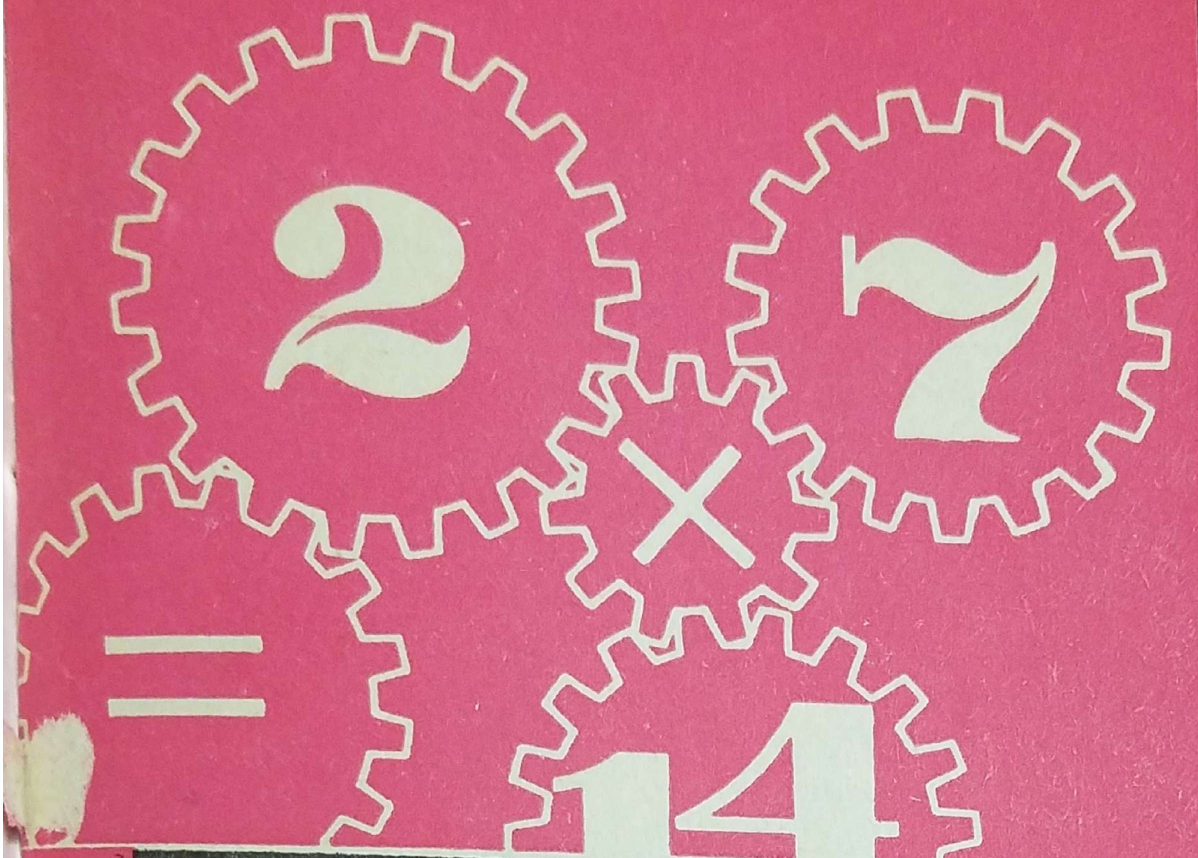
СЕРИЯ XIX 1967
НОВОЕ В ЖИЗНИ, НАУКЕ, ТЕХНИКЕ
математика кибернетика
11–12



Н.С. Кочанов

О вычислениях при помощи арифмометра

Н. С. Кочанов

О ВЫЧИСЛЕНИЯХ ПРИ ПОМОЩИ АРИФМОМЕТРА

Издательство «Знание»
Москва 1967

ВВЕДЕНИЕ

В практической деятельности инженеров, техников, работников различных лабораторий и т. д. часто встречаются задачи, при решении которых логарифмическая линейка не может обеспечить требуемой точности. Как известно, логарифмическая линейка с модулем 250 *мм* позволяет получать результаты лишь с тремя значащими цифрами, причем операции сложения и вычитания нужно производить на бумаге, так как на линейке они невозможны. Задачи, которые имеются в виду, также нецелесообразно решать и при помощи электронных цифровых вычислительных машин ввиду их относительной простоты.

Для выполнения арифметических действий с многозначными числами весьма удобно пользоваться арифмометром или клавишными вычислительными машинами, которые в настоящее время получили большое распространение. Особенно распространены арифмометры типа «Феликс» и вычислительные машины «ВК-1», которые позволяют производить сложение, вычитание, умножение и деление многозначных чисел. Основные правила работы на арифмометре и малых вычислительных машинах обычно излагаются в руководствах, прилагаемых к таким машинам. Кратко описаны они и в книге Л. С. Хренова «Малые вычислительные машины», выпущенной в 1966 г. издательством «Наука» (4-е издание), но главным образом в этой книге изложены конструктивные особенности вычислительных машин отечественного и зарубежного производства.

Следует заметить, что очень часто возникает необходимость в вычислениях такого рода, которые в руководствах не предусмотрены, и поэтому такие вычисления при помощи арифмометра или малых вычислительных машин вообще не выполняются или же производятся по методике, не являющейся наиболее рациональной.

Можно привести много примеров, касающихся вычисления квадратных и кубических корней, решения кубических уравнений и уравнений более высоких степеней, разложения рациональных дробей на простые дроби, численного решения некоторых дифференциальных уравнений и т. д., когда арифмометр оказывается очень удобной вычислительной машиной, позволяющей быстро и с высокой степенью точности получать окончательные результаты.

В настоящей брошюре излагаются некоторые методы вычислений, имеющие большое практическое значение, но недостаточно распространенные или же пока не известные. Описание методов дано применительно к арифмометру «Феликс», однако те же самые методы могут быть применены и в работе на клавишных вычислительных машинах. Опыт показывает, что применение таких методов для практических вычислений существенно экономит время, обеспечивает простоту расчетов и значительно расширяет возможности арифмометра. Приложенные к брошюре компактные многозначные таблицы тригонометрических функций при вычислениях на арифмометре позволяют быстро получать шестизначные значения функций при аргументе, заданном с точностью до 0,000 001 радиана. Объем таких таблиц во много раз меньше объема обычных таблиц тригонометрических функций.

Брошюра рассчитана на широкий круг инженерно-технических работников, связанных в своей практической деятельности с вычислениями на арифмометрах или клавишных вычислительных машинах. Она будет полезна и тем читателям, которым не известно о широких возможностях арифмометра — этого простого, дешевого и надежного прибора, обеспечивающего «малую механизацию» многочисленных вычислений.

Глава I

ОСНОВНЫЕ ПРАВИЛА ВЫЧИСЛЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ АРИФМОМЕТРА

Арифмометр представляет собой одну из наиболее простых и в то же время одну из наиболее удобных и надежных вычислительных машин. Конструкция арифмометра, предложенная в 1874 году петербургским инженером В. Т. Однером и лежащая в основе всех арифмометров, выпускаемых в нашей стране

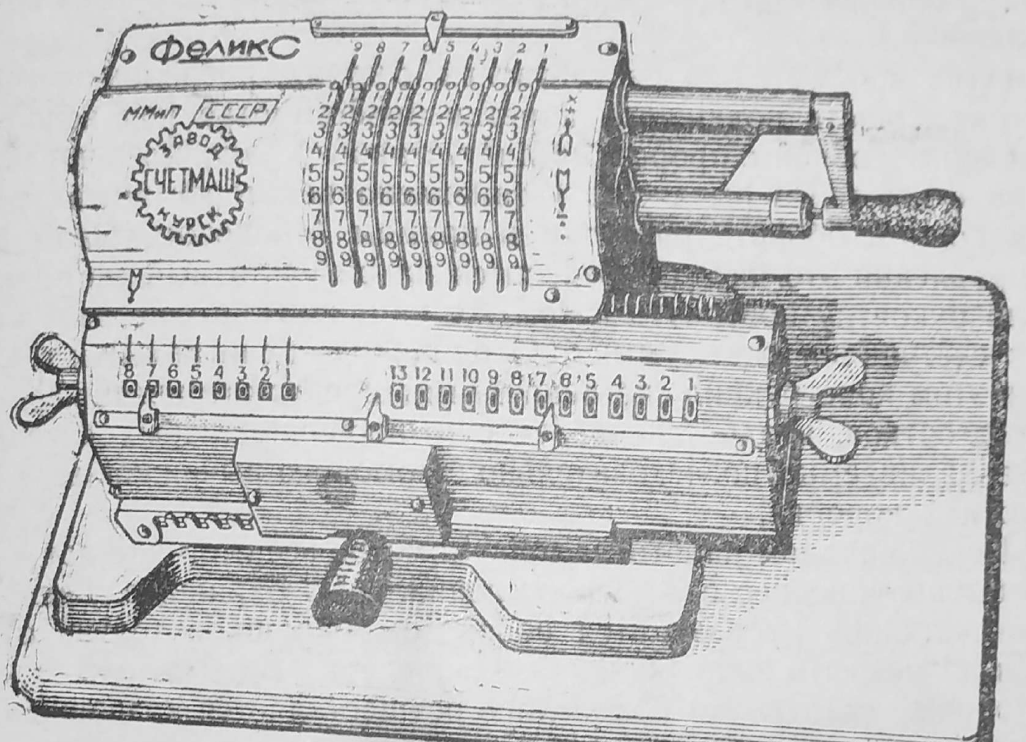


Рис. 1.

с 1891 года, не претерпела сколь-нибудь значительных изменений до настоящего времени. «Колеса Однера», т. е. шестерни с зубцами, число которых можно менять при установке заданного числа, используются и в арифмометре «Феликс» (см. фото на рис. 1).

Для пояснения принципа вычислений при помощи арифмометра следует обратить внимание прежде всего на три числоносителя этой машины:

неподвижную коробку с прорезями, в которых перемещаются рычажки для установки заданного числа. Прорези обозначены справа налево номерами соответственно разрядам чисел (от 1 до 9). При повороте рукоятки арифмометра вся система колес Однера с установочными рычажками приходит во вращение с той же скоростью, что и рукоятка (обычно 180—220 оборотов в минуту);

счетчик оборотов — счетчик, расположенный в левой части подвижной каретки арифмометра. Этот счетчик регистрирует число оборотов рукоятки, которое может быть отнесено к различным окнам (разрядам) этого счетчика, так как путем перемещения каретки счет оборотов до девяти может быть зафиксирован в любом из восьми окон. Передачи десятков на счетчике оборотов арифмометра «Феликс» нет. Поэтому в случае, если сделано больше девяти оборотов в «положительном» направлении (движение рукоятки «от себя»), в окнах этого счетчика появляются цифры красного цвета, соответствующие счету оборотов при вращении рукоятки в «отрицательном» направлении;

счетчик суммы или результатный счетчик, расположенный в правой части подвижной каретки арифмометра под неподвижной коробкой с прорезями для установки заданного числа. Если с помощью рычажков установлено некоторое число, то при полном обороте рукоятки в прямом («положительном») направлении это число переносится на результатный счетчик. Если рукоятку повернуть в том же направлении еще раз, то этот счетчик покажет сумму двух одинаковых слагаемых и т. д. При этом конструкция счетчика суммы предусматривает перенос десятков, что обеспечивает суммирование любых чисел, устанавливаемых последовательно с помощью рычажков неподвижной коробки.

Перед началом работы на арифмометре все счетчики должны быть «очищены» с помощью специальных барашков. Гашение счетчиков производится поворотом барашков только от себя до момента защелкивания. Приведение всех рычажков к исходному (нулевому) положению осуществляется вращением рукоятки при оттянутой влево пластине гасящего устройства.

Для проверки арифмометра обычно с помощью рычажков устанавливают число 12345679 и вращают рукоятку девять раз в прямом направлении. Тогда в девяти окошках счетчика суммы появятся единицы. Если совершить еще девять оборотов, то появятся двойки и т. д. Подобную проверку арифмометра целесообразно производить периодически.

1. Сложение

Для того, чтобы произвести сложение двух чисел необходимо с помощью установочных рычажков на неподвижной коробке арифмометра установить первое слагаемое. Следует иметь в виду, что суммирование производится на низших разрядах, т. е. заданное число устанавливается в правой части коробки. Поворотом рукоятки в положительном направлении (от себя) на один оборот заданное число переносится на счетчик суммы. После этого точно таким же образом устанавливается второе слагаемое (на тех же разрядах) и рукоятка арифмометра опять поворачивается на один оборот в том же направлении. Теперь счетчик суммы покажет сумму двух установленных чисел.

Если установить с помощью рычажков третье число, а затем поворотом рукоятки в прямом направлении перенести его на счетчик суммы, то этот счетчик покажет сумму трех слагаемых и т. д.

При сложении чисел, выражающихся десятичными дробями, следует пользоваться подвижными запятыми, имеющимися как на неподвижной коробке, так и на подвижной каретке. Пусть, например, вычисляется сумма

$$\begin{array}{r} 367,895 \\ +\;\; 1236,26 \\ +\;\; 457,3333 \\ \hline 2061,4883 \end{array}$$

Так как в данном случае наибольшее число десятичных знаков равно четырем, то «запятые» должны отделять четыре низших разряда. При вычислениях целесообразно дополнять недостающие десятичные знаки нулями, т. е. записывать при суммировании числа следующим образом (приводится предыдущий пример):

$$\begin{array}{r} 367,8950 \\ +\;\; 1236,2600 \\ +\;\; 457,3333 \\ \hline 2061,4883 \end{array}$$

Последнее обстоятельство особенно важно помнить при работе на вычислительных машинах «ВК-1», «ВК-2» и др., когда требуется также и установка нулей заданного числа.

2. Вычитание

Для осуществления операции вычитания на арифмометре сначала с помощью рычажков устанавливается уменьшаемое и поворотом рукоятки арифмометра в положительном направлении это число переносится на счетчик суммы. Затем устанавливается таким же способом вычитаемое и рукоятка поворачивается на один оборот в отрицательном направлении. После этого на счетчике суммы будет зафиксирована искомая разность двух чисел.

Если установить новое вычитаемое и снова повернуть рукоятку арифмометра на один оборот к себе, то счетчик суммы покажет новую разность и т. д. Таким образом из заданного числа можно вычитать любую последовательность чисел. Возможен случай, когда счетчик суммы (результата) будет на старших разрядах показывать цифры 9999... Это означает, что уменьшаемое оказывается меньше вычитаемого и результатом является отрицательное число.
Например:

$$
\begin{array}{r}
4527,345 \\
-\\
7680,549 \\
\hline
9999996846,796
\end{array}
$$

Для того, чтобы получить искомую разность, необходимо найти дополнительное число до 0000 000 000 000. В результате будем иметь

$$—3153,204.$$

Легко видеть, что отрицательное число на счетчике суммы можно прочитать, если вычесть соответствующие цифры из 9, а последнюю из 10. Так, если на счетчике суммы имеем

$$9998\,765\,423\,980,$$

то это равнозначно отрицательному числу

$$—1\,234\,576\,020.$$

3. Алгебраическое сложение

Пусть требуется произвести ряд последовательных сложений и вычитаний многозначных чисел. Для этого установим первое из заданных чисел с помощью рычажков на неподвижной коробке арифмометра. Если это число положительное, то перенесем его на счетчик суммы поворотом рукоятки в прямом направлении (в направлении сложения). Если же оно отрицательное, то перенос его на результатный счетчик производится вращением рукоятки в обратном направлении. В последнем случае на счетчике суммы будет показано число, начинающееся девятками и перед этим при вращении рукоятки прозвенит звонок.

Далее установим с помощью рычажков второе число и поворотом рукоятки арифмометра в направлении, определяемом знаком числа перенесем его на счетчик суммы. Проделывая это со всеми числами, входящими в заданную алгебраическую сумму, получим искомый результат в виде положительного или отрицательного числа. Приведем два примера:

(от себя) на один оборот заданное число переносится на счетчик суммы. После этого точно таким же образом устанавливается второе слагаемое (на тех же разрядах) и рукоятка арифмометра опять поворачивается на один оборот в том же направлении. Теперь счетчик суммы покажет сумму двух установленных чисел.

Если установить с помощью рычажков третье число, а затем поворотом рукоятки в прямом направлении перенести его на счетчик суммы, то этот счетчик покажет сумму трех слагаемых и т. д.

При сложении чисел, выражающихся десятичными дробями, следует пользоваться подвижными запятыми, имеющимися как на неподвижной коробке, так и на подвижной каретке. Пусть, например, вычисляется сумма

$$\begin{array}{r} 367,895 \\ +\ \ \\ 1236,26 \\ +\ \ \\ 457,3333 \\ \hline 2061,4883 \end{array}$$

Так как в данном случае наибольшее число десятичных знаков равно четырем, то «запятые» должны отделять четыре низших разряда. При вычислениях целесообразно дополнять недостающие десятичные знаки нулями, т. е. записывать при суммировании числа следующим образом (приводится предыдущий пример):

$$\begin{array}{r} 367,8950 \\ +\ \ \\ 1236,2600 \\ +\ \ \\ 457,3333 \\ \hline 2061,4883 \end{array}$$

Последнее обстоятельство особенно важно помнить при работе на вычислительных машинах «ВК-1», «ВК-2» и др., когда требуется также и установка нулей заданного числа.

2. Вычитание

Для осуществления операции вычитания на арифмометре сначала с помощью рычажков устанавливается уменьшаемое и поворотом рукоятки арифмометра в положительном направлении это число переносится на счетчик суммы. Затем устанавливается таким же способом вычитаемое и рукоятка поворачивается на один оборот в отрицательном направлении. После этого на счетчике суммы будет зафиксирована искомая разность двух чисел.

Если установить новое вычитаемое и снова повернуть рукоятку арифмометра на один оборот к себе, то счетчик суммы покажет новую разность и т. д. Таким образом из заданного числа можно вычитать любую последовательность чисел. Возможен случай, когда счетчик суммы (результата) будет на старших разрядах показывать цифры 9999... Это означает, что уменьшаемое оказывается меньше вычитаемого и результатом является отрицательное число.

Например:

$$
\begin{array}{r}
4527,345 \\
- \\
7680,549 \\
\hline
9999996846,796
\end{array}
$$

Для того, чтобы получить искомую разность, необходимо найти дополнительное число до 0000 000 000 000. В результате будем иметь

$$-3153,204.$$

Легко видеть, что отрицательное число на счетчике суммы можно прочитать, если вычесть соответствующие цифры из 9, а последнюю из 10. Так, если на счетчике суммы имеем

$$9998\,765\,423\,980,$$

то это равнозначно отрицательному числу

$$-1\,234\,576\,020.$$

3. Алгебраическое сложение

Пусть требуется произвести ряд последовательных сложений и вычитаний многозначных чисел. Для этого установим первое из заданных чисел с помощью рычажков на неподвижной коробке арифмометра. Если это число положительное, то перенесем его на счетчик суммы поворотом рукоятки в прямом направлении (в направлении сложения). Если же оно отрицательное, то перенос его на результатный счетчик производится вращением рукоятки в обратном направлении. В последнем случае на счетчике суммы будет показано число, начинающееся девятками и перед этим при вращении рукоятки прозвенит звонок.

Далее установим с помощью рычажков второе число и поворотом рукоятки арифмометра в направлении, определяемом знаком числа перенесем его на счетчик суммы. Проделывая это со всеми числами, входящими в заданную алгебраическую сумму, получим искомый результат в виде положительного или отрицательного числа. Приведем два примера:

1) Пусть требуется вычислить алгебраическую сумму

$$
\begin{array}{r}
+\ 564,3876 \\
-\ 123,4567 \\
+\ 11,7500 \\
-\ 245,1000 \\
\hline
207,5809
\end{array}
$$

Операция выполняется по изложенному выше правилу. В результате получается положительное число, и его можно сразу прочитать на счетчике суммы.

2) Второй пример поясняет случай, когда результатом будет отрицательное число и его следует определять по указанному в предыдущем разделе способу:

$$
\begin{array}{r}
-\ 257,3970 \\
+\ 187,4567 \\
-\ 324,5000 \\
\hline
-\ 394,4403
\end{array}
$$

счетчик суммы в данном случае покажет число

999 999 605,5597.

4. Умножение

Умножение на арифмометре сводится к многократному сложению одинаковых чисел. Если например заданное число умножается на 2, то это означает, что на счетчик суммы оно должно быть перенесено дважды. При умножении числа на 5 оно переносится на счетчик суммы пять раз и т. д. При этом счетчик оборотов в первом случае покажет число 2, а во втором число 5.

Принцип умножения на многозначные числа легко проследить на примере умножения заданного числа на 111. Согласно известному правилу умножения имеем

$$
\begin{array}{r}
56789 \\
\times\quad 111 \\
\hline
56789 \\
56789 \\
56789 \\
\hline
6303579
\end{array}
$$

Указанные действия очень просто выполняются при помощи арифмометра. Для этого нужно сначала заданное число перенести на счетчик суммы при крайнем левом положении каретки. Затем сдвинуть каретку на один шаг (разряд) вправо и перенести на счетчик суммы заданное число еще раз. Наконец, необходимо каретку сдвинуть на один шаг вправо еще раз и перенести на счетчик суммы то же число. В результате на счетчике суммы окажется число, представляющее собой сумму чисел, стоящих в косом столбце указанного выше примера. Это и будет искомое произведение чисел. На счетчике оборотов в последних трех окнах будет число 111, т. е. множитель.

Рассмотрим еще один пример умножения чисел:

$$
\begin{array}{r}
56789\\
\times\qquad 321\\ \hline
\left.\begin{array}{r}56789\end{array}\right\}\ 1\\
\left.\begin{array}{r}56789\\56789\end{array}\right\}\ 2\\
\left.\begin{array}{r}56789\\56789\\56789\end{array}\right\}\ 3\\ \hline
18229269
\end{array}
$$

Отсюда следует, что на разряде единиц счетчика оборотов заданное число переносится на счетчик суммы один раз, на разряде десятков — два раза и на разряде сотен — три раза. Теперь легко сформулировать следующее правило умножения чисел: для того, чтобы умножить два числа друг на друга, следует установить первое число с помощью рычажков на неподвижной коробке, затем при условии, что каретка расположена в крайнем левом положении, нужно повернуть рукоятку арифмометра в прямом направлении на полное число оборотов столько раз, сколько единиц содержится во множителе (после этого в правом крайнем окне счетчика оборотов появится цифра, указывающая число единиц множителя). После умножения заданного числа на единицы множителя умножение производится аналогично на десятки множителя, для чего нужно передвинуть каретку на один шаг вправо и повернуть рукоятку арифмометра в том же направлении соответствующее число раз. Аналогичным образом производится умножение на сотни, тысячи и т. д. множителя.

По окончании умножения в окнах счетчика оборотов будет показан множитель, а на счетчике суммы — искомое произведение.

Следует заметить, что операцию умножения на арифмометре можно производить и в обратном порядке, т. е. сначала умножать заданное число на тысячи, затем на сотни, на десятки и, наконец, на единицы множителя. В этом случае каретка арифмометра должна быть установлена так, чтобы эту операцию можно было выполнить — каретка предварительно сдвигается на соответствующее число шагов вправо. Легко видеть, что косой столбец суммы чисел предыдущего примера выглядел бы в этом случае так:

$$\begin{array}{r}
56789 \\
\times\ 321 \\
\hline
\left.\begin{array}{r} 56789 \\ 56789 \\ 56789 \end{array}\right\} 3 \\
\left.\begin{array}{r} 56789 \\ 56789 \end{array}\right\} 2 \\
\left.\begin{array}{r} 56789 \end{array}\right\} 1 \\
\hline
18229269
\end{array}$$

При выполнении операции умножения можно не считать числа оборотов рукоятки арифмометра, а лишь достаточно следить за появлением нужного числа на счетчике оборотов, отмечающего в данном случае множитель. Однако практически оператор все же ведет счет оборотов.

Если умножаются десятичные дроби, то необходимо предварительно установить «запятые». Число десятичных знаков множимого отделяется запятой на неподвижной коробке арифмометра, а число десятичных знаков множителя отделяется «запятой» на счетчике оборотов. Тогда на результирующем счетчике одна из запятых должна отделить суммарное число десятичных знаков, а вторая — то число десятичных знаков, которое будет выписываться. Например, если умножаются числа с пятью десятичными знаками, то на счетчике суммы запятыми отделяются десять и пять знаков, т. е. запятые располагаются между окнами *11* и *10* (одна запятая) и между окнами *6* и *5* (вторая запятая). Тогда при перемножении, к примеру, чисел

$$12{,}34567 \cdot 2{,}34567$$

на счетчике суммы будет следующее расположение запятых

28,95886,77489.

Очевидно, что результатом перемножения указанных чисел будет число

28,95887.

При умножении чисел полезно иметь в виду и еще одно обстоятельство. В ряде случаев оказывается возможным уменьшить число оборотов рукоятки арифмометра, когда множитель содержит ряд цифр больших 5. Пусть, например, некоторое число умножается на 9. Но $9=10-1$, и поэтому его можно сначала умножить на 10, а затем умножить на единицу, вращая рукоятку арифмометра в обратном направлении.

При использовании указанного способа умножения можно сэкономить время, так как потребуется вращать рукоятку арифмометра меньшее число раз. Правило же такого умножения можно легко увидеть из следующих равенств

$$9876=10000-124$$
$$8768=10000-1232$$
$$9999=10000-1$$

Последний пример особенно показателен. Так, вместо 36 оборотов рукоятки при использовании этого способа умножения нужно сделать всего два.

Если встречается необходимость умножать одно и то же число на разные числа, то иногда целесообразно не очищать счетчики сразу после первого умножения, а «подправлять» число, указанное на счетчике оборотов, так, чтобы сравнять его со следующим множителем. Так, например, при вычислении произведений

$$0,987564 \cdot 0,427835=0,422514$$
$$0,987564 \cdot 0,428946=0,423612$$
$$0,987564 \cdot 0,128333=0,126737$$

число дополнительных операций после первого умножения, чтобы «подправить» второй множитель, оказывается очень небольшим.

5. Умножение числа на алгебраическую сумму чисел

Для выполнения операции умножения заданного числа на алгебраическую сумму чисел можно, конечно, сначала вычислить эту сумму, а затем умножить ее на заданное число. Однако в ряде случаев бывает удобнее производить умножение заданного числа на каждое из слагаемых суммы с одновременным суммированием результатов.

Пусть, например, требуется произвести вычисление такого произведения:

$$1,654312 \cdot (0,965429-0,634219+0,015375).$$

Тогда, установив в качестве «заданного числа» 1,654312, произведем умножение его на первое слагаемое суммы и после умножения очистим счетчик оборотов (счетчик суммы не очищаем). После этого умножим то же число на второе слагаемое, но поскольку оно отрицательное, то при умножении рукоятку арифмометра будем вращать в обратном направлении. Затем очистим счетчик оборотов (счетчик суммы как и после первого умножения не очищаем) и произведем умножение на последнее слагаемое. После этого на счетчике суммы будет записано число

$$0{,}573360.$$

Это и есть искомый результат.

Рассмотренный способ умножения особенно удобен при вычислениях с учетом поправок. Например

$$0{,}754125 \cdot (0{,}327546 - 0{,}000083),$$

где число $-0{,}000083$ является поправкой. Используя этот способ умножения, получим

$$0{,}245948.$$

6. Вычисление алгебраических сумм произведений

Для вычисления алгебраических сумм произведений чисел арифмометр особенно удобен. В этом случае окончательный результат получается без записи промежуточных числовых значений. Пусть, например, требуется вычислить

$$1{,}376542 \cdot 0{,}896421 - 0{,}542125 \cdot 0{,}431100 -$$
$$- 2{,}543000 \cdot 0{,}942351 + 0{,}330500 \cdot 1{,}542100$$

(заметим, что вычисления ведутся с шестью десятичными знаками, и поэтому все сомножители, которые имеют меньшее число десятичных знаков, дополнены нулями).

Теперь произведем умножение по изложенному выше способу, после каждого умножения очищая счетчик оборотов, но не очищая счетчик суммы. Легко заметить, что «сумматор» будет накапливать суммы произведений, а сами значения этих произведений будут являться промежуточными, которые не представляют для нас интереса. Таким образом, отличие данного вычислительного процесса от того, который был рассмотрен в предыдущем разделе, состоит только в том, что при каждом новом умножении нужно устанавливать новое заданное число, т. е. новое множимое.

Результатом вычисления в данном примере будет число

$$-0{,}886483.$$

Этот способ вычислений особенно удобен при расчетах по рекуррентным формулам (см. вторую главу).

7. Одновременное нахождение суммы произведений и суммы множимых

При определении средних значений величин приходится вычислять суммы произведений и суммы множимых. Эта операция при помощи арифмометра может выполняться за один прием. Предположим, что требуется вычислить сумму чисел, стоящих в левом столбце приведенного ниже примера, а также сумму произведений чисел этого столбца на соответствующие числа правого столбца

$$\begin{array}{rl} 1234\times & 0{,}8956 \\ 2045\times & 0{,}7865 \\ 145\times & 0{,}8037 \\ 3966\times & 0{,}9065 \\ \hline 7390\times & 6425{,}2784 \end{array}$$

Для того, чтобы произвести эти вычисления установим первый множитель 0,8956 с помощью рычажков «заданного числа» в прорезях *4, 3, 2* и *1*. Одновременно рычажок в прорези *9* установим на число 1. Произведя обычным способом умножение, заметим, что в левой части «сумматора», так же, как и на счетчике оборотов, получится число 1235. После этого установим аналогичным же образом второй множитель 0,7865 (единицу в разряде 9 оставляем) и произведем умножение на число 2045. Для контроля умножения счетчик оборотов перед этим умножением должен быть очищен. Тогда после второго умножения он покажет число 2045, а в левой части «сумматора» получится сумма $1234+2045=3279$. Аналогичным образом умножение продолжается. Поскольку счетчик суммы при таком способе вычислений будет содержать два результата умножения — первый, который расположен в левой части счетчика, есть результат умножения единицы на сумму чисел левого столбца (т. е. просто сумму этих чисел), и второй результат (в правой части «сумматора»), равный сумме произведений чисел одинаковых строк, — то результат решения задачи, написанный выше, получается сразу. Так как в данном случае счетчик суммы занят полностью, то разделение результатов следует отмечать «запятой», установленной между окнами *9* и *8* этого счетчика. Вторая «запятая» должна отделять четыре десятичных знака.

Если требуется теперь определить среднее значение чисел правого столбца с весами, указанными в левом столбце, то необходимо определить частное

$$\frac{6426{,}2784}{7390}=0{,}8695.$$

8. Вычисление обратных чисел путем умножения

Пусть требуется вычислить числовое значение, обратное 0,123456, т. е. найти

$$\frac{1}{0{,}123456}.$$

Установим заданное число с помощью рычажков обычным способом и будем умножать его на такое число, чтобы произведение равнялось единице (каретка арифмометра сначала располагается в крайнем правом положении). Так как точного значения «единица» в общем случае не получится, то будем вращать рукоятку арифмометра до тех пор, пока не получится число, близкое к единице (с недостатком). Если же сделать один лишний оборот, то получится значение, превышающее единицу (при этом прозвенит звонок). Поэтому нужно рукоятку арифмометра повернуть обратно. Затем переместим каретку на один шаг влево и продолжим процесс получения единицы на результирующем счетчике. В результате на счетчике оборотов получим

$$8{,}10005.$$

Подобным же способом можно производить и деление. Например, в случае

$$\frac{5}{2{,}56743}$$

на счетчике суммы необходимо получить пятерку, счетчик оборотов в результате покажет число

$$1{,}94747,$$

которое и будет частным деления.

Если же в числителе дроби многозначное число, то следить за появлением его на счетчике суммы оказывается сложнее. Достаточно рассмотреть следующий пример

$$\frac{765{,}845}{123{,}456} = 6{,}203$$

чтобы убедиться в этом.

9. Деление

Деление на арифмометре производится по принципу многократного вычитания. В этом случае делимое ставится на место суммы, делитель на место слагаемого, а частное получается на счетчике оборотов.

Предположим, что необходимо произвести деление числа 426072 на число 3464. Для этого передвинем каретку арифмометра в крайнее правое положение и с помощью рычажков в прорезях *6, 5, 4, 3, 2* и *1* установим число 426072 (делимое). Затем поворотом рукоятки в положительном направлении перенесем это число на счетчик суммы. В этом случае счетчик оборотов покажет единицу в крайнем левом окне. Поворотом барашка этого счетчика необходимо погасить эту единицу, т. е.

очистить счетчик оборотов. Далее, с помощью рычажков в прорезях *6*, *5*, *4* и *3* нужно установить делитель, т. е. число 3464. Легко заметить, что при такой установке вычесть число 3464 из числа 426072 можно. Однако может случиться так, что первое вычитание приводит к отрицательному результату на счетчике суммы. Тогда необходимо сдвигать каретку на один шаг влево или же набирать делитель снова, но с помощью других рычажков. Так, если в рассматриваемом примере делимым было число, например, 6853, то при установке его с помощью рычажков *6*, *5*, *4* и *3* вычитание было бы невозможным. Поэтому его следует набирать с помощью рычажков *5*, *4*, *3* и *2*.

Теперь произведем вычитание путем вращения рукоятки арифмометра в отрицательном направлении. После совершения одного оборота на счетчике суммы останется число 079 672, и дальнейшее вычитание становится невозможным. Поэтому передвинем каретку на один шаг влево и продолжим процесс вычитания чисел (в этом случае вычитаем число 3464 из 7967). Такое вычитание оказывается возможным произвести два раза, т. е. рукоятку арифмометра можно повернуть два раза в отрицательном направлении (если повернуть три раза, то прозвучит сигнал-звонок и потребуется сделать обратное движение рукоятки). Наконец, передвинув каретку еще на один шаг влево можно произвести вычитание три раза. Тогда все число на счетчике суммы будет исчерпано полностью, т. е. деление закончится без остатка, а счетчик оборотов покажет частное, т. е. число 123.

Для того, чтобы уяснить принцип деления чисел при помощи арифмометра, целесообразно рассмотренный выше пример записать следующим образом

$$
\begin{array}{rr|l}
 & 426072 & 3464 \\ \cline{3-3}
- & 3464 & 123 \\ \cline{2-2}
 & 79672 & \\
- & 3464 & \\
- & 3464 & \\ \cline{2-2}
 & 10392 & \\
- & 3464 & \\
- & 3464 & \\
- & 3464 & \\ \cline{2-2}
 & 0000 &
\end{array}
$$

очистить счетчик оборотов. Далее, с помощью рычажков в прорезях *6, 5, 4* и *3* нужно установить делитель, т. е. число 3464. Легко заметить, что при такой установке вычесть число 3464 из числа 426072 можно. Однако может случиться так, что первое вычитание приводит к отрицательному результату на счетчике суммы. Тогда необходимо сдвигать каретку на один шаг влево или же набирать делитель снова, но с помощью других рычажков. Так, если в рассматриваемом примере делимым было число, например, 6853, то при установке его с помощью рычажков *6, 5, 4* и *3* вычитание было бы невозможным. Поэтому его следует набирать с помощью рычажков *5, 4, 3* и *2*.

Теперь произведем вычитание путем вращения рукоятки арифмометра в отрицательном направлении. После совершения одного оборота на счетчике суммы останется число 079 672, и дальнейшее вычитание становится невозможным. Поэтому передвинем каретку на один шаг влево и продолжим процесс вычитания чисел (в этом случае вычитаем число 3464 из 7967). Такое вычитание оказывается возможным произвести два раза, т. е. рукоятку арифмометра можно повернуть два раза в отрицательном направлении (если повернуть три раза, то прозвучит сигнал-звонок и потребуется сделать обратное движение рукоятки). Наконец, передвинув каретку еще на один шаг влево можно произвести вычитание три раза. Тогда все число на счетчике суммы будет исчерпано полностью, т. е. деление закончится без остатка, а счетчик оборотов покажет частное, т. е. число 123.

Для того, чтобы уяснить принцип деления чисел при помощи арифмометра, целесообразно рассмотренный выше пример записать следующим образом

$$
\begin{array}{r|l}
426072 & 3464 \\ \cline{2-2}
-\ 3464 & 123 \\ \cline{1-1}
79672 & \\
-\ 3464 & \\
-\ 3464 & \\ \cline{1-1}
10392 & \\
-\ 3464 & \\
-\ 3464 & \\
-\ 3464 & \\ \cline{1-1}
0000 &
\end{array}
$$

Эти операции вычитания легко выполняются при помощи арифмометра. Если прислушиваться к сигналу (к звонку), то процесс деления можно производить, даже не следя за счетчиками.

При делении десятичных дробей следует пользоваться имеющимися на арифмометре «запятыми».

10. Деление алгебраических сумм чисел

Арифмометр дает возможность производить деление алгебраических сумм чисел без записи промежуточных результатов, что при многих вычислениях оказывается весьма удобным. Например, требуется произвести вычисление следующей дроби

$$\frac{8,3654 + 0,7500 - 2,3465}{1,2970 - 0,4521 + 3,2633}.$$

Используем для вычисления суммы чисел в числителе дроби левую часть счетчика суммы, а для вычисления суммы чисел знаменателя — его правую часть. Тогда операцию деления можно произвести следующим образом.

Передвинув каретку арифмометра в крайнее правое положение, просуммируем числа

$$8,3654+0,7500-2,3465=6,7689$$

(эта сумма будет занимать левую часть счетчика суммы и ее не нужно гасить).

Затем, передвинув каретку в левое крайнее положение, просуммируем числа знаменателя:

$$1,2970-0,4521+3,2633=4,1082$$

(эта сумма будет занимать правую часть счетчика суммы).

Теперь, набрав с помощью рычажков «заданного числа» значение второй суммы (т. е. числа 4,1082) в тех же разрядах, в которых расположено это число на счетчике суммы, поворотом рукоятки в отрицательном направлении очищаем правую часть «сумматора». Наконец, передвинем каретку в крайнее правое положение и произведем деление чисел обычным способом (перед этой операцией счетчик числа оборотов должен быть очищен). В результате на счетчике оборотов получим искомое частное

$$1,6477.$$

При такой методике вычислений нет необходимости записывать промежуточные значения чисел.

11. Деление алгебраических сумм произведений чисел

Подобным же образом при помощи арифмометра производится вычисление таких дробей, как

$$\frac{0{,}876\cdot 0{,}564 + 0{,}345\cdot 0{,}875}{0{,}667\cdot 0{,}987 - 0{,}254\cdot 0{,}765}.$$

В данном случае числа на числоносителях арифмометра следует располагать так, чтобы результат вычисления числителя дроби оказался в левой части счетчика суммы, а результат вычисления знаменателя — в правой его части. В этом примере при крайнем правом положении каретки первый сомножитель устанавливается с помощью рычажков в прорезях *5, 4* и *3*. Тогда после вычислений значение числителя, равное 0,795939, будет показано в левой части счетчика суммы.

Затем передвинем каретку в крайнее левое положение и произведем аналогичные вычисления знаменателя. Тогда в правой части счетчика суммы получим число 0,464019.

Установив после этого с помощью рычажков *6, 5, 4, 3, 2* и *1* число 0,464019, повернем рукоятку в отрицательном направлении и очистим правую часть счетчика суммы. После этого можно производить деление установленных чисел (предварительно нужно очистить счетчик числа оборотов). На этом счетчике получим следующий результат деления

1,71532.

12. Методика извлечения квадратных корней

Предположим, что требуется извлечь квадратный корень из числа N. Если обозначить приближенное значение этого корня через

$$\widetilde{\sqrt{N}}$$

(оно может быть получено, например, при помощи логарифмической линейки), то другим приближенным значением корня будет число

$$\frac{N}{\widetilde{\sqrt{N}}}.$$

Если одно из этих приближенных значений корня будет с недостатком, то второе будет давать значение корня с избытком. Более точным поэтому будет являться их среднее арифметическое, т. е. в качестве второго приближения корня следует брать

$$\frac{1}{2}\left(\widetilde{\sqrt{N}} + \frac{N}{\widetilde{\sqrt{N}}}\right) = \frac{\left(\widetilde{\sqrt{N}}\right)^2 + N}{2\widetilde{\sqrt{N}}}.$$

Легко видеть, что данная формула удовлетворяется и точным значением квадратного корня. Эту формулу, известную как формула Герона, применяют для вычисления квадратных корней итерационным методом.

Процесс вычислений сводится к определению приближенного значения корня, которое возводится в квадрат так, чтобы результат располагался в левой части счетчика суммы. После этого к нему прибавляется в соответствии с написанной формулой подкоренное число и, поскольку оно будет близким к уже установленному на счетчике суммы числу, недоразумений с разрядами не получится. Теперь остается установить удвоенное значение приближенного корня на тех же разрядах, что и при обычном делении (удвоение производится без использования арифмометра, так как число умножить на два очень просто). После гашения счетчика числа оборотов можно производить деление. Тогда на счетчике числа оборотов получится уточненное значение искомого корня.

Пусть, например, требуется вычислить

$$\sqrt{0{,}987654}.$$

При помощи логарифмической линейки можно найти

$$\widetilde{\sqrt{N}}=0{,}993.$$

После возведения этого числа в квадрат на счетчике суммы будем иметь

$$0{,}986049$$

(число 993 устанавливается при крайнем правом положении каретки с помощью рычажков *4*, *3* и *2*). Теперь прибавим к полученному числу заданное 0,987654 и получим в левой части счетчика суммы число

$$1{,}973703.$$

Далее произведем деление установленного числа на $2\cdot 0{,}993=1{,}986$. В результате на счетчике числа оборотов получим

$$\sqrt{N}=0{,}993808.$$

Если полученный результат возвести в квадрат, то найдем

$$0{,}993808^2=0{,}987654.$$

Таким образом видно, что в данном случае мы получили значение квадратного корня с шестью десятичными знаками.

Если бы уточненное значение корня при возведении в квадрат не дало точного значения заданного числа, то процесс уточнения пришлось бы повторить. При этом необходимое для проведения вычислений приближенное значение квадрата уже было бы установлено на арифмометре (в общем случае при условии, что вычисления ведутся с пятью знаками). Однако, как правило, при использовании первого приближения, найденного с помощью логарифмической линейки, второе приближение, полученное указанным способом, уже не нуждается в уточнении. Можно заметить, что весь процесс извлечения квадратного корня занимает около 1,5 минут времени.

13. Извлечение квадратного корня из суммы (разности) квадратов чисел

При решении прямоугольных треугольников на основании теоремы Пифагора, а также при определении модулей комплексных чисел требуется производить вычисления по формуле

$$c=\sqrt{a^2+b^2}.$$

Пусть, например, $a=1{,}23535$ и $b=2{,}72434$.

При помощи арифмометра легко получить сумму квадратов этих чисел, т. е.

$$c^2=8{,}94812.$$

Остается лишь извлечь квадратный корень из этого числа.

Следуя изложенной выше методике, определим при помощи логарифмической линейки приближенное значение корня

$$\widetilde{\sqrt{c^2}}=2{,}99.$$

Затем вычислим квадрат полученного числа, накладывая его на уже имеющееся на счетчике суммы число 8,94812. Теперь разделим эту сумму на удвоенное приближенное значение квадратного корня, т. е. на число 5,98. Естественно, что счетчик оборотов перед этим очищается.

В результате деления на счетчике оборотов получим

$c=2{,}99134.$

Это и будет искомый результат.

Подобным же способом производится вычисление квадратных корней и из разностей квадратов заданных чисел. Очевидно, что аналогично вычисляется квадратный корень и из суммы квадратов нескольких чисел. Последнего типа вычисления часто встречаются на практике.

14. Решение квадратного уравнения

Применяя изложенный способ извлечения квадратного корня, можно легко вычислять корни уравнений второй степени

$$x^2+ax+b=0.$$

Для этого необходимо воспользоваться известной формулой

$$x_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2},$$

проделав на арифмометре все необходимые вычисления.

Пусть, например, дано

$$x^2+4{,}78356\,x+1{,}23456=0.$$

Тогда

$$x_{1,2}=\frac{-4{,}78356\pm\sqrt{17{,}94421}}{2}.$$

Заметим, что определение подкоренного числа производится на арифмометре без записи промежуточных результатов.

После извлечения квадратного корня по изложенному методу получим

$$x_{1,2}=\frac{-4{,}78356\pm4{,}23606}{2},$$

и корнями рассматриваемого уравнения будут

$$x_1=-4{,}50981 \text{ и } x_2=-0{,}27375$$

(деление на 2, т. е. умножение на 0,5 производится при суммировании чисел, так как это экономит время).

Теперь проверим результаты. Для этого определим сумму корней

$$-a=-4{,}78356$$

и их произведение

$$b=1{,}23456.$$

Видно, что вычисления выполнены с шестью значащими цифрами.

15. Извлечение кубических корней

Методика извлечения кубических корней основывается на использовании приближенной формулы

$$\sqrt[3]{1\pm\alpha}\approx1\pm\frac{\alpha}{3},$$

вытекающей из формулы бинома Ньютона при $\alpha\ll1$.

Пусть требуется извлечь кубический корень из числа N, т. е. вычислить значение

$$a=\sqrt[3]{N}.$$

При помощи логарифмической линейки можно найти приближенное значение $\tilde{a}$, которое будет рассматриваться как первое приближение. Если при возведении этого числа в третью степень окажется, что результат меньше N, то отношение

$$\frac{N}{\tilde{a}^3}=1+\alpha$$

будет больше единицы и, следовательно, второе приближение следует вычислять по формуле

$$\sqrt[3]{N}=\tilde{a}\left(1+\frac{\alpha}{3}\right).$$

Если же окажется, что полученный при помощи логарифмической линейки результат больше действительного, то отношение

$$\frac{N}{\tilde{a}^3}=1-\alpha$$

будет меньше единицы и второе приближение корня нужно вычислять по формуле

$$\sqrt[3]{N}=\tilde{a}\left(1-\frac{\alpha}{3}\right).$$

Рассмотрим пример извлечения кубического корня

$$\sqrt[3]{0{,}787635}.$$

Если воспользоваться логарифмической линейкой, то получим первое приближение

$$\tilde{a}=0{,}922.$$

Но $0{,}922^3=0{,}783777$ и, следовательно, приближенное значение куба меньше заданного числа. Тогда в результате деления получим

$$\frac{0{,}787635}{0{,}783777}=1{,}00492,\ \text{где}\ \alpha=0{,}00492.$$

Поэтому второе приближение получается в результате перемножения чисел

$$0{,}922\cdot 1{,}00164=0{,}923512.$$

Теперь, возводя результат в куб, будем иметь

$$0{,}923512^3=0{,}787639$$

(значение уже весьма близкое к истинному!).
Определим поэтому третье приближение. Для этого разделим

$$\frac{0{,}787635}{0{,}787639}=0{,}999995$$

и вычислим результат так

$$0{,}923512 \cdot (1-0{,}000002)=0{,}923510.$$

Больше уточнений делать не нужно, т. е.

$$\sqrt[3]{0{,}787635}=0{,}923510.$$

16. Решение кубических уравнений

Вычисление корней кубического уравнения

$$x^3+ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

выполняется довольно просто потому, что такое уравнение имеет по крайней мере один вещественный корень. Если коэффициенты этого уравнения положительны и справедливо следующее неравенство

$$a \cdot b > c,$$

то этот корень будет отрицательным (все вещественные корни отрицательные; если же имеются комплексные корни, то они будут иметь отрицательную вещественную часть). Таким образом, после вычисления одного корня уравнение можно представить в виде

$$(x+\alpha)(x^2+\beta x+\gamma)=0$$

и, следовательно, останется решить квадратное уравнение.

Для упрощения вычислительного процесса воспользуемся заменой переменных

$$x=y-\frac{a}{3}, \tag{2}$$

в результате которой уравнение (1) приведется к виду

$$y^3+py+q=0. \tag{3}$$

Отсюда легко получить приближенные формулы для значений корней.

Предположим, что вещественный корень по модулю меньше других корней. Тогда приближенное значение его будет таким

$$y_1=-\frac{q}{p},$$

Уточнение же значения этого корня можно получить по методу последовательных приближений на основании следующей формулы:

$$y=-\frac{y^3+q}{p}, \tag{4}$$

Пусть значение этого корня (обозначим его через y_1) вычислено. Тогда необходимо произвести исключение его из уравнения (3). Это достигается путем деления полинома, стоящего в левой части уравнения (3), на двучлен $y-y_1$ при условии, что они располагаются *по убывающим степеням* y, т. е. деление производится при таком расположении полиномов

$$y^3+py+q \,\big|\, \underline{y-y_1}\,.$$

Если вещественный корень превосходит по модулю другие корни уравнения (3), то приближенное значение его можно определить как

$$y_2=\sqrt{-p},$$

а уточнение произвести по методу последовательных приближений на основании формулы

$$y=\sqrt[3]{-py-q}. \qquad (5)$$

Исключение же этого корня из уравнения (3) следует производить путем деления, при котором делимое и делитель располагаются *по возрастающим степеням* y, т. е. следующим образом

$$q+py+y^3 \,\big|\, \underline{-y_2+y}\,.$$

Рассмотрим пример. Пусть требуется решить кубическое уравнение

$$x^3+6x^2+15x+15=0. \qquad (6)$$

Используя подстановку

$$x=y-2,$$

приведем это уравнение к виду

$$y^3+3y+1=0 \qquad (7)$$

и для вычисления вещественного корня используем формулу

$$y=-\frac{1+y^3}{3}.$$

Нулевое приближение получается при $y=0$ равным $y=-0{,}333$. Подставляя это значение в ту же формулу, получим

$$y=-\frac{1-0{,}0369}{3}=-0{,}321.$$

Продолжая итерационный процесс будем получать

$$y=-\frac{1-0{,}03308}{3}=-0{,}322;$$

$$y = -\frac{1-0,03339}{3} = -0,3222;$$

$$y = -\frac{1-0,03345}{3} = -0,3222.$$

Таким образом, вещественный корень уравнения (7) будет равен

$$y_1 = -0,3222.$$

Для исключения его из уравнения (7) произведем деление

$$\frac{y^3+3y+1}{y+0,3222} = y^2 - 0,3222y + 3,1038.$$

Так как $x = y - 2$ то один из корней уравнения (6) будет равен

$$x_1 = -2,3222$$

Остальные корни будут являться корнями квадратного уравнения

$$x^2 + 3,6778x + 6,4594 = 0.$$

В рассмотренном примере оказалось возможным определение вещественного корня уравнения по первому способу, так как этот корень был наименьшим по модулю. Если бы итерационный процесс не имел тенденции к сходимости, то было бы необходимо перейти к определению корня по второму способу (подробнее о вычислении корней уравнений высоких степеней см. гл. III).

Глава II

ПРИМЕНЕНИЕ АРИФМОМЕТРА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ТАБЛИЦ ЗНАЧЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИЙ

Во многих случаях практики возникает необходимость вычислять таблицы значений функций при равноотстоящих значениях аргумента. Такие таблицы значений функций используются, например, при построении графиков соответствующих функций, при численном интегрировании, при вычислении сверток функций и т. д. Можно отметить, что значения некоторых функций весьма просто вычисляются при помощи арифмометра, так как эти функции удовлетворяют линейным разностным уравнениям, являющимся рекуррентными, которые позволяют вычислять значения соответствующих функций при равноотстоящих t последовательно одно за другим.

1. Вычисление значений показательной функции

Пусть требуется рассчитать последовательность значений функции

$$F(t) = A \cdot e^{-\alpha t}$$

при равноотстоящих значениях аргумента. Промежуток между двумя соседними значениями аргумента, т. е. шаг таблицы, обозначим через τ. Легко убедиться, что такая последовательность значений указанной функции может быть вычислена по формуле

$$F(\nu\tau) = e^{-\alpha\tau} \cdot F[(\nu - 1)\tau], \quad \nu = 1, 2, 3\ldots,$$

где $F(0) = A$, а значение $e^{-\alpha\tau}$ определяется при помощи таблицы показательной функции.

Если ввести обозначения

$$F_\nu = F(\nu\tau),$$

то написанная выше формула примет вид

$$F_\nu = e^{-\alpha\tau} \cdot F_{\nu-1}, \quad \nu = 1, 2, 3\ldots$$

Таким образом для вычисления таблицы значений рассматриваемой функции необходимо один раз установить на арифмометре значение

$$e^{-\alpha\tau}$$

и последовательно вычислять F_1, F_2, F_3..., устанавливая на счетчике оборотов арифмометра значения, соответствующие предыдущим значениям этой функции. Тогда процесс вычислений будет очень простым и быстрым.

Пусть, например, требуется рассчитать значения функции

$$F(t) = 5{,}425 \cdot e^{-0{,}975t}$$

при шаге $\tau = 0{,}2$.

Вычисления для уменьшения влияния ошибок округлений будем вести с шестью значащими цифрами. При этом расчетной формулой будет

$$F_\nu = 0{,}822835 F_{\nu-1}, \text{ причем } F_0 = 5{,}42500.$$

Установив при помощи рычажков арифмометра значение 0,822835 и расположив соответствующим образом «запятые» на счетчиках, произведем первое умножение этого числа на 5,42500. Тогда получим $F_1 = 4{,}46388$. После записи этого значения, вращая рукоятку (не очищая счетчик оборотов), установим на счетчике 4,46388. Получим $F_2 = 3{,}67304$ и так далее. Таким образом получается следующая таблица,

t	$F(t)$	t	$F(t)$	t	$F(t)$
0,0	5,42500	1,6	1,14000	3,2	0,23956
0,2	4,46388	1,8	0,93803	3,4	0,19712
0,4	3,67304	2,0	0,77184	3,6	0,16220
0,6	3,02231	2,2	0,63510	3,8	0,13346
0,8	2,48686	2,4	0,52258	4,0	0,10982
1,0	2,04628	2,6	0,43000	4,2	0,09036
1,2	1,68375	2,8	0,35382	4,4	0,07435
1,4	1,38545	3,0	0,29114	4,6	0,06118

Для проверки точности вычислений определим, например, значение функции при $t=4{,}6$. Получим

$$F(4{,}6)=5{,}42500\,e^{-4{,}485}=0{,}06118,$$

т. е. получаем полное совпадение результатов. Поэтому можно считать, что и вся таблица вычислена достаточно точно. Для построения графика, очевидно, полученные значения можно округлить. Однако это можно сделать и после вычисления других таблиц значений функций, входящих в сумму ряда подобных функций.

2. Вычисление значений функций вида $F(t)=a\,\mathrm{ch}\,\beta t+b\,\mathrm{sh}\,\beta t$

В данном случае последовательность значений функции при шаге τ будет удовлетворять уравнению

$$F_\nu-2\,\mathrm{ch}\,\beta\tau\cdot F_{\nu-1}+F_{\nu-2}=0;$$
$$\nu=2,\ 3,\ 4\ldots$$

Поэтому вычисление значений функции может быть проведено по формуле

$$F_\nu=AF_{\nu-1}-F_{\nu-2},\qquad \nu=2,3,4\ldots,$$

где $A=2\,\mathrm{ch}\,\beta\tau$, а $F_0=F(0)$ и $F_1=F(\tau)$ — начальные значения ее.

Поскольку арифмометр позволяет вычислять алгебраические суммы произведений чисел без записи промежуточных результатов, то расчет таблиц значений рассматриваемых функций может быть выполнен весьма просто. При этом целесообразно использовать подвижную бумажную полосу с записанными на ней коэффициентами расчетной формулы. Применение этого метода будет показано на примере.

Пусть требуется вычислить таблицу функции

$$F(t)=3{,}654\,\mathrm{ch}\,2{,}145t-1{,}245\,\mathrm{sh}\,2{,}145t$$

при шаге $\tau=0{,}2$. Начальные значения таковы: $F_0=3{,}654$, $F_1=$ $=3{,}44479$, $A=2{,}18689$.

Таким образом теперь можно последовательно одно за другим вычислять значения функции.

t	$F(t)$
0,0	3,65400
0,2	3,44479
0,4	3,87938
0,6	5,03899
0,8	7,14034
1,0	10,57615
1,2	15,98854
1,4	24,3890
1,6	37,3475
1,8	57,2859
2,0	87,9305
2,2	135,008
2,4	207,317
2,6	318,350

—1
2,18689

↓

Для проверки результатов расчета вычислим значение $F(2{,}6) = 318{,}333$.

Сопоставляя этот результат с приведенным в таблице, приходим к заключению, что вычисления проведены удовлетворительно. При округлении табличных значений до трех-четырех значащих цифр ошибки округления не оказывают влияния.

3. Вычисление значений функций вида

$$F\ (t) = Me^{p_1 t} + Ne^{p_2 t}$$

В общем случае значения p_1 и p_2 могут быть комплексными. Однако здесь мы рассмотрим только частный случай, когда они вещественны.

Для составления расчетной (рекуррентной) формулы используем следующий способ — составим уравнение

$$(m - e^{p_1 \tau}) \cdot (m - e^{p_2 \tau}) = 0,$$

которое можно привести к виду

$$m^2 - (e^{p_1 \tau} + e^{p_2 \tau}) \cdot m + e^{(p_1 + p_2)\tau} = 0,$$

а затем произведем замену согласно следующей таблице соответствий

$$m^2 \to F_\nu,\ m \to F_{\nu-1},\ m^0 \to F_{\nu-2}.$$

Тогда рекуррентная формула примет вид

$$F_\nu = A_1 \cdot F_{\nu-1} - A_2 \cdot F_{\nu-2},$$

где

$$A_1 = e^{p_1\tau} + e^{p_2\tau} \quad \text{и} \quad A_2 = e^{(p_1+p_2)\tau}.$$

В случае, когда $p_1 = +\beta$, а $p_2 = -\beta$, получаем формулу, которая использовалась в предыдущем параграфе. Здесь же применим формулу к случаю

$$p_1 = -\alpha_1 \quad \text{и} \quad p_2 = -\alpha_2.$$

Пусть, например, требуется рассчитать таблицу значений функции

$$F(t) = 3{,}125\, e^{-1{,}125t} + 6{,}500\, e^{-2{,}750t}$$

при шаге $\tau = 0{,}2$.

Для выполнения расчетов составим рекуррентную формулу, определив ее коэффициенты

$$A_1 = e^{-0{,}225} + e^{-0{,}550} = 1{,}375466;$$

$$A_2 = e^{-0{,}775} = 0{,}460704.$$

Таким образом, будем иметь

$$F_\nu = 1{,}375466 F_{\nu-1} - 0{,}460704 F_{\nu-2}.$$

Затем подсчитаем значения $F_0 = 9{,}625000$ и $F_1 = 6{,}245537$ и применим тот же способ вычислений, что и раньше. В результате получим таблицу:

t	$F(t)$
0,0	9,625000
0,2	6,245537
0,4	4,156248
0,6	2,839434
0,8	1,990745
1,0	1;430063
1,2	1,049859
1,4	0,785210
1,6	0,596355
1,8	0,458517
2,0	0,355931
2,2	0,278330
2,4	0,218855
2,6	0,172800

—0,460704
1,375466

↓

Для проверки расчета вычислим значение

$$F(2,6)=0,172805.$$

Таким образом, можно считать, что полученная таблица вполне удовлетворительна (следует помнить, что вычисления производились с запасными знаками, которые после окончания расчета можно отбросить).

Для уменьшения влияния ошибок округления можно вычислительный процесс строить иначе, т. е. сначала рассчитать таблицу значений при относительно большом шаге, а затем применить интерполирование по точным формулам, соответствующим именно этим функциям. Например, из полученных выше формул можно найти интерполяционную формулу вида

$$F_{\frac{1}{2}}=\frac{1}{e^{-p_1\Delta t}+e^{-p_2\Delta t}}\cdot F_0+\frac{1}{e^{p_1\Delta t}+e^{p_2\Delta t}}\cdot F_1,$$

где F_0 и F_1 — опорные значения функций, рассчитанные с шагом Δt, а $F_{\frac{1}{2}}$ — промежуточное значение, соответствующее шагу $\frac{\Delta t}{2}$.

Если, например, принять $\Delta t=0,4$, а $\frac{\Delta t}{2}=0,2$, то интерполяционная формула для рассмотренного примера будет такой

$$F_{\frac{1}{2}}=0,334944F_0+0,727026F_1.$$

Эта формула может быть применена для любого участка таблицы значений рассматриваемой функции, рассчитанной с шагом $\Delta t=0,4$. Например, беря в качестве опорных значений $F(0,8)=F_0$ и $F(1,2)=F_1$, по этой формуле найдем $F_{\frac{1}{2}}=$

$$=F(1,0)=1,430063.$$

4. Вычисление таблиц значений тригонометрических функций

Изложенная выше методика расчета таблиц применима и к функциям вида

$$F(t)=a\cdot\cos\omega t+b\cdot\sin\omega t.$$

В данном случае $p_1=j\omega$ и $p_2=-j\omega$. Поэтому расчетной формулой будет следующая

$$F_\nu=2\cdot\cos\omega\cdot\Delta t\cdot F_{\nu-1}-F_{\nu-2},$$

$$\nu=2,\ 3,\ 4\ldots,$$

где Δt — шаг дискретности, т. е. шаг рассчитываемых значений функции. Отсюда же вытекает и интерполяционная формула для определения промежуточных значений функции

$$F_{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2 \cdot \cos \omega\tau} \cdot F_0 + \frac{1}{2 \cos \omega\tau} \cdot F_1.$$

Здесь мы применили иные обозначения для шага, так как предполагается производить вычисления несколько иначе, чем прежде. Именно, сначала рассчитаем таблицу значений функции с шагом Δt, а затем вычислим промежуточные значения с шагом τ, который здесь принят равным половине шага Δt.

Рассмотрим пример вычисления таблицы. Дано

$$F(t) = 6{,}785 \cdot \cos 2{,}415t + 5{,}364 \cdot \sin 2{,}415t.$$

Вычислим сначала последовательность значений этой функции при шаге $\Delta t = 0{,}4$. Тогда расчетной формулой будет

$$F_\nu = 1{,}337189 F_{\nu-1} - F_{\nu-2},$$

а начальными значениями

$$F_0 = 6{,}785000 \text{ и } F_1 = 8{,}270440.$$

Теперь можно рассчитать таблицу для шага $\Delta t = 0{,}4$.

t	$F(t)$
0,0	6,785000
0,4	8,270440
0,8	2,620053
1,2	—5,290945
1,6	—8,636857
2,0	—4,530794
2,4	3,484488
2,8	8,493315

t	$F(t)$
0,2	8,500076
0,6	6,148609
1,0	—1,507946
1,4	—7,863428
1,8	—7,434258
2,2	—0,590729
2,6	6,762488

После этого найдем интерполяционную формулу для шага $\tau = 0{,}2$:

$$F_{\frac{1}{2}} = 0{,}564585 (F_0 + F_1).$$

При помощи этой формулы и найденных выше опорных значений можно вычислить промежуточные значения функции (см. таблицу, расположенную рядом с первой).

Для проверки результатов вычислим с помощью таблиц значения

$F(2{,}4) = 3{,}484489$ и $F(2{,}6) = 6{,}762490$.

Отсюда видно, что при таких вычислениях можно брать меньшее число запасных знаков, так как точность оказывается порядка точности самих таблиц тригонометрических функций.

5. Методика вычисления значений функций вида

$$F(t)=e^{\delta t}(a\cos\omega t+b\sin\omega t)$$

Так как в этом случае $p_1=-\delta+j\omega$ и $p_2=-\delta-j\omega$, то расчетная формула для определения последовательности значений функции при шаге Δt будет иметь вид

$$F_\nu=2\cdot e^{-\delta\cdot\Delta t}\cdot\cos\omega\cdot\Delta t\cdot F_{\nu-1}-e^{-2\delta\cdot\Delta t}\cdot F_{\nu-2}.$$

Таким образом, зная начальные значения функции F_0 и F_1, можно вычислить таблицу значений ее с шагом Δt. Из этой же формулы вытекает и интерполяционная формула для шага τ, равного половине шага Δt:

$$F_{\frac{1}{2}}=\frac{e^{-\delta\tau}}{2\cos\omega\tau}\cdot F_0+\frac{e^{\delta\tau}}{2\cos\omega\tau}\cdot F_1.$$

Эта формула применяется тогда, когда вычислена таблица опорных значений.

Методику расчета значений рассматриваемого вида проиллюстрируем следующим примером. Пусть задано

$$F(t)=e^{-3{,}179t}(1{,}463\cos 2{,}195t+1{,}726\sin 2{,}195t).$$

Если принять $\Delta t=0{,}25$, то рекуррентная формула примет вид

$$F_\nu=0{,}77075F_{\nu-1}-0{,}20403F_{\nu-2}.$$

Кроме того, при помощи таблиц можно определить

$$F_0=1{,}46300 \text{ и } F_1=0{,}97046.$$

Применяя изложенную ранее методику вычислений при помощи арифмометра, рассчитаем следующую таблицу:

t	$F(t)$
0,00	1,46300
0,25	0,97046
0,50	0,44949
0,75	0,14844
1,00	0,02270
1,25	—0,01279
1,50	—0,01449
1,75	—0,00856
2,00	—0,00364

$$\boxed{\begin{array}{r}-0{,}20403\\ 0{,}77075\end{array}}$$
$\downarrow$

t	$F(t)$
0,125	1,24708
0,375	0,68725
0,625	0,27526
0,875	0,07193
1,125	—0,00072
1,375	—0,01523
1,626	—0,01159
1,875	—0,00583

Промежуточные значения вычислялись по формуле

$$F_{\frac{1}{2}} = 0,37440F_0 + 0,72062F_1.$$

Вычислив значение $F(1,875)$, получим

$$F_1(1,875) = -0,00580.$$

Результат свидетельствует о том, что все вычисления проведены с достаточно высокой степенью точности.

6. Применение арифмометра для вычисления значений алгебраических многочленов

Предположим, что требуется рассчитать таблицу значений многочлена

$$F(t) = S_0 + S_1 t + S_2 t^2 + \cdots + S_n t^n$$

с шагом τ. Для этой цели можно воспользоваться рекуррентной формулой, позволяющей определять по $(n+1)$-му начальному значению, вычисленным для равноотстоящих t, нужное число последующих.

Если степень многочлена n, то запишем $n+1$-ую степень бинома

$$(m-1)^{n+1}$$

и вычислим его коэффициенты. Например, в случае $n=3$ будем иметь

$$(m-1)^4 = m^4 - 4m^3 + 6m^2 - 4m + 1.$$

Теперь, заменяя степени m согласно таблице соответствий

$$m^4 \to F_\nu,\ m^3 \to F_{\nu-1},\ m^2 \to F_{\nu-2},\ m \to F_{\nu-3},\ 1 \to F_{\nu-4},$$

получим рекуррентную формулу

$$F_\nu = 4F_{\nu-1} - 6F_{\nu-2} + 4F_{\nu-3} - F_{\nu-4},$$
$$\nu = 4,\ 5,\ 6\ldots$$

позволяющую последовательно вычислять нужные значения с шагом τ, если первые четыре значения определены заранее.

Для упрощения вычисления начальных значений целесообразно их определять как для положительных t, так и для отрицательных t. Таким образом, для вычисления таблицы значений многочлена третьей степени можно вычислить сначала

$$F_{-1} = F(-\tau);\ F_0 = F(0);\ F_1 = F(\tau);\ F_2 = F(2\tau)$$

и использовать их при расчетах по рекуррентной формуле (в этом случае $\nu = 3, 4, 5\ldots$).

Вычислительный процесс становится особенно простым, если применить подвижную бумажную полосу, на которой записываются коэффициенты рекуррентной формулы. Таким образом, передвигая эту бумажную полосу с коэффициентами рядом со столбцом значений многочлена, очень просто производить вычисления с помощью арифмометра без записи промежуточных результатов.

Ниже приведена схема получения биноминальных коэффициентов, т. е. известный арифметический треугольник. Таким образом, числа строки равняются сумме двух чисел, расположенных над данным числом в предыдущей строке.

n									1								
2							1		2		1						
3						1		3		3		1					
4					1		4		6		4		1				
5				1		5		10		10		5		1			
6			1		6		15		20		15		6		1		
7		1		7		21		35		35		21		7		1	
8	1		8		28		56		70		56		28		8		1

Пусть, например, требуется рассчитать последовательность значений многочлена третьей степени

$$F(t) = 1{,}234 + 5{,}678t - 9{,}012t^2 + 3{,}456t^3 \text{ с шагом } \tau = 0{,}5.$$

Методику вычислений построим следующим образом. Сначала рассчитаем таблицу значений с шагом $\Delta t = 1$. Для этого определим начальные значения

$$F_1 = -16{,}912,\ F_0 = 1{,}234,\ F_1 = 1{,}356,\ F_2 = 4{,}190,$$

а затем воспользуемся рекуррентной формулой.

Таким образом будем иметь первый столбец чисел.

Заметим, что последний результат первой таблицы легко проверяется. Действительно $F(10) = 2612{,}814$. Так как коэффициенты рекуррентной формулы при вычислении значений алгебраического многочлена являются целыми числами, то, очевидно, округлений не требуется. Таким образом, если начальные значения имеют три десятичных знака, то и последующие значения будут иметь три десятичных знака. Если, кроме того, начальные значения являются точными числами, то и последующие значения также будут точными.

t	$F(t)$
−1	−16,912
0	1,234
1	1,356
2	4,190
3	30,472
4	100,938
5	236,324
6	457,366
7	784,800
8	1239,362
9	1841,788
10	2612,814

−1
4
−6
4

t	$F(t)$
0,5	2,252
1,5	1,138
2,5	13,104
3,5	58,686
4,5	159,220
5,5	334,842
6,5	606,488
7,5	994,894
8,5	1520,796

Для вычисления промежуточных значений можно воспользоваться интерполяционными формулами. Для многочлена третьей степени точной интерполяционной формулой, позволяющей найти его значение в середине промежутка между соседними значениями, будет формула, вытекающая из той же рекуррентной формулы

$$F_{1^1/_2}=\frac{9(F_1+F_2)-(F_0+F_3)}{16},$$

которую удобнее записать в виде

$$F_{1^1/_2}=0{,}5625\,(F_1+F_2)-0{,}0625\,(F_0+F_3).$$

При помощи этой формулы получена еще одна таблица, расположенная рядом с первой. Если рассматривать две таблицы совместно, то получается искомая таблица с шагом 0,5. Можно продолжить определение промежуточных значений с помощью той же интерполяционной формулы, так как она справедлива для любого шага, так же, как и сама рекуррентная формула.

Для многочленов более высоких степеней приведенная интерполяционная формула будет приближенной. Однако все же она может применяться.

Эту интерполяционную формулу можно применять для вычисления промежуточных значений, соответствующих середине промежутка, и для других функций.

Пусть, например, заданы значения синуса тригонометрического при четырех значениях аргумента

$$\sin 0° = 0,\ \sin 30° = 0{,}5,\ \sin 60° = 0{,}866,\ \sin 90° = 1$$

и требуется вычислить значение $\sin 45°$.

Используя интерполяционную формулу, найдем

$$\sin 45° = 0{,}5625\,(0{,}500 + 0{,}866) - 0{,}0625\,(0 + 1) = 0{,}706.$$

Точное же значение (с тремя десятичными знаками) таково:

$$\sin 45° = 0{,}707.$$

Если бы применялась линейная интерполяция, то мы получили бы

$$\sin 45° = 0{,}5\,(0{,}500 + 0{,}866) = 0{,}683.$$

Легко видеть, что первый результат значительно точнее.

7. Применение арифмометра при интерполировании табличных значений

Существующие таблицы тригонометрических, гиперболических, показательных и других функций обычно составляются таким образом, чтобы допускалась линейная интерполяция. Например, пяти-шестизначные таблицы с аргументом в радианной мере имеют шаг $\tau = 0{,}001$. Поэтому для определения значения функции, заданной при аргументе с четырьмя или большим числом десятичных знаков (соответственно с пятью или шестью), необходимо применить интерполирование.

Если обозначить через F_0 и F_n два соседних табличных значения некоторой функции, через n — целое число, на которое разбивается промежуток между двумя соседними значениями ($n = 10, 100, 1000$) и через ν номер промежуточного значения ($\nu = 1, 2, 3 \ldots n-1$), то формулу линейной интерполяции можно записать в виде

$$F_\nu = \left(1 - \frac{\nu}{n}\right) \cdot F_0 + \frac{\nu}{n} \cdot F_n.$$

Вычисления по этой формуле при наличии арифмометра очень просты. Действительно, пусть из таблиц тригонометрических функций с аргументом в радианной мере выписаны два значения функции $\sin t$:

$$t = 0{,}704 \quad 0{,}64727$$

$$t = 0{,}705 \quad 0{,}64803$$

и требуется вычислить $\sin 0{,}70432$. Очевидно, что в данном случае нужно взять $n = 100$ и $\nu = 32$. Таким образом, будем иметь

$$\sin 0{,}70432 = (1 - 0{,}32) \cdot 0{,}64727 + 0{,}32 \cdot 0{,}64803 = 0{,}64751.$$

Использование арифмометра при таких расчетах весьма целесообразно, так как не требуется ни искать разностей чисел, ни учитывать их знаки, не требуется пользоваться таблицами пропорциональных частей. В случае таблиц тригонометрических функций с аргументом с десятыми, сотыми и т. д. долями градуса также удобно применять подобные расчеты.

Можно показать, что для функций $\sin t$ и $\cos t$ справедлива точная интерполяционная формула подобного же типа

$$F_\nu = A_\nu \cdot F_0 + B_\nu \cdot F_n,$$

где

$$A_\nu = \frac{\sin (n-\nu)\tau}{\sin n\tau} \text{ и } B_\nu = \frac{\sin \nu\tau}{\sin n\tau}.$$

В случае применения таких интерполяционных формул шаг опорных значений таблицы может быть значительно больше, чем в обычных таблицах. Например, если заданными являются значения $\sin t$ и $\cos t$ с шагом $\Delta t = 0{,}1$ (в радианной мере угла) и в таблице опорных значений имеем

	$\sin t$	$\cos t$
$t=1{,}2$	0,932039	0,362358
$t=1{,}3$	0,963558	0,267499,

то при помощи точной формулы указанного выше вида можно вычислить значения этих функций, например при

$t = 1{,}234567$.

Интерполяционная формула в этом случае такова:

$$F_\nu = 0{,}654954 F_0 + 0{,}346178 F_n.$$

В результате вычисления при помощи арифмометра можно получить без записи промежуточных результатов точные значения

$$\sin 1{,}234567 = 0{,}944005, \ \cos 1{,}234567 = 0{,}329930.$$

Линейная интерполяция при таком шаге опорных значений, очевидно, даст совершенно неудовлетворительные результаты

$$\sin 1{,}234567 \cong 0{,}942934, \ \cos 1{,}234567 \cong 0{,}329568.$$

Для гиперболических функций $\operatorname{sh} t$ и $\operatorname{ch} t$ коэффициенты точной интерполяционной формулы выражаются следующим образом:

$$A_\nu = \frac{\operatorname{sh} (n-\nu)\tau}{\operatorname{sh} n\tau}, \ B_\nu = \frac{\operatorname{sh} \nu\tau}{\operatorname{sh} n\tau}.$$

Если заранее составить таблицы этих коэффициентов, то можно получить очень компактные многозначные таблицы. Следует заметить, что та же самая интерполяционная формула оказывается справедливой и для показательных функций e^t и e^{-t}.

Рассмотренные интерполяционные формулы для функций $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{sh} t$, $\operatorname{ch} t$, e^t и e^{-t} могут быть представлены в такой форме

$$F_\nu=\left(1-\frac{\nu}{n}+\alpha\right)\cdot F_0+\left(\frac{\nu}{n}+\beta\right)\cdot F_n,$$

отличающейся от формулы линейной интерполяции наличием поправок α и β, которые могут быть заранее протабулированы. При этом в случае функций $\sin t$ и $\cos t$ эти поправки положительные, а для функций $\operatorname{sh} t$, $\operatorname{ch} t$, e^t и e^{-t} они отрицательные.

Точные интерполяционные формулы могут найти применение при вычислении значений функций с помощью таблиц, которые не допускают линейной интерполяции.

8. О вычислении коэффициентов рядов Фурье

Рядом Фурье, как известно, называется тригонометрический ряд вида

$$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty} a_k\cdot\cos 2k\pi\cdot\frac{t}{T}+\sum_{k=1}^{\infty} b_k\cdot\sin 2k\pi\cdot\frac{t}{T}$$

при условии, что коэффициенты a_0, a_k и b_k определяются формулами

$$a_0=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot dt;$$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\cos 2k\pi\frac{t}{T}\,dt;$$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cdot\sin 2k\pi\frac{t}{T}\,dt;$$

T — период.

Во многих практических случаях функция $f(t)$ задается графически или в виде таблицы. Поэтому представляет интерес численный метод определения коэффициентов Фурье. Наиболее просто в этом случае с помощью рекуррентных формул вида

$$F_{\nu+2}=2\cdot\cos 2k\pi\cdot\frac{\tau}{T}\cdot F_{\nu+1}-F_\nu$$

вычислить последовательности значений тригонометрических функций cos и sin для того же шага τ, что и шаг заданной функции $f(t)$, а затем для вычисления интегралов воспользоваться какой-либо из квадратурных формул. Чаще всего для этой цели берут формулу трапеций или же формулу Симпсона.

Так, если период разбить на n равных частей (возьмем n четным), причем значения функции $f(t)$ обозначить через f_ν, тогда значения произведений f_ν на соответствующие значения косинусов или синусов можно обозначить через F_ν. При таком обозначении формула трапеций даст следующие выражения для коэффициентов:

$$\left.\begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix}\right\} = \frac{2}{n}\left[\frac{F_0}{2} + F_1 + F_2 + F_3 + \cdots + F_{n-1} + \frac{F_n}{2}\right],$$

где $F_\nu = f_\nu \cdot \cos\frac{2\pi}{n}\cdot k\cdot\nu$ или $F_\nu = f_\nu \cdot \sin\frac{2\pi}{n}\cdot k\cdot\nu$.

При вычислении тех же коэффициентов по формуле Симпсона получим

$$\left.\begin{matrix} a_k \\ b_k \end{matrix}\right\} = \frac{4}{3\cdot n}\left[\frac{F_0}{2} + 2F_1 + F_2 + 2F_3 + F_4 + \cdots + 2F_{n-1} + \frac{F_n}{2}\right].$$

Для удобства вычислений можно заранее подготовить таблицы для вычислений коэффициентов a_k и b_k. Приведенные ниже таблицы предназначены для расчетов в случае разбиения периода функции на 18 равных частей.

Порядок вычислений с помощью арифмометра оказывается весьма простым. Необходимо лишь в графу f_ν внести значение рассматриваемой функции и при помощи арифмометра вычи-

Таблица для вычисления коэффициентов a_k

ν	f_ν	cos 20° ν	cos 40° ν	cos 60° ν	cos 80° ν	cos 100° ν
0		1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1		0,940	0,766	0,500	0,174	—0,174
2		0,766	0,174	—0,500	—0,940	—0,940
3		0,500	—0,500	—1,000	—0,500	0,500
4		0,174	—0,940	—0,500	0,766	0,766
5		—0,174	—0,940	0,500	0,766	—0,766
6		—0,500	—0,500	1,000	—0,500	—0,500
7		—0,766	0,174	0,500	—0,940	0,940
8		—0,940	0,766	—0,500	0,174	0,174
9		—1,000	1,000	—1,000	1,000	—1,000
10		—0,940	0,766	—0,500	0,174	0,174
11		—0,766	0,174	0,500	—0,940	0,940
12		—0,500	—0,500	1,000	—0,500	—0,500
13		—0,174	—0,940	0,500	0,766	—0,766
14		0,174	—0,940	—0,500	0,766	0,766
15		0,500	—0,500	—1,000	—0,500	0,500
16		0,766	0,174	—0,500	—0,940	—0,940
17		0,940	0,766	0,500	0,174	—0,174
18		1,000	1,000	1,000	1,000	1,000

Таблица для вычисления коэффициентов b_k

ν	f_ν	$\sin 20°\nu$	$\sin 40°\nu$	$\sin 60°\nu$	$\sin 80°\nu$	$\sin 100°\nu$
0		0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
1		0,342	0,643	0,866	0,985	0,985
2		0,643	0,985	0,866	0,342	—0,342
3		0,866	0,866	0,000	—0,866	—0,866
4		0,985	0,342	—0,866	—0,643	0,643
5		0,985	—0,342	—0,866	0,643	0,643
6		0,866	—0,866	0,000	0,866	—0,866
7		0,643	—0,985	0,866	—0,342	—0,342
8		0,342	—0,643	0,866	—0,985	0,985
9		0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
10		—0,342	0,643	—0,866	0,985	—0,985
11		—0,643	0,985	—0,866	0,342	0,342
12		—0,866	0,866	0,000	—0,866	0,866
13		—0,985	0,342	0,866	—0,643	—0,643
14		—0,985	—0,342	0,866	0,643	—0,643
15		—0,866	—0,866	0,000	0,866	0,866
16		—0,643	—0,985	—0,866	—0,342	0,342
17		—0,342	—0,643	—0,866	—0,985	—0,985
18		0,000	0,000	0,000	0,000	0,000

слить алгебраические суммы произведений чисел в соответствии с приведенными выше расчетными формулами. Так, для формулы трапеций большая часть слагаемых будет представлять просто произведение

$$F_\nu = f_\nu \cdot \cos \frac{2\pi}{n} \cdot k \cdot \nu \quad \text{или} \quad F_\nu = f_\nu \cdot \sin \frac{2\pi}{n} \cdot k \cdot \nu$$

В формуле Симпсона потребуется произвести домножение некоторых членов на 2, что делается в уме.

Пример.

Пусть требуется вычислить три первых коэффициента Фурье для функции $f(t) = \left| \sin \pi \frac{t}{T} \right|$, график которой показан на рис. 2. При вычислениях будем пользоваться приведенными

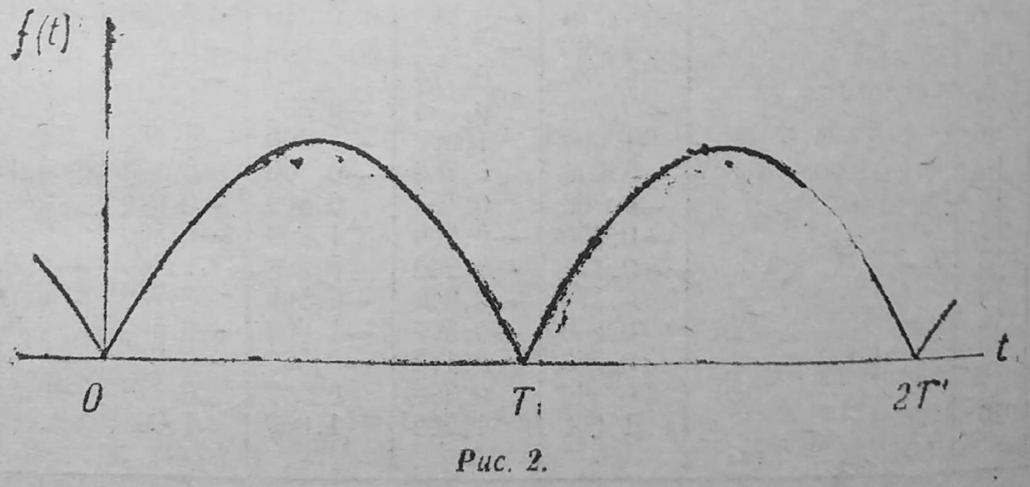


Рис. 2.

выше квадратурными формулами трапеций и Симпсона. Использованные при расчетах значения заданной функции f, таковы:

0.	0,000
1.	0,174
2.	0,342
3.	0,500
4.	0,643
5.	0,766
6.	0,866
7.	0,940
8.	0,985
9.	1,000
10.	0,985
11.	0,940
12.	0,866
13.	0,766
14.	0,643
15.	0,500
16.	0,342
17.	0,174
18.	0,000

Эти значения выписываются на полоску бумаги, которая прикладывается к таблице для вычисления коэффициентов a_k.

Коэффициент	Значение, полученное по формуле трапеций	Значение, полученное по формуле Симпсона	Действит. значение
a_0	1,270	1,273	1,2732
a_1	—0,417	—0,424	—0,4244
a_3	—0,088	—0,084	—0,0849

Результаты расчетов сведены в таблицу, где в последней графе для сравнения указаны действительные величины этих коэффициентов с четырьмя десятичными знаками.

9. О вычислении свертки функций

Сверткой двух функций $f(t)$ и $g(t)$ называется функция $\varphi(t)$, выражаемая с помощью интеграла

$$\varphi(t) = \int_0^t f(x) \cdot g(t-x)\,dx.$$

С помощью подобного интеграла выражается, например, реакция линейной электрической цепи на воздействие вида $f(t)$ при условии, что известной является реакция этой цепи $g(t)$ на воздействие вида δ-функции. В этом случае функция $g(t)$ носит название импульсной переходной функции цепи.

Если ввести следующие обозначения значений функций $f(t)$ и $g(t)$ при шаге τ

$$f(0)=f_0,\ \ f(\tau)=f_1,\ \ f(2\tau)=f_2, \ldots,\ f(\nu\tau)=f_\nu$$
$$g(0)=g_0,\ \ g(\tau)=f_1,\ \ g(2\tau)=g_2, \ldots,\ g(\nu\tau)=g_\nu,$$

то на основании квадратурной формулы трапеций будем иметь

$$\varphi(0)=0;$$

$$\varphi(\tau)=\tau\left(\frac{f_0 g_1}{2}+\frac{f_1\cdot g_0}{2}\right);$$

$$\varphi(2\tau)=\tau\left(\frac{f_0 g_2}{2}+f_1\cdot g_1+\frac{f_2\cdot g_0}{2}\right):$$

. . . .

$$\varphi(\nu\tau)=\tau\left(\frac{f_0 g_\nu}{2}+f_1\cdot g_{\nu-1}+f_2\cdot g_{\nu-2}+\cdots+f_{\nu-1}\cdot g_1+\frac{f_\nu g_0}{2}\right).$$

Для удобства вычислений целесообразно последовательность значений функции $f(t)$ записать на неподвижной бумажной ленте слева направо, а последовательность значений функции на подвижной бумажной ленте справа налево, выдерживая те же расстояния между числами, что и на первой ленте. Расположение этих чисел на двух бумажных лентах схематически показано ниже

$$\begin{array}{cccccccccc} & & & & f_0 & f_1 & f_2 & f_3 & f_4 & f_5 \\ \hline g_4 & g_3 & g_2 & g_1 & g_0 & \rightarrow & & & & \end{array}$$

Вычислительный процесс становится особенно простым, если значения g_0 и f_0 равны нулю. Тогда, пользуясь арифмометром, необходимо производить суммирование произведений чисел, расположенных друг над другом при заданном положении бумажных полос. Затем подвижная бумажная полоса передвигается на один шаг вправо, и вычисления продолжаются. После этого бумажная полоса снова продвигается на один шаг вправо и т. д. Таким образом можно легко вычислить последовательность значений функции $\varphi(t)$.

Глава III

О ВЫЧИСЛЕНИЯХ ПРИ ПОМОЩИ АРИФМОМЕТРА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СПЕЦИАЛЬНОГО ТРАФАРЕТА

Ряд вычислений, производимых при помощи арифмометра, связан с перемножением многочленов, с делением их, а также с разложением рациональных дробей в ряды. Эти операции становятся особенно простыми, если применить специальный трафарет, конструкция которого описана ниже.

1. Конструкция трафарета для выполнения операций умножения и деления многочленов при помощи арифмометра

Предположим, что нужно перемножить два многочлена

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$$

и

$$c_0x^l + c_1x^{l-1} + c_2x^{l-2} + \cdots + c_l.$$

Эту операцию проще всего осуществить, записав многочлены на двух полосках бумаги: один на неподвижной, а второй на подвижной, т. е. так, как показано ниже

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n$$

$$\boxed{c_l + \cdots + c_2x^{l-2} + c_1x^{l-1} + c_0x^l} \rightarrow$$

Перемножая соответствующие коэффициенты и группируя члены с одинаковыми степенями x, получим полином степени $m=n+l$

$$b_0\cdot x^m + b_1\cdot x^{m-1} + b_2\cdot x^{m-2} + \cdots + b_m,$$

коэффициенты которого выражаются через коэффициенты a_k и c_k следующим образом

$$b_0 = c_0;$$

$$b_1 = c_1 + a_1c_0;$$

$$b_2 = c_2 + a_1c_1 + a_2c_0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_m = a_nc_l.$$

Для того, чтобы произвести деление многочленов, расположенных по убывающим степеням x, можно воспользоваться формулами, полученными выше в результате умножения. Таким образом, если требуется выполнить деление

$$\frac{b_0 \cdot x^m + b_1 \cdot x^{m-1} + b_2 \cdot x^{m-2} + \cdots + b_m}{x^n + a_1 \cdot x^{n-1} + a_2 \cdot x^{n-2} + \cdots + a_n} = c_0 x^l + c_1 x^{l-1} + c_2 x^{l-2} + \cdots + c_l,$$

то необходимо коэффициенты c_k определить по формулам:

$$c_0 = b_0;$$

$$c_1 = b_1 - a_1 c_0;$$

$$c_2 = b_2 - a_1 c_1 - a_2 c_0;$$

$$c_3 = b_3 - a_1 c_2 - a_2 c_1 - a_3 c_0;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_l = -a_1 c_{l-1} - a_2 c_{l-2} - a_3 c_{l-3} - \cdots - c_n a_{l-n}.$$

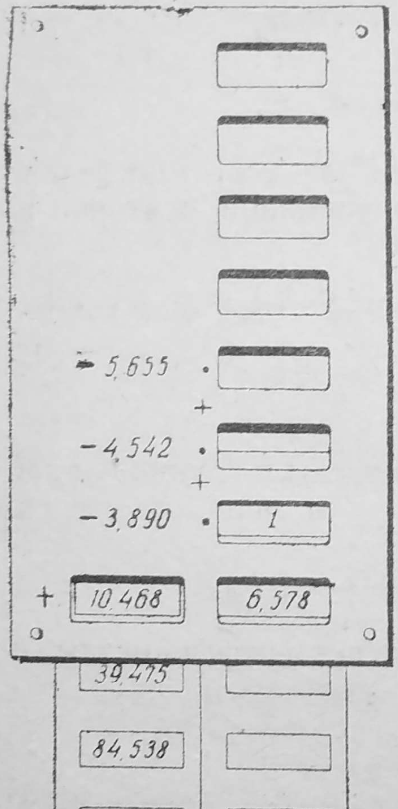


Рис. 3.

Предлагаемый трафарет (рис. 3) позволяет полностью автоматизировать процесс образования нужной комбинации чисел. Этот трафарет представляет собой пластинку из белого целлулоида с прямоугольными вырезами — окнами. Пластинка с окнами укрепляется на другой пластинке — основании трафарета — таким образом, что между ними может свободно перемещаться бумажная лента или же пластинка из белого целлулоида. Указанная подвижная часть трафарета должна быть размечена для того, чтобы при ее перемещении выдерживался постоянный шаг (можно для этой цели применить специальное устройство с пружинкой — фиксатором).

Рассмотрим сначала процесс умножения многочленов. Для этого коэффициенты одного из сомножителей, начиная с a_1 (коэффициент a_0 считается равным единице) и т. д., выписываются на неподвижной части трафарета снизу вверх. Коэффициенты другого многочлена записываются столбцом, начиная с c_0, вниз на правой части подвижной линейки. На рис. 4 показана запись указанных коэффициентов. Заметим, что при записи коэффициентов на подвижной части трафарета необходимо соблюдать определенный промежуток между строками, равный расстоянию между окнами трафарета.

Если теперь ввести подвижную часть (бумажную ленту) так, чтобы коэффициент появился в нижнем правом окне трафарета, то в левом окне можно сделать запись $b_0 = c_0$. Затем подвижная линейка перемещается на один шаг вверх и производится вычисление коэффициента b_1, который записывается на ленте через нижнее левое окно. Таким образом определяются все коэффициенты b_k — лента продвигается на один шаг, и при помощи арифмометра выполняются указанные на трафарете операции.

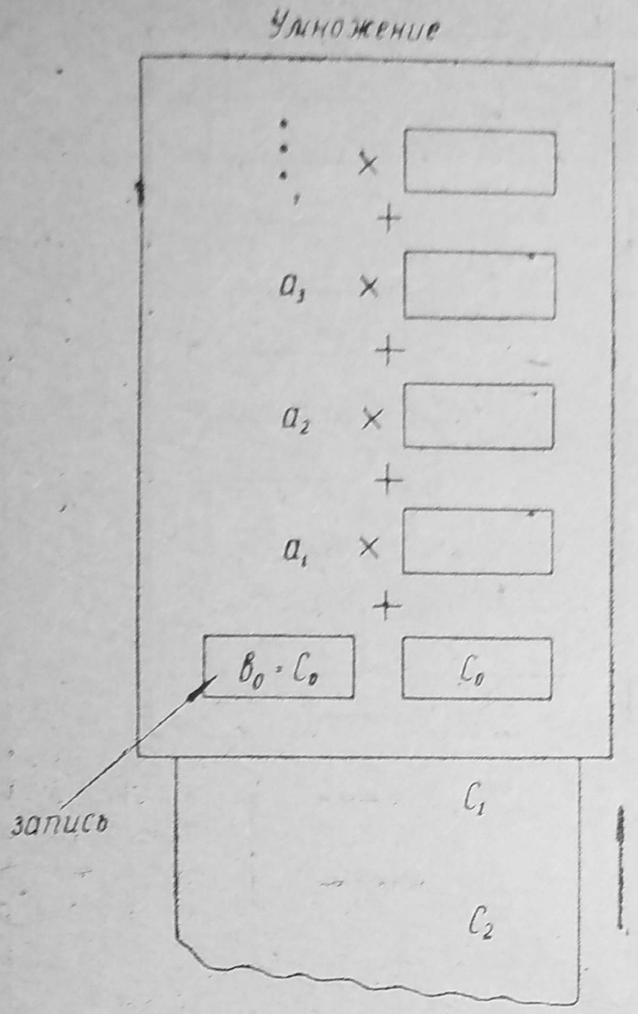


Рис. 4.

Приведем пример умножения многочленов. Пусть заданы два многочлена

$$x^4 + 6{,}578x^3 + 9{,}345x^2 + 12{,}654x + 1{,}395$$

и

$$x^3 + 3{,}890x^2 + 4{,}542x + 5{,}655$$

и требуется найти их произведение.

Если воспользоваться изложенной выше методикой, то получим очень быстро следующий результат (заметим, что промежуточные значения при использовании арифмометра не записываются), который будет записан на бумажной ленте

$$x^7 + 10{,}468x^6 + 39{,}475x^5 + 84{,}538x^4 + 130{,}263x^3 + \\ + 115{,}747x^2 + 77{,}894x + 7{,}889.$$

Однако значительно больший эффект применения трафарета проявляется при выполнении операции деления многочленов.

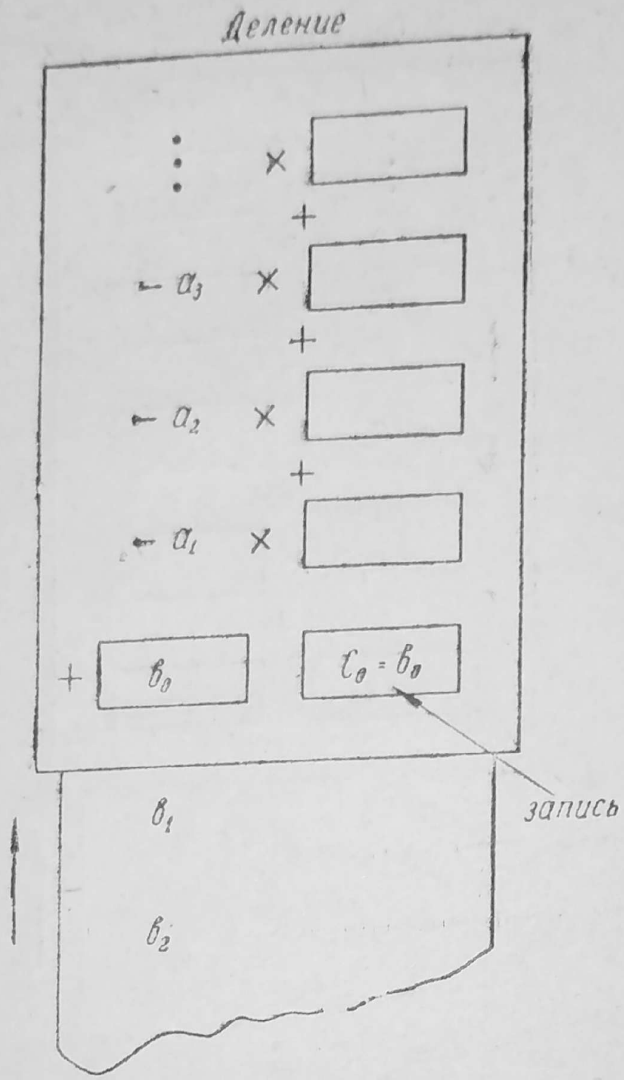


Рис. 5.

Для того, чтобы произвести деление вида

$$\frac{b_0x^m+b_1x^{m-1}+}{x^n+a_1x^{n-1}+}\cdots$$

$$\cdots\frac{+b_2x^{m-2}+\cdots+b^m}{+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n},$$

необходимо коэффициенты многочлена знаменателя, начиная с $-a_1$, записать с обратными знаками на неподвижной части трафарета рядом о окнами столбцом вверх (см. рис. 5). Коэффициенты же многочлена числителя записываются на левой стороне бумажной полосы, начиная с b_0, столбцом вниз (рис. 5). После введения бумажной ленты в трафарет, когда в нижнем левом окне появится коэффициент b_0, через нижнее правое окно записываем первый коэффициент частного, т. е.

$$c_0=b_0.$$

Затем бумажная лента продвигается на один шаг вверх, и выполняются указанные на трафарете действия. Результат опять записывается на бумажной ленте через нижнее правое окно. Далее лента вновь протягивается на один шаг и т. д. Если многочлены делятся без остатка, то после некоторого этапа деления результатами вычислений будут нули. Если же получается остаток, то деление можно продолжать, и результатом будет являться ряд, расположенный по убывающим степеням x.

Рассмотрим пример деления многочленов. Пусть дано

$$\frac{x^7+10,468x^6+39,475x^5+84,538x^4+130,263x^3+115,747x^2+77,894x+7,889}{x^3+3,890x^2+4,542x+5,655}.$$

Если применить изложенный способ деления при помощи трафарета, то окончательный результат можно получить за 5—6 минут:

$$x^4+6,578x^3+9,345x^2+12,654x+1,395.$$

Указанная схема деления, представляющая обобщение схемы Горнера, является очень удобной и несоизмеримо лучшей, чем обычный способ деления «под углом».

2. Методика разложения рациональных дробей в ряды

Описанный выше трафарет позволяет весьма просто находить коэффициенты рядов, расположенных как по убывающим степеням x, так и по возрастающим степеням этой переменной. Пусть, например, требуется разложить дробь

$$f(x)=\frac{1}{x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n}$$

в ряд по убывающим степеням x.

Для разложения такой дроби можно пользоваться только правой частью трафарета, так как первым коэффициентом, который записывается в нижнем правом окне трафарета, будет единица, а все последующие коэффициенты будут определяться по рекуррентной формуле

$$S_\nu=-a_1S_{\nu-1}-a_2S_{\nu-2}-\cdots-a_nS_{\nu-n},$$

$$S_0=S_1=\cdots=S_{n-2}=0,\quad S_{n-1}=1.$$

Таким образом, при помощи арифмометра легко получается разложение вида

$$f(x)=\frac{1}{x^n}+\frac{S_n}{x^{n+1}}+\frac{S_{n+1}}{x^{n+2}}+\cdots$$

Подобные разложения часто встречаются в операционном исчислении при нахождении оригиналов по так называемой первой теореме разложения.

Методика разложения в ряды такого типа и других правильных дробей выполняется точно так же, как и обычное деление. Если требуется произвести разложение дроби в ряд по возрастающим степеням x, то многочлен знаменателя дроби целесообразно представлять в такой форме, чтобы коэффициент при нулевой степени переменной (т. е. свободный член) равнялся единице

$$1+\frac{a_{n-1}}{a_n}\cdot x+\frac{a_{n-2}}{a_n}\cdot x^2+\cdots+\frac{1}{a_n}\cdot x^n.$$

Деление в этом случае осуществляется при расположении многочленов числителя и знаменателя по возрастающим степеням x, т. е. в виде

$$f(x)=\frac{b_m+b_{m-1}x+b_{m-2}x^2+\cdots+b_0x^m}{1+\alpha_{n-1}x+\alpha_{n-2}x^2+\cdots+\alpha_0x^n}.$$

Теперь деление можно производить при помощи трафарета точно так же, как и раньше. В результате получится разложение вида

$$f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \cdots + c_\nu x^\nu + \ldots$$

Коэффициенты этого ряда связываются между собой следующим линейным соотношением

$$c_\nu = -a_{n-1}c_{\nu-1} - a_{n-2}c_{\nu-2} - \cdots - a_0c_{\nu-n}.$$

Таким образом, любое число коэффициентов может быть последовательно вычислено по n первым коэффициентам.

3. Вычисление приближенных значений корней уравнений высоких степеней (метод Бернулли)

При решении уравнений высоких степеней большое значение имеет знание их приближенных значений. Если же корни уравнения значительно отличаются друг от друга по модулю, то весьма просто получить их значения, близкие к точным. Пока мы не будем рассматривать полностью вопрос о вычислении корней уравнений высоких степеней, а ограничимся лишь методикой определения приближенных их значений по методу выделения корней с наибольшим и с наименьшим модулем.

Предположим, что требуется определить наибольший по модулю вещественный корень уравнения (предполагается, что такой корень имеется и что он является наибольшим *среди всех* корней уравнения)

$$x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n = 0.$$

Для этой цели произведем разложение дроби, знаменателем которой является заданный многочлен, а числителем — производная этого многочлена, в ряд по отрицательным степеням x

$$\frac{n\cdot x^{n-1} + (n-1)\,a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}}{x^n + a_1\cdot x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_n} =$$

$$= \frac{n}{x} + \frac{S_1}{x^2} + \frac{S_2}{x^3} + \cdots + \frac{S_\nu}{x^{\nu+1}} + \frac{S_{\nu+1}}{x^{\nu+2}} + \cdots$$

Такое разложение весьма просто выполняется при помощи арифмометра с использованием описанного трафарета.

При достаточно больших ν в случае наличия вещественного корня уравнения между коэффициентами ряда будет наблюдаться пропорциональность. Беря отношение двух соседних коэффициентов (последующего к предыдущему), найдем приближенное значение этого корня, т. е.

$$x_1 \approx \frac{S_{\nu+1}}{S_\nu}.$$

Пусть, например, задано уравнение четвертой степени

$$x^4+18x^3+57x^2+190x+150=0.$$

Если найти разложение дроби

$$\frac{4x^3+54x^2+114x+190}{x^4+18x^3+57x^2+190x+150}$$

в ряд по отрицательным степеням x, то получим последовательность коэффициентов (сам ряд записывать не нужно):

$$4;\ -18;\ 210;\ -3324:50682;\ -760008...$$

Если проследить за отношениями этих коэффициентов, т. е.

$$-\frac{18}{4}=-4{,}5;\quad -\frac{210}{18}=-11{,}67;\quad -\frac{3324}{210}=-15{,}8;$$

$$-\frac{50\,682}{3324}=-15{,}25;\quad -\frac{760\,008}{50\,682}=-14{,}996\ldots,$$

то легко заметить, что это отношение имеет один и тот же знак, а по абсолютному значению оно приближается к числу, близкому к 15. Действительное значение корня — 15.

Если имеется вещественный корень, который является наименьшим из всех корней по модулю, то необходимо произвести разложение дроби по возрастающим степеням x. Тогда, беря отношение двух соседних коэффициентов (предыдущего к последующему), найдем приближенное значение этого корня. Таким образом, если разложение дроби в ряд по положительным степеням x имеет вид

$$c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_{\nu-1}x^{\nu-1}+c_\nu x^\nu+\cdots,$$

то приближенное значение рассматриваемого корня определится отношением

$$x_2\cong\frac{c_{\nu-1}}{c_\nu}$$

при достаточно больших ν.

Рассмотрим пример определения наименьшего корня того же уравнения. Для этого произведем разложение дроби

$$\frac{1{,}2667+0{,}7600x+0{,}3600x^2+0{,}0267x^3}{1+1{,}2667x+0{,}38000x^2+0{,}1200x^3+0{,}0067x^4}$$

в ряд по возрастающим степеням x. Тогда получим последовательность коэффициентов c_ν:

$$1{,}2667;\ -0{,}8445;\ 0{,}9484;\ -1{,}0057;\ 1{,}0064.$$

Если взять отношение последней пары коэффициентов, т. е. вычислить:

$$x_2=-\frac{1{,}0057}{1{,}0064}=-0{,}9093,$$

то это число можно принять за приближенное значение наименьшего по модулю корня (действительная величина $x_2 = -1$).

После вычисления двух корней уравнения четвертой степени остается решить квадратное уравнение

$$x^2+2{,}005x+9{,}949=0.$$

Если при рассмотрении коэффициентов рядов, расположенных по убывающим или возрастающим степеням x оказывается, что простой пропорциональности нет, то это будет свидетельствовать о том, что наибольшими по модулю (или наименьшими по модулю) корнями являются комплексно-сопряженные корни. В этом случае приближенные значения их можно вычислить при помощи уравнений

$$\begin{vmatrix} S_\nu & S_{\nu+1} & S_{\nu+2} \\ S_{\nu+1} & S_{\nu+2} & S_{\nu+3} \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix}=0$$

(наибольшие по модулю корни)
или

$$\begin{vmatrix} C_\nu & C_{\nu+1} & C_{\nu+2} \\ C_{\nu+1} & C_{\nu+2} & C_{\nu+3} \\ x^2 & x & 1 \end{vmatrix}=0$$

(наименьшие по модулю корни).

Пусть, например, задано уравнение четвертой степени

$$x^4+2x^3+11x^2+10x+9=0.$$

Вычислив коэффициенты разложения дроби

$$\frac{4x^3+6x^2+22x+10}{x^4+2x^3+11x^2+10x+9}$$

в ряд, расположенный по убывающим степеням x, получим 4; —2; —18; 28; 126; —362...
Затем составим уравнение

$$\begin{vmatrix} -18 & 28 & 126 \\ 20 & 126 & -362 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix}=0,$$

которое можно записать так

$$x^2+0{,}979x+8{,}523=0.$$

Это квадратное уравнение и будет содержать пару комплексно сопряженных корней заданного уравнения, которые по *модулю превосходят остальные корни* уравнения четвертой степени.

Для исключения этих корней из заданного уравнения необходимо произвести деление соответствующих многочленов, расположенных по *возрастающим степеням* x, т. е. найти отношение

$$\frac{9+10x+11x^2+2x^3+x^4}{8,523+0,979x+x^2},$$

Так как в результате деления получается ряд, то ограничимся тремя членами

$$1,056+1,052x+1,046x^2$$

и отсюда, поделив все коэффициенты на коэффициент при старшей степени x, найдем остающееся уравнение:

$$x^2+1,006x+1,009=0.$$

4. Методика нахождения уточненных значений корней уравнений высоких степеней

Существуют различные способы уточнения значений корней, приближенные значения которых известны. Все они основываются на том или ином способе последовательных приближений. В данном случае предлагается способ, который достаточно быстро приводит к окончательному результату.

Предположим, что найдено приближенное значение вещественного корня, который является наибольшим среди всех корней заданного уравнения по модулю. Если теперь произвести деление заданного многочлена на двучлен $x-x_1$ при расположении их по *возрастающим степеням* x, то можно получить многочлен степени на единицу меньше, чем исходный. Таким образом получим

$$\frac{a_n+a_{n-1}\cdot x+\cdots+a_1\cdot x^{n-1}+x^n}{-x_1+x}=\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2}x+\cdots+\alpha_0x^{n-1}.$$

После этого будем разлагать в ряд *по убывающим степеням* x отношение

$$\frac{\alpha_0x^{n-1}+\alpha_1x^{n-2}+\cdots+\alpha_{n-1}}{x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots a_n},$$

по коэффициентам которого, как и прежде, будем искать уточненное значение корня x_1, который, напомним, является наибольшим по модулю среди всех корней заданного уравнения.

Для пояснения этого метода обратимся к тому же уравнению, что и прежде

$$x^4+18x^3+57x^2+190x+150=0,$$

приближенное значение наибольшего по модулю корня которого уже найдено $x_1=-15,25$ (здесь взято предпоследнее из

Для исключения этих корней из заданного уравнения необходимо произвести деление соответствующих многочленов, расположенных по *возрастающим степеням* x, т. е. найти отношение

$$\frac{9+10x+11x^2+2x^3+x^4}{8{,}523+0{,}979x+x^2}.$$

Так как в результате деления получается ряд, то ограничимся тремя членами

$$1{,}056+1{,}052x+1{,}046x^2$$

и отсюда, поделив все коэффициенты на коэффициент при старшей степени x, найдем остающееся уравнение:

$$x^2+1{,}006x+1{,}009=0.$$

4. Методика нахождения уточненных значений корней уравнений высоких степеней

Существуют различные способы уточнения значений корней, приближенные значения которых известны. Все они основываются на том или ином способе последовательных приближений. В данном случае предлагается способ, который достаточно быстро приводит к окончательному результату.

Предположим, что найдено приближенное значение вещественного корня, который является наибольшим среди всех корней заданного уравнения по модулю. Если теперь произвести деление заданного многочлена на двучлен $x-x_1$ при расположении их по *возрастающим степеням* x, то можно получить многочлен степени на единицу меньше, чем исходный. Таким образом получим

$$\frac{a_n+a_{n-1}\cdot x+\cdots+a_1\cdot x^{n-1}+x^n}{-x_1+x}=\alpha_{n-1}+\alpha_{n-2}x+\cdots+\alpha_0 x^{n-1}.$$

После этого будем разлагать в ряд *по убывающим степеням* x отношение

$$\frac{\alpha_0 x^{n-1}+\alpha_1 x^{n-2}+\cdots+\alpha_{n-1}}{x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots a_n},$$

по коэффициентам которого, как и прежде, будем искать уточненное значение корня x_1, который, напомним, является наибольшим по модулю среди всех корней заданного уравнения.

Для пояснения этого метода обратимся к тому же уравнению, что и прежде

$$x^4+18x^3+57x^2+190x+150=0,$$

приближенное значение наибольшего по модулю корня которого уже найдено $x_1=-15{,}25$ (здесь взято предпоследнее из найденных значений с целью показать эффективность метода уточнения).

В результате деления по указанному способу получим

$$\frac{150+190x+57x^2+18x^3+x^4}{15,25+x}=9,836+11,814x+$$
$$+2,963x^2+0,986x^3\ldots$$

Теперь будем искать уточненное значение корня x_1 по коэффициентам ряда, представляющего собой разложение дроби

$$\frac{0,986x^3+2,963x^2+11,814x+9,836}{x^4+18x^3+57x^2+190x+150}.$$

Последовательность указанных коэффициентов такова:

0,986; —14,785; 221,742; —3326,115...

Этого количества коэффициентов ряда достаточно, чтобы убедиться в том, что процесс уточнения идет достаточно быстро. Действительно, отношения двух соседних коэффициентов дают:

$$x_1=-14,995;\ x_1=-14,998;\ x_1=-14,9999.$$

Таким образом, с точностью до четвертого десятичного знака будем иметь

$$x_1=-15,000.$$

Теперь, очевидно, можно было бы снизить степень уравнения до третьей и решать уравнение по тому способу, который описан в первой главе. Однако здесь мы покажем, что уточнение корней можно начинать и с наименьшего по модулю вещественного корня. Эту методику рассмотрим на том же примере.

Так как приближенное значение наименьшего по модулю корня $x_2=-0,9993$, то в результате деления заданного многочлена на двучлен $x+0,9993$ при расположении их *по убывающим степеням* x получим многочлен третьей степени

$$x^3+17,0007x^2+40,0112x+150,0168.$$

Теперь легко найти уточненное значение наименьшего по модулю корня, разлагая дробь

$$\frac{150,0168+40,0112x+17,0007x^2+x^3}{150+190x+57x^2+18x^3+x^4}$$

в ряд *по возрастающим степеням* x. Коэффициентами этого ряда будут:

1,00011; —1,00006; 1,00004...

Таким образом, отношения двух соседних коэффициентов (предыдущего к последующему) будут равны:

$$x_2=-1,00005;\ x_2=-1,00002.$$

Естественно, что можно принять

$$x_2 = -1{,}0000.$$

Уточнение комплексных корней производится совершенно аналогичным способом. Например, если найдем трехчлен, содержащий приближенные значения комплексных корней с наибольшим модулем, то после деления заданного многочлена на этот трехчлен при расположении их по возрастающим степеням можно получить многочлен, который будет иметь степень на две единицы меньшую, чем исходный. Если теперь произвести разложение дроби, знаменателем которой является заданный многочлен, а числителем только что упомянутый многочлен на две единицы меньшей степени, то по коэффициентам ряда, расположенного по убывающим степеням x, можно определить уточненные значения комплексных корней.

В предыдущем параграфе рассматривалось уравнение

$$x^4+2x^3+11x^2+10x+9=0$$

и был найден трехчлен

$$x^2+0{,}979x+8{,}523,$$

содержащий наибольшие по модулю комплексные корни. Там же был получен и результат деления

$$1{,}056+1{,}052x+1{,}046x^2$$

двух указанных многочленов.

Теперь следует произвести разложение дроби

$$\frac{1{,}046x^2+1{,}052x+1{,}056}{x^4+2x^3+11x^2+10x+9}$$

в ряд по убывающим степеням x. Первые коэффициенты этого ряда таковы:

$$1{,}046;\ -1{,}040;\ -8{,}370;\ 17{,}720;\ 57{,}616\ldots$$

По последним четырем коэффициентам можно составить уравнение

$$\begin{vmatrix} -1{,}040 & -8{,}370 & 17{,}720 \\ -8{,}370 & 17{,}720 & 57{,}616 \\ 1 & x & x^2 \end{vmatrix} = 0,$$

которое приводится к виду

$$x^2+0{,}999x+8{,}999=0.$$

Это уравнение и определит искомые корни (заметим, что оно весьма близко к точному $x^2+x+9=0$).

В заключение отметим, что в случае, если итерационный процесс сходится очень медленно, что свидетельствует о блиности корней по модулю, целесообразно воспользоваться подстановкой

$$x = y + \delta,$$

где δ некоторое число порядка коэффициента a_1 уравнения и таким образом изменить расположение корней. Первые приближения можно искать в результате разложения дробей вида

$$\frac{1}{y^n + b_1 y^{n-1} + \cdots + b_n}$$

с последующим применением метода уточнения корней, изложенного в данном параграфе.

5. Методика разложения дробей на элементарные дроби

Весьма часто возникает задача разложить правильную дробь вида

$$\frac{b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-2} x + b_{n-1}}{x^n + a_1 x^{n-1} + a_2 x^{n-2} + \cdots + a_n}$$

на элементарные дроби вида

$$\frac{A}{x + \alpha} \quad \text{и} \quad \frac{Bx + C}{x^2 + \beta x + \gamma}.$$

Эта задача, в принципе, может быть решена по методу неопределенных коэффициентов, однако практически этот метод неудобен, так как требует решения системы уравнений.

Будем решать задачу разложения заданной дроби на элементарные путем последовательного выделения простых дробей, т. е. положим, что сначала выделяется дробь, соответствующая простому вещественному корню знаменателя дроби. Имеем

$$\frac{b_0 x^{n-1} + b_1 x^{n-2} + \cdots + b_{n-1}}{x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n} = \frac{A}{x + \alpha} + \frac{B_0 x^{x-1} + \cdots + B_{n-2}}{x^{n-1} + \alpha_1 \cdot x^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}}.$$

Если теперь умножить обе части равенства на многочлен знаменателя остающейся дроби (вторая дробь в правой части равенства), а затем произвести разложение получающихся неправильных дробей в ряды по убывающим степеням x, то будем иметь

$$b_0 x^{n-2} + \cdots + c_{n-2} + \frac{c_{n-1}}{x} + \cdots =$$

$$= A\left(x_{n-2} + \cdots + S_{n-2} + \frac{S_{n-2}}{x} + \cdots\right) + B_0 \cdot x^{n-2} + \cdots + B_{n-2} \cdot$$

Если приравнять коэффициенты при x^{-1}, то получим

$$A=\frac{C_{n-1}}{S_{n-1}}.$$

Затем приравняем коэффициенты при положительных степенях x. Это позволит определить коэффициенты B при помощи простых формул

$$B_0=b_0-A;$$

$$B_1=C_1-AS_1;$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_{n-2}=C_{n-2}-AS_{n-2}.$$

Так как в основе этого метода определения коэффициентов лежит разложение дробей в ряды, расположенные по убывающим степеням x, то использование описанного выше трафарета совместно с арифмометром оказывается весьма эффективным.

Пусть теперь рассматривается случай выделения дроби второго порядка

$$\frac{b_0x_{n-1}+b_1x_{n-2}+\cdots+b_{n-1}}{x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}=$$

$$=\frac{Bx+C}{x^2+\beta x+\gamma}+\frac{A_0x^{n-3}+\cdots+A_{n-3}}{x_{n-2}+\beta_1x^{n-3}+\cdots+\beta_{n-2}}.$$

В этом случае также обе части равенства умножаются на многочлен знаменателя остающейся дроби и производится разложение дробей в ряды по убывающим степеням x. Тогда коэффициенты B и C могут быть определены из системы двух уравнений, получающихся в результате приравнивания коэффициентов разложений при x^{-1} и x^{-2}. Затем определяются коэффициенты A_k путем приравнивания коэффициентов при положительных степенях x разложений.

6. Методика определения коэффициентов в общих решениях дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

Если задано линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами n-ного порядка

$$f^{(n)}(t)+a_1f^{(n-1)}(t)+a_2f^{(n-2)}(t)+\cdots+a_nf(t)=0$$

и соответствующее характеристическое уравнение

$$p^n + a_1 p^{n-1} + a_2 p^{n-2} + \cdots + a_n = 0$$

имеет простые корни p_k, то общее решение этого дифференциального уравнения имеет вид

$$f(t) = \sum_{k+1}^{n} C_k e^{p_k t},$$

где постоянные C_k подлежат определению по заданным начальным условиям

$$f(0) = S_0; \quad f^{(1)}(0) = S_1; \quad f^{(2)}(0) = S_2 \cdots f^{(n-1)}(0) = S_{n-1}.$$

Следует заметить, что обычный способ определения постоянных заключается в решении системы n алгебраических уравнений с n неизвестными. Ниже излагается методика, с помощью которой указанная задача решается весьма просто.

1. Пусть отыскивается значение коэффициента C_1, соответствующего простому вещественному корню p_1 характеристического уравнения. Путем деления заданного характеристического полинома на двучлен $p - p_1$ можно найти полином

$$p^{n-1} + \alpha_1 p^{n-2} + \alpha_2 \cdot p^{n-3} + \cdots + \alpha_{n-1}.$$

Можно показать, что уравнением, позволяющим определить постоянный коэффициент C_1, будет следующее:

$$C_1 (p_1^{n-1} + \alpha_1 p_1^{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1}) = S_{n-1} + \alpha_1 S_{n-2} + \cdots + \alpha_{n-1} S_0.$$

2. Если требуется определить пару коэффициентов C_1 и C_2, соответствующих двум комплексно-сопряженным корням уравнения $p_{1,2} = -\delta \pm j\omega$, то заданный характеристический полином делится на трехчлен

$$p^2 + 2\delta p + \omega^2 + \delta^2,$$

содержащий указанные корни. Тогда будем иметь полином степени $n-2$:

$$p^{n-2} + \beta_1 p^{n-3} + \beta_2 p^{n-4} + \cdots + \beta_{n-2}.$$

Отсюда получаем два уравнения для определения названных коэффициентов

$$C_1 \cdot (p_1^{n-2} + \beta_1 \cdot p_1^{n-3} + \cdots + \beta_{n-2}) + C_2 (p_2^{n-2} + \beta_1 p_2^{n-3} + \cdots$$
$$\cdots + \beta_{n-2}) = S_{n-2} + \beta_1 S_{n-3} + \cdots + \beta_{n-2} \cdot S_0;$$

$$C_1 \cdot (p_1^{n-1} + \beta_1 \cdot p_1^{n-2} + \cdots + \beta_{n-2} p_1) + C_2 (p_2^{n-1} + \beta_1 \cdot p_2^{n-2} + \cdots$$
$$\cdots + \beta_{n-2} \cdot p_2) = S_{n-1} + \beta_1 \cdot S_{n-2} + \cdots + \beta_{n-2} \cdot S_1.$$

При решении этих уравнений следует учитывать, что коэффициенты C_1 и C_2 являются комплексно-сопряженными, т. е.

$$C_{1,2}=A\pm jB$$

и степенные суммы корней p_1 и p_2 подсчитываются по следующей рекуррентной формуле

$$p_1^\nu \pm p_2^\nu = -2\delta\,(p_1^{\nu-1}\pm p_2^{\nu-1})-(\delta^2+\omega^2)\,(p_1^{\nu-2}\pm p_2^{\nu-2}),$$

где

$$p_1^0+p_2^0=2 \text{ и } p_1+p_2=-2\delta;$$

$$p_1^0-p_2^0=0 \text{ и } p_1+p_2=2j\omega.$$

Пример. Пусть требуется определить коэффициенты выражения

$$f(t)=C_1\,e^{-t}+C_2\,e^{-2t}+C_3\,e^{-3t}$$

по следующим начальны умсловиям

$$f(0)=6;\ f^{(1)}(0)=-10;\ f^{(2)}(0)=20.$$

Так как корнями характеристического уравнения являются $p_1=-1$; $p_2=-2$ и $p_3=-3$, то для определения первого коэффициента составим полином, используя два других корня, т. е. будем иметь

$$p^2+5p+6.$$

На основании изложенной методики получим

$$C_1(1-5\cdot 1+6)=20-5\cdot 10+6\cdot 6.$$

Отсюда находим значение $C_1=3$. Аналогичным способом найдем $C_2=2$ и $C_3=1$.

Глава IV

МЕТОДИКА ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПРИ ПОМОЩИ АРИФМОМЕТРА

В данном случае мы будем рассматривать только линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами, которые весьма часто встречаются на практике. Известно, что решение таких дифференциальных уравнений может быть найдено или в форме рядов, или же в замкнутом виде. Применение как того, так и другого решения часто не является удобным. Значительно проще в этом случае сразу получить таблицу значений искомой функции, т. е. найти численное решение заданного уравнения. Этот вопрос и будет рассмотрен в данной главе.

Т. Отыскание решений линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами в форме рядов

Предположим, что задано линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$f^{(n)}(t)+a_1 f^{(n-1)}(t)+a_2 f^{(n-2)}(t)+\cdots+a_n f(t)=0,$$

которое должно быть проинтегрировано при следующих начальных условиях:

$$f(0)=S_0,\ f^{(1)}(0)=S_1,\ \ldots,\ f^{(n-1)}(0)=S_{n-1}.$$

Решение этого дифференциального уравнения можно найти в виде ряда Маклорена

$$f(t)=S_0+S_1 t+S_2\frac{t^2}{2!}+\cdots+S_\nu\frac{t^\nu}{\nu!}+\cdots,$$

причем коэффициенты этого ряда удовлетворяют следующему уравнению

$$S_\nu+a_1 S_{\nu-1}+a_2 S_{\nu-2}+\cdots+a_n S_{\nu-n}=0;$$

$$\nu=n,\ n+1,\ n+2\cdots$$

Последнее уравнение позволяет вычислить любое число этих коэффициентов по известным n коэффициентам $S_0, S_1, \ldots, S_{n-1}$.

Предположим теперь, что задано неоднородное линейное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами

$$f^{(n_1)}(t)+a_1 f^{(n_1-1)}(t)+\cdots+a_{n_1} f(t)=F(t).$$

Порядок этого дифференциального уравнения n_1 и, следовательно, должно быть задано n_1 начальных условий

$$f_{(0)}=S_0,\quad f^{(1)}(0)=S_1\ ,\ldots,\ f^{(n_1-1)}(0)=S_{n-1}.$$

Если использовать заданные начальные условия и подставить их в дифференциальное уравнение, то можно найти значение $f^{(n_1)}(0)$. После дифференцирования этого уравнения и приравнивания t к нулю получим уравнение, позволяющее определить $f^{(n_1+1)}(0)$ и т. д. Таким образом, и в случае неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами можно получить решение в форме ряда Маклорена, коэффициенты которого будут определяться по формуле:

$$S_\nu=F^{(\nu-n_1)}(0)-a_1 S_{\nu-1}-a_2 S_{\nu-2}-\cdots-a_{n_1} S_{n_1-\nu}.$$

Легко видеть, что вычисления по этой формуле подобны тем, которые рассматривались в предыдущей главе. Таким образом, при вычислениях коэффициентов ряда Маклорена можно воспользоваться тем же трафаретом.

Представляет интерес такой случай неоднородного дифференциального уравнения, когда правая часть его, т. е. функция $F(t)$ удовлетворяет некоторому линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами и порядок этого уравнения n_2. Известно, что в этом случае частное решение неоднородного дифференциального уравнения отыскивается в форме правой части. Такое дифференциальное уравнение порядка n_1 может быть сведено к линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами, порядок которого будет равен $n=n_1+n_2$. Таким образом, если сразу записывать общее решение неоднородного дифференциального уравнения в виде общего решения однородного дифференциального уравнения порядка $n=n_1+n_2$, то в это решение войдет соответствующее число произвольных постоянных. Определение произвольных постоянных будет возможно в том случае, если будет задано n_1+n_2 начальных условий.

Последнее замечание представляет интерес при рассмотрении методики определения произвольных постоянных. Кроме того, этот вопрос связывается с числом начальных значений, которые потребуются в дальнейшем при вычислении таблиц функций.

Итак, если задано дифференциальное уравнение и соответствующее число начальных условий, то можно получить решение его в виде ряда Маклорена. В этом случае не требуется вычислять корней характеристических уравнений и, таким образом, результат получается весьма просто. Однако при помощи ряда удобно вычислять значения искомых функций только при малых значениях аргумента. В дальнейшем будет показано, что для вычисления последовательности значений искомой функции, удовлетворяющей линейному однородному дифференциальному уравнению порядка n, требуется знать n начальных значений, вычисленных для равноотстоящих значений аргумента. Так, если принять шаг значений равным τ, то в случае дифференциального уравнения второго порядка для вычисления последовательности значений функции потребуется знать

$$f(0) \text{ и } f(\tau).$$

В случае дифференциального уравнения третьего порядка нужно вычислить сначала

$$f(0),\ f(\tau) \text{ и } f(2\tau)$$

или же, что проще, $f(-\tau),\ f(0)$ и $f(\tau)$.

Точно то же можно отметить и в случае дифференциальных уравнений более высоких порядков.

Таким образом, решение в виде ряда будет нами использоваться для получения начальных значений искомых функций, по которым при помощи рекуррентных формул будут производиться вычисления последовательностей значений.

2. Вычисление последовательностей значений функций при помощи рекуррентных формул

В предыдущем параграфе было указано, что в случае задания линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами порядка n

$$f^{(n)}(t)+a_1 f^{(n-1)}(t)+a_2 f^{(n-2)}(t)+\cdots+a_n f(t)=0$$

и n начальных условий

$$f(0)=S_0,\ f^{(1)}(0)=S_1,\ \ldots,\ f^{(n-1)}(0)=S_{n-1}$$

можно вычислить последовательность значений $f^{(\nu)}(0)$ при любых ν. При этом вычисления производятся по рекуррентной формуле.

Рассмотрим теперь некоторую функцию $\Phi(x)$, не имеющую физического смысла, но обладающую следующими свойствами:

а) она удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами порядка n:

$$\Phi^{(n)}(x)+A_1\Phi^{(n-1)}(x)+A_2\Phi^{(n-2)}(x)+\cdots+A_n\Phi(x)=0;$$

б) начальными значениями для функции и ее последовательных производных являются

$$\Phi(0)=f(0),\ \Phi^{(1)}(0)=f(\tau);\ \Phi^{(2)}(0)=f(2\tau),\ldots,\ \Phi^{(n-1)}(0)=$$
$$=f[(n-1)\tau].$$

Можно показать, что на основании указанных начальных значений при помощи рекуррентной формулы

$$f(\nu\tau)=-A_1 f[\nu-1)\tau]-A_2 f[\nu-2)\tau]-\cdots-A_n f[(\nu-n)\tau]$$

легко вычисляются значения искомой функции $f(t)$ с шагом τ.

Если характеристическое уравнение для дифференциального уравнения записать в виде

$$p^n+a_1 p^{n-1}+a_2 p^{n-2}+\cdots+a_n=$$
$$=(p-p_1)(p-p_2)\cdots(p-p_n)=0$$

(случай простых корней), то характеристическое уравнение, указанное в пункте а), может быть представлено следующим образом:

$$(m-e^{p_1\tau})(m-e^{p_2\tau})\cdots(m-e^{p_n\tau})=$$

$$=m^n+A_1m^{n-1}+A_2m^{n-2}+\cdots+A_n=0,$$

причем m и p связываются между собой условием

$$m=e^{p\tau}.$$

Таким образом, если корни характеристического уравнения, составленного по заданному дифференциальному уравнению, известны, то после этого весьма просто можно получить расчетную рекуррентную формулу. Для этого сначала характеристическое уравнение записывается в виде произведения двучленных множителей вида $(m-e^{p_k\tau})$, а затем производится перемножение их.

Если задается неоднородное дифференциальное уравнение со специальной правой частью (т. е. правая часть удовлетворяет некоторому однородному дифференциальному уравнению с постоянными коэффициентами) и порядок этого уравнения n_2, то при составлении произведения множителей вида

$$(m-e^{p_k\tau})$$

необходимо учесть и множители, зависящие от корней характеристического уравнения, для того однородного дифференциального уравнения, которому удовлетворяет правая часть его.

Мы не будем подробно останавливаться на всех этих вопросах, а обратимся к примерам, на основании которых можно выяснить все основные вопросы, связанные с вычислением последовательностей значений функций, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям.

Пример 1. Пусть, например, задано линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка

$$f^{(2)}(t)+3f^{(1)}(t)+2f(t)=0,$$

которое должно быть проинтегрировано при следующих начальных условиях

$$f(0)=0,\ f^{(1)}(0)=1.$$

Требуется вычислить последовательность значений функции $f(t)$ при шаге $\tau=0{,}1$.

Для решения задачи прежде всего найдем ряд Маклорена для функции

$$f(t)=t-3\frac{t^2}{2!}+7\frac{t^3}{3!}-15\frac{t^4}{4!}+31\frac{t^5}{5!}-\ldots$$

При помощи этого ряда найдем значение функции при $t=0{,}1$

$$f(0{,}1)=0{,}086106,\ (f(0)=0).$$

Теперь перейдем к построению рекуррентной формулы. Учитывая, что корни характеристического уравнения для заданного дифференциального уравнения равны $p_1=-1$ и $p_2=-2$, то для шага $\tau=0{,}1$ будем иметь

$$(m-e^{-0{,}1})(m-e^{-0{,}2})=(m-0{,}904837)\cdot(m-0{,}818731)=$$

$$=m^2-1{,}723568m+0{,}740818.$$

Таким образом, рекуррентная формула для вычисления последовательности значений искомой функции при шаге $\tau=0{,}1$ будет иметь вид

$$f_\nu=1{,}723568f_{\nu-1}-0{,}740818f_{\nu-2}.$$

Если учесть, что начальные значения функции уже вычислены, т. е.

$$f_0=f(0)=0,\ f_1=f(0{,}1)=0{,}086106,$$

то остается лишь произвести вычисления, подобные вычислениям, описанным во второй главе.

Пример 2. Пусть требуется вычислить последовательность значений функции $f(t)$, удовлетворяющей дифференциальному уравнению

$$f^{(1)}(t)+f(t)=t$$

и начальному условию $f(0)=0$. Шаг τ принимается равным $\tau=0{,}25$.

Дифференцируя заданное уравнение и приравнивая t нулю, можно вычислить коэффициенты ряда Маклорена, который в данном случае будет иметь вид

$$f(t)=\frac{t^2}{2!}-\frac{t^3}{3!}+\frac{t^4}{4!}-\dots$$

При помощи этого ряда определим начальные значения искомой функции

$$f_{-1}=f(-0{,}25)=0{,}0340,\ \ f_0=f(0)=0,\ \ f_1=f(0{,}25)=0{,}0288.$$

Здесь потребовалось три начальных значения, так как дифференциальное уравнение первого порядка ($n_1=1$), а функция $F(t)=t$ удовлетворяет однородному уравнению второго порядка

$$F^{(2)}(t)=0\ \ (\text{т. е. } n_2=2).$$

Поэтому характеристическое уравнение, на основании которого будет составляться рекуррентная формула, имеет вид

$$p^2(p+1)=0.$$

Отсюда для шага $\tau=0{,}25$ получим

$$(m-1)^2\cdot(m-\mathrm{e}^{-0{,}25})=m^3-2{,}7788m^2+2{,}5576m-0{,}7788=0.$$

Таким образом, получаем рекуррентную формулу

$$f_\nu=2{,}7788f_{\nu-1}-2{,}5576f_{\nu-2}+0{,}7788f_{\nu-3},$$

с помощью которой можно вычислить необходимое число значений функции $f(t)$ с шагом $\tau=0{,}25$. Ниже приводится таблица значений $f(t)$, вычисленных указанным способом.

t	0	0,25	0,50	0,75	1,00	1,25	1,50	1,75	2,00
$f(t)$	0	0,029	0,106	0,222	0,368	0,536	0,723	0,924	1,135

Аналитическое выражение для функции, заданной дифференциальным уравнением, таково:

$$f(t)=t-1+\mathrm{e}^{-t}.$$

Если в этой формуле положить $t=2$, то будем иметь

$$f(2)=1,135.$$

Это значение совпадает с приведенным в таблице.

3. Методика численного решения дифференциальных уравнений без вычисления корней характеристических уравнений

Предположим, что заданным является линейное однородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами порядка n

$$f^{(n)}(t)+a_1 f^{(n-1)}(t)+a_2 f^{(n-2)}(t)+\cdots+a_n f(t)=0$$

и следующие начальные условия

$$f(0)=S_0,\ f^{(1)}(0)=S_1,\ \ldots,\ f^{(n-1)}(0)=S_{n-1}.$$

Как известно, в данном случае не представляет труда получить решение этого дифференциального уравнения в виде ряда Маклорена и использовать его для вычисления значений функции при малых t. Теперь покажем, что по n значениям функции $f(t)$, вычисленным для равноотстоящих t, при помощи рекуррентной формулы можно вычислить последовательность значений при том же шаге.

Действительно, если при помощи ряда вычислены значения

$$f(0)=f_0,\ f(\tau)=f_1,\ldots,\ f[(n-1)\tau]=f_{n-1}$$

или, что удобнее,

$$\cdots f_{-2},\ f_{-1},\ f_0,\ f_1,\ f_2\ldots,$$

то дальнейшие вычисления можно производить по рекуррентной формуле вида

$$f_\nu+A_1\cdot f_{\nu-1}+A_2 f_{\nu-2}+\cdots+A_n f_{\nu-n}=0,$$

коэффициенты которой можно определить, зная корни характеристического уравнения

$$V_n(p)=p^n+a_1 p^{n-1}+a_2 p^{n-2}+\cdots+a_n=0.$$

Такой способ решения дифференциальных уравнений уже иллюстрировался в предыдущем параграфе.

Однако возможно построить рекуррентную формулу и без вычисления корней характеристического уравнения (см. Н. С. Кочанов. «Основы синтеза линейных электрических цепей во временной области». М., «Связь», 1967 г.).

Для этого произведем разложение логарифмической производной полинома $V_n(p)$ в ряд по отрицательным степеням p:

$$[\ln V_n(p)]'=\frac{V'_n(p)}{V_n(p)}=\frac{\sigma_0}{p}+\frac{\sigma_1}{p^2}+\frac{\sigma_2}{p^3}+\cdots+\frac{\sigma_\nu}{p^{\nu+1}}+\cdots$$

формулой соответствия

$$\frac{1}{p^{\nu+1}} \to \frac{t^{\nu}}{\nu!},$$

Тогда получим следующий ряд Маклорена

$$\psi(t) = a_0 + a_1 t + a_2 \frac{t^2}{2!} + \ldots + a_{\nu} \frac{t^{\nu}}{\nu!} + \ldots$$

Пусть при помощи этого ряда вычислены значения

$$\ldots \psi_{-2} = \psi(-2\tau),\ \psi_{-1} = \psi(-\tau),\ \psi_0 = a_0,\ \psi_1 = \psi(\tau),\ \psi_2 = \psi(2\tau) \ldots,$$

т. е. всего $(n-1)$ значение. Тогда коэффициенты рекуррентной формулы могут быть вычислены по формулам

$$A_1 = -\psi_1;$$

$$A_2 = -\frac{1}{2}(\psi_2 + A_1\psi_1);$$

$$A_3 = -\frac{1}{3}(\psi_3 + A_1\psi_2 + A_2\psi_1);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A_{n-2} = -\frac{1}{2}(A_{n-1}\psi_{-1} + A_n\psi_{-2});$$

$$A_{n-1} = -A_n\psi_{-1};$$

$$A_n = (-1)^n \cdot e^{-a_0\tau}$$

Для записи этих формул удобна следующая таблица:

	$-A_1$	$-2A_2$	$-3A_3$	...	$-3A_{n-3}$	$-2A_{n-2}$	$-A_{n-1}$	
1	ψ_1	ψ_2	ψ_3	...	ψ_{-3}	ψ_{-2}	ψ_{-1}	A_n
A_1	—	ψ_1	ψ_2	...	ψ_{-2}	ψ_{-1}	—	A_{n-1}
A_2	—	—	ψ_1	...	ψ_{-1}	—	—	A_{n-2}
A_3	—	—	—	...	—	—	—	A_{n-3}
$\vdots$				...				$\vdots$

Правила пользования этой таблицей непосредственно следуют из приведенных выше формул. Таким образом, имея начальные значения искомой функции и рекуррентную формулу, можно произвести вычисление последовательности значений функции $f(t)$ при шаге τ.

Пример 1. Пусть требуется вычислить последовательность значений функции $f(t)$, заданной дифференциальным уравнением

$$f^{(3)}(t)+2f^{(2)}(t)+2f^{(1)}(t)+f(t)=0$$

и начальными условиями

$$f(0)=f^{(1)}(0)=0;\ f^{(2)}(t)=1$$

при шаге $\tau=0{,}5$.

Прежде всего построим соответствующую рекуррентную формулу. Для этой цели найдем разложение логарифмической производной

$$\psi(p)=\frac{3p^2+4p+2}{p^3+2p^2+2p+1}=\frac{3}{p}-\frac{2}{p^2}+\frac{1}{p^4}-\frac{2}{p^6}+\cdots$$

и на основании указанной формулы соответствия перейдем к ряду

$$\psi(t)=3-2t+\frac{t^3}{3!}-\frac{2}{5!}t^5+\frac{3}{6!}t^6-\frac{4}{7!}t^7+\ldots$$

Пользуясь приведенной таблицей, можно вычислить коэффициенты рекуррентной формулы для шага $\tau=0{,}5$:

$$A_1=-2{,}02039;\ A_2=1{,}46409;\ A_3=-0{,}36788$$

и таким образом получить следующую расчетную формулу

$$f_\nu=2{,}02039f_{\nu-1}-1{,}46409f_{\nu-2}+0{,}36788f_{\nu-3}.$$

Теперь необходимо вычислить три начальных значения искомой функции при шаге $\tau=0{,}5$. Для этого воспользуемся рядом, который можно получить по заданному дифференциальному уравнению и начальным условиям. Коэффициенты этого ряда получаются при помощи рекуррентной формулы

$$S_\nu=-2S_{\nu-1}-2S_{\nu-2}-S_{\nu-3}$$

по следующим начальным условиям

$$S_0=S_1=0;\ S_2=1.$$

Таким образом, будем иметь

$$f(t)=\frac{t^2}{2!}-2\frac{t^3}{3!}+2\frac{t^4}{4!}-\frac{t^5}{5!}+\cdots$$

В результате вычислений найдем

$$f_{-1}=f(-0{,}5)=0{,}17213;\ f_0=f(0)=0;\ f_1=f(0{,}5)=0{,}08828.$$

Наконец, при помощи найденной выше расчетной формулы легко получить следующую таблицу значений искомой функции (в таблице приведены округленные значения):

t	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
$f(t)$	0	0,088	0,242	0,359	0,404	0,380	0,307	0,214	0,122	0,046

Сопоставим эти результаты с теми, которые получаются по формуле

$$f(t)=e^{-t}-e^{-0,5t}\left(\cos\frac{\sqrt{3}}{2}t-\frac{1}{\sqrt{3}}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right),$$

выражающей аналитическое решение заданного дифференциального уравнения. Так, при $t=4,5$ будем иметь

$$f(4,5)=0,046,$$

т. е. получаем полное совпадение с результатом, приведенным в таблице.

Пример 2. Предположим теперь, что требуется рассчитать таблицу значений функции $F(t)$, удовлетворяющей неоднородному дифференциальному уравнению

$$F^{(3)}(t)+2F^{(2)}(t)+2F^{(1)}(t)+F(t)=1$$

и начальным условиям

$$F(0)=F^{(1)}(0)=0 \text{ и } F^{(2)}(0)=1.$$

В данном случае отличие от предыдущего примера состоит только в том, что в правой части дифференциального уравнения не нуль, а постоянное число. Но постоянная величина, как известно, удовлетворяет дифференциальному уравнению вида

$$\varphi^{(1)}(t)=0$$

и, следовательно, для получения рекуррентной формулы необходимо воспользоваться методикой, указанной в предыдущем параграфе. Тогда рекуррентная формула получится на основании следующего характеристического уравнения:

$$(m-1)\cdot(m^3-2,02039m^2+$$
$$+1,46409m-0,36788)=0,$$

т. е.

$$m^4-3,02039m^3+3,48448m^2-1,83197m+$$
$$+0,36788=0.$$

Следовательно, рекуррентная формула примет вид

$$F_\nu=3,02039F_{\nu-1}-3,48448F_{\nu-2}+$$

$$+1{,}83197F_{\nu-3}-0{,}36788F_{\nu-4}.$$

Для вычисления начальных значений функции воспользуемся рядом

$$F(t)=\frac{t^3}{3!}-2\frac{t^4}{4!}+2\frac{t^5}{5!}-\frac{t^6}{6!}+\ldots$$

В результате получим следующие начальные значения:

$$F_{-1}=-0{,}02658,\ F_0=0,\ F_1=0{,}01612,\ F_2=0{,}09861.$$

Теперь с помощью рекуррентной формулы можно рассчитать таблицу:

t	0	0,5	1,0	1,5	2,0	2,5	3,0	3,5	4,0	4,5
$F(t)$	0	0,016	0,099	0,251	0,445	0,644	0,817	0,948	1,031	1,072

Для проверки результатов воспользуемся аналитическим решением заданного дифференциального уравнения

$$F(t)=1-e^{-t}-\frac{2}{\sqrt{3}}e^{-0{,}5t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.$$

Например, при $t=4{,}5$ найдем

$$F(4{,}5)=1{,}072,$$

т. е. будем иметь то же значение, что и полученное при помощи рекуррентной формулы.

Аналогичным способом можно рассчитать таблицы значений функций, удовлетворяющих неоднородным дифференциальным уравнениям с другими правыми частями, удовлетворяющими некоторым линейным однородным дифференциальным уравнениям с постоянными коэффициентами.

КОМПАКТНЫЕ ШЕСТИЗНАЧНЫЕ ТАБЛИЦЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ С ШАГОМ $\tau=0{,}000001$

ПРАВИЛА ПОЛЬЗОВАНИЯ ТАБЛИЦАМИ

Удобство предлагаемых таблиц функций состоит в том, что при весьма малом их объеме легко получать шестизначные значения функций при шестизначных значениях аргумента. При этом предполагается, что вычисления производятся при помощи арифмометра или иной вычислительной машины. Тогда окончательный результат получается без записи промежуточных числовых значений.

Рассмотрим сначала методику вычисления значений тригонометрических функций для аргумента в радианной мере. Для этой цели служит таблица опорных значений функций $\sin t$ и $\cos t$, а также таблица поправок α, β и γ. Вычисления синусов и косинусов производится по интерполяционной формуле

$$F_\nu = F_0\cdot(1-\nu+\alpha\cdot 10^{-6}) + F_n\cdot(\nu+\beta\cdot 10^{-6}),$$

где F_0 и F_n — предыдущее и последующее значения рассматриваемой функции при шаге $\Delta t=0{,}01$ соответственно, ν — десятичная дробь, образованная из третьего, четвертого и т. д. десятичных знаков аргумента функции, α и β — поправки, отыскиваемые в таблице в соответствии со значением ν.

Предположим, что требуется вычислить

$$\sin 1{,}234567.$$

Пользуясь таблицей опорных значений функций $\sin t$, находим

$$F_0=\sin 1{,}23=0{,}942489 \text{ и } F_n=\sin 1{,}24=0{,}945784.$$

Далее, учитывая, что в данном случае $\nu=0{,}4567$, по округленному значению $\nu\approx 0{,}46$ по таблице поправок найдем $\alpha=6$, $\beta=6$. Теперь можно записать следующую формулу действий:

$$F_\nu=0{,}942489\cdot(1{,}000000-0{,}456700+0{,}000006)+$$
$$+0{,}945784\cdot(0{,}456700+0{,}000006)=0{,}944005.$$

Указанные здесь операции выполняются при помощи арифмометра весьма просто. Опорные значения функции устанавливаются в качестве множимых, а значения интерполяционных коэффициентов, т. е. множителей, набираются на счетчике оборотов почленно. Так как после первого умножения счетчик суммы не очищается, то после второго умножения на нем будет зафиксирован окончательный результат

$$\sin 1{,}234567 = 0{,}944005.$$

Всего такая вычислительная операция требует около одной минуты времени.

Подобным же способом можно вычислить, например,

$$\sin 0{,}123456 = 0{,}123142, \qquad \sin 4{,}567895 = -0{,}989579$$

$$\cos 0{,}123456 = 0{,}992389, \qquad \cos 4{,}567895 = -0{,}143991$$

$$\sin 2{,}345678 = 0{,}714504, \qquad \sin 5{,}456789 = -0{,}735494$$

$$\cos 2{,}345678 = -0{,}699631, \quad \cos 5{,}456789 = 0{,}677531.$$

Таблицы опорных значений указанных функций даны для аргумента $t \leqslant 6{,}29$. Если же аргумент превышает указанный предел, то из аргумента необходимо вычесть число, кратное 2π. Некоторые из этих чисел приведены в конце таблицы.

Вычисления тангенсов производятся по формуле

$$\operatorname{tg}(t_0 \pm \nu\Delta t) = \frac{\sin 2t_0 \pm 0{,}02\cdot\nu}{\cos 2t_0 + 1 - \gamma\cdot 10^{-6}},$$

причем значения $\sin 2t_0$ и $\cos 2t_0$ берутся из той же самой таблицы опорных значений, а значения γ из таблицы поправок.

Пусть, например, требуется вычислить

$$\operatorname{tg} 0{,}573698.$$

В данном случае $t_0 = 0{,}57$, а $\nu = 0{,}3698$. Поэтому значения синуса и косинуса по таблице опорных значений нужно брать для аргумента $2t_0 = 1{,}14$. Кроме того, по таблице поправок для $\nu \approx 0{,}37$ найдем $\gamma = 27$. Таким образом, остается вычислить

$$\operatorname{tg} 0{,}573698 = \frac{0{,}908633 + 0{,}007396}{0{,}417595 + 0{,}999973} = 0{,}646197.$$

Если при вычислениях встречается случай, когда третий десятичный знак аргумента больше пяти, то в числителе расчетной формулы берется знак минус. Рассмотрим пример вычисления значения

$$\operatorname{tg} 0{,}349537.$$

В данном случае $t_0=0{,}35$ и $\nu=0{,}0463$. Таким образом, будем иметь

$$\operatorname{tg} 0{,}349573=\frac{0{,}644218-0{,}000926}{0{,}764842+1{,}000000}=0{,}364504.$$

Как известно, подобные вычислительные операции выполняются на арифмометре без записи промежуточных результатов.

При помощи этих же таблиц можно вычислять значения тригонометрических функций и для аргумента, заданного в градусах и в долях градуса по десятичной системе, а также в градусах, минутах и секундах. При этом используются соотношения

$$1^\circ=0{,}0174532925 \text{ рад};$$

$$1'=0{,}0002908882 \text{ рад};$$

$$1''=0{,}0000048481 \text{ рад}.$$

Указанные числа последовательно устанавливаются на арифмометре и производятся умножения на числа, выражающие градусы, минуты и секунды.

Пусть, например, задано следующее значение аргумента

$$t=25^\circ 33' 17''.$$

Тогда, пользуясь приведенной выше таблицей, получим выражение аргумента в радианной мере угла

$$t=0{,}446014.$$

Теперь, пользуясь изложенным выше способом вычислений, получим, например

$$\sin 25^\circ 33' 17''=0{,}431373$$

$$\cos 25^\circ 33' 17''=0{,}902174$$

$$\operatorname{tg} 25^\circ 33' 17''=0{,}4781485.$$

Подобные же компактные таблицы могут быть составлены для вычисления гиперболических и показательных функций. Тогда значения $\operatorname{sh} t$, $\operatorname{ch} t$, e^t и e^{-t} при шаге опорных значений $\Delta t=0{,}01$ будут вычисляться по аналогичной формуле:

$$F_\nu=F_0\cdot(1-\nu-\alpha\cdot 10^{-6})+F_n(\nu-\beta\cdot 10^{-6}),$$

где α и β те же самые поправки.

t	sin t	cos t
0,90	0,783327	0,621610
0,91	0,789504	0,613746
0,92	0,795602	0,605820
0,93	0,801620	0,597834
0,94	0,807558	0,589788
0,95	0,813416	0,581683
0,96	0,819192	0,573520
0,97	0,824886	0,565300
0,98	0,830497	0,557023
0,99	0,836026	0,548690
1,00	0,841471	0,540302
1,01	0,846832	0,531861
1,02	0,852108	0,523366
1,03	0,857299	0,514819
1,04	0,862404	0,506220
1,05	0,867423	0,497571
1,06	0,872355	0,488872
1,07	0,877201	0,480124
1,08	0,881958	0,471328
1,09	0,886627	0,462485
1,10	0,891207	0,453596
1,11	0,895699	0,444662
1,12	0,900100	0,435682
1,13	0,904412	0,426660
1,14	0,908633	0,417595
1,15	0,912764	0,408487
1,16	0,916803	0,399340
1,17	0,920751	0,390152
1,18	0,924606	0,380925
1,19	0,928369	0,371660
1,20	0,932039	0,362358
1,21	0,935616	0,353019
1,22	0,939099	0,343646
1,23	0,942489	0,334238
1,24	0,945784	0,324796
1,25	0,948985	0,315322
1,26	0,952090	0,305817
1,27	0,955101	0,296281
1,28	0,958016	0,286715
1,29	0,960835	0,277121
1,30	0,963558	0,267499
1,31	0,966185	0,257850
1,32	0,968715	0,248175
1,33	0,971148	0,238476
1,34	0,973485	0,228753

Продолжение

t	sin t	cos t
1,35	0,975723	0,219007
1,36	0,977865	0,209239
1,37	0,979908	0,199450
1,38	0,981854	0,189641
1,39	0,983701	0,179813
1,40	0,985450	0,169967
1,41	0,987100	0,160104
1,42	0,988652	0,150225
1,43	0,990105	0,140332
1,44	0,991458	0,130424
1,45	0,992713	0,120503
1,46	0,993868	0,110570
1,47	0,994924	0,100626
1,48	0,995881	0,090672
1,49	0,996738	0,080708
1,50	0,997495	0,070737
1,51	0,998152	0,060759
1,52	0,998710	0,050774
1,53	0,999168	0,040785
1,54	0,999526	0,030791
1,55	0,999784	0,020795
1,56	0,999942	0,010796
1,57	1,000000	0,000796
1,58	0,999958	—0,009204
1,59	0,999816	—0,019202
1,60	0,999574	—0,029200
1,61	0,999232	—0,039194
1,62	0,998790	—0,049184
1,63	0,998248	—0,059169
1,64	0,997606	—0,069148
1,65	0,996865	—0,079121
1,66	0,996024	—0,089085
1,67	0,995083	—0,099041
1,68	0,994043	—0,108987
1,69	0,992904	—0,118922
1,70	0,991665	—0,128844
1,71	0,990327	—0,138755
1,72	0,988890	—0,148651
1,73	0,987354	—0,158532
1,74	0,985719	—0,168397
1,75	0,983986	—0,178246
1,76	0,982154	—0,188077
1,77	0,980224	—0,197889
1,78	0,978197	—0,207681
1,79	0,976071	—0,217452

t	sin t	cos t
1,80	0,973848	—0,227202
1,81	0,971527	—0,236929
1,82	0,969109	—0,246632
1,83	0,966594	—0,256311
1,84	0,963983	—0,265964
1,85	0,961275	—0,275590
1,86	0,958471	—0,285189
1,87	0,955572	—0,294759
1,88	0,952576	—0,304300
1,89	0,949486	—0,313811
1,90	0,946300	—0,323290
1,91	0,943020	—0,332736
1,92	0,939645	—0,342150
1,93	0,936177	—0,351529
1,94	0,932615	—0,360873
1,95	0,928960	—0,370181
1,96	0,925212	—0,379452
1,97	0,921371	—0,388685
1,98	0,917438	—0,397879
1,99	0,913413	—0,407033
2,00	0,909297	—0,416147
2,01	0,905091	—0,425219
2,02	0,900793	—0,434248
2,03	0,896406	—0,443234
2,04	0,891929	—0,452176
2,05	0,887362	—0,461073
2,06	0,882707	—0,469923
2,07	0,877964	—0,478727
2,08	0,873133	—0,487482
2,09	0,868215	—0,496189
2,10	0,863209	—0,504846
2,11	0,858118	—0,513453
2,12	0,852940	—0,522008
2,13	0,847678	—0,530511
2,14	0,842330	—0,538961
2,15	0,836899	—0,547358
2,16	0,831383	—0,555699
2,17	0,825785	—0,563985
2,18	0,820104	—0,572215
2,19	0,814341	—0,580387
2,20	0,808496	—0,588501
2,21	0,802571	—0,596557
2,22	0,796565	—0,604552
2,23	0,790480	—0,612488
2,24	0,784316	—0,620362

t	sin t	cos t
2,25	0,778073	—0,628174
2,26	0,771753	—0,635923
2,27	0,765355	—0,643608
2,28	0,758881	—0,651230
2,29	0,752331	—0,658786
2,30	0,745705	—0,666276
2,31	0,739005	—0,673700
2,32	0,732231	—0,681056
2,33	0,725384	—0,688344
2,34	0,718465	—0,695563
2,35	0,711473	—0,702713
2,36	0,704411	—0,709793
2,37	0,697278	—0,716801
2,38	0,690075	—0,723738
2,39	0,682803	—0,730602
2,40	0,675463	—0,737394
2,41	0,668056	—0,744111
2,42	0,660581	—0,750755
2,43	0,653041	—0,757323
2,44	0,645435	—0,763815
2,45	0,637765	—0,770231
2,46	0,630031	—0,776570
2,47	0,622234	—0,782832
2,48	0,614374	—0,789015
2,49	0,606454	—0,795119
2,50	0,598472	—0,801144
2,51	0,590431	—0,807088
2,52	0,582331	—0,812952
2,53	0,574172	—0,818735
2,54	0,565956	—0,824435
2,55	0,557684	—0,830054
2,56	0,549355	—0,835589
2,57	0,540972	—0,841040
2,58	0,532535	—0,846408
2,59	0,524044	—0,851691
2,60	0,515501	—0,856889
2,61	0,506907	—0,862001
2,62	0,498262	—0,867027
2,63	0,489567	—0,871966
2,64	0,480823	—0,876818
2,65	0,472031	—0,881582
2,66	0,463191	—0,886258
2,67	0,454306	—0,890846
2,68	0,445375	—0,895344
2,69	0,436399	—0,899753

t	sin t	cos t
2,70	0,427380	—0,904072
2,71	0,418318	—0,908301
2,72	0,409214	—0,912438
2,73	0,400069	—0,916485
2,74	0,390885	—0,920440
2,75	0,381661	—0,924302
2,76	0,372399	—0,928073
2,77	0,363100	—0,931750
2,78	0,353764	—0,935335
2,79	0,344393	—0,938825
2,80	0,334988	—0,942222
2,81	0,325549	—0,945525
2,82	0,316078	—0,948733
2,83	0,306575	—0,951847
2,84	0,297041	—0,954865
2,85	0,287478	—0,957787
2,86	0,277886	—0,960614
2,87	0,268266	—0,963345
2,88	0,258619	—0,965979
2,89	0,248947	—0,968517
2,90	0,239249	—0,970958
2,91	0,229528	—0,973302
2,92	0,219784	—0,975549
2,93	0,210017	—0,977698
2,94	0,200230	—0,979749
2,95	0,190423	—0,981702
2,96	0,180596	—0,983557
2,97	0,170752	—0,985314
2,98	0,160890	—0,986972
2,99	0,151013	—0,988532
3,00	0,141120	—0,989992
3,01	0,131213	—0,991354
3,02	0,121293	—0,992617
3,03	0,111361	—0,993780
3,04	0,101418	—0,994844
3,05	0,091465	—0,995808
3,06	0,081502	—0,996673
3,07	0,071532	—0,997438
3,08	0,061554	—0,998104
3,09	0,051570	—0,998669
3,10	0,041581	—0,999135
3,11	0,031587	—0,999501
3,12	0,021591	—0,999767
3,13	0,011592	—0,999933
3,14	0,001593	—0,999999
3,15	—0,008407	—0,999965
3,16	—0,018406	—0,999831
3,17	—0,028404	—0,999597
3,18	—0,038398	—0,999263
3,19	—0,048388	—0,998829
3,20	—0,058374	—0,998295
3,21	—0,068354	—0,997661
3,22	—0,078327	—0,996928
3,23	—0,088292	—0,996095
3,24	—0,098249	—0,995162
3,25	—0,108195	—0,994130
3,26	—0,118131	—0,992998
3,27	—0,128055	—0,991767
3,28	—0,137966	—0,990437
3,29	—0,147863	—0,989008
3,30	—0,157746	—0,987480
3,31	—0,167612	—0,985853
3,32	—0,177462	—0,984128
3,33	—0,187295	—0,982304
3,34	—0,197108	—0,980382
3,35	—0,206902	—0,978362
3,36	—0,216675	—0,976244
3,37	—0,226427	—0,974028
3,38	—0,236155	—0,971715
3,39	—0,245861	—0,969305
3,40	—0,255541	—0,966798
3,41	—0,265196	—0,964195
3,42	—0,274825	—0,961494
3,43	—0,284426	—0,958698
3,44	—0,293998	—0,955806
3,45	—0,303542	—0,952818
3,46	—0,313054	—0,949735
3,47	—0,322536	—0,946557
3,48	—0,331985	—0,943285
3,49	—0,341401	—0,939918
3,50	—0,350783	—0,936457
3,51	—0,360130	—0,932902
3,52	—0,369441	—0,929254
3,53	—0,378715	—0,925513
3,54	—0,387951	—0,921680
3,55	—0,397148	—0,917755
3,56	—0,406306	—0,913737
3,57	—0,415423	—0,909629
3,58	—0,424498	—0,905429
3,59	—0,433531	—0,901139

t	sin t	cos t
3,60	—0,442520	—0,896758
3,61	—0,451466	—0,892288
3,62	—0,460366	—0,887729
3,63	—0,469220	—0,883081
3,64	—0,478027	—0,878345
3,65	—0,486787	—0,873521
3,66	—0,495497	—0,868609
3,67	—0,504159	—0,863611
3,68	—0,512769	—0,858526
3,69	—0,521329	—0,853356
3,70	—0,529836	—0,848100
3,71	—0,538291	—0,842759
3,72	—0,546691	—0,837334
3,73	—0,555037	—0,831826
3,74	—0,563327	—0,826234
3,75	—0,571561	—0,820559
3,76	—0,579738	—0,814803
3,77	—0,587857	—0,808965
3,78	—0,595917	—0,803046
3,79	—0,603918	—0,797047
3,80	—0,611858	—0,790968
3,81	—0,619737	—0,784810
3,82	—0,627554	—0,778573
3,83	—0,635308	—0,772259
3,84	—0,642999	—0,765867
3,85	—0,650625	—0,759399
3,86	—0,658186	—0,752855
3,87	—0,665682	—0,746236
3,88	—0,637111	—0,739542
3,89	—0,680473	—0,732774
3,90	—0,687766	—0,725932
3,91	—0,694991	—0,719018
3,92	—0,702146	—0,712033
3,93	—0,709231	—0,704976
3,94	—0,716246	—0,697848
3,95	—0,723188	—0,690651
3,96	—0,730058	—0,683385
3,97	—0,736856	—0,676050
3,98	—0,743579	—0,668648
3,99	—0,750228	—0,661179
4,00	—0,756802	—0,653644
4,01	—0,763301	—0,646043
4,02	—0,769723	—0,638378
4,03	—0,776068	—0,630649
4,04	—0,782336	—0,622857
4,05	—0,788525	—0,615002
4,06	—0,794636	—0,607087
4,07	—0,800667	—0,599110
4,08	—0,806618	—0,591073
4,09	—0,812488	—0,582978
4,10	—0,818277	—0,574824
4,11	—0,823984	—0,566613
4,12	—0,829609	—0,558345
4,13	—0,835151	—0,550021
4,14	—0,840609	—0,541642
4,15	—0,845984	—0,533209
4,16	—0,851273	—0,524722
4,17	—0,856478	—0,516184
4,18	—0,861597	—0,507593
4,19	—0,866630	—0,498952
4,20	—0,871576	—0,490261
4,21	—0,876435	—0,481521
4,22	—0,881206	—0,472732
4,23	—0,885889	—0,463897
4,24	—0,890484	—0,455015
4,25	—0,894989	—0,446087
4,26	—0,899405	—0,437115
4,27	—0,903732	—0,428100
4,28	—0,907967	—0,419041
4,29	—0,912112	—0,409941
4,30	—0,916166	—0,400799
4,31	—0,920128	—0,391618
4,32	—0,923998	—0,382397
4,33	—0,927776	—0,373138
4,34	—0,931461	—0,363842
4,35	—0,935053	—0,354509
4,36	—0,938551	—0,345141
4,37	—0,941955	—0,335738
4,38	—0,945266	—0,326302
4,39	—0,948481	—0,316833
4,40	—0,951602	—0,307333
4,41	—0,954628	—0,297802
4,42	—0,957558	—0,288241
4,43	—0,960392	—0,278651
4,44	—0,963131	—0,269033
4,45	—0,965773	—0,259389
4,46	—0,968319	—0,249718
4,47	—0,970767	—0,240022
4,48	—0,973119	—0,230303
4,49	—0,975373	—0,220560

t	$\sin t$	$\cos t$
4,50	—0,977530	—0,210796
4,51	—0,979589	—0,201019
4,52	—0,981550	—0,191204
4,53	—0,983413	—0,181379
4,54	—0,985178	—0,171536
4,55	—0,986844	—0,161676
4,56	—0,988411	—0,151800
4,57	—0,989880	—0,141908
4,58	—0,991249	—0,132003
4,59	—0,992520	—0,122084
4,60	—0,993691	—0,112153
4,61	—0,994763	—0,102210
4,62	—0,995735	—0,092258
4,63	—0,996608	—0,082296
4,64	—0,997381	—0,072326
4,65	—0,998054	—0,062349
4,66	—0,998628	—0,052365
4,67	—0,999102	—0,042376
4,68	—0,999476	—0,032383
4,69	—0,999749	—0,022387
4,70	—0,999923	—0,012389
4,71	—0,999997	—0,002389
4,72	—0,999971	+0,007611
4,73	—0,999845	0,017610
4,74	—0,999619	0,027608
4,75	—0,999293	0,037602
4,76	—0,998867	0,047593
4,77	—0,998341	0,057579
4,78	—0,997715	0,067560
4,79	—0,996990	0,077533
4,80	—0,996165	0,087499
4,81	—0,995240	0,097456
4,82	—0,994216	0,107403
4,83	—0,993092	0,117340
4,84	—0,991869	0,127265
4,85	—0,990547	0,137177
4,86	—0,989125	0,147076
4,87	—0,987605	0,156959
4,88	—0,985986	0,166827
4,89	—0,984269	0,176679
4,90	—0,982453	0,186512
4,91	—0,980538	0,196327
4,92	—0,978526	0,206123
4,93	—0,976416	0,215898
4,94	—0,974208	0,225651
4,95	—0,971903	0,235381
4,96	—0,969501	0,245089
4,97	—0,967001	0,254771
4,98	—0,964405	0,264428
4,99	—0,961713	0,274059

t	$\sin t$	$\cos t$
5,00	—0,958924	0,283662
5,01	—0,956040	0,293237
5,02	—0,953060	0,302783
5,03	—0,949984	0,312298
5,04	—0,946814	0,321782
5,05	—0,943549	0,331234
5,06	—0,940189	0,340653
5,07	—0,936736	0,350037
5,08	—0,933189	0,359387
5,09	—0,929548	0,368701
5,10	—0,925815	0,377978
5,11	—0,921989	0,387217
5,12	—0,918070	0,396417
5,13	—0,914060	0,405578
5,14	—0,909959	0,414698
5,15	—0,905767	0,423777
5,16	—0,901484	0,432813
5,17	—0,897111	0,441806
5,18	—0,892648	0,450755
5,19	—0,888096	0,459659
5,20	—0,883455	0,468517
5,21	—0,878725	0,477328
5,22	—0,873908	0,486091
5,23	—0,869004	0,494806
5,24	—0,864012	0,503471
5,25	—0,858935	0,512085
5,26	—0,853771	0,520649
5,27	—0,848522	0,529161
5,28	—0,843188	0,537619
5,29	—0,837769	0,546024
5,30	—0,832267	0,554374
5,31	—0,826682	0,562669
5,32	—0,821014	0,570908
5,33	—0,815264	0,579089
5,34	—0,809433	0,587213
5,35	—0,803520	0,595278
5,36	—0,797527	0,603283
5,37	—0,791455	0,611228
5,38	—0,785303	0,619112
5,39	—0,779073	0,626934
5,40	—0,772764	0,634693
5,41	—0,766379	0,642389
5,42	—0,759917	0,650020
5,43	—0,753379	0,657587
5,44	—0,746765	0,665088
5,45	—0,740077	0,672522
5,46	—0,733315	0,679889
5,47	—0,726480	0,687188
5,48	—0,719572	0,694418
5,49	—0,712592	0,701579

t	$\sin t$	$\cos t$
5,50	−0,705540	0,708670
5,51	−0,698418	0,715690
5,52	−0,691227	0,722638
5,53	−0,683966	0,729514
5,54	−0,676637	0,736317
5,55	−0,669240	0,743046
5,56	−0,661776	0,749702
5,57	−0,654246	0,756282
5,58	−0,646651	0,762786
5,59	−0,638991	0,769215
5,60	−0,631267	0,775566
5,61	−0,623480	0,781840
5,62	−0,615630	0,788035
5,63	−0,607719	0,794152
5,64	−0,599747	0,800189
5,65	−0,591716	0,806147
5,66	−0,583625	0,812024
5,67	−0,575475	0,817819
5,68	−0,567269	0,823533
5,69	−0,559005	0,829164
5,70	−0,550686	0,834713
5,71	−0,542311	0,840178
5,72	−0,533882	0,845559
5,73	−0,525400	0,850855
5,74	−0,516865	0,856067
5,75	−0,508279	0,861192
5,76	−0,499642	0,866232
5,77	−0,490955	0,871185
5,78	−0,482218	0,876051
5,79	−0,473434	0,880829
5,80	−0,464602	0,885520
5,81	−0,455724	0,890121
5,82	−0,446800	0,894634
5,83	−0,437832	0,899057
5,84	−0,428819	0,903390
5,85	−0,419764	0,907633
5,86	−0,410667	0,911785
5,87	−0,401529	0,915846
5,88	−0,392350	0,919816
5,89	−0,383133	0,923693

t	$\sin t$	$\cos t$
5,90	−0,373877	0,927478
5,91	−0,364583	0,931171
5,92	−0,355254	0,934770
5,93	−0,345888	0,938276
5,94	−0,336488	0,941688
5,95	−0,327055	0,945005
5,96	−0,317589	0,948229
5,97	−0,308091	0,951357
5,98	−0,298562	0,954390
5,99	−0,289003	0,957328
6,00	−0,279415	0,960170
6,01	−0,269800	0,962916
6,02	−0,260157	0,965566
6,03	−0,250489	0,968119
6,04	−0,240795	0,970576
6,05	−0,231078	0,972935
6,06	−0,221337	0,975197
6,07	−0,211574	0,977362
6,08	−0,201790	0,979429
6,09	−0,191986	0,981398
6,10	−0,182163	0,983268
6,11	−0,172321	0,985041
6,12	−0,162462	0,986715
6,13	−0,152587	0,988290
6,14	−0,142697	0,989766
6,15	−0,132792	0,991144
6,16	−0,122874	0,992422
6,17	−0,112944	0,993601
6,18	−0,103002	0,994681
6,19	−0,093051	0,995661
6,20	−0,083089	0,996542
6,21	−0,073120	0,997323
6,22	−0,063143	0,998004
6,23	−0,053160	0,998586
6,24	−0,043172	0,999068
6,25	−0,033179	0,999449
6,26	−0,023183	0,999731
6,27	−0,013185	0,999913
6,28	−0,003185	0,999995
6,29	+0,006815	0,999977

$2\pi = 6,283185$
$4\pi = 12,566371$
$6\pi = 18,849556$
$8\pi = 25,132741$
$10\pi = 31,415927$

$1^\circ = 0,017\,453\,2925$ рад
$1' = 0,000\,290\,8882$ рад
$1'' = 0,000\,004\,8481$ рад

Таблица поправок α, β и γ

ν	α	β	γ	
0,00	0	0	00	1,00
0,01	0	0	00	0,99
0,02	1	0	00	0,98
0,03	1	1	00	0,97
0,04	1	1	00	0,96
0,05	2	1	00	0,95
0,06	2	1	01	0,94
0,07	2	1	01	0,93
0,08	2	1	01	0,92
0,09	3	2	02	0,91
0,10	3	2	02	0,90
0,11	3	2	02	0,89
0,12	3	2	03	0,88
0,13	4	2	03	0,87
0,14	4	2	04	0,86
0,15	4	2	05	0,85
0,16	4	3	05	0,84
0,17	4	3	06	0,83
0,18	4	3	06	0,82
0,19	5	3	07	0,81
0,20	5	3	08	0,80
0,21	5	3	09	0,79
0,22	5	3	10	0,78
0,23	5	4	11	0,77
0,24	5	4	12	0,76
0,25	6	4	13	0,75
	β	α	×	ν

ν	α	β	γ	
0,25	6	4	13	0,75
0,26	6	4	14	0,74
0,27	6	4	15	0,73
0,28	6	4	16	0,72
0,29	6	4	17	0,71
0,30	6	5	18	0,70
0,31	6	5	19	0,69
0,32	6	5	20	0,68
0,33	6	5	22	0,67
0,34	6	5	23	0,66
0,35	6	5	25	0,65
0,36	6	5	26	0,64
0,37	6	5	27	0,63
0,38	6	5	29	0,62
0,39	6	6	30	0,61
0,40	6	6	32	0,60
0,41	6	6	34	0,59
0,42	6	6	35	0,58
0,43	6	6	37	0,57
0,44	6	6	39	0,56
0,45	6	6	41	0,55
0,46	6	6	42	0,54
0,47	6	6	44	0,53
0,48	6	6	46	0,52
0,49	6	6	48	0,51
0,50	6	6	50	0,50
	β	α	×	ν

СОДЕРЖАНИЕ

Николай Семенович Кочанов

О ВЫЧИСЛЕНИЯХ ПРИ ПОМОЩИ АРИФМОМЕТРА

Редактор *В. Ю. Иваницкий*

Худож. редактор *Е. Е. Соколов*

Техн. редактор *Н. Н. Баранова*

Корректор *В. И. Гуляева*

Художник *Э. Н. Ахтырская*

А 12684 Сдано в набор 2/X 1967 г. Подписано к печати 17/XI 1967 г. Формат бумаги 60×90/16. Бумага типографская № 3. Бум. л. 2,5. Печ. л. 5,0. Уч.-изд. л. 4,13. Тираж 57 000 экз. Издательство «Знание». Москва, Центр, Новая пл., д. 3/4. Заказ 2179. Набрано в Московской тип. № 8 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Хохловский пер., 7. Отпечатано в тип. изд-ва «Знание» Москва, Центр, Новая пл., д. 3/4. Цена 15 коп. Зак. тип. 4147.

ПОПРАВКА:

На стр. 75, вторая колонка, 17 строка снизу, цифру следует читать 0,673111.