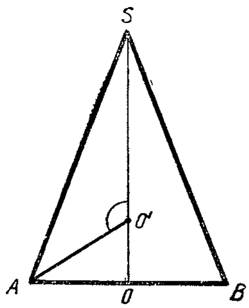


Рис. 1

Пример 1. *В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через вершину B и середины M и N ребер AD и CC_1 проведена плоскость. Найти угол, под которым эта плоскость наклонена к плоскости грани $ABCD$.*

Нужное сечение $BMPN$ (рис. 2), где $K = (BM) \cap (DC)$, $P = (KN) \cap (DD_1)$. Линейным углом двугранного угла BM является угол NFC, где $F = (CE) \cap (MB)$, E — середина $[AB]$; так как $(FC) \perp (BM)$, следовательно, и $(NF) \perp (BM)$ (по теореме о трех перпендикулярах). Очень часто в качестве сечения поступающие брали $\triangle BMN$! В качестве линейного угла двугранного угла BM многие указывали угол NBM.

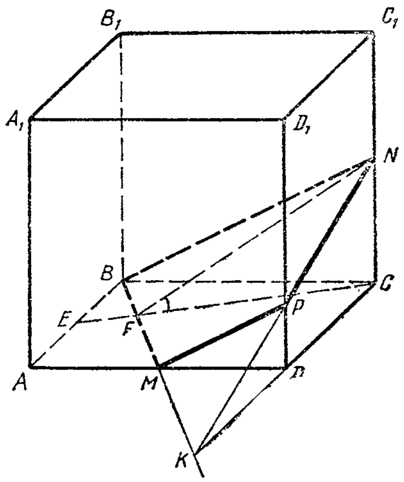


Рис. 2

Пример 2. *В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ через диагональ AC основания $ABCD$ и середины M и N ребер A_1D_1 и D_1C_1 проведена плоскость. Найти угол, который составляет эта плоскость с плоскостью грани DD_1C_1C куба.*

Пусть K — середина $[CC_1]$, $(DK) \perp (NC)$, $(DK) \cap (NC) = F$ (рис. 3); искомый угол AFD. Почти никто из абитуриентов не назвал этот угол, чаще всего называли и определяли величину угла NCA.

Пример 3. *В правильном тетраэдре $SABC$ через вершину C проведена плоскость, перпендикулярная грани SAB и параллельная (AB).*

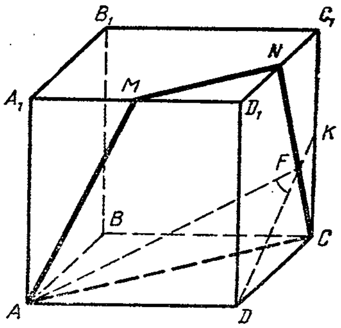


Рис. 3

Найти площадь полученного сечения, если ребро тетраэдра имеет длину a.

Так как тетраэдр правильный, то основанием высоты CH, проведенной из вершины C, является центр правильного $\triangle ABS$ (рис. 4). Секущая плоскость проходит через эту высоту и пересекает плоскость ABS по прямой A_1B_1, параллельной (AB). Искомое сечение — $\triangle A_1B_1C$.

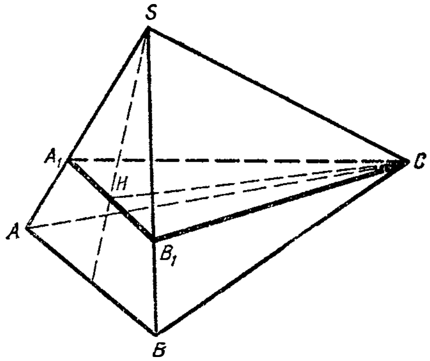


Рис. 4

Многие поступавшие проводили высоты из точки C в гранях SBC и SCA и утверждали, что искомое сечение проходит через эти высоты.

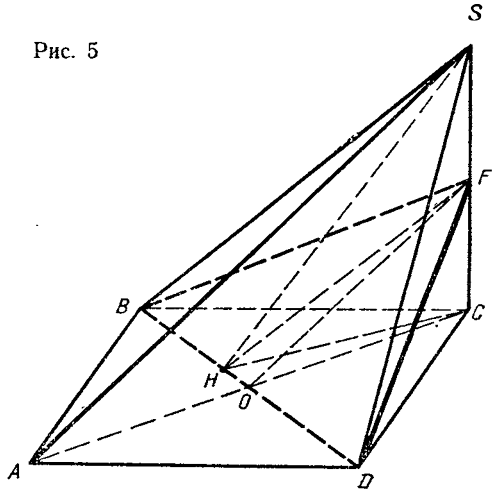
III. Многие поступавшие неверно определяли площадь сечения.

Пример 1. *В пирамиде $SABCD$ основанием является прямоугольник со сторонами $|AB|=a\sqrt{3}$, $|AD|=a$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания. Вычислить площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через (BD) параллельно (SA), если (SA) наклонена к плоскости основания под углом $30°$.*

$O=(BD)\cap(AC)$, $(OF)\parallel(AS)$, $F\in[SC]$, $\triangle BFD$ является сечением (рис. 5). Так как этот треугольник не равнобедренный, то высотой, проведенной к основанию BD, не может быть $[FO]$, как это утверждало большинство решавших эту задачу.

Необходимо провести $(FH)\perp(BD)$, где H —

Рис. 5



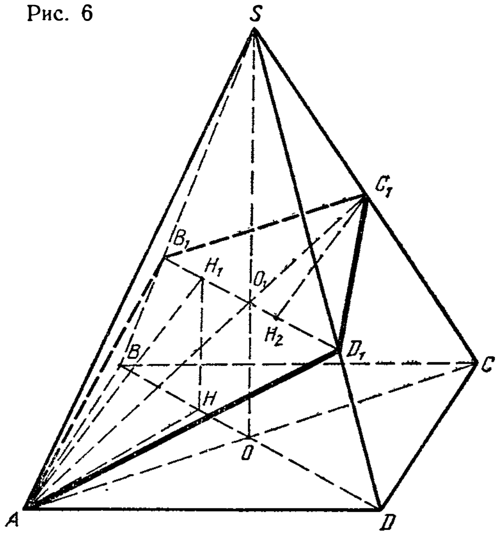
основание перпендикуляра, опущенного из точки C на (BD).

$|BH|:|HD| = |BC|^2:|CD|^2=a^2:3a^2=1:3.$

Пример 2. *Основанием пирамиды $SABCD$ с конгруэнтными боковыми ребрами служит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $|AB|=a$, $|AD|=2a$. Найти площадь сечения пирамиды плоскостью, проходящей через вершину A, середину ребра SC и параллельной (BD), если высота пирамиды имеет длину $3a$.*

C_1 — середина $[SC]$, $O=(AC)\cap(BD)$, $(SO)\cap(AC_1)=O_1$ (рис. 6). Проведем прямую

Рис. 6



через O_1 параллельно (BD). Она пересечет ребра SB и SD в точках B_1 и D_1 соответственно. Площадь сечения $AB_1C_1D_1$ равна сумме площадей треугольников AB_1D_1 и $B_1D_1C_1$. Построим их высоты. Проведем в плоскости ABC $(AH)\perp(BD)$, тогда $|BH|:|HD|=1:4$;

$(HH_1)\parallel(SO)$, $H_1\in(B_1D_1)$. По теореме о трех перпендикулярах $(AH_1)\perp(BD)$, и так как $(B_1D_1)\parallel(BD)$, то $(AH_1)\perp(B_1D_1)$. Итак, $[AH_1]$ — высота $\triangle AB_1D_1$. $(C_1H_2)\parallel(AH_1)$, $H_2\in(B_1D_1)$, $[C_1H_2]$ — высота $\triangle C_1B_1D_1$. Многие поступавшие считали высотами треугольников $[AO_1]$ и $[O_1C_1]$.

IV. При решении логарифмических уравнений и неравенств абитуриенты неправильно находили область определения логарифмической функции, делали ошибки при использовании монотонности этой функции при основании логарифма, меньшем 1.

Пример 1. *Решить неравенство*

$$\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}(2x+1)\geqslant\log_{\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}}(x^2+1).$$

Так как $\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}<\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1$, то $0<\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}<1$.

$$\begin{cases}2x+1\leqslant x^2+1,\\ 2x+1>0.\end{cases}$$

Решая систему уравнений, получим ответ: $]-0{,}5;\,0]\cup[2;\,\infty[$. Многие поступавшие при решении этого неравенства писали: $2x+1\geqslant x^2+1$, причем не учитывали и того, что $2x+1>0$.

Пример 2. При решении неравенства

$$\log_{3x+2}x<1$$

абитуриенты не учитывали область определения логарифмической функции, не рассматривали двух возможных случаев для основания логарифма.

V. При решении уравнения

$$\frac{3^{\sqrt[3]{x^2}}}{2\cdot3^{\sqrt[3]{x}+1}}=1{,}5$$

многие поступавшие обозначали $3^{\sqrt[3]{x}}$ через z, получая z^2 равным $3^{\sqrt[3]{x^2}}$, что неверно.

VI. Наблюдались случаи потери корней при решении тригонометрического уравнения в связи с тем, что поступавшие не учитывали области определения функции или делили уравнение на выражение, содержащее переменную.

Пример 1. *Решить уравнение*

$$\cos 3x+\sin 2x+\cos x=0.$$

После тождественных преобразований получаем следующее уравнение:

$$\cos x(\sin x+\cos 2x)=0.$$

Отсюда поступавшие переходили к уравнению

$$\sin x+\cos 2x=0,$$

и при этом теряли серию решений $x=\frac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$, обращающих в нуль $\cos x$.

Пример 2. При решении уравнения

$$\sin x\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\sin^2 x$$

многие не учитывали область определения $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

VII. Встречались ошибки и при решении простейших тригонометрических уравнений.

VIII. Планиметрические задачи, как правило, вызывали большие трудности.

Результаты устного экзамена по математике следующие: из 239 абитуриентов оценку «5» получили 58, оценку «4»—85, оценку «3»—80, оценку «2»—15 человек.

Наибольшие затруднения поступающие испытывали при изложении следующих вопросов: 1) измерение величин, 2) доказательство существования иррациональных чисел, 3) равносильность уравнений и неравенств, 4) доказательство тригонометрических формул и тождеств, 5) построение графиков функций $y=\log_a(x+2)$, $y=2\sin(3x+\pi/2)$ и т. п., 6) предел последовательности, 7) вывод формул при решении простейших тригонометрических уравнений, 8) прогрессии, 9) степень с рациональным показателем.

Экзаменаторы отмечают следующие недостатки в ответах абитуриентов: 1) отсутствие четкости в определениях периода функции, возрастающей и убывающей функций, четной и нечетной функций, параллельных и скрещивающихся прямых, в определениях прямой, перпендикулярной плоскости, тригонометрических функций; 2) свойства элементарных функций абитуриентами не доказываются, а выводятся из графика соответствующей функции.

В заключение приводим некоторые варианты предложенных на экзамене письменных работ.

Вариант 1

1. Два туриста идут друг другу навстречу из городов A и B, расстояние между которыми 30 км. Если первый выйдет двумя часами раньше второго, то они встретятся через 2,5 ч после выхода второго туриста. Если же второй выйдет на 2 ч раньше, чем первый, то встреча произойдет через 3 ч после выхода первого туриста. Сколько километров в час проходит каждый турист?

2. Решить уравнение

$$\sin x\cdot\sin 3x=\frac{3}{2}-2\cos 2x.$$

3. Решить неравенство

$$\left(\frac{4}{9}\right)^x\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{x-1}=\frac{\lg 4}{\lg 8}.$$

4. В правильной треугольной пирамиде через центр основания проведена плоскость, параллельная боковой грани. Найти площадь полученного сечения, если длина стороны основания данной пирамиды равна a, длина высоты пирамиды равна h.

5. В равнобедренной трапеции диагонали взаимно перпендикулярны. Длина средней линии равна m. Найти высоту трапеции.

Вариант 2

1. Два мастера, работая вместе, могут окончить некоторую работу за 12 дней. Если же первый мастер будет работать 2 дня, а второй 3 дня, то они выполнят только 20% всей работы. За сколько дней может выполнить всю работу каждый мастер, работая отдельно?

2. Решить уравнение

$$3\cos^2 x - \frac{3}{2}\operatorname{tg}^2 x + \sin^2 x = 2.$$

3. Решить уравнение

$$x^{\log_{\sqrt{x}}(x-2)} = 9.$$

4. Длина высоты правильной n-угольной пирамиды равна h, площадь боковой поверхности в k раз больше площади основания. Найти объем пирамиды.

5. В диаметрально противоположных точках A и B окружности проведены касательные t_1 и t_2. В произвольной точке N окружности проведена касательная, которая пересекает t_1 и t_2 соответственно в точках C и D. Доказать, что произведение длин отрезков AC и BD не зависит от выбора точки N на окружности.

Вариант 3

1. Потребность колхоза в ячмене 4000 ц. Если увеличить урожай ячменя на 8 ц с 1 га, то можно будет уменьшить площадь посева ячменя на 25 га. Сколько гектаров засеяно ячменем и каков урожай в центнерах с одного гектара?

2. Решить уравнение

$$\sin^2 x + \frac{1}{3}\sin^2 2x = \sin\frac{\pi}{6}.$$

3. Решить неравенство

$$\log^2_{\frac{1}{3}} x - \log_{\frac{1}{3}} x^2 \geqslant 3.$$

4. Найти косинус угла при вершине в осевом сечении конуса, зная, что на его поверхности можно провести три попарно перпендикулярные образующие.

5. В треугольнике ABC проведена биссектриса AD. Точки O, O_1 и O_2 являются центрами окружностей, описанных соответственно около треугольников ABC, ABD и ADC. Доказать, что $|OO_1| = |OO_2|$.

Вариант 4

1. Из двух городов, расстояние между которыми 650 км, отправляются одновременно навстречу друг другу два поезда. Через 10 ч после отправления поезда встречаются. Если же первый поезд выйдет за 4 ч 20 мин до отправления второго, то встреча произойдет через 8 ч после выхода второго поезда. Какова скорость каждого поезда?

2. Решить уравнение

$$\frac{\cos x}{1 - \sin x} = 2\cos x - \operatorname{tg} x.$$

3. Решить уравнение

$$9^x - 2^{x+\frac{1}{2}} = 2^{x+\frac{7}{2}} - 3^{2x-1}.$$

4. Каждое ребро правильной шестиугольной призмы имеет длину, равную 1 дм. Найти площадь сечения, проходящего через сторону основания и большую диагональ призмы.

5. Доказать, что если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ биссектрисы углов, составленных парами прямых AB и CD, BC и AD, перпендикулярны, то около этого четырехугольника можно описать окружность.

О. С. Редозубова
(Москва)

К ОЧЕРЕДНЫМ ВСТУПИТЕЛЬНЫМ ЭКЗАМЕНАМ В ВУЗЫ НЕОБХОДИМО ГОТОВИТЬСЯ

Приемные экзамены в вузы всегда привлекали внимание педагогической и научной общественности. По их итогам оценивалась работа школ, они определяли качество пополнения наших вузов.

Очередные абитуриенты — выпускники 1976/77 учебного года обучаются по новой программе и новым учебникам. Итоги сдачи ими вступительных экзаменов особенно важны для оценки результатов коренной перестройки школьного преподавания математики, осуществленной за последние десять лет. Трудности абитуриентов очередного набора в вузы очевидны: они учились по учебным пособиям и программам, прошедшим лишь экспериментальную проверку. Не всегда и не всюду прошли необходимую переподготовку их учителя. Они не имели дополнительной литературы, написанной в соответствии с идеями и требованиями новой программы.

Исходя из этого, мы считаем, что организация вступительных экзаменов по математике в 1977 г. требует серьезного обсуждения. Вузы, школы, общество «Знание» должны развернуть широкий фронт работы в помощь будущему пополнению вузов. Абитуриенты должны своевременно, хотя бы не позднее, чем за полгода до начала экзаменов, иметь четкую и развернутую программу вступительных экзаменов. Сотрудники математических кафедр вузов должны изучить содержание новой программы и учебников средней школы. Без изучения опыта работы школы по новой программе нельзя будет объективно и качественно осуществлять функции экзаменаторов на предстоящих экзаменах. В нынешних условиях готовиться к экзаменам должны и экзаменующиеся, и экзаменаторы.

Следует отметить, что вузы с большим опозданием реагируют на изменение школьной программы. Так, в последние два года (1974/75 и 1975/76 учебные годы) в IX и X классах математика изучалась по переходной программе, были введены разделы «Комбинаторика», «Предел функции, производная и ее применение». За счет этого сократился объем работы по таким темам, как решение тригонометрических, показательных и логарифмических уравнений. К тому же практическая и образовательная ценность громоздких уравнений указанных типов, требующих лишь натасканности в технике преобразований, незначительна. В экзаменационные программы и задания новые разделы не вошли, и по-прежнему в заданиях большинства вузов доминировали тригонометрические, показательные и логарифмические уравнения.

С 1966 по 1976 г. в IX и X классах изучали алгебру и элементарные функции по учебникам «Алгебра и элементарные функции» Е. С. Кочеткова и Е. С. Кочетковой, содержащим систему упражнений в соответствии с изменениями программы тех лет. Экзаменационные комиссии многих вузов продолжали ориентироваться на систему упражнений «Сборника задач по алгебре» П. А. Ларичева и «Сборника задач по элементарной математике» Н. П. Антонова и др., выпущенных в начале 50-х годов.

Приведем другой пример. В последние годы программа и учебники ориентируют учителя на то, чтобы он не тратил времени на примеры, требующие громоздких тождественных преобразований. Однако по традиции многие технические вузы страны продолжают включать такие задания в варианты экзаменационных письменных работ. Эти примеры скорее проверяют внимание и собранность абитуриента, чем его знания, и вряд ли умение их решать необходимо для дальнейшего успешного обучения в вузе.

Такое несоответствие в требованиях школьной программы и практике приемных экзаменов в вузы ставит учителя в затруднительное положение при выборе путей рационального использования времени на изучение отдельных тем программы.

Часто в вариантах экзаменационных работ встречаются задачи на составление уравнений (неравенств), тексты которых очень громоздки и сводятся к составлению смешанных систем уравнений и неравенств с несколькими переменными. Их громоздкость требует больших усилий памяти для охвата текста, что во время экзамена отрицательно отражается на дальнейшем выполнении работы. Кроме того, учащиеся в школе не встречаются с задачами, содержащими столько условий. С нашей точки зрения, знания, умения и навыки, которые проверяются на этих задачах, могут быть установлены на задачах такого же вида с меньшим числом условий, что соответствовало бы содержанию школьных задачников.

Такое же превышение трудностей наблюдается при подборе трансцендентных уравнений, неравенств и в особенности планиметрических задач на доказательство и построение.

Следует отметить наличие другой крайности. В вузах, где незначительный конкурс, в частности на математических и физических факультетах пединститутов, а также в некоторых технических вузах варианты письменных работ порой по степени сложности, по наличию идей значительно проще и беднее, чем на выпускных экзаменах в средней школе. Это порой приводит к тому, что трудно бывает отличить хорошего абитуриента от посредственного. Аккуратность выполнения работы может в этом случае явиться решающим фактором для отбора. В результате учащийся, посредственно усвоивший программу по математике за курс средней школы, попадает на математический факультет, на котором обучается с большим трудом, постоянно имея академическую задолженность, становится посредственным учителем или же отсеивается в процессе учебы.

Мы считаем, что правильно поступают вузы, в которых письменные работы составляются так, чтобы посредственно окончивший школу ученик мог ее выполнить только частично, а какая-то часть работы предъявляла к нему больше требований. Это поможет отбору наиболее подготовленных учащихся. Полезна практика, когда в задаче ставится несколько вопросов разной трудности, часть из которых позволит различить посредственное усвоение программы от хорошего, хорошее от отличного. Подобный опыт использован на всесоюзных олимпиадах по математике и вполне себя оправдал.

Нам приходилось проверять письменные работы абитуриентов в разных вузах, и мы обнаружили, что нет единства в критерии оценок не только в разных вузах, но и в однотипных и даже в одном и том же вузе, на одной и той же специальности у разных экзаменаторов.

Иногда в качестве критерия оценок берутся за основу школьные нормы оценок. Вряд ли это можно считать целесообразным. В самом деле, допустим, по школьным нормам мы оцениваем работу абитуриента, поступающего на мехмат и он получает оценку «удовлетворительно». Может ли такой студент успешно обучаться на мехмате? Вряд ли.

Мы полагаем, что критерий оценок *знаний* на экзаменах должен тщательно устанавливаться экзаменационной комиссией. Может быть, некоторые общие установки следовало бы разработать Министерству высшего и среднего специального образования СССР.

Несколько слов о пособиях для поступающих в вузы. Хотелось бы, чтобы при издании новых пособий не были повторены серьезные недостатки пособий прошлых лет. С нашей точки зрения, они должны дополнять школьный учебник. Теоретические положения школьного учебника в них должны быть приняты за основу. Если же авторы пособия располагают более интересным примером, иллюстрирующим теоретическое положение учебника или уточняющим его, если они нашли более удачную формулировку определения или теоремы, а также хорошую систему упражнений, могущую еще лучше раскрыть содержание темы и т. д., то желательно это привести в пособии. Если какое-либо понятие формируется у учащегося на протяжении ряда лет (например, понятие числа, функции, операции, степени и др.) и в учебнике нет обзорного материала по этому вопросу, то такой материал в пособии желателен. Пособие должно помочь осмыслить ранее пройденное в школе, но не должно переучивать ученика. К сожалению, это не всегда соблюдалось. Многие пособия для поступающих содержат совершенно иные определения, другие доказательства, чем в школьном учебнике, без какой-либо мотивировки, а это уже приводит к необходимости переучиваться.

Мы считаем, что если автор пособия решился ввести определение, коренным образом отличающееся от такового в стабильном учебнике, то он должен разъяснить читателю, в чем состоит отличие и его целесообразность.

Анализируя изданные сборники конкурсных задач, приходишь к выводу, что они в основном содержат богатый и разнообразный материал для подготовки в вуз, но этот материал необозримый. В сборники включены и задачи, требующие особой сообразительности или очень трудоемкие. Такие задания не должны даваться на вступительных экзаменах. Поэтому, на наш взгляд, более предпочтительна структура «Сборника задач по математике для конкурсных экзаменов во втузы» под общей редакцией М. И. Сканави (М., «Высшая школа», 1973), где все задачи распределены по трем ступеням трудности.

Установление какого-то оптимального объема подготовительной работы учащегося по подготовке в вуз является одной из основных задач школы и вузов. Пособия для учащихся должны в какой-то мере решать этот вопрос, ибо фактически в настоящий момент они направляют работу учащихся и учителей и вызывают как следствие справедливые нарекания общественности о недопустимой перегрузке учащихся.

В уставе школы говорится о подготовке учащихся к дальнейшему обучению в вузе как об одной из задач школы. Эта задача успешно решается в школах и классах с углубленным изучением отдельных предметов. Любая школа должна справляться с этой задачей. Учащийся, хорошо окончивший школу, должен без серьезной помощи извне поступить в институт. Однако нельзя сказать, что одни классные занятия всегда успешно решают вопрос поступления учащихся в институт. Какими же возможностями располагает школа?

Помимо классных занятий, предусмотренных учебным планом, которые решают вопросы общего образования, имеются различные виды внеклассной работы, в частности факультативы. Разработанная программа факультативных занятий ставит своей задачей расширение кругозора учащихся и поэтому включает вопросы, выходящие за пределы программы школы, а следовательно, и вступительных экзаменов.

В результате получается так, что учащийся помимо классных и факультативных занятий должен еще изыскивать дополнительные пути и время для специальной подготовки в вуз. Вряд ли это можно считать целесообразным. Между тем следует отметить, что многие учащиеся IX и X классов потому и не принимают участие в факультативных занятиях, что у них нет на это времени, они перегружены. Мы считаем, что факультативы должны помимо основной задачи также решать и вопросы доведения уровня знаний учащихся до возможности успешной сдачи конкурсных экзаменов. Этого можно достичь, несколько разгрузив действующие программы факультативов.

И наконец, последний вопрос. Вступительные экзаменационные работы по математике, устные ответы учащихся на вступительных экзаменах — огромнейший и ценнейший материал для изучения состояния преподавания математики в школе и выработки мер его дальнейшего улучшения. К сожалению, он, как правило, не используется. Нам кажется, на этом материале должен быть повсеместно проведен глубокий анализ работы школ и учителей, используя который кафедры вузов совместно с методистами могут дать полезные рекомендации учительству. Цикл подобных семинаров мог бы стать хорошей школой передового опыта. Ведь вузы нередко сталкиваются с фактом, что выпускники одних учителей ежегодно показывают отличные знания, а других — не удовлетворяют самым минимальным требованиям. Эти семинары помогли бы и подготовке экзаменаторов, помогли бы единству усилий школы и вуза.

Приведем в заключение по одному варианту вступительной экзаменационной работы по математике на математический, физический факультеты и факультет общетехнических дисциплин и труда Азербайджанского ордена Трудового Красного Знамени Государственного педагогического института им. В. И. Ленина.

Математический факультет

1. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна a и плоский угол при вершине равен α ($\alpha \leqslant 90^\circ$). Определить углы между боковыми гранями пирамиды и площадь сечения, проведенного через сторону основания перпендикулярно к противолежащему боковому ребру.

2. Решить уравнение

$$x^2 \cdot 3^{x-2} + 3^{\sqrt{x}+2} = 3^x + x^2 \cdot 3^{\sqrt{x}}.$$

3. Найти все решения уравнения

$$\frac{\sqrt{1-\cos x} + \sqrt{1+\cos x}}{\cos x} = 4 \sin x,$$

лежащие между 0 и 2π.

4. В бесконечно убывающей геометрической прогрессии сумма всех ее членов, стоящих на нечетных местах, равна 36, а сумма всех членов, стоящих на четных местах, равна 12. Найти эту прогрессию.

Физический факультет

1. Основание пирамиды — правильный треугольник со стороной a. Одно из боковых ребер перпендикулярно к основанию, а остальные два наклонены к плоскости основания под равными углами β. Найти площадь наибольшей боковой грани пирамиды и угол наклона ее к плоскости основания.

2. Решить уравнение

$$\log_3 \sqrt{130 - 7^{\log_x (6-x)}} = 2.$$

3. Решить уравнение

$$\frac{\sqrt{1-\cos 2x}}{\sin x} = \sqrt{2}\left(\cos x - \frac{1}{2}\right).$$

4. Сумма членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии равна 56, а сумма квадратов членов той же прогрессии равна 448. Найти первый член и знаменатель.

Факультет общетехнических дисциплин и труда

1. На одном и том же основании построены два конуса (один внутри другого); угол между высотой и образующей меньшего конуса равен α, а угол между высотой и образующей большего конуса равен β. Разность высот конусов равна h. Найти объем тела, заключенного между боковыми поверхностями этих конусов.

2. Решить уравнение

$$\log_3 \frac{3}{x} + \log_3^2 x = 1.$$

3. Решить уравнение

$$2\cos^2 x + \sin^2 x = \frac{3}{2} \sin 2x.$$

4. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 7, \\ xy(x+y) = -2. \end{cases}$$

(Ограничиться действительными решениями.)

М. Г. Джавадов, А. Я. Креймер, С. Б. Файнштейн
(г. Баку)

АРМЯНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ПЕДАГОГИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ ИМ. Х. АБОВЯНА

Ереванский ордена Трудового Красного Знамени Армянский государственный педагогический институт им. Х. Абовяна ныне является одним из крупнейших вузов Армении.

В 1976 г. зачисление студентов в пединститут проводилось по результатам приемных экзаменов, проходивших в августе в Ереване и Тбилиси (для учащихся армянских школ ГССР), кроме того часть студентов была принята с подготовительного отделения. Поступающие на математический и физический факультеты сдавали письменный и устный экзамен по математике.

В помощь абитуриентам накануне экзаменов были организованы месячные консультации и обзорные лекции, проводимые опытными лекторами, хорошо знающими курс средней школы, а также и четырехмесячные платные курсы, организованные республиканским обществом «Знание». Немаловажное значение имела и тесная связь комсомольской организации факультета математики со школьниками дальних сел: они высылали им различные задачи и отвечали на их вопросы.

Учитывая итоги экзаменов прошлых лет, экзаменационная комиссия во время подбора текстов для письменных работ старалась составить разнообразные варианты, которые соответствовали бы особенностям каждого факультета. Для абитуриентов математического факультета было подготовлено 100 вариантов, а для двух отделений факультета физики (отделение физики и отделение общетехнических дисциплин и труда) — 60; каждый вариант содержал по 4 задания. В подготовленные варианты были включены вопросы по основным разделам школьной программы, при этом комиссия избегала включать такие задачи и упражнения, которые требовали бы искусственных приемов решения.

Всего на математический и физический факультеты сдавали экзамены соответственно 685 и 334 человека, а были зачислены соответственно 98 и 90. С подготовительного отделения было зачислено соответственно 52 и 37 человек.

Приведем тексты экзаменационных работ (по два варианта для каждого из трех отделений).

Математический факультет

I вариант

1. Сумма первых пяти членов геометрической прогрессии равна 62. Известно, что пятый, восьмой и одиннадцатый члены этой прогрессии являются соответственно первым, вторым и десятым членами арифметической прогрессии. Найти первый член геометрической прогрессии.

2. Диагонали осевого сечения усеченного конуса взаимно перпендикулярны, а образующая, равная l, составляет с плоскостью большего основания угол α. Определить объем усеченного конуса.

3. Решить уравнение

$$\log_{x+3}(3-\sqrt{1-2x+x^2})=\frac{1}{2}.$$

4. Решить уравнение

$$\sin 6x+2=2\cos 4x.$$

II вариант

1. Из пункта A в пункт B одновременно отправляются пешеход и велосипедист. Доехав до B, велосипедист поворачивает обратно и встречает пешехода через 1 час после начала движения. После встречи пешеход продолжает идти в B, велосипедист поворачивает и тоже едет в B. Доехав до B, велосипедист снова поворачивает обратно и встречает пешехода через 40 мин после первой встречи. Определить, за какое время пешеход пройдет расстояние от A до B.

2. В конус вписан шар радиуса r. Найти объем конуса, если известно, что плоскость, касающаяся шара и перпендикулярная к одной из образующих конуса, отстоит от вершины конуса на расстоянии d.

3. Решить уравнение

$$3\log_2^2\sin x+\log_2(1-\cos 2x)=2.$$

4. Решить уравнение

$$\operatorname{ctg}^4 x=\cos^2 2x-1.$$

Физический факультет

а) *Отделение физики*

I вариант

1. Найти четыре целых числа, из которых первые три составляют арифметическую, а последние три — геометрическую прогрессию, если известно, что сумма крайних чисел равна 37, а сумма средних 36.

2. Основанием треугольной пирамиды является равнобедренный треугольник, площадь которого равна S, а угол при вершине равен α. Каждое боковое ребро пирамиды составляет с ее высотой угол β. Найти объем пирамиды.

3. Решить уравнение

$$\lg\lg x+\lg(\lg x^2-1)=1.$$

4. Решить уравнение

$$2\sin^2 x+\operatorname{tg}^2 x=2.$$

II вариант

1. Если каждый из участников шахматного турнира со всеми остальными сыграет по одной партии, то всего будет сыграна 231 партия. Сколько человек участвовали в турнире?

2. Площадь боковой поверхности конуса в k раз больше площади основания. Определить угол между образующей и основанием.

3. Решить уравнение

$$3\cdot 16^x+2\cdot 81^x=5\cdot 36^x.$$

4. Решить уравнение

$$\sin 2x-4\cos 2x=4.$$

б) *Отделение общетехнических дисциплин и труда*

I вариант

1. Фотокарточка размером 12×18 см вставлена в рамку постоянной ширины. Определить ширину рамки, если ее площадь равна площади самой карточки.

2. В усеченном конусе, у которого отношение площадей оснований равно 4, образующая равна l и наклонена к плоскости нижнего основания под углом α. Вычислить объем конуса.

3. Решить уравнение

$$\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1.$$

4. Решить уравнение

$$(1+\cos 4x)\sin 4x=\cos^2 2x.$$

II вариант

1. Если двузначное число разделить на сумму его цифр, то получится в частном 6 и в остатке 2. Если же это число разделить на произведение его цифр, то получится в частном 5 и в остатке 2. Найти это число.

2. Площадь боковой поверхности конуса в 3 раза больше площади основания. Определить угол между образующей и основанием.

3. Решить систему уравнений

$$\begin{cases}\log_x y=3,\\ \log_{x+1}(y+19)=3.\end{cases}$$

4. Решить уравнение

$$\sin 3x-\sin 7x=\sqrt{3}\sin 2x.$$

Положительную оценку за экзаменационную работу получили 70% писавших ее.

Большинство абитуриентов не решили геометрическую задачу. Многие не могли правильно сделать чертеж к задаче, а следовательно, и не смогли провести те вспомогательные линии, которые помогли бы решить ее. Были и такие случаи, когда абитуриенты не могли решить геометрическую задачу, так как не помнили формул для нахождения той или другой величины.

Основная причина этого, по нашему мнению, та, что в последние годы решению геометрических задач с применением тригонометрии в большинстве средних школ уделяют мало внимания. Кроме того, неумение решить геометрическую задачу происходит, очевидно, и потому что в средней школе ни в одном классе во время переводных и выпускных письменных экзаменов в работы они не включаются.

Несколько лучше поступавшие справились с решением алгебраических стандартных задач. Однако и здесь в ряде случаев возникали затруднения: непонимание смысла задачи или ошибки при решении уравнений.

Абитуриенты допускали немало и грубых ошибок. Например, при решении показательного уравнения $3^{2x} - 3^x \cdot 8 = 9$ получали уравнение $3^x(9-8) = 3^2$, а отсюда $x = 2$. При решении уравнения

$$(\cos x + \sin x)\left(\cos x - \sin x - \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

переходили к записи

$$\begin{cases} \cos x + \sin x = 0, \\ \cos x - \sin x = \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

и затем решали полученную систему.

Решая уравнение $\cos 4x + \cos 2x = 0$, абитуриент пишет: $\cos 6x = 0$, $6x = \frac{\pi}{2}$, $x = \frac{\pi}{12} + 2\pi n$, тем самым допуская несколько ошибок подряд.

Приведенные ошибки, по-видимому, результат того, что во время обучения преподаватели не уделяли должное внимание обоснованиям выполняемых преобразований.

Для устных экзаменов комиссия составила билеты по три вопроса в каждом, включив в них весь программный материал. При ответе на первые два из них (алгебраический и геометрический) требовалось дать полный ответ (провести обоснование, доказательство). Среди третьих вопросов были такие: свойства и график функции $y = \sin x$, график функции $y = 3 \sin x + 5$, тригонометрические функции двойного аргумента; в некоторых билетах требовалось выполнить какое-либо упражнение.

В последние годы при обсуждении проблемы вступительных экзаменов нередко высказывались предложения по проведению в вузе вместо устного экзамена второго письменного экзамена. Мы полагаем, что для математического и физического факультетов педагогических институтов это неприемлемо.

На устном экзамене абитуриенты лучше раскрывают свои действительные знания, которые не могут быть результатом кратковременной тренировки. Не случайно, что из числа абитуриентов, получивших на письменном экзамене «4» и «5», 20 получили на устном экзамене неудовлетворительную оценку. В то же время на математическом отделении 60 абитуриентов на устном экзамене получили «4» и «5», несмотря на то что за письменную работу у них «3».

Следует отметить, что среди абитуриентов, получивших на вступительных экзаменах высокую оценку по математике, немало было выпускников сельских школ.

Ш. Х. Гущян, Г. А. Карагебакян
(г. Ереван)

ОБ ИТОГАХ ВСТУПИТЕЛЬНЫХ ЭКЗАМЕНОВ ПО МАТЕМАТИКЕ В ТЕХНИКУМЫ

В статье анализируется уровень знаний по математике учащихся, державших вступительные экзамены в 1976 г. в Московский электротехнический и Московский автомобильно-дорожный техникумы.

На дневные отделения сдавал экзамены по математике 1671 абитуриент (1258 жителей Москвы и Московской области и 413 — из различных областей Советского Союза), из них на базе восьми классов — 1007 человек, на базе десяти классов 664 человека. Более 50% абитуриентов имели средний балл (по документам) от «3» до «3,5», а среди поступавших в МАДТ только 19% абитуриентов имели средний балл от «4» до «5».

Последние два года на дневные отделения техникумов поступали (на базе восьми классов) абитуриенты, обучавшиеся в школе по новой программе по математике. Ясно, что в период становления новой программы особенно необходим тщательный анализ состояния знаний выпускников школы. Вот почему основное внимание в статье будет уделено анализу результатов экзаменов выпускников восьмилетней школы.

Уже в 1975 г. в знаниях абитуриентов по ряду тем обнаружились существенные пробелы, а прошедший год работы с первокурсниками помог яснее оценить глубину их знаний по многим вопросам, изучавшимся в школьном курсе. Приемные экзамены 1976 г. с очевидностью показывают, что обнаруженные в прошлом году пробелы в знаниях учащихся не случайны: недочеты и ошибки, многократно повторенные в ответах выпускников школ различных районов и городов страны, становятся уже типичными (это относится, конечно, к той части выпускников, которая была представлена абитуриентами).

Прежде всего хочется отметить, что одним из существенных недостатков в знаниях учащихся является низкая культура вычислительной работы.

Школьная программа и практика ее реализации акцентирует внимание учащихся на предпочтительное использование десятичных дробей в вычислениях. Это требование программы является вполне оправданным. Нужно отметить, что поступавшие в техникумы значительно лучше владеют десятичными дробями, чем обыкновенными; арифметика обыкновенных дробей — по-прежнему их больное место. Неумение привести дроби к общему знаменателю, вредная привычка при сложении и вычитании смешанных чисел обращать их в неправильные дроби, несвоевременное сокращение (или отсутствие такового) — вот далеко не полный перечень ошибок и недочетов в действиях с обыкновенными дробями. Эти недоработки дают себя знать в преобразованиях алгебраических дробей.

Практически у всех абитуриентов отсутствуют сколько-нибудь прочные навыки работы с логарифмической линейкой. Даже те немногие из них, кто знает правила действий, избегают пользоваться ею. Причина этого, видимо, состоит в том, что знания правил работы с логарифмической линейкой носят чисто словесный характер: они не подкреплены необходимой практикой вычисления в процессе решения задач (по алгебре, геометрии, физике, химии).

Необходимо отметить, что многие абитуриенты не умеют пользоваться таблицами, в том числе такими употребительными, как таблицы квадратов, квадратных корней, кубов, не говоря уже о таблицах обратных величин, площади круга, длины окружности.

В соответствии с программами вступительных экзаменов в экзаменационные билеты были включены (как теоретические вопросы) теоремы о границах погрешностей арифметических операций. На эти вопросы не ответил ни один из учащихся, поступавших в электротехнический и автомобильно-дорожный техникумы. Еще хуже то, что у учащихся отсутствуют и практические навыки использования этих теорем, что постоянно проявляется при решении задач. Между тем, и в школе, и в техникуме (в курсах алгебры, геометрии, физики, химии и специальных дисциплин) можно и нужно при решении любых вычислительных задач строго соблюдать правила приближенных вычислений, всякий раз акцентируя на них внимание учащихся, только тогда правила приближенных вычислений станут достоянием учащихся, их «рабочим инструментом».

Согласно новой программе по математике, выпускники восьмилетней школы знакомы с понятием степени с рациональным показателем и с действиями над такими степенями. Само понятие степени с рациональным показателем (в том числе отрицательным) усвоено неплохо — это, в частности, отмечают и преподаватели смежных дисциплин. Однако хорошо известные учащимся правила действий над степенями с натуральными показателями они с трудом переносят на степени с рациональными показателями.

Серьезные затруднения абитуриентов вызывали задачи:

«Упростить выражение $\frac{b\sqrt[3]{b}}{\sqrt{b}}$»,

«Вычислить $\left(16^{-\frac{3}{4}}\right)^{\frac{1}{3}}$» и др.

Значительным пробелом в знаниях многих учащихся оказались тождества сокращенного умножения; особенно много затруднений вызывали тождества

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2).$$

В учебном пособии «Алгебра 6» приводятся более содержательные, но и более громоздкие, чем в прежних учебниках, формулировки этих тождеств. От школы, очевидно, требуются для их освоения дополнительные усилия.

Остановимся на состоянии знаний учащихся по теме «Тригонометрические функции». Объем материала, изучаемого в восьмилетней школе по этой теме, значительно вырос: введены понятия синуса, косинуса, тангенса произвольного угла, изучаются свойства и графики тригонометрических функций, доказаны теоремы синусов и косинусов. Но низкий уровень знаний учащихся по этой теме вызывает серьезную озабоченность. Прежде всего нужно отметить два момента: во-первых, абитуриенты двух последних лет не могут ответить на прямой вопрос «Что такое синус или косинус произвольного угла?», во-вторых, они затрудняются в решении прямоугольных треугольников. Вероятно, это объясняется тем, что в учебном пособии по геометрии для VIII класса дано описательное определение синуса и косинуса произвольного угла и в качестве следствий из этих определений приводятся правила нахождения одних элементов прямоугольного треугольника по другим известным его элементам. На наш взгляд, необходимо отчетливее сформулировать (в виде следствий из общих определений), что синус, косинус и тангенс острого угла могут быть представлены как отношения соответствующих сторон прямоугольного треугольника. Тогда решение прямоугольных треугольников перестанет быть камнем преткновения, как это наблюдается в последние два года.

Завершающей темой курса алгебры VIII класса является тема «Логарифмы». Большинство учащихся усвоили словесную формулировку определения логарифма и некоторые сведения о десятичных логарифмах. В то же время большинство из них затруднялось в решении таких уравнений: $\log_2 x = 3$, $\log_2 8 = x$. Этот факт — свидетельство явного непонимания определения логарифма. Значительное место в этой теме занимают вычисления с помощью десятичных логарифмов. Надо отметить, что введение понятия стандартного вида и порядка числа облегчило нахождение характеристики и мантиссы десятичного логарифма, а также потенцирование с помощью таблицы антилогарифмов и линейки. Однако прочных навыков выполнения этой работы у большинства абитуриентов не обнаружено.

В новой программе, как никогда прежде, много внимания уделяется изучению функции. В учебных пособиях по алгебре и геометрии для VI — VIII классов содержится достаточное количество информации, необходимой для усвоения понятий функции. Тем не менее, почти все абитуриенты затруднялись в решении, например, таких задач:

а) указать область определения функции

$$y = \sqrt{x-3}, \quad y = \lg(x-2);$$

б) построить график функции $y = x^2$, заданной на множестве $\{-1;\ 0;\ 1;\ 2\}$.

Экзаменовавшиеся показали слабое владение методами решения геометрических задач. Да это и понятно: школьный курс геометрии насыщен обильным теоретическим материалом. Однако осмысленное его усвоение возможно лишь в процессе решения задач. Складывается мнение, что именно этому аспекту работы в практике школы не уделено достаточно внимания. Хотелось бы, чтобы учителя уделили больше времени решению задач.

На экзаменах неоднократно наблюдались случаи вопиющей математической безграмотности. Среди выпускников восьмилетней и даже средней школы нашлось немало таких, кто не знал порядка действий $\left(\text{не могли, например, выполнить действия: } 7 + 1 : \frac{3}{7}\right)$, не мог решить уравнений 1-й степени, не мог отличить биссектрису треугольника от медианы или высоты, не знал формулы площади круга. Среди абитуриентов нашлись и такие, которые уравнение $3 - 7x = 0$ решали следующим образом: $4x = 0$, $x = 4$.

Отметим, что полученные на вступительных экзаменах высокие оценки, как правило, соответствуют хорошим оценкам в школьных свидетельствах (аттестатах), однако уровень подготовки выпускников многих школ значительно ниже уровня требований, предъявляемых программой вступительных экзаменов. Большое число абитуриентов, имеющих в свидетельствах об окончании восьмилетней школы оценки по математике «3» и даже «4», на вступительных экзаменах получили неудовлетворительные оценки. Очень многие абитуриенты с оценками по математике в свидетельствах «4» или «5» получили на вступительных экзаменах оценку «3» и дальнейшее обучение в техникуме подтвердило весьма невысокий уровень их математической подготовки. Это свидетельствует о том, что не во всех школах достаточно ответственно относятся к оценке уровня знаний учащихся.

М. Н. Вайнштейн, А. Т. Рогов (Москва)

ОТ РЕДАКЦИИ

Министерство высшего и среднего специального образования СССР и Министерство просвещения СССР провели работу по обобщению и анализу результатов вступительных экзаменов в высшие учебные заведения в 1976 г.

О проценте абитуриентов, выдержавших в вузах союзных республик все вступительные экзамены, дают представление следующие данные:

РСФСР	—55,4	Литовская ССР	—69,4
Украинская ССР	—57,5	Молдавская ССР	—50,0
Белорусская ССР	—61,8	Латвийская ССР	—65,3
Узбекская ССР	—37,1	Киргизская ССР	—36,5
Казахская ССР	—41,2	Таджикская ССР	—38,8
Грузинская ССР	—31,2	Армянская ССР	—32,2
Азербайджанская ССР	—29,9	Туркменская ССР	—31,3
		Эстонская ССР	—68,9

Из этой таблицы видно, что в 1976 г. в вузах Азербайджанской, Грузинской, Армянской, Туркменской ССР все экзамены выдержало менее $^1/_3$ поступавших.

Предварительные итоги приема в высшие учебные заведения позволяют отметить, что уровень подготовки выпускников средних общеобразовательных школ в целом удовлетворителен. Однако значительная часть поступавших в вузы в 1976 г. проявила недостаточные знания по отдельным дисциплинам вступительных экзаменов.

Письменные и устные экзамены по математике показали, что по-прежнему наибольшее число неудовлетворительных оценок на вступительных экзаменах было получено абитуриентами по этой дисциплине. Например, в Азербайджанском политехническом институте 37% абитуриентов, сдававших письменный экзамен по математике, получили неудовлетворительные оценки, в Московском геологоразведочном институте — 34,2%. Аналогичные примеры имеются по ряду других вузов.

Проверкой установлено, что многие абитуриенты не умеют решать стереометрические задачи с применением тригонометрии, тригонометрические уравнения. В письменных работах встречаются грубые ошибки при преобразовании логарифмических и показательных уравнений, в том числе и простейших. Существенные трудности у абитуриентов вызывают задачи на составление уравнений. Плохо решаются задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии. Как и в прошлом году, абитуриенты недостаточно знают свойства элементарных функций, не чувствуют разницы между определениями, теоремами и следствиями. В письменных работах и в решении примеров встречаются ошибки, свидетельствующие о формальном механическом запоминании формул и определений. Значительные трудности у поступающих вызывало определение функции, тождества, равносильных уравнений, убывающей, периодической функции и др. Многие испытывали затруднения при решении простых, но не стандартных задач.

Конкурс при приеме характеризуется следующими данными. В среднем на одно место было подано 2,5 заявлений. Однако по отдельным группам вузов здесь были значительные колебания. В педагогических вузах на одно место было 3 заявления. Среди принятых в педагогические институты — 55% жителей сельской местности.

Поступившие в редакцию журнала материалы, характеризующие уровень требований на вступительных экзаменах по математике, говорят о том, что, как и в прошлые годы, наблюдаются отдельные факты включения в тексты экзаменационных работ усложненных заданий, решение которых не предусмотрено требованиями школьной программы. Наблюдаются случаи недостаточного знакомства экзаменаторов с содержанием новых школьных учебников.

Преподаватели вузов, ведущие занятия на первых курсах, отмечают, что многие студенты не могут с необходимой сосредоточенностью слушать лекционные курсы, причем в текущем учебном году таких студентов больше, чем в прошлые годы. По-видимому, в практике работы школ ослаблено внимание к методам работы со старшеклассниками, включению в учебный процесс лекций, семинарских занятий и формированию у учащихся навыков, необходимых им для дальнейшего обучения.

Как показывают итоги вступительных экзаменов по математике, необходима дальнейшая серьезная работа как по улучшению качества подготовки выпускников средних школ, так и по организации вступительных экзаменов в вузы, должному учету на этих экзаменах требований школьной программы, нового содержания школьного курса математики.

Технические средства обучения. Наглядные пособия

М. С. ХМЕЛЬНИЦКИЙ
(г. Новосибирск)

НАШ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КАБИНЕТ

В школе № 166 г. Новосибирска работают 4 кабинета математики. Я хочу рассказать об одном из них, который был создан силами учащихся, их родителей и шефов.

В кабинете на каждой парте установлена коробочка с двумя готовальнями, угольниками, линейками. На задней стене классной комнаты оборудован стеллаж для хранения наглядных пособий (фото 1).

Математическая библиотека и раздаточные материалы для IV—X классов хранятся в двух шкафах, стоящих вдоль боковой стены класса. Над ними помещены портреты знаменитых математиков. На этой же стене отведено место для математических газет.

Классная доска состоит из 10 досок. Передние четыре доски обычные, из них две крайние закреплены, а две средние раздвигаются. Тогда появляются две другие доски с прочерченными на них координатными осями (фото 2). Одна из них (правая) сделана по принципу карманных дорожных шахмат: координаты точек на ней фиксируются точно так же, как на шахматной доске фигуры. Правая доска разбита на единичные квадраты, на стыках которых сделаны двухмиллиметровые отверстия. При помощи фишек, вставляемых в эти отверстия, фиксируются точки плоскости, координаты которых — целые числа.

Если раздвинуть «координатные доски», то увидим (см. фото 3) магнитную (слева) и рабочую доски; раздвинув последние, получим экран.

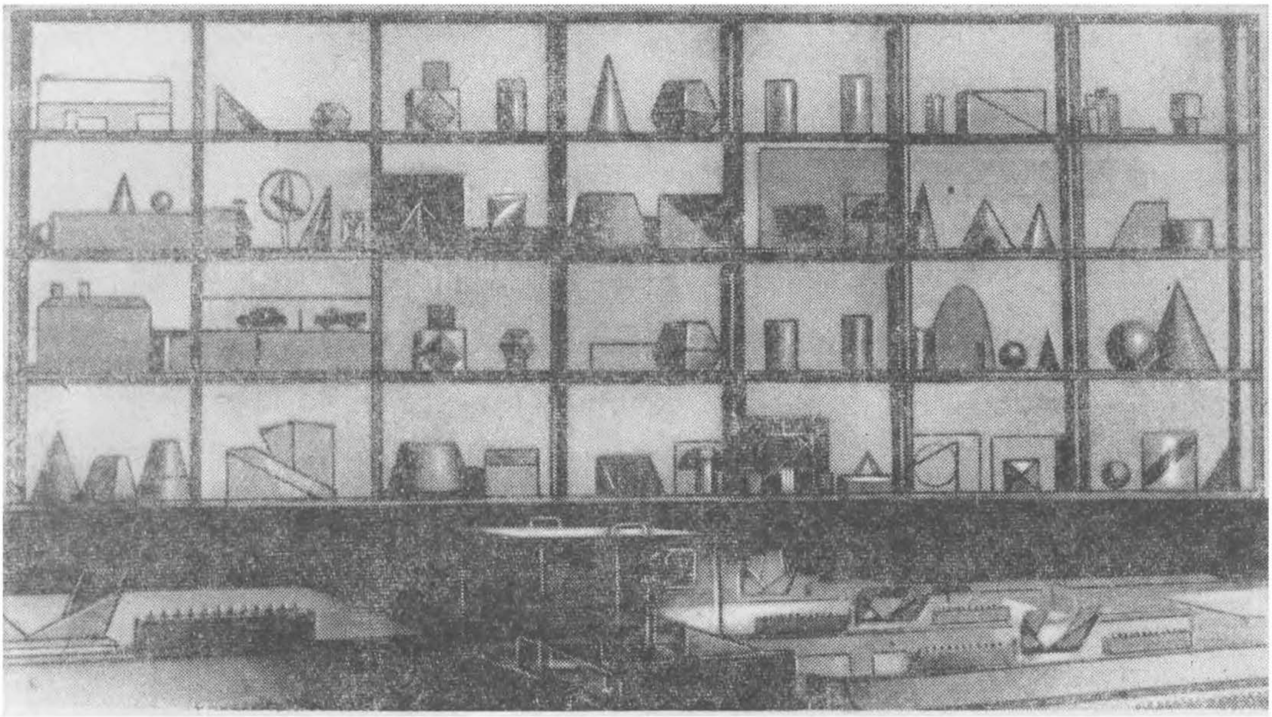
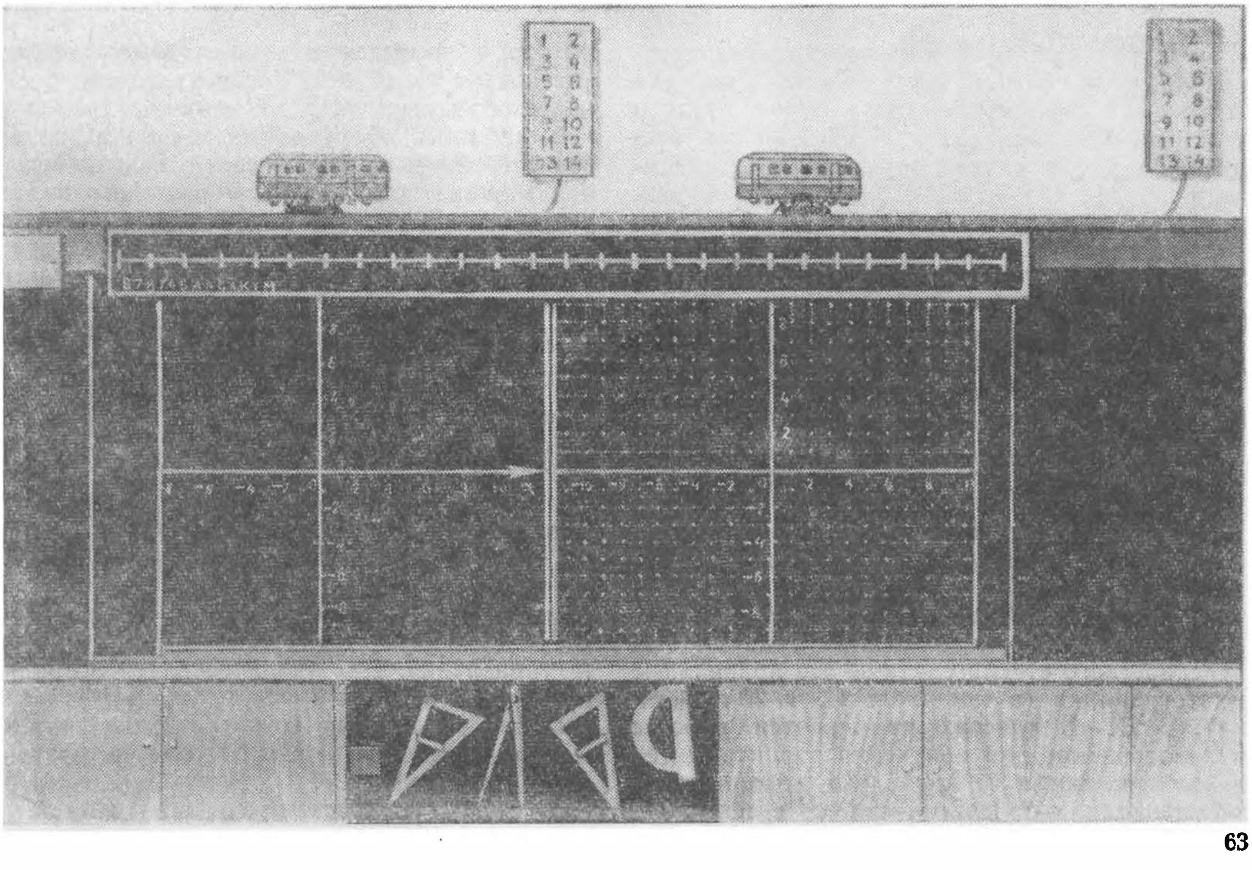


Фото 1 ▲

▼ Фото 2



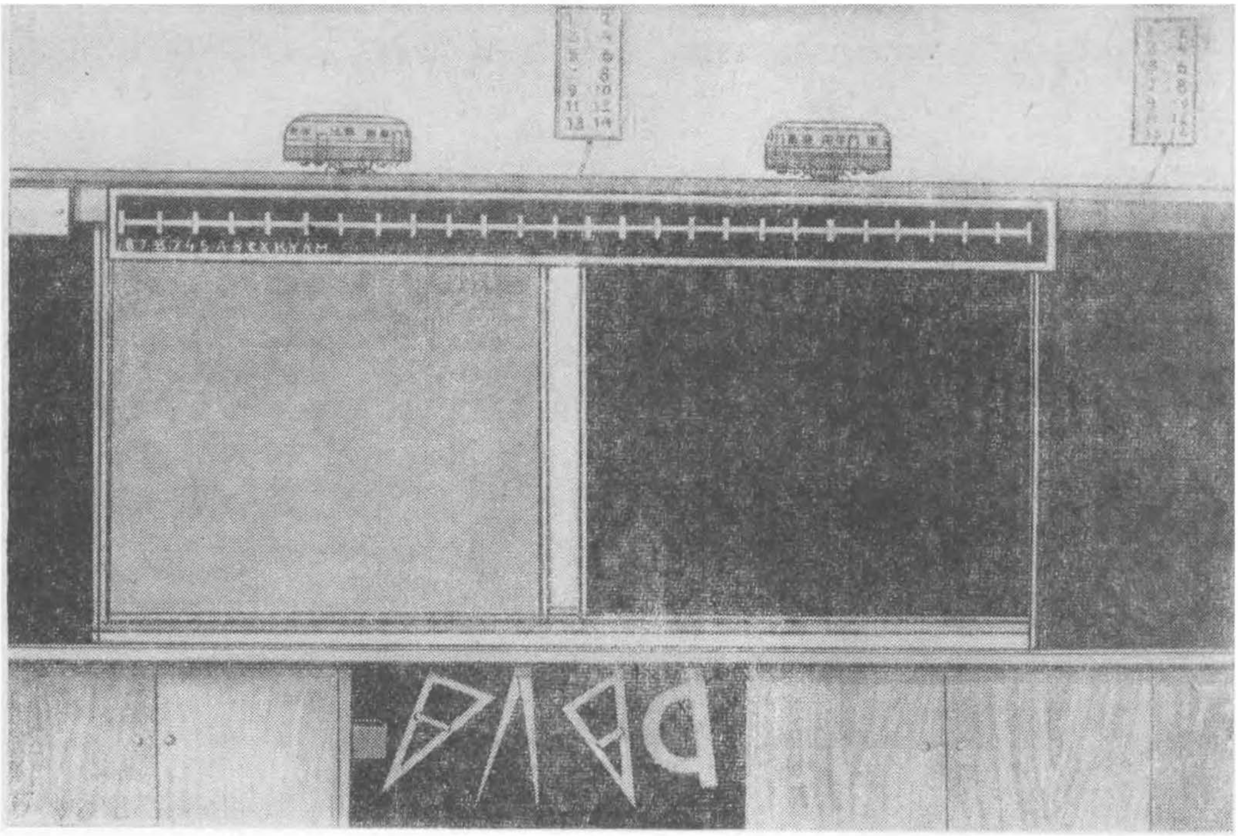


Фото 3

Над средними досками смонтирована трехметровая магнитная числовая ось, которая снабжена комплектом цифр, букв, знаков с магнитным креплением. Числовая ось сделана по рекомендации журнала «Математика в школе» (№ 3, 1975). Числовая ось универсальна и является хорошим пособием при изучении многих тем («Дроби», «Модуль числа», «Рациональные числа», «Неравенства» и т. д.).

Над всей шестиметровой доской смонтирована двухколейная железная дорога (фото 2, 3), автоматически управляемая при помощи пульта, который находится на расстоянии 3—5 м от доски. На движущиеся тележки одеваются маски: поезда, парохода, лодки, автомобиля и т. д. Такая динамическая модель дает возможность наглядно иллюстрировать основные моменты решения задач на движение.

В кабинете много чертежей и моделей к различным геометрическим задачам. Из органического стекла сделаны все правильные многогранники (в том числе 12- и 20-гранники). В IX—X классах применяется простое приспособление для получения различных тел вращения: рамка из проволоки в форме прямоугольника, окружности и т. д. с помощью мотора приводится во вращательное движение вокруг своей оси. Тогда учащиеся видят, какое образуется тело вращения.

В кабинете оборудовано автоматизированное устройство обратной связи. Это электронная машина для программированного опроса учащихся. Ее основное назначение — получение непрерывной информации от всего класса одновременно. Машина состоит из 42 пультов для учащихся, трех ученических табло и пульта управления. На каждом столе установлено по два пульта для учащихся. Все пульты имеют 12 тумблеров (для набора кода служат тумблеры 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9; для ответа «готов» — «Г», «понял» — «П». Над доской закреплены три табло для учащихся (по одному против каждого из рядов класса). Табло имеет 14 лампочек под номерами от 1 до 14; так же нумеруются и места в ряду. Поскольку учащиеся имеют постоянные места, каждому из них всегда соответствуют одни и те же лампочки на ученическом табло и на пульте управления. Два ученических табло видны над доской на фото 2 и 3.

Пульт управления стоит на столе учителя. Опишем наиболее важные его части (фото 4, справа налево).

На пульте имеется процентная шкала, по

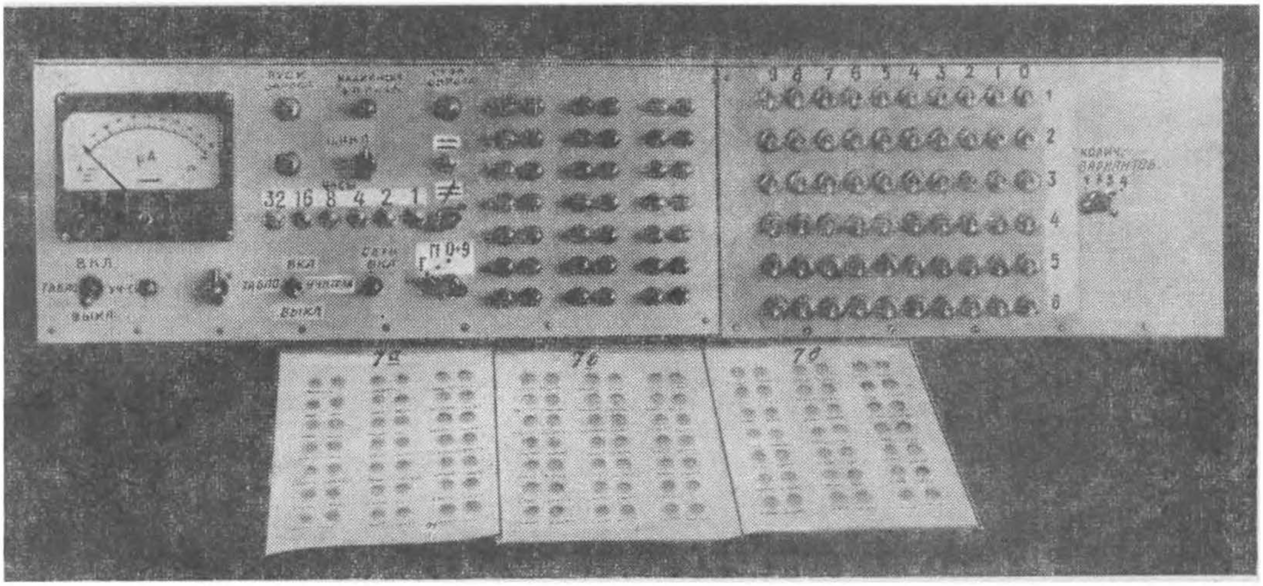


Фото 4

которой указывается, какой процент учащихся класса готов к ответу или понял объясняемый материал.

В пульт вмонтированы часы; они автоматически выключают машину через определенное время. Часы имеют шесть тумблеров с отметками 1, 2, 4, 8, 16, 32. Включением одного или нескольких тумблеров указывается, сколько минут отведено на выполнение задания. Например, если на работу отведено 10 мин, то учитель включает тумблеры 2 и 8. Через 10 мин раздается короткий гудок и машина автоматически отключается. Учащиеся, которые справились с заданием, получают «5». Далее учитель запускает машину еще на 3 мин. Решившие получают «4» и т. д.

Переключением тумблера, выше и ниже которого стоят знаки «=» и «≠», фиксируется число учащихся, соответственно правильно и неправильно решивших упражнение. Переключателем с отметками «Г», «П», «0+9» включаются ответы «готов», «понял», а также опрос по коду от 0 до 9.

Табло пульта управления имеет 42 лампочки. На табло одевается маска класса, на которой написаны фамилии учащихся (три такие маски лежат перед пультом на фото 4). Когда на табло учителя зажигается лампочка, это значит, что данный ученик решил упражнение верно.

В правой части пульта расположены 60 тумблеров. Ими фиксируются коды правильных ответов для одного, двух, четырех и шести вариантов. Например, учителю надо провести контрольную работу на два варианта. Он устанавливает последний справа переключатель на отметку «2» и затем набирает на первых двух горизонтальных рядах тумблеров коды правильных ответов (коды выражаются цифрами: 0, 1, ..., 9). После этого включается машина.

Машина может работать весь урок. С ее помощью осуществляется запрограммированный устный счет, различные самостоятельные работы на 5—7 мин, контрольные работы на 25—45 мин. Вся информация фиксируется на табло учителя. Когда время подходит к концу, учитель включает табло учащихся. Перед школьниками, правильно решившими задачу, зажигаются лампочки. Работу с классом приходится строго дифференцировать, так как учащиеся выполняют упражнения с различной скоростью.

Все задания заготавливаются на пленке и при помощи кодоскопа проецируются на экран. Контрольные работы на четыре или шесть вариантов мы проводим по дидактическим материалам. Учащиеся получают карточки, на обратной стороне которых запрограммированы ответы к каждому заданию. Решивший первое упражнение, набирает код ответа (табло учителя фиксирует его ответ); закончив всю работу, он включает тумблер «Г» (готов). Учитель, сидя за столом, периодически переводит переключатель на отметку «Г»; если на табло учителя лампочка ученика горит, значит ученик решил всю работу. Преподаватель может взять его тетрадь и просмотреть ее. Проверяя каждое упражнение в отдельности с помощью машины, можно проверить всю контрольную работу. Тогда в конце урока по включенному табло учащихся дети увидят результаты своего труда.

Работа с машиной дала большой эффект.

Л. Д. ПОЛЯНСКИЙ
(г. Куйбышев)

МАГНИТОФОН НА УРОКАХ МАТЕМАТИКИ

Одной из форм контроля за усвоением учебного материала и учета успеваемости являются математические диктанты, записанные на магнитофонную пленку. Применение магнитофонной записи на уроках дает возможность учителю установить регламент для ответов учащихся на поставленные вопросы, что воспитывает в них внимательность, дисциплинированность и самостоятельность при выполнении работы. Это также дает возможность следить за работой учащихся, не отвлекаясь при этом на чтение диктанта.

Математические диктанты целесообразно проводить по двум вариантам. При разработке заданий следует учесть, что при их выполнении не должны получаться громоздкие ответы.

Для записи математических диктантов можно использовать магнитофон любой марки, желательно трехскоростной четырехдорожечный магнитофон «Комета-209» (тип ПМ-34).

Записывают диктант следующим образом. Магнитофон устанавливают на «запись» и по подготовленному заранее тексту четким голосом читают главный вопрос задания. Потом после слова «повторяю» следует еще раз прочитать этот же вопрос, чтобы учащиеся лучше его усвоили. Затем диктуется задание для I и тут же вслед за ним — для II варианта. После того, как задание прочтено для каждого варианта, следует пауза для ответа. В это время магнитофон работает. Это позволяет учителю при проведении диктанта не выключать магнитофон после каждого очередного вопроса. Время паузы должно быть примерно равно утроенному времени, которое необходимо учителю для выполнения данного задания. Время для ответа на поставленный вопрос подсчитывается заранее при подготовке текста для диктанта.

При проведении диктанта магнитофон устанавливается у передней стены класса на подставке высотой больше, чем высота парты. Громкость воспроизведения записи регулируется с учетом хорошей слышимости на задних партах.

Перед диктантом учащиеся должны заранее подготовить листы бумаги и подписать на них свои фамилии. Выслушав задание, школьники дают на него ответ. Ответы должны быть пронумерованы и записаны один под другим. Если учащийся затрудняется в ответе, то делает прочерк в строке, отведенной для ответа на этот вопрос.

В IX классе можно предложить математический диктант по геометрии на тему «Параллельная проекция» и по алгебре в X классе на тему «Формулы приведения». Приводим тексты этих диктантов.

Параллельная проекция фигуры

Какие фигуры могут получиться при параллельном проектировании следующих фигур:

I вариант	II вариант
1. Прямой?	1. Точки?
2. Прямоугольного треугольника?	2. Равнобедренного треугольника?
3. Тупого угла?	3. Прямого угла?
4. Квадрата?	4. Прямоугольника?
5. Ромба?	5. Параллелограмма?
6. Равнобедренной трапеции?	6. Прямоугольной трапеции?

Формулы приведения

Приведите данное выражение к значению функции угла α

I вариант	II вариант
1. $\sin(90^\circ+\alpha)$	1. $\cos(90^\circ+\alpha)$
2. $\cos(\pi+\alpha)$	2. $\sin(\pi+\alpha)$
3. $\cos\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$	3. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$
4. $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$	4. $\sin(2\pi-\alpha)$
5. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$	5. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$
6. $\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha)$	6. $\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)$
7. $\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)$	7. $\operatorname{ctg}\left(\frac{3}{2}\pi+\alpha\right)$

Такие виды диктантов можно использовать в целях контроля за усвоением формул.

Проверка диктантов не представляет особого труда, и учитель может судить о качестве усвоения знаний всеми учащимися, затрачивая при этом минимум времени. Математические диктанты, записанные на магнитофонной пленке, целесообразно хранить в кабинете и использовать по мере необходимости.

Факультативные занятия

В. Л. РАБИНОВИЧ
(г. Петропавловск Казахской ССР)

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО НЕПРОТИВОРЕЧИВОСТИ ГЕОМЕТРИИ ЛОБАЧЕВСКОГО НА ОСНОВЕ СИСТЕМЫ АКСИОМ ШКОЛЬНОГО КУРСА ГЕОМЕТРИИ

1. Для доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского на плоскости и независимости аксиомы параллельных от остальных аксиом евклидовой геометрии применяется модель плоскости Лобачевского в плоскости Евклида[1]. После построения такой модели (указав объекты и отношения между ними, принятые за основные, неопределяемые) следует проверить выполнимость всех аксиом евклидовой планиметрии (кроме аксиомы параллельных) и аксиомы параллельных Лобачевского. Это делается, как правило, в рамках различных модификаций аксиоматики Гильберта (см., в частности, [1], [2], [3]). Между тем школьный курс геометрии в настоящее время строится на основе иной системы аксиом, существенно отличающейся от гильбертовой. Поэтому, на наш взгляд, представляет определенный интерес изложение доказательства непротиворечивости геометрии Лобачевского, непосредственно опирающееся на систему аксиом, принятую в школе.

В данной статье приводится вариант такого доказательства с помощью построения для плоскости Лобачевского модели, известной как модели Кэли — Клейна. Применяемые при этом некоторые сведения из проективной геометрии «работают» только при проверке одной из аксиом (подвижности плоскости). Это позволяет использовать статью и во внеклассной работе со школьниками.

2. Сначала следует определить плоскость Лобачевского на основе системы аксиом школьного курса геометрии. Основные понятия этой системы аксиом: точка, прямая, расстояние. Поэтому требуется задать множества T (элементы этого множества будем называть точками) и N (его элементы будем называть прямыми). Пусть далее задано отображение ρ множества пар точек $T\times T$ в множество неотрицательных вещественных чисел $\mathbf{R}_+$ (значение функции ρ, соответствующее паре точек A и B, будем называть расстоянием от A до B и обозначать $\rho(A,B)$)[2].

Совокупность $\langle T, N, \rho\rangle$ называется плоскостью Лобачевского, если для этой совокупности верны следующие аксиомы (ср. [4], с. 88—93, или [5], с. 112—113):

I. *Аксиомы принадлежности*

I_1. Каждая прямая есть множество точек.

I_2. Для любых двух отличных друг от друга точек существует одна и только одна содержащая их прямая.

I_3. Существует хотя бы одна прямая, и каждой прямой принадлежит хотя бы одна точка.

II. *Аксиомы расстояния*

II_1. Каковы бы ни были точки A, B, расстояние $\rho(A,B)=0$ в том и только том случае, если $A=B$.

II_2. $\rho(A,B)=\rho(B,A)$.

II_3. Для любых трех точек A, B, C $\rho(A,C)\leqslant\rho(A,B)+\rho(B,C)$.

III. *Аксиомы порядка*

III_1. Любая точка O прямой p разбивает множество всех отличных от O точек прямой p на два непустых множества так, что: а) для любых двух точек A и B, принадлежащих разным множествам, точка O лежит между A и B; б) если точки A и B принадлежат одному и тому же множеству, то одна из них лежит между другой точкой и точкой O.

III_2. Для любого расстояния a на заданном луче с началом O существует одна и только одна точка A, расстояние которой от точки O равно a: $\rho(O,A)=a$.

III_3. Если точка C лежит между точками A и B, то точки A, B, C принадлежат одной прямой.

III_4. Любая прямая p, лежащая в плоскости α, разбивает множество не принадлежащих ей точек этой плоскости на два непустых множества так, что: а) любые две точки, принадлежащие разным множествам, разделены прямой p; б) любые две точки, принадлежащие одному и тому же множеству, не разделены прямой p.

IV. *Аксиома подвижности плоскости*

Если расстояние $\rho(A,B)$ положительно и равно расстоянию $\rho(A_1,B_1)$, то существуют

[1] Разъяснение выражений «непротиворечивость аксиоматической теории», «независимость аксиом» имеется в школьном учебном пособии «Геометрия 8», с. 93—97. См. также [1], [2], [3].

[2] Для евклидова расстояния от A до B сохраним обозначение $|AB|$. Что касается точек, прямых, отрезков и т. д., то из текста будет ясно, о каком понятии (евклидовом или в смысле нашей модели) идет речь.

два перемещения, каждое из которых отображает точку A на точку A_1, а точку B на точку B_1. Если α_1 — полуплоскость, ограниченная прямой AB, то она этими перемещениями отображается на две различные полуплоскости β_1 и β_2, ограниченные прямой A_1B_1.

V′. Аксиома параллельных Лобачевского

Через точку A, не принадлежащую прямой p, проходит не менее двух прямых, не пересекающих p.

Примечания. 1) Ради удобства изложения мы считаем $\rho(A, B)$ вещественным числом. Это не противоречит тому, что (как принято в школьных учебных пособиях) расстояние является величиной. 2) Понятия «лежать между», «луч», «полуплоскость», «перемещение» и т. д., введение которых не связано с аксиомой V′ Лобачевского, определяются так же, как и в школьном курсе. 3) Аксиому IV мы используем в более слабой по сравнению со школьным учебным пособием форме, постулируя лишь существование хотя бы двух соответствующих перемещений; то, что число таких перемещений не более двух, можно доказать (см. [7]).

3. Построим интерпретацию плоскости Лобачевского. Рассмотрим в евклидовой плоскости окружность ω с центром в точке O и радиусом R. Пусть T — множество внутренних точек M круга, границей которого является окружность ω $(T = \{M \mid |OM| < R\})$; N — множество евклидовых открытых отрезков $]PQ[$ (хорд), концы которых принадлежат ω.

За расстояние между точками A и B примем число $\lg \frac{|AP|\cdot|QB|}{|PB|\cdot|AQ|}$, где $\{P, Q\} = (AB) \cap \omega$, и при этом точка A расположена (в евклидовом смысле) между точками Q и B (что в дальнейшем будем обозначать $Q\dot{A}B$), а точка B между A и P ($A\dot{B}P$) (см. рис. 1). Введем сокращенное обозначение

$$\frac{|AP|\cdot|QB|}{|PB|\cdot|AQ|} = (ABPQ). \qquad (1)$$

Итак,

$$\rho(A, B) = \lg(ABPQ), \text{ где}$$
$$\{P, Q\} = (AB) \cap \omega, Q\dot{A}B, A\dot{B}P. \qquad (2)$$

Рис. 1

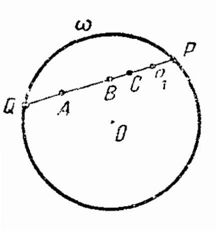
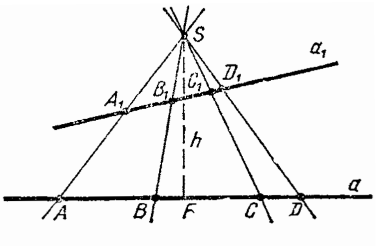


Рис. 2



Теперь следует проверить выполнимость приведенных выше аксиом I, II, III, IV, V′.

Справедливость аксиом I_1, I_2, I_3 очевидна, ибо прямая в нашей модели представляет собой открытый отрезок на прямой в плоскости Евклида.

II_1. Если $A = B$, то из (1) и (2) находим, что $(ABPQ) = 1$, $\rho(A, B) = 0$.

Если $A \neq B$, то из условий $A\dot{B}P$ и $Q\dot{A}B$ следует, что

$$\frac{|AP|}{|PB|} > 1, \quad \frac{|AQ|}{|QB|} < 1.$$

Следовательно, $(ABPQ) > 1$, откуда $\rho(A, B) > 0$.

II_2 Для точек A, B, P, Q (рис. 1) имеем $B\dot{A}Q$ и $P\dot{B}A$. Поэтому в силу нашего соглашения

$$\rho(B, A) = \lg(BAQP).$$

Но $(BAQP) = \frac{|BQ|\cdot|PA|}{|QA|\cdot|BP|} = (ABPQ)$. Отсюда $\rho(B, A) = \rho(A, B)$.

Для проверки аксиомы II_3 предварительно докажем две леммы.

Лемма 1. Если A лежит между Q и B, B лежит между A и P, P_1 лежит между B и P, то $(ABP_1Q) > (ABPQ)$.

Обозначим $|AP_1| = \lambda$, $|BP_1| = \mu$, $|P_1P| = \delta$. В силу условия имеем $\lambda > \mu$. Отсюда следует, что

$$\frac{\lambda + \delta}{\mu + \delta} < \frac{\lambda}{\mu}. \qquad (3)$$

В самом деле, так как λ, μ, δ положительны, то $(\lambda > \mu) \Rightarrow (\lambda\delta > \mu\delta) \Rightarrow (\lambda\mu + \lambda\delta > \lambda\mu + \mu\delta) \Rightarrow$
$$\Rightarrow (\lambda(\mu + \delta) > \mu(\lambda + \delta)),$$
откуда и вытекает неравенство (3).

Используя (3), получаем из (1):

$$(ABPQ) = \frac{|AP|\cdot|QB|}{|PB|\cdot|AQ|} = \frac{|AP_1| + |P_1P|}{|PP_1| + |P_1B|}\cdot\frac{|QB|}{|AQ|} =$$
$$= \frac{\lambda + \delta}{\mu + \delta}\cdot\frac{|QB|}{|AQ|} < \frac{\lambda}{\mu}\cdot\frac{|QB|}{|QA|} =$$
$$= \frac{|AP_1|\cdot|QB|}{|BP_1|\cdot|AQ|} = (ABP_1Q).$$

Лемма 1 доказана.

Лемма 2. Если точки A_1, B_1, C_1, D_1 прямой a_1 являются образами точек A, B, C, D прямой a при центральном (или параллельном) проектировании, то

$$(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1). \qquad (4)$$

Пусть S — центр проектирования (рис. 2), тогда

$$S = (AA_1) \cap (BB_1) \cap (CC_1) \cap (DD_1).$$

Проведем $(SF) \perp a$ $(F = (SF) \cap a)$ и обозначим $|SF| = h$.

Найдем площади получившихся треугольников двумя способами:

$$S_{ASC} = \frac{1}{2}|AS|\cdot|CS|\sin\widehat{ASC} = \frac{1}{2}|AC|\cdot h,$$

$$S_{BSC} = \frac{1}{2}|BS|\cdot|CS|\sin\widehat{BSC} = \frac{1}{2}|BC|\cdot h,$$

$$S_{BSD} = \frac{1}{2}|BS|\cdot|DS|\sin\widehat{BSD} = \frac{1}{2}|BD|\cdot h,$$

$$S_{ASD} = \frac{1}{2}|AS|\cdot|DS|\sin\widehat{ASD} = \frac{1}{2}|AD|\cdot h.$$

Подставляя найденные отсюда значения $|AC|$, $|BC|$, $|BD|$, $|AD|$ в выражение для $(ABCD)$, получим

$$(ABCD) = \frac{|AC|\cdot|BD|}{|BC|\cdot|AD|} = \frac{\sin\widehat{ASC}\cdot\sin\widehat{BSD}}{\sin\widehat{BSC}\cdot\sin\widehat{ASD}}. \qquad (5)$$

Аналогично рассуждая, найдем

$$(A_1B_1C_1D_1) = \frac{\sin\widehat{ASC}\cdot\sin\widehat{BSD}}{\sin\widehat{BSC}\cdot\sin\widehat{ASD}}. \qquad (6)$$

Сравнивая (5) и (6), получим $(ABCD) = (A_1B_1C_1D_1)$.

При параллельном проектировании $(AA_1) \| (BB_1) \| (CC_1) \| (DD_1)$. Справедливость (4) вытекает из теоремы Фалеса:

$$\left(\frac{|AC|}{|BC|} = \frac{|A_1C_1|}{|B_1C_1|},\ \frac{|BD|}{|AD|} = \frac{|B_1D_1|}{|A_1D_1|}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ((ABCD) = (A_1B_1C_1D_1)).$$

Лемма 2 доказана.

Теперь проверим справедливость аксиомы II_3. Если некоторые из точек A, B, C совпадают, то справедливость II_3 ясна. Поэтому в дальнейшем считаем, что точки A, B, C попарно различны.

Случай 1. Точки A, B, C лежат на одной прямой PQ и $A\overset{\bullet}{B}C$ (рис. 1). Имеем

$$(ABPQ) = \frac{|AP|\cdot|QB|}{|PB|\cdot|AQ|}, \quad (BCPQ) = \frac{|BP|\cdot|QC|}{|PC|\cdot|BQ|}.$$

Перемножая эти равенства, получим

$$(ABPQ)\cdot(BCPQ) = \frac{|AP|\cdot|QC|}{|AQ|\cdot|PC|} = (ACPQ).$$

Отсюда после логарифмирования $\rho(A, B) + \rho(B, C) = \rho(A, C)$.

Пусть теперь точка B не лежит между A и C. Будем считать для определенности, что $A\overset{\bullet}{C}B$. Тогда, используя последний результат, выводим, что $\rho(A, C) < \rho(A, B)$ и тем более $\rho(A, C) < \rho(A, B) + \rho(B, C)$.

Случай 2. Точки A, B, C не лежат на одной прямой. Пусть $\{Q, P\} = (AB) \cap \omega$, $\{R, S\} = (BC) \cap \omega$, $\{U, T\} = (CA) \cap \omega$, $(QR) \cap (PS) = D$ (рис. 3). Проектируя[3] точки прямой PQ на прямую UT из центра D и учитывая лемму 2, получим

$$(ABPQ) = (AKU'T'). \qquad (7)$$

По лемме 1 имеем:

$$(AKU'T') > (AKUT'); \qquad (8)$$

$$(KAT'U') > (KATU'), \text{ или}$$

$$(AKU'T') > (AKU'T). \qquad (9)$$

Из соотношений (7), (8), (9) получаем

$$(ABPQ) > (AKUT). \qquad (10)$$

Проектируя из того же центра D точки прямой SR на прямую UT, получим $(BCSR) = (KCU'T')$, а затем, используя лемму 1, аналогично предыдущему выведем, что

$$(BCSR) > (KCUT). \qquad (11)$$

Теперь перемножим неравенства (10) и (11) (все их члены положительны):

$$(ABPQ)\cdot(BCSR) > (AKUT)\cdot(KCUT).$$

Отсюда после логарифмирования

$$\rho(A, B) + \rho(B, C) > \rho(A, K) + \rho(K, C).$$

Так как имеет место $A\overset{\bullet}{K}C$, то, учитывая полученное в случае 1 соотношение, приходим к требуемому:

$$\rho(A, B) + \rho(B, C) > \rho(A, C).$$

Проверка справедливости аксиомы II_3 завершена.

Из рассмотрения случаев при проверке аксиомы II_3 вытекает также, что для различных точек A, B, C

$$(A\overset{\bullet}{B}C) \Leftrightarrow (\rho(A, B) + \rho(B, C) = \rho(A, C)).$$

А это означает, что отношение «лежать между» для точек (а значит, и производные понятия «точки разделены прямой» и т. п.) в на-

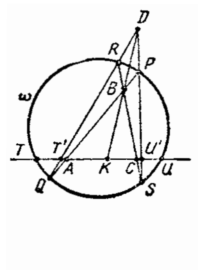


Рис. 3

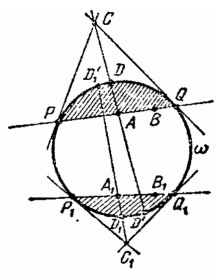


Рис. 4

[3] Если окажется, что $(QR) \| (PS)$, то используем параллельное проектирование в направлении (QR).

шей модели и в евклидовой плоскости совпадают.

Отсюда следует, что аксиомы III_1 и III_4 справедливы и в нашей модели, поскольку они верны в евклидовой плоскости. Из предыдущей же проверки аксиомы II_3 непосредственно вытекает и справедливость аксиомы III_3. Несколько сложнее проводится проверка аксиомы III_2. Убедимся в ее справедливости.

Пусть дано число $a \geqslant 0$. Тогда $10^a \geqslant 1$. Зафиксируем на хорде QP точку A (рис. 1). Из двух «лучей» (в смысле нашей модели) $[AQ)$ и $[AP)$ выберем один, скажем $[AP)$. Пусть далее $|AQ|=c$, $|AP|=b$. Если теперь некоторая точка B описывает хорду $]QP[$ в направлении от Q к P, то отношение $\lambda = |QB| : |BP|$ возрастает и при этом может принимать любые положительные значения $(0<\lambda<\infty)$.

В частности, $\lambda = \frac{c}{b}$ при $B = A$.

Положим $\lambda_0 = 10^a \cdot \frac{c}{b}$. Тогда для соответствующего этому значению λ_0 положения точки B имеем

$$(ABPQ) = \frac{|AP|\cdot|QB|}{|PB|\cdot|AQ|} = \frac{b\lambda_0}{c} = 10^a.$$

Отсюда $\rho(A, B) = \lg 10^a = a$.

Для проверки выполнимости аксиомы подвижности плоскости (аксиомы IV) достаточно показать существование двух перемещений с требуемыми свойствами. Для этого будут использованы некоторые факты проективной геометрии (о них можно прочесть, например, в [1], [6]) Перемещением в нашей модели в соответствии с определением является преобразование множества T внутренних точек круга с границей ω, при котором сохраняется расстояние ρ.

Дополним каждую прямую евклидовой плоскости α, в которой расположена окружность ω, точкой (называемой несобственной) и будем считать далее, что множество всех таких (несобственных) точек есть несобственная прямая l. Множество $\alpha \cup l$ называется расширенной плоскостью (она является одной из моделей проективной плоскости).

По условию аксиомы IV имеем $\rho(A,B) = \rho(A_1,B_1) > 0$. Пусть A и B принадлежат прямой PQ (рис. 4), а A_1 и B_1 — прямой P_1Q_1. Проведем в точках P и Q касательные к окружности ω, их точку пересечения обозначим через C (если касательные параллельны, то точка C — несобственная). Аналогично получена и точка C_1 (рис. 4). Пусть далее $(CA)\cap\omega = \{D, D'\}$, $(C_1A_1)\cap\omega = \{D_1, D'_1\}$.

Преобразование проективной плоскости, отображающее прямые на прямые, называется коллинеацией. Известно, что коллинеация вполне определяется двумя соответствующими четверками точек (причем в каждой из четверок никакие три точки не должны лежать на одной прямой). Определим коллинеацию k_1 так, чтобы

$$k_1(P) = P_1, k_1(D) = D_1, k_1(Q) = Q_1, k_1(C) = C_1. \tag{12}$$

В этой коллинеации окружность ω отображается на себя. В самом деле, известно, что коллинеация отображает кривую 2-го порядка на кривую 2-го порядка (а окружность является кривой 2-го порядка). Кроме того, тремя точками и касательными в двух из этих точек кривая 2-го порядка определяется однозначно. В данном случае $P \to P_1, Q \to Q_1, D \to D_1$ (см. (12)), и при этом k_1 отображает касательные (PC) и (QC) соответственно на (P_1C_1) и (Q_1C_1). Итак, в k_1 $\omega \to \omega$.

Далее, коллинеация k_1 отображает внешнюю для ω область на внешнюю, ибо через всякую внешнюю точку M можно провести к ω две касательные, которые k_1 отобразит на касательные к ω. Соответствующая точка M_1 будет пересечением этих касательных, а стало быть, внешней точкой для ω. Отсюда вытекает, что и внутренняя область для ω (множество T) отображается коллинеацией k_1 на себя.

Теперь заметим, что если точки E, F, M, N лежат на одной прямой, а $k_1(E) = E_1, k_1(F) = F_1, k_1(M) = M_1, k_1(N) = N_1$, то

$$\frac{\overrightarrow{EM}}{\overrightarrow{FM}} : \frac{\overrightarrow{EN}}{\overrightarrow{FN}} = \frac{\overrightarrow{E_1M_1}}{\overrightarrow{F_1M_1}} : \frac{\overrightarrow{E_1N_1}}{\overrightarrow{F_1N_1}}. \tag{13}$$

(Этим равенством выражается инвариантность при коллинеации так называемого двойного отношения четырех точек прямой.) Из (13) получаем

$$\frac{|EM|\cdot|FN|}{|FM|\cdot|EN|} = \frac{|E_1M_1|\cdot|F_1N_1|}{|F_1M_1|\cdot|E_1N_1|}.$$

Если считать, что E и F суть внутренние точки ω, а $\{M, N\} = (EF)\cap\omega$ и при этом $N\dot{E}F$, $E\dot{F}M$, то получим

$$\rho(E,F) = \rho(E_1, F_1).$$

Таким образом, коллинеация k_1 представляет собой для нашей модели перемещение.

В этом перемещении $k_1(A) = A_1$, так как $(PQ) \to (P_1Q_1)$, $(CD) \to (C_1D_1)$, а $(PQ)\cap(CD) = A$. Далее, $k_1(B) = B_1$, поскольку по условию $\rho(A,B) = \rho(A_1,B_1)$, а точка $k_1(B)$ должна лежать на «луче» A_1Q_1 (ибо перемещение сохраняет отношения порядка); на основании же аксиомы III_2 точка $k_1(B)$ — единственная.

Кроме того, в силу «порядковых» свойств перемещений «полуплоскость» (в нашей модели) α_1 с границей (AB) (множество точек сегмента PQD без точек дуги PQ) отображается при k_1 на «полуплоскость» β_1 (сегмент $P_1D_1Q_1$ без дуги P_1Q_1).

Итак, показано существование перемещения k_1, удовлетворяющего аксиоме IV. Другое перемещение k_2 с требуемыми свойствами есть коллинеация, задаваемая четверками точек C, P, Q, D и $C_1=k_2(C)$, $P_1=k_2(P)$, $Q_1=k_2(Q)$, $D_1'=k_2(D)$. Проверка выполнимости аксиомы IV завершена.

Наконец, верна и аксиома параллельности Лобачевского V'. Чтобы в этом убедиться, достаточно взглянуть на рис. 5, на котором «прямые» PM и NQ проходят через точку A, но не имеют общих точек (элементов T) с «прямой» PQ.

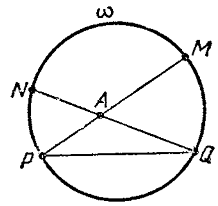


Рис. 5

4. Построив модель плоскости Лобачевского на плоскости Евклида, мы тем самым показали, что геометрия Лобачевского непротиворечива, если непротиворечива геометрия Евклида. Кроме того, мы одновременно убеждаемся и в независимости аксиомы параллельности Евклида (аксиомы V) от остальных аксиом рассматриваемой системы. При этом имеется в виду, что известна модель (арифметическая) геометрии Евклида, в которой выполняется аксиома V.

Литература

1. *Ефимов Н. В.* Высшая геометрия. М., «Наука», 1971.
2. *Делоне Б. Н.* Элементарное доказательство непротиворечивости планиметрии Лобачевского. М., Гостехиздат, 1956.
3 *Костин В. И.* Основания геометрии. М., Учпедгиз, 1948.
4. Геометрия 9. Под ред. З. А. Скопеца. М., «Просвещение».
5. Геометрия 8. Под ред. А. Н. Колмогорова. М., «Просвещение».
6. *Буземан Г., Келли П.* Проективная геометрия и проективные метрики. М., Изд. иностр. лит., 1957.
7. *Абрамов А. М.* Логические основы курса планиметрии. «Математика в школе», 1974, № 5.

Б. М. Поляков
(г. Ташкент)

ИЗ ОПЫТА ОРГАНИЗАЦИИ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ЧЛЕНОВ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ФАКУЛЬТАТИВОВ

На протяжении многих лет в ряде средних школ г. Ташкента мы ведем для учащихся IX—X классов разработанный нами двухгодичный факультативный курс «Избранные вопросы математики — IX, X» (128 ч).

На занятиях мы стремимся показать учащимся, что математика — не скопление правил и формул, не набор головоломок, решаемых какими-то искусственными приемами, а живая непрестанно развивающаяся наука, неразрывно связанная с развитием других областей знаний и человеческого общества. Поэтому в ходе факультативных занятий мы уделяем большое внимание вопросам зарождения и становления некоторых разделов современной математики, истории развития идей, определивших современное содержание того или иного из этих разделов, раскрытию перед учащимися творческого и нравственного облика некоторых выдающихся ученых-математиков, самоотверженно служивших науке и человечеству.

В ходе занятий члены факультатива слушают лекции, участвуют в практических занятиях и дискуссиях, по рекомендованной нами литературе готовят краткие выступления и сообщения, план и тезисы которых предварительно согласовывают с преподавателем.

В начале учебного года члены математического факультатива X класса получают темы докладов, посвященных первому знакомству с определенными разделами математики. На протяжении учебного года, пользуясь материалами лекций, а также рекомендованной нами научно-популярной литературой, они по определенному плану готовят к теоретической конференции развернутый доклад — итог самостоятельной работы по изучению определенного раздела современной математики. Эти доклады красочно оформляются.

Так, например, итоговым занятием математического факультатива десятых классов школы № 147 была математическая конференция на тему «Первое знакомство с современной математикой», на которой каждый докладчик — член факультатива не более чем за 15 минут изложил суть подготовленного им доклада. На листах ватмана заранее были подготовлены чертежи и таблицы, использовавшиеся в докладе. Тезисы докладов и тексты некоторых выступлений были помещены в специальном ученическом сборнике.

Доминирующим в каждом докладе был исторический аспект. Например, в докладе «Первое знакомство с теорией множеств» не повторялись известные из программного материала вопросы, а рассматривалась проблема сравнения бесконечных множеств, отправляясь от которой докладчик рассказал о вкладе Г. Кантора в решение этой проблемы, о значении теории множеств в современной математике, о новых проблемах обоснования математики и аксиоматизации отдельных ее областей, появившихся на базе теории множеств, о возможности по-новому осветить различные вопросы классической математики. Были рассмотрены и парадоксы теории множеств. В заключение докладчик изложил проблему континуум-гипотезу и решение этой проблемы П. Коэном.

Темы других докладов конференции: «Первое знакомство с теорией чисел», «Первое знакомство с кибернетикой» и т. д. Наиболее интересными из них оказались: «Первое знакомство с топологией» и «Первое знакомство с теорией групп». Приведем планы этих докладов и использованную докладчиками литературу.

I. *Первое знакомство с топологией*

1) Примеры, приводящие к понятию предмета топологии.
2) Основные понятия топологии.
   а) Предмет топологии,
   б) простейшие топологические инварианты,
   в) топология поверхностей.
3) Теоретико-множественная топология.
   а) Абстрактная геометрия. Метрические и топологические пространства,

б) о понятии линии,
в) размерность

4) Комбинаторная топология.
а) Некоторые понятия теории групп,
б) фундаментальная группа,
в) группы гомологий,
г) некоторые приложения теории гомологий.

5) Краткий исторический обзор развития топологии.

Литература

Александров П. С., Ефремович В. А. О простейших понятиях современной топологии. М.— Л., ОНТИ, 1935.

Болтянский В. Г., Ефремович В. А. Очерк основных идей топологии. Математическое просвещение. (Новая серия). Вып. 2, 3, 4 и 6-й. М., Физматгиз, 1957, 1958, 1959, 1961.

Делоне Б. Н., Ефремович В. А. Что такое топология? «Природа», 1968, № 3.

Делоне Б. Н., Ефремович В. А. Что такое топология? «Наука и жизнь», 1970, № 8.

Ефремович В. А. Основные топологические понятия. Энциклопедия элементарной математики. Книга 5-я. М., «Наука», 1966.

Курант Р., Роббинс Г. Что такое математика. Глава V. М.— Л., Гостехиздат, 1947.

Нейман А. Радость открытия. М., «Детская литература», 1972.

Стинрод Н., Чинн У. Первые понятия топологии. М., «Мир», 1967.

II. *Первое знакомство с теорией групп*

1) Возникновение проблемы разрешимости алгебраических уравнений в радикалах.

2) Нильс Хенрик Абель, его роль в решении проблемы разрешимости алгебраических уравнений в радикалах.

3) Эварист Галуа, его роль в решении проблемы разрешимости алгебраических уравнений в радикалах.

4) Примеры, приводящие к понятию группы.

5) Аксиоматическое определение группы и некоторые непосредственные следствия.

6) Группы преобразований в геометрии.

7) Группы в алгебре.

8) Группы симметрии.

9) Идея применения теории групп в физике. Аналоги теории Галуа.

10) Задача Шафаревича.

Литература

Александров П. С. Введение в теорию групп. М., Учпедгиз, 1951.

Баумгартнер Людвиг. Теория групп. М.— Л., Гостехиздат, 1934.

Виленкин Н. Я., Яглом И. М. Теория групп и школьная математика. Сб. «Новое в школьной математике». М., «Знание», 1972.

Гроссман М., Магнус В. Группы и их графы. М., «Мир», 1971.

Галуа Эварист. Соч. М., Объединенное научно-техническое издательство НКТП СССР, 1936.

Дальма А. Эварист Галуа — революционер и математик. М., Физматгиз, 1960.

Демидов С. С. У истоков современной алгебры. Серия «Математика, кибернетика». М., «Знание», 1971, № 4.

Инфельд Леопольд. Эварист Галуа. Серия «Жизнь замечательных людей». М., «Молодая гвардия». Вып. 14 (262), 1958.

Оре О. Замечательный математик Нильс Хенрик Абель. М., Физматгиз, 1961.

Сойер У. У. Прелюдия к математике. Изд. 2-е, М., «Просвещение», 1972.

В школе № 50 мы провели для учащихся восьмых классов разработанный нами факультативный курс «Избранные вопросы математики — VIII» (64 ч). Значительная часть вопросов этого факультатива относилась к развитию у учащихся геометрических представлений, включая представления, связанные с элементами неевклидовых геометрий Лобачевского и Римана. Одна из задач нашего эксперимента в этом случае состояла в изучении умений восьмиклассников читать под нашим руководством научно-популярную литературу, информировать о прочитанном и самостоятельно доказывать некоторые предложения, например предложения, эквивалентные V постулату Евклида.

Проведенный нами эксперимент позволяет утверждать следующее:

1) Члены математического факультатива восьмых классов проявляют большой интерес к уяснению первоначальных представлений об элементах геометрии Лобачевского, если учителю удается в доступной и увлекательной форме рассказать о зарождении и развитии геометрических знаний. Они с удовольствием читают отдельные главы или параграфы книг, рекомендуемых учителем, и пересказывают их содержание, но большинство из них затрудняется конспектировать прочитанное или хотя бы набросать краткие тезисы своего выступления. Им посильно осмысливание равноправности V постулата Евклида с предложениями, ему эквивалентными. Они справляются с доказательством некоторых из этих предложений. Их привлекают остроумные поиски решения проблемы V постулата Евклида, выполненные Омаром Хайямом и Насирэтдином Туси.

2) Среди членов математического факультатива девятых классов обычно выделяются те ученики, которые в VIII классе уже участвовали в занятиях факультатива или математического кружка. Они охотно передают свой опыт новичкам. Тактичный индивидуальный подход учителя к членам математического факультатива девятых классов при распределении заданий, систематический контроль за их самостоятельной работой и своевременная, сочетающаяся с требовательностью, помощь при появлении у них затруднений позволяют выявить тех, у кого окреп интерес к математике, к самостоятельным занятиям ею — именно из таких учащихся «формируются кадры» будущих членов математического факультатива десятых классов.

Наши наблюдения также показали, что приглашение членов математического факультатива девятых классов в качестве гостей на теоретическую конференцию десятых классов весьма благотворно действует на девятиклассников. Многие из них уже сразу после конференции обращаются с просьбой дать задание для доклада в X классе.

3) Самостоятельная работа членов математического факультатива десятых классов по изучению некоторых разделов современной математики при надлежащей подготовке учащихся в IX классе вполне им посильна. Она при систематическом, требовательном, квалифицированном и доброжелательном руководстве со стороны непрестанно занимающегося самообразованием учителя значительно повышает интерес учащегося к науке; учит вдумчиво работать с книгой, воспитывает любознательность, собранность и настойчивость в достижении цели, развивает математическое мышление, математическую речь, расширяет математический кругозор, позволяет «увидеть» математику в зарождении, развитии, становлении и перспективе, знакомит с героями математической науки — людьми высоких научных и общественных идеалов. Такая работа помогает раннему выявлению математических талантов.

Эксперимент

В. Ф. Волгина
(г. Южно-Сахалинск)

МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ КОМБИНАТОРИКИ НА ГРАФАХ

Привлечение к решению комбинаторных задач метода графового моделирования помогает избежать формализма в знаниях учащихся.

Введем необходимые для данной работы термины теории графов. Под графом понимается схема, состоящая из точек (вершин — элементов графа) и отрезков, их соединяющих (ребер графа). Мы используем в данной статье графы-деревья. На рис. 1 представлен пример графа-дерева, имеющего шесть вершин: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Ребрами являются отрезки: 1—2, 1—3, 2—4, 2—5, 2—6. Вершины графа расположены на различных уровнях, которые называются ступенями графа. Граф на рис. 1

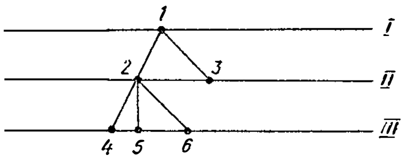


Рис. 1

имеет три ступени: I, II, III. Вершины, которые не продолжают далее граф, называются конечными, их на рисунке четыре: 3, 4, 5, 6. Любой путь от первой вершины до конечной называется ветвью графа. Например, путь 1—2—5 — одна из ветвей графа. Совокупность ребер, исходящих из одной вершины, образует пучок. Так, предложенный граф имеет два пучка: при вершине 1 и вершине 2. Ранг пучка определяется по числу ребер, содержащихся в пучке. Ранг пучка при вершине 1 равен двум, а при вершине 2 — трем. Пучок, исходящий из первой вершины, называют 0-пучком. По рангам пучков графы делятся на однородные, если все пучки одного ранга, и неоднородные, если пучки разного ранга. Граф на рис. 1 неоднороден. Кроме того, различают графы полные, если все конечные вершины графа расположены на последней ступени, и неполные, если не все конечные вершины графа расположены на последней ступени. На рис. 1 граф неполный, так как вершина 3, являясь конечной, не расположена на третьей ступени.

Суть метода графового моделирования решения элементарных комбинаторных задач заключается в том, что устанавливается взаимно-однозначное соответствие между:

1) числом элементов множества и рангом 0-пучка,
2) числом элементов в выборке и числом ступеней,
3) числом выборок и числом конечных элементов графа, расположенных на последней ступени.

При этом особенности выборки определенного вида учитываются в конфигурации графа. Так, 0-пучок характеризует, сколькими способами можно выбрать первый элемент в выборку, пучки на второй ступени показывают, сколькими способами за первым выбранным элементом можно поставить второй и т. д. Каждая ветвь графа решения комбинаторной задачи наглядно представляет определенную выборку, а все они дают перебор всех возможных выборок в данной задаче.

Основные понятия и формулы

Принцип сложения. Если два действия A и B взаимно исключают друг друга, причем действие A может быть выполнено k способами, а действие B — n способами, то какое-либо из них (или A, или B) может быть выполнено $(k+n)$ способами.

При отработке этого принципа следует подчеркнуть, что когда говорят о сумме действий, то действия соединяются союзом «или». Дадим пример, иллюстрирующий принцип сложения.

Задача. *Пассажир может сесть или в первый вагон на пять свободных мест, или во второй вагон на три свободных места. Сколькими способами пассажир может разместиться в поезде?*

Решение. За действие A обозначим посадку в первый вагон, оно может быть выполнено пятью способами. За действие B обозначим посадку во второй вагон, оно может быть выполнено тремя способами. За действие C обозначим посадку в поезд. Пассажир может сесть или в первый, или во второй вагоны, т. е. должно выполняться или действие A, или действие B. Следовательно, $C=A+B$. Пассажир может разместиться в поезде восемью способами.

Проиллюстрируем принцип сложения на графе. Каждое из действий A или B может быть изображено пучком, содержащим столько вершин, сколькими способами может быть выполнено каждое действие. Графы действий A и B изображены на рис. 2,*а*, *б*. Объединим их в один пучок (рис. 2,*в*). Число конечных элементов полученного графа дает число способов выполнения действия C.

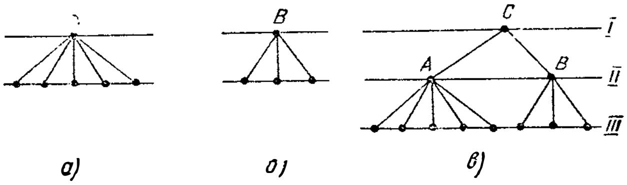


Рис. 2

Итак, чтобы построить граф действия $C=A+B$, необходимо графы действий A и B объединить в один пучок. Число конечных вершин построенного графа дает число способов выполнения действия C. Правило можно распространить на любое конечное число слагаемых.

Принцип умножения. Пусть необходимо выполнить одно за другим какие-то два действия A и B, причем действие A может быть выполнено n способами, а действие B k способами. Тогда оба действия (и A, и B) могут быть выполнены nk способами.

Задача. *Сколькими способами можно составить разведгруппу из одного офицера и одного солдата, если имеются два офицера и три солдата?*

Решение. За действие A примем выбор офицера. Оно может быть выполнено двумя способами, т. е. $n=2$. За действие B примем выбор солдата. Оно может быть выполнено тремя способами, $k=3$. За действие C примем составление разведгруппы. Оно произойдет, если будет выполнено и действие A и действие B, поэтому $C=AB$. Таким образом, разведгруппу можно составить $nk=2\cdot 3=6$ способами.

Проиллюстрируем принцип умножения на графе. Действия A и B можно представить пучками с двумя

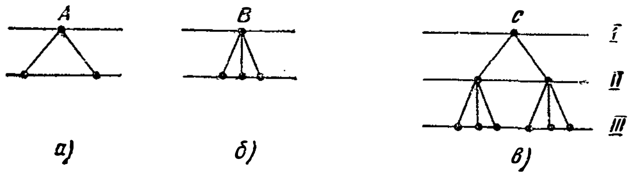


Рис. 3

и тремя связями соответственно (рис. 3,*а*, *б*). Действие $C=AB$ можно изобразить графом, полученным из графов действий A и B. В конце каждой конечной вершины графа A строят полный граф действия B (рис. 3,*в*). Число всех конечных элементов построенного графа показывает, сколькими способами может быть выполнено действие C.

Итак, чтобы построить граф действия $C=AB$, необходимо в каждой конечной вершине графа действия A построить полный граф действия B. Число полученных конечных вершин построенного графа дает число способов получения $C=AB$. Данный принцип можно распространить на любое конечное число множителей.

Определение 1. Под k-выборкой из множества $M=\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ понимается выбор $N=\{a_{i_1}, a_{i_2}, \ldots, a_{i_k}\}$, где $a_{i_\gamma} \in M$.

Выборки могут быть с повторениями, если в них один и тот же элемент входит более одного раза, и без повторений, если они состоят из различных элементов. Кроме того, выборка может быть упорядоченной, если в ней установлен порядок элементов, и неупорядоченной, если порядок элементов в ней не имеет значения. Это определяется условием задачи.

Определение 2. Упорядоченная k-выборка из n-множества[1], элементы в которой не повторяются, называется размещением из n элементов по k.

Число размещений обозначается A_n^k.

Определение 3. Упорядоченная n-выборка из n-множества называется перестановкой из n элементов. Число перестановок обозначается P_n.

Определение 4. Неупорядоченная k-выборка из n-множества, элементы в которой не повторяются, называется сочетанием из n элементов по k.

Число сочетаний обозначается C_n^k.

Определение 5. Упорядоченная k-выборка из n-множества, элементы в которой повторяются, называется размещением с повторениями из n элементов по k.

Число размещений с повторениями обозначается $\overline{A}_n^k$.

Определение 6. Упорядоченная n-выборка из n-множества, содержащего несколько групп одинаковых элементов, называется перестановкой с повторениями из n элементов.

Число перестановок с повторениями обозначается $\overline{P}_n$.

Определение 7. Неупорядоченная k-выборка из n-множества, элементы которой могут повторяться, называется сочетанием с повторениями из n элементов по k.

Число сочетаний с повторениями обозначается $\overline{C}_n^k$.

Размещения с повторениями

Задача 1. *Сколько трехзначных чисел можно написать с помощью цифр* 1, 2?

[1] Под n-множеством понимают множество, содержащее n элементов.

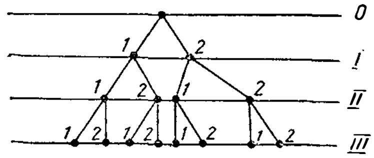


Рис. 4

Решение. Обозначим A_1 — выбор первой цифры в число, оно может быть выполнено двумя способами (или 1, или 2), A_2 — выбор второй цифры в число, оно может быть выполнено также двумя способами, A_3 — выбор третьей цифры в число — может быть выполнено двумя способами. Пусть A — составление трехзначного числа. Ясно, что $A=A_1A_2A_3$. Поэтому граф действия A получим по принципу умножения графов действий A_1, A_2, A_3, каждый из которых содержит пучки с двумя ребрами (рис. 4). Каждая ветвь построенного графа-дерева — искомое трехзначное число. Таких чисел будет столько, сколько ветвей, а число ветвей равно числу конечных элементов графа, т. е. $2\cdot 2\cdot 2=8$.

Задача 2. *Сколько k-размещений с повторениями из n-множества можно составить?*

Решение. Обозначим A_1 — выбор первого элемента из n-множества в k-размещение, оно может быть выполнено n способами, поэтому граф данного действия содержит n ребер. Через A_2 обозначим выбор второго элемента в размещение. Так как элементы могут повторяться, то данное действие может быть выполнено также n способами, следовательно, граф действия A_2 будет содержать n ребер. Рассуждаем аналогично для действий A_3, A_4, $\ldots$, A_{k-1}. Пусть A_k — выбор k-го элемента в размещение. Оно может быть выполнено n способами, поэтому граф действия A_k будет аналогичен графам предыдущих действий и содержать n связей.

Пусть A — составление размещения с повторениями, содержащего k элементов из данного n-множества. Чтобы выполнить действие A, необходимо выбрать и 1-й, и 2-й, $\ldots$, и k-й элементы. Следовательно, $A=A_1A_2, \ldots, A_k$. Поэтому граф действия A будет получен из графов действий A_1, A_2, $\ldots$, A_k по принципу умножения графов. Число конечных элементов построенного графа дает число размещений с повторениями. Оно равно $n\cdot n\cdot\ldots\cdot n=n^k$ рис. 5).

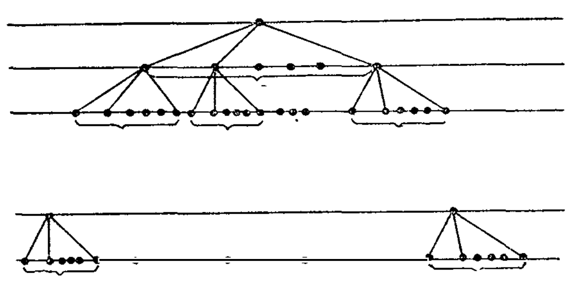


Рис. 5

Итак, чтобы подсчитать число размещений с повторениями $\overline{A}_n^k$, нужно построить полный однородный граф $c(k+1)$ ступенью и рангом пучков, равным n. Число конечных элементов построенного графа равно числу размещений с повторениями, т. е. $\overline{A}_n^k = n^k$.

Размещения без повторений

Задача 1. *Сколько различных двубуквенных «слов» можно составить из карточек, на которых написаны 4 буквы: a, b, c, d?*

Решение. Пусть A — выбор первой буквы в «слово», оно может быть выполнено четырьмя способами, следовательно, пучок данного действия содержит 4 ребра. Через B обозначим выбор второй буквы в «слово», оно может быть выполнено только тремя способами, так как одна буква уже занята, следовательно, пучок действия B содержит 3 ребра. Обозначим C составление двубуквенного «слова». Оно может быть выполнено, если выполнены действия и A, и B, т. е. $C=AB$. Поэтому граф действия C получается из графов действий A и B по принципу умножения (рис. 6).

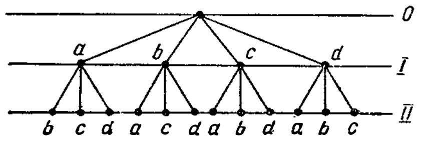


Рис. 6

Число конечных элементов построенного графа дает число размещений без повторений A_4^2 и равно 12, т. е. $A_4^2 = 12$.

Задача 2. *Найти число k-размещений без повторений из n-множества.*

Решение. Пусть A_1 — выбор первого элемента из n-множества в k-размещение. Оно может быть выполнено n способами, поэтому граф действия A_1 будет содержать n ребер. A_2 — выбор второго элемента из n-множества в k-размещение — может быть выполнен $(n-1)$ способом, так как один элемент уже взят на первое место. Граф действия A_2 содержит $(n-1)$ ребро. Рассуждаем аналогично для действий $A_3, A_4, \ldots, A_{k-1}$. Действие A_k — выбор k-го элемента из n-множества в размещение — может быть выполнено $(n-k+1)$ способами, поэтому граф действия A_k будет содержать $(n-k+1)$ ребро. Пусть A — составление k-размещения из n-множества. Чтобы получить действие A, надо выполнить и действие A_1, и действие $A_2, \ldots$, и действие A_k, т. е. $A=A_1A_2, \ldots, A_k$. Поэтому граф действия A можно получить из графов действий $A_1, A_2, \ldots, A_k$ по принципу умножения графов.

Число конечных элементов построенного графа равно $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$. При этом каждая ветвь построенного графа представляет размещение k элементов без повторения из n-множества (рис. 7).

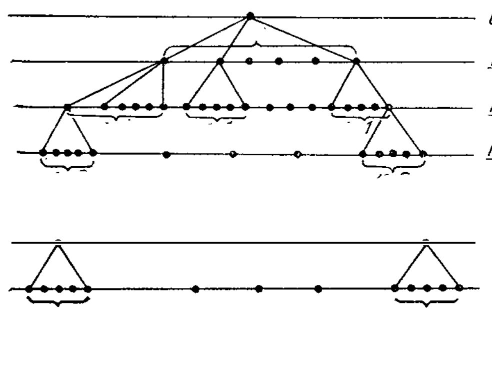


Рис. 7

Итак, чтобы подсчитать число размещений без повторений A_n^k, нужно построить граф с $(k+1)$ ступенью, ранги пучков в котором уменьшались бы на 1 от n на первой ступени до $(n-k+1)$ на последней ступени. Число конечных элементов построенного графа равно $n(n-1)\ldots(n-k+1)$, что равно A_n^k, т. е. $A_n^k = n(n-1)\ldots(n-k+1)$.

Перестановки без повторений

Задача 1. *Сколькими способами можно расположить на полке три книги?*

Решение. Пусть A_1 — поставить книгу на первое место. Это может быть выполнено тремя способами, поэтому граф действия A_1 содержит три ребра. A_2 — поставить книгу на второе место — может быть выполнено двумя способами, так как одна книга уже поставлена. Следовательно, граф действия A_2 содержит два ребра. A_3 — поставить книгу на третье место — может быть выполнено одним способом, так как две книги уже стоят, следовательно, граф действия A_3 содержит одно ребро. Действие A — установить на полке три книги. Для его выполнения необходимо поставить и 1-ю, и 2-ю, и 3-ю книги, т. е. $A=A_1A_2A_3$. Следовательно, граф действия A можно получить по принципу умножения графов действий A_1, A_2, A_3. Число конечных элементов построенного графа равно 6 (рис. 8) и в то же время равно числу перестановок без повторений, т. е. $P_3 = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$.

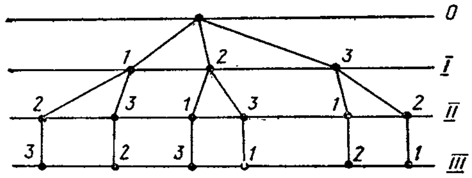


Рис. 8

Итак, число перестановок без повторений можно подсчитать по числу конечных элементов графа, имеющего $(n+1)$ ступень, n ребер в пучке на первой ступени, $(n-1)$ — на второй ступени, $(n-2)$ — на третьей ступени, ..., 2 ребра — на n-й ступени, 1 ребро — на $(n+1)$ ступени. Оно равно $1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot (n-2)(n-1)n = n!$, т. е. $P_n = n!$

Сочетания без повторений

Задача 1. *Сколько можно составить трехэлементных подмножеств из элементов множества $M = \{a, b, c, d\}$?*

Решение. Первый элемент в выборку может быть выбран четырьмя способами: a, b, c, d, следовательно, граф будет содержать 4 ребра (рис. 9). Его изображение дано в 0-пучке. На первой ступени поместим пучки, показывающие, сколькими способами можно добавить к выбранному первому элементу вторые элементы, чтобы при этом получились подмножества из двух элементов. К элементу a вторым элементом можно доба-

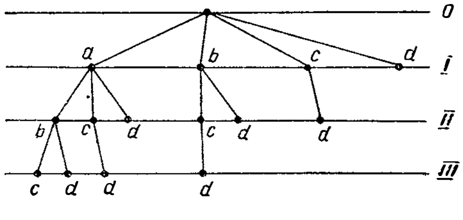


Рис. 9

вить любой из оставшихся элементов b, c, d (эти элементы в записи множества стоят после элемента a). Поэтому пучок при элементе a будет содержать три ребра. К элементу b вторым элементом в подмножество можно добавить только два элемента (c и d). Элемент a брать нельзя, так как в противном случае мы получили бы подмножество из элементов b и a, но в пучке при a оно уже было. Следовательно, пучок при b будет содержать две связи (c и d), т. е. столько, сколько элементов в записи множества M после элемента b. Аналогично рассуждаем при выборе второго элемента к элементу c. Вторым к нему можно добавить только элемент d, чтобы получился новый набор двух элементов. Следовательно, пучок при элементе c будет содержать один элемент. Получили граф с тремя ступенями. Множество ветвей данного графа, дошедших до второй ступени, дают всевозможные двухэлементные подмножества множества M. Чтобы получить трехэлементные подмножества, необходимо к выбранным двум элементам добавить третий. К ветви $a - b$ можно добавить только два элемента: c, d. Обращаем внимание на то, что пучок при элементе b на второй ступени включает элементы, которые содержатся в данном множестве после элемента b. К элементу c на второй ступени можно добавить только элемент d, а к элементу d нельзя добавить ни одного элемента, чтобы получились новые подмножества. Число ветвей графа, дошедших до третьей ступени, равно числу всевозможных трехэлементных подмножеств множества M. Данный граф наглядно представил и все трехэлементные сочетания без повторений множества из четырех элементов.

Аналогично может быть построен граф для подсчета числа сочетаний без повторений для любого случая. В связи со сложностью вывода формулы для подсчета C_n^k с помощью графовых моделей данную формулу можно получить традиционным путем.

Итак, число сочетаний без повторений C_n^k равно числу конечных элементов, расположенных на последней ступени графа, имеющего $(k+1)$ ступень, n элементов в 0-пучке, ранги остальных пучков равны числу элементов множества, расположенных после данного элемента.

Сочетания с повторениями

Задача 1. ***Сколькими способами можно выбрать три пирожных, если имеются два сорта: наполеон и трубочка?***

Графовая модель решения данной задачи дана на рис. 10. Построение графа решения этой задачи анало-

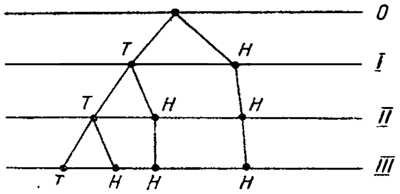


Рис. 10

гично построению графа для подсчета числа сочетаний без повторений. Однако так как элементы в рассматриваемой выборке могут повторяться, то в пучки будут входить элементы, расположенные не после данного элемента во множестве, а начиная с этого элемента. Например, пучок элемента *т* на второй ступени содержит не один элемент, как это было бы в случае сочетаний без повторений, а два элемента: *т*, *н*.

Итак, число сочетаний с повторениями равно числу конечных элементов графа, имеющего $(k+1)$ ступень, n элементов в 0-пучке, ранги остальных элементов равны числу элементов в множестве, начиная с того элемента, для которого строится пучок.

В связи со своеобразием перестановок с повторениями, заключающемся в том, что множество, из которого они составляются, состоит из различных групп одинаковых элементов, выявить общие свойства структуры графа перестановок с повторениями нам не удалось.

Подводя итог сказанному, отметим преимущества графового решения комбинаторных задач перед традиционным:

1) иллюстрируется динамика решения комбинаторных задач;

2) наглядно представляется перебор выборок в каждой задаче. Имеется возможность подсчитать число выборок не по формулам, а непосредственно по графу;

3) можно более глубоко вскрыть процесс решения задачи и этим способствовать преодолению формализма в знаниях учащихся.

Графовый метод имеет и отрицательные стороны:

1) его целесообразно применять при небольшом числе элементов во множестве и в выборке. В противном случае граф решения будет очень громоздким;

2) сравнительно легко строятся графы для подсчета A_n^k, $\overline{A}_n^k$, P_n, намного сложнее — C_n^k, $\overline{C}_n^k$, $\overline{P}_n$. Поэтому употребление графового метода решения задач в процессе обучения должно в основном употребляться в период отработки понятий выборки данного вида.

Внеклассная работа

В. Л. Гутенмахер, Ж. М. Раббот
(Москва)

ВЗМШ В ПОМОЩЬ УЧИТЕЛЯМ СТАРШИХ КЛАССОВ

В соответствии с установившейся традицией вот уже в четырнадцатый раз Всесоюзная заочная математическая школа АПН СССР при Московском университете (ВЗМШ) приглашает учителей математики принять участие в работе групп «Коллективный ученик ВЗМШ».

Группы «Коллективный ученик ВЗМШ» — это математические кружки, работающие под руководством учителей математики по программе и пособиям ВЗМШ.

Для организации группы учителю достаточно не позднее 20 сентября 1977 г. прислать на имя директора ВЗМШ (адрес в конце статьи) заявление, заверенное директором школы, в котором надо указать список членов кружка. Учащиеся группы должны в 1977/78 учебном году обучаться в VIII или IX классе (для них имеется соответственно трех- или двухгодичная программа).

Программа ВЗМШ тесно связана со школьной и с программой факультативных занятий. Как показал многолетний опыт, занятия в таких группах приносят большую пользу не только школьникам, но и руководящим занятиями учителям, особенно сейчас, в период введения новой школьной программы.

Согласно «Положению о ВЗМШ», утвержденному Министерством просвещения СССР, проведение занятий *в группах «Коллективный ученик ВЗМШ» может* оплачиваться школами как факультативные занятия.

После зачисления в ВЗМШ группа «Коллективный ученик» регулярно получает учебно-методические пособия. С их помощью учитель проводит занятия кружка, затем кружок коллективно выполняет контрольное задание по данной теме и высылает его в ВЗМШ. Там работа проверяется и вместе с рецензией и рекомендациями высылается обратно учителю.

В пособии по каждой теме приводится теория и разбирается ряд задач. Контрольное задание содержит набор обязательных упражнений и дополнительную часть из более трудных, но интересных задач. Кроме того, предлагается ряд необязательных заданий.

Помимо пособий по выполнению заданий учителям предлагаются специальные методические разработки по изучению отдельных, наиболее трудных тем программы. Эти разработки помимо методических рекомендаций содержат решения контрольных задач.

Кружкам, выполнившим все задания, выдаются удостоверения об окончании ВЗМШ.

Вообще работа с учителями постоянно стоит в центре внимания работников ВЗМШ, принося большую пользу обеим сторонам. Задания и пособия ВЗМШ непрерывно дорабатываются с учетом замечаний и пожеланий учителей и школьников, в программе появляются все новые темы. В создании методических разработок для руководителей групп «Коллективный ученик ВЗМШ» принимает участие большой коллектив методистов ВЗМШ и математиков Московского университета.

Помимо групп «Коллективный ученик» в ВЗМШ имеется индивидуальная форма обучения школьников. Ниже мы публикуем условия приема и задачи вступительной контрольной работы для семиклассников. Просим учителей рекомендовать наиболее способным из учеников школы попробовать свои силы в конкурсе.

Вниманию семиклассников!

Всесоюзная заочная математическая школа Академии педагогических наук СССР при Московском университете объявляет прием учащихся. В школу принимаются учащиеся седьмых классов. Школьники, проживающие в Москве, Ленинграде и их ближайших пригородах, в ВЗМШ не принимаются.

Занятия начнутся с 1 сентября 1977 г. Обучение в школе бесплатное. Учащиеся, принятые в школу, будут регулярно получать задания, которые содержат объяснения теоретических вопросов и задачи для решения. Выполненные задания будут проверяться преподавателями ВЗМШ — студентами, аспирантами и преподавателями МГУ и других университетов и институтов, при которых организованы филиалы ВЗМШ.

Предлагаем задачи, которые служат вступительной контрольной работой в ВЗМШ. Желающие принять участие в конкурсе должны выслать решения этих задач не позднее 20 марта 1977 г. После проверки работ (примерно в июле 1977 г.) всем приславшим работы будут сообщены результаты: зачислены они в ВЗМШ или нет. Преимуществом при зачислении пользуются школьники, проживающие в сельской местности и в рабочих поселках.

Хотя некоторые из вступительных задач по внешнему виду отличаются от обычных школьных, для их решения не требуется никаких дополнительных знаний по математике.

Для того чтобы быть принятым в школу, не обязательно решить все задачи без исключения. При оценке работы будет учитываться не только количество решенных задач, но и качество решения. Решение каждой задачи должно быть обосновано. Ответ без всяких объяснений может быть не засчитан. Если в задаче возможны несколько разных ответов, то надо указать их все.

Работа должна быть выполнена на русском языке в ученической тетради в клетку. Вступительные работы обратно не высылаются и не рецензируются.

Просим при пересылке не сворачивать тетрадь в трубку. В конверт вместе с тетрадью нужно вложить листок бумаги размером 14×6 см с написанным на нем полным почтовым адресом отправителя (мы наклеим его на конверт, когда будем посылать ответ).

На обложку тетради надо наклеить лист клетчатой бумаги, разграфив и заполнив его по следующему образцу (иначе работа проверяться не будет):

Область	*Калужская*
Фамилия, имя	*Иванов Петр*
Год рождения	1963
Класс	VII
Школа (полное название)	*Средняя школа* № 1 *г. Сухиничи*
Фамилия, имя, отчество учителя математики	*Никаноров Владимир Алексеевич*
Место работы и должность родителей	*Отец — шофер автобазы № 3* *Мать — домашняя хозяйка*
Полный почтовый адрес	*г. Сухиничи, ул. Ленина д. 3, кв. 7*

Результаты проверки

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

Школьники, проживающие в Архангельской, Калининградской, Ленинградской, Мурманской, Новгородской и Псковской областях, Коми и Карельской АССР, Белорусской, Латвийской, Литовской и Эстонской ССР, должны высылать свои работы по адресу: *Ленинград, П-228, ул. Савушкина,* 61. *Специнтернат при ЛГУ, ЗМШ. На конкурс.*

Учащимся, проживающим в Воронежской, Белгородской, Тамбовской, Курской и Липецкой областях, следует высылать работы по адресу: *г. Воронеж, Университет, ФЗМШ. На конкурс.*

Школьникам, проживающим в Казахской ССР, надо направлять свои работы по адресу: *Казахская ССР, г. Уральск, пединститут, физмат, кафедра высшей алгебры, ЗМШ. На конкурс.*

Ребятам, проживающим в остальных областях РСФСР и других союзных республиках, следует отправлять работы по адресу: 117234, *Москва* В-234, *МГУ, мехмат, ВЗМШ. На конкурс.*

Задачи вступительной контрольной работы в ВЗМШ в 1977 г.

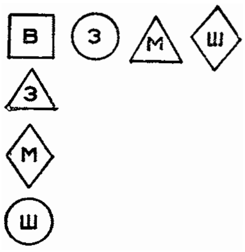
1. В равенстве двух дробей, числители и знаменатели которых — двузначные числа, цифры заменены буквами: одинаковые — одинаковыми, разные — разными:

$$\frac{КУ}{РЕ} = \frac{КА}{КУ}.$$

Какую цифру означает каждая из букв (достаточно привести все возможные ответы)?

2. Дан прямоугольник $ABCD$. Найдите множество точек M, для которых $|MA| + |MB| = |MC| + |MD|$.

3. Дополнить табличку 4×4 (см. рис.) буквами В, З, М, Ш, обвести их рамками четырех типов (квадрат, ромб, круг, треугольник) и раскрасить их в четыре цве-



та так, чтобы выполнялись следующие условия: в каждой строке и в каждом столбце должны встречаться все буквы, все цвета и все типы рамок, при этом каждая буква должна быть написана по разу каждым цветом и рамка каждого типа должна содержать каждую букву и каждый цвет (достаточно нарисовать правильную картинку).

4. В прямоугольном треугольнике a и b — длины его катетов, c — длина гипотенузы, h — длина высоты, опущенной на гипотенузу. Докажите, что $c+h>a+b$.

5. Найдите все решения системы уравнений

$$\begin{cases} x^2 = y + z, \\ y^2 = z + x, \\ z^2 = x^2 + y^2. \end{cases}$$

6. Даны две непересекающиеся окружности. Существует ли вне окружностей такая точка, что всякая прямая, проходящая через нее, пересекает хотя бы одну из этих окружностей?

7. Автомобиль и велосипедист выехали одновременно из A в B. Проехав треть пути, велосипедист остановился и тронулся лишь тогда, когда автомобилю осталось пройти треть пути до B. Автомобиль, доехав до B, без остановки поехал обратно в A. Кто приедет раньше: автомобиль в A или велосипедист в B?

8. Известно, что числа 2077 и 100 при делении на натуральное число a дают одинаковые остатки. Найдите число a.

9. Большой прямоугольник разбит на клетки 1×1 см. Внутри каждой клетки написано число. Известно, что сумма всех чисел в каждой горизонтальной строчке равна 1, а в каждом вертикальном столбике — 2. Может ли площадь прямоугольника быть равна 1976 см²?

10. Несколько ящиков весят вместе 10 т, причем каждый из них весит не больше одной тонны. Какое наименьшее количество трехтонок заведомо достаточно, чтобы увезти этот груз?

И. А. Кушнир
(г. Киев)

ЭТЮД О ВПИСАННОЙ ПОЛУОКРУЖНОСТИ

Назовем полуокружность, находящуюся внутри треугольника, вписанной в треугольник, если она касается двух его сторон, а ее диаметр принадлежит третьей его стороне.

Пусть O_1 — центр полуокружности принадлежит стороне BC, а F_1 и F_2 — точки ее касания с двумя другими сторонами треугольника (рис. 1). Так как углы CF_1O_1 и BF_2O_1 прямые, то углы ABC и ACB острые, а это значит, что три полуокружности можно вписать только в остроугольный треугольник.

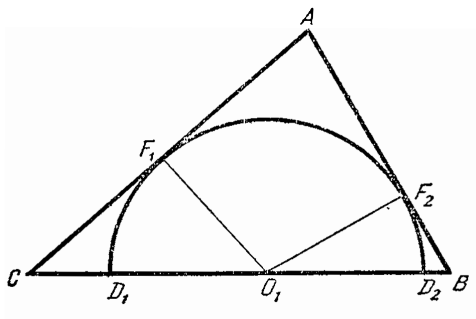


Рис. 1

1. *Рассмотрим треугольник $F_1H_1F_2$, где H_1 — основание высоты AH_1* (рис. 2). *Докажем, что биссектриса угла $F_1H_1F_2$ принадлежит высоте AH_1.*

Доказательство. Так как $\widehat{O_1F_1A} = \widehat{O_1F_2A} = 90°$, то точки O_1, F_1, A, F_2 принадлежат окружности с диаметром O_1A. Поскольку $\widehat{AH_1O_1} = 90°$, то этой же окружности принадлежит и точка H_1, а треугольник $H_1F_1F_2$ будет вписанным в нее. Отрезок O_1A принадлежит оси симметрии отрезка F_1F_2, точка A — рассматриваемой окружности; следовательно, отрезку AH_1 принадлежит биссектриса треугольника $F_1H_1F_2$, проведенная из точки H_1.

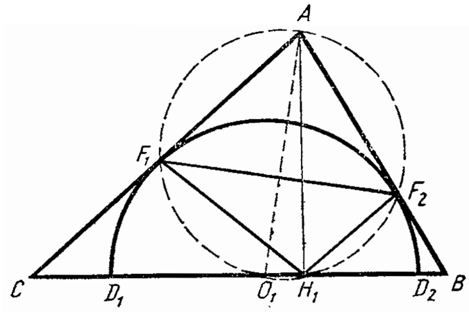


Рис. 2

Следствие:

$$\widehat{F_1H_1C} = \widehat{F_2H_1B}. \qquad (1)$$

2. *Рассмотрим множество треугольников с общей стороной F_1F_2 и с третьей вершиной, принадлежащей диаметру D_1D_2 полуокружности* (рис. 3). *Докажем, что в полученном множестве треугольников треугольник $F_1H_1F_2$ будет иметь наименьший периметр.*

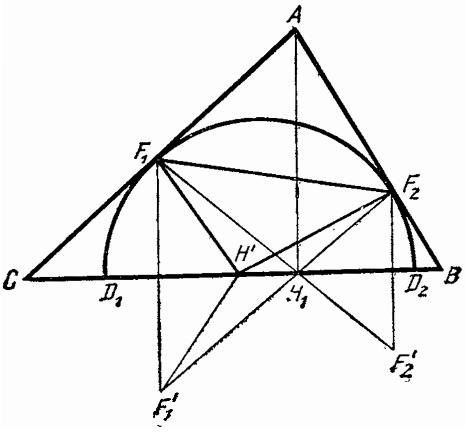


Рис. 3

Для доказательства этого свойства рассмотрим лемму «Точка, симметричная одной из двух вершин (F_1 или F_2) треугольника $F_1H_1F_2$ относительно диаметра D_1D_2, будет расположена с двумя другими вершинами этого треугольника на одной прямой».

Возьмем, например, точку F_1', симметричную точке F_1 относительно диаметра D_1D_2 (рис. 3). По свойству симметрии и следствию (1) получим

$$\widehat{F_1'H_1C} + \widehat{CH_1F_1} + \widehat{F_1H_1F_2} = \widehat{CH_1F_1} +$$

$$+ \widehat{F_2H_1B} + \widehat{F_1H_1F_2} = 180°.$$

Аналогично доказывается лемма для точки F_2', симметричной точке F_2 относительно диаметра D_1D_2. Заметим для дальнейшего, что

$$[F_1'F_2] \cap [F_2'F_1] = H_1. \qquad (2)$$

Теперь докажем рассматриваемое свойство. Пусть H' — произвольная точка диаметра D_1D_2 такая, что $H' \neq H_1$. Обозначим периметры треугольников $F_1H_1F_2$ и $F_1H'F_2$ соответственно через P и P'. Тогда

$$P = |F_1F_2| + |F_2F_1'|,$$

$$P' = |F_1F_2| + |F_1'H'| + |H'F_2|$$

и, следовательно, $P' > P$.

3. *Если провести касательные к дуге F_1F_2* (рис. 4) *в любой из ее точек (кроме точек F_1 и F_2), то получим множество μ треугольников, у которых одна вершина общая (точка A), а две другие — точки пересечения касательной к дуге F_1F_2 со сторонами AB и AC. Докажем, что в этом множестве наибольшую площадь будет иметь треугольник, у которого сторона точкой касания разделится пополам.*

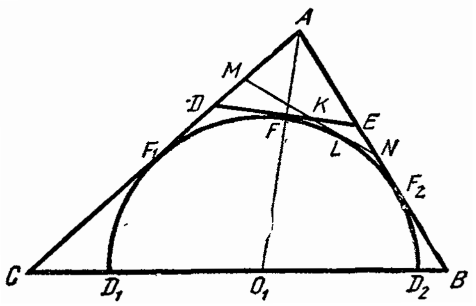


Рис. 4

Обозначим точку пересечения дуги F_1F_2 с биссектрисой угла CAB через F. В точке F проведем касательную к дуге F_1F_2, которая пересечет стороны AC и AB соответственно в точках D и E. Докажем, что площадь треугольника ADE больше, чем, например, площадь треугольника AMN, где $[MN]$ — отрезок касательной к дуге F_1F_2, проведенной через произвольную ее точку L. Рассматриваемые треугольники ADE и AMN имеют общую часть — четырехугольник $AEKM$ ($K = [DE] \cap [MN]$). Сравним площади треугольников MKD и EKN. Так как углы при вершине K конгруэнтны, то сравним стороны KE и MK, NK и KD.

Покажем, что $|KE| < |MK|$ и $|NK| < |KD|$. Действительно,

$$|KE| = |FE| - |FK| = |DF| - |FK| =$$

$$= |DF| - |KL| = |DF_1| - |KL| < |MF_1| - |KL| =$$

$$= |ML| - |KL| = |MK|,$$

т. е. $|KE| < |MK|$.

Далее, $|NK| = |NL| + |LK| = |NF_2| + |LK| = |NF_2| + |KF| < |EF_2| + |KF| = |EF| + |FK| = |DK|$, т. е. $|NK| < |KD|$.

Итак, $S_{AMN} < S_{ADE}$.

Аналогично можно доказать, что таким же свойством обладает и множество μ_1 треугольников, у которых одна вершина общая (точка B или C), а две другие — точки пересечения касательной к дуге D_1F_1, или к дуге D_2F_2, с двумя сторонами треугольника ABC.

4. Метрические соотношения. *Обозначим радиусы полуокружностей, вписанных в остроугольный треугольник ABC через R_a, R_b, R_c (центры этих полуокружностей принадлежат соответственно сторонам BC, AC, AB). Имеют место формулы:*

$$R_a = \frac{2S}{2p-a}, \quad R_b = \frac{2S}{2p-b}, \quad R_c = \frac{2S}{2p-c}, \qquad (3)$$

где S, p — соответственно площадь и полупериметр треугольника ABC;

$$\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b} + \frac{1}{R_c} = \frac{2}{r}, \qquad (4)$$

где r — радиус окружности, вписанной в треугольник ABC;

$$R_a = \frac{2R}{\left(\operatorname{cosec}\widehat{B} + \operatorname{cosec}\widehat{C}\right)\operatorname{cosec}\widehat{A}}, \qquad (5)$$

где R — радиус окружности, описанной около треугольника ABC.

Докажем формулы (3). Очевидно, что (рис. 1)

$$S = S_{AO_1C} + S_{AO_1B} = \frac{1}{2} R_a b +$$

$$+ \frac{1}{2} R_a c = \frac{1}{2} R_a (b + c),$$

где $b = |AC|$, $c = |AB|$.

Отсюда

$$R_a = \frac{2S}{2p-a}.$$

Аналогично доказываются два другие равенства из (3).

Докажем формулу (5). Очевидно, что $|BC| = |BO_1| + |CO_1|$, но

$$|BO_1| = \frac{R_a}{\sin\widehat{B}}, \quad |CO_1| = \frac{R_a}{\sin\widehat{C}}, \quad |BC| = 2R\sin\widehat{A}$$

($\widehat{A}$, $\widehat{B}$, $\widehat{C}$ — величины углов $\triangle ABC$).

Тогда $2R\sin\widehat{A} = R_a\left(\operatorname{cosec}\widehat{B} + \operatorname{cosec}\widehat{C}\right)$, или

$$R_a = \frac{2R}{\left(\operatorname{cosec}\widehat{B} + \operatorname{cosec}\widehat{C}\right)\operatorname{cosec}\widehat{A}}.$$

С помощью метрических соотношений докажем новые свойства полуокружности.

5. *Пусть O_1 — центр полуокружности, вписанной в треугольник ABC, принадлежит стороне BC. Докажем, что прямые BF_1 и CF_2 (F_1 и F_2 — точки касания полуокружности со сторонами треугольника) пересекаются на высоте AH_1 треугольника ABC.*

Доказательство. Так как $|O_1F_1| = |O_1F_2| = R_a$, то

$$|CF_1| = R_a \operatorname{ctg}\widehat{C}, \quad |BF_2| = R_a \operatorname{ctg}\widehat{B},$$

$$|BH_1| = |AH_1| \operatorname{ctg}\widehat{B}, \quad |CH_1| = |AH_1| \operatorname{ctg}\widehat{C}.$$

Как известно (теорема Чевы), прямые AH_1, BF_1, CF_2 имеют общую точку в том и только в том случае, если выполняется равенство

$$\frac{|AF_2|\cdot|BH_1|\cdot|CF_1|}{|BF_2|\cdot|CH_1|\cdot|AF_1|}=1.$$

Это равенство действительно имеет место, так как

$$\frac{|AH_1|\operatorname{ctg}\hat{B}\cdot R_a\cdot\operatorname{ctg}\hat{C}}{R_a\cdot\operatorname{ctg}\hat{B}\cdot|AH_1|\operatorname{ctg}\hat{C}}=1.$$

6. *В треугольник ABC вписаны три полуокружности с центрами O_1, O_2, O_3, касающиеся его сторон в точках F_1, F_2, Q_1, Q_2, T_1, T_2 соответственно* (рис. 5). *Доказать, что*

$$\frac{|F_1C|\cdot|Q_2A|\cdot|T_1B|}{|F_2B|\cdot|Q_1C|\cdot|T_2A|}=1.$$

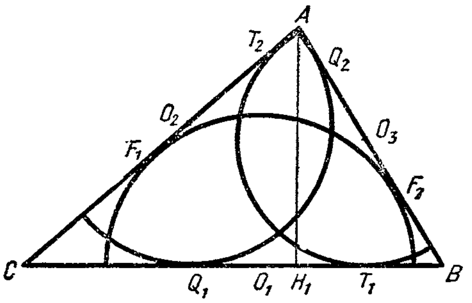


Рис. 5

Доказательство. Из подобия треугольников O_1F_2B и AH_1B, O_1F_1C и AH_1C имеем

$$\frac{|F_2B|}{|H_1B|}=\frac{R_a}{|AH_1|}\quad\text{и}\quad\frac{|F_1C|}{|H_1C|}=\frac{R_a}{|AH_1|}.$$

Отсюда $\dfrac{|F_1C|}{|F_2B|}=\dfrac{|H_1C|}{|H_1B|}$.

Аналогично

$$\frac{|Q_2A|}{|Q_1C|}=\frac{|H_2A|}{|H_2C|},\quad \frac{|T_1B|}{|T_2A|}=\frac{|H_3B|}{|H_3A|}.$$

Итак,

$$\frac{|F_1C|\cdot|Q_2A|\cdot|T_1B|}{|F_2B|\cdot|Q_1C|\cdot|T_2A|}=\frac{|H_1C|\cdot|H_2A|\cdot|H_3B|}{|H_1B|\cdot|H_2C|\cdot|H_3A|}=$$

$$=\frac{h_a\operatorname{ctg}\hat{C}\cdot h_b\operatorname{ctg}\hat{A}\cdot h_c\operatorname{ctg}\hat{B}}{h_a\operatorname{ctg}\hat{B}\cdot h_b\operatorname{ctg}\hat{C}\cdot h_c\operatorname{ctg}\hat{A}}=1$$

(h_a, h_b, h_c — высоты треугольника ABC, проведенные к сторонам BC, AC, AB).

7. *Если в треугольнике ABC $\hat{C}=90°$, то*

1) $\dfrac{1}{R_c}=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}$,

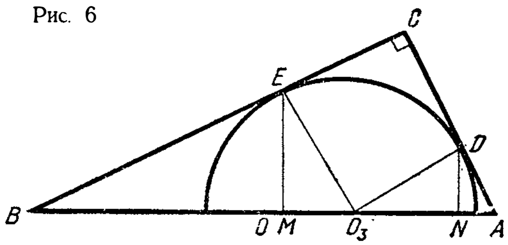
2) $\dfrac{1}{(R+d)^2}+\dfrac{1}{(R-d)^2}=\dfrac{1}{R_c^2}$

(*R_c — радиус вписанной полуокружности, R — радиус описанной около треугольника ABC окружности, d — расстояние между их центрами). Доказать.*

Первая формула следует из соотношения (3), если учесть, что $S_{ABC}=\dfrac{1}{2}ab$.

Докажем вторую формулу. Пусть O — середина гипотенузы AB, O_3 — центр вписанной полуокружности (рис. 6). Так как

Рис. 6



$$\widehat{MEO_3}=\widehat{DO_3N}\ \text{и}\ |EO_3|=|O_3D|=R_c,$$

то

$$\triangle EO_3M\cong\triangle O_3DN.$$

Следовательно, $|O_3N|=|EM|$ и $|O_3N|^2+|O_3M|^2=|EM|^2+|MO_3|^2=R_c^2$. Но $|O_3B|=|OB|+|OO_3|=R+d$, $|O_3A|=|OA|-|OO_3|=R-d$.

Из прямоугольного треугольника BO_3E

$$|O_3M|=\frac{|O_3E|^2}{|O_3B|}=\frac{R_c^2}{R+d},$$

$$|O_3N|=\frac{|O_3D|^2}{|O_3A|}=\frac{R_c^2}{R-d}.$$

Таким образом,

$$\frac{R_c^4}{(R+d)^2}+\frac{R_c^4}{(R-d)^2}=R_c^2,$$

или

$$\frac{1}{(R+d)^2}+\frac{1}{(R-d)^2}=\frac{1}{R_c^2}.$$

8. *В равнобедренный треугольник ABC вписана полуокружность с центром O_1($O_1\in[BC]$), касающаяся его боковых сторон в точках F_1, F_2. Доказать, что в этом случае дуга F_1F_2 (кроме точек F_1, F_2) есть множество таких точек, что касательные к полуокружности в этих точках отсекают на конгруэнтных сторонах треугольника отрезки, произведение длин которых для данного треугольника будет величиной постоянной.*

Доказательство. Пусть $[MN]$ — касательная к полуокружности в произвольной точке K, принадлежащей дуге F_1F_2 (рис. 7). В треугольниках MO_1C и NO_1B обозначим углы, как показано на рисунке. Тогда $\widehat{CMO_1}=90°-\gamma$, а так как $\alpha+\beta+\gamma=90°$,

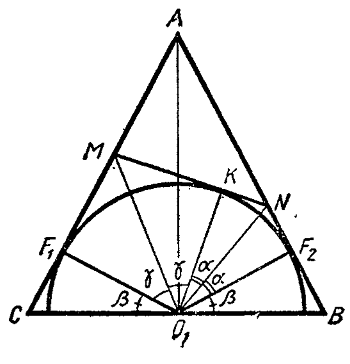


Рис. 7

то $\widehat{BO_1N} = \alpha + \beta = 90° - \gamma$. Отсюда

$$\widehat{CMO_1} = \widehat{BO_1N}. \qquad (6)$$

Кроме того, $\hat{B} = \hat{C}$, следовательно,

$$\triangle MO_1C \sim \triangle NO_1B.$$

Из подобия этих треугольников следует:

$$|MC|\cdot|NB| = |CO_1|\cdot|O_1B| = \frac{1}{4}|BC|^2 = \frac{a^2}{4}.$$

Рассмотрим задачи, решаемые с помощью свойств вписанной полуокружности.

Задача 1. В дельтоид вписана окружность. Доказать, что диагонали дельтоида и прямые, соединяющие точки касания противоположных сторон, пересекаются в одной точке.

Решение. Пусть в дельтоиде $ABCD$ (рис. 8) диагональ AC принадлежит его оси симметрии. Тогда треугольники ABC и ADC симметрично расположены,

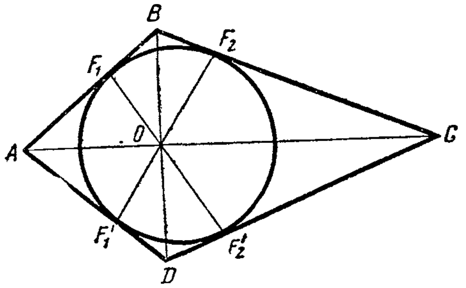


Рис. 8

а, значит, точки касания F_1 и F_1', F_2 и F_2' соответственно симметричны, и по соотношению (2)

$$[F_1'F_2] \cap [F_2'F_1] = H_1 = O.$$

Задача 2. Дельтоид вписан в окружность радиуса R и описан около окружности радиуса r. Найти расстояние между центрами окружностей.

Решение. Так как дельтоид вписан в окружность, то величина каждого из его конгруэнтных углов равна 90° и поставленная задача идентична свойству полуокружности, вписанной в прямоугольный треугольник. Если d — расстояние между центрами вписанной и описанной окружностей, то

$$\frac{1}{(R+d)^2} + \frac{1}{(R-d)^2} = \frac{1}{r^2},$$

откуда

$$d = \sqrt{R^2 + r^2 - r\sqrt{4R^2 + r^2}}.$$

Задача 3. Диаметр окружности, вписанной в выпуклый шестиугольник $ABCDEF$ принадлежит диагонали AD, причем центр окружности делит эту диагональ на два конгруэнтных отрезка. Доказать, что

$$|AB|\cdot|CD| = |AF|\cdot|ED|.$$

Указание. Воспользоваться соотношением (6).

Задача 4. Радиус окружности, вписанной в ромб $ABCD$, равен r, величина угла ABC равна β. На сторонах AB и BC расположены точки E и F так, что прямая EF касается окружности, вписанной в ромб. Найти произведение

$$|AE|\cdot|CF|.$$

Указание. Воспользоваться свойством 8.

Задачи

ЗАДАЧИ ДЛЯ IV—V КЛАССОВ

1781. *Доказать, что сумма натуральных чисел от* 1 *до* 1000 *делится на* 143.

А. Бертош (Мурманская обл.)

1782. *Найти произведение*

```
   *2*3
 ×   **
 ------
  ***87
 *****
 ------
 2*004*
```

В. Г. Махров (Калужская обл.)

1783. *Расшифровать пример на умножение*

```
         ш е с т ь
        ×ш е с т ь
   ---------------
       * * * * * *
     * * * * * *
   * * * * * *
 * * * * * *
 -----------------
 * * * * * ш е с т ь
```

1784. *Найти наименьшее простое число, которое может быть представлено в виде суммы двух, трех, четырех и пяти простых чисел.*

С. Г. Губа (г. Вологда)

1785. *Мальчик рисует круги, делит каждый из них радиусами на три части, а затем раскрашивает их в три разных цвета. Может ли он, имея 24 цветных карандаша, получить такой набор раскрашенных кругов, чтобы на них каждые два цвета встречались вместе ровно один раз?*

С. Г. Губа

ЗАДАЧИ ДЛЯ VI—VIII КЛАССОВ

1786. *Через середину боковой стороны трапеции провести прямую, разбивающую трапецию на два равновеликих четырехугольника.*

С. Г. Губа

1787. *Дан правильный n-угольник $A_1A_2 \ldots A_n$, точка O — его центр. Докажите равенство*

$$\overrightarrow{OA_1} + \overrightarrow{OA_2} + \ldots + \overrightarrow{OA_n} = \vec{0}.$$

(Попытайтесь воспользоваться центральной и осевой симметриями.)

1788. *Даны поворот и осевая симметрия, причем центр поворота не принадлежит оси. Построить прямую, которая параллельна своему образу при композиции данных поворота и осевой симметрии.*

Э. М. Фалькенштейн (г. Рига)

1789. *В прямоугольнике ABCD проведен перпендикуляр BK на диагональ AC. Точки M и N — середины* $[AK]$ *и* $[CD]$. *Доказать, что угол BMN — прямой.* (Попытайтесь найти решение с помощью геометрических преобразований.)

П. И. Горнштейн (г. Киев)

1790. *Доказать, что*

$$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2}<\frac{2}{3}.$$

Г. Ф. Пискарев (Ярославская обл., с. Прозорово)

ЗАДАЧИ ДЛЯ IX—X КЛАССОВ

1791. *Найти все шестизначные числа, имеющие 27 делителей.*

1792. *Является ли периодической функция*

$$y=\frac{\sin x}{1+\sin^2 x\sqrt{2}}?$$

1793. *Верно ли, что графики двух взаимно-обратных функций могут пересекаться только на прямой* $y=x$?

1794. *Найти предел последовательности* (x_n), *если*

$$x_1=\sqrt{2},\quad x_{n+1}=(\sqrt{2})^{x_n}.$$

1795. *В равносторонний треугольник ABC вписаны квадраты* $M_1M_2M_3M_4$ *и* $M_2M_5M_6M_7$, *причем* $\{M_1, M_2, M_5\}\subset[AB]$, $M_6\in[BC]$, $M_4\in[AC]$. *При какой зависимости между длинами сторон квадратов сумма их площадей будет наименьшей?*

К. В. Ветров (г. Братск)

1796. *В четырехугольник ABCD вписана окружность и вокруг него описана окружность. Доказать, что*

$$S=p^2\left(\operatorname{tg}\frac{\hat{A}}{2}+\operatorname{tg}\frac{\hat{B}}{2}+\operatorname{tg}\frac{\hat{C}}{2}+\operatorname{tg}\frac{\hat{D}}{2}\right)^{-1},$$

где S — площадь, 2p — периметр четырехугольника.

И. Д. Черепинский, О. Д. Черепинский (г. Черкассы)

1797. *Доказать, что измерения a, b, c и диагональ d прямоугольного параллелепипеда связаны неравенством*

$$(ab)^2+(bc)^2+(ca)^2\geqslant abcd\sqrt{3}.$$

С. Г. Губа

1798. *При переносе* $\vec{m}$ *тетраэдр ABCD отображается на тетраэдр* $A_1B_1C_1D_1$. *Точки* A_0, B_0, C_0, D_0 *— центроиды граней BCD, CDA, DAB, ABC. Доказать, что прямые* A_1A_0, B_1B_0, C_1C_0, D_1D_0 *пересекаются в одной точке.*

В. М. Майоров (г. Ярославль)

1799. *Дана треугольная призма* $ABCA_1B_1C_1$. Плоскость σ *пересекает ребра* AA_1, BB_1 *и* CC_1 *соответственно в точках* A_0, B_0 *и* C_0. *Найти отношение объема многогранника* $ABCA_0B_0C_0$ *к объему данной призмы, если* $|AA_0|:|AA_1|=m$, $|BB_0|:|BB_1|=n$, $|CC_0|:|CC_1|=p$.

З. А. Скопец (г. Ярославль)

1800. *В параллельных плоскостях расположены одинаково ориентированные квадраты ABCD и* $A_1B_1C_1D_1$. *Пользуясь векторами, доказать, что*

$$|AA_1|^2+|CC_1|^2=|BB_1|^2+|DD_1|^2.$$

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ

Непрерывность

1801. *Существует ли функция* $y=f(x)$, *определенная и непрерывная на отрезке* $[a, b]$, *для которой во всей ее области определения справедливо неравенство*

$$f(f(x))<f(x)?$$

Матрицы

1802. *Найти все перемещения плоскости, перестановочные с осевой симметрией* S_l.

Применение преобразований

1803. *Прямые a, b, c попарно пересекаются в трех различных точках. Прямая l пересекает a, b и c соответственно в точках A, B и C. Построить прямую* l_1 *так, чтобы она пересекала a, b и c в точках* A_1, B_1, C_1 *и* $|A_1B_1|=|AB|$, $|B_1C_1|=|BC|$, $|C_1A_1|=|CA|$.

Л. И. Кузнецова (г. Горький)

1804. *Дан сегмент. В него вписаны всевозможные окружности.*

1) *Найти множество всех точек M, в которых окружности касаются попарно.*

2) *Доказать, что касательные к окружностям в точках M проходят через фиксированную точку.*

Л. Г. Ханин (Ленинград)

1805. *Через вершины A, B, C и центроид M треугольника ABC проведены параллельные плоскости, пересекающие данную прямую l в точках* A_1, B_1, C_1, M_1 *соответственно. Доказать, что точка* M_1 *— центроид точек* A_1, B_1, C_1.

Т. А. Иванова (г. Горький)

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ, ПОМЕЩЕННЫХ В № 3 ЗА 1976 г.

1681. *Из разговора 1 сентября:*

— Сколько тебе еще учиться?

— Столько, сколько ты уже проучился. А тебе?

— В полтора раза больше.

Кто в какой класс перешел?

Решение. Ученику, задавшему первый вопрос, осталось учиться в полтора раза больше, чем он проучился. С помощью уравнения или простого подбора легко убедиться, что он проучился 4 года. Следовательно, второму ученику осталось учиться 4 года, т. е. первый перешел в V класс, а второй — в VII класс.

1682. *Найти наименьшее число, которое делится на 41, а при делении на 39 дает в остатке 24.*

Решение. Пусть n — некоторое число, делящееся на 41; тогда $n=41m=39m+2m$. Отсюда видно, что наименьшее число n, удовлетворяющее заданным условиям, получается при $m=12$.

Итак, искомое число равно 492.

1683. *К числу 319 572 приписать справа три цифры, которые не входят в данное число, и зачеркнуть две цифры так, чтобы получилось наибольшее число.*

Решение. Ясно, что независимо от приписанных цифр и их порядка, для того чтобы полученное в результате число было наибольшим, зачеркнуть надо первые две цифры. Кроме того, из цифр 0, 4, 6, 8, не входящих в данное число, надо взять, очевидно, 8, 6, 4 и приписать их в указанном порядке. Таким образом, в результате получится наибольшее возможное число 9 572 864.

1684. *Петя старше Коли на год, и сумма цифр года рождения каждого нечетна. Доказать, что оба они либо еще, либо уже не школьники.*

Решение. Легко видеть, что суммы цифр соседних натуральных чисел отличаются друг от друга на 1 во всех случаях, кроме одного — когда меньшее из них кончается цифрой 9. Поскольку, по условию, обе суммы цифр нечетны, то они не могут отличаться на 1, и, следовательно, Петя родился в один из следующих годов: 1969, 1949, 1929 и т. д. Если он родился до 1969 г., то и он, и Коля уже не школьники. Если же он родился в 1969 г., то в июне 1976 г. (время выхода журнала № 3) он еще не школьник, а Коле в этом случае еще нет семи лет, и он также не школьник.

Можно также было рассуждать «с другого конца»: множество годов рождения школьников в июне 1976 г. есть

$$1959, 1960, 1961, \ldots, 1968$$

и сумма цифр нечетна в годах 1958, 1961, 1963, 1965, 1967; однако среди этих чисел нет ни одной пары последовательных чисел, которые могли бы быть датами рождения Пети и Коли, и поэтому никто из них не может быть школьником.

1685. *Два курьера вышли одновременно из A и B навстречу друг другу с разными, но постоянными скоростями. Встретившись, они обменялись пакетами и повернули обратно. Первый, пройдя 1/6 часть расстояния от места встречи до A, вспомнил о втором пакете, повернул обратно и догнал второго, когда тот был на полпути от места первой встречи до B, отдал пакет и пошел в A. Где находился первый курьер, когда второй вернулся в B?*

Решение. Пусть C — место первой встречи, t — время, за которое второй курьер шел от места второй встречи до B. По условию, за время t второй курьер прошел половину расстояния BC, а тогда первый за это время прошел половину расстояния AC. Поэтому в момент прихода второго курьера в B первый будет от B на расстоянии

$$\frac{1}{2}|BC| + \frac{1}{2}|AC| = \frac{1}{2}|AB|,$$

т. е. посредине между пунктами A и B.

Это решение (его прислал читатель А. Ф. Карнаухов) показывает избыточность одного из условий задачи.

1686. *Дан квадрат ABCD. Найти в его плоскости все точки M, для которых треугольники ABM, BCM, CDM и ADM — равнобедренные.*

Решение. Пусть $|AB| = a$. Сторона квадрата может являться либо основанием, либо боковой стороной равнобедренных треугольников. Поэтому множество $\{L_1\}$ точек M, для которых ABM — равнобедренный треугольник, есть объединение перпендикуляра m к $[AB]$, проходящего через его середину (кроме середины), и окружностей $\omega_A(A, a)$, $\omega_B(B, a)$ (кроме точек на линии центров): $\{L_1\} = m \cup \omega_A \cup \omega_B$ (рис. 1).

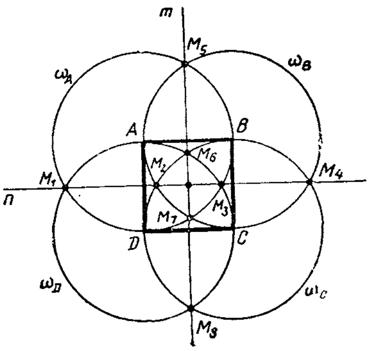


Рис. 1

Аналогично для треугольников BCM, CDM и DAM имеем множества $\{L_2\} = n \cup \omega_B \cup \omega_C$, $\{L_3\} = m \cup \omega_C \cup \omega_D$ и $\{L_4\} = n \cup \omega_D \cup \omega_A$ соответственно. Условию задачи удовлетворяет множество $\{M\} = \{L_1\} \cap \{L_2\} \cap \{L_3\} \cap \{L_4\}$, т. е. получили девять точек: центр квадрата и третьи вершины восьми правильных треугольников, построенных на сторонах квадрата.

1687. *На стороне AB треугольника ABC взяты точки M и N так, что $|AM| = |MN| = |NB|$. Точки A_1 и B_1 — середины сторон BC и AC соответственно, $[BB_1] \cap [CN] = P$, $[AA_1] \cap [CM] = K$. Выразить $|PK|$ через $|AB|$.*

Решение. Пусть O — точка пересечения медиан треугольника ABC (рис. 2). Так как $[MB_1]$ — средняя линия треугольника ANC, то $(MB_1) \parallel (NC)$. Следовательно, $|BP| = |PB_1|$. Имеем:

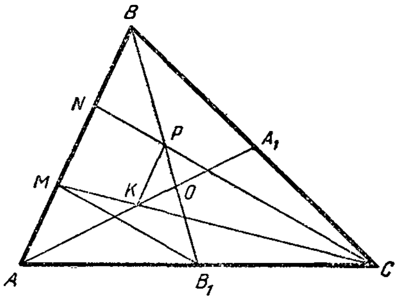


Рис. 2

$$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{BP} - \overrightarrow{BO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BB_1} - \frac{2}{3}\overrightarrow{BB_1} =$$

$$= -\frac{1}{6}\overrightarrow{BB_1} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}.$$

Аналогично получаем $\overrightarrow{OK} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA}$. Значит, при $H_O^{\frac{1}{4}}$ $B \to P$, $A \to K$. Отсюда следует, что $(PK) \parallel (BA)$ и $|PK| = \frac{1}{4}|AB|$.

1688. *Даны две пересекающиеся прямые a и b.* Точка *P, принадлежащая плоскости прямых a и b, отображается при симметриях относительно этих прямых на точки P_a и P_b. Найти множество точек P, для которых $|P_aP_b| = m$.*

Решение. Пусть $\widehat{(a, b)} = \alpha$ и точка P обладает данным свойством (рис. 3). Тогда точка O равноудалена от точек P, P_a и P_b и либо $\widehat{P_aPP_b} = \alpha$, либо $\widehat{P_aPP_b} = 180° - \alpha$. Но это значит, что точка P при-

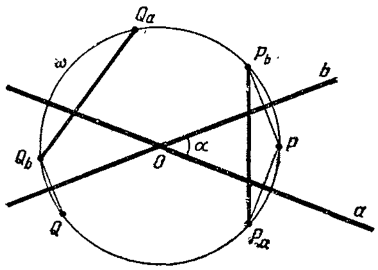


Рис. 3

надлежит окружности ω с центром O и с радиусом $R = \frac{m}{2\sin\alpha}$.

Обратно, если точка Q принадлежит окружности ω, то в силу симметричности этой окружности относительно прямых a и b точки Q_a и Q_b принадлежат этой же окружности. Кроме того, $\widehat{Q_aQQ_b} = \alpha$ или $\widehat{Q_aQQ_b} = 180^\circ - \alpha$. Тогда $|Q_aQ_b| = 2R\sin\alpha = m$.

1689. *В прямоугольном треугольнике ABC ($\widehat{C} = 90^\circ$) через вершину A и середину высоты CD построена прямая, пересекающая катет BC в точке M. Доказать, что* $\frac{|CM|}{|MB|} = \cos^2\widehat{A}$.

Решение. Пусть O — середина высоты CD (рис. 4). Проведем $(CK) \parallel (MA)$, $K \in (AB)$. Тогда из

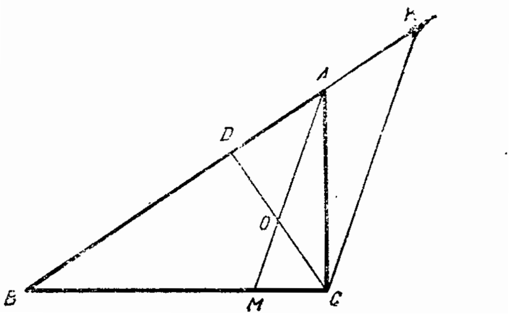


Рис. 4

$|DO| = |OC|$ следует, что $|DA| = |AK|$. Применив теорему о пропорциональных отрезках, получим

$$\frac{|CM|}{|MB|} = \frac{|KA|}{|AB|} = \frac{|AD|}{|AB|} = \frac{|AD|\cdot|AB|}{|AB|^2} = \frac{|AC|^2}{|AB|^2} = \cos^2\widehat{A}.$$

1690. *Доказать, что если A, B, C — три данные точки и M — некоторая точка этой плоскости, то вектор $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}$ не зависит от положения точки M. Определить M так, чтобы $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$.*

Решение. $\vec{a} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$, т. е. $\vec{a}$ не зависит от положения точки M.

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} = (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MC}) - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{MC}.$$

Положим, $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{AB}$, тогда $\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA} = 2\overrightarrow{CA}$. Значит, $M \in [AC)$ и $|CM| = 2|CA|$.

1691. *Решить уравнение*

$$x^6 - 7x^2 + \sqrt{6} = 0.$$

Решение. Обозначив $\sqrt{6}$ через a и представив данное уравнение в виде

$$x^6 - (a^2 + 1)x^2 + a = 0,$$

рассмотрим его как квадратное относительно a. Тогда его решениями будут

$$a_1 = x^2, \quad a_2 = \frac{1 - x^4}{x^2}.$$

Другими словами, данное уравнение можно переписать в виде

$$(a - x^2)\left(a - \frac{1 - x^4}{x^2}\right) = 0,$$

после чего задача сводится к решению уравнений

$$x^2 = a, \quad x^4 + ax^2 - 1 = 0.$$

Из первого уравнения получаем $x_{1,2} = \pm\sqrt[4]{6}$, из второго $x_{3,4} = \pm\sqrt{\frac{-\sqrt{6} + \sqrt{10}}{2}}$.

1692. *Доказать, что для натурального $n \geqslant 2$*

$$\frac{2^3+1}{2^3-1}\cdot\frac{3^3+1}{3^3-1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^3+1}{n^3-1} < \frac{3}{2}.$$

Решение. Пользуясь формулами суммы и разности кубов, левую часть $P(n)$ данного неравенства представим в виде произведения $P_1(n)$ и $P_2(n)$, где

$$P_1(n) = \frac{(2+1)(3+1)\ldots(n+1)}{(2-1)(3-1)\ldots(n-1)} = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$P_2(n) = \frac{2^2-2+1}{2^2+2+1}\cdot\frac{3^2-3+1}{3^2+3+1}\cdot\ldots\cdot\frac{n^2-n+1}{n^2+n+1} = \frac{3\cdot7\cdot13\cdot21\cdot31\cdot\ldots\cdot(n^2-3n+3)(n^2-n+1)}{7\cdot13\cdot21\cdot31\cdot43\cdot\ldots\cdot(n^2-n+1)(n^2+n+1)} = \frac{3}{n^2+n+1};$$

поэтому

$$P(n) = \frac{3}{2}\cdot\frac{n^2+n}{n^2+n+1} < \frac{3}{2},$$

что и требовалось доказать.

1693. *При каком натуральном n уравнение*

$$n\cdot x! + n\cdot y! = z!$$

имеет единственное решение в натуральных числах?

Решение. Из тождества

$$n\cdot(n-1)! + n\cdot n! = (n+1)!$$

следует, что при $n > 1$ данное уравнение имеет по крайней мере два решения:

$$(n-1;\ n,\ n+1) \text{ и } (n,\ n-1,\ n+1).$$

При $n = 1$ имеем уравнение

$$x! + y! = z! \qquad (1)$$

Ясно, что в каждом решении этого уравнения $x < z$ и $y < z$; если бы, скажем, x был меньше y, то в равенстве

$$x! = z! - y!$$

правая часть делилась бы на $y!$, а левая нет. Поэтому может быть только $x = y$, и уравнение (1) принимает вид

$$2x! = z! \qquad (2)$$

Но $z \geqslant x + 1$, так что $z! \geqslant (x+1)\cdot x!$, и поэтому уравнение (2) не имеет решений, в которых $x \geqslant 2$. Если же $x = 1$, то $z = 2$.

Таким образом, исходное уравнение имеет единственное решение только при $n = 1$, и это решение $x = 1$, $y = 1$, $z = 2$.

1694. *Найти* $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}$, *если*

$$\sin\alpha - \sin\beta = a \quad \text{и} \quad \cos\alpha - \cos\beta = b.$$

Решение. Из равенств

$$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2} = a,$$

$$2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\sin\frac{\alpha+\beta}{2} = -b$$

после возведения их в квадрат и почленного сложения получаем, что

$$4\sin^2\frac{\alpha-\beta}{2} = a^2 + b^2.$$

Если $a^2 + b^2 \neq 0$, то

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} = \frac{\cos\frac{\alpha+\beta}{2}}{\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}} =$$

$$= \frac{2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}}{\left(\sin\frac{\alpha+\beta}{2} + \sin\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\sin\frac{\alpha-\beta}{2}} =$$

$$= \frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\frac{1}{2}(\cos\beta - \cos\alpha) + \sin^2\frac{\alpha-\beta}{2}} = \frac{4a}{a^2 + b^2 - 2b}.$$

Если $a^2 + b^2 = 0$, т. е. $a = b = 0$, то

$$\sin\alpha = \sin\beta, \quad \cos\alpha = \cos\beta,$$

так что $\beta = \alpha + 2k\pi$, где $k \in \mathbf{Z}$, и $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\beta}{2} =$

$$= \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2} - \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = 2\operatorname{ctg}\alpha.$$

1695. *Доказать неравенства*

$$\frac{n}{a_1 a_{2n+1}} < \frac{1}{a_1 a_2} + \frac{1}{a_3 a_4} + \ldots$$

$$\ldots + \frac{1}{a_{2n-1} a_{2n}} < \frac{n}{a_0 a_{2n}},$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}, a_{2n+1}$ образуют возрастающую арифметическую прогрессию с положительными членами.

Решение. Обозначив через d разность прогрессии, оценим удвоенную сумму $2s$ — среднюю часть рассматриваемого двойного неравенства:

$$2s = \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_1a_2} + \frac{1}{a_3a_4} + \frac{1}{a_3a_4} + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}} + \frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}} < \frac{1}{a_0a_1} + \frac{1}{a_1a_2} +$$

$$+ \frac{1}{a_2a_3} + \frac{1}{a_3a_4} + \cdots +$$

$$+ \frac{1}{a_{2n-2}a_{2n-1}} + \frac{1}{a_{2n-1}a_{2n}} =$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{a_1 - a_0}{a_0a_1} + \frac{a_2 - a_1}{a_1a_2} + \cdots +\right.$$

$$\left. + \frac{a_{2n-1} - a_{2n-2}}{a_{2n-2}a_{2n-1}} + \frac{a_{2n} - a_{2n-1}}{a_{2n-1}a_{2n}}\right) =$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} + \cdots +\right.$$

$$\left. + \frac{1}{a_{2n-2}} - \frac{1}{a_{2n-1}} + \frac{1}{a_{2n-1}} - \frac{1}{a_{2n}}\right) =$$

$$= \frac{1}{d}\left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a_{2n}}\right) = \frac{2n}{a_0a_{2n}}.$$

Отсюда $s < \frac{n}{a_0a_{2n}}$, и одно неравенство доказано.

Второе неравенство доказывается аналогично.

1696. *В полукруге с диаметром AB проведен радиус и в каждый полученный сектор вписана окружность. Точки M и N — точки касания этих окружностей с диаметром AB. Доказать, что $|MN| \geqslant 2R(\sqrt{2} - 1)$, где $|AB| = 2R$.*

Решение. Пусть O — центр круга с диаметром AB, $[OC]$ — его радиус, r_1 и r_2 — длины радиусов вписанных окружностей (рис. 5).

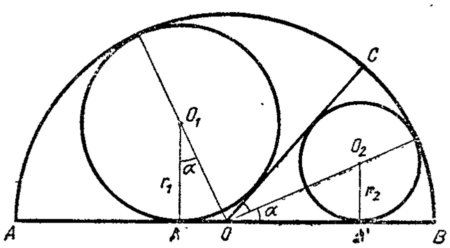


Рис. 5

Если $\widehat{COB} = 2\alpha$, $0° < 2\alpha \leqslant 90°$, то

$$r_1 = (R - r_1)\cos\alpha, \quad r_2 = (R - r_2)\sin\alpha,$$

откуда

$$r_1 = \frac{R\cos\alpha}{1 + \cos\alpha}, \quad r_2 = \frac{R\sin\alpha}{1 + \sin\alpha}.$$

Далее

$$|MO| = r_1 \operatorname{tg}\alpha = \frac{R\sin\alpha}{1 + \cos\alpha},$$

$$|NO| = r_2 \operatorname{ctg}\alpha = \frac{R\cos\alpha}{1 + \sin\alpha},$$

$$|MN| = R\left(\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{1 + \sin\alpha}\right).$$

Рассмотрим функцию $y = \frac{\sin x}{1 + \cos x} + \frac{\cos x}{1 + \sin x}$.

Имеем: $y' = \frac{\sin x - \cos x}{(1 + \cos x)(1 + \sin x)}$; при $x = \frac{\pi}{4}$ получаем $y' = 0$. Поскольку при $0 < x < \frac{\pi}{4}$ $y' < 0$, то y — убывающая функция на $\left]0, \frac{\pi}{4}\right]$. Следовательно, при $x = \frac{\pi}{4}$ функция имеет минимум.

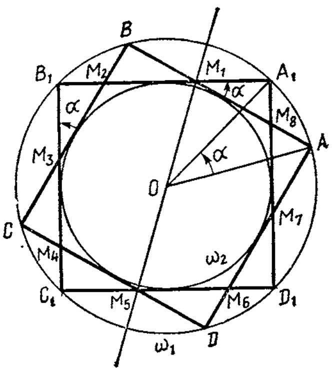


Рис. 6

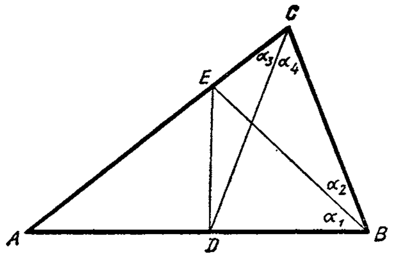


Рис. 7

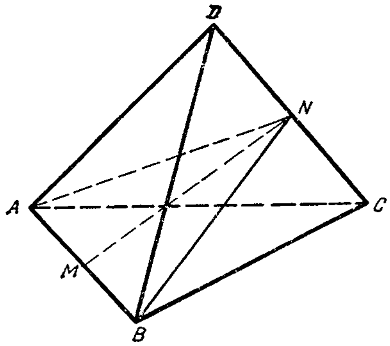


Рис. 8

Итак,

$$|MN|_{\min} = R\left(\frac{\sin\frac{\pi}{4}}{1+\cos\frac{\pi}{4}} + \frac{\cos\frac{\pi}{4}}{1+\sin\frac{\pi}{4}}\right) = 2R(\sqrt{2}-1).$$

Значит, $|MN| \geqslant 2R(\sqrt{2}-1)$.

Примечание. В условии задачи, опубликованной в № 3 за 1976 г., и в авторском решении обнаружен просмотр, который выше исправлен.

1697. *Два конгруэнтных квадрата имеют общий центр. Найти наименьший периметр пересечения этих квадратов.*

Решение. Если конгруэнтные одинаково ориентированные квадраты $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ имеют общий центр O, то $A_1B_1C_1D_1$ есть образ квадрата $ABCD$ при повороте R_O^α, где $\alpha = \widehat{AOA_1}$. Следовательно, квадраты имеют общую описанную и вписанную окружности ω_1 и ω_2 с центром O. Пересечением квадратов является центрально-симметричный восьмиугольник $M_1M_2\ldots M_8$, описанный около окружности ω_2 (рис. 6).

Докажем, что (M_1M_5) — ось симметрии восьмиугольника. Поскольку при повороте $R_O^{90°}$ каждый квадрат отображается на себя, то $M_1 = [AB] \cap [A_1B_1]$ отображается на пересечение соответственных образов, т. е. на $M_3 = [BC] \cap [B_1C_1]$. Поэтому $(M_1O) \perp (M_3O)$. При осевой симметрии $S_{M_1M_5}$ точка M_3 отображается на точку M_7, а касательные к окружности ω_2, проведенные через точки M_1, M_3, M_5, — на касательные, проведенные через точки M_1, M_7, M_5 соответственно. Следовательно, (M_1M_5) — ось симметрии восьмиугольника.

Аналогично можно доказать, что каждая прямая, проходящая через центрально-симметричные вершины восьмиугольника, есть его ось симметрии. Следовательно, все стороны восьмиугольника конгруэнтны.

Выразим сторону x восьмиугольника через сторону a квадрата и угол α. Поскольку $|M_1M_2| = |A_1B_1| - |A_1M_1| - |M_2B_1|$ и $(\widehat{(AB),(A_1B_1)}) = (\widehat{(BC),(B_1C_1)}) = \alpha$ как углы между соответственными прямыми при R_O^α, то $x = a - (x\cos\alpha + x\sin\alpha)$. Отсюда

$$x = \frac{a}{1+\sin\alpha+\cos\alpha} = \frac{a}{1+\sqrt{2}\sin(\alpha+45°)}$$

и x принимает наименьшее значение при $\alpha = 45°$. Таким образом, наименьшее значение периметра восьмиугольника $P_{\min} = 8\cdot\frac{a}{1+\sqrt{2}} = 8a(\sqrt{2}-1)$.

1698. *В треугольнике ABC на сторонах AB и AC взяты соответственно точки D и E так, что $\widehat{ABE} = \alpha_1$, $\widehat{CBE} = \alpha_2$, $\widehat{DCE} = \alpha_3$, $\widehat{BCD} = \alpha_4$. Найти $\widehat{CDE}$.*

Решение. Обозначим $|BC| = a$, $\widehat{CDE} = x$. Из треугольников BCD, BCE и CDE (рис. 7) имеем:

$$|DC| = \frac{a\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4)},\quad |EC| = \frac{a\sin\alpha_2}{\sin(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)},$$

$$\frac{\sin(x+\alpha_3)}{\sin x} = \frac{|DC|}{|EC|},$$

или

$$\frac{\sin(x+\alpha_3)}{\sin x} = \frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}{\sin\alpha_2\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4)}.$$

Из последнего равенства находим $\operatorname{ctg} x$:

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)\sin(\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4)}{\sin\alpha_2\sin\alpha_3\sin(\alpha_1+\alpha_2+\alpha_4)} - \operatorname{ctg}\alpha_3.$$

1699. *Длины двух противоположных ребер тетраэдра равны x, а все остальные ребра имеют длину, равную 1. Выразить объем тетраэдра как функцию x. При каком x объем тетраэдра имеет наибольшее значение?*

Решение. Пусть $ABCD$ — данный тетраэдр, $|CD| = |AB| = x$, M и N — середины ребер AB и CD (рис. 8). Так как $[AN]$ и $[BN]$ — медианы равнобедренных треугольников, то $[AN] \perp [CD]$ и $[BN] \perp [CD]$. Отсюда следует, что

$$V_{ABCD} = \frac{1}{3}S_{ABN}\cdot|CD| = \frac{1}{6}|AB|\cdot|CD|\cdot|MN|.$$

По теореме Пифагора находим

$$|MN|^2 = |BN|^2 - |BM|^2 = \left(1-\frac{x^2}{4}\right) - \frac{x^2}{4} = 1 - \frac{x^2}{2}.$$

Таким образом,

$$V = \frac{1}{12}x^2\sqrt{4-2x^2},\quad \text{где } 0 < x < \sqrt{2}.$$

Объем V достигает наибольшего значения вместе с функцией

$$y = x^4(4-2x^2).$$

Так как $x^2 + x^2 + (4-2x^2) = 4$, то объем достигает максимума при $x^2 = 4 - 2x^2$, откуда $x^2 = \frac{4}{3}$.

Итак, $V_{\max} = \frac{2\sqrt{3}}{27}$ при $x = \frac{2}{\sqrt{3}}$.

1700. *Даны три попарно скрещивающиеся прямые a, b, c, не параллельные одной плоскости. Доказать, что существует центральная симметрия, при которой они отображаются на такие прямые a_1, b_1 и c_1, что a_1 пересекает b и c, b_1 пересекает a и c, c_1 пересекает a и b.*

Решение. Так как прямые a, b, c не параллельны одной плоскости, то существует, и притом единственная, прямая a_1, параллельная a и пересекающая b и c (линия пересечения двух плоскостей, проходящих через прямые b и c и параллельных a). Аналогично существует единственная прямая b_1, параллельная b и пересекающая a и c. Пусть $a_1 \cap b = A_1$, $b_1 \cap a = A$, $b_1 \cap c = C$, $a_1 \cap c = D$, O — середина $[AA_1]$ (рис. 9). При симметрии с центром O прямые a и b отображаются на a_1 и b_1 соответственно, а прямая c, пересекающая a_1 и b_1, отображается на параллельную ей и пересекающую a и b прямую c_1.

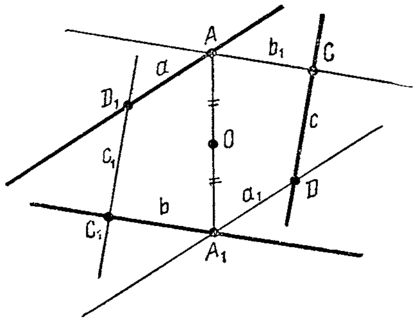


Рис. 9

1701. *Найти сумму*

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k k(k+1).$$

Решение. Рассмотрим функцию $f(x) = \sum_{k=1}^{n} x^{k+1}$.

Тогда

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} (k+1)x^k, \quad f''(x)\cdot x = \sum_{k=1}^{n} (k+1)kx^k,$$

и поэтому искомая сумма s равна $2f''(2)$. С другой стороны,

$$f(x) = \frac{x^{n+2} - x^2}{x-1},$$

и поэтому

$$f'(x) = \frac{(x-1)((n+2)x^{n+1} - 2x) - (x^{n+2} - x^2)}{(x-1)^2} =$$

$$= \frac{(n+1)x^{n+2} - (n+2)x^{n+1} - x^2 + 2x}{(x-1)^2},$$

$$s = 2(((n+1)(n+2)\cdot 2^{n+1} - (n+2)(n+1)\cdot 2^n -$$

$$- 4 + 2) - ((n+1)\cdot 2^{n+2} - (n+2)\cdot 2^{n+1})\cdot 2) =$$

$$= 2^{n+1}(n^2 + 3n + 2 - 8n - 8 + 4n + 8) - 4 =$$

$$= 2^{n+1}(n^2 - n + 2) - 4.$$

1702. *Пусть $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — множество корней степени $n+1$ из 1, отличных от 1. Найти сумму*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{1-x_i}.$$

Решение. Числа $x_1, \ldots, x_n$ удовлетворяют уравнению

$$x^n + x^{n-1} + \ldots + x + 1 = 0,$$

и, следовательно, числа $x_1 - 1, \ldots, x_n - 1$ являются корнями многочлена

$$f(x) = (x+1)^n + (x+1)^{n-1} + \ldots + (x+1) + 1,$$

а обратные им числа являются корнями многочлена $g(x)$ с теми же коэффициентами, что у $f(x)$, но идущими в обратном порядке. По теореме Виета получаем тогда, что искомая сумма равна коэффициенту при x в многочлене $f(x)$, деленному на его свободный член. Пользуясь формулой бинома Ньютона, находим

$$S = \frac{n + (n-1) + \ldots + 1}{n+1} = \frac{n}{2}.$$

1703. *Доказать неравенство*

$$\ln a\left(2 + \frac{\ln^2 a}{3}\right) \leqslant \frac{a^2 - 1}{a},$$

где $a \geqslant 1$.

Решение. Пользуясь разложением в ряд Тейлора функции e^x, получаем равенство

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots,$$

из которого следует, что при $x \geqslant 0$

$$x + \frac{x^3}{3!} \leqslant \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

Из этого неравенства, положив $x = \ln a$, и получаем требуемое.

1704. *При каком условии группа самосовмещений тетраэдра состоит из восьми и только из восьми элементов? Указать эти элементы. Найти систему образующих группы.*

Решение. Рассматривая различные случаи взаимного расположения пар конгруэнтных ребер тетраэдра $A_1A_2A_3A_4$, находим, что группа его самосовмещений состоит из восьми и только из восьми элементов при следующих случаях:

$$|A_1A_3| = |A_2A_4| = |A_1A_4| = |A_2A_3|,\ |A_1A_2| = |A_3A_4|,$$
$$|A_1A_2| \neq |A_1A_3|.$$

Элементами группы являются: тождественное преобразование, три осевые симметрии l, m, n, две плоскостные симметрии α и β и две поворотные симметрии f и φ. Оси симметрии проходят через середины противоположных ребер. Одна плоскость симметрии проходит через ребро A_1A_2 и середину ребра A_3A_4, другая — через ребро A_3A_4 и середину ребра A_1A_2. Плоскость поворотных симметрий проходит через середины четырех конгруэнтных ребер, ось поворотов — соответственно через середины оставшихся ребер, а углы поворотов равны 90° и 270° (—90°).

Элементам группы соответствуют следующие подстановки из номеров вершин тетраэдра:

$$E \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$l \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix},\ m \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ n \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\alpha \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix},\ \beta \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix},$$

$$f \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \varphi \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Для данной группы можно указать несколько различных систем образующих. Одна из них состоит, например, из симметрии β относительно плоскости, проходящей через ребро A_3A_4 и середину ребра A_1A_2, и симметрии m с осью, проходящей через середины ребер A_1A_3 и A_2A_4:

$$m^2 = \beta^2 = E, \quad m\circ\beta = \varphi, \quad \beta\circ m\circ\beta = n, \quad \beta\circ m\circ\beta\circ m = l, \quad m = m,$$

$$\beta = \beta, \quad \beta\circ m = f, \quad m\circ\beta\circ m = \alpha.$$

1705. *Точка P, принадлежащая плоскости треугольника ABC, отображается при симметриях относительно прямых CA и CB на точки B_1 и A_1 соответственно. Найти множество точек P, таких, что $|A_1B| = |AB_1|$.*

Решение. I способ. При симметрии с осью AC точки A и P отображаются соответственно на A и B_1 (рис. 10). Поэтому $|AB_1| = |AP|$. Аналогично выполняется равенство $|A_1B| = |PB|$. Таким образом, искомое множество точек совпадает с множеством точек, равноудаленных от точек A и B. Следовательно, это есть серединный перпендикуляр отрезка AB.

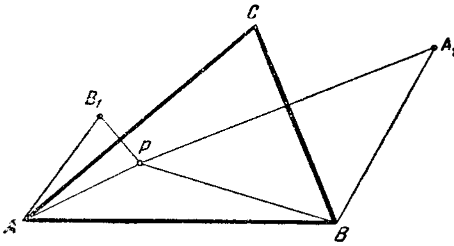


Рис. 10

II способ. Пусть точкам A, B, C, A_1, B_1, P соответствуют комплексные числа a, b, c, a_1, b_1, p. Равенство $|AB_1| = |A_1B|$ записывается в виде $|b_1 - a| = |a_1 - b|$. Точкам A_1 и B_1 соответствуют числа $a_1 = b + c - bc\bar{p}$, $b_1 = a + c - ac\bar{p}$.

Поэтому

$$|1 - a\bar{p}| = |1 - b\bar{p}|.$$

Если нулевая точка совпадает с серединой отрезка AB, то $a = -1$, $b = 1$. Поэтому $|1 + \bar{p}| = |1 - \bar{p}|$ или $|p - (-1)| = |p - 1|$. Отсюда $|AP| = |BP|$, т. е. искомое множество точек есть серединный перпендикуляр отрезка AB.

Замечание. В этой несложной задаче предлагалось применение комплексных чисел с обучающей целью.

СВОДКА РЕШЕНИЙ ЗАДАЧ ПО № 3 ЗА 1976 г.

Андриевский С. А. (Омская обл.) — 1681—1685, 1688—1692, 1694, 1699, 1701—1703, 1705. Антонов П. К. (Ульяновская обл.) — 1681—1694, 1696, 1697, 1699, 1701, 1705. Ахматов М. А. (г. Ейск) — 1681—1692, 1694, 1696, 1697, 1699, 1701, 1703, 1705. Баламетов И. Г. (АзССР, г. Кусары) — 1681—1683, 1685, 1690—1692, 1694. Балицкий В. С. (Алтайский край, г. Алейск) — 1681—1685, 1687—1703, 1705. Бовсуновский Н. И. (Житомирская обл.) — 1681—1683, 1685, 1686, 1691, 1694. Ветров К. В. (г. Братск) — 1681, 1683, 1685, 1687—1692, 1694, 1697—1699. Владимиров А. С. (Свердловская обл., г. Асбест) — 1681—1692, 1694—1703, 1705. Водяницкий А. С. (Белгородская обл.) — 1681—1687, 1689—1692, 1694. Волнов И. И. (Орловская обл., г. Болхов) — 1681—1687, 1689—1691, 1694—1702. Воронович Л. М. (Львовская обл.) — 1681—1684, 1691, 1692, 1694. Высоцкая М. Л. (г. Киев) — 1683—1686, 1691. Головачев Е. А. (Белгородская обл.) — 1681—1692, 1694—1696, 1698—1703, 1705. Грачикова К. С. (Московская обл., г. Ожерелье) — 1681—1683, 1685, 1691. Гриневский Я. З. (Ивано-Франковская обл., г. Коломыя) — 1681—1686, 1690, 1691, 1695, 1697. Егикян О. Г. (АрмССР) — 1681—1685, 1691. Екшембеев Г. М. (Татарская АССР) — 1681—1692, 1694—1702, 1705. Емелюшин И. С. (г. Барнаул) — 1681—1685, 1687, 1689, 1691, 1694, 1696—1699. Зубилин Н. И. (Орловская обл.) — 1681—1685, 1688—1691, 1694—1698, 1700—1702. Карнаухов А. Ф. (г. Ижевск) — 1681—1685, 1687—1692, 1695—1697, 1699, 1700, 1705. Ключко В. И., Ключко Е. И. (Алма-Атинская обл.) — 1681—1683, 1685—1692, 1699. Копылова Т. М. (г. Пятигорск) — 1681—1686. Курганов Т. К. (УзССР, г. Чирчик) — 1681—1683, 1685, 1686, 1691, 1693, 1694, 1701, 1702. Мадримов С. (Хорезмская обл.) — 1681, 1682, 1684—1688, 1690, 1693, 1694, 1697, 1699. Макаров М. Ф. (Орловская обл.) — 1681—1685, 1687—1692, 1694, 1696—1699. Менщиков Л. Е. (г. Южно-Уральск) — 1681—1685, 1691. Мирзоев А. Д. (АзССР) — 1681—1683, 1685, 1691. Мосян М. А. (г. Краснодар) — 1681, 1683—1687, 1691, 1692. Невзоров А. Л. (г. Кременчуг) — 1681—1693, 1695—1697. Панченко Я. Е. (г. Невинномысск) — 1681—1683, 1685, 1686, 1689, 1691, 1694, 1699. Повелий В. И. (Ровенская обл.) — 1682, 1686—1693, 1695, 1698, 1699, 1701, 1702, 1705. Полховский Н. Н. (г. Фергана) — 1681—1692, 1694, 1699. Попов А. С. (г. Уфа) — 1681—1685, 1687—1689, 1691, 1694, 1695, 1697, 1699—1701, 1703. Попов В. А. (г. Сыктывкар) — 1691—1693, 1701—1703. Ратушный В. (Челябинская обл.) — 1681—1685. Романец В. А. (Тернопольская обл.) — 1681—1686, 1688. Рустамоглы М. (ГССР) — 1681—1687, 1689, 1691, 1692, 1694, 1695, 1699. Садыгов Г. Р. (АрмССР) — 1681—1685, 1687, 1690—1692, 1694, 1695, 1697—1699. Симеонов А. А. (Болгария, г. Своге) — 1695—1702, 1705. Стойменович И. (Югославия, Каравуково) — 1681—1692, 1697, 1699, 1701, 1702. Терехов И. А. (Чечено-Ингушская АССР) — 1681—1684, 1686, 1687, 1689, 1697. Утемов В. А. (Свердловская обл., г. Красноуфимск) — 1681—1692, 1694, 1696—1703, 1705. Фадеева И. П. (г. Брест) — 1681, 1692, 1694—1703, 1705. Чваньков И. Т. (Гомельская обл.) — 1681—1702, 1705. Чепкасов Г. С. (г. Краснодар) — 1681—1685, 1687, 1689, 1691, 1692, 1694—1699. Шабанов И. (АзССР) — 1681, 1682, 1685, 1691, 1692, 1694, 1695. Шакаралиев А. Г. (АрмССР) — 1681—1683, 1685, 1691. Юдаков В. А. (Крымская обл.) — 1682, 1683, 1686—1693, 1695—1697, 1699—1705.

Математические кружки: 31-й шк. Чимбайского р-на Каракалпакской АССР (рук. К. А. Амирбаев) — 1681—1685, 1687, 1689, 1692, 1694, 1695; 46-й шк. г. Мурманска (рук. В. Е. Андреев) — 1681—1686, 1691, 1699; 10-й шк. г. Ангарска (рук. В. А. Васильева) — 1681—1690, 1692—1694, 1697; Карыкышлакской шк. АзССР (рук. Э. Х. Казымов) — 1681—1683, 1685—1687, 1691, 1697, 1699; 173-й шк. г. Киева (рук. Р. П. Ушаков) — 1681—1702; Зарнавинской шк. АзССР (рук. Ф. Г. Кадиров) — 1682, 1686, 1691, 1699.

Математический календарь на 1976/77 учебный год

Март

14 марта — 80 лет со дня рождения советского математика Клавдии Яковлевны Латышевой (1897—1956; см.: «Математика в школе», 1966, № 2).

27 марта — 60 лет со дня рождения советского математика, члена-корреспондента АН СССР (1970) Алексея Федоровича Леонтьева. Он родился в с. Яковцево Горьковской обл. Окончил Горьковский университет (1939), доктор физико-математических наук (1948), профессор (1949). В 1942—1971 гг. работал в различных вузах страны, с 1971 г. работает в Башкирском филиале АН СССР. Основные труды А. Ф. Леонтьева относятся к теории функций (аппроксимация и интерполяция функций в комплексной области), теории рядов Дирихле и их обобщениям, дифференциальным уравнениям бесконечного порядка. Известна его книга «Ряды полиномов Дирихле и их обобщения» (М., 1951) и монография «Ряды экспонент» (М., 1976), посвященная представлению аналитических функций в выпуклых областях рядами экспонент. А. Ф. Леонтьев ведет большую научно-организационную работу в Башкирском филиале АН СССР; он воспитал много молодых ученых (см.: История отечественной математики, т. 3—4; БСЭ, изд. 3-е).

31 марта — 250 лет со дня смерти великого английского физика, механика, астронома и математика Исаака Ньютона (1643—1727; см.: «Математика в школе», 1962, № 1).

31 марта — 100 лет со дня рождения советского математика Николая Николаевича Парфентьева (1877—1943; см.: «Математика в школе», 1967, № 1).

Апрель

3 апреля — 70 лет со дня рождения советского математика, члена-корреспондента АН УССР Марка Григорьевича Крейна (см.: «Математика в школе», 1962, № 1; «Успехи математических наук», 1958, 13, № 3; 1968, 23, № 3).

3 апреля 60 лет со дня рождения советского математика, академика АН Молдавской ССР (1961) Владимира Александровича Андрунакиевича. Он родился в Петрограде. Окончил университет в г. Яссы (Румыния), доктор физико-математических наук (1958). В 1953—1961 гг. работал в Московском химико-технологическом институте, с 1961 г. работает в Кишиневе, где возглавляет Институт математики с вычислительным центром АН МССР и руководит исследованиями по алгебре. В. А. Андрунакиевич занимается структурной теорией и теорией радикалов, колец, теорией топологических колец, а также аддитивной теорией идеалов некоммутативных (и неассоциативных) колец, модулей и группоидов. Его цикл работ по современной алгебре удостоен Государственной премии по науке и технике МССР (1972) (см.: История отечественной математики, т. 3—4).

12 апреля — 125 лет со дня рождения немецкого математика Фердинанда Линдемана (1852—1939; см.: «Математика в школе», 1964, № 2).

13 апреля — 75 лет со дня рождения советского математика, члена-корреспондента АН АзССР (1962) Максуда Алисимран оглы Джавадова (1902—1974; см.: «Математика в школе», 1972, № 4).

21 апреля — 325 лет со дня рождения французского математика, члена Парижской АН Мишеля Ролля (1652—1719) (см.: «Математика в школе», 1964, № 6).

22 апреля — 90 лет со дня рождения выдающегося датского математика Харальда Бора (1887—1951) брата знаменитого физика Нильса Бора. Х. Бор родился в Копенгагене. С 1915 г. был профессором Высшей технической школы и с 1930 г. — университета в Копенгагене. Основные труды Х. Бора относятся к теории функций и теории чисел. В связи с исследованием так называемой дзета-функции, играющей важную роль в теории чисел, он развил теорию почти периодических функций (1923), которая имеет многочисленные приложения в математическом анализе, небесной механике и физике. С именем Х. Бора в теории функций комплексного переменного и функциональном анализе связаны такие понятия, как неравенство Бора, почти периодические функции Бора, преобразование Бора и др. На русский язык переведена его книга «Почти периодические функции». М. — Л., 1934 (см.: БСЭ, изд. 3-е; Н. Винер. Я математик. Пер. с англ. М., 1964).

23 апреля — 70 лет со дня рождения советского математика и механика, Героя Социалистического Труда, лауреата Ленинской и Государственной премий, академика АН СССР и АН ГССР Ильи Нестеровича Векуа (см.: «Математика в школе», 1962, № 1; 1964, № 4, БСЭ, изд. 3-е).

30 апреля — 200 лет со дня рождения великого немецкого математика, астронома, физика и геодезиста Карла Фридриха Гаусса (1777—1855; см.: «Математика в школе», 1962, № 1).

30 апреля — 100 лет со дня рождения советского математика Надежды Николаевны Гернет (1877—1943; см.: «Математика в школе», 1967, № 1).

А. И. Бородин
(г. Донецк)

Поздравляем юбиляров

СТЕПАН ПАВЛОВИЧ ПУЛЬКИН
(К 70-летию со дня рождения)

11 января исполнилось 70 лет со дня рождения заведующего кафедрой математического анализа и вычислительной математики Куйбышевского педагогического института, доктора физико-математических наук профессора Степана Павловича Пулькина.

Научные интересы Степана Павловича — теория итераций функций действительного переменного, краевые задачи дифференциальных уравнений смешанного типа — находятся в стороне от непосредственных интересов современной школы, однако проблемы школы ему не чужды. Степана Павловича с полным основанием можно назвать Учителем с большой буквы, Учителем учителей. Не только навсегда запоминающимися лекциями, но приемами работы, всем своим обликом, всей своей жизнью он дает образец учителю и начинающему вузовскому преподавателю. О стиле работы профессора Пулькина можно говорить много. Тщательная отработка деталей каждой лекции, каждого практического занятия, стремление к ясности изложения без снижения научного уровня, доброжелательность, внимание к

человеку, уважение собеседника, неиссякаемое трудолюбие, разумная требовательность — составные части стиля его работы.

Сорок пять лет работает на факультете Степан Павлович. Многие тысячи учителей математики подготовлены за это время, десятки вузовских преподавателей прошли школу Пулькина, усваивая и неся дальше все лучшее из опыта этого незаурядного педагога. Авторитет его на факультете исключительно велик. Ни один серьезный вопрос организации учебного процесса не решается без его консультации.

С. П. Пулькин много внимания уделяет методике вузовской работы. Вузовский преподаватель должен знать свой предмет. Это — аксиома. Но не менее важно и умение донести знания до слушателей. Преподаватель должен искать пути наиболее эффективного выполнения стоящей перед ним задачи по подготовке высококвалифицированных специалистов. На поиски внутренних резервов преподавания нацеливает своих подчиненных заведующий кафедрой профессор Пулькин. Им написано ряд методических разработок для студентов и серия книг: «Неопределенный интеграл» — пособие для заочников (1960), «Численные методы алгебры и анализа» (1966) и ряд других. В каждом отдельном случае он идет от практики, ею выверяя найденное теоретически, снова претворяя в практику и снова внося коррективы. Тщательная отработка каждого приема, каждой задачи, каждой строки книги — это также стиль работы С. П. Пулькина.

Более двадцати лет Степан Павлович руководит аспирантами, его учеников можно найти во многих педагогических институтах страны. Четверть века функционирует созданный им семинар по уравнениям смешанного типа, который давно перерос рамки города Куйбышева, стал Поволжским зональным и вносит свою лепту в дело повышения профессиональной подготовки преподавателей математики пединститутов.

Профессор С. П. Пулькин — деятель математического образования широкого диапазона. Помимо чисто преподавательской деятельности и написания учебных руководств он принимает активное участие в работе различных общественных организаций, деятельность которых направлена на совершенствование математического образования: ученой комиссии по математике МП РСФСР, научно-методического совета МВО СССР, экспертной комиссии по математике Волжского региона, научно-методической комиссии Куйбышевского ГК КПСС. Он автор и соавтор программ по математическим дисциплинам для педагогических вузов, создатель и бессменный руководитель Волжского зонального объединения математических кафедр педагогических институтов. Много сил и времени затратил он на организацию издания «Волжского математического сборника», ответственным редактором которого был более 10 лет.

Трудовая деятельность С. П. Пулькина отмечена правительством орденами Трудового Красного Знамени и «Знак Почета», медалями «За доблестный труд в ознаменование 100-летия со дня рождения В. И. Ленина», «За доблестный труд в Великой Отечественной войне». Министерство просвещения наградило его значком «Отличник народного просвещения».

Пожелаем дорогому юбиляру многих лет жизни и новых творческих успехов в его благородном труде на благо Родины.

В. И. Левин (Москва),
К. А. Малыгин (г. Куйбышев)

ИВАН СЕМЕНОВИЧ БРОВИКОВ
(К 60-летию со дня рождения)

Исполнилось 60 лет со дня рождения ученого-математика и педагога, члена-корреспондента АПН СССР, доктора физико-математических наук, профессора Бровикова Ивана Семеновича.

И. С. Бровиков родился в с. Ольхи Шацкого района Рязанской области в семье крестьянина. В 1934 г. после окончания Куплинской школы колхозной молодежи Иван Семенович поступает на механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова, который с отличием оканчивает в 1939 г.

Свою педагогическую деятельность И. С. Бровиков начал в 1939 г. в качестве старшего преподавателя математики Коми государственного педагогического института, где читал лекции по различным разделам высшей математики.

С июля 1941 г. И. С. Бровиков в рядах Советской Армии. Он участвует в боях под Москвой, Старой Руссой, на Курской дуге, на Украине, в Румынии, Польше, Германии и Чехословакии, за что награжден орденом Красной Звезды и многими медалями.

В 1945 г. Иван Семенович поступает в аспирантуру НИИ механики МГУ и в 1948 г. защищает кандидатскую диссертацию.

С 1946 г. начинается научная деятельность И. С. Бровикова в Государственном океанографическом институте, где он выполняет ряд исследований по теории ветрового волнения — одной из важнейших проблем геофизики. Успешно применив методы статистической физики, он составил замкнутую систему уравнений и дал ее строгое решение. Ему также принадлежит заслуга теоретического вывода функции распределения элементов ветровых волн. За эти работы Иван Семенович был удостоен премии имени академика Ю. М. Шокальского. Все эти исследования вошли в докторскую диссертацию, которую он защитил в 1954 г. Доклад И. С. Бровикова о его работах в области ветрового волнения был представлен на Вторую сессию Международного совета геодезии и геофизики, которая состоялась в сентябре 1957 г. в г. Торонто (Канада).

В 1964 г. Академией наук СССР была издана под редакцией И. С. Бровикова аннотированная библиография работ на русском и иностранных языках по исследованию волн цунами за период 1726—1962 гг. Его научные интересы связаны и с математическим программированием. Он является членом Президиума Комитета по прикладной математике и вычислительной технике (ВСНТО СССР).

Все годы Иван Семенович совмещал научную деятельность с педагогической работой: был старшим преподавателем кафедры математики Академии авиационной промышленности, в течение ряда лет читал лекции на кафедре океанологии географического факультета МГУ по теории вероятностей и математической статистике в океанологических исследованиях, заведовал кафедрой высшей математики в Заочном институте советской торговли, где им были написаны учебные пособия для студентов по линейному программированию и монография «Математические методы анализа в торговле». С 1956 г. по настоящее время И. С. Бровиков работает заведующим кафедрой высшей математики во Всесоюзном заочном институте текстильной и легкой промышленности.

В 1965 г. Иван Семенович Бровиков избирается членом-корреспондентом Академии педагогических наук РСФСР, а затем и АПН СССР. В течение многих лет он состоял членом Ученого совета Московского областного педагогического института им. Н. К. Крупской и членом Ученого совета Научно-исследовательского института содержания и методов обучения АПН СССР; являлся научным консультантом сектора вычислительной математики института физики и математики Академии наук Киргизской ССР; более 10 лет был членом экспертной комиссии ВАК при Министерстве высшего образования СССР.

Иван Семенович часто выступает оппонентом на защитах кандидатских и докторских диссертаций, рецензирует книги и статьи по различным научным вопросам, руководит работой своих многочисленных аспирантов. Под его руководством продолжает функционировать научно-методический семинар «Современные идеи в преподавании математики в СССР и за рубежом» при НИИ содержания и методов обучения АПН СССР.

Поздравляя Ивана Семеновича со славным юбилеем, все друзья и товарищи желают ему доброго здоровья и новых творческих успехов в научной и педагогической деятельности.

С. В. Кудрявцев
(Москва)

ВЛАДИМИР ЯКОВЛЕВИЧ САННИНСКИЙ
(К 60-летию со дня рождения)

17 января 1977 г. исполнилось 60 лет со дня рождения кандидата педагогических наук, доцента кафедры геометрии и методики математики Тульского пединститута Владимира Яковлевича Саннинского.

В. Я. Саннинский родился в селе Турки Саратовской области в семье учителей. После окончания школы ФЗУ два года работал слесарем и осмотрщиком вагонов на железной дороге. В 1939 г. он окончил физико-математический факультет Оренбургского пединститута.

Педагогическая деятельность В. Я. Саннинского началась в 1937 г. Он работал учителем математики в средних школах Казалинска и Сорочинска Оренбургской области.

С января 1942 г. по май 1946 г. находился в рядах Советской Армии. За участие в Великой Отечественной войне награжден орденом Отечественной войны II степени, медалью «За оборону Сталинграда» и другими медалями.

После демобилизации из армии В. Я. Саннинский работал учителем математики средней школы № 16 в Ворошиловграде, руководил там же городским методобъединением учителей математики. В 1949 г. он был приглашен на работу в Ворошиловградский пединститут.

В 1956 г. В. Я. Саннинскому была присуждена ученая степень кандидата педагогических наук (по методике математики), звание доцента он получил в 1962 г.

По конкурсу в 1958 г. был избран на должность заведующего кафедрой математики Орского пединститута. С 1962 г. по 1965 г. в том же институте работал проректором по учебной и научной работе.

С 1965 г. и по настоящее время В. Я. Саннинский работает в Тульском пединституте. Он ведет курсы: «Научные основы школьного курса математики», «Практикум по решению задач», методические спецкурсы и спецсеминары.

В. Я. Саннинский проводит большую научно-методическую работу. Им опубликовано более 30 работ. Он является соавтором учебного пособия для педвузов «Методика преподавания математики в средней школе», I часть которого вышла в 1975 г. в издательстве «Просвещение», соавтором и редактором пособия «Практикум по решению задач», две части которого изданы Тульским пединститутом.

В. Я. Саннинский — активный участник многих межвузовских конференций и семинаров. Как член Бюро объединения математических кафедр пединститутов Центральной зоны РСФСР, он проделал большую работу по организации и проведению конференций и семинаров на базе Тульского пединститута.

Работая в пединституте, В. Я. Саннинский поддерживает тесную связь с учителями математики. Он неустанно пропагандирует среди них новые идеи школьного курса математики (теоретико-множественный подход и элементы математической логики), новинки учебно-методической литературы.

Большую работу он проводит и с учащимися, проявляющими повышенный интерес к математике. Часто выступает в лекториях для учащихся, преподает в ЮМШ. Последние 10 лет является бессменным председателем областного оргкомитета математической олимпиады. В качестве руководителя команды школьников принимал участие на многих Всероссийских и Всесоюзных математических олимпиадах.

Трудовая и общественная деятельность В. Я. Саннинского отмечена многими грамотами и благодарностями. Он награжден значком «Отличник просвещения РСФСР».

Пожелаем Владимиру Яковлевичу хорошего здоровья и дальнейших успехов в его многогранной деятельности.

П. А. Буданцев
(г. Тула),

Ю. М. Колягин
(Москва)

КРИТИКА И БИБЛИОГРАФИЯ

П. В. Стратилатов
(Москва)

ПОЗНАКОМИМСЯ С КНИГОЙ «МАТЕМАТИКА В ВОСЬМИЛЕТНЕЙ ШКОЛЕ»

Книга «Математика в восьмилетней школе (обзор содержания)» авторов Н. А. Ермолаевой и Г. Г. Масловой издана издательством «Просвещение» в 1976 г. в качестве пособия для учителя. Такое издание крайне необходимо: все классы школы перешли на новую программу, утверждены учебники для IV и V классов, весной 1977 г. предстоит первый выпуск учащихся средних школ, изучавших курс математики по новой программе и новым учебным пособиям.

В рецензируемом пособии отражены основные вопросы программы восьмилетней школы. Оно содержит следующие разделы: 1) введение; 2) краткий обзор курса математики IV и V классов и особенностей новой программы по алгебре и геометрии VI—VIII классов; 3) обзор отдельных тем и понятий с некоторым анализом изложения их в учебных пособиях, среди них теоретико-множественные понятия и понятия математической логики; понятие функции (отображения) в алгебре и геометрии; уравнения и системы уравнений, неравенства и системы неравенств; выражения, тождественные преобразования выражений; некоторые особенности нового курса геометрии; 4) воспитание в процессе обучения математике; 5) приложения, где приведены: схема программы; символика, используемая в восьмилетней школе; примеры уравнений и неравенств, систем уравнений и неравенств; примерный вариант письменной работы по алгебре за курс восьмилетней школы.

Во введении и обзоре курса математики IV—VIII классов отмечаются основные отличия новой программы и новых учебных пособий, в которых она реализуется и раскрывается: введение простейших понятий теории множеств и математической логики, выделение стержневых понятий (числа, функции, уравнения, неравенства, тождества, геометрической фигуры и др.) и, наконец, тесная взаимосвязь при изучении основных понятий. Вместе с тем подчеркивается, что хотя программа сохраняет достаточно большую часть традиционной программы, но подход к изучению этого материала во многих случаях существенно отличается от установившегося ранее. Авторы кратко останавливаются на включении новых вопросов и на перестановке тем по годам обучения курса математики IV и V классов, а также курса алгебры и геометрии VI—VIII классов. Самым большим по объему является третий раздел пособия, в нем выделяются принципиально новые вопросы или вопросы, трактуемые с принципиально новых позиций.

Рассматриваемые разделы и вопросы позволяют авторам подтвердить методическую особенность новой программы: изучение основных понятий проходит в тесной взаимосвязи. Это ясно из того, что почти в каждом из рассматриваемых вопросов привлекается программный материал всех лет обучения восьмилетней школы; в каждом из разделов приводятся определения основных понятий, указываются объем изучаемого теоретического материала, степень трудности упражнений, приводятся примеры упражнений и оформление их решений, выясняется, что должен твердо усвоить учащийся в результате изучения данного раздела.

При рассмотрении понятия функции (отображения) подвергнуто обзору множество элементарных функций: прямая пропорциональность, обратная пропорциональность, линейная функция, квадратный трехчлен, степенная функция с натуральным показателем, обратная ей функция, показательная функция и обратная ей (при основании 10), рассматривается частный вид функции — последовательность.

Отдельный пункт посвящен тригонометрическим функциям в пределах программы VIII класса. Кроме тригонометрических функций из программы по геометрии здесь же рассмотрены перемещения, векторы и понятия подобия и гомотетии. Хорошо, что в этом пункте затронут вопрос об отображении множества в множество (с. 29) и приведены примеры доказательства теорем с помощью понятия перемещения (с. 33). Говоря об уравнениях, неравенствах и их системах, авторы выделяют вопрос об уравнениях, содержащих переменную в знаменателе, приводят решение упражнений. Как при решении систем уравнений, так и при решении систем неравенств ими используется графическая иллюстрация, пересечение и объединение множеств решений уравнений (неравенств), входящих в систему.

Рассматривая вопрос о выражениях и их тождественных преобразованиях, они ограничиваются выражениями с переменными. Выяснив, какие два выражения называются тождественно равными на данном множестве, рассматривают степень с натуральным показателем, одночлен, многочлен и основные виды их преобразований, а также тождества сокращенного умножения; далее говорят о дробных выражениях и преобразованиях суммы, разности, произведения и частного двух дробей в дробь. Приведен материал о степенях и корнях с рациональным показателем. Заканчивается этот раздел вопросом о вычислениях с десятичными логарифмами и кратким замечанием о приближенных вычислениях.

В разделе об особенностях нового курса геометрии, как и в учебнике, выделен вопрос об определениях, указана последовательность теорем планиметрии, причем большое внимание уделено координатной записи некоторых перемещений и формулам длины окружности и площади круга (VIII кл.). В дополнение к традиционным задачам авторы приводят примеры упражнений на более глубокое усвоение программного материала, причем дано решение одной задачи. В конце раздела рассматривается вопрос о начальных сведениях из стереометрии. Авторы подчеркивают, что основное внимание при изучении этого материала следует обратить на создание у учащихся наглядных представлений. При ознакомлении с взаимным расположением точек, прямых и плоскостей выделены основные свойства расположения прямых, прямой и плоскости, двух плоскостей в пространстве. Приводятся формулы для вычисления площадей поверхностей и объемов прямой призмы, пирамиды, цилиндра, конуса и шара, а также примеры упражнений.

Вопрос о воспитании в процессе обучения математике, к сожалению, раскрыт конспективно.

В отношении приложений следует отметить, что указание символики используемой в IV—VIII классах, весьма целесообразно Большую помощь учителю окажут приведенные примеры упражнений на уравнения и неравенства, которые даны по годам обучения и по темам данного класса. Приведенный примерный вариант письменной работы по алгебре за курс восьмилетней школы будет служить учителям некоторым ориентиром.

К сожалению, в книге имеется и ряд опечаток.

В заключение отметим, что приводимые примеры упражнений для закрепления и контроля по степени трудности являются несложными; можно рекомендовать учителю для отдельных классов и для индивидуальной работы с хорошо успевающими учащимися степень трудности упражнений несколько повысить.

ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

Выход книги «Математика в восьмилетней школе (обзор содержания)» был продиктован необходимостью познакомить с основными вопросами программы восьмилетней школы учителей математики, главным образом тех, кто приступил к работе в IX—X классах, не имея еще опыта работы в IV—VIII классах.

В этой книге в обобщенном виде представлены содержание курса математики восьмилетней школы, уровень требований к знаниям и умениям школьников, задачи и упражнения, выполнение которых обязательно для всех учащихся. Это, естественно, расширяет круг читателей, которым может оказаться полезной эта книга (преподаватели средних специальных учебных заведений и профессионально-технических училищ, студенты педагогических институтов).

В настоящее время на основе учебных пособий по математике, по которым работает восьмилетняя школа, создаются стабильные учебники. Уже введены стабильные учебники в IV—V классах. В последующие три года в качестве стабильных будут утверждены учебники алгебры и геометрии для VI—VIII классов. Программа курса математики в основном сохраняется, в нее вносятся лишь некоторые локальные усовершенствования. При переработке учебников учитывается опыт работы общеобразовательной школы, предложения институтов усовершенствования учителей и отдельных учителей. Уточняются формулировки, совершенствуется система упражнений на основе более точного выделения результатов обучения по каждому пункту, параграфу, теме, устанавливаются более органические связи между курсами алгебры и геометрии, связи с другими предметами.

К сожалению, в книге «Математика в восьмилетней школе» допущены ошибки и опечатки. Приведем наиболее существенные из них:

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
13	11-я сверху	$x-3\geqslant 0 \quad x-3\leqslant 0.$	$x-3>0 \quad x-3<0.$
13	12-я сверху	$]-\infty;\ 2[\ \cup\ [3;\ +\infty[$	$]-\infty;\ 2[\ \cup\ ]3;\ +\infty[$
23	5-я сверху	$n\in N,$	$n\in N,\ n\neq 1,$
25	1-я снизу	$10^{-3}\cdot 10^{0,72}=5,3\cdot 10^{-3}.$	$10^{-3}\cdot 10^{0,72}\approx 5,3\cdot 10^{-3}.$
34	7-я сверху	$\lvert OX_1\rvert=k\lvert OX\rvert.$	$\overrightarrow{OX_1}=k\overrightarrow{OX}.$
34	16-я сверху	$\lvert X_1Y_1\rvert=k\lvert XY\rvert.$	$\overrightarrow{X_1Y_1}=k\overrightarrow{XY}.$
38	15-я снизу	$x^{-\frac{3}{5}}\cdot x^{\frac{7}{5}}=9\cdot 0,2^x=\sqrt[3]{0,008.}$	$x^{\frac{3}{5}}\cdot x^{\frac{7}{5}}=9.$
38	12-я снизу	$x>0.$	$x\geqslant 0.$
47	12-я снизу	$b\not\equiv 0$	$b\neq 0$
48	13—14-я сверху	преобразование их в дробь	преобразование их в дробь, числитель и знаменатель которой — целые выражения.
50	10-я снизу	$a>0,$	$a\geqslant 0,$
52	1-я сверху	Представьте в виде квадрата $(x>0)$ выражения:	Представьте в виде квадрата выражения:
52	2-я сверху	$\frac{x^{\frac{1}{3}}-3}{x-9}.$	$\frac{x^{\frac{1}{2}}-3}{x-9}.$
54	11-я сверху	$4,8\leqslant l\leqslant 4,8.$	$4,8\leqslant l\leqslant 4,9.$
55	17-я снизу	$\lvert X_1Y_1\rvert=k\lvert XY\rvert,$	$\overrightarrow{X_1Y_1}=k\overrightarrow{XY},$

Н. А. Ермолаева, Г. Г. Маслова
(Москва)

Е. М. Больсен
(г. Ананьев)

ПЕРВОЕ В РОССИИ НАУЧНОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

Группа одесских математиков, преподавателей Новороссийского университета[1], сотрудников научно-популярного журнала «Вестник опытной физики и элементарной математики», учитывая большой спрос на научно-популярную литературу, организовала в 1905 г. специальное научное издательство «Матезис». Научную комиссию издательства возглавил приват-доцент Новороссийского университета, редактор «Вестника» *В. Ф. Каган* (1869—1953), впоследствии видный советский математик.

В математической секции научной комиссии принимали активное участие одесские математики *И. В. Слешинский, С. О. Шатуновский, И. Ю. Тимченко, А. Д. Крыжановский,* харьковские — *С. Н. Бернштейн, Д. М. Синцов,* профессор Петербургского университета *К. А. Поссе* и другие. За первые десять лет своего существования (1905—1915) издательство «Матезис» выпустило более трехсот научных и научно-популярных книг по физико-математическим и естественным наукам видных зарубежных и отечественных ученых, из них почти треть всех книг по математике. В первые годы своей деятельности «Матезис» предприняло издание научно-популярной библиотеки классиков математики, доступной для молодежи. Одной из первых в этой серии была издана работа известного немецкого математика *Р. Дедекинда* (1831—1916) «Непрерывность и иррациональные числа» (1909) (работа в сокращенном виде была опубликована в «Вестнике» в 1894—1895 гг. (№ 191—192), в переводе *С. О. Шатуновского*). Предисловие *С. О. Шатуновского* к книге *Р. Дедекинда* свидетельствует о его материалистических взглядах на происхождение математических понятий. Отмечая ошибочность взглядов *Гемгольца*, которых придерживался и *Дедекинд*, о том, что «на числа мы должны смотреть прежде всего, как на ряд произвольно выбранных знаков», Шатуновский справедливо указывал, что «иррациональные числа (так же как и всякие другие) суть чистые знаки, которые могут быть и действительно бывают весьма полезны потому только, что этими знаками выражают реальные свойства вещей». В приложении к работе *Дедекинда* была дана статья редактора «Доказательство существования трансцендентных чисел» (по Г. Кантору).

В серии «Классики математики» в 1911 г. была также издана работа известного чешского математика и философа *Б. Больцано* (1781—1848) «Парадоксы бесконечного». Перевод с немецкого выполнен *И. В. Слешинским.* Много редакторских дополнений внес он и в изданную «Матезис» «Алгебры логики» *Л. Кутюра* (1909), которое являлось первой в России книгой по математической логике (если не считать небольшого исследования *П. С. Порецкого,* доступного для специалистов).

Из книг этой серии следует отметить и содержательный исторический очерк итальянского математика *Ф. Рудио* «О квадратуре круга» с приложением статей Архимеда, Гюйгенса, Лежандра, Ламберта по данному вопросу (1911).

Читатели также с интересом встретили и книгу немецкого историка математики *Г. Гейберга* «Новое сочинение Архимеда», содержащее послание Архимеда к Эратосфену о некоторых теоремах механики, которое им было найдено в одной из библиотек Константинополя.

Большое значение для повышения уровня преподавания математики в высшей и средней школе имело издание высококачественных переводных учебников по математическому анализу *Г. Ковалевского* (с нем.), *Э. Чезаро* (с итал.) и аналитической геометрии *О. Дзиобека* (с нем.).

Издательство «Матезис» довольно оперативно знакомило читателей и с новыми идеями в преподавании школьного курса математики. Большим спросом у преподавателей математики пользовался учебник по элементарной математике французского математика и педагога *Э. Бореля* (1871—1956). Перевод и редактирование этой книги выполнил *В. Ф. Каган.* Ему же принадлежит большая вступительная статья к первой книге учебника (1911) «О реформе преподавания математики в средних учебных заведениях Германии и Франции» и содержательный обзор основных геометрических преобразований.

В. Ф. Каган также выполнил перевод книги немецкого математика Ф. Клейна «Вопросы элементарной и высшей математики».

Большое значение для популяризации математических знаний среди учащейся молодежи, преподавателей средних учебных заведений имело издание «Математической энциклопедии» немецких математиков *Вебера* и *Вельштейна.* «Энциклопедия» была написана на высоком научном уровне, знакомила читателей в популярной форме с современной математической наукой. Перевод с немецкого, редактирование и комментарии выполнил *В. Ф. Каган,* ему же принадлежит статья о неевклидовых геометриях Лобачевского и Римана.

Первое издание «Энциклопедии» быстро разошлось, и спустя два года первый том был издан вторично (третье издание было осуществлено в 1927 г.).

«Матезис» уделял большое внимание и выпуску книг по истории математики. Большим спросом пользовалась книга американского математика *Ф. Кэджори* (1859—1930) «История элементарной математики» (1910) с указаниями на методы преподавания с содержательными дополнениями известного историка математики *И. Ю. Тимченко.*

«Матезис» не забывало и юных любителей математики, учащихся средних учебных заведений; для них была издана специальная библиотека по элементарной математике под редакцией *С. О. Шатуновского.* Впервые на русский язык было переведено несколько книг по занимательной математике.

Издательство «Матезис» выпустило несколько работ и отечественных математиков: *А. Маркова* по теории вероятностей (1911), *В. Ф. Кагана* «Преобразование многогранников» (1913), *С. О. Шатуновского* «Введение в анализ» (1923) и русскую математическую библиографию проф. *Д. Синцова* (1910). Большой заслугой «Матезис» была широкая пропаганда научного наследия гениального русского математика *Н. И. Лобачевского.* Издательством были изданы две большие работы *В. Ф. Кагана* «Опыт обоснования геометрии Лобачевского» (т. I, 1905), «Исторический очерк развития учения об основаниях геометрии» (т. II, 1907).

В последнее пятилетие своего существования (1919—1924) «Матезис» издало мало книг: сказывалось отсутствие бумаги, типографской базы, квалифицированных переводчиков. Были только повторные издания учебника *Бореля* (1923), *Адлера* «Геометрические построения» (1924) и некоторых книг по математическим развлечениям.

В 1922 г. по рекомендации *О. Ю. Шмидта В. Ф. Каган* был приглашен в Москву и назначен заведующим научным отделом ГИЗа.

Издательство «Матезис» сыграло большую роль в популяризации математических знаний, в повышении уровня преподавания в средней и высшей школе в дореволюционной России.

[1] «Новороссийским» назывался университет в Одессе. Это название объясняется тем, что Одесса входила в Новороссийский край.

ХРОНИКА

О РАБОТЕ НАУЧНО-МЕТОДИЧЕСКИХ СЕМИНАРОВ ПРИ НИИ СиМО АПН СССР В 1975/76 УЧЕБНОМ ГОДУ

«Основные проблемы преподавания математики в средней школе»

С января 1976 г. объединена работа семинаров «Основные проблемы преподавания математики в средней школе» и «Методы преподавания геометрических и графических дисциплин». Руководство объединенным семинаром осуществляют действительный член АПН СССР А. И. Маркушевич и действительный член АН УССР Б. В. Гнеденко. Семинаром «Методы преподавания геометрических и графических дисциплин» руководил с 1945 по 1974 г. действительный член АПН РСФСР Н. Ф. Четверухин.

С объединением семинаров увеличилось число активно работающих участников. Как и в прошлые годы, разнообразен состав участников. Это и учителя средней школы, и методисты, и преподаватели педагогических институтов, и психологи. В работе семинара принимают участие не только москвичи, но и посланцы других городов (главным образом из областей, смежных с Московской областью), гости столицы, слушатели факультетов повышения квалификации.

В текущем году на семинаре были заслушаны доклады, в которых освещались актуальные проблемы обучения математике в средней школе.

Живой интерес у слушателей вызвал доклад академика *А. Н. Колмогорова* «Десять лет работы над учебниками математики средней школы (1965—1975)». Докладчик отметил прогрессивную роль проводимой перестройки содержания среднего математического образования, дал критический анализ опыта работы по созданию новых учебников. В заключение А. Н. Колмогоров изложил предложения по совершенствованию учебников.

Старший научный сотрудник лаборатории обучения математике НИИ СиМО АПН СССР, один из авторов учебников по алгебре *Ю. Н. Макарычев* в докладе «Понятие отношения в курсе алгебры восьмилетней школы» рассказал о подготовке стабильного варианта учебника «Алгебра 6». Серьезное внимание в докладе было уделено обоснованию целесообразности включения в новое издание учебника понятия «отношение».

Важные вопросы совершенствования школьного математического образования были освещены в докладах старшего научного сотрудника НИИ СиМО АПН СССР *В. В. Фирсова* «О прикладной направленности школьного курса математики» и сотрудника Сибирского отделения АН СССР *Ю. А. Первина* «О работе группы Сибирского отделения АН СССР по применению вычислительной техники в школе».

Большой интерес у слушателей вызвал доклад профессора педагогического института им. В. И. Ленина *Р. С. Черкасова* «О некоторых общих вопросах методики преподавания математики». В докладе были раскрыты актуальные проблемы совершенствования методов обучения математике в средней школе и идеологическая борьба на методическом фронте.

На семинаре было также заслушано сообщение о характере перестройки математического образования в начальной школе. С ярким и эмоциональным докладом на эту тему выступил профессор *Н. Я. Виленкин*.

Проблеме подготовки учителя в условиях перехода школы на новые программы был посвящен доклад *Б. В. Гнеденко* «О специальности учителя математики».

По одной из трудных методических проблем выступил с докладом «Критерии оценок знаний учащихся по математике» кандидат педагогических наук *А. Д. Семушин*. Докладчик предложил оригинальное решение поставленной проблемы. Его сообщение вызвало активное и деловое обсуждение вопроса о нормах оценок знаний учащихся по математике.

На заключительных занятиях семинара «Методы преподавания геометрических и графических дисциплин» с докладами выступили доцент Коломенского педагогического института *Н. Н. Шоластер*, кандидаты педагогических наук *А. И. Фетисов* и *А. Д. Семушин*, аспиранты НИИ СиМО АПН СССР *А. М. Янченко* и *Д. И. Хан*. В этих докладах освещались различные стороны изучения геометрических преобразований в средней школе. Интерес представляли как предложения об изучении преобразований в условиях действующих программ, так и перспективы изучения геометрических преобразований в школе.

Л. И. Федорова
(Москва)

«Передовые идеи в преподавании математики»

В 1975/76 учебном году было проведено 5 заседаний, на которых заслушаны и обсуждены доклады, посвященные вопросам совершенствования среднего математического. образования.

15/I 1976 г. *Т. Я. Федотова* (г. Тула) доложила о своем исследовании «Использование математических структур для осуществления межпредметных связей». Основной вывод исследования — введение математических структур позволяет осуществить единый подход к изучению многих разделов алгебры и геометрии, что экономит время на освоение программного материала. Наибольшего внимания с позиции унификации школьного курса математики заслуживают структуры порядка и группы. В соответствии с этим определился объем знаний о структурах: бинарное отношение, функциональное отношение, отношения эквивалентности и порядка, внутренняя операция и ее свойства, группа, изоморфизм групп. В методике освоения основных структурных понятий автор выделила три этапа математической деятельности: интуитивно-экспериментальный, этап теоретической организации материала и этап применения математической теории.

12/II 1976 г. *П. Т. Апанасов* (Москва) в докладе «Построение системы упражнений с экономическим содержанием в курсе математики средних учебных заведений» показал, что экономический материал в качестве приложений математики является наиболее благодатным. В связи с этим было отмечено, что система упражнений с экономическим содержанием способствует: 1) математическому развитию учащихся, вырабатывая у них умения и навыки в использовании математического аппарата для познания экономических явлений; 2) накоплению полезных научно-практических знаний из различных областей практической деятельности человека; 3) повышению экономической грамотности учащихся на базе анализа практических ситуаций.

11/III 1976 г. *А. С. Морозов* (г. Орехово-Зуево) сделал сообщение на тему «Вопросы связи теории и практики в преподавании математики». Отметив исторически сложившиеся в этом направлении положительные тенденции (русские методисты математики, в частности И. С. Шохор-Троцкий, Ф. Клейн в Германии, Д. Перри в Англии), докладчик подробно остановился на соотношении теоретического материала и упражнений в курсах математики в техникумах и средних ПТУ, связав этот вопрос с задачей профессионально-политехнического образования.

8/IV 1976 г. *И. П. Фролова* (г. Нижний Тагил) доложила об опыте работы по воспитанию математической (вычислительной) культуры учащихся в основном через факультатив. Содержание работы по освоению учащимися основных идей современной вычислительной математики в широком смысле развивалось по двум направлениям: 1) анализ числовых систем школьного курса как алгебраических структур; 2) составление таблиц (умножение многозначного числа на однозначное, квадраты и кубы чисел и др.) с целью показать цикличность вычислений, необходимость задания начальных данных для начала счета, возможность автоматизировать процесс вычислений.

Доклад *В. Ф. Волгиной* (г. Южно-Сахалинск) «Графовые модели в методике преподавания математики» был посвящен новым формам исследования методической эффективности разных приемов изучения материала с учащимися.

13/V 1976 г. *А. А Крушельницкий* (г. Гродно) сделал доклад «Реформа содержания и методов школьного математического образования в Польской Народной Республике». Проведя анализ основных тенденций в развитии методики преподавания математики за 10 лет в послереформенной (1963 г.) польской школе, докладчик остановился на содержании Проекта программы по математике для I—X классов общеобразовательной школы (1973 г.) как нового шага на пути ее дальнейшего совершенствования. А. А. Крушельницкий обратил внимание на ряд интересных моментов в содержании программы, например постепенное введение элементов теории вероятностей и математической статистики, начиная с IV и кончая X классом.

И. С. Бровиков, В. Н. Шапкина
(Москва)

НАУЧНО-ПРАКТИЧЕСКАЯ КОНФЕРЕНЦИЯ В УЛЬЯНОВСКЕ

26—29 октября 1976 г. в г. Ульяновске состоялась научно-практическая конференция преподавателей пединститутов Поволжской зоны РСФСР по проблемам совершенствования учебно-воспитательной работы пединститутов со студентами-заочниками в межсессионный период. Конференция открылась вступительным словом ректора Ульяновского педагогического института им. И. Н. Ульянова делегата XXV съезда КПСС доцента *В. В. Наймушина.*

На пленарном заседании были прослушаны доклады: «Проблема совершенствования заочного обучения в свете решений XXV съезда КПСС» (и. о. заведующего отделом заочного и вечернего обучения Министерства просвещения РСФСР *С. И. Мазина*); «Система и организация самостоятельной межсессионной работы студентов по педагогическим дисциплинам» (доцент *М. А. Уфимцева,* Москва); «Общепедагогические основы консультации и ее место в учебно-воспитательном процессе в системе высшего заочного педагогического образования» (доцент *В. М Юшков,* г. Пенза).

На конференции работали секции общественных, филологических, физико-математических и естественных наук, педагогики и психологии, методики преподавания математики и географии.

На секции методики преподавания математики было прослушано 8 докладов. Наибольший интерес вызвали доклады «Система упражнений на практических занятиях по геометрии» (доцент *Е. С. Петрова,* г. Архангельск), «Организация самостоятельной работы по курсу методики преподавания математики» (доцент *З. Г. Борчугова,* Ленинград), «О профессиональной подготовке студентов-заочников в процессе преподавания математических дисциплин» (доцент *Т. Т. Фискович,* г. Ростов-на-Дону). В докладе доцента С. Г. Первухиной «Из опыта организации самостоятельной работы студентов-заочников по методике преподавания математики в межсессионный период» была отражена работа кафедры методики математики Ульяновского пединститута в следующих направлениях: вооружение навыками самостоятельной работы с научной и методической литературой; формирование профессиональных и исследовательских навыков. Большое внимание было уделено вопросу изучения студентами новых учебных пособий для средней школы, теоретических и методических статей из журналов «Математика в школе», «Квант» и других пособий.

Участники конференции ознакомились с достопримечательностями г. Ульяновска.

Н. К. Ермолаев
(г. Ульяновск)

Сдано в набор 22.12.76 г. Подписано в печать 28.01.77 г. Формат 84 × 108 1/16
Бумага тип. № 2. Печ. л. 6,0. Усл. печ. л. 10,08. Уч.-изд. л. 11,54. Тираж 418 780 экз.
Заказ 623 Цена 45 коп.

Адрес издательства: *107066, Москва, Б-66, Лефортовский переулок, д. 8.*
Телефон редакции: 283-85-83.
Издательство «Педагогика» Академии педагогических наук СССР
и Государственного комитета Совета Министров СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли.

Московская типография № 13 Союзполиграфпрома при Государственном комитете Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 107005, Москва, Б-5, Денисовский пер., д. 30.

Круг-сигнал

С помощью предлагаемого прибора ученики могут сообщать ответы, а учитель проверять их одновременно у всего класса. При этом можно использовать как выборочные, так и свободно конструируемые ответы.

Рис. 1

Ученик набирает ответ буквами, цифрами и знаками (как, например, на пишущей машинке). В результате образуется цветовой и числовой (буквенный) коды ответов, предъявляемые учителю. Существенно, что ученик, набирая ответ, не обращает внимания на образование кода.

Рис. 2

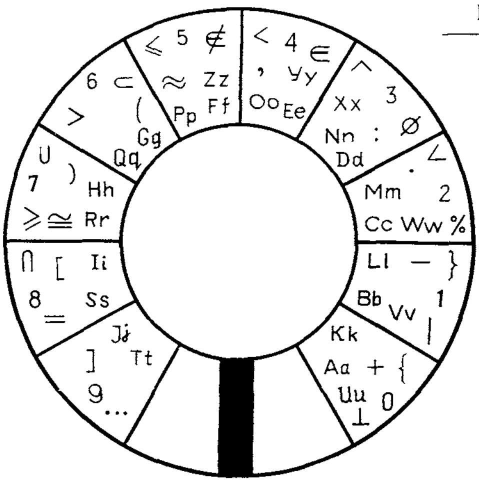


Рис. 3

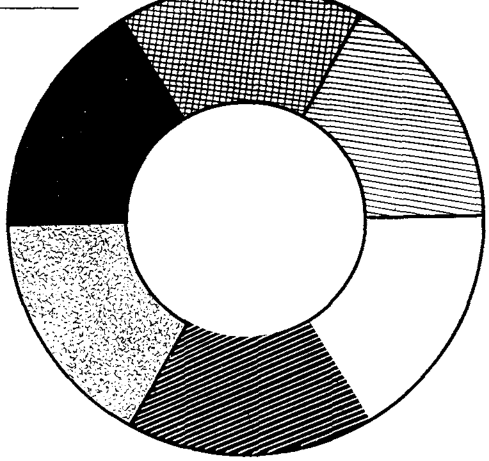
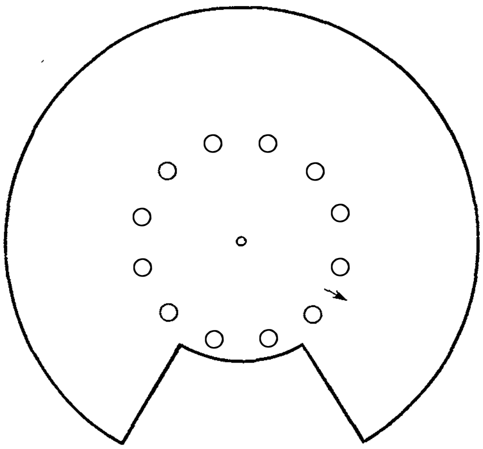


Рис. 4



Круг-сигнал прост в устройстве и легко может быть изготовлен в школьных мастерских. Он состоит из четырех частей: картонного круга радиусом 20 мм (рис. 1), картонного кольца внутренним радиусом 30 мм и внешним радиусом 60 мм (рис. 2 и 3), картонного круга радиусом 60 мм с вырезанной частью и с 12 отверстиями (рис. 4), рукоятки из дерева или пластика длиной 120 мм и шириной, равной расстоянию между двумя соседними отверстиями в картонном круге (рис. 5). Круг радиусом 20 мм и кольцо крепятся неподвижно на рукоятке (для прочности их можно скрепить картонной полоской, рис. 6). На них наносятся цифры, буквы и знаки, позволяющие ученику набирать ответ (рис. 1 и 2). Оборотная сторона кольца (рис. 3) делится на шесть частей, и каждая часть окрашивается в свой цвет (например, черный, красный, зеленый, белый, синий, желтый). С этой оборотной стороны укрепляется круг с вырезом и 12 отверстиями (рис. 6). Он должен свободно вращаться вокруг центра на оси из прочной нити или проволоки. На стороне этого подвижного круга, обращенной к ученику, изображается стрелка, как на рис. 4.

Рис. 5 и 7 показывают круг-сигнал в сборе, в исходном состоянии перед ответом: стрелка подведена под рукоятку прибора. К учителю в это время обращена оборотная сторона прибора, в которой виден цветной сигнал. После того как учитель задаст вопрос, ученик набирает ответ, вращая шариковой ручкой, карандашом и т. п. подвижный круг так же, как это делается при наборе телефонного номера. Однако подвижный круг не возвращается каждый раз в исходное положение, и в процессе ответа происходит «суммирование» его составляющих — прибор приходит в конечное положение, в вырезе подвижного круга появляется одно из 12 возможных цветовых пятен (одноцветное или двуцветное). Учитель видит, у всех ли появилось цветовое пятно, соответствующее правильному ответу (он определяет это по своему прибору), и делает соответствующие выводы. Таким образом, учитель может задавать как специально подготовленные вопросы, так и возникшие в ходе урока. При этом лишь требуется, чтобы учащиеся знали, в какой форме подавать ответ (например, при записи прямой AB нужно писать (AB), т. е. набрать знаки: (, A, B,). Разными окажутся записи десятичных дробей 0,5 и 0,50 и т. д., зато суммы $a+b$ и $b+a$ и (к сожалению) разности $a-b$ и $b-a$ приведут к одинаковому коду.

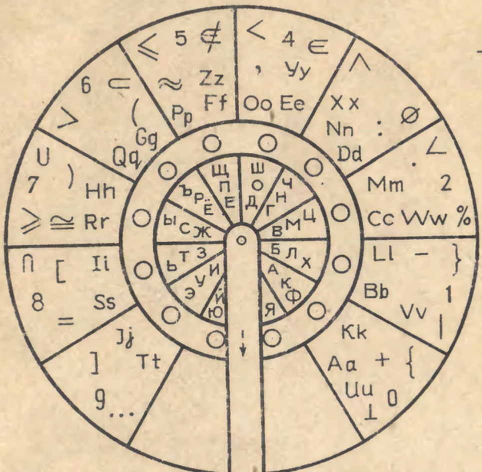


Рис. 5

После окончания работы стрелка будет показывать на ту или иную букву или цифру, что используется для кодирования ответа. Учитель может предложить учащимся сообщить письменно цифровые коды ответов на вопросы. Тогда мы получим работу с отсроченной проверкой, это позволяет проверить ответы на несколько вопросов, не заставляя учащихся отвечать одновременно.

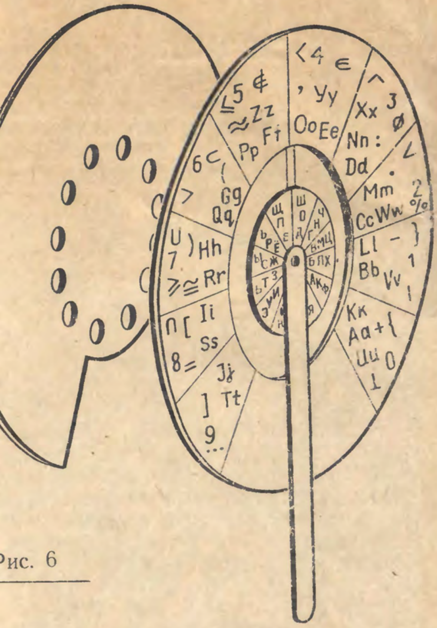


Рис. 6

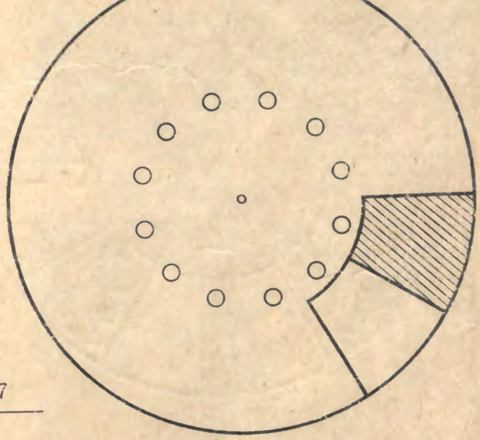


Рис. 7

На рисунках дан набор цифр, букв и знаков для IV и V классов. Мы считаем, что круг-сигнал можно использовать на уроках математики в любом классе, но тогда потребуется видоизменить этот набор.

К. С. Горбатов (г. Никополь)

Издательство «Педагогика»

«Математика в школе», 1977, № 1, 1—96