

МИНИСТЕРСТВО СЕЛЬСКОГО ХОЗЯЙСТВА РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ДЕПАРТАМЕНТ НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКОЙ ПОЛИТИКИ
И ОБРАЗОВАНИЯ



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

**«ЧЕЛЯБИНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ
АГРОИНЖЕНЕРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра сопротивления материалов

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по УР
А.А. Патрушев

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ПРОВЕРКА ЖЕСТКОСТИ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК

в программных продуктах SCAD, MSC.Patran-Nastran-2005

Методические указания

Челябинск 2007

Методические указания предназначены для студентов 2-го курса всех специальностей дневной формы обучения и студентов-заочников 3-го курса, изучающих дисциплины «Сопротивление материалов», «Прикладная механика» и «Техническая механика».

Составитель **Жилкин В.А.** - докт.техн.наук, профессор (ЧГАУ)

Рецензенты

Сапожников С.Б. - докт. техн. наук, профессор (ЮУрГУ)
Кромский Е.И. - канд. техн. наук, доцент (Уральский филиал МАДИ)

Печатается по решению редакционно-издательского совета ЧГАУ

© ФГОУ ВПО "Челябинский государственный агроинженерный университет", 2007.

ЗАДАНИЕ 5

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ПРОВЕРКА ЖЕСТКОСТИ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК¹

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

Для заданных расчетных схем статически определимых балок, испытывающих плоский поперечный изгиб и имеющих поперечные сечения:

балка № 1 - сечение прямоугольное ($h/b = 2$, h - высота поперечного сечения, b - его ширина; материал – дерево; $[\sigma] = 10$ МПа);

балка № 2 - сечение круглое (материал – сталь легированная; $[\sigma] = 100$ МПа);

балка № 3 - сечение круглое, полое ($d/D = 0.8$; материал – сталь малоуглеродистая; $[\sigma] = 160$ МПа);

балка № 4 - двутавр (материал – сталь; $[\sigma] = 160$ МПа, $E = 2 \cdot 10^5$ МПа), необходимо в системах **MathCAD, SCAD, MSC.Patran-Nastran:**

для **балок № 1, 2, 3** осуществить подбор размеров поперечных сечений из расчета прочности балки по нормальным напряжениям и выполнить проверку прочности по касательным напряжениям (по формуле Журавского);

для **балки № 4** выполнить анализ напряженного состояния в балке, построить упругую линию и проверить балку на жесткость.

Необходимые числовые данные приведены в таблицах вариантов заданий.

Допускаемые касательные напряжения обычно принимают $[\tau] = 0,6[\sigma]$. Для дерева $[\tau] = 2$ МПа, для стали малоуглеродистой $[\tau] = 1000$ МПа.

Максимальные статические моменты отсеченной части площади поперечного сечения $(S_{н.о}^{omc})_{max}$, расположенной выше (или ниже) рассматриваемой точки относительно нейтральной оси y , равные произведению этой площади на расстояние от центра тяжести этой площади до оси y , для прямоугольного, круглого и трубчатого сечений вычисляются по следующим формулам:

для прямоугольника

$$(S_{н.о}^{omc})_{max} = \frac{bh^2}{8};$$

для круга

$$(S_{н.о}^{omc})_{max} = \frac{D^3}{12};$$

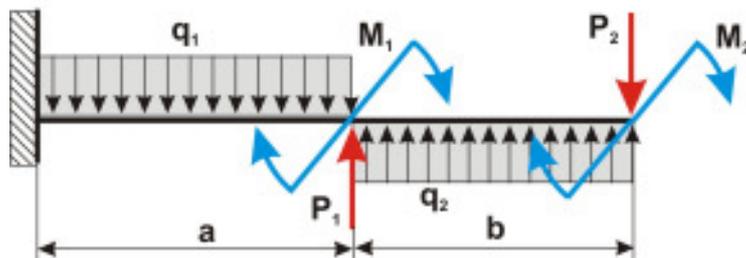
для трубчатого сечения (определяется разностью статических моментов большого и малого кругов)

$$(S_{н.о}^{omc})_{max} = \frac{1}{12}(D^3 - d^3).$$

¹ Алмаметов Ф. З., Арсеньев С. И., Курицын Н. А., Мишин А. М. Расчетные и курсовые работы по сопротивлению материалов: Учебное пособие. 3-е изд., стер. - СПб.: Издательство «Лань», 2005. – 368 с.

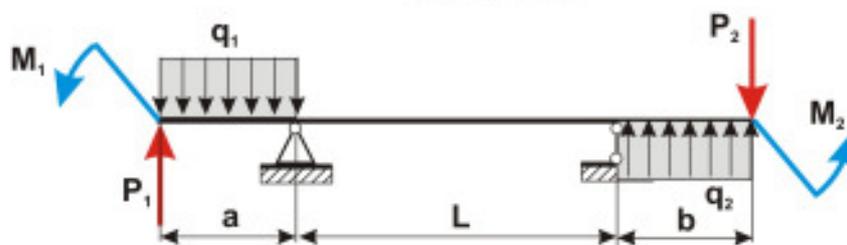
ВАРИАНТЫ ЗАДАНИЙ

Схема № 1



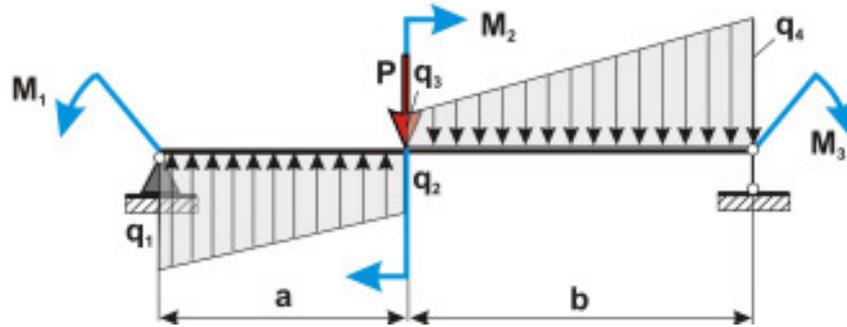
Номер варианта	a	b	q_1	q_2	P_1	P_2	M_1	M_2
	$м$		$кН/м \cdot 10$		$кН \cdot 10$		$кН \cdot м \cdot 10$	
1	2	1	0,5	0	0	0,8	1	0
2	2	2	0,6	0,4	0	0,5	2	0
3	1	3	0	0,3	1	0	0	2
4	3	2	0,8	0	1,5	0	0	3
5	3	2	0	1,6	0	2	2	0
6	2	3	0	2	1	3	2	0
7	3	2	1,5	0,5	2	0	0	3
8	2	2	1,2	0,8	0	0	4	0
9	4	2	0,6	1,5	0,5	2	0	0
10	2	4	1,6	0,6	1,1	1,5	2	1
11	3	1	0,3	0	0	0,6	0,5	0
12	3	2	0,4	0,5	0	0,4	1	0
13	2	3	0	0,4	0,6	0	0	1,8
14	1,5	2,5	0,6	0	0,6	0	0	2
15	2	2	0	0,8	0	1	0,7	0
16	2	4	0	0,8	0,8	2	1,6	0
17	2	2	1,6	0,5	0,8	0	0	2
18	3	2	0,5	0,4	0	0	1,6	0
19	2	4	1,5	0,8	1,3	2,5	0	0
20	3	1	0,6	1,2	1,2	0,8	1,6	0,9
21	2	2	0,4	0	0	0,4	1	0
22	2	3	0,3	0,4	0	0,6	0,8	0
23	3	2	0	0,5	0,8	0	0	1,5
24	2	3	0,4	0	0,5	0	0	1,5
25	1	4	0	0,8	0	2	0,9	0
26	2	3	0	1	0,6	1,6	1,2	0
27	2,5	1,5	0,8	0,6	0,4	0	0	1,5
28	4	2	0,4	0,6	0	0	0,8	0
29	2	3	1,2	1	0,4	2,2	0	0
30	2	2	2	1	1,4	1	0,8	1,2

Схема № 2



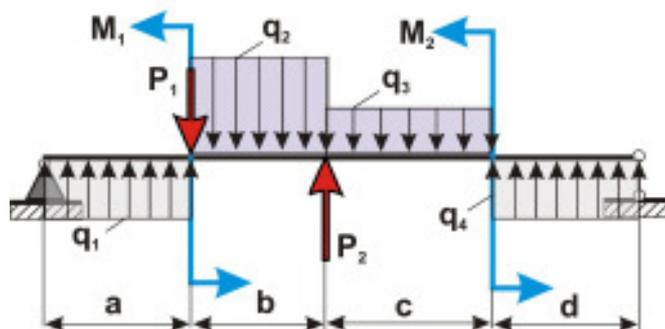
Номер варианта	a	L	b	q_1	q_2	P_1	P_2	M_1	M_2
	m			$\kappa H/m \cdot 10$		$\kappa H \cdot 10$		$\kappa H \cdot m \cdot 10$	
1	2	4	1	1,2	0,6	0	0,5	0	0
2	2	4	1	1,5	0	2	0	0	2
3	1	3	2	1	0	0	0,4	2,5	0
4	2	4	2	0,6	0,6	0	4	2	1
5	1,6	2,5	1	2	1,2	2	0,6	2	0
6	1,5	3	2	0	0,5	2	0	1	2
7	1	3	2	0	0,6	0,5	0,8	3	0
8	1	4	1	0,8	0,6	0,6	0,9	0	2
9	2	4	2	0,4	0,5	0	0,6	0	0
10	0,8	5	1	2	0,4	0,8	0	0	0,8
11	1	3	2	1,8	1	0	1	0	0
12	1	3	1	2	0	1,2	0	0	4
13	1	4	2	2	0	0	1	3	0
14	1	5	2	1,2	2	0	3	1	2
15	1	5	3	2	1	1,5	2	4	0
16	2	4	1	0	1,8	3	0	4	2
17	2	4	2	0	2	2	3	3	0
18	2	3	2	1,5	2	2	3	0	2
19	2	5	1	1,3	3	0	2	0	0
20	1	4	2	2	0,8	1	1,2	3	2
21	1	5	2	1,5	2	0	3	0	0
22	2	4	2	2,5	0	3	0	0	3
23	2	5	1	1,8	0	0	1,2	2	0
24	2	5	1	1	2	0	1,5	2	3
25	2	6	2	2	3	3	1,2	4	0
26	2	5	2	0	1	2	0	3	3
27	1	5	2	0	3	1	4	4	0
28	2	5	2	2	3	2	4	0	1
29	1	4	2	1	3	0	2	0	0
30	2	5	2	2	1	2	0	0	3

Схема № 3



Номер варианта	a	b	q_1	q_2	q_3	q_4	P	M_1	M_2	M_3
	m	$кН/м \cdot 10$					$кН \cdot 10$	$кН \cdot м \cdot 10$		
1	6	2	0	3	0	0	6	4	0	4
2	8	2	3	0	0	0	6	2	0	8
3	2	6	0	0	1	2	4	0	2	4
4	2	8	0	0	0	3	4	3	6	4
5	8	1	0	3	0	0	5	6	0	3
6	3	6	0	0	0	4	9	3	0	6
7	6	2	0	2	0	0	4	0	4	2
8	1	7	0	0	0	3	0	8	4	0
9	8	1	2	4	0	0	10	0	6	0
10	4	6	0	2	0	2	4	6	4	8
11	2	6	0	0	0	3	0	0	4	4
12	3	6	0	0	0	4	0	6	0	3
13	4	6	0	2	2	2	4	0	0	5
14	6	2	0	2	0	2	4	4	0	0
15	4	4	2	2	0	2	8	4	6	0
16	6	3	0	3	0	0	4	6	0	3
17	5	2	0	2	0	2	7	8	0	3
18	3	5	0	0	0	3	4	0	8	4
19	2	6	0	0	0	2	0	4	6	2
20	8	2	0	2	0	0	10	4	0	6
21	2	6	0	0	2	3	8	6	0	2
22	4	2	1	3	0	0	0	0	6	3
23	2	6	0	0	1	2	0	4	2	0
24	7	2	1	3	0	0	6	0	4	0
25	4	6	0	2	0	2	4	3	6	2
26	2	6	2	2	2	4	0	0	8	4
27	5	4	0	1	0	3	0	6	0	3
28	6	4	0	2	2	2	6	0	0	9
29	7	3	2	3	1	1	5	5	0	0
30	4	6	3	1	1	1	5	6	4	0

Схема № 4



Номер варианта	a	b	c	d	M_1	M_2	P_1	P_2	q_1	q_2	q_3	q_4
	m				$\kappa H \cdot m \cdot 10$		$\kappa H \cdot 10$		$\kappa H/m \cdot 10$			
1	3	2	2	3	0	6	4	8	2	2	2	0
2	2	3	2	2	0	4	5	12	0	2	2	2
3	2	2	2	2	6	0	0	10	2	3	3	2
4	4	1	1	3	8	6	7	3	4	0	0	4
5	1	2	4	2	3	6	3	12	0	3	3	0
6	1	3	2	3	6	0	3	12	0	3	3	3
7	3	1	2	2	8	0	4	8	2	0	2	0
8	1	3	1	3	0	8	8	3	0	2	0	4
9	4	1	1	2	0	12	12	6	3	0	0	2
10	2	2	1	3	0	13	0	4	2	3	0	2
11	3	2	2	1	4	0	6	12	2	2	2	0
12	2	2	3	2	6	0	0	9	0	2	2	2
13	2	2	2	2	4	8	4	12	0	2	2	2
14	3	1	1	2	7	0	9	8	3	0	0	2
15	2	3	2	3	2	0	5	8	2	2	2	2
16	3	2	2	1	6	6	8	12	2	1	1	0
17	3	1	1	3	8	0	8	10	2	2	2	2
18	3	1	2	2	0	4	6	0	3	0	3	0
19	4	1	4	1	5	0	0	12	2	0	2	0
20	3	3	1	3	0	5	10	5	2	2	0	2
21	2	2	2	2	0	4	8	0	0	0	2	3
22	1	2	3	2	6	0	5	10	0	0	2	2
23	3	3	1	1	0	8	0	8	2	2	0	0
24	4	2	1	2	0	6	12	0	3	2	0	0
25	3	3	2	1	6	3	4	12	2	2	0	0
26	2	3	2	1	10	0	0	10	2	2	2	0
27	2	2	2	2	0	4	0	8	2	2	2	2
28	1	3	2	2	4	0	6	12	0	3	0	3
29	4	1	1	4	5	5	8	4	2	0	0	2
30	1	3	1	3	6	0	8	4	3	2	0	3

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

СОДЕРЖАНИЕ ЗАДАНИЯ

Для заданных расчетных схем статически определимых балок, испытывающих плоский поперечный изгиб и имеющих поперечные сечения:

- **балка № 1** - сечение прямоугольное ($h/b = 2$, h - высота поперечного сечения, b - его ширина; $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$);
- **балка № 2** - сечение круглое ($[\sigma] = 100 \text{ МПа}$);
- **балка № 3** - сечение круглое, полое ($d/D = 0.8$; $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$);
- **балка № 4** - двутавр ($[\sigma] = 160 \text{ МПа}$, $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$);

необходимо в системах **MathCAD, SCAD, MSC.Patran-Nastran**:

- для **балок № 1, 2, 3** осуществить подбор размеров поперечных сечений из расчета прочности балки по нормальным напряжениям и выполнить проверку прочности по касательным напряжениям (по формуле Журавского);
- для **балки № 4** выполнить анализ напряженного состояния в балке, построить упругую линию и проверить балку на жесткость.

ИСХОДНЫЕ ДАННЫЕ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧИ

Схема № 1

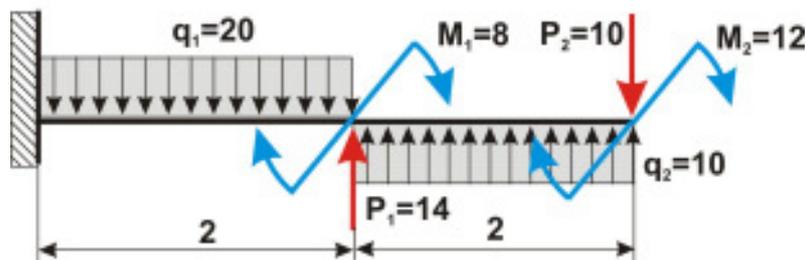


Рис.1

Номер варианта	a	b	q_1	q_2	P_1	P_2	M_1	M_2
	m		$\text{кН/м} \cdot 10$		$\text{кН} \cdot 10$		$\text{кН} \cdot \text{м} \cdot 10$	
30	2	2	2	1	1,4	1	0,8	1,2

Схема № 2

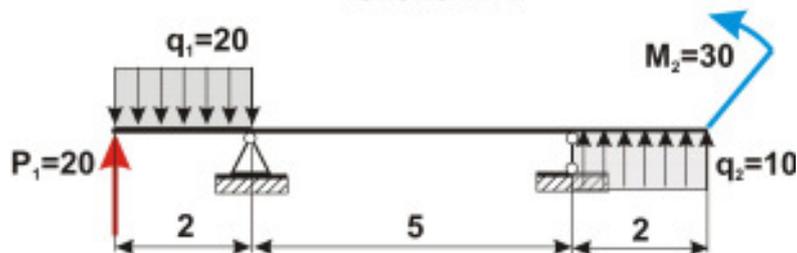


Рис.2

Номер варианта	a	L	b	q_1	q_2	P_1	P_2	M_1	M_2
	m			$\text{кН/м} \cdot 10$		$\text{кН} \cdot 10$		$\text{кН} \cdot \text{м} \cdot 10$	
30	2	5	2	2	1	2	0	0	3

Схема № 3

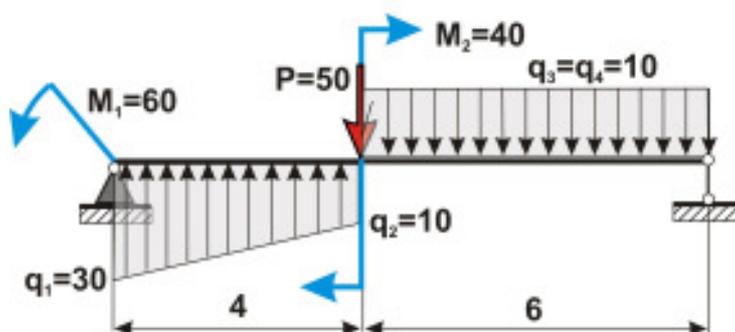


Рис.3

Номер варианта	a	b	q_1	q_2	q_3	q_4	P	M_1	M_2	M_3
	m		$кН/м \cdot 10$				$кН \cdot 10$	$кН \cdot м \cdot 10$		
30	4	6	3	1	1	1	5	6	4	0

Схема № 4

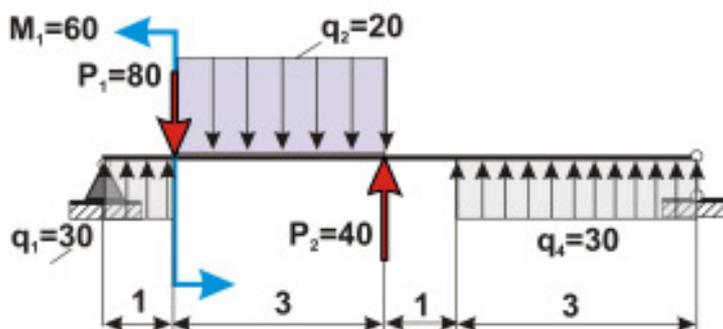


Рис.4

Номер варианта	a	b	c	d	M_1	M_2	P_1	P_2	q_1	q_2	q_3	q_4
	m				$кН \cdot м \cdot 10$		$кН \cdot 10$		$кН/м \cdot 10$			
30	1	3	1	3	6	0	8	4	3	2	0	3

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В СИСТЕМЕ MATHCAD

Схема 1

1. Исходные данные

Дано: $a := 2$ $b := 2$ $q_1 := 20 \cdot 10^3$ $q_2 := 10 \cdot 10^3$ $hkb := 2$
 $P_1 := 14 \cdot 10^3$ $P_2 := 10 \cdot 10^3$ $M_1 := 8 \cdot 10^3$ $M_2 := 12 \cdot 10^3$
 $L := a + b$ $\sigma_{II} := 10^7$

2. Определяем опорные реакции. Изображаем расчетную схему (рис.5)

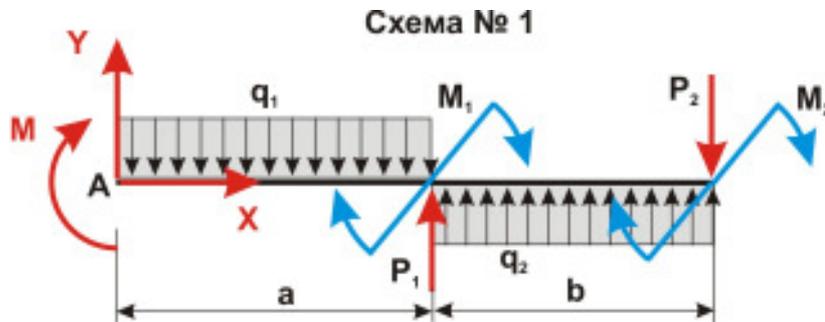


Рис.5

и из уравнений равновесия находим опорные реакции:

$$\begin{aligned} & Y := 1 \quad X := 1 \quad M := 1 \\ \text{Given} \quad & X = 0 \\ & Y - q_1 \cdot a + P_1 + q_2 \cdot b - P_2 = 0 \\ & M + \frac{q_1 \cdot a^2}{2} - P_1 \cdot a + M_1 - q_2 \cdot b \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) + P_2 \cdot (a + b) + M_2 = 0 \\ \underline{R} := \text{Find}(X, Y, M) & \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 16000 \\ -12000 \end{pmatrix} \quad \underline{X} := R_0 \quad \underline{Y} := R_1 \quad \underline{M} := R_2 \end{aligned}$$

3. Построение эюр

$$\text{Эюра Q} \quad Q(x) := \begin{cases} -Y + q_1 \cdot x & \text{if } 0 \leq x < a \\ -Y + q_1 \cdot a - P_1 - q_2 \cdot (x - a) & \text{if } a \leq x \leq L \end{cases}$$

Проверка правильности построения эюры $Q(L) = -1 \times 10^4$
 $Q(2 - 0.0001) - Q(2) = 1.4 \times 10^4$

Под силой, изображенной на расчетной схеме, на эпюре Q должен наблюдаться скачок на величину силы, что и устанавливается в разделе программы «Проверка правильности построения эпюры».

Для вычисления экстремальных значений поперечной силы можно воспользоваться встроенными в **MathCAD** функциями $\max(A, B, C, \dots)$ и $\min(A, B, C, \dots)$, которые возвращают максимальное и минимальное значение из некоторого массива чисел. Для создания массива чисел из функции $Q(x)$ разобьем отрезок $[0, L]$ на **10000** отрезков и в точках ih вычислим значения функции $Q(x)$.

Вычисление максимальных значений поперечной силы

$$N := 10000 \quad i := 1..N \quad h := \frac{L}{N} \quad q_i := Q(i \cdot h)$$

$$\max(q) = 2.399 \times 10^4 \quad \min(q) = -1.599 \times 10^4 \quad Q_{\max} := \max(q)$$



Определение точек, в которых $Q=0$

$$\xi := 0.5 \quad m_1 := \text{root}(Q(\xi), \xi) \quad m_1 = 0.8$$

$$\xi := 2.5 \quad m_2 := \text{root}(Q(\xi), \xi) \quad m_2 = 3$$

Сечение, в котором поперечная сила достигает максимальной величины, называют опасным с точки зрения прочности по касательным напряжениям.

Составляем выражения для функций изгибающих моментов на каждом из участков, полагая, что реакции связи направлены так, как показано на *рис.5*, и не принимаем во внимание полученные знаки для реакций. ЭВМ без нашей помощи учтет эти знаки!

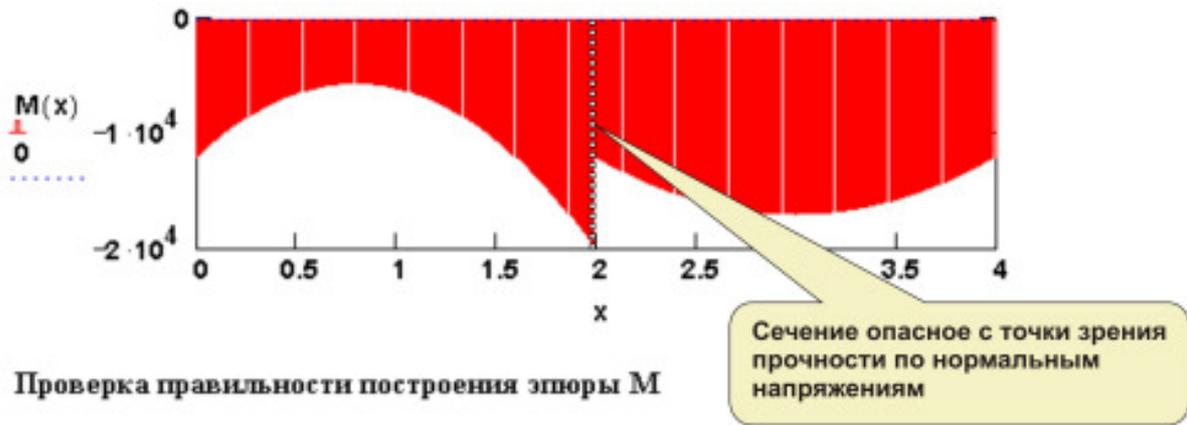
$$M1(x) := M - \frac{q_1 \cdot x^2}{2} + Y \cdot x$$

$$M2(x) := M - q_1 \cdot a \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right) + Y \cdot x + P_1 \cdot (x - a) + M_1 + \frac{q_2 \cdot (x - a)^2}{2}$$

$$M(x) := \begin{cases} M1(x) & \text{if } 0 \leq x < a \\ M2(x) & \text{if } a \leq x \leq L \end{cases}$$

Находим экстремальные значения функции моментов:

$$M(m_1) = -5.6 \times 10^3 \quad M(m_2) = -1.7 \times 10^4$$



Проверка правильности построения эпюры M

$$M(2 - 0.0001) - M(2) = -7.998 \times 10^3$$

$$M(L) = -1.2 \times 10^4$$

+

Скачки на эпюре моментов должны быть только в тех сечениях, где приложены сосредоточенные моменты, и по величине быть равным величине заданных моментов.

Опасным, с точки зрения прочности по нормальным напряжениям, является то поперечное сечение балки, в котором возникает наибольший по абсолютной величине изгибающий момент M_{max} . Опасное сечение находится на расстоянии 2 м от правой опоры.

Вычисление максимальных значений изгибающего момента

$$N := 10000 \quad i := 1..N \quad h_i := \frac{L}{N} \quad m_i := M(i \cdot h)$$

$$\max(m) = 0$$

$$\min(m) = -1.999 \times 10^4$$

4. Подбор размеров поперечного сечения балки

В подавляющем большинстве случаев расчет балок на прочность ведется по наибольшему нормальным напряжениям, возникающим в их поперечных сечениях.

По высоте поперечного сечения балки нормальные напряжения изменяются по линейному закону, а касательные напряжения - по параболическому (рис.6).

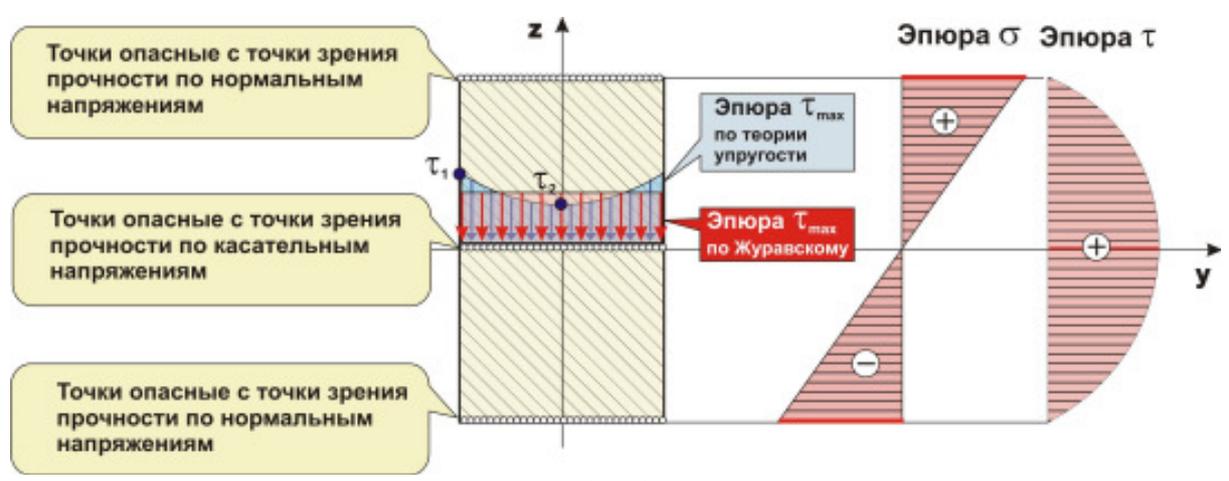


Рис.6

Пластичные материалы одинаково сопротивляются как растяжению, так и сжатию; в связи с этим для них $[\sigma_p] = [\sigma_{сж}] = [\sigma]$. Поэтому балки из пластичных материалов обычно имеют поперечные сечения, симметричные относительно своих нейтральных осей, так как в таких балках возникают одинаковые наибольшие растягивающие и сжимающие напряжения.

Опасными с точки зрения прочности по нормальным напряжениям являются точки опасного поперечного сечения, наиболее удаленные от нейтральной оси.

Для этих точек и составляется условие прочности:

$$\max \sigma = \frac{M_{max}}{W} \leq [\sigma], \quad (1)$$

где M_{max} - максимальный изгибающий момент; для прямоугольного поперечного сечения $W = \frac{bh^2}{6}$; b - ширина поперечного сечения, h - его высота; $[\sigma]$ - допускаемые напряжения.

В некоторых случаях для балок из пластичных материалов применяются сечения, не симметричные относительно нейтральной оси. Если балка имеет такое сечение, то в формулу (1) надо подставить *меньший* из двух осевых моментов сопротивления.

Из условия прочности находим момент сопротивления балки при изгибе

$$W = \frac{M_{max}}{[\sigma]}, \quad (2)$$

Подсчитав по формуле (2) осевой момент сопротивления W , находим размеры сечения балки:

$$W = \frac{b \cdot (2b)^2}{6} = \frac{M_{max}}{[\sigma]}, \quad b = \sqrt[3]{\frac{3M_{max}}{2[\sigma]}} \quad (3)$$

$$W(b) := \frac{b \cdot (2 \cdot b)^2}{6} \quad M_{max} := |\min(m)|$$

$$b := 1 \quad \text{Given} \quad \frac{M_{max}}{\sigma_n} = W(b) \quad b := \text{Find}(b) \quad b = 0.144$$

$$h := 2 \cdot b \quad \text{Подбор сечения по формуле (3)} \quad b_{\phi} := \sqrt[3]{\frac{3 \cdot M_{max}}{2 \cdot \sigma_n}} \quad b_{\phi} = 0.144$$

5. Проверка прочности балки по касательным напряжениям

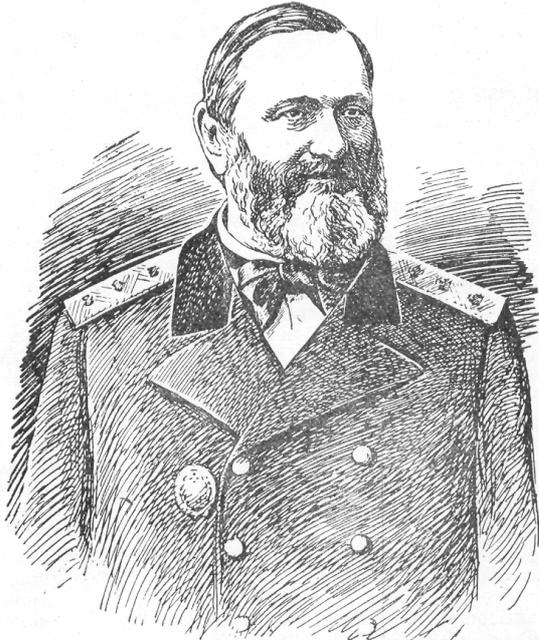
В некоторых (сравнительно редких) случаях расчет на прочность только по наибольшим нормальным напряжениям, действующим в *поперечном* сечении балки, недостаточен, и приходится дополнительно производить проверку прочности по главным напряжениям, возникающим в наклонных сечениях, и по максимальным касательным напряжениям.

Условие прочности балки по касательным напряжениям в ее поперечных сечениях записывают исходя из формулы Д. И. Журавского:

$$\max \tau = \frac{Q_{max} (S_{no}^{omc})_{max}}{bJ_y} \leq [\tau]. \quad (4)$$

Здесь Q_{max} - наибольшая по абсолютной величине поперечная сила; J_y - момент инерции всей площади поперечного сечения относительно нейтральной оси y ; b - ширина

поперечного сечения в опасной точке; $[\tau] = 2 \text{ МПа}$ - для дерева; $S_{но}^{omc}$ - статический момент части площади поперечного сечения A_{omc} , расположенной выше (или ниже) рассматриваемой точки относительно нейтральной оси y ($но$), равный произведению этой площади на расстояние центра тяжести этой площади до оси y . Для прямоугольного сечения $(S_{но}^{omc})_{max} = \frac{bh^2}{8}$.



Д. И. Журавский
(1821—1891)

Рис.7

Формула (3), полученная Д.И. Журавским в 1858 г. при предположении, что вдоль прямой, параллельной нейтральной линии, касательные напряжения равны и параллельны силовой линии, непригодна для определения касательного напряжения в любой точке произвольного сечения.

По формуле Журавского максимальные напряжения $\tau_{max} = 1,5Q_z / A$. Из решения методами теории упругости задачи по определению максимальных касательных напряжений в прямоугольном поперечном сечении балки следует²:

- 1) касательные напряжения в точках нейтральной линии параллельны оси z ;
- 2) касательные напряжения в средней и крайней точках нейтральной линии определяются по формулам

$$\tau_1 = \alpha_1 \frac{Q_z}{A}, \quad \tau_2 = \alpha_2 \frac{Q_z}{A}.$$

Значения α_1 и α_2 при $\mu = 0.25$ (μ - коэффициент Пуассона материала балки) приведены в табл.1, а характер распределения напряжений на нейтральной линии показан на рис.б.

Таблица 1

h/b	1/4	1/2	1	2
α_1	2.982	2.094	1.689	1.549
α_2	1.208	1.284	1.410	1.474

Формула Журавского дает практически точное значение τ_{max} при условии, что $h/b > 2$, демонстрируя этим изящное и простое инженерное решение очень трудной и зачастую точно не разрешимой математической задачи.

Касательные напряжения, действующие в поперечных сечениях балки и в сечениях её, параллельных нейтральному слою, вызывают деформации сдвига, в результате которых прямые углы между этими сечениями искажаются, т. е. перестают быть прямыми. Наибольшие искажения углов имеют место в тех точках поперечного сечения, в которых действуют наибольшие касательные напряжения. У верхнего и нижнего краев балки искажения углов отсутствуют, так как касательные напряжения там равны нулю.

² Тимошенко С.П. Теория упругости. Л.-М.: ОНТИ, гл. ред. техн.-теор. лит-ры, 1937. – 452 с.

Долинский Ф.В., Михайлов М.Н. Краткий курс сопротивления материалов. – М.: Высш. шк., 1988. – 432 с.

В результате деформаций сдвига поперечные сечения балки при поперечном изгибе искривляются. Однако это не отражается сколько-нибудь существенно на деформациях продольных волокон, следовательно, и на распределении нормальных напряжений в поперечных сечениях балки.

Проверим прочность балки по касательным напряжениям. Максимальная поперечная сила $Q_{max} = 24 \text{ кН}$ возникает в сечении $x = 2 \text{ м}$ (опасное сечение). Опасные точки находятся в нейтральном слое ($z = 0$), для которых

$$S_{отс} := \frac{b \cdot h^2}{8} \quad J_w := \frac{b \cdot h^3}{12} \quad \tau_{max} := \frac{Q_{max} \cdot S_{отс}}{b \cdot J} \quad \tau_{max} = 8.655 \times 10^5$$

Максимальные касательные напряжения в нейтральном слое бруса меньше допускаемых напряжений $[\tau] = 2 \text{ МПа}$; следовательно, прочность бруса по касательным напряжениям обеспечена.

Схема 2

1. Исходные данные

Дано:

$$l_w := 5 \quad a := 2 \quad b := 2 \quad q_1 := 20 \cdot 10^3 \quad q_2 := 10 \cdot 10^3$$

$$P_1 := 20 \cdot 10^3 \quad M_2 := 30 \cdot 10^3 \quad \sigma_{п} := 10^8 \quad L_w := l + a + b$$

2. Определение опорных реакций

Изображаем расчетную схему (рис.8)

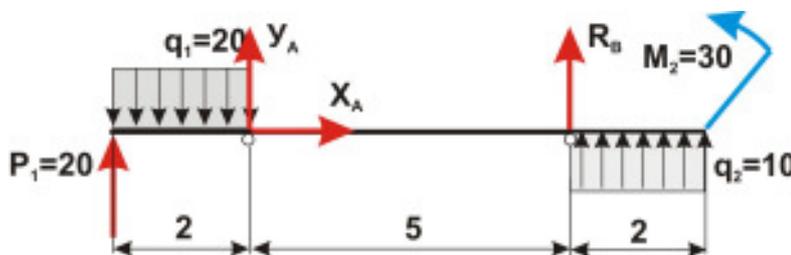


Рис.8

и из уравнений равновесия находим опорные реакции:

$$Y_A := 1 \quad X_A := 1 \quad R_B := 1$$

Given

$$X_A = 0$$

$$Y_A + R_B - q_1 \cdot a + P_1 + q_2 \cdot b = 0$$

$$\frac{q_1 \cdot a^2}{2} - P_1 \cdot a + q_2 \cdot b \cdot \left(1 + \frac{b}{2}\right) + M_2 + R_B \cdot l = 0$$

$$R := \text{Find}(X_A, Y_A, R_B) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 30000 \\ -30000 \end{pmatrix} \quad X_A := R_0 \quad Y_A := R_1 \quad R_B := R_2$$

3. Построение эпюр

$$\text{Эпюра } Q \quad Q(x) := \begin{cases} -P_1 + q_1 \cdot x & \text{if } 0 \leq x < a \\ -P_1 + q_1 \cdot a - Y_A & \text{if } a \leq x < a+l \\ -P_1 + q_1 \cdot a - Y_A - R_B - q_2 \cdot (x-l-a) & \text{if } a+l \leq x \leq L \end{cases}$$

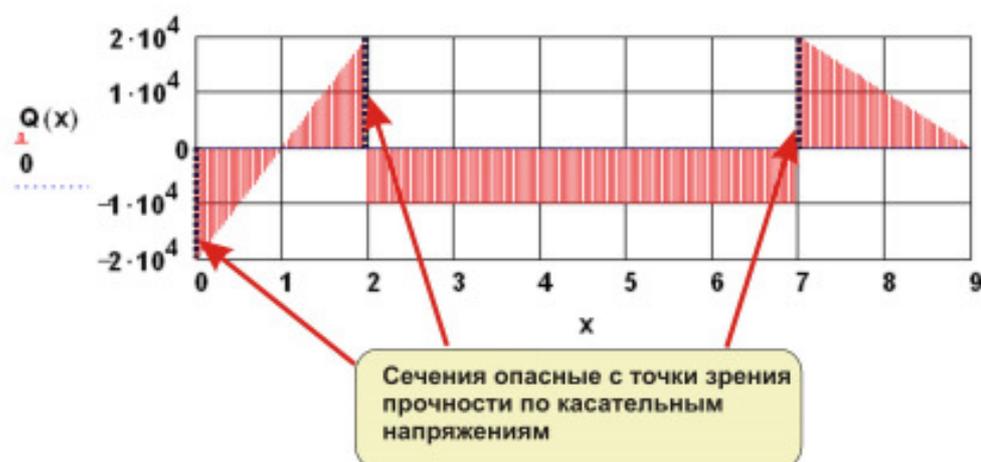
Проверка правильности построения эпюры $Q(0) = -2 \times 10^4$

$$Q(2 - 0.001) - Q(2 + 0.001) = 2.998 \times 10^4$$

Вычисление максимальных значений поперечной силы

$$N := 10000 \quad i := 1..N \quad h := \frac{L}{N} \quad q_i := Q(i \cdot h) \quad x := 0, 0.04..L$$

$$\max(q) = 2 \times 10^4 \quad \min(q) = -1.998 \times 10^4 \quad Q_{\max} := \max(q)$$



Определение точек, в которых $Q=0$ $\xi := 0.5$ $m_1 := \text{root}(Q(\xi), \xi)$ $m_1 = 1$

Эпюра M $d := a+l$

Функции изгибающих моментов по участкам

$$M_1(x) := P_1 \cdot x - \frac{q_1 \cdot x^2}{2} \quad M_2(x) := \left[P_1 \cdot x - q_1 \cdot a \cdot \left(x - \frac{a}{2} \right) \right] + Y_A \cdot (x - a)$$

$$M_3(x) := P_1 \cdot x - q_1 \cdot a \cdot \left(x - \frac{a}{2} \right) + Y_A \cdot (x - a) + q_2 \cdot \frac{(x-d)^2}{2} + R_B \cdot (x - d)$$

Функция изгибающего момента балки

$$M(x) := \begin{cases} M_1(x) & \text{if } 0 \leq x < a \\ M_2(x) & \text{if } a \leq x < a+l \\ M_3(x) & \text{if } a+l \leq x \leq L \end{cases} +$$

Проверка правильности построения эпюры M $M(9) = 3 \times 10^4$

Вычисление максимальных значений изгибающего момента

$$N := 10000 \quad i := 1..N \quad h := \frac{L}{N} \quad m_j := M(i \cdot h)$$

$$\max(m) = 5 \times 10^4 \quad \min(m) = 0 \quad M(m_1) = 1 \times 10^4 \quad M(L) = 3 \times 10^4$$



4. Подбор размеров поперечного сечения балки

По высоте поперечного сечения балки нормальные напряжения изменяются по линейному закону, а касательные напряжения, в соответствии с формулой Журавского, - по параболическому (рис.9).

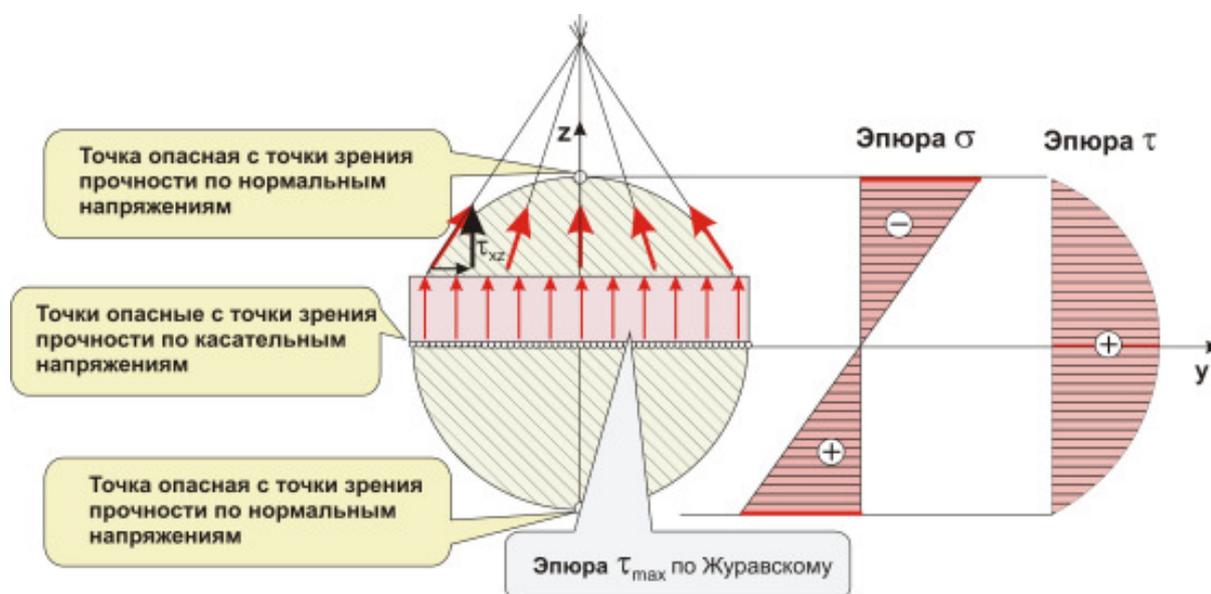


Рис.9

Условие прочности для наиболее удаленных от нейтральной оси точек по (1)

$$\max \sigma = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma],$$

где для круглого поперечного сечения диаметром D величины $W = \frac{\pi D^3}{32}$.

Из условия прочности находим момент сопротивления балки при изгибе:

$$W = \frac{M_{max}}{[\sigma]}$$

и диаметр D по формуле

$$D = \sqrt{\frac{32 M_{max}}{\pi [\sigma]}}. \quad (5)$$

Вычисления выполняем в системе MathCAD:

$$\begin{aligned} W(d) &:= \frac{\pi \cdot d^3}{32} & M_{max} &:= |\max(m)| \\ d &:= 1 & \text{Given} & & \frac{M_{max}}{\sigma_n} = W(d) & d &:= \text{Find}(d) & d &= 0.172 \\ \text{Подбор сечения по формуле (3)} & & D &:= \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{max}}{\pi \cdot \sigma_n}} & D &= 0.172 \end{aligned}$$

5. Проверка прочности балки по касательным напряжениям

Условие прочности балки по касательным напряжениям в ее поперечных сечениях записывают исходя из формулы Журавского (4), в которой для круглого сечения

$$(S_{no}^{omc})_{max} = \frac{D^3}{12}.$$

Для круглого поперечного сечения допущение о том, что касательные напряжения параллельны оси z , строго не выполняется³. В точках, лежащих на окружности, вектор касательного напряжения должен быть направлен по касательной к контуру в силу свойства парности касательных напряжений (иначе должно действовать на свободной боковой поверхности стержня касательное напряжение!). Поэтому допущение о постоянстве касательных напряжений вдоль прямой, параллельной нейтральной оси, можно заменить более общим условием: постоянство составляющих касательных напряжений τ_{xz} вдоль этих прямых. Нужно всегда иметь в виду, что формула Журавского определяет не полное касательное напряжение τ в точке сечения, а лишь составляющую τ_{xz} этого напряжения, параллельную плоскости действия нагрузки. Однако в контурных точках сечения полные напряжения τ могут быть найдены графически по предварительно вычисленным напряжениям τ_{xz} . Для этого в рассматриваемой точке контура строится прямоугольный треугольник, у которого гипотенуза направлена по касательной к контуру, а катет, параллельный оси z , представляет собой напряжение τ_{xz} в этой точке. Изложенное иллюстрируется рис.9.

Отметим, что формулой Журавского можно пользоваться только в тех случаях, когда плоскость действия нагрузки перпендикулярна одной из главных центральных осей инерции сечения. Объясняется это тем, что при выводе формулы Журавского использовано уравнение $\sigma = \frac{M}{J_y} z$, справедливое лишь при указанных условиях.

³ Биргер И.А., Мавлютов Р.Р. Сопротивление материалов.- М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1986. - 560 с.;

Заславский Б.В. Краткий курс сопротивления материалов. – М.: Машиностроение, 1986. – 328 с.

Проверку прочности заданной балки на касательные напряжения выполним в системе MathCAD:

$$S_{отс} := \frac{d^3}{12} \quad J := \frac{\pi \cdot d^4}{64} \quad \tau_{max} := \frac{Q_{max} \cdot S_{отс}}{d \cdot J} \quad \tau_{max} = 1.147 \times 10^6$$

Максимальные касательные напряжения в нейтральном слое бруса меньше допускаемых $[\tau] = 100 \text{ МПа}$. Прочность бруса по касательным напряжениям обеспечена.

Схема 3

1. Исходные данные

$$\begin{aligned} \text{Дано} \quad a &:= 4 & b &:= 6 & q_1 &:= 30 \cdot 10^3 & q_2 &:= 10 \cdot 10^3 & q_3 &:= 10 \cdot 10^3 \\ P &:= 50 \cdot 10^3 & M_1 &:= 60 \cdot 10^3 & M_2 &:= 40 \cdot 10^3 & d &:= 0.8 \\ L &:= a + b & \sigma_n &:= 160 \cdot 10^6 \end{aligned}$$

2. Определение опорных реакций

Изображаем расчетную схему (рис.10)

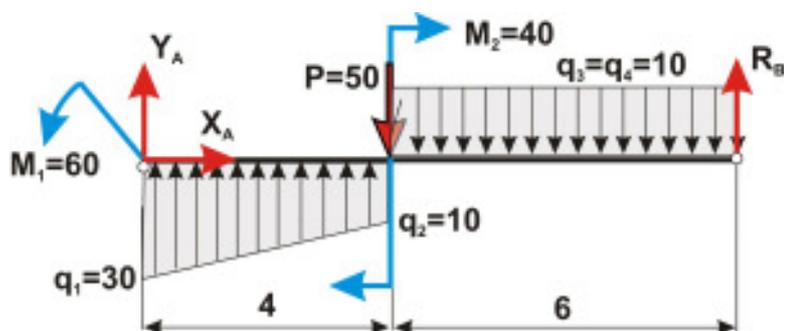


Рис.10

и из уравнений равновесия находим опорные реакции:

$$\begin{aligned} Y_A &:= 1 & X_A &:= 1 & R_B &:= 1 & + \\ \text{Given} \\ X_A &= 0 & Y_A + \frac{q_1 + q_2}{2} \cdot a - P - q_2 \cdot b + R_B &= 0 \\ M_1 + \frac{q_2 \cdot a^2}{2} + \frac{q_1 \cdot a \cdot a}{2 \cdot 3} - P \cdot a - M_2 - q_2 \cdot b \cdot \left(a + \frac{b}{2} \right) + R_B \cdot L &= 0 \\ R &:= \text{Find}(X_A, Y_A, R_B) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -50000 \\ 3 \\ 140000 \\ 3 \end{pmatrix} & X_A &:= R_0 & Y_A &:= R_1 & R_B &:= R_2 \end{aligned}$$

3. Построение эпюр

$$x := 0, 0.05 \dots L$$

$$\text{Эпюра } Q \quad Q(x) := \begin{cases} -Y_A - q_1 \cdot x + q_{12} \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{x}{2} & \text{if } 0 \leq x < a \\ -Y_A - q_1 \cdot a + q_{12} \cdot \frac{a}{a} \cdot \frac{a}{2} + P + q_3 \cdot (x - a) & \text{if } a \leq x \leq L \end{cases}$$

Проверка правильности построения эпюры:

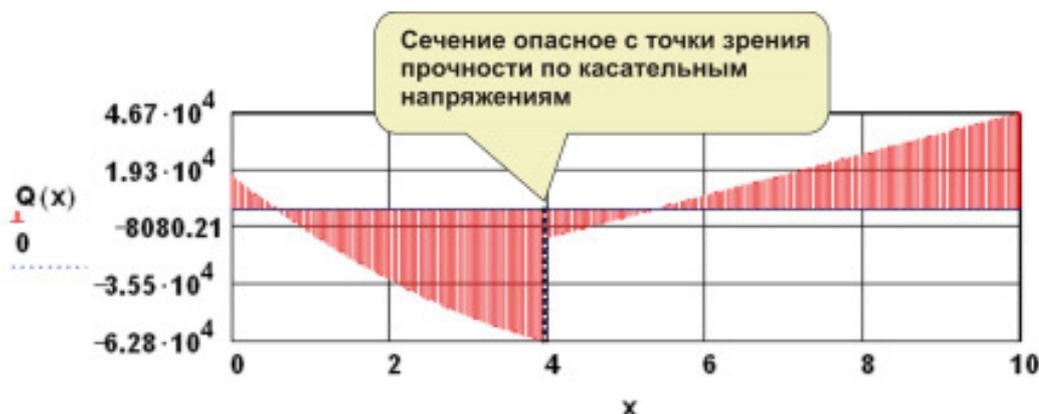
$$Q(0) = 1.667 \times 10^4 \quad Y_A = -1.667 \times 10^4 \quad Q(L) = 4.667 \times 10^4 \quad R_B = 4.667 \times 10^4$$

$$Q(4 - 0.001) - Q(4 + 0.001) = -5 \times 10^4$$

Вычисление максимальных значений поперечной силы:

$$N := 10000 \quad i := 1 \dots N \quad h := \frac{L}{N} \quad q_i := Q(i \cdot h)$$

$$\max(q) = 4.667 \times 10^4 \quad \min(q) = -6.332 \times 10^4 \quad Q_{\max} := |\min(q)|$$



Определение точек, в которых $Q=0$

$$\xi := 0.5 \quad m_1 := \text{root}(Q(\xi), \xi) \quad m_1 = 0.584$$

$$\xi := 5 \quad m_2 := \text{root}(Q(\xi), \xi) \quad m_2 = 5.333$$

Эпюра M

Функции изгибающих моментов по участкам

$$M1(x) := \left(-M_1 + Y_A \cdot x + \frac{q_1 \cdot x^2}{2} - \frac{q_{12}}{a} \cdot x \cdot \frac{x}{2} \cdot \frac{x}{3} \right)$$

$$M2(x) := \left[-M_1 + Y_A \cdot x + q_1 \cdot a \cdot \left(x - \frac{a}{2} \right) \right] - q_{12} \cdot \frac{a}{2} \cdot \left(x - \frac{2}{3} \cdot a \right) - P \cdot (x - a) \dots \\ + M_2 - \frac{q_3 \cdot (x - a)^2}{2}$$

Функция изгибающего момента балки

$$M(x) := \begin{cases} M1(x) & \text{if } 0 \leq x < a \\ M2(x) & \text{if } a \leq x \leq L \end{cases}$$

Проверка правильности построения эпюры M:

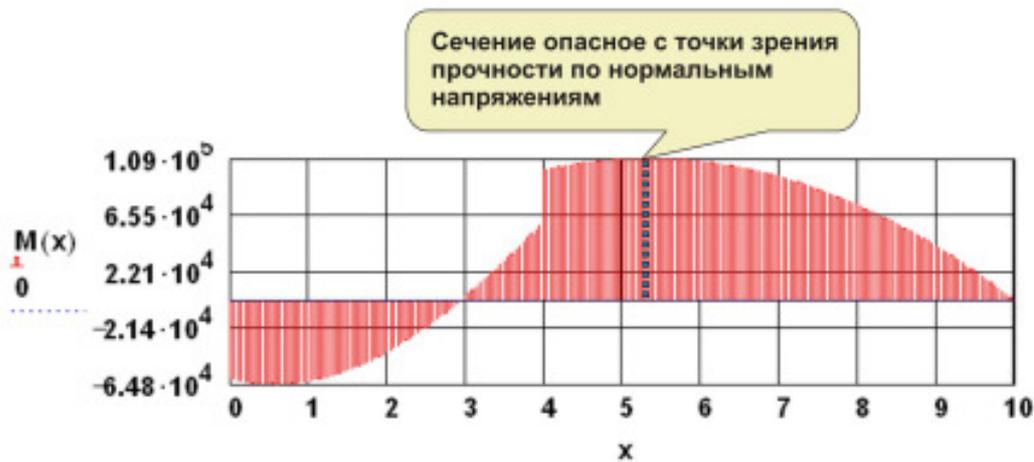
$$M(0) = -6 \times 10^4 \quad M(4 + 0.001) - M(4 - 0.001) = 4.008 \times 10^4$$

Вычисление максимальных значений изгибающего момента:

$$N := 10000 \quad i := 0..N \quad h := \frac{L}{N} \quad x_i := i \cdot h \quad m_i := M(x_i) \quad +$$

$$\max(m) = 1.089 \times 10^5 \quad \min(m) = -6.478 \times 10^4$$

$$M(m_1) = -6.478 \times 10^4 \quad M(m_2) = 1.089 \times 10^5$$



4. Подбор размеров поперечного сечения балки

По высоте поперечного сечения балки нормальные напряжения изменяются по линейному закону, а касательные напряжения, в соответствии с формулой Журавского, - по параболическому (рис.11).

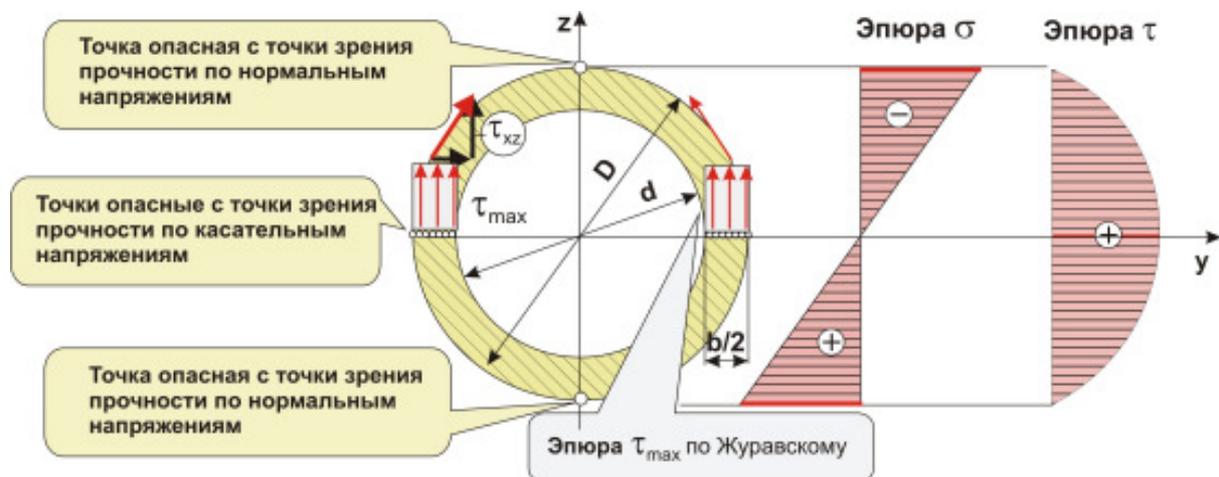


Рис.11

Условие прочности для наиболее удаленных от нейтральной оси точек по (1)

$$\max \sigma = \frac{M_{max}}{W} \leq [\sigma],$$

где для кольцевого поперечного сечения с внешним диаметром D и внутренним диаметром d

$$W = \frac{\pi D^3}{32} \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right).$$

Из условия прочности находим момент сопротивления балки при изгибе

$$W = \frac{M_{max}}{[\sigma]}$$

и диаметр D :

$$D = \sqrt[3]{\frac{32 M_{max}}{\pi [\sigma] \left(1 - \left(\frac{d}{D} \right)^4 \right)}}. \quad (6)$$

Вычисления выполняем в системе MathCAD:

$$\begin{aligned} W(D) &:= \frac{\pi \cdot D^3}{32} \cdot (1 - dD^4) & M_{max} &:= M(m_2) \\ D &:= 1 \quad \text{Given} \quad \frac{M_{max}}{\sigma_n} = W(D) & D &:= \text{Find}(D) & D &= 0.227 \\ d &:= dD \cdot D & d &= 0.182 \\ \text{Подбор сечения по формуле (6)} & & D &:= \sqrt[3]{\frac{32 \cdot M_{max}}{\pi \cdot \sigma_n \cdot (1 - dD^4)}} & D &= 0.227 \end{aligned}$$

5. Проверка прочности балки по касательным напряжениям

Условие прочности балки по касательным напряжениям в ее поперечных сечениях записывают исходя из формулы Журавского (4), в которой для трубчатого сечения $S_{но}^{omc}$ определяется разностью статических моментов большого и малого кругов:

$$(S_{но}^{omc})_{max} = \frac{I}{12} (D^3 - d^3).$$

Примечание. Задача по определению касательного напряжения в любой точке произвольного (несимметричного) нетонкостенного сечения методами сопротивления материалов не решается, и ее решение точно или приближенно получают методами теории упругости.

Проверку прочности заданной балки на касательные напряжения выполним в системе MathCAD:

$$S_{отс} := \frac{D^3}{12} \cdot (1 - dD^3) \quad J := \frac{\pi \cdot D^4}{64} \cdot (1 - dD^4)$$

$$\tau_{max} := \frac{Q_{max} \cdot S_{отс}}{(D - d) \cdot J} \quad \tau_{max} = 8.599 \times 10^6$$

Максимальные касательные напряжения в нейтральном слое бруса меньше допускаемых $[\tau] = 100 \text{ МПа}$. Прочность бруса по касательным напряжениям обеспечена.

Схема 4

1. Исходные данные

Дано

$$a := 1 \quad b := 3 \quad c := 1 \quad d := 3 \quad L_b := a + b \quad L_c := L_b + c \quad L := L_c + d$$

$$q_1 := 30 \cdot 10^3 \quad q_2 := 20 \cdot 10^3 \quad q_4 := 30 \cdot 10^3 \quad P_1 := 80 \cdot 10^3 \quad P_2 := 40 \cdot 10^3$$

$$M_1 := 60 \cdot 10^3 \quad \sigma_n := 160 \cdot 10^6 \quad E := 2 \cdot 10^{11}$$

2. Определение опорных реакций

Изображаем расчетную схему (рис.12)

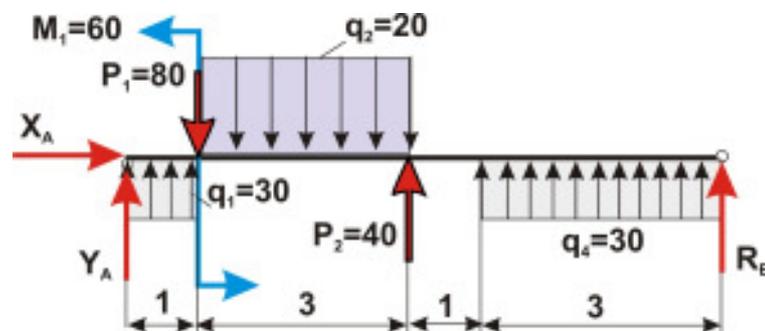


Рис.12

и из уравнений равновесия находим опорные реакции:

$$Y_A := 1 \quad X_A := 1 \quad R_B := 1 \quad \text{Given} \quad +$$

$$X_A = 0 \quad Y_A + q_1 \cdot a - P_1 - q_2 \cdot b + P_2 + q_4 \cdot d + R_B = 0$$

$$M_1 + \frac{q_1 \cdot a^2}{2} - P_1 \cdot a - q_2 \cdot b \cdot \left(a + \frac{b}{2} \right) + P_2 \cdot L_b + q_4 \cdot d \cdot \left(L_c + \frac{d}{2} \right) + R_B \cdot L = 0$$

$$R := \text{Find}(X_A, Y_A, R_B) \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 53750 \\ -73750 \end{pmatrix} \quad X_A := R_0 \quad Y_A := R_1 \quad R_B := R_2$$

3. Построение эпюр

Эпюра Q $x := 0, 0.05 \dots L$

$$Q(x) := \begin{cases} -Y_A - q_1 \cdot x & \text{if } 0 \leq x < a \\ -Y_A - q_1 \cdot a + P_1 + q_2 \cdot (x - a) & \text{if } a \leq x < L_b \\ -Y_A - q_1 \cdot a + P_1 + q_2 \cdot b - P_2 & \text{if } L_b \leq x < L_c \\ -Y_A - q_1 \cdot a + P_1 + q_2 \cdot b - P_2 - q_4 \cdot (x - L_c) & \text{if } L_c \leq x \leq L \end{cases}$$

Проверка правильности построения эпюры

$$Q(0) = -5.375 \times 10^4 \quad Y_A = 5.375 \times 10^4$$

$$Q(L) = -7.375 \times 10^4 \quad R_B = -7.375 \times 10^4$$

Вычисление максимальных значений поперечной силы

$$N := 10000 \quad i := 1 \dots N \quad h := \frac{L}{N} \quad q_i := Q(i \cdot h)$$

$$\max(q) = 5.623 \times 10^4 \quad \min(q) = -8.373 \times 10^4 \quad Q_{\max} := |\min(q)|$$



Определение точек, в которых Q=0:

$$\xi_1 := 1.5 \quad m_1 := \text{root}(Q(\xi), \xi) \quad m_1 = 1.188$$

$$\xi_2 := 5 \quad m_2 := \text{root}(Q(\xi), \xi) \quad m_2 = 5.542$$

Эпюра M

Функции изгибающих моментов по участкам

$$M1(x) := \left(Y_A \cdot x + \frac{q_1 \cdot x^2}{2} \right)$$

$$M2(x) := -M1 + Y_A \cdot x + q_1 \cdot a \cdot \left(x - \frac{a}{2} \right) - P_1 \cdot (x - a) - \frac{q_2 \cdot (x - a)^2}{2}$$

$$M3(x) := -M_1 + Y_A \cdot x + q_1 \cdot a \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right) - P_1 \cdot (x - a) - q_2 \cdot b \cdot \left(x - a - \frac{b}{2}\right) + P_2 \cdot (x - L_b)$$

$$M4(x) := -M_1 + Y_A \cdot x + q_1 \cdot a \cdot \left(x - \frac{a}{2}\right) - P_1 \cdot (x - a) - q_2 \cdot b \cdot \left(x - a - \frac{b}{2}\right) \dots$$

$$+ P_2 \cdot (x - L_b) + \frac{q_4 \cdot (x - L_c)^2}{2} \quad +$$

Функции изгибающего момента балки

$$M(x) := \begin{cases} M1(x) & \text{if } 0 \leq x < a \\ M2(x) & \text{if } a \leq x < L_b \\ M3(x) & \text{if } L_b \leq x < L_c \\ M4(x) & \text{if } L_c \leq x \leq L \end{cases}$$

Проверка правильности вычисления изгибающего момента балки

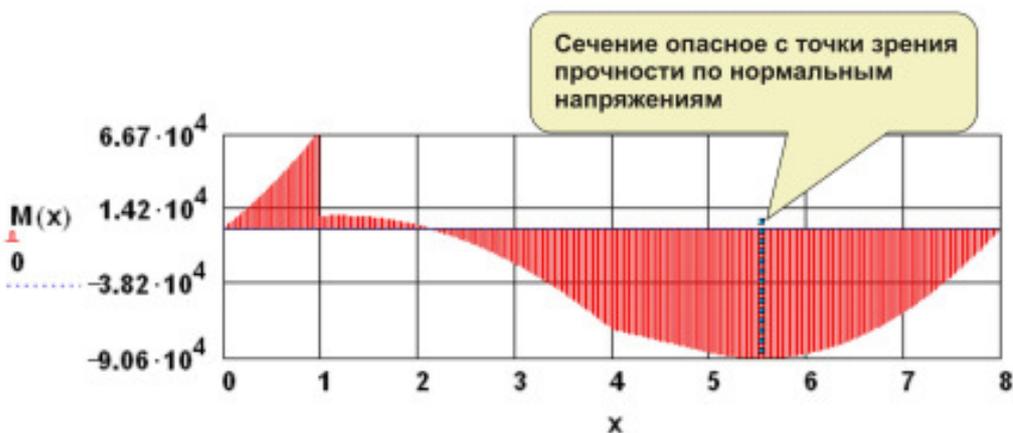
$$M(1 - 0.001) - M(1 + 0.001) = 5.991 \times 10^4 \quad M(0) = 0 \quad M(L) = 0$$

Вычисление максимальных значений изгибающего момента

$$M(m_1) = 9.102 \times 10^3 \quad M(m_2) = -9.065 \times 10^4 \quad m_2 = 5.542$$

$$N := 10000 \quad i := 1..N \quad h := \frac{L}{N} \quad m_i := M(i \cdot h)$$

$$\max(m) = 6.868 \times 10^4 \quad \min(m) = -9.065 \times 10^4$$



Максимальный изгибающий момент возникает в сечении $x=5.542$ м.

4. Подбор размеров поперечного сечения балки

В опасном сечении (по нормальным напряжениям) поперечная сила равна нулю, а потому касательные напряжения отсутствуют. Эпюры нормальных и касательных напряжений в этом сечении представлены на *рис.13*.

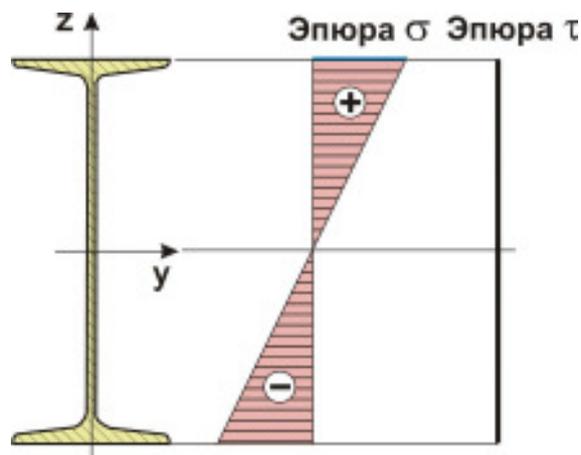


Рис.13

Условие прочности для наиболее удаленных от нейтральной оси точек по (1)

$$\max \sigma = \frac{M_{\max}}{W} \leq [\sigma].$$

Из условия прочности находим момент сопротивления балки при изгибе

$$W = \frac{M_{\max}}{[\sigma]}$$

и по сортаменту металлопроката подбираем номер двутавра.

Вычисления выполняем в системе MathCAD:

$$M_{\max} := |m_i| \quad M_{\max} := \max(M_m) \quad M_{\max} = 9.065 \times 10^4$$

$$W := 1 \quad \text{Given} \quad \frac{M_{\max}}{\sigma_n} = W \quad W := \text{Find}(W) \quad W = 5.666 \times 10^{-4}$$

По ГОСТ 8239-72 выбираем двутавр №33 с $W = 597 \text{ см}^3$.

Оценим рациональность выбора данного номера двутавра:

$$W := 5.97 \times 10^{-4} \quad \sigma := \frac{M_{\max}}{W} \quad \sigma = 1.518 \times 10^8 \quad \frac{\sigma_n - \sigma}{\sigma_n} \cdot 100 = 5.097$$

Можем поздравить себя с удачным выбором номера двутавра – балка недогружена всего на 5,1%.

5. Анализ напряженного состояния стенки балки

Анализ напряженного состояния стенки балки выполняется в сечении, в котором одновременно велики и изгибающий момент и поперечная сила. В качестве такого сечения выберем сечение $x = 1$ м.

В верхней точке 1 (рис.14) касательные напряжения τ равны нулю, так как вся площадь поперечного сечения расположена ниже этой точки, а потому статический момент S_{no}^{omc} относительно оси y (части площади сечения, расположенной выше точки 1) равен нулю.

В точке 2, расположенной непосредственно над линией, проходящей через нижнюю грань верхней полки двутавра, касательные напряжения, подсчитанные по формуле (4), в которой надо заменить $(S_{no}^{omc})_{\max}$ на S_{no}^{omc} , имеют вид

$$\tau_1 = \frac{Q \cdot S_{no}^{omc}}{b \cdot J_y} = \frac{Q}{b \cdot J_y} bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right).$$

Между точками 1 и 2 напряжения τ_1 меняются по квадратной параболе, как для прямоугольного сечения.

В стенке двутавра в точке, расположенной непосредственно под точкой 2, касательные напряжения

$$\tau_2 = \frac{Q \cdot S_{no}^{omc}}{d \cdot J_y} = \frac{Q}{d \cdot J_y} bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right).$$

Так как ширина b полки двутавра значительно больше толщины d вертикальной стенки, то эпюра касательных напряжений (рис.14) имеет резкий скачок в уровне, соответствующем нижней грани верхней полки. Ниже точки 2 касательные напряжения в стенке двутавра меняются по закону квадратной параболы, как для прямоугольника. Наибольшие касательные напряжения возникают на уровне нейтральной оси:

$$\tau_{max} = \frac{Q \cdot S_{no}^{omc}}{d \cdot J_y} = \frac{Q}{d \cdot J_y} \left[bt \left(\frac{h}{2} - \frac{t}{2} \right) + \frac{d \left(\frac{h}{2} - t \right)^2}{2} \right].$$

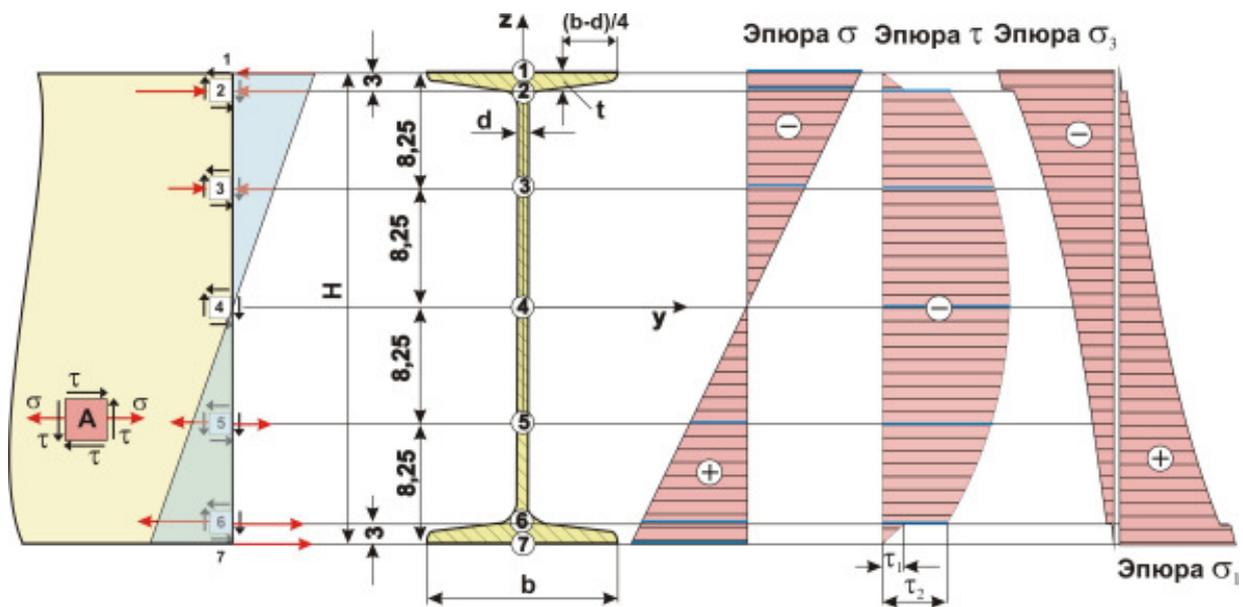


Рис.14

Эпюра касательных напряжений для двутавра симметрична относительно ординаты τ_{max} . Согласно этой эпюре в точках, расположенных у внутренних граней полков, действуют касательные напряжения τ_1 , перпендикулярные контуру сечения. Между тем такие напряжения около контура сечения иметь места не могут, так как нижняя грань верхней полки свободна от напряжений и по закону парности касательных напряжений касательные напряжения в этих точках поперечного сечения должны быть равны нулю. Следовательно, предположение о равномерном распределении касательных напряжений по ширине b поперечного сечения, положенное в основу вывода формулы Журавского, неприменимо к полкам двутавра; оно неприменимо и к некоторым элементам других тонкостенных балок.

Касательные напряжения τ_{xz} в полках двутавра методами сопротивления материалов определить нельзя. Эти напряжения весьма невелики по сравнению с напряжениями τ_{xz} в стенке двутавра. Поэтому их не учитывают и эпюру касательных напряжений τ_{xz} часто строят только для стенки двутавра.

Вырежем из балки в окрестности некоторой точки A элементарный параллелепипед (рис.14), боковые грани которого параллельны координатным осям y и z . Длина параллелепипеда (в направлении, перпендикулярном чертежу) равна ширине балки. По вертикальным граням параллелепипеда действуют нормальные напряжения σ и касательные напряжения $\tau_{xz} = \tau$, по горизонтальным граням - только касательные напряжения τ . Направления этих напряжений, показанные на рис.14, соответствуют случаю, когда в поперечных сечениях рассматриваемого участка балки действуют пологительные изгибающий момент и поперечная сила.

Величины напряжений σ и τ определяются формулами

$$\sigma = \frac{M_y}{J_y} z; \quad \tau = \frac{Q \cdot S_{no}^{omc}}{b \cdot J_y}. \quad (7)$$

Передняя и задняя грани элементарного параллелепипеда совпадают с боковыми поверхностями балки, свободными от нагрузки, а потому по этим граням напряжения равны нулю. Следовательно, параллелепипед находится в условиях плоского напряженного состояния.

В площадках, наклоненных под различными углами к боковым граням элементарного параллелепипеда, действуют нормальные и касательные напряжения. Среди этих площадок имеются две взаимно перпендикулярные, по которым касательные напряжения равны нулю. Эти площадки, как известно, называются *главными площадками*, а нормальные напряжения, действующие в них, - *главными напряжениями*. В площадках, наклоненных под углами 45° к главным площадкам, действуют экстремальные касательные напряжения; эти площадки называются *площадками сдвига*.

Определение главных нормальных и экстремальных касательных напряжений в общем случае плоского напряженного состояния производится по формулам

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2};$$

$$\tau_{\frac{max}{min}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}.$$

Подставив в эти формулы значения $\sigma_x = \sigma$, $\sigma_y = 0$, $\tau_{xz} = \tau$, получим:

$$\sigma_{\frac{max}{min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_z}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}; \quad (8)$$

$$\tau_{\frac{max}{min}} = \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_z}{2}\right)^2 + \tau_{xz}^2}. \quad (9)$$

Здесь σ и τ - нормальное и касательное напряжения в рассматриваемой точке, действующие по площадке, совпадающей с поперечным сечением балки, и определяемые по формулам (7).

Из формулы (8) видно, что напряжение σ_{max} всегда положительно, а σ_{min} всегда отрицательно. Поэтому в соответствии с правилом $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ напряжение σ_{max} следует обозначить через σ_1 , а напряжение σ_{min} - через σ_3 . Промежуточное главное напряжение $\sigma_2 = 0$ имеет место в главных площадках, параллельных плоскости чертежа.

Угол α_{21} наклона главных площадок к боковым граням элементарного параллелепипеда определяется по формуле

$$\operatorname{tg}(2\alpha_{21}) = \frac{2\tau_{xz}}{\sigma_x - \sigma_z} = \frac{2\tau}{\sigma} \quad (10)$$

Все дальнейшие вычисления выполним в системе MathCAD.

Из сортамента прокатных профилей выписываем необходимые для дальнейшего расчета геометрические характеристики двутавра №33:

$$\begin{aligned} J_y &:= 9840 \cdot 10^{-8} & W_y &:= 5.97 \times 10^{-4} & S_{\text{отс}} &:= 3.39 \cdot 10^{-4} & H &:= 0.33 \\ b &:= 0.14 & d &:= 0.007 & c &:= \frac{b-d}{4} & c &= 0.033 & t &:= 0.01123 \end{aligned}$$

Определяем внутренние силовые факторы в сечении балки $x = l$ м:

$$M := M(1 - 0.01) \quad M = 6.791 \times 10^4 \quad Q := Q(1 - 0.001) \quad Q = -8.372 \times 10^4$$

Вычисляем в каждой из семи точек, указанных на рис.14, нормальные и касательные напряжения в поперечном сечении, главные напряжения и угол наклона главных площадок. В точках 2 и 6 вычисления проводим дважды: для точки, принадлежащей полке, и для точки, принадлежащей стенке двутавра.

$$\begin{aligned} \text{Точка 1} \quad z &:= \frac{H}{2} & S_{\text{отс}} &:= 0 \\ \sigma &:= \frac{-M}{J_y} \cdot z & \tau &:= \frac{Q \cdot S_{\text{отс}}}{b \cdot J_y} & \sigma_1 &:= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} & \sigma_3 &:= \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \\ \sigma &= -1.139 \times 10^8 & \tau &= 0 & \sigma_1 &= 0 & \sigma_3 &= -1.139 \times 10^8 \\ \alpha &:= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{atan}\left(\frac{2 \cdot \tau}{\sigma}\right) & \frac{\alpha}{\text{deg}} &= 0 \end{aligned}$$

В первой точке материал балки находится в линейном напряженном состоянии, т.к. только одно главное напряжение отлично от нуля.

Точка 2, принадлежащая полке: $z := \frac{H}{2} - t$ $S_{отс} := t \cdot b \cdot \left(\frac{H-t}{2}\right)$

$$\underline{\sigma} := \frac{-M}{J_y} \cdot z \quad \underline{\tau} := \frac{Q \cdot S_{отс}}{b \cdot J_y} \quad \underline{\sigma}_1 := \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \underline{\sigma}_3 := \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma = -1.061 \times 10^8 \quad \tau = -1.523 \times 10^6 \quad \sigma_1 = 2.185 \times 10^4 \quad \sigma_3 = -1.062 \times 10^8$$

$$\underline{\alpha} := \frac{1}{2} \cdot \text{atan}\left(\frac{2 \cdot \tau}{\sigma}\right) \quad \frac{\alpha}{\text{deg}} = 0.822$$

Точка 2, принадлежащая стенке: $z := \frac{H}{2} - t$ $S_{отс} := t \cdot b \cdot \left(\frac{H-t}{2}\right)$

$$\underline{\sigma} := \frac{-M}{J_y} \cdot z \quad \underline{\tau} := \frac{Q \cdot S_{отс}}{d \cdot J_y} \quad \underline{\sigma}_1 := \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \underline{\sigma}_3 := \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma = -1.061 \times 10^8 \quad \tau = -3.046 \times 10^7 \quad \sigma_1 = 8.12 \times 10^6 \quad \sigma_3 = -1.142 \times 10^8$$

$$\underline{\alpha} := \frac{1}{2} \cdot \text{atan}\left(\frac{2 \cdot \tau}{\sigma}\right) \quad \frac{\alpha}{\text{deg}} = 14.927$$

Во вторых точках материал балки находится в плоском напряженном состоянии, т.к. два главных напряжения отличны от нуля.

Точка 3 $z := \frac{H}{4}$ $S_{отс} := t \cdot b \cdot \left(\frac{H-t}{2}\right) + \left(\frac{H-t}{4}\right) \cdot d \cdot \left[\frac{H}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{H-t}{4}\right)\right]$

$$\underline{\sigma} := \frac{-M}{J_y} \cdot z \quad \underline{\tau} := \frac{Q \cdot S_{отс}}{d \cdot J_y} \quad \underline{\sigma}_1 := \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \underline{\sigma}_3 := \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma = -5.694 \times 10^7 \quad \tau = -3.762 \times 10^7 \quad \sigma_1 = 1.871 \times 10^7 \quad \sigma_3 = -7.565 \times 10^7$$

$$\underline{\alpha} := \frac{1}{2} \cdot \text{atan}\left(\frac{2 \cdot \tau}{\sigma}\right) \quad \frac{\alpha}{\text{deg}} = 26.441$$

В третьей точке материал балки находится в плоском напряженном состоянии.

Точка 4 $z := 0$ $S_{отс} := t \cdot b \cdot \left(\frac{H-t}{2}\right) + \left(\frac{H-t}{2}\right) \cdot d \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{H-t}{2}\right)\right]$

$$\underline{\sigma} := \frac{-M}{J_y} \cdot z \quad \underline{\tau} := \frac{Q \cdot S_{отс}}{d \cdot J_y} \quad \underline{\sigma}_1 := \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2} \quad \underline{\sigma}_3 := \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

$$\sigma = 0 \quad \tau = -4.052 \times 10^7 \quad \sigma_1 = 4.052 \times 10^7 \quad \sigma_3 = -4.052 \times 10^7$$

$$\underline{\alpha} := \frac{1}{2} \cdot \text{atan}\left(\frac{2 \cdot \tau}{\sigma + 0.001}\right) \quad \frac{\alpha}{\text{deg}} = -45$$

В четвертой точке материал балки находится в плоском напряженном состоянии – состоянии чистого сдвига, так как $\sigma_1 = -\sigma_3 = -\tau$.

Так как двутавр симметричная фигура, а эпюры напряжений одна (τ) симметричная, а другая кососимметричная (σ) относительно оси y , то в точках 5 и 6 в материале балки будет плоское напряженное состояние, а в точке 7 - линейное.

$$\begin{aligned} \text{Точка 5} \quad z &:= \frac{-H}{4} & S_{отс} &:= t \cdot b \cdot \left(\frac{H-t}{2} \right) + \left(\frac{H}{4} - t \right) \cdot d \cdot \left[\frac{H}{4} + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{H-t}{4} \right) \right] \\ \sigma &:= \frac{-M}{J_y} \cdot z & \tau &:= \frac{Q \cdot S_{отс}}{d \cdot J_y} & \sigma_1 &:= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau^2} & \sigma_3 &:= \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau^2} \\ \sigma &= 5.694 \times 10^7 & \tau &= -3.762 \times 10^7 & \sigma_1 &= 7.565 \times 10^7 & \sigma_3 &= -1.871 \times 10^7 \\ \alpha &:= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{atan} \left(\frac{2 \cdot \tau}{\sigma} \right) & \alpha & \text{deg} &= -26.441 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Точка 6, принадлежащая стенке:} \quad z &:= -\left(\frac{H}{2} - t \right) & S_{отс} &:= t \cdot b \cdot \left(\frac{H-t}{2} \right) \\ \tau &:= \frac{Q \cdot S_{отс}}{d \cdot J_y} & \sigma &:= \frac{-M}{J_y} \cdot z & \sigma_1 &:= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau^2} & \sigma_3 &:= \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau^2} \\ \sigma &= 1.061 \times 10^8 & \tau &= -3.046 \times 10^7 & \sigma_1 &= 1.142 \times 10^8 & \sigma_3 &= -8.12 \times 10^6 \\ \alpha &:= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{atan} \left(\frac{2 \cdot \tau}{\sigma} \right) & \alpha & \text{deg} &= -14.927 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Точка 6, принадлежащая полке:} \quad z &:= -\left(\frac{H}{2} - t \right) & S_{отс} &:= t \cdot b \cdot \left(\frac{H-t}{2} \right) \\ \tau &:= \frac{Q \cdot S_{отс}}{b \cdot J_y} & \sigma &:= \frac{-M}{J_y} \cdot z & \sigma_1 &:= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau^2} & \sigma_3 &:= \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau^2} \\ \sigma &= 1.061 \times 10^8 & \tau &= -1.523 \times 10^6 & \sigma_1 &= 1.062 \times 10^8 & \sigma_3 &= -2.185 \times 10^4 \\ \alpha &:= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{atan} \left(\frac{2 \cdot \tau}{\sigma} \right) & \alpha & \text{deg} &= -0.822 & \sigma_{1_6} &:= \sigma_1 & \sigma_{3_6} &:= \sigma_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Точка 7} \quad z &:= \frac{-H}{2} & S_{отс} &:= 0 \\ \sigma &:= \frac{-M}{J_y} \cdot z & \tau &:= \frac{Q \cdot S_{отс}}{b \cdot J_y} & \sigma_1 &:= \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau^2} & \sigma_3 &:= \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 + \tau^2} \\ \sigma &= 1.139 \times 10^8 & \tau &= 0 & \sigma_1 &= 1.139 \times 10^8 & \sigma_3 &= 0 \\ \alpha &:= \frac{1}{2} \cdot \operatorname{atan} \left(\frac{2 \cdot \tau}{\sigma} \right) & \alpha & \text{deg} &= 0 \end{aligned}$$

По результатам расчета изображаем на элементах 1–7 главные площадки и действующие в них напряжения (рис.15).

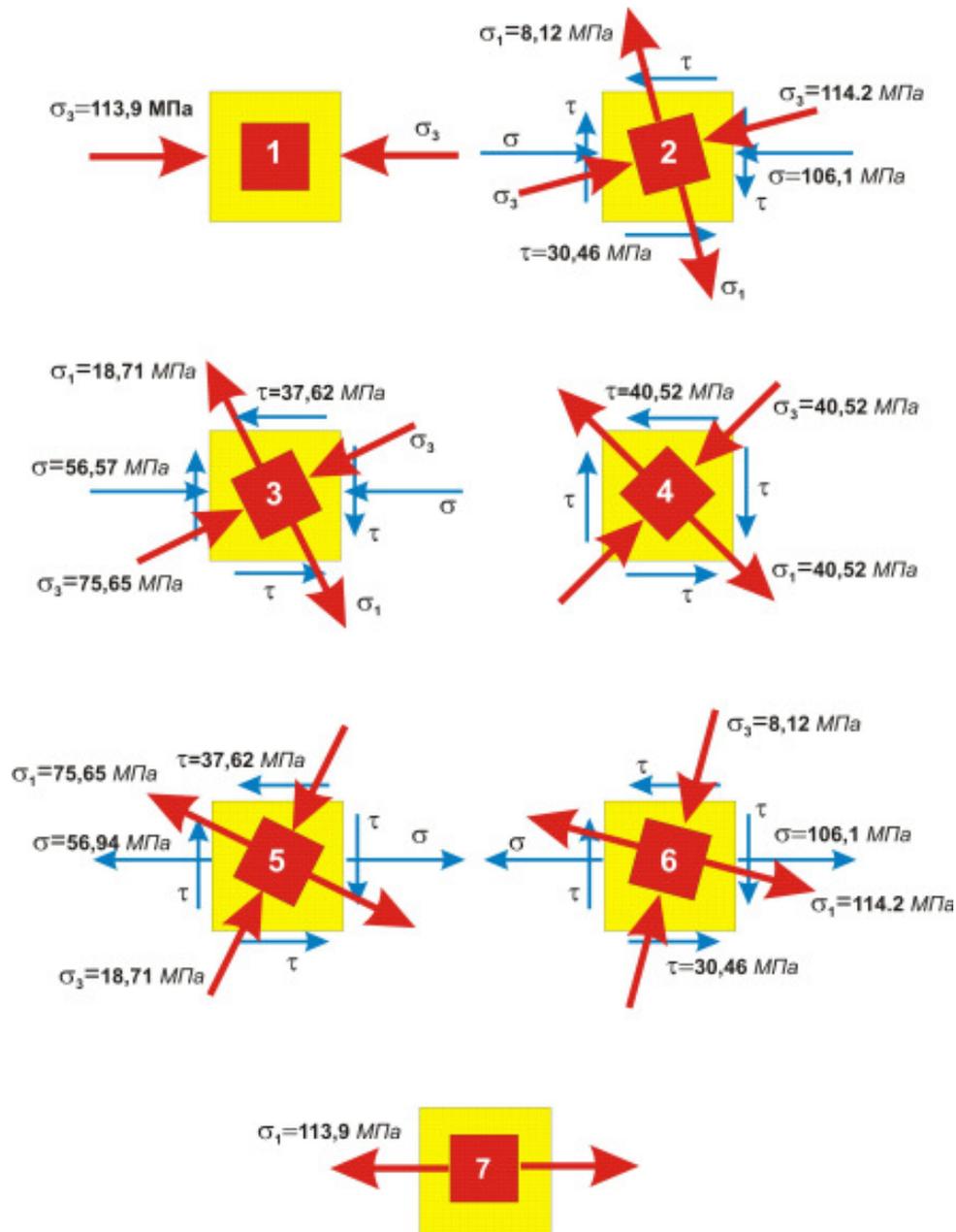


Рис.15

6. Проверка прочности балки по главным напряжениям

Проверку прочности материала балки по главным напряжениям проводим в точках **2** или **6** (где поперечное сечение имеет резкое изменение ширины) по теории наибольших касательных напряжений:

$$\sigma_{III} := \sigma_{1_6} - \sigma_{3_6} \quad \sigma_{III} = 1.062 \times 10^8$$

Таким образом, эквивалентные напряжения по третьей теории прочности

$$\sigma_{III} = 106,2 \text{ МПа} < [\sigma] = 160 \text{ МПа},$$

т.е. прочность балки по главным напряжениям обеспечена.

7. Определение упругой линии и проверка двутавровой балки на жесткость

Для определения прогибов упругой линии балки воспользуемся универсальным уравнением. Этот метод ещё называется *методом начальных параметров*. Он основан на следующих исходных положениях:

- начало координат выбирают в крайней левой точке рассматриваемой балки и оно является общим для всех участков;
- выражение для изгибающего момента M_y составляют путем вычисления моментов сил, расположенных слева от рассматриваемого сечения, взятого на расстоянии x от начала координат;
- в случае обрыва распределенной нагрузки ее продлевают до конца рассматриваемого участка, а для восстановления фактически действующей на балку нагрузки вводят компенсирующую нагрузку обратного направления (экстраполированную дополнительную нагрузку и нагрузку, ее компенсирующую, принято показывать пунктиром).

Универсальное уравнение упругой линии имеет вид

$$EJw = EJw_0 + EJ\theta_0 x + \sum_k M_k \frac{(x - a_{M_k})^2}{2!} + \sum_k P_k \frac{(x - a_{P_k})^3}{3!} + \sum_k q_k \frac{(x - a_{q_k})^4}{4!}. \quad (11)$$

Здесь w_0 , θ_0 - начальные параметры – прогиб и угол наклона упругой линии в начале координат (рис.16).

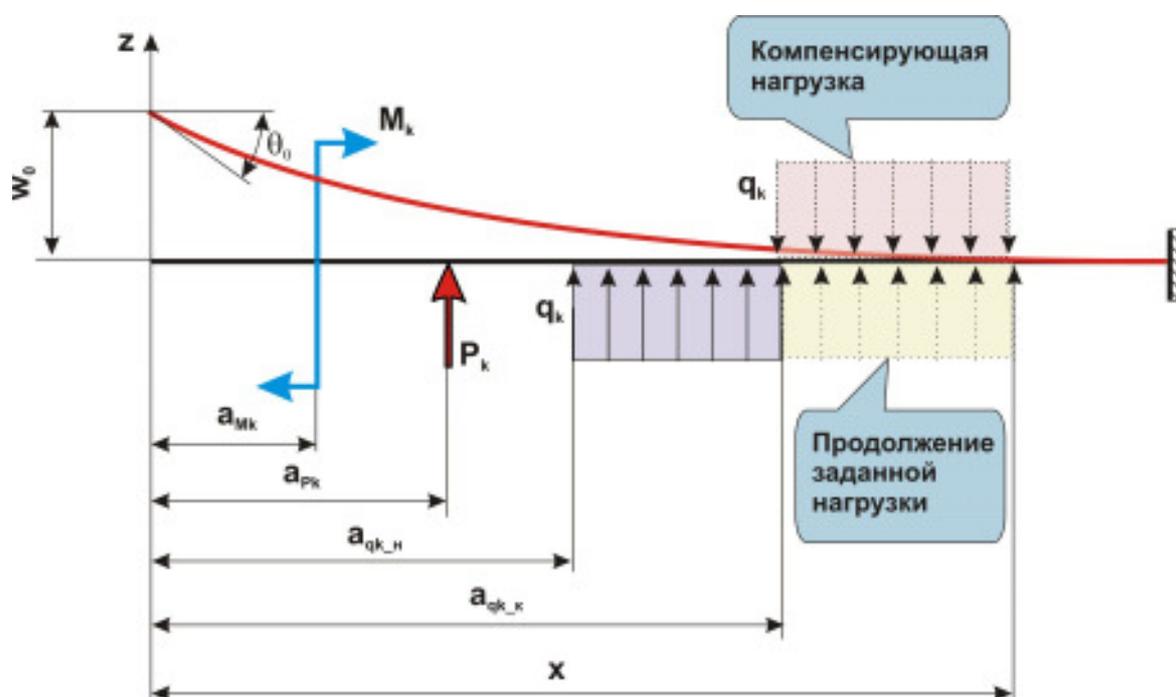


Рис.16

Универсальное уравнение упругой линии может быть применено при любых расчетных схемах балок.

В уравнение (11) подставляют нагрузки, расположенные слева от рассматриваемого сечения; знаки слагаемых определяются знаком соответствующих силовых факторов. Итак, определение перемещений по методу начальных параметров в конечном итоге сводится к определению величин начальных параметров Q_0 , M_0 , θ_0 и w_0 . При

этом статические начальные параметры Q_0 и M_0 находятся из условия равновесия балки, геометрические начальные параметры θ_0 и w_0 определяются из условий на опорах.

Прогибы балки w считаются положительными, когда точки её оси смещаются при деформации вверх. Углы поворота θ положительны, когда поперечные сечения при деформации поворачиваются против хода часовой стрелки.

Поместим начало координат в точке А (над левой опорой).

Начальные параметры w_0 - прогиб сечения в начале координат и θ_0 - угол поворота сечения в начале координат - вычислим из условий закрепления балки. На левой опоре при $x=0$ прогиб $w_0=0$. Угол θ_0 вычислим из граничного условия, что при $x=L$ (на правой опоре, рис.4) $w=0$.

$$EJ := E \cdot J_y \quad EJ = 1.968 \times 10^7$$

$$\theta_0 := 1 \quad \text{Given}$$

$$EJ \cdot L \cdot \theta_0 - M_1 \cdot \frac{(L-a)^2}{2} + Y_A \cdot \frac{L^3}{6} - P_1 \cdot \frac{(L-a)^3}{6} + P_2 \cdot \frac{(L-L_b)^3}{6} \dots = 0$$

$$+ q_1 \cdot \frac{L^4}{24} - q_1 \cdot \frac{(L-a)^4}{24} - q_2 \cdot \frac{(L-a)^4}{24} + q_2 \cdot \frac{(L-L_b)^4}{24} + q_4 \cdot \frac{(L-L_c)^4}{24}$$

$$\theta_0 := \text{Find}(\theta_0) \quad \frac{\theta_0}{\text{deg}} = 0.217$$

Записываем выражения упругой линии балки на каждом из участков:

$$Y1(x) := \theta_0 \cdot x + \left(Y_A \cdot \frac{x^3}{6} + q_1 \cdot \frac{x^4}{24} \right) \cdot \frac{1}{EJ}$$

$$Y2(x) := \left[Y_A \cdot \frac{x^3}{6} + q_1 \cdot \frac{x^4}{24} - q_1 \cdot \frac{(x-a)^4}{24} - M_1 \cdot \frac{(x-a)^2}{2} \dots \right] \cdot \frac{1}{EJ} + \theta_0 \cdot x$$

$$+ \left[-P_1 \cdot \frac{(x-a)^3}{6} - q_2 \cdot \frac{(x-a)^4}{24} \right]$$

$$Y3(x) := \left[Y_A \cdot \frac{x^3}{6} + q_1 \cdot \frac{x^4}{24} - q_1 \cdot \frac{(x-a)^4}{24} - M_1 \cdot \frac{(x-a)^2}{2} \dots \right] \cdot \frac{1}{EJ} + \theta_0 \cdot x$$

$$+ \left[-P_1 \cdot \frac{(x-a)^3}{6} - q_2 \cdot \frac{(x-a)^4}{24} \right] \dots$$

$$+ q_2 \cdot \frac{(x-L_b)^4}{24} + P_2 \cdot \frac{(x-L_b)^3}{6}$$

$$Y4(x) := \left[Y_A \cdot \frac{x^3}{6} + q_1 \cdot \frac{x^4}{24} - q_1 \cdot \frac{(x-a)^4}{24} - M_1 \cdot \frac{(x-a)^2}{2} \dots \right] \cdot \frac{1}{EJ} + \theta_0 \cdot x$$

$$+ \left[-P_1 \cdot \frac{(x-a)^3}{6} - q_2 \cdot \frac{(x-a)^4}{24} \right] \dots$$

$$+ q_2 \cdot \frac{(x-L_b)^4}{24} + P_2 \cdot \frac{(x-L_b)^3}{6} + q_4 \cdot \frac{(x-L_c)^4}{24}$$

Вычисляем упругую линию балки:

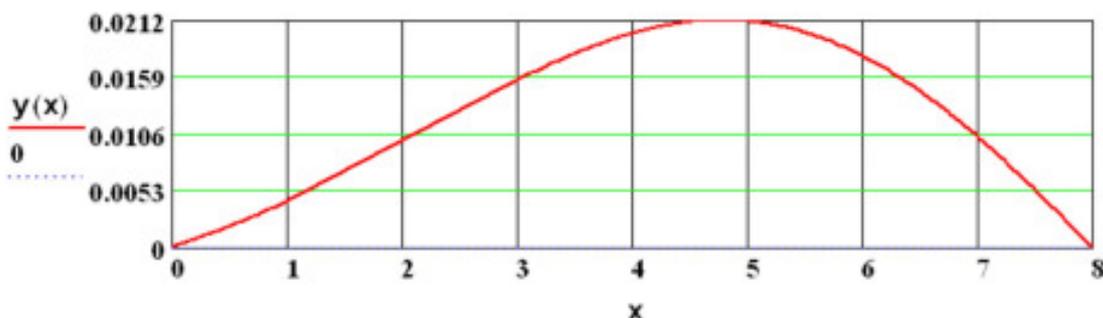
$$y(x) := \begin{cases} Y1(x) & \text{if } 0 \leq x < a \\ Y2(x) & \text{if } a \leq x < L_b \\ Y3(x) & \text{if } L_b \leq x < L_c \\ Y4(x) & \text{if } L_c \leq x \leq L \end{cases}$$

Определяем максимальный прогиб:

$$N := 10000 \quad i := 1..N \quad h := \frac{L}{N} \quad n_i := y(i \cdot h)$$

$$\max(n) = 0.021 \quad \min(n) = 0$$

Строим упругую линию балки:



РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В СИСТЕМЕ SCAD

Большинство универсальных конечно-элементных комплексов не предназначены для выполнения проектировочных работ. Они выполняют только расчет напряженно-деформированного состояния конструкций под действием заданных физических или силовых полей, а процесс принятия решения о выборе геометрических размеров и материала элементов конструкции - прерогатива проектировщика. В отличие от них система **SCAD Office** представляет собой набор программ, предназначенных для выполнения как анализа напряженно-деформированного состояния, так и проектирования различного вида и назначения строительных конструкций. Проектно-аналитические программы **ДЕКОР**, **КРИСТАЛЛ**, **КАМИН** и **АРБАТ** предназначены для решения частных задач проверки и расчета элементов деревянных, стальных и железобетонных конструкций в соответствии с требованиями нормативных документов (СНиП).

В связи с этим только для схемы **I** необходимо проиллюстрировать расчет с применением программы **ДЕКОР**. В остальных случаях – ограничимся расчетом деформированного состояния балки и определением внутренних усилий в её поперечных сечениях.

Схема 1

1. Так же, как и при выполнении задания «Построение эпюр внутренних силовых факторов в брусках и рамах»⁴, создаём конечно-элементную модель балки.

Будем считать, что балка изготовлена из сосны: модуль продольной упругости $E = 10^7$ кН/м²; удельный вес материала древесины $\gamma = 0,48$ г/м³; коэффициент Пуассона $\mu = 0,49$ (изгиб вдоль волокон). При назначении её жесткости в качестве исходной информации примем результаты подбора размеров поперечного сечения балки, выполненные в системе **MathCAD**: $b = 14,4$ см, $h = 28,8$ см.

В программном комплексе **SCAD** открываем раздел **Назначения** и щелкаем по кнопке  **Назначение жесткостей стержням**. Откроется панель **Жесткости стержневых элементов**, на которой указываем *Способ задания Параметрические сечения* и нажимаем клавишу **Параметрические сечения**. Панель **Жесткости стержневых элементов** изменит вид, в полях ввода её указываем параметры сечения и материала балки (рис.17). Подтверждаем наш выбор, нажимая на клавишу **ОК**.

В графическом окне выделяем все элементы балки и щелкаем по кнопке  **ОК** в главном меню.

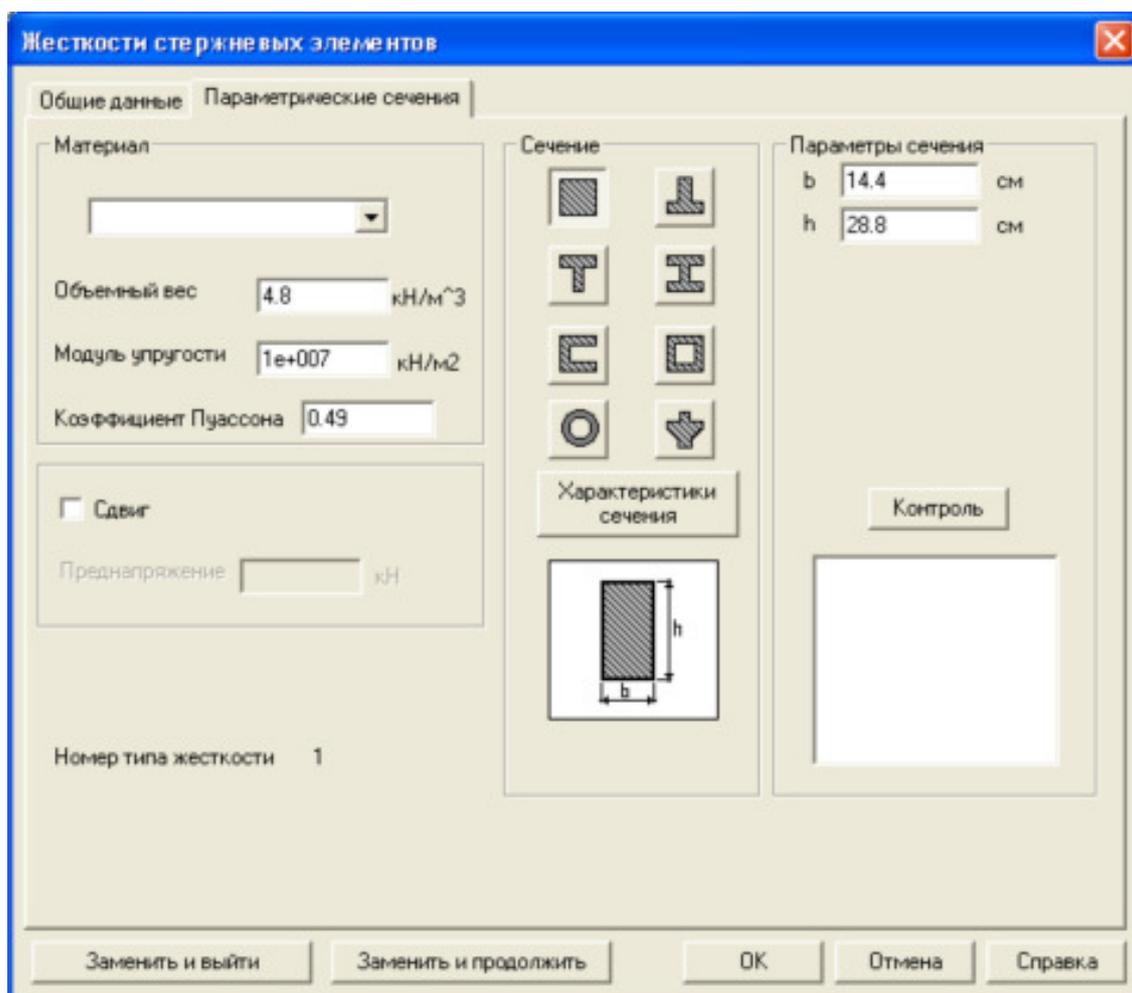


Рис.17

⁴ Методические указания «Построение эпюр внутренних силовых факторов в брусках и рамах». Челябинск, ЧГАУ, 2007 – 60 с.

2. Активируем раздел **Управление** и выходим в экран управления проектом (кнопка .

3. Выполняем расчет. Результаты расчета, представленные на *рис.18*, не противоречат ранее полученным.

Для заданного сечения максимальный прогиб составляет 29,3 мм.

Определение напряжений в стержневых элементах в системе **SCAD** связано с некоторыми неудобствами: можно распечатать таблицу напряжений (раздел **Результаты**, пункт **Печать таблиц**) либо, выписав значения внутренних силовых факторов в опасном сечении балки, перейти в программу **Конструктор сечений**, в которой можно легко проанализировать распределение напряжений по поперечному сечению балки.

Для расчета деревянной балки можно воспользоваться очень удобной, легкой в освоении программой **Декор** комплекса **SCAD**.

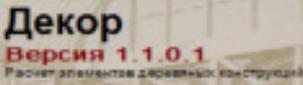
Программа **Декор**⁵ предназначена для выполнения расчетов и проверок элементов и соединений деревянных конструкций на соответствие требованиям СНиП II-25-80 «Деревянные конструкции». Кроме того, в программе предусмотрена возможность получения справочных данных, часто используемых при проектировании деревянных конструкций.

При обращении к программе сначала на экране появляется главное окно с картой входов в режимы программы, с кнопками выбора норм проектирования, настройки программы.

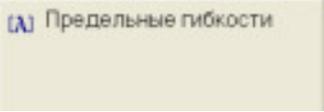
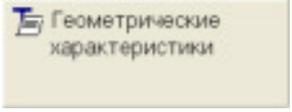
Нормы проектирования выбираются из одноименного списка. Информация об установленных нормах выводится в нижнем левом углу окна активного режима. В первой версии программы реализован только расчет по СНиП II-25-80.

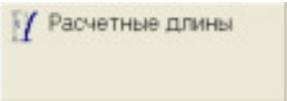
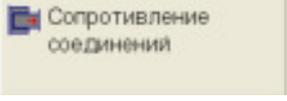
Режимы, вызываемые нажатием специальных кнопок, приведены в табл. 1.

Таблица 1

 	
Информация	
 Предельные прогибы и деформации	В этом режиме приводятся данные о предельных значениях прогибов элементов деревянных конструкций и предельных значениях деформаций соединений, приведенных в таблицах 15, 16 СНиП II-25-80.
 Плотности	Представлена информация о плотности древесины, приведенная в приложении 3 СНиП II-25-80.
 Сортамент древесины	В данном режиме представлена информация о размерах обрезных и необрезных пиломатериалов хвойных пород согласно ГОСТ 24454-80. Кроме того, на странице Пиломатериалы для КДК имеется возможность задать размеры пиломатериалов до острожки и получить размеры после острожки согласно ГОСТ 7307-75*.
 Расчетные сопротивления	Для определения расчетного сопротивления элемента согласно п. 3.1, 3.2 СНиП II-25-80 следует в одноименном диалоговом окне выбрать из соответствующих списков следующие данные: <ul style="list-style-type: none"> ▪ вид напряженно-деформированного состояния;

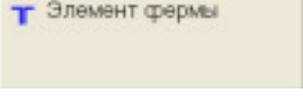
⁵ Справка программы Декор

	<ul style="list-style-type: none"> ▪ характеристики элемента; ▪ порода древесины; ▪ сорт древесины. <p>С помощью маркеров указать вид сечения (клееное или неклееное), а также назначить коэффициенты условий работы (m_a, m_T, m_d, ...) путем выбора их значений из списков или вводом в окна списков значений, отличных от рекомендованных нормами (в списках приведены все значения, перечисленные в соответствующих таблицах СНиП).</p> <p>Значение расчетного сопротивления будет выдано в одноименном поле после нажатия кнопки Вычислить</p>
	<p>В этом режиме приводятся данные о максимально допустимой влажности древесины согласно таблице 1 СНиП II-25-80. Влажность определяется в зависимости от заданных условий эксплуатации конструкции. Для клееной древесины приведены также типы и марки требуемых клеев (согласно 2 СНиП II-25-80)</p>
	<p>Предельная гибкость определяется для различного вида элементов конструкций на основе данных таблицы 14 СНиП II-25-80. Диалоговое окно включает две группы маркеров, определяющих вид элементов (в отдельную группу выделены элементы опор воздушных линий электропередач); группу маркеров выбора плоскости сечения; маркеры для задания формы сечения (прямоугольное, двутавровое или коробчатое).</p> <p>Если активен маркер <i>Сжатый элемент переменного сечения</i>, то необходимо с помощью кнопок назначить условия опирания. Значение предельной гибкости появляется в одноименном поле после нажатия кнопки Вычислить (соответствует таблице 1 СНиП и таблице 1 приложения 4 СНиП II-25-80)</p>
Расчет	
	<p>В программе Декор предусмотрен анализ элементов деревянных конструкций с сечениями одного из трех типов - прямоугольного, двутаврового и круглого. Выбор нужной формы сечения и задание его размеров выполняется в группе Сечение.</p> <p>С помощью кнопки  осуществляется доступ к пользовательской базе поперечных сечений. Эта база создается в процессе работы с программой. Для записи в базу созданного сечения используется кнопка , нажатием которой вызывается диалоговое окно Пользовательские сечения. В этом окне задается имя сохраняемого сечения.</p> <p>Геометрию заданного сечения можно проверить, воспользовавшись кнопкой Предварительный просмотр , нажатием которой вызывается одноименное диалоговое окно с эскизом сечения.</p> <p>При обращении к базе сечений появляется диалоговое окно, включающее список всех сохраняемых в базе сечений. Сечения можно удалить из базы или переименовать (кнопки Удалить и Переименовать), просмотреть (Предварительный просмотр) или загрузить в программу для последую-</p>

	<p>щего использования. В последнем случае следует отметить строку с наименованием интересующего сечения и нажать кнопку Применить.</p> <p>Расположенная в группе Сечение кнопка Геометрические характеристики активизирует окно Свойства сечения, в котором находятся геометрические характеристики сечения (площадь, моменты инерции, ...) и эскиз сечения с его размерами и обозначением осей</p>
	<p>В этом режиме реализованы рекомендации п. 4.21 СНиП II-25-80 по определению расчетных длин. После активации режима появляется страница Вид конструкции, где с помощью маркеров выбирается конструкция, для которой должна быть вычислена расчетная длина (реализованы два вида конструкций - <i>отдельно стоящие колонны и стойки и пересечение сжатого элемента с неработающим</i>). В зависимости от сделанного выбора меняется вид второй страницы режима.</p> <p>Для <i>отдельно стоящих колонн и стоек</i> на странице Расчетные длины установлена группа кнопок, каждая из которых соответствует определенному виду закрепления. Результат расчета, оговоренный в п. 4.21 СНиП II-25-80 (отношение расчетной длины к геометрической длине элемента), выводится в поле Коэффициент расчетной длины после нажатия соответствующей кнопки.</p> <p>Для случая <i>пересечение сжатого элемента с неработающим</i> на странице Параметры конструкции задаются размеры поперечных сечений элементов, их длины и указывается способ их соединения. Вычисление коэффициента расчетной длины выполняется по нажатию кнопки Вычислить</p>
	<p>В этом режиме определяются коэффициенты использования ограничений для соединений на врубках и цилиндрических нагелях. Режим включает две страницы. На странице Общие параметры выбирается тип соединения - соединение на врубках или нагельное. Здесь же содержатся стандартные группы элементов управления для ввода информации о древесине и коэффициентах условий работы. В случае соединения на врубках требуется также информация о сечении.</p> <p>При задании усилий предусмотрена возможность задать несколько значений продольной силы (соответствующих нескольким взаимоисключающим загрузкам)</p>
	<p>В этом режиме реализуется функция определения несущей способности любого из предусмотренных в программе поперечных сечений. В общем случае расчеты выполняются на действие продольной силы, изгибающих моментов и поперечных сил, действующих в главных плоскостях инерции. Реализован весь комплекс проверок по прочности, устойчивости и предельной гибкости в соответствии с разделом 4 СНиП II-25-80.</p> <p>Окно режима содержит пять страниц: Общие параметры, Усилия, Расчетная длина в плоскости XoY, Расчетная длина в плоскости XoZ, Кривые взаимодействия. Первые четыре страницы используются при вводе исходных данных, четвертая - для анализа результатов расчета.</p>

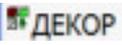
	<p>С помощью курсора можно обследовать представленную на графике область изменения усилий. Каждому положению курсора соответствует определенная пара числовых значений действующих усилий, величины которых отображаются в соответствующих полях.</p> <p>Поскольку факторы предельной гибкости не зависят от усилий, то при построении кривых взаимодействия они не вычисляются.</p> <p>Одновременно выводятся и максимальное значение коэффициента использования ограничений, соответствующее этим усилиям, и тип проверки, при которой он вычислен. Если курсор располагается в точке со значением $K_{max} > I$, то появляется предупреждающий сигнал .</p> <p>Нажатие правой кнопки мыши позволяет увидеть список выполненных проверок и значений факторов для набора усилий, соответствующих положению курсора на кривой взаимодействия</p>
	<p>В этом режиме выполняется проверка неразрезных прогонов круглого или прямоугольного сечений. Окно включает две страницы: Общие параметры и Нагрузки.</p> <p>Для каждого нагружения можно задать несколько компонентов нагрузки. Предполагается, что задаются расчетные значения нагрузок.</p> <p>В зависимости от вида нагрузки ее характеристики включают:</p> <ul style="list-style-type: none"> • для распределенной нагрузки на части пролета  - интенсивность нагрузки, позицию и ширину приложения; • для распределенных нагрузок  - интенсивность нагрузки; • для сосредоточенной силы  - величину силы и ее положение в пролете; • для сосредоточенного момента  - величину момента и его положение в пролете; • для трапециевидной нагрузки  - величины (в начале и в конце), привязку и ширину приложения; • для нагрузки от собственного веса  какие-либо дополнительные данные не требуются. <p>Для каждой нагрузки (за исключением нагрузки от собственного веса) следует также указать пролет, в котором эта нагрузка приложена (выбор производится в выпадающем списке Пролет).</p> <p>Для удаления нагружения (но не отдельной нагрузки, входящей в него) используется кнопка Удалить.</p> <p>Переход к следующему нагружению реализуется кнопкой Создать, при нажатии которой количество нагружений автоматически увеличивается на единицу. Если необходимо уточнить данные по любому из ранее введенных нагружений, то достаточно выбрать его номер в списке Загружение.</p> <p>После нажатия кнопки Добавить в поле Нагрузки появляется изображение текущего состояния нагружения, а под ним</p>

	<p>- совмещенная схема эпюры моментов и поперечных сил. После ввода всех нагрузок можно просмотреть, какой вид имеют огибающие моментов и соответствующих им поперечных сил, а также огибающие поперечных сил и соответствующих им моментов. Выбор критерия (максимальный/минимальный момент, максимальная/минимальная поперечная сила) производится в выпадающем списке. Огибающие строятся в соответствии с требованиями СНиП 2.01.07-85* «Нагрузки и воздействия».</p> <p>Кнопки Все, Сила и Момент позволяют выбрать режим отображения эпюр — соответственно отображение эпюры моментов и поперечных сил, только поперечных сил и только изгибающих моментов. Кроме того, нажатие кнопки  приводит к отображению расчетных значений опорных реакций.</p> <p>При движении мыши в области отображения эпюр на экран выводятся значения момента и перерезывающей силы в конкретном сечении, которое соответствует положению курсора. Если требуется расчет по второму предельному состоянию, то следует проконтролировать правильность задания коэффициента надежности по нагрузке для каждого нагружения, поскольку расчет прогибов выполняется на основании нормативных значений нагрузок.</p> <p>Если в рамках одного нагружения необходимо изменить значение нагрузки или удалить нагрузку, для этого используется таблица нагрузок (кнопка  в группе Загружения). В диалоговом окне Таблица нагрузок, которое появляется после нажатия этой кнопки, отображаются тип нагрузки, ее величина и позиция. Изменения, внесенные в параметры нагрузок, фиксируются после выхода из таблицы нажатием кнопки ОК.</p> <p>Расчет значений факторов использования несущей способности выполняется по нажатию кнопки Вычислить. Если на странице Общие параметры был активирован маркер Ограничение по прогибу, то производится вычисление огибающей прогибов. Максимальное значение прогиба отображается в группе Максимальный прогиб на странице Общие параметры. С помощью кнопки , расположенной в этой же группе, вызывается диалоговое окно, в котором отображаются эпюры прогибов</p>
 Консольно-балочные прогоны	<p>Этот режим аналогичен режиму Неразрезные прогоны. Отличия состоят в том, что на странице Общие параметры задается только длина типового пролета (все типовые пролеты предполагаются одинаковой длины) и предусмотрена возможность задать расположение шарниров, исходя из равномоментной или равнопрогибной схем. Если выбирается другой вариант, то необходимо задать расстояние от опоры до шарнира.</p> <p>Отметим, что задав расстояние от опоры до шарнира равное</p>

	<p>нулю, данный режим можно использовать для расчета разрезных прогонов.</p> <p>Для консольно-балочных прогонов предусмотрено задание только двух видов нагрузок - равномерно распределенная нагрузка на все пролеты и нагрузка от собственного веса</p>
	<p>С помощью этого многостраничного окна реализуется проверка обычной или двускатной балки. Окно включает три страницы: Общие параметры, Закрепление, Нагрузки. Режим Общие параметры аналогичен режиму Неразрезные прогоны. Отличия состоят в том, что задается только одна длина балки и для случая прямоугольного сечения допускается расчет двускатных балок (в этом случае дополнительно указывается высота сечения в середине пролета).</p> <p>Страница Закрепление содержит две группы кнопок, с помощью которых выбирается система раскреплений балки в плоскости и из плоскости изгиба. Выбор внутри каждой группы осуществляется независимо нажатием кнопки с соответствующей схемой. Если при задании условий закрепления из плоскости изгиба назначен последний вариант, то открывается поле для ввода количества участков разбиения пролета балки.</p> <p>С помощью таблицы отображения выбранной системы связей осуществляется контроль введенных исходных данных.</p> <p>Задание нагрузок полностью аналогично заданию нагрузок на неразрезные прогоны (здесь не требуется указание номера пролета, в котором приложена нагрузка)</p>
	<p>В этом режиме выполняется проверка конструкции стоек и колонн. Реализован весь комплекс проверок по прочности, устойчивости и предельной гибкости в соответствии с разделом 4 СНиП II-25-80. Предполагается, что реализуется плоская схема нагружения.</p> <p>Диалоговое окно режима Стойки включает четыре страницы: Общие параметры, Усилия, Расчетная длина в плоскости XOY, Расчетная длина в плоскости XOZ</p>
	<p>С помощью этого режима осуществляются все необходимые проверки элементов ферм на прочность и устойчивость, а также проверяется их гибкость. Работа начинается с определения расчетных значений усилий от задаваемых внешних нагрузок для схем конструкций, наиболее часто используемых на практике.</p> <p>Исходные данные для режима задаются на четырех страницах - Общие данные, Материалы, Сечения и Нагрузки. Усилия в элементах фермы для текущего нагружения отображаются в виде эпюр в окне Усилия в элементах фермы, которая вызывается нажатием кнопки </p>
	<p>Режим Фермы предоставляет наиболее употребительный, но далеко не полный набор ферменных конструкций. Для анализа элементов произвольной фермы в программе предусмотрен специальный режим Элемент фермы, с помощью которого можно проанализировать несущую способность элемента фермы (предполагается, что задача статики решена ранее и усилия в элементе известны)</p>

	<p>На странице Общие параметры задаются данные о сечении элемента, его типе (элемент пояса, элемент решетки, ...), древесине и коэффициентах условий работы. Кроме того, в отдельной таблице задаются усилия (продольные силы) для произвольного числа загрузжений.</p>
--	--

При применении программы **Декор** решение нашей задачи будет выглядеть так.

1. Запускаем программу **Декор**, щелкая по её названию  в списке программ программного комплекса **SCAD Office 11.1**.
2. На экране дисплея появляется главное окно с картой входов в режимы программы (рис.19).

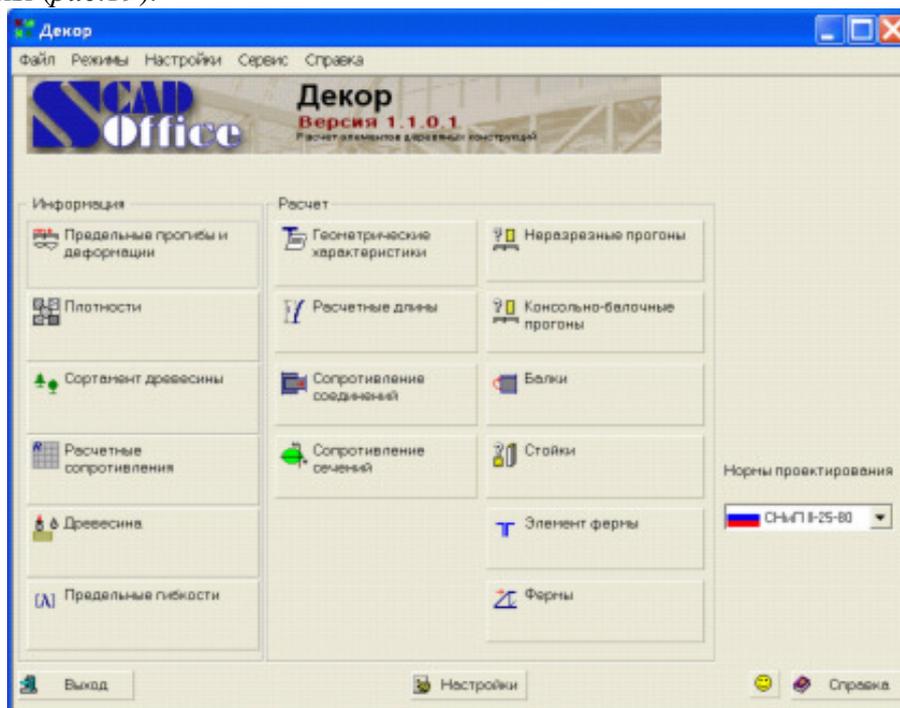
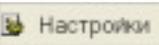


Рис.19

3. Нажимаем на клавишу . Появляется панель **Настройки приложения**, в полях ввода которой устанавливаем принятые в нашем расчете единицы измерения (рис.20).



4. Нажимаем на клавишу . Открывается панель **Декор – Балки** с тремя вкладками: **Общие параметры**, **Закрепление**, **Нагрузки** (рис.21). На первой вкладке задаем геометрические характеристики балки и физические характеристики материала, из которого изготовлена балка. Вводим размеры поперечного сечения балки, вычисленные в программе **MathCAD**, при условии что $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$ (рис.21, а).

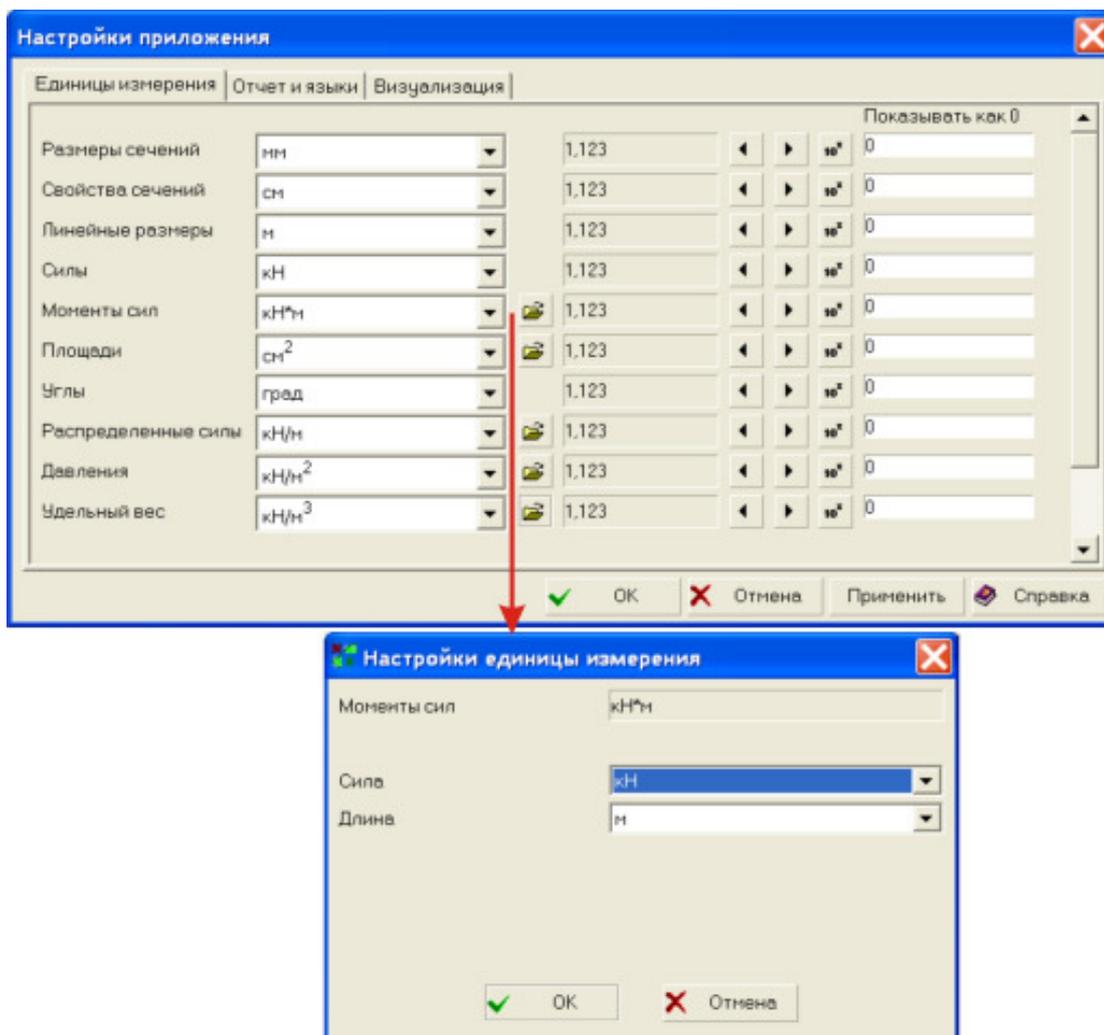


Рис.20

На второй вкладке задаём условия закрепления балки в плоскостях XoZ и XoY (рис.21, б), на третьей – нагрузки (рис.22, а). Одновременно с введением нагрузок в окне просмотра строятся совмещенные эпюры M и Q (рис.22 а, б). При перемещении указателя мыши вдоль оси балки в окне просмотра в зоне построения эпюр рядом с ним появляется информация о координате сечения балки и величинах внутренних силовых факторов (рис.23).

- После задания всех нагрузок щелкаем по клавише Вычислить **Вычислить**. Внизу панели появляется информация о прочности элемента при действии изгибающего момента. Коэффициент k_{max} характеризует уровень недогруженности балки. В нашем случае этот коэффициент равен **0.624**, т.е. балка недогружена на **37,6%**. Это связано с тем, что в базе данных материалов для сосны при растяжении вдоль волокон принято $[\sigma] = 14 \text{ МПа}$, а не $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$. Для $[\sigma] = 14 \text{ МПа}$ размеры поперечного сечения будут такими, как показано на рис.24, и $k_{max} = 0,925$.

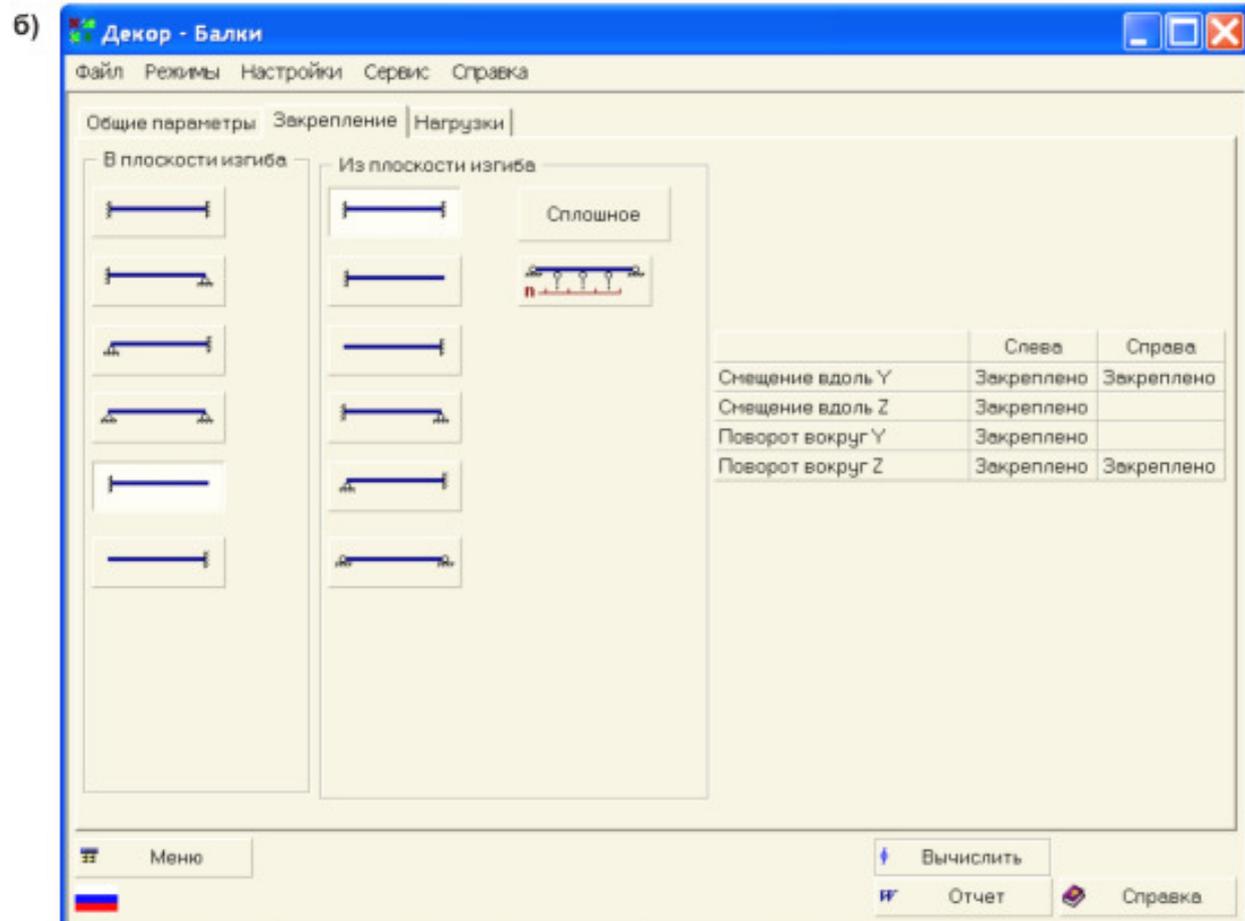
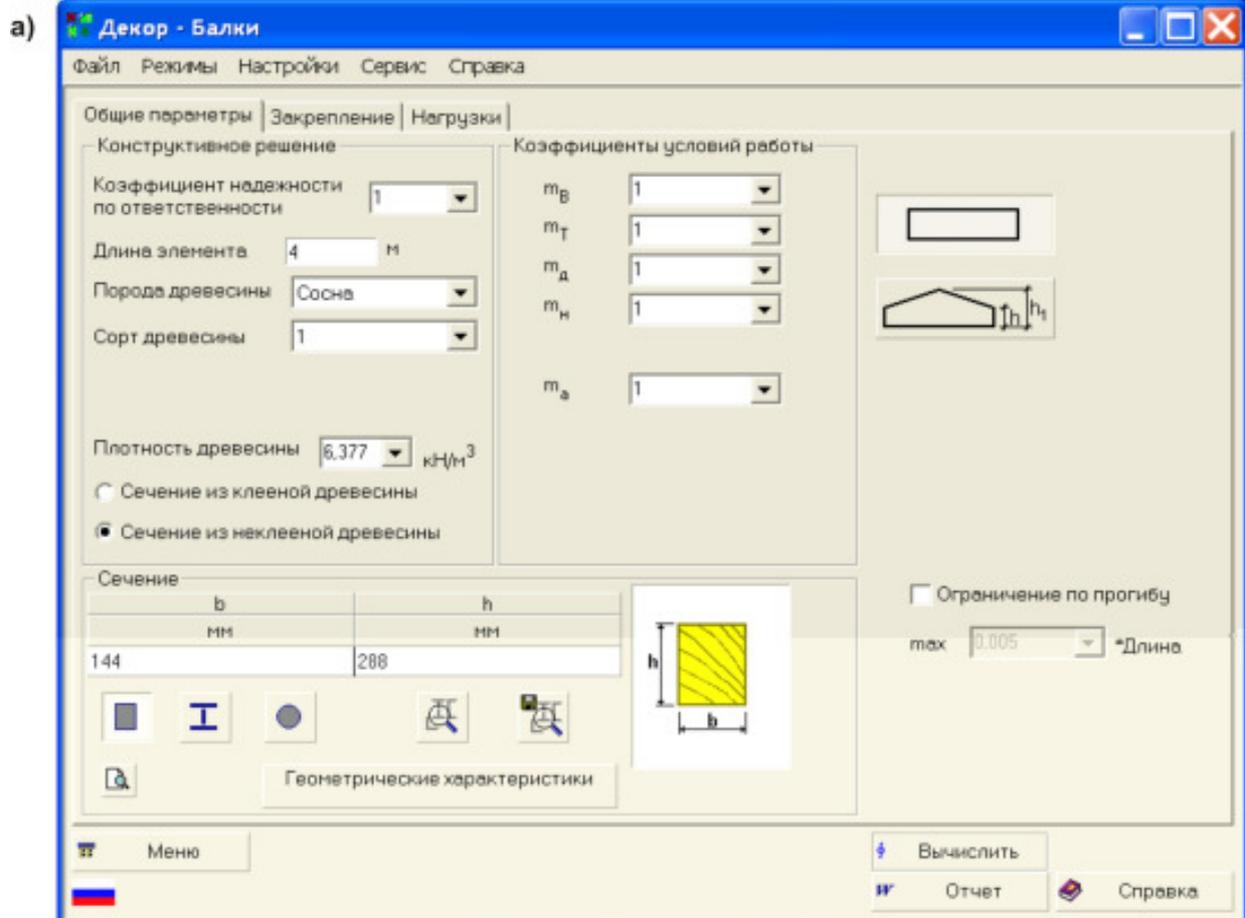
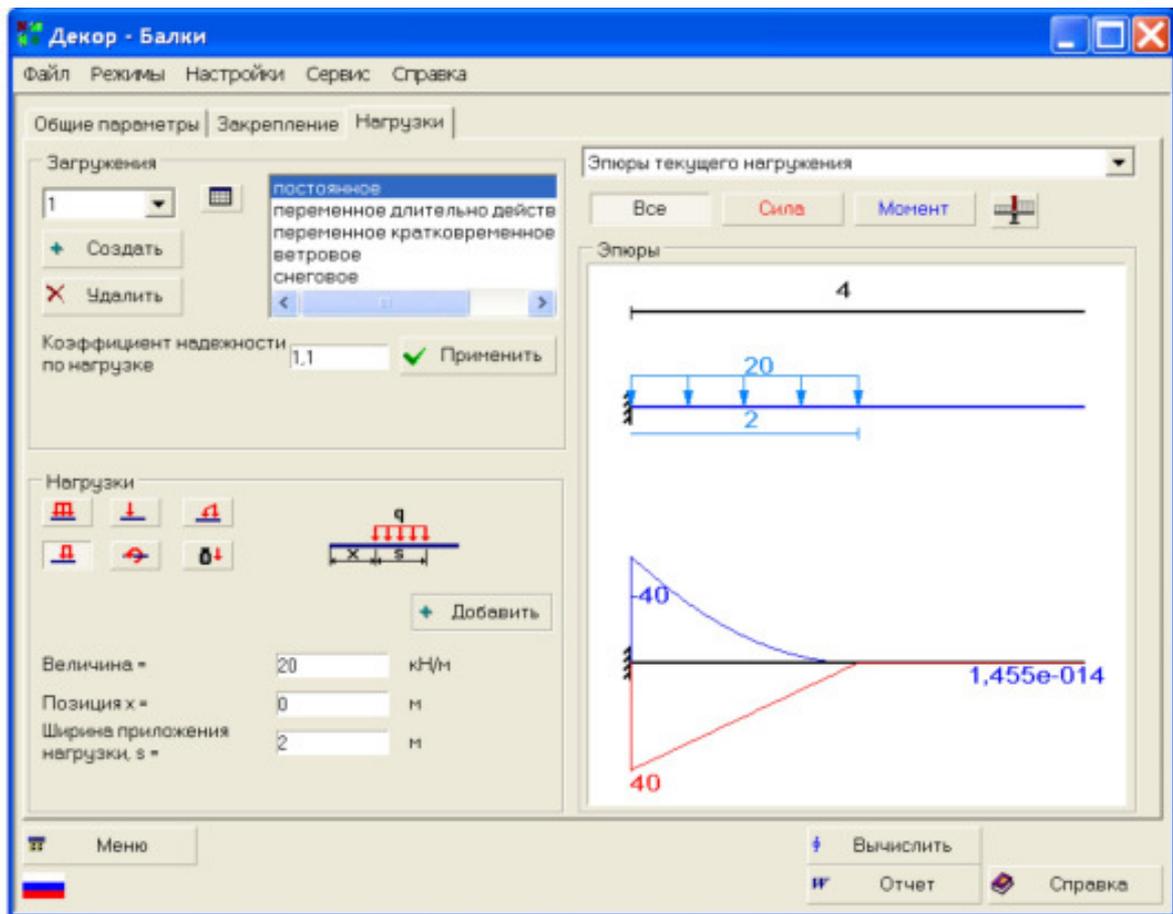


Рис.21

а)



б)

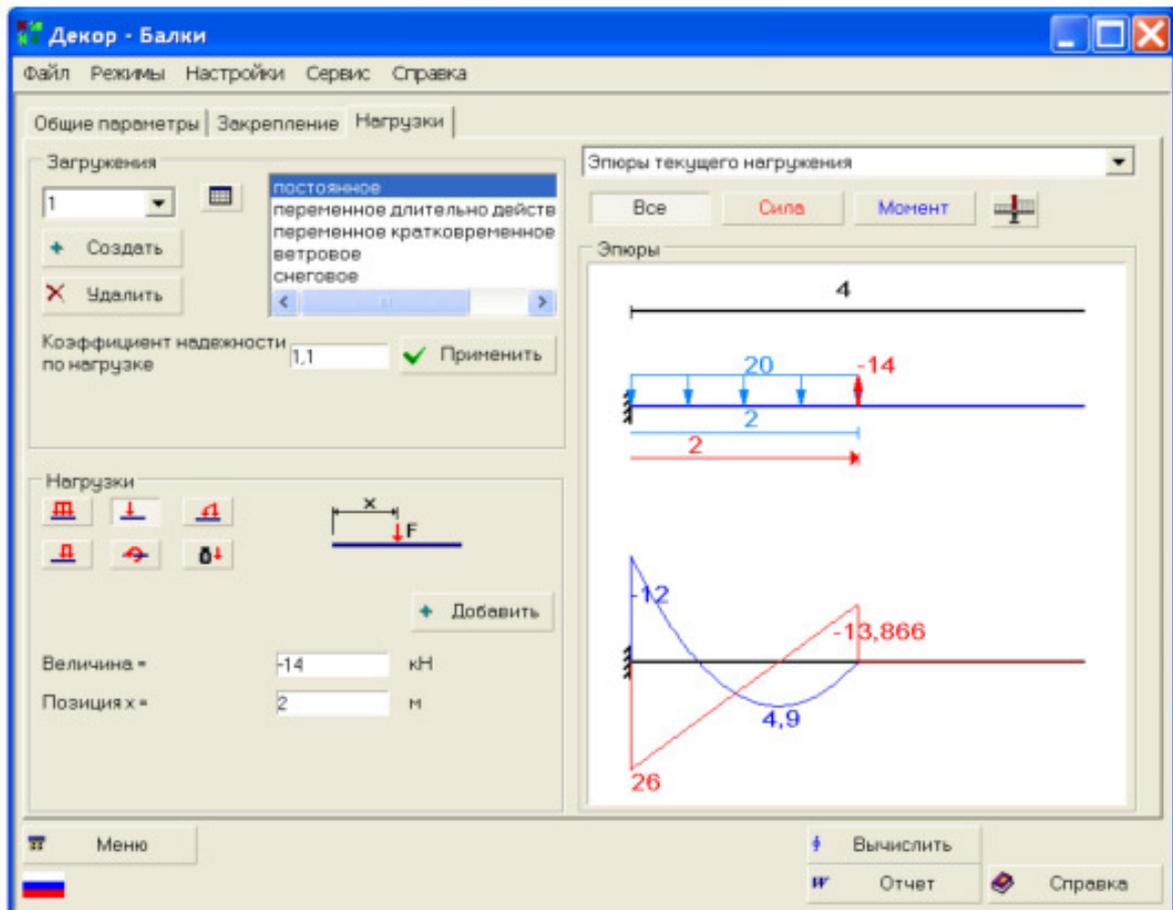


Рис.22

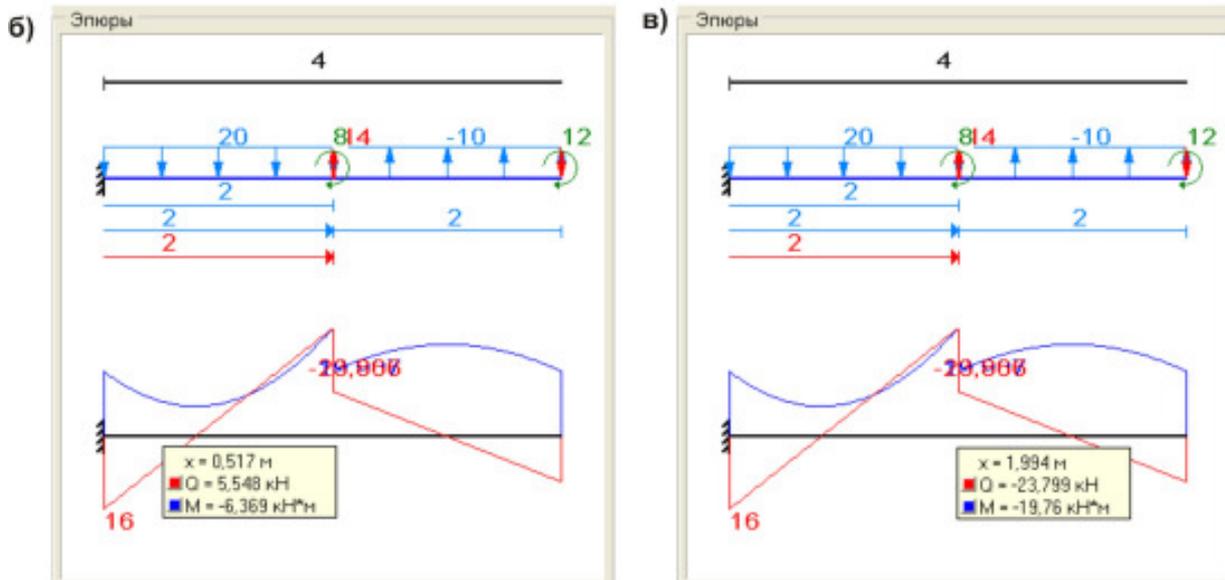
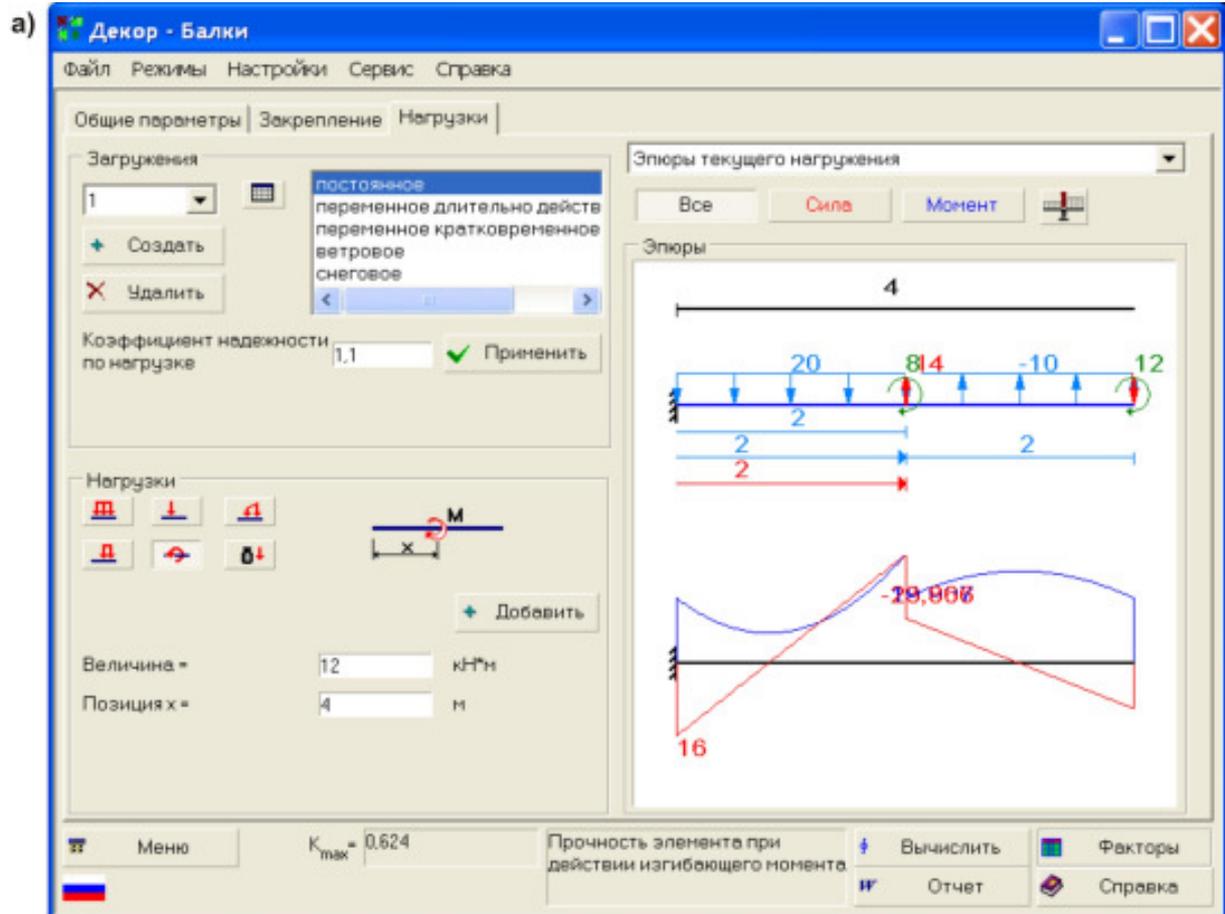


Рис.23

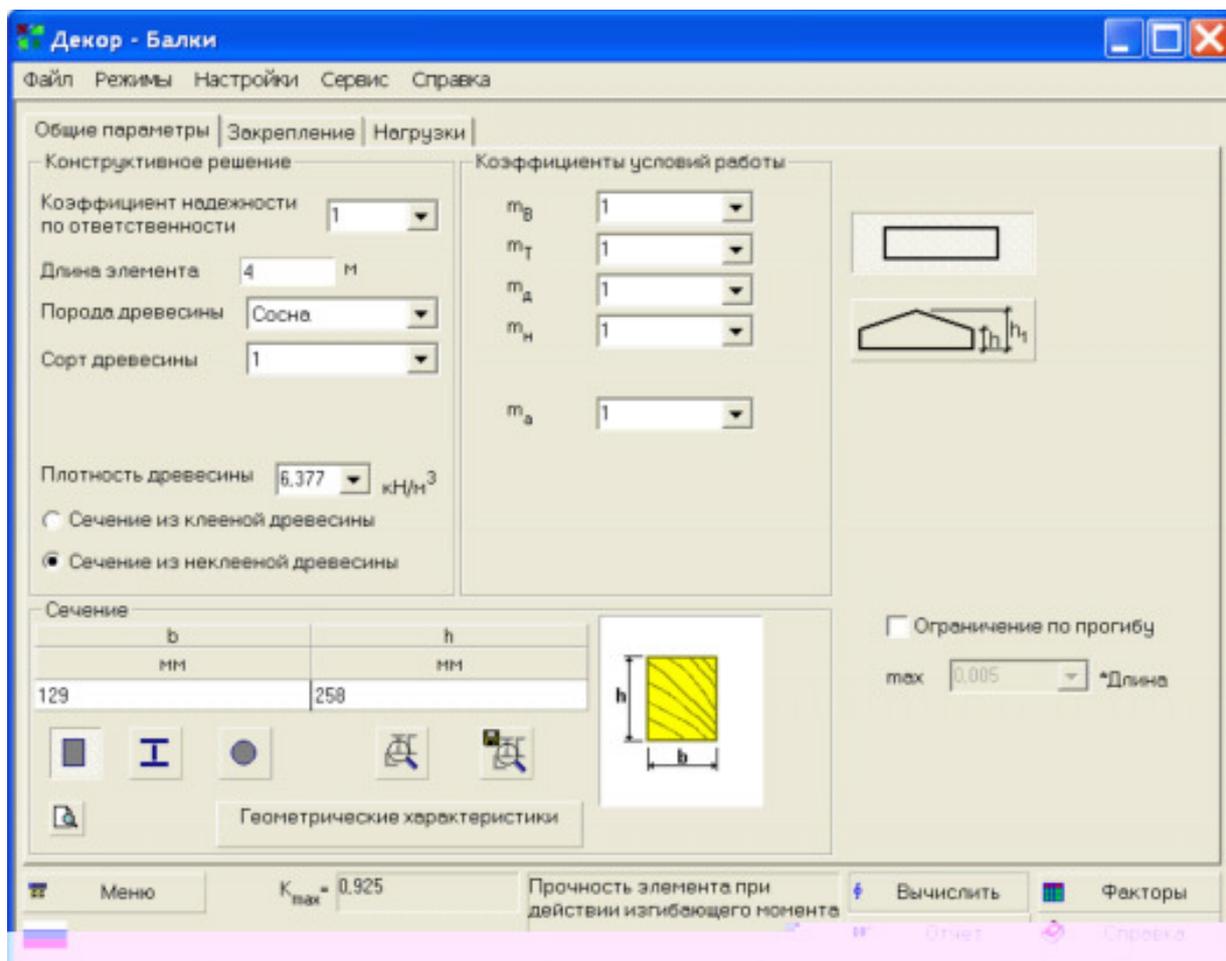


Рис.24

Схема 2

1. Создаём конечно-элементную модель балки.

При назначении её жесткости в качестве исходной информации примем результаты подбора размеров поперечного сечения балки, выполненные в системе **MathCAD**: $d = 17,2$ см.

В программном комплексе **SCAD** открываем раздел **Назначения** и щел-

каем по кнопке  **Назначение жесткостей стержням**. Откроется панель **Жесткости стержневых элементов**, на которой указываем *Способ задания Параметрические сечения* и нажимаем клавишу **Параметрические сечения**. Панель **Жесткости стержневых элементов** изменит вид, в полях её ввода указываем параметры сечения и материала балки (рис.25). Так как среди предлагаемых сечений нет сплошного круглого (самого нерационального поперечного сечения балки, работающей на поперечный изгиб), то зададим трубчатое сечение с внутренним диаметром $0,1$ м. Подтверждаем наш выбор, нажимая на клавишу **ОК**.

2. Активируем раздел **Управление** и выходим в экран управления проектом (кнопка ).

3. Выполняем расчет. Результаты расчета, представленные на рис.26, не противоречат ранее полученным.

Схема 3

1. Создаём конечно-элементную модель балки. При назначении её жесткости в качестве исходной информации примем результаты подбора размеров поперечного сечения балки, выполненные в системе **MathCAD**: $D = 22,7$ см, $d = 18,2$ см. Вид панели **Жесткости стержневых элементов** для этого расчета приведен на *рис.27*.

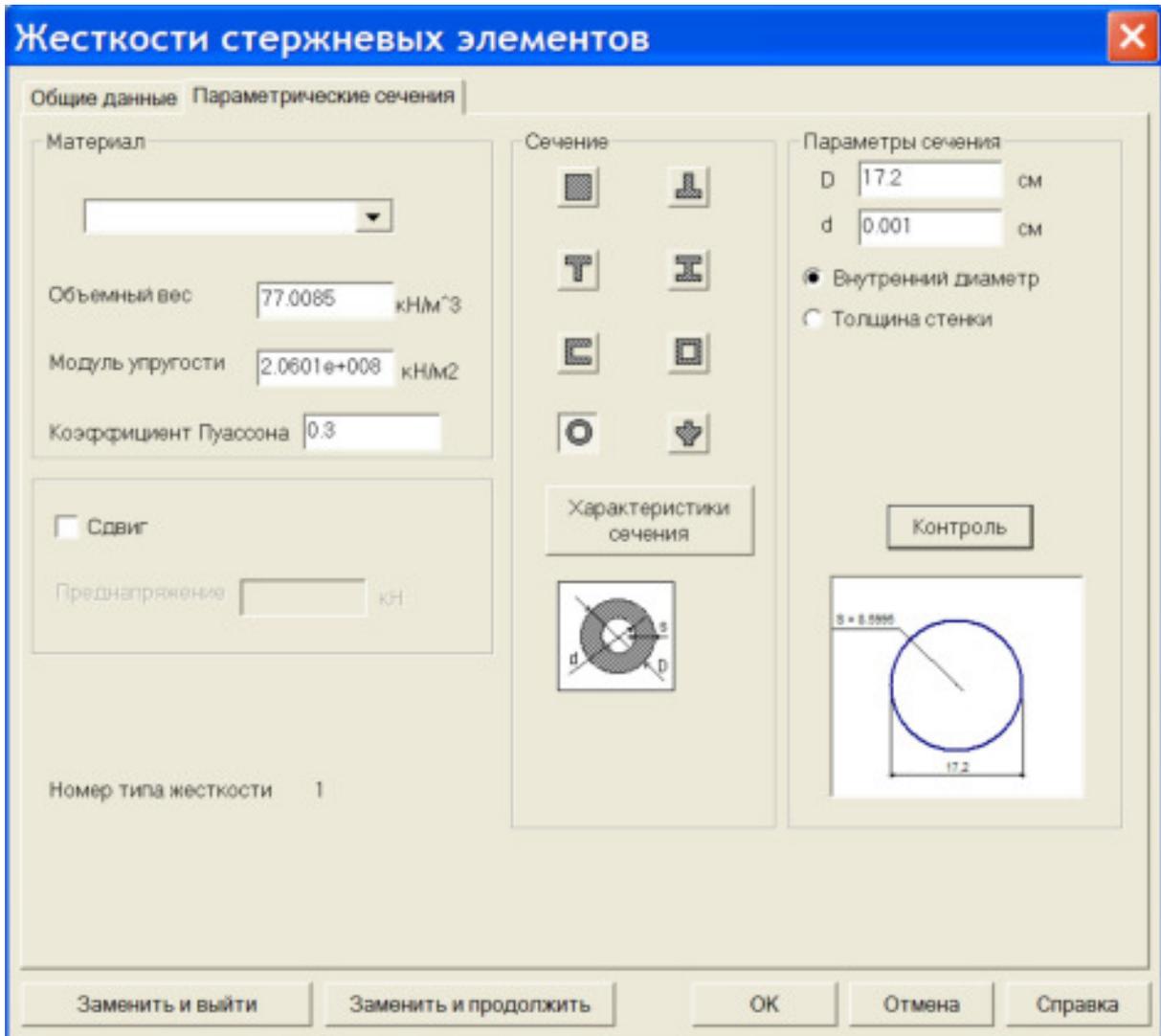


Рис.25

В графическом окне выделяем все элементы балки и щелкаем по кнопке  **ОК** в главном меню.

2. Выполняем расчет. Результаты расчета, представленные на *рис.28*, не противоречат ранее полученным.

Схема 4

Для анализа напряженного состояния в балке необходимо создать её модель из плоских или объёмных элементов. Создадим конечно-элементную модель балки из плоских конечных элементов. За основу примем выбранный нами в **MathCAD** двутавр №33: высота двутавра $h = 330$ мм, ширина полки $b = 140$ мм, толщина стенки двутавра $t = 7$ мм, толщина полки $t = 11,23$ мм.

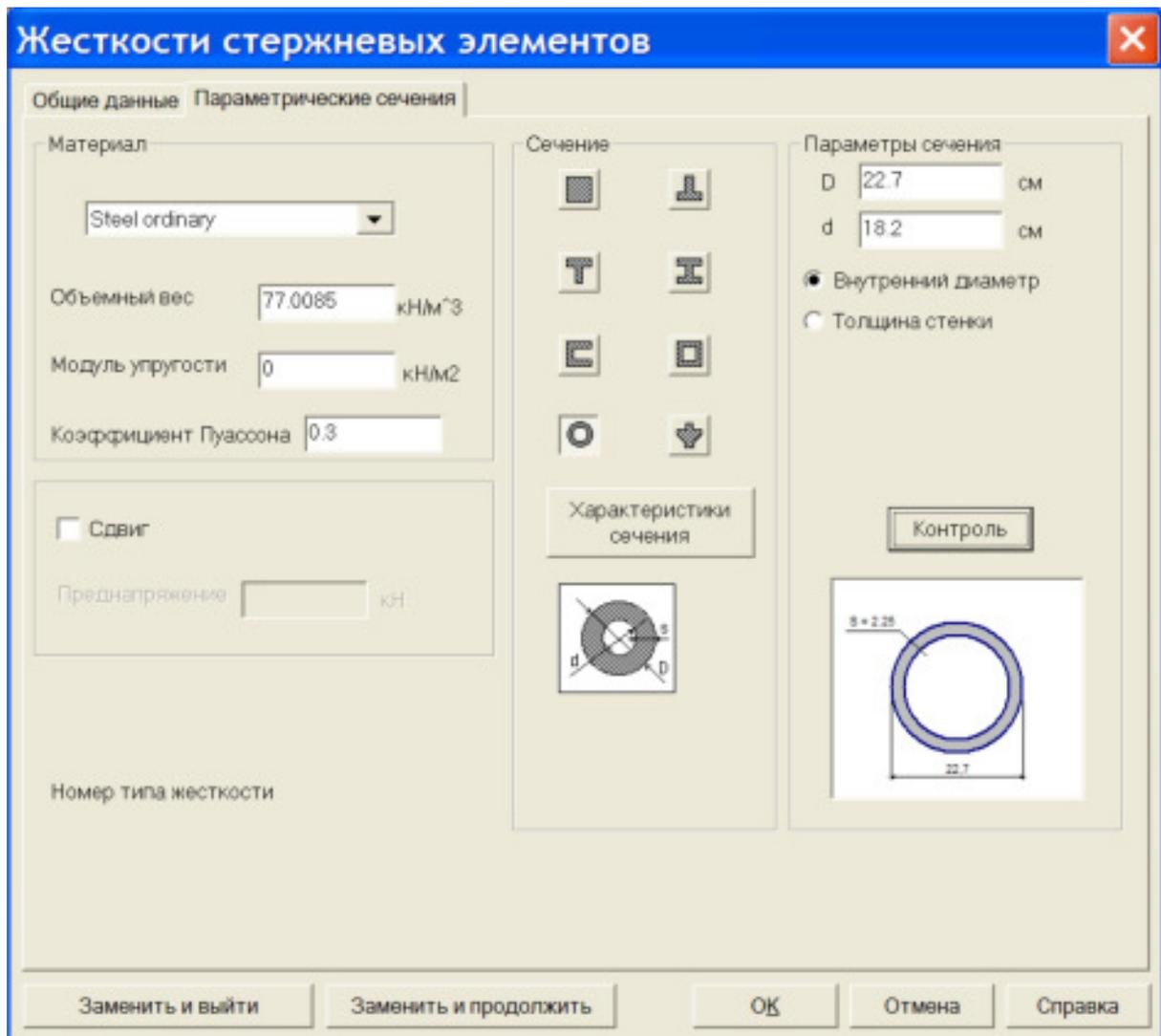


Рис. 27

1. Создание расчетной схемы

Сначала создаём поперечное сечение стержня. Для ввода узлов открываем раздел **Узлы и элементы** и нажимаем кнопку  **Узлы**, активизируя тем самым появление группы кнопок режима **Узлы**.

Нажимаем кнопку  **Ввод узлов**. В результате откроется одноименное диалоговое окно, с помощью которого задаём координаты точек $A(0,0,0)$, $B(0.07,0,0)$, $C(0.14,0,0)$, $D(0.07,0,0.31877)$, $E(0,0,0.31877)$, $F(0.14,0,0.31877)$ (рис.28).

При определении координат точек D , E , F было учтено, что толщина полок двутавра равна t , а на рис.28 изображена срединная линия поперечного сечения балки (линия, делящая толщину полки и стенки двутавра пополам).

Активируем кнопки  **Элементы**. Используя кнопку  **Добавление стержней**, соединяем точки A , B , C , D , E , F элементами, которые затем разбиваем на пять (стержни, относящиеся к полкам двутавра) и двадцать (стержень, моделирующий стенку двутавра) элементов (кнопка  и панель **Разбивка стержня**).

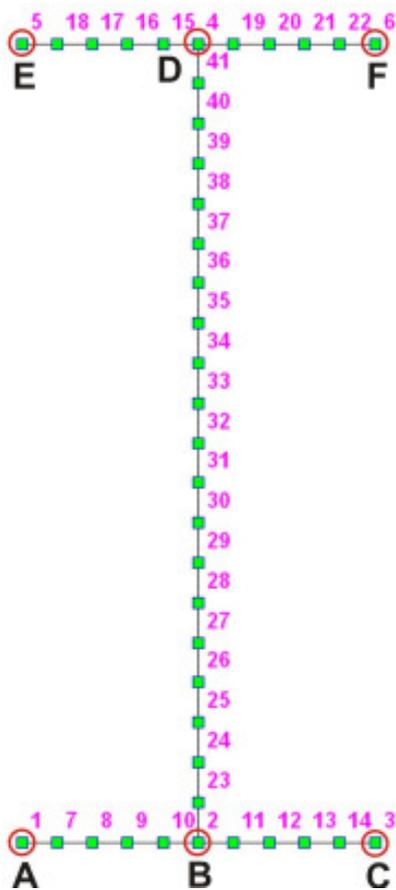


Рис.28

Выполняем операцию копирования с порождением новых элементов.

Активизируем режим **Элементы** , нажимаем на кнопку выбора элементов  и выбираем на прототипе элементы, которые должны породить пластины. В разделе **Схема** нажатием на кнопку  активизируем режим копирования. В диалоговом окне **Копирование схемы** (рис.29) назначаем параметры копирования, правила обслуживания копий и нажимаем на кнопку **ОК**.

После выполнения копирования подтверждаем результаты копирования или отказываемся от них.

Если при этом произошло копирование и стержней, то их необходимо удалить. Нажимаем на кнопку  **Пластины** и отключаем этот фильтр (по умолчанию он включен). Оставшиеся на экране дисплея стержни, порожденные узлами, удаляем: в разделе **Узлы и элементы** последовательно нажимаем на кнопки  **Элементы**,  **Выбор элементов**, выделяем удаляемые стержни и подтверждаем наше желание их удалить, щелкнув по кнопке . Активизируем фильтр **Пластины**.

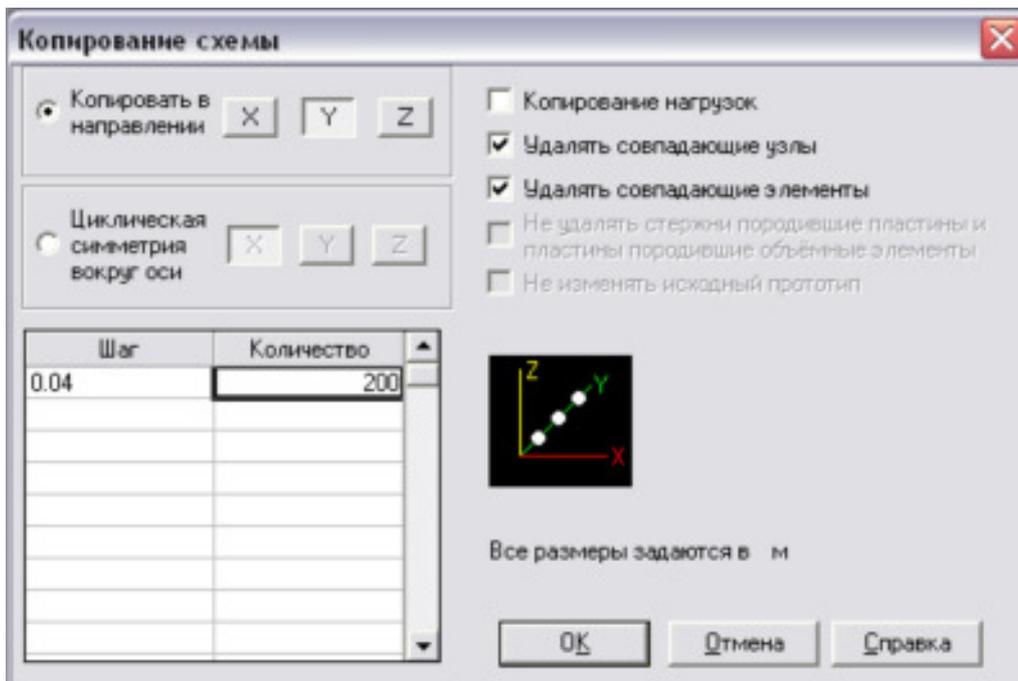


Рис.29

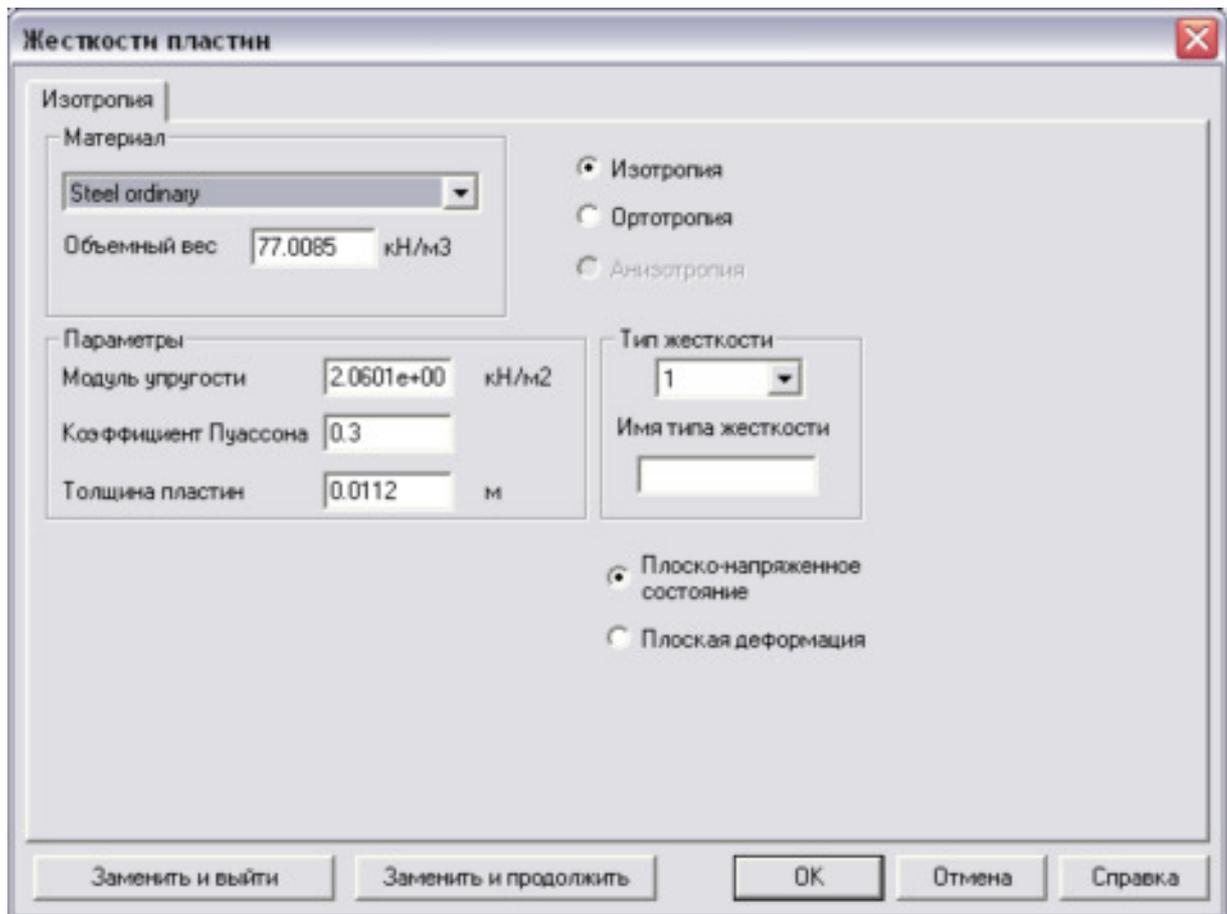


Рис.30

2. Назначение жесткостей элементам

В разделе **Назначения** нажимаем на кнопку  **Назначение жесткостей пластинам**. Появится панель **Жесткости пластин** (рис.30), в окнах которой задаём необходимые параметры пластин: материал, толщину, тип жесткости.

Приведенные на рис.30 физические и геометрические параметры модели соответствуют полкам двутавра.

Для того чтобы выделить элементы, принадлежащие полке, необходимо повернуть балку так, чтобы в окне просмотра было видно только её поперечное сечение. На панели **Визуализация** щелкаем по кнопке  **Проекция на плоскость XOZ**. Нажимаем правую кнопку мыши и на появившейся панели **Выбор узлов и элементов** выбираем вид курсора *Прямоугольник* и нажимаем на клавишу **ОК** (рис.31, а).

В окне просмотра выделяем нужные нам элементы (рис. 31, б) и, нажав на клавишу  в главном меню, подтверждаем наш выбор.

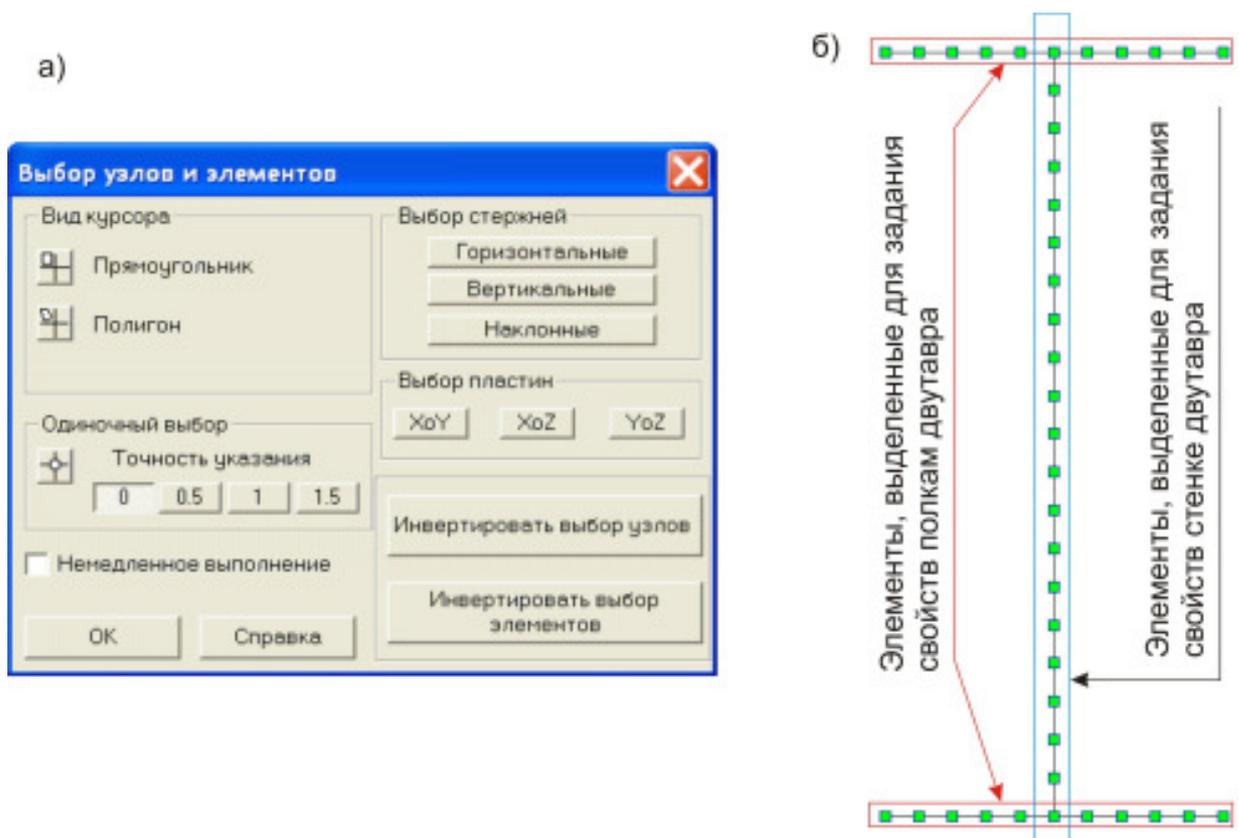


Рис.31

3. Назначение опорных связей

В разделе **Назначения** нажимаем на кнопку  **Связи в узлах**. Появляется панель **Связи** (рис.32), на которой щелкаем по клавише *Установить всё* и для шарнирно-неподвижной опоры отжимаем кнопку U_y , а для шарнирно-подвижной опоры - две кнопки U_y и X . Щелкаем по кнопке , и на торцах балки появляются изображения закрепленных узлов.

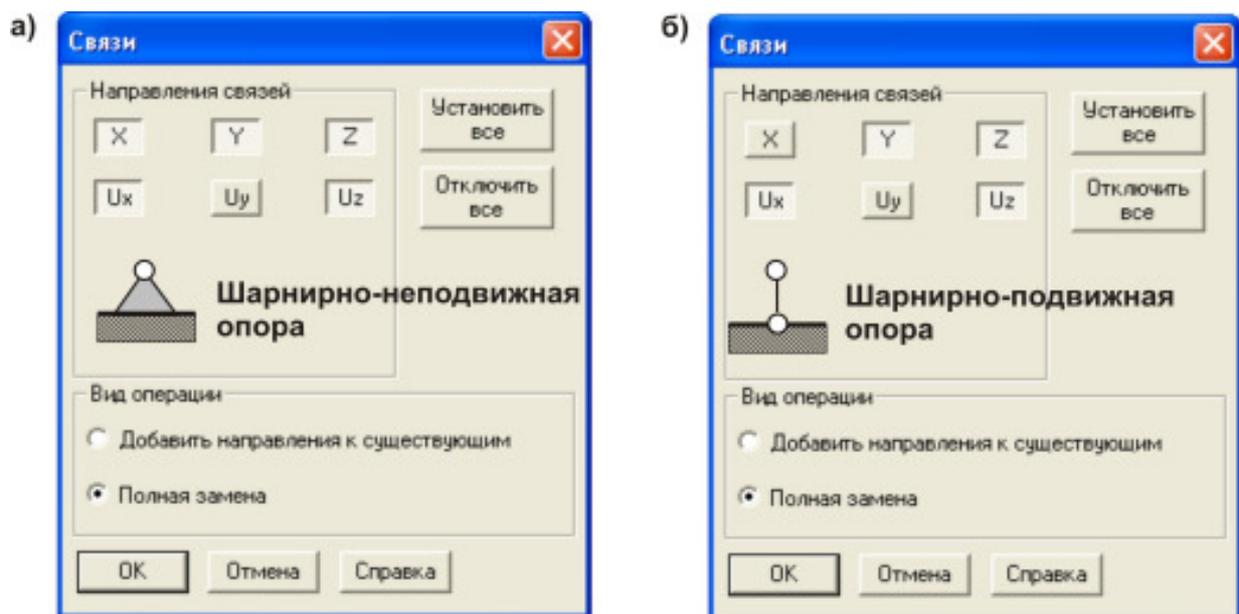


Рис.32

4. Загрузка расчетной схемы

Для загрузки балки заданной нагрузкой спроецируем балку на плоскость YOZ , для чего щелкаем по кнопке  **Проекция на плоскость YOZ** на панели

Визуализация и с помощью кнопки  **Увеличение изображения** увеличиваем модель балки так, чтобы изображения узлов не накладывались друг на друга (рис.33).

Контроль длины участков, вдоль которых задается распределённая нагрузка, или точек приложения сосредоточенных нагрузок выполняется с помощью панели

Информация об узле, открывающейся после нажатия одноименной кнопки  (рис.33), расположенной на панели фильтров. Подведя указатель мыши к узлу и щелкнув левой клавишей мыши, в окнах X , Y , Z панели получим информацию о координатах узла.

Нагрузку задаём в разделе **Загрузки**, используя кнопки  **Узловые нагрузки** и  **Нагрузки на пластины**. Если при расчете балок методами сопротивления материалов нас не интересовал детальный характер приложения нагрузки, то при решении той же задачи с помощью МКЭ мы обязаны учитывать этот фактор. В соответствии с принципом Сен-Венана детальный характер приложения нагрузки не сказывается на достаточном удалении от мест приложения нагрузки, но если опасное сечение окажется в зоне приложения нагрузки (особенно сосредоточенной), то не следует ожидать в этом сечении совпадения решений сопротивления материалов и теории упругости.

Распределенную нагрузку распределяем вдоль ширины полок двутавра, например, нагрузку $q_1 = 30$ кН/м следует прикладывать как нагрузку, распределённую по

площади: $q_1 = \frac{30 \cdot 1}{1 \cdot 0,14} = 214,28$ кН/м². Щелчок по кнопке  **Нагрузки на пла-**

стины приводит к открытию панели **Задание нагрузок на пластинчатые элементы** (рис.34), с помощью которой задаем нагрузку. В окне просмотра указывается положительное направление нагрузок. При указанном на рис.33 способе выделения элементов выделяются не только элементы, видимые в окне просмотра, но и элементы полки, проецирующиеся на выделенные.

Вместо сосредоточенной силы следует задавать узловую нагрузку, распределенную на несколько узлов. Например, силу $P_1 = 80$ кН можно задать как

$P_1 = \frac{80}{11 \cdot 3} = 2,424$ кН, приходящуюся на 33 узла (11 узлов по ширине полки и 3 узла вдоль оси балки).

Момент пары сил можно задать как пару сил, приложенных к полкам двутавра и направленных вдоль оси балки: $M_1 = \frac{60}{0,3188 \cdot 11} = 17,11$. Здесь 0,3188 м – высота средней линии поперечного сечения двутавра.

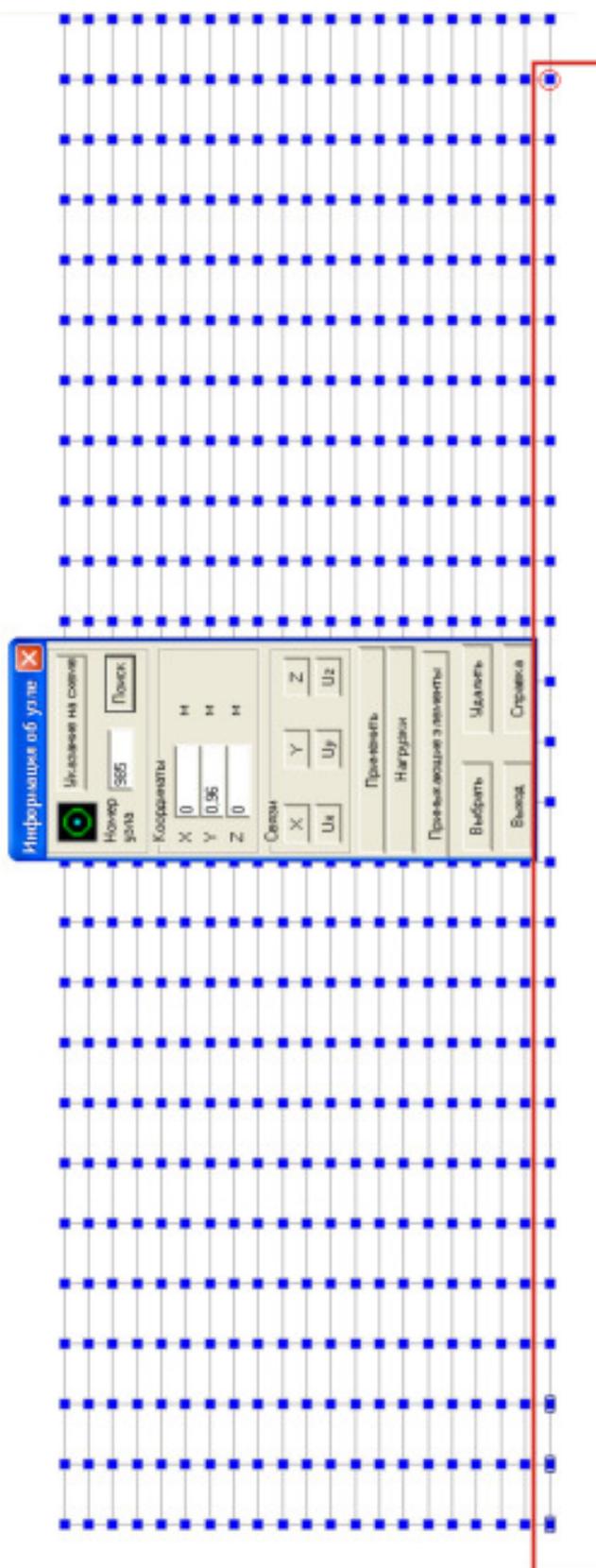


Рис.33

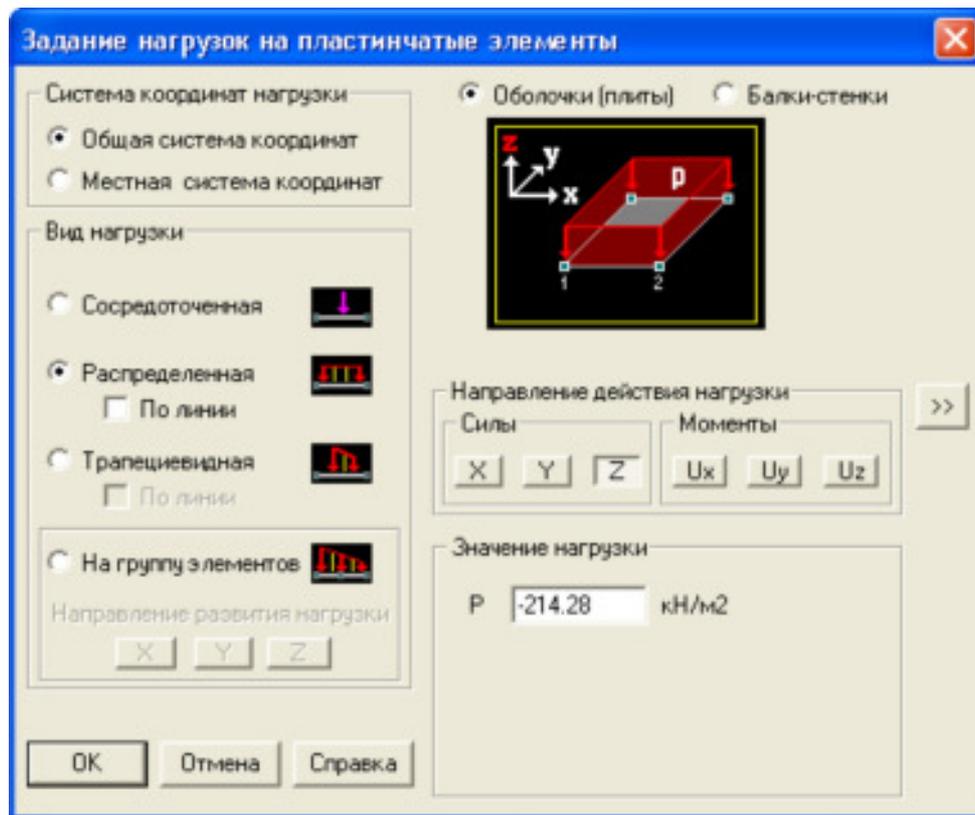


Рис.34

5. Линейный расчет

Вернёмся в **Дерево проекта**. Активизируем закладку **Управление** в инструментальной панели и нажмем кнопку  **Выйти в экран управления проектом** (Дерево проекта).

В группе функций **Исходные данные** щелкаем по знаку  у подгруппы **Специальные исходные данные** и в открывшемся списке выбираем **Главные и эквивалентные напряжения**.

В группе функций **Расчет** установим курсор в позицию **Линейный** и нажмем левую кнопку мыши. После завершения расчета и нажатия на кнопку **Выход** управление передается дереву проекта.

Снова возвращаемся к группе функций **Расчет** к позиции **Главные и эквивалентные напряжения** и нажимаем левую кнопку мыши. После завершения расчета и нажатия на кнопку **Выход** управление передается дереву проекта.

6. Анализ результатов

Устанавливаем курсор в позицию **Графический анализ** раздела **Результаты** дерева проектов и нажимаем левую кнопку мыши, что приводит к активизации окна постпроцессора.

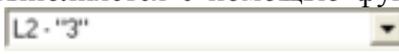
В окне отображения результатов мы увидим изометрическую проекцию двутавровой балки. Щелкаем по кнопке  **Проекция на плоскость YOZ** на панели **Визуализация**.

Анализ перемещений выполняется с помощью функции раздела **Деформации**.

Выбираем в списке  загрузку и нажимаем кнопку функции отображения результатов  **Отображение деформированной схемы**. На *рис.35* приведен вид деформированной схемы балки.



Рис.35

Анализ напряжений выполняется с помощью функции раздела **Поля напряжений**. Выбираем в списке  загрузку, компоненту напряжения  и нажимаем кнопку функции отображения результатов  **Отображение изополей и изолиний**. На *рис.36* приведены изополя напряжений σ_y .

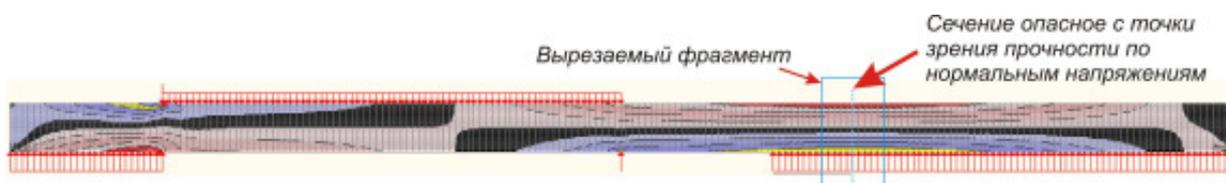


Рис.36

В качестве опасного сечения выбираем то же, что и при расчете балки в системе MathCAD по формулам сопротивления материалов. В окрестности этого сечения вырезаем фрагмент балки с помощью кнопки  **Фрагментация окном** на панели **Визуализация** и подтверждаем фрагментацию, нажимая на кнопку  **Подтверждение фрагментации**. Результат этой операции вместе с таблицей диапазонов изополей напряжений σ_y и информацией об узле **5618** приведен на *рис.37*.

Рассмотрим распределение нормальных напряжений по высоте стенки двутавра. Предварительно с помощью кнопки  **Проекция на плоскость XOZ** на панели **Визуализация** развернем фрагмент балки в плоскость **XOZ** и вырежем стенку двутавра. Нажатием на кнопку  подтверждаем фрагментацию.

Щелкая по кнопке  **Проекция на плоскость YOZ**, снова разворачиваем картину изополей в плоскость **YOZ**.

Нажимаем на кнопку  **Построение эпюр напряжений вдоль секущей** и указываем на фрагменте схемы секущую.

В результате появляется панель **Эпюры напряжений вдоль прямой** (*рис.38*). Элементы управления этой панели включают:

- **список силовых факторов**, для которых строятся эпюры;
- маркер **Отображать значения на графике**, активизация которого означает, что следует выводить значение фактора в указанных курсором точках эпюры (кроме значения выводится номер элемента, которому принадлежит указанная точка);
- кнопка **Печать** – для сохранения эпюр в формате Windows-метафайла (расширение WMF).

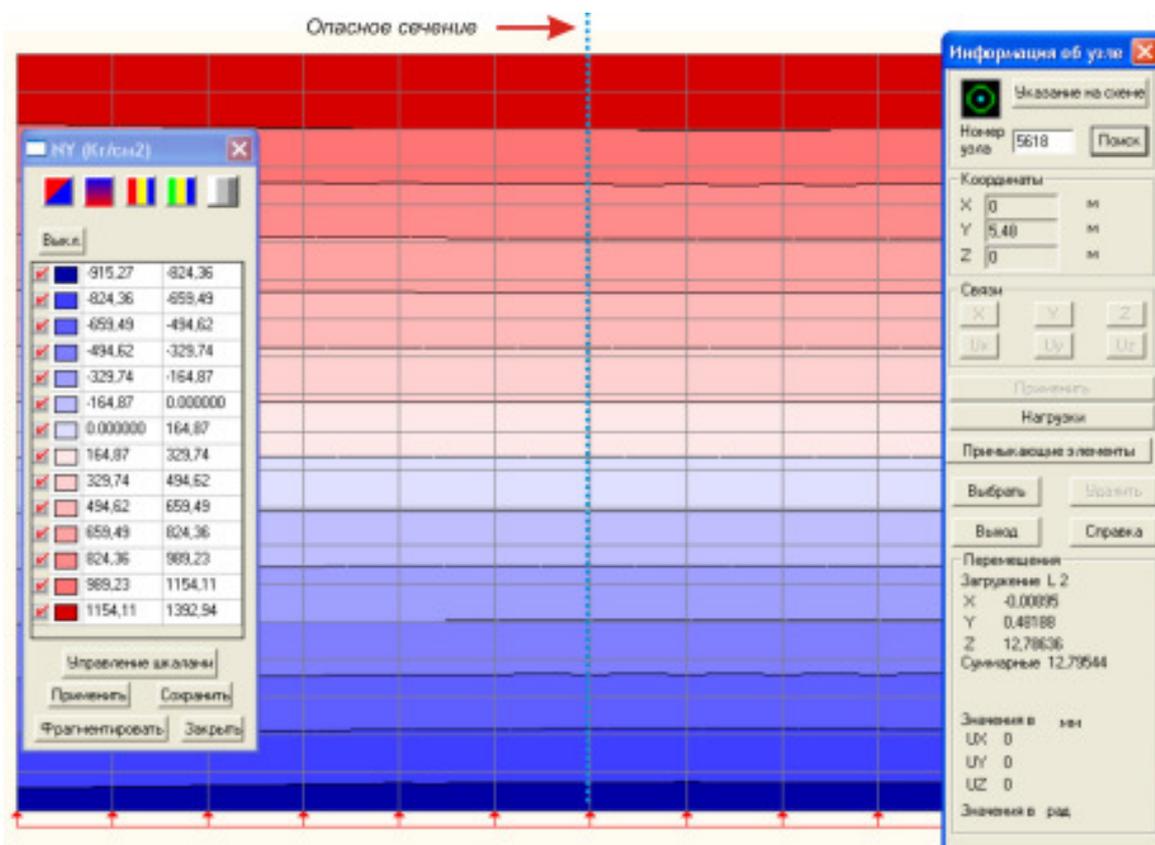


Рис.37

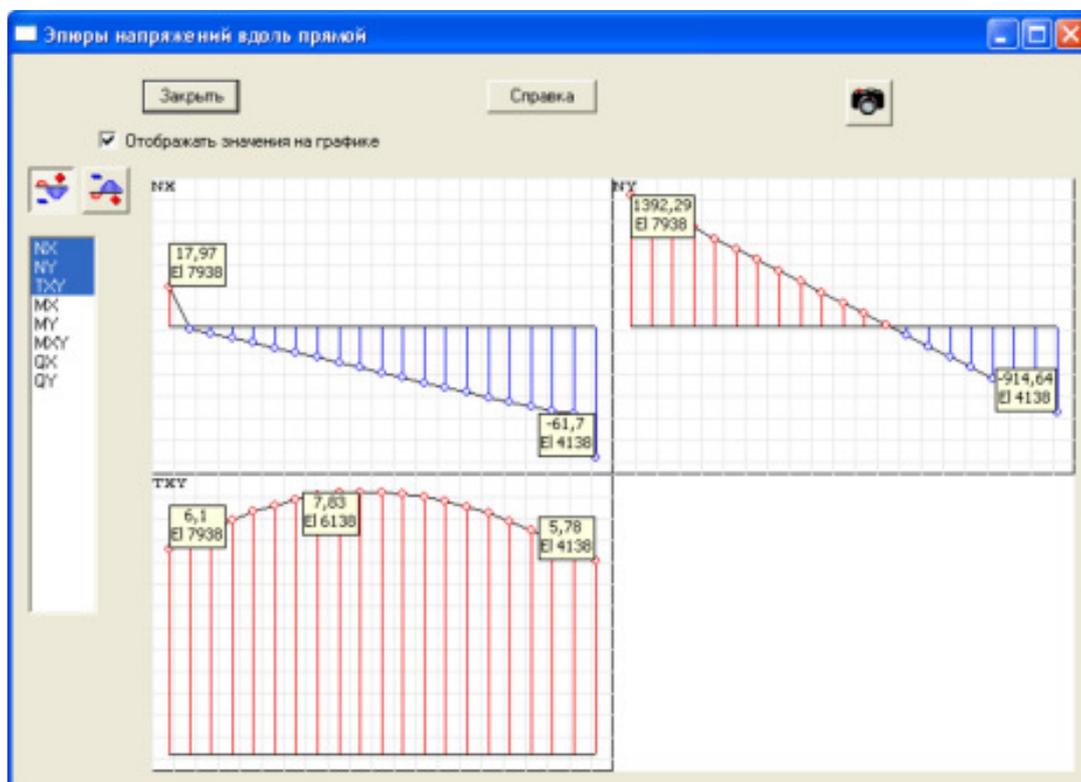


Рис.38

Распределение напряжений σ_y (N_y) в данном сечении в стенке двутавра так же, как и в курсе «Сопротивление материалов», подчиняется линейному закону. Однако нейтральный слой не проходит через центр тяжести сечения и потому эпюра σ_y несимметрична.

Если можно пренебречь напряжениями $6,17$ МПа по сравнению с 1392 МПа, то гипотеза сопротивления материалов о том, что волокна не давят друг на друга, выполняется приближенно.

По формулам сопротивления материалов в данном сечении балки поперечная сила равна нулю, а потому и касательные напряжения должны равняться нулю. МКЭ даёт в этом сечении малые касательные напряжения, эпюра которых напоминает их распределение по формуле Журавского.

Изолинии главных напряжений σ_1 на поверхности выделенного фрагмента приведены на *рис.39*.

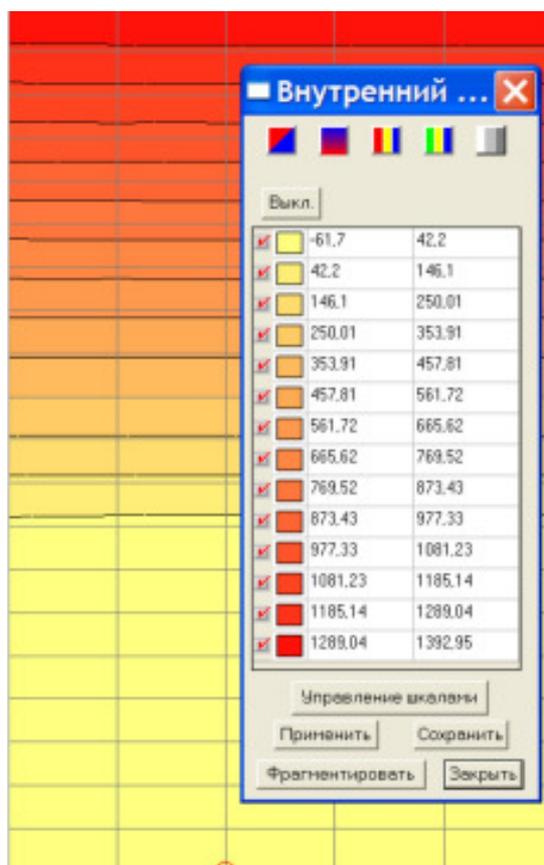


Рис.39

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ В СИСТЕМЕ MSC.PATRAN

1. Создаём поперечное сечение стержня. Так как размеры поперечного сечения стержня малы по сравнению с его длиной, то предварительно изменим установленную по умолчанию точность распознавания геометрических размеров (0.001). Активируем раздел **Display** главного меню и в ниспадающем меню выберем опцию **Geometry...** Появится панель **Geometric Attributes**, в окне **Chordal Tolerance** которой вводим число 0.00001 . Открываем раздел **Geometry**. В открывшейся одноименной панели активируем команды (шаг 1):

Action ► *Create*
Object ► *Point*

Method ▶ XYZ

и вводим узлы $A(0,0,0)$, $B(0.07,0,0)$, $C(0.14,0,0)$, $D(0.07,0,0.31877)$, $E(0,0,0.31877)$, $F(0.14,0,0.31877)$ (рис.40).

2. Активизируем команды (**шаг 2**):

Action ▶ Create

Object ▶ Curve

Method ▶ Point.

Проводим кривые 1, 2, 3, 4, 5 (рис.40).

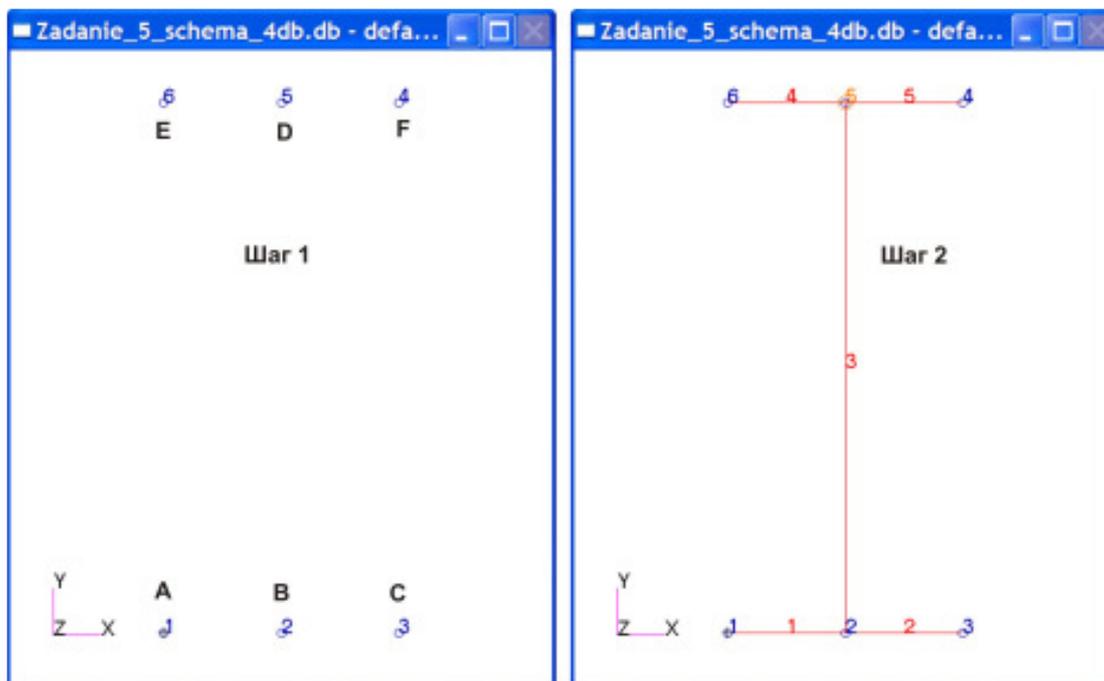


Рис.40

3. Активизируем команды (**шаг 3**):

Action ▶ Create

Object ▶ Surface

Method ▶ Extrude.

Строим плоскости 1, 2, 3, 4, 5. На панели **Geometry** в окне **Translation Vector** задаём вектор «вытеснения» (**extrude**) (рис.41,б), определяющий длину плоскости (8 м), образуемую из кривой, и щелкаем последовательно по кривым 1, 2, 3, 4, 5 (рис.40). В результате этих действий в графическом окне появятся изображения плоскостей 1, 2, 3, 4, 5 (рис.41).

4. Задаём материал – сталь (**шаг 4**) (рис.42).

5. Активизируем раздел **Properties**. Появится панель **Element Properties** (рис.43, а), в окне **Property Set Name** которой задаём название свойств для полок двутавра – **polka** (**шаг 5**). Щелкаем левой клавишей мыши по клавише **Input Properties...** (**шаг 6**). Откроется одноименная панель (рис.43, б). Нажимаем на кнопку  ((**шаг 7**), рис.43, б), появляется панель **Select Materials** (рис.43, в), в окне которой выбираем материал – **ct** (**шаг 8**). Щелчок по названию материала приводит к переброске его названия в окно **Material Name** панели **Element Properties**. В окне **Thickness** задаём толщину полки двутавра (**шаг 9**) и нажимаем на клавишу **OK** (**шаг 10**). Снова появляется панель **Element Properties**, на которой нажимаем клавишу **Apply**. В результате название свойств **polka** появится в окне **Prop. Sets By**.

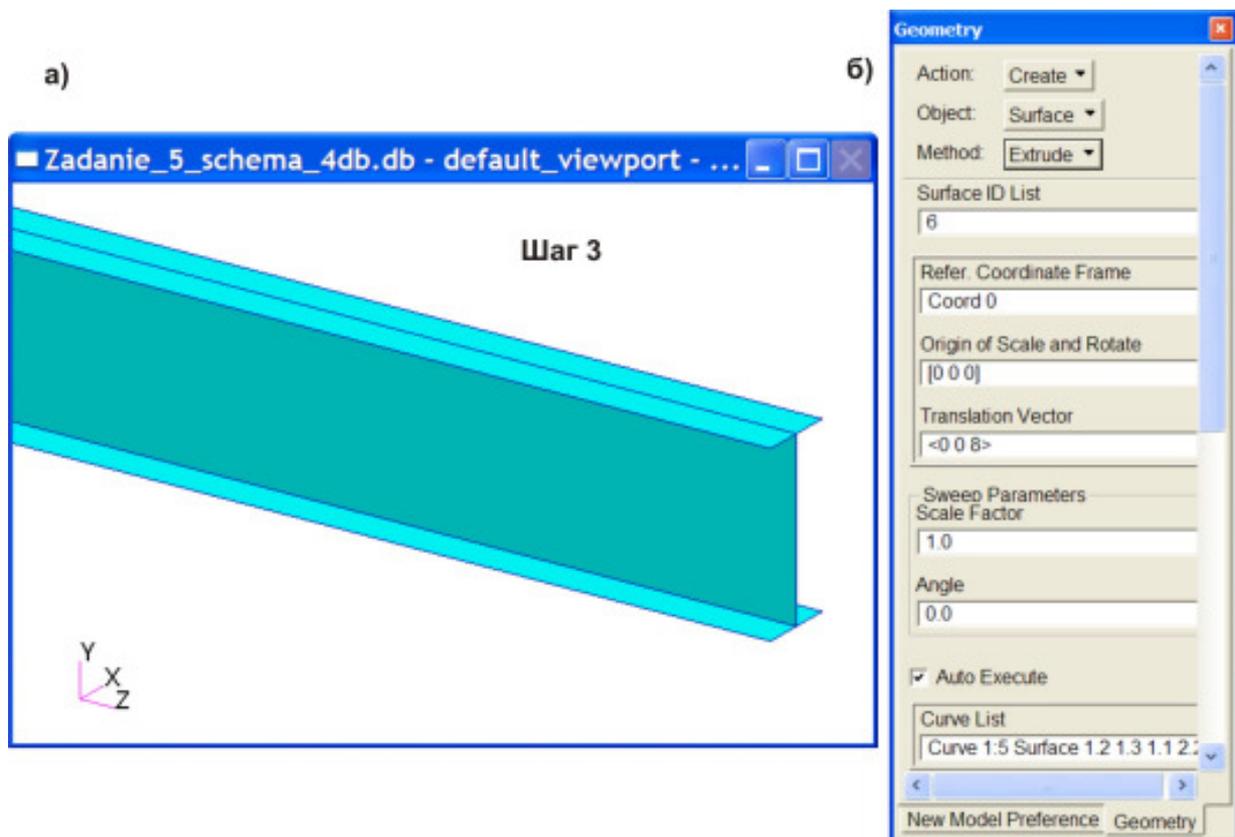


Рис.41

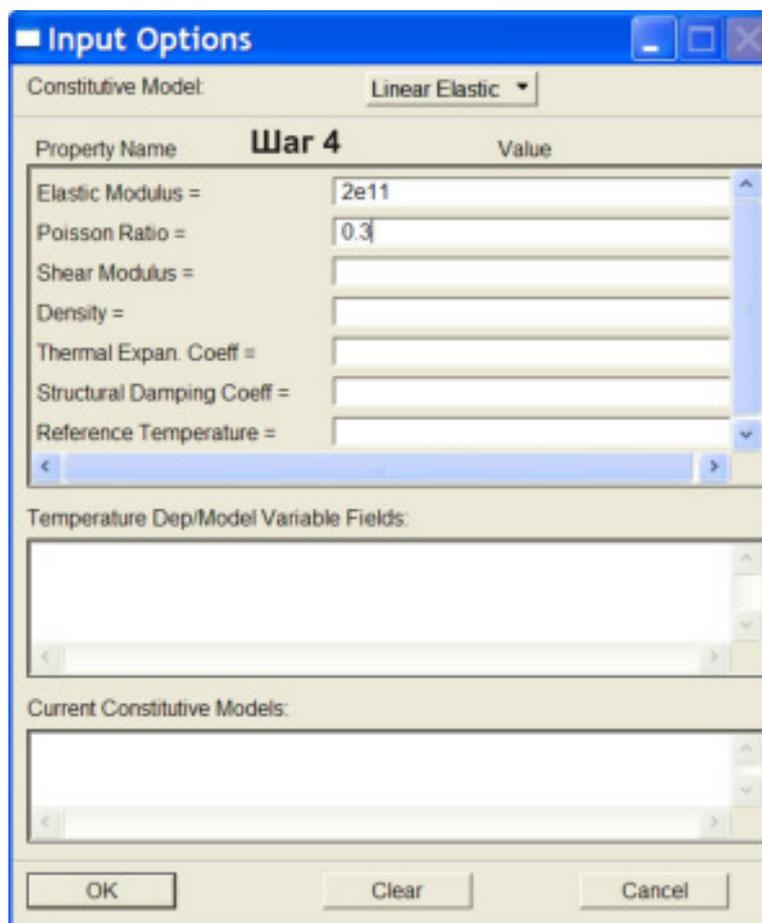


Рис.42

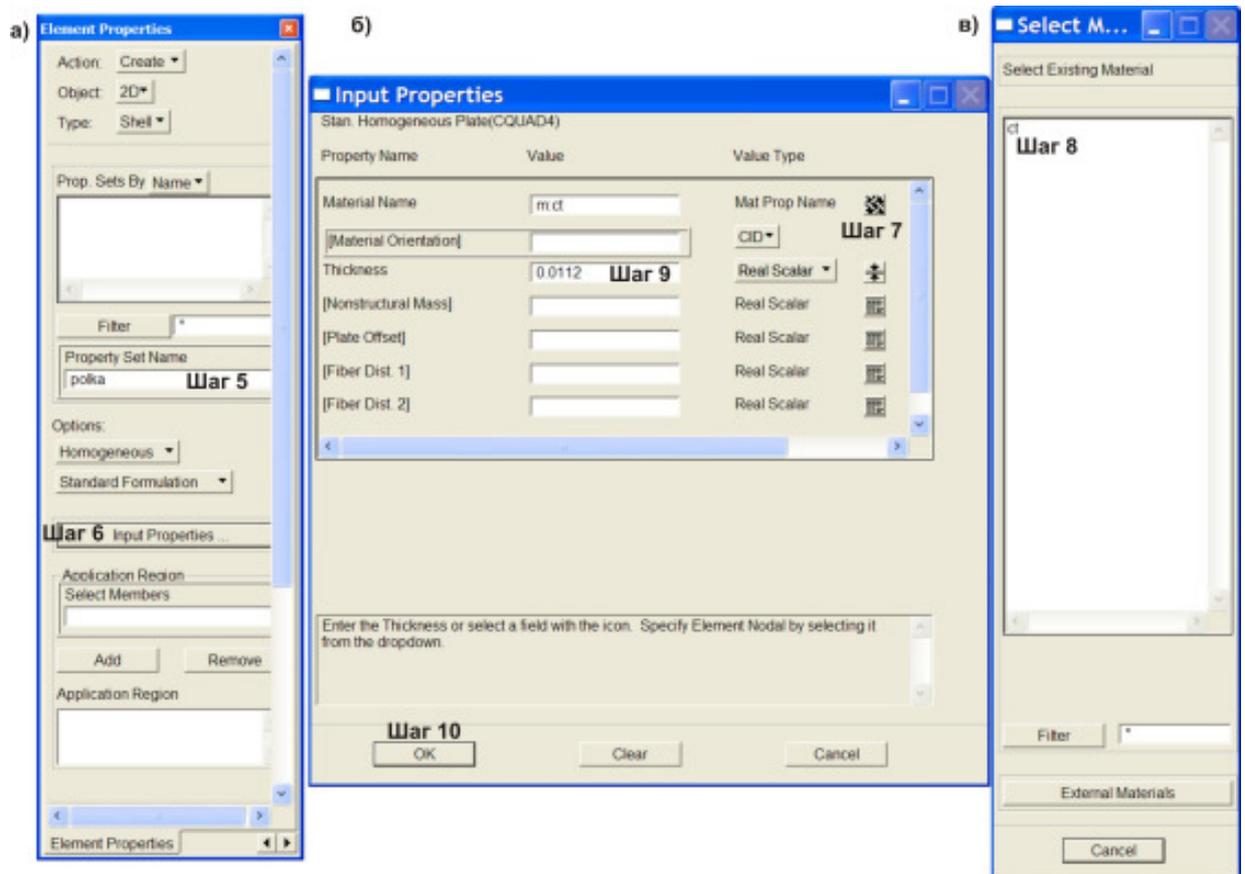


Рис.43

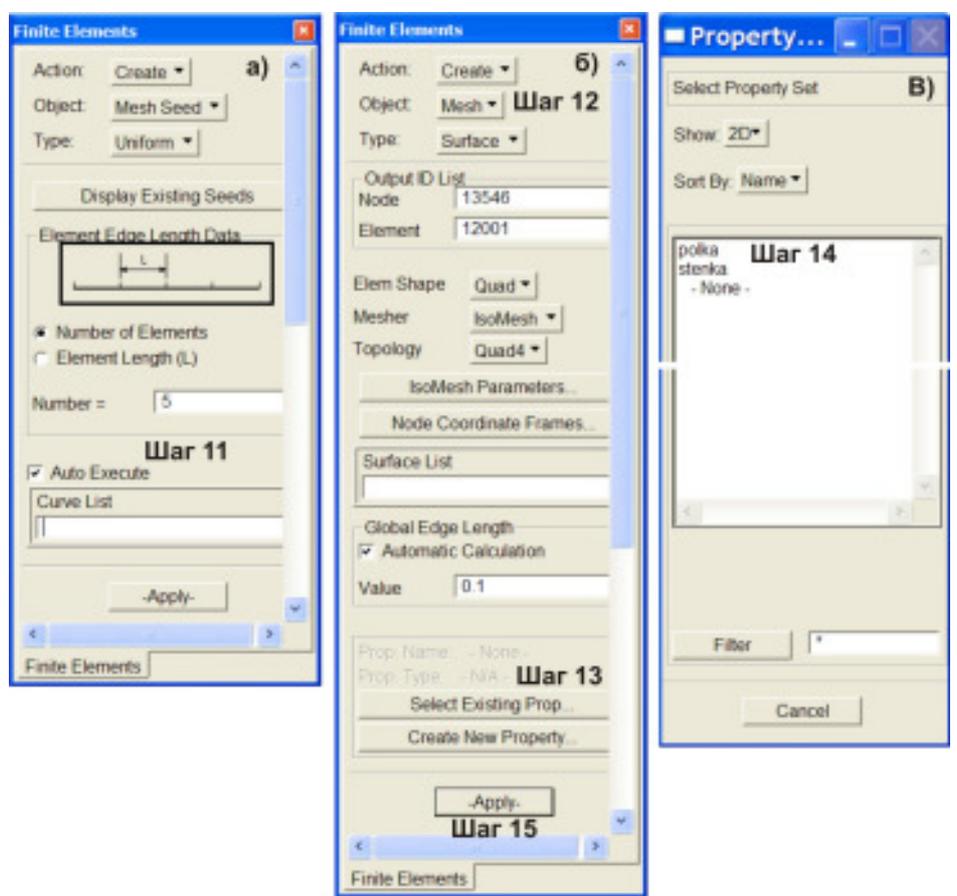


Рис.44

Для задания свойств стенки двутавра **stenka**, необходимо повторить все действия, выполненные при задании свойств **polka**.

6. Создаем конечно-элементную сетку.

6.1. В разделе **Elements** активизируем команды (рис.44, а)

Action ► *Create*

Object ► *Mech Seed*

Type ► *Uniform*

и на гранях пластин задаём число элементов: на полках двутавра - **10** элементов; на стенке двутавра – **20** элементов; вдоль длинных сторон пластин - **300** элементов (**шаг 11**).

6.2. Активизируем команды (рис.44, б, (**шаг 12**))

Action ► *Create*

Object ► *Mech*

Type ► *Surface*.

Нажимаем клавишу **Select Existing Prop...**(**шаг 13**). Откроется панель **Property Sets**, на которой выбираем заданные свойства пластин (элементов) отдельно для полок и стенки двутавра (**шаг 14**). Выбрав свойства **polka**, в графическом окне последовательно щелкаем по пластинам **1, 2, 4, 5** при нажатой клавише **Shift**. На панели **Finite Elements** нажимаем клавишу **Apply** (**шаг 15**). Для свойств **stenka** выбираем пластину **3**. В графическом окне появится изображение созданной конечно-элементной сетки (рис.45).

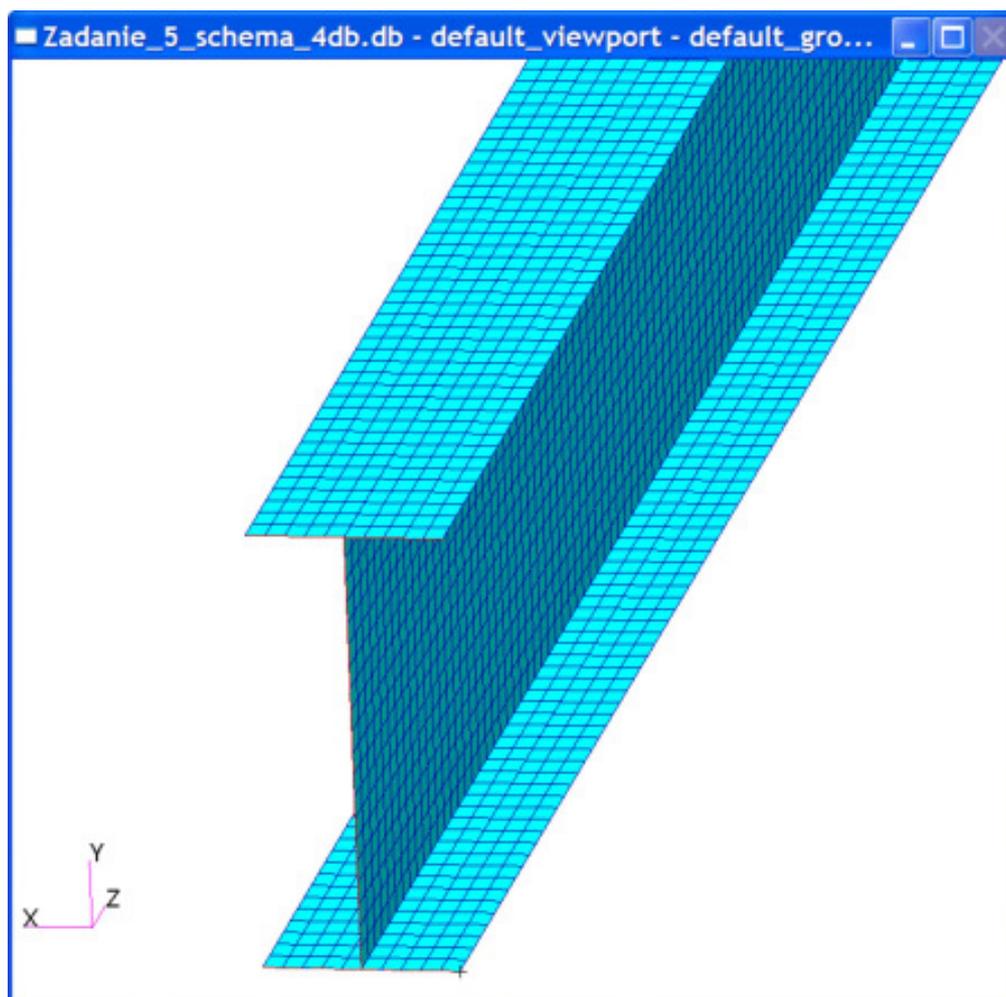


Рис.45

Конечно-элементная сетка собрана из пластинчатых элементов **QUAD4** – (**Quadrilateral Plate Element**). Это наиболее общий элемент для моделирования пластин, оболочек и мембран. **QUAD4** позволяет моделировать плоское напряженное состояние, изгиб, поперечный сдвиг в зависимости от данных, задаваемых в свойствах пластины. Этот элемент соединяется с другими элементами в четырех узлах. Номера узлов от **G1** до **G4** расположены последовательно по периметру элемента. Силы и напряжения определяются в координатной системе элемента (в локальной системе координат), которая располагается следующим образом:

- ось x элемента проходит посередине угла 2α , положительное направление от **G1** к **G2**;
- ось y элемента перпендикулярна к оси x и располагается в плоскости узлов **G1**, **G2**, **G3**, **G4**, положительное направление от **G1** к **G4** (рис.46).

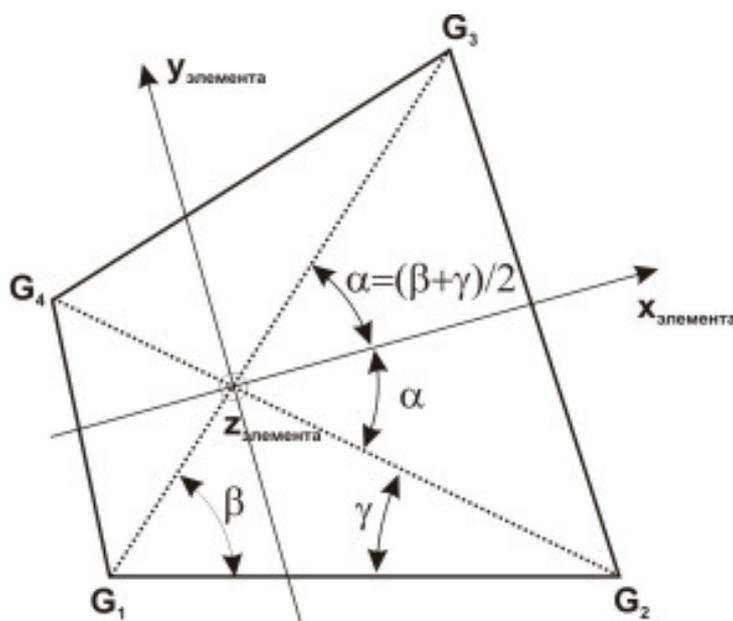


Рис.46

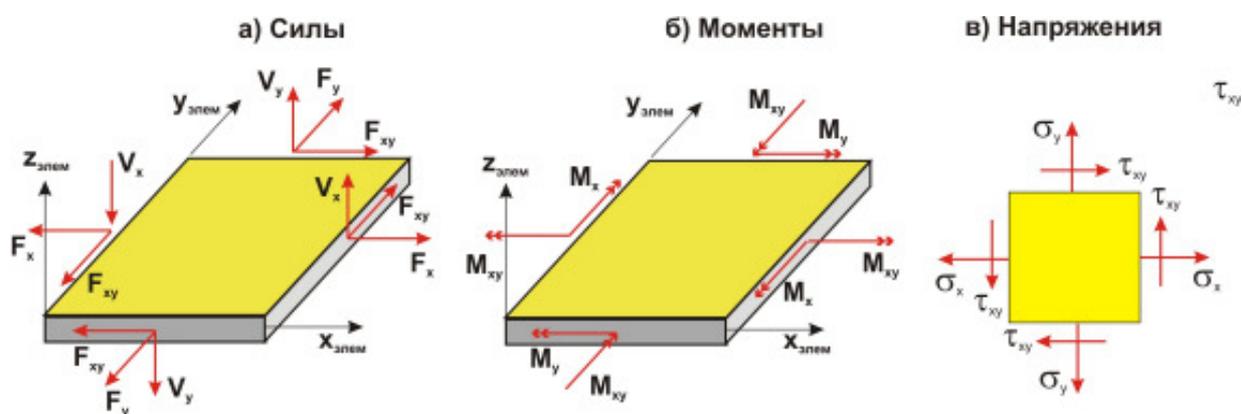


Рис.47

На рис.47 показаны положительные направления сил, моментов и напряжений:

- F_x, F_y – нормальные силы, действующие по граням элемента с нормальми x и y ;
- F_{xy} – сдвигающая сила в плоскости элемента;

- V_x, V_y - поперечные силы, действующие по граням элемента с нормальями x и y ;
 M_x, M_y - изгибающие моменты, действующие по граням элемента с нормальями x и y ;
 M_{xy} - крутящий момент;
 σ_x, σ_y - нормальные напряжения, действующие по граням элемента с нормальями x и y ;
 τ_{xy} - касательные напряжения, действующие по грани элемента с нормалью x в направлении оси y .

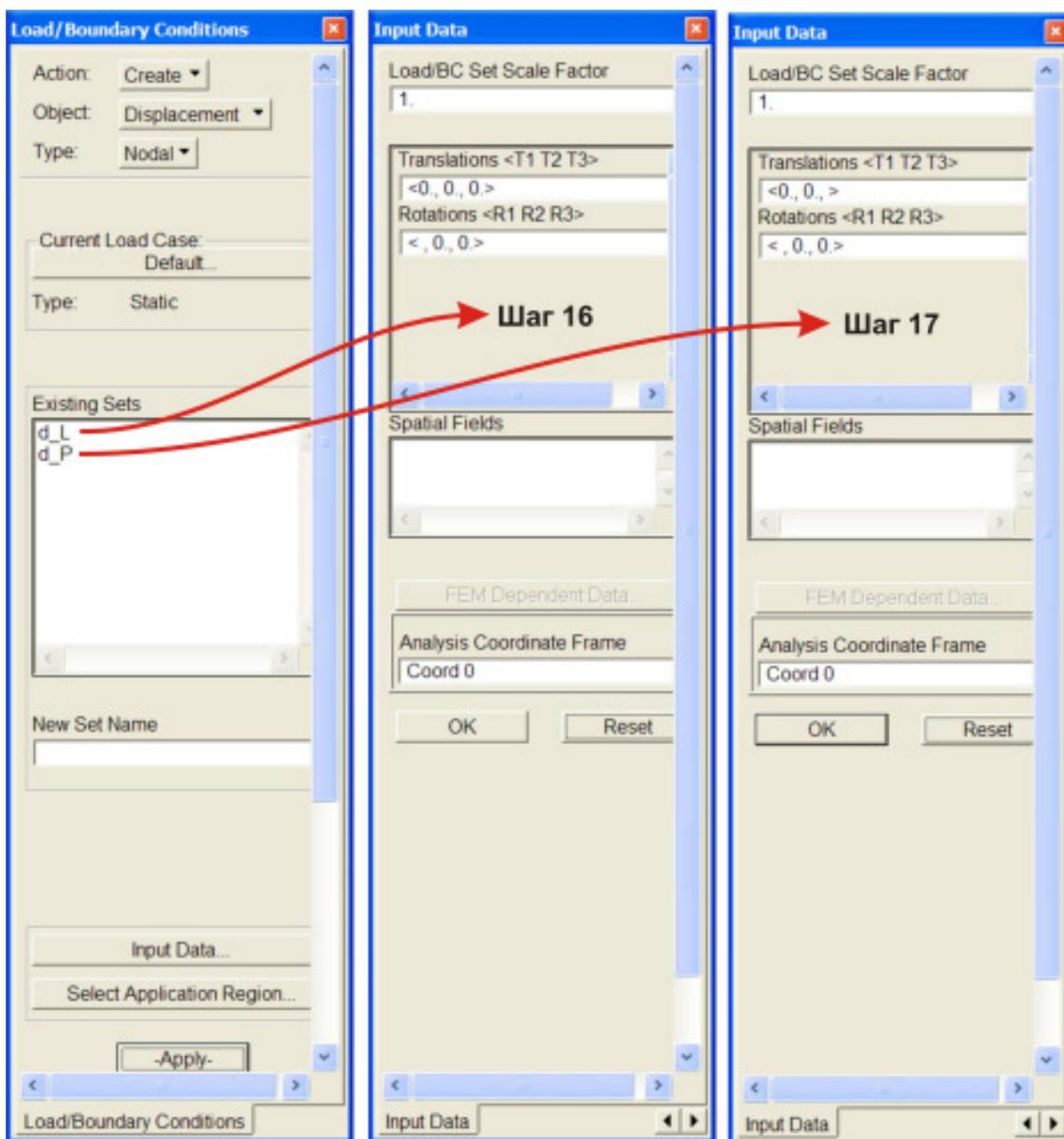


Рис.48

- Переходим в раздел программы **Loads/BSc**. Во все узлы нижней полки двутавра левого торца балки устанавливаем шарнирно неподвижные опоры (**шаг 16**), а во все узлы нижней полки двутавра правого торца балки – шарнирно-подвижные опоры (**шаг 17**) (рис.48).
- На панели **Loads/Boundary Condition** активизируем команду **Object ► Force** (**шаг 18**), в окне **New Set Name** задаём имя нагрузки (**шаг 19**) и нажимаем кла-

вишу **Input** (шаг 20) (рис.48). Появляется одноименная панель, в окнах которой <F1 F2 F3> или <M1 M2 M3> указываем величины сосредоточенных сил или моментов (шаг 21), и последовательно нажимаем на клавиши ОК (шаг 22) и **Apply** (шаг 23).

На первом участке длиной l м на рассматриваемую нами балку действует распределённая нагрузка интенсивностью $q = 30$ кН/м. Равнодействующая этой нагрузки $Q = q \cdot l = 30$ кН. Распределим эту нагрузку равномерно по полке двутавра.

Так как длина балки разбита на 300 элементов, то длина одного элемента составила $800 / 300 = 2,667$ см, и на одном метре находится $100 / 2,667 = 37,495$ элементов и $37,495 + 1$ узлов. Полку двутавра по ширине разбили на 10 элементов, которым соответствует 11 узлов.

Таким образом, к каждому узлу конечноэлементной сетки приложена сосредоточенная сила

$$\frac{30}{38 \cdot 11} = 0,072 \text{ кН.}$$

Аналогичным образом поступаем с другими силовыми факторами: распределённую нагрузку распределяем по площади, сосредоточенные силы и моменты – по ширине полки двутавра.

Сосредоточенный момент $M_1 = 60$ кН·м представляем в виде пары сил величиной $60 / (11 \cdot 0,3188) = 17,11$ кН, направленных вдоль полок двутавра, (0,3188 - высота стенки двутавра по средней линии).

Фрагмент нагрузки на нижнюю полку двутавра на первом участке балки приведен на рис.50 (двутавр повернут относительно оси балки на некоторый угол).

9. Выполняем расчет напряженно-деформированного состояния балки. Переходим в раздел программы **Analysis** и активизируем команду **Action** ► **Analyze** и щелкаем по клавише **Apply**. После окончания вычислений (сообщение об этом выдаётся в виде звукового сигнала) активизируем команду **Action** ► **Access Results** и нажимаем клавишу **Apply**. Если расчет выполнен правильно, в информационной строке появится сообщение **End: Attach Result File**, и можно будет переходить к анализу результатов расчета.
10. Выполняем анализ напряженно-деформированного состояния балки.

Отображение деформированного состояния балки-стенки

При нажатой клавише  **Select Results** выберем:

Action ► **Create**;

Object ► **Quick Plot**;

вариант расчета (Select Result Cases) – *Default, A3: Static Subcase*;

тип результата (Select Fringe Result): *Displacements, Translational*,

(Select Deformation Result): *Displacements, Translational*;

величину: *Magnitude*.

На рис.51 показаны изополюя перемещений в направлении оси $y - v$. Максимальная величина перемещения равна 2,1 см (по формулам сопротивления материалов эта величина была равна 2,12 см).

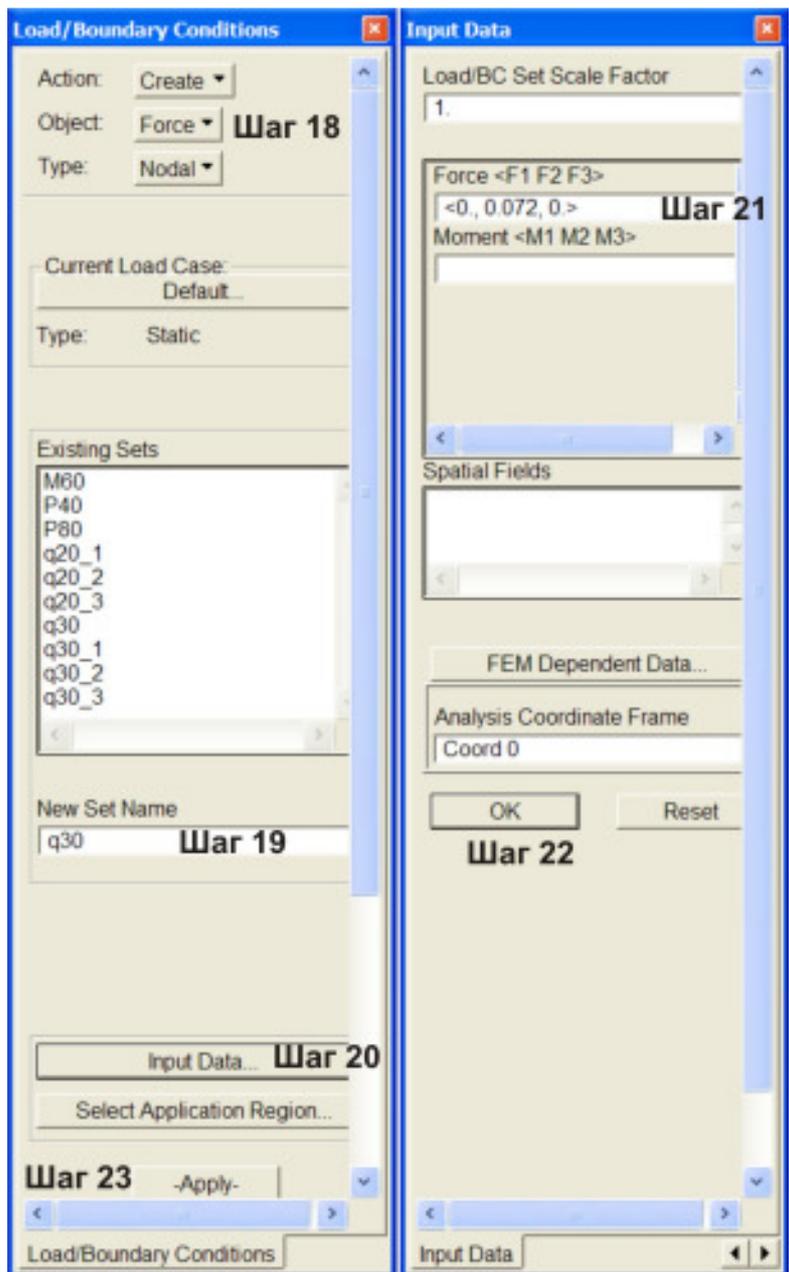


Рис.49

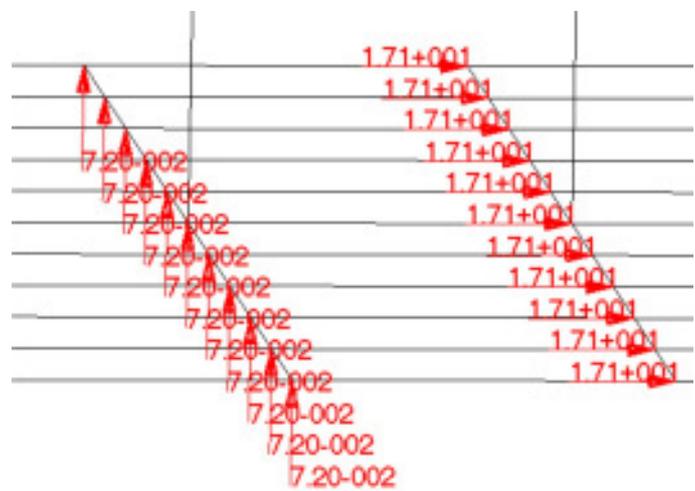


Рис.50

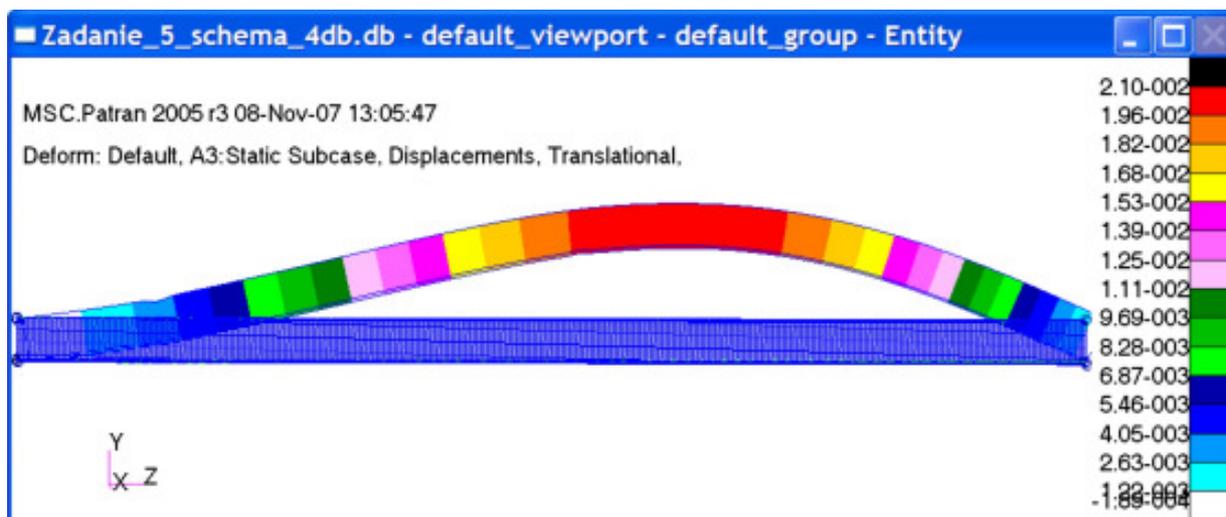


Рис.51

Отображение напряженного состояния балки-стенки

При нажатой клавише  **Select Results** выберем:

Action ► *Create*;

Object ► *Quick Plot*;

вариант расчета (Select Result Cases) – *Default, A3: Static Subcase*;

тип результата: *Stress Tensor*;

количество (компонента тензора напряжений σ_x): X.

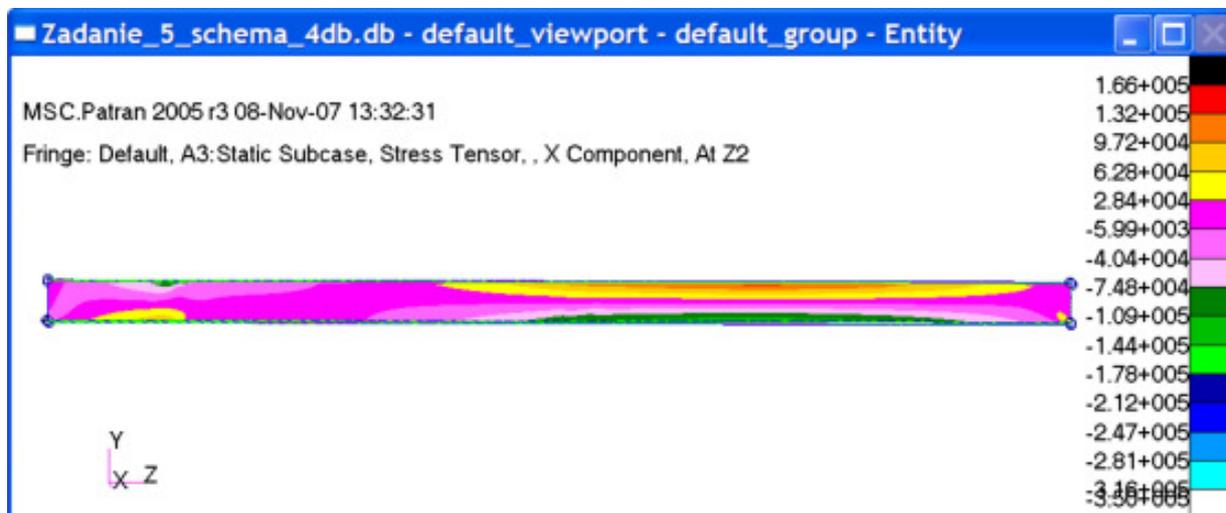


Рис.52

На *рис.52* приведены изополя напряжений σ_x . Выделим из этой картины фрагмент – опасное сечение и исследуем напряженное состояние стенки балки в этом сечении. Будем считать, что это сечение совпадает с ранее найденным по формулам сопротивления материалов, т.е. находится на расстоянии $x = 5,542$ м от левого торца балки.

Для определения опасного сечения откроем приложение **Geometry** и активизируем команды

Action ► *Show*;

Object ► *Point*;

Info ► *Distance*.

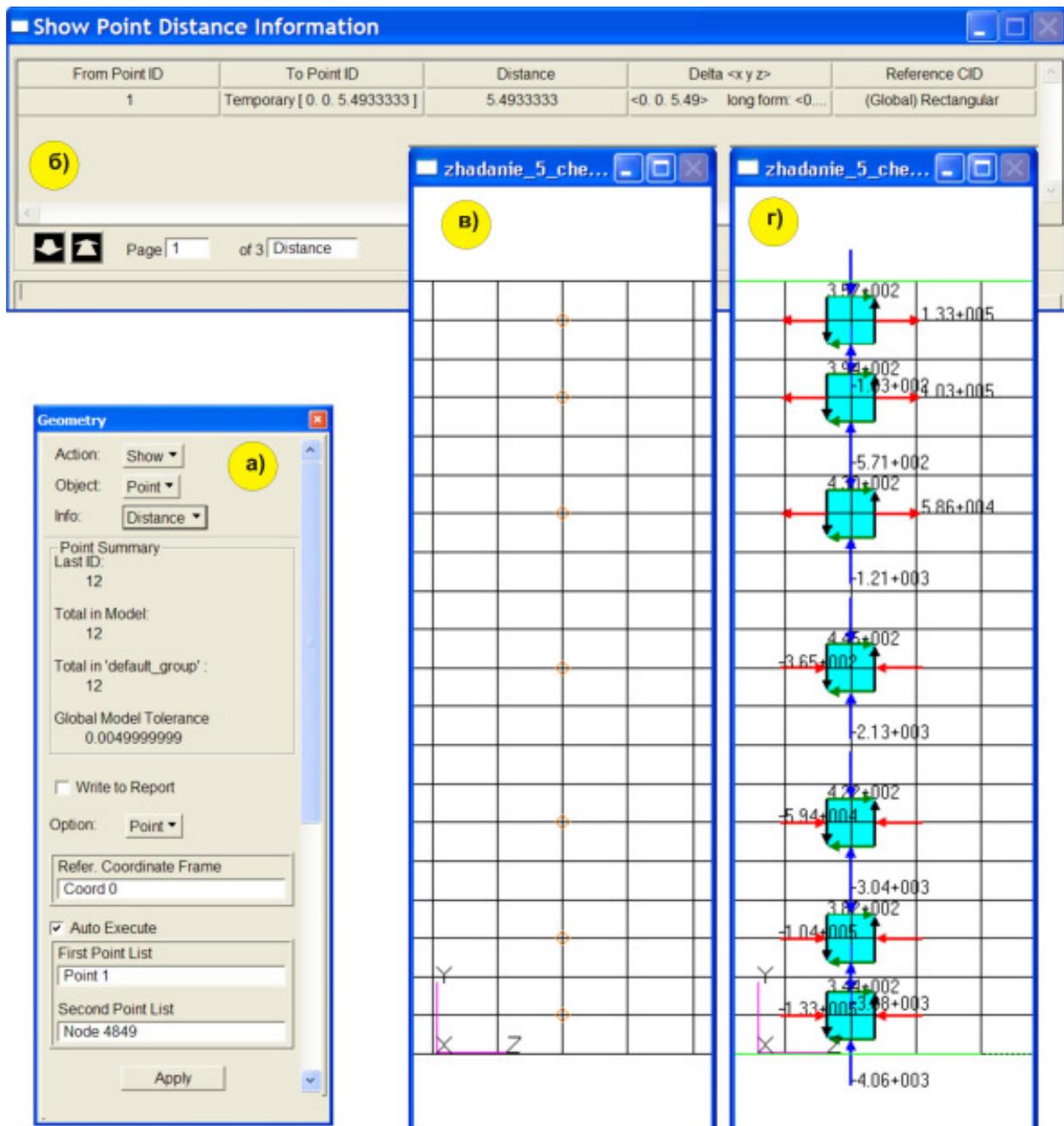


Рис.53

В окне просмотра щелкаем по крайнему левому узлу нижней полки двутавра. В окне **First Point List** панели **Geometry** появится информация о выделенном объекте (**Point** или **Node**) (рис.53, а). Щелкаем по второму узлу нижней полки двутавра. В окне **Second Point List** появляется информация о втором выделенном объекте, а на открывшейся информационной панели **Show Point Distance Information** в колонке **Distance** указывается величина расстояния между выделенными точками (рис.53, б). Повторяем описанную процедуру до тех пор, пока не найдем нужное сечение балки. В окрестности найденного сечения, щелкая по кнопке **View corners**, вырезаем фрагмент балки (рис.53, в).

Для анализа напряженного состояния в выделенном сечении выберем (рис.54):

- Action** ► *Create* (шаг 1);
- Object** ► *Marker* (шаг 2);
- Method** ► *Tensor* (шаг 3);

кнопка  **Select Results** (шаг 4);
вариант расчета – *Default, A3: Static Subcase* (шаг 5);
тип результата: *Stress Tensor* (шаг 6);
список *Show As: 2D Component* (шаг 7).

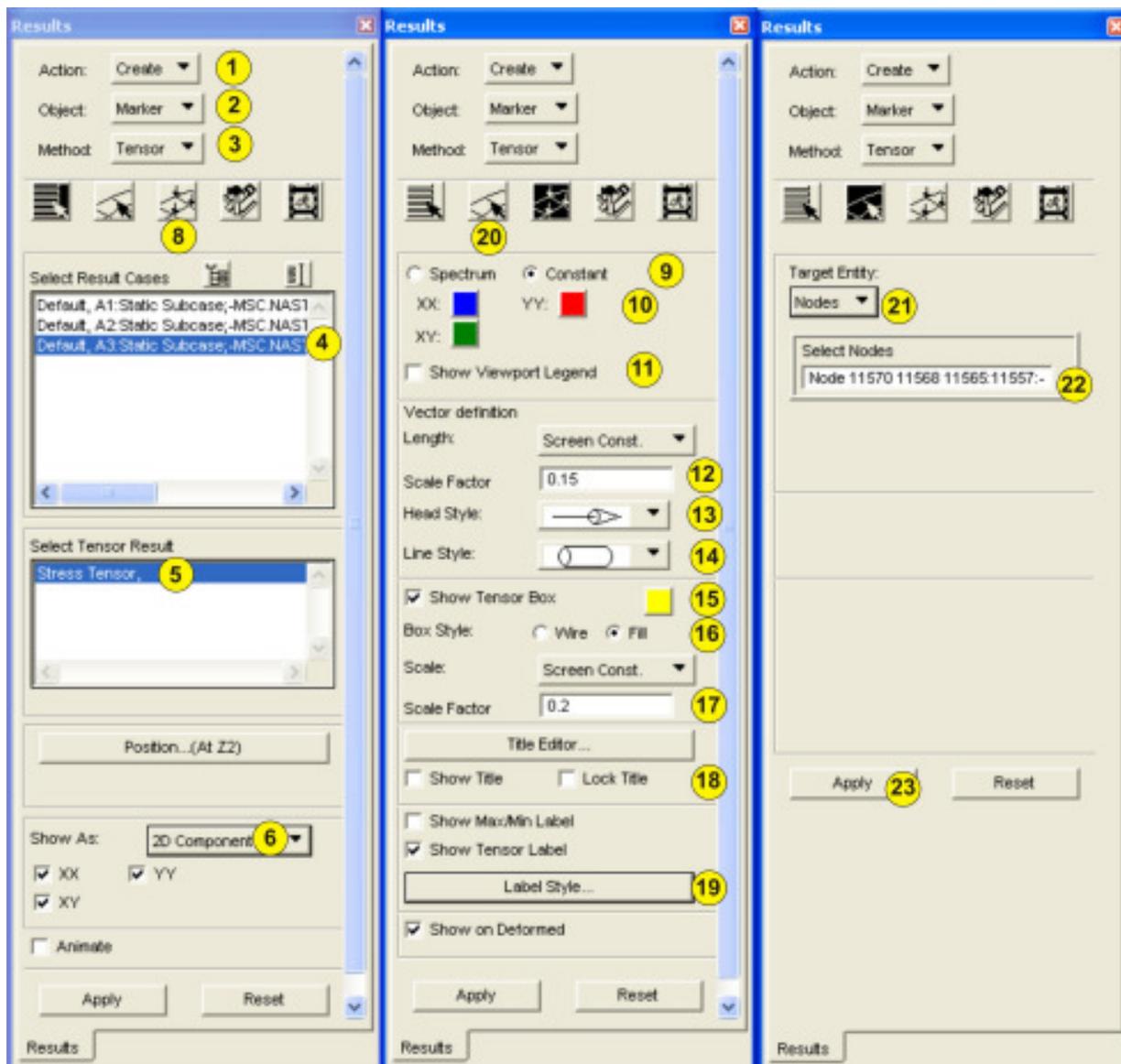


Рис.54

Активируем кнопку  **Display Attributes** (шаг 8). Панель **Results** изменит вид (на *рис.54* средняя панель). Включаем переключатель **Constant** (шаг 9). При необходимости изменяем цвет отображения напряжений (шаг 10). Выключаем переключатель **Show Viewport Legend** (шаг 11). Устанавливаем параметры вектора напряжений: длину, отображаемый вид, стиль линии (шаги 12-14) и параметры отображения вырезаемого малого элемента (шаги 15-17). Включаем выключатель **Show Tensor Label** (шаг 18). Щелкаем по клавише **Label Style...** (шаг 19) и на появившейся панели **Tensor Label Style** устанавливаем формат и размер выводимых цифр.

Активируем кнопку  **Target Entities** (шаг 20). Панель **Results** снова изменит вид (на *рис.54* правая панель). Из списка **Target Entity** выбираем **Nodes** (шаг 21). В графическом окне **Patran** выделяем интересующие нас узлы. Их номера появятся в окне **Select Nodes** (шаг 22). Щелкаем по клавише **Apply** (шаг 23). В графич-

ческом окне появятся изображения малых элементов с действующими по их граням напряжениями в $\text{кН}/\text{м}^2$ (рис.53, з).

По расчету в системе MathCAD для двутавра №33 в точке 2 мы имели напряжения $\sigma_x = 106 \text{ МПа}$. Для конечно-элементной модели двутавра №33, которая по жесткостным характеристикам несколько отличается от оригинала, мы получили в этой зоне величину $\sigma_x = 133 \text{ МПа}$, отличающуюся от расчета по формулам сопротивления материалов на

$$\frac{133 - 106}{133} 100\% \cong 20\%,$$

что вполне приемлемо для учебного расчета.

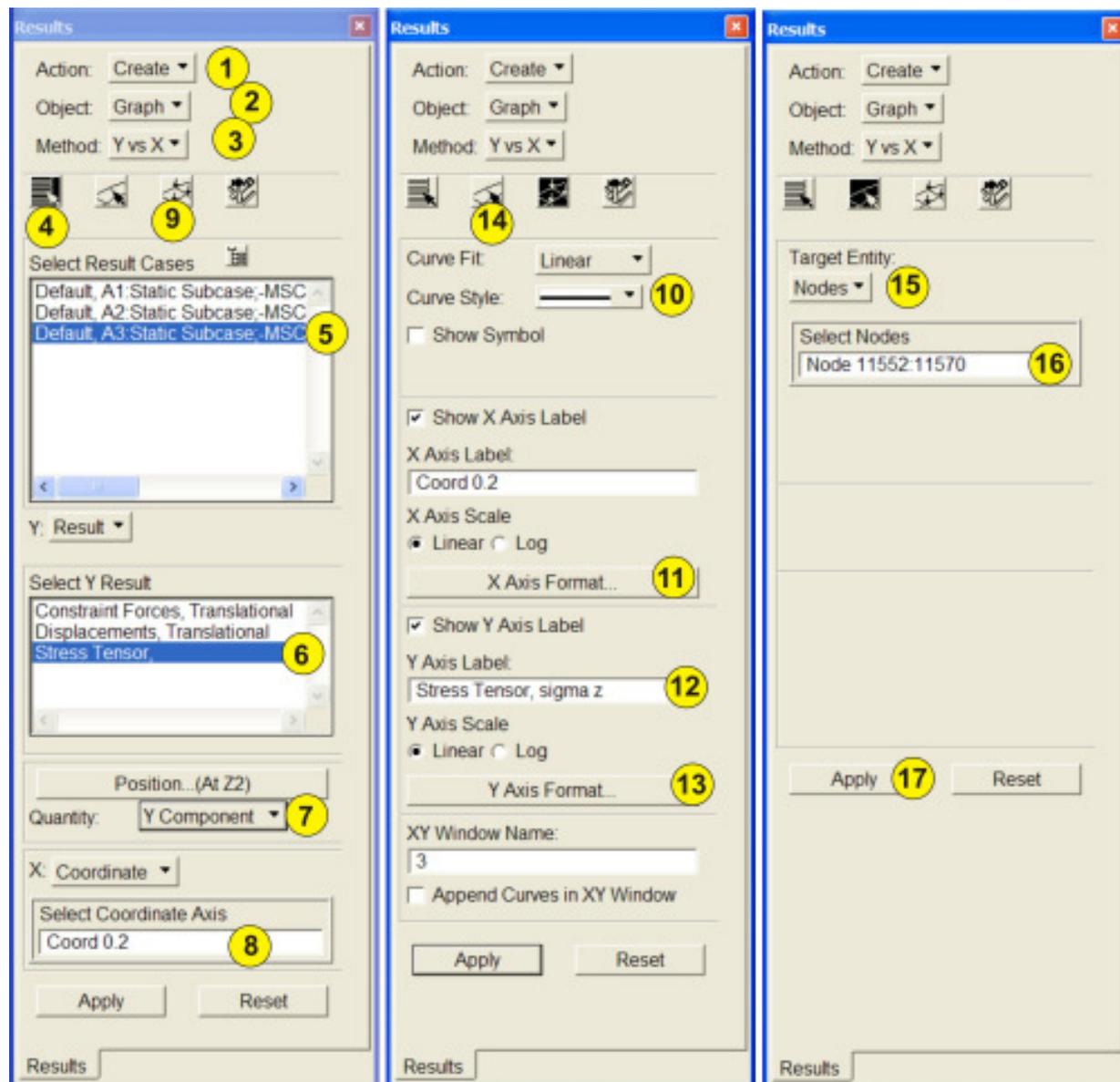


Рис.55

Построим эпюры напряжений σ_x , σ_y и τ_{xy} в опасном сечении. В приложении **Results** сделаем следующие установки (рис.55):

- Action** ► *Create* (шаг 1);
- Object** ► *Graph* (шаг 2);
- Method** ► *Y vs X* (шаг 3);

кнопка  **Select Results** (шаг 4);
 вариант расчета – *Default, A3: Static Subcase* (шаг 5);
 тип результата: *Stress Tensor* (шаг 6);
 выводимая величина: *Y Component* (шаг 7);
 координатная ось, с которой совмещается ось x : *Coord 0.2* (шаг 8).

Активизируем кнопку  **Display Attributes** (шаг 9). Панель **Results** изменит вид (на *рис.55* средняя панель), на которой задаем атрибуты графика (шаги 10-13).

Активизируем кнопку  **Target Entities** (шаг 14). Панель **Results** снова изменит вид (на *рис.55* правая панель). Из списка **Target Entity** выбираем **Nodes** (шаг 15). В графическом окне **Patran** выделяем интересующие нас узлы. Их номера появятся в окне **Select Nodes** (шаг 16). Щелкаем по клавише **Apply** (шаг 17). В графическом окне появятся изображения графика $\sigma_z = \sigma_z(z)$ (*рис.56*). Вид эпюры $\sigma_z = \sigma_z(z)$ не противоречит эпюре, получаемой по формулам сопротивления материалов.

Аналогичным образом строятся эпюры $\sigma_y = \sigma_y(z)$ (*рис.57*) и $\tau_{zy} = \tau_{zy}(z)$ (*рис.58*). В сопротивлении материалов принимается, что $\sigma_y \equiv 0$. Вид эпюры $\tau_{zy} = \tau_{zy}(z)$ не противоречит эпюре, получаемой по формулам сопротивления материалов.

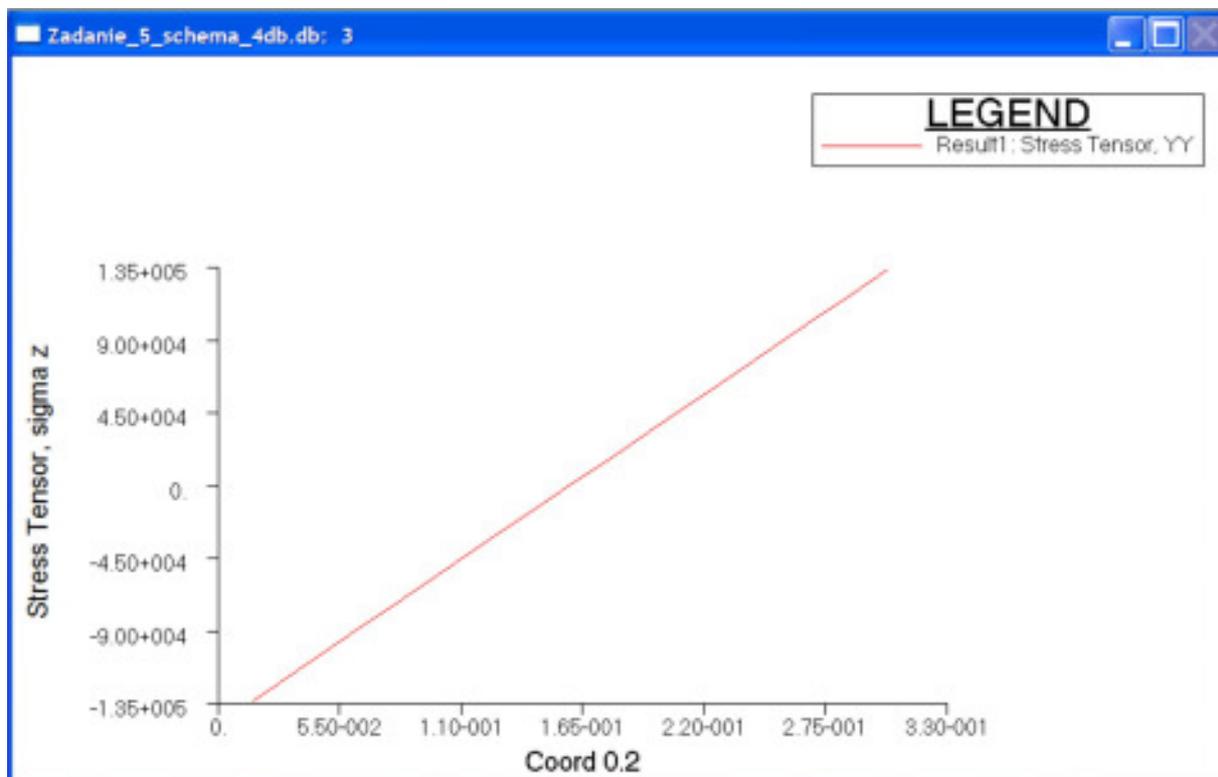


Рис.56

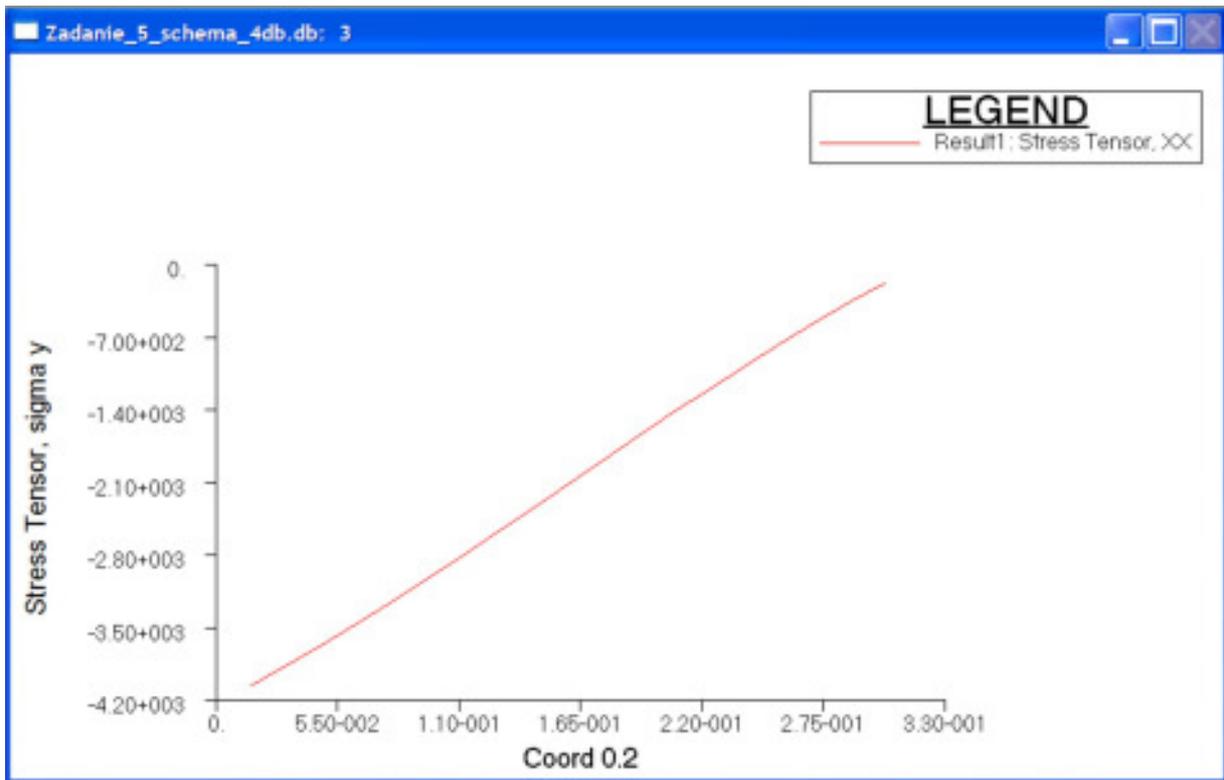


Рис.57

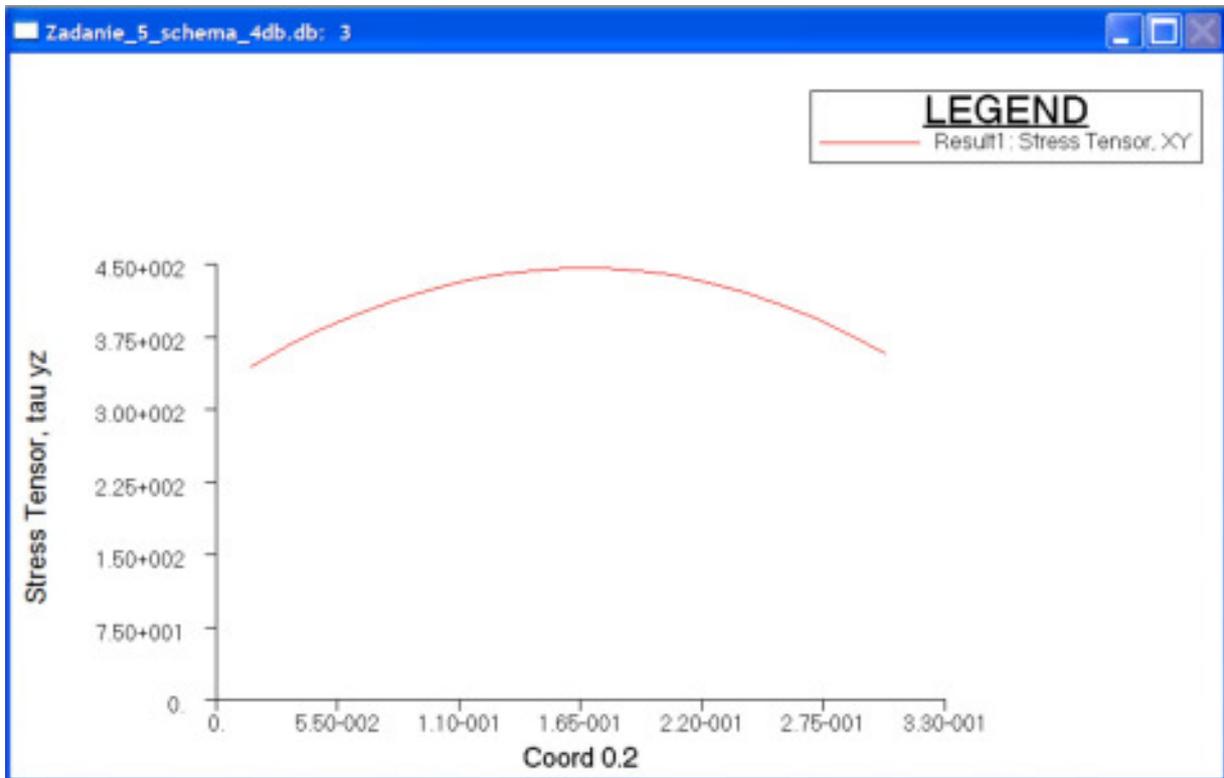


Рис.58

Жилкин Виталий Афанасьевич

**РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ И ПРОВЕРКА ЖЕСТКОСТИ
СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК**

в программных продуктах MathCAD, SCAD, MSC.Patran-Nastran-2005

Методические указания

Редактор *Гришина Л. Ф.*

Редакционно-издательский отдел Челябинского государственного агроинженерного
университета, г. Челябинск, пр. Ленина, 75

Формат А4. Объем 4,25 уч.-изд.л. Тираж 100 экз.
Заказ № 195

УОП ЧГАУ