Школьная программа

Математика в таблицах

▶ 5–11 классы

АСТ • Астрель

ШКОЛЬНАЯ ПРОГРАММА

МАТЕМАТИКА В ТАБЛИЦАХ

5–11 классы

Справочные материалы

АСТ • Астрель
Москва

УДК 373:51
ББК 22.1я2
М34

Серия основана в 2003 году

Математика в таблицах : 5–11-й классы: М34 справ. материалы. — Москва: АСТ: Астрель, 2014. — 95, [1] с.: ил. — (Школьная программа).

ISBN 978-5-17-017214-6 (ООО «Издательство АСТ»)(Желт.)
ISBN 978-5-271-05626-0 (ООО «Издательство Астрель») (Желт.)
ISBN 978-5-17-059064-3 (ООО «Издательство АСТ»)(ЕГЭ)
ISBN 978-5-271-23839-0 (ООО «Издательство Астрель») (ЕГЭ)

Справочный материал по всему школьному курсу математики в 5–11 классах сгруппирован в тематические таблицы. Весь материал распределен в соответствии с содержанием школьных предметов — математика, алгебра, геометрия — по разделам, адресованным школьникам 5–6 классов, 7–9 и 10–11.

Пособие предназначено для повторения материала и подготовки к контрольным работам, зачетам, экзаменам.

УДК 373:51
ББК 22.1я2

ISBN 978-5-17-017214-6 (ООО «Издательство АСТ»)(Желт.)
ISBN 978-5-271-05626-0 (ООО «Издательство Астрель»)(Желт.)
ISBN 978-5-17-059064-3 (ООО «Издательство АСТ») (ЕГЭ)
ISBN 978-5-271-23839-0 (ООО «Издательство Астрель») (ЕГЭ)

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА 5—6

Натуральные числа 6
Признаки делимости 7
НОК и НОД 8
Действия с обыкновенными дробями 9
Положительные и отрицательные числа. . . 9
Действия с положительными
и отрицательными числами 10

АЛГЕБРА 7—9

Формулы сокращенного умножения 11
Свойства степени 11
Пропорция 12
Свойства квадратного корня 12
Свойства корня n-й степени 12
Свойства числовых неравенств 13

Функции

Линейная функция. 15
Дробно-линейная функция. 16
Квадратное уравнение 17
Квадратный трехчлен. 18
Квадратичная функция 19
Квадратное неравенство 20

Прогрессии. 21
Средние величины 22
Тригонометрические тождества 23

АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА 10—11

Логарифмы 26
Пределы 28
Производная 29

Функции
Степенная функция 31
Показательная функция 32
Логарифмическая функция 33
Тригонометрические функции 34
Обратные тригонометрические функции 36
Интеграл 38
Вычисления с помощью интеграла 40
Комбинаторика 42
Комплексные числа 44

ГЕОМЕТРИЯ 7—9

Углы 46
Треугольники 48
Площадь треугольника 50
Равные и подобные треугольники 51
Прямоугольный треугольник 54
Равнобедренный треугольник 56
Равносторонний треугольник 57
Параллелограмм 58
Трапеция 60
Многоугольники 62
Окружность 64
Углы в окружности 68
Декартовы координаты на плоскости 69

ГЕОМЕТРИЯ 10—11

Углы в пространстве 70

Многогранники

Призма 73

Пирамида 76

Правильные многогранники 80

Тела вращения

Цилиндр 82

Конус 84

Сфера и шар 86

Декартовы координаты в пространстве 89

Векторы 90

Справочные таблицы 92

Натуральные числа

Арифметические действия	Свойства нуля и единицы
Сложение $a + b = c$ слагаемые сумма	$a + 0 = 0 + a = a$
Вычитание $a - b = c$ уменьшаемое вычитаемое разность	$a - 0 = a$ $a - a = 0$
Умножение $a \cdot b = c$ множители произведение	$a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$ $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
Деление $a : b = c$ делимое делитель частное	$0 : a = 0$ $a : 1 = a$ На нуль делить нельзя

Правила арифметических действий

Переместительный закон

$$a + b = b + a$$
$$a \cdot b = b \cdot a$$

Сочетательный закон

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$
$$a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$$

Распределительный закон

$$a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$$
$$a \cdot (b - c) = a \cdot b - a \cdot c$$

Признаки делимости

На 2: последняя цифра — четная (0, 2, 4, 6, 8).
Пример: 24, 248, ~~351~~.

На 3: сумма цифр числа делится на 3.
Пример: 45 (4 + 5 = 9 — делится на 3);
~~86~~ (8 + 6 = 14 — не делится на 3);

На 4: число, составленое из двух последних цифр, делится на 4 (00, 04, 08, 12 и т. д.).
Пример: 248, 512, ~~715~~.

На 5: последняя цифра 0 или 5.
Пример: 340, 235, ~~187~~.

На 9: сумма цифр числа делится на 9.
Пример: 198 (1 + 9 + 8 = 18 — делится на 9);
~~281~~ (2 + 8 + 1 = 11 — не делится на 9).

На 10: последняя цифра 0.
Пример: 1830, ~~2017~~.

На 25: число, составленное из двух последних цифр, делится на 25 (00, 25, 50, 75).
Пример: 1375, ~~240~~, ~~805~~, 650.

НОК и НОД

Разложение чисел на множители

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

1368	2
684	2
342	2 ×
171	3
57	3
19	19 ×
1	

Наибольший общий делитель

$$\text{НОД}(180, 1368) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 = 36$$

выписываем все общие делители чисел

! НОД либо меньше данных чисел, либо равен меньшему из них.

Наименьшее общее кратное

$$\text{НОК}(180, 1368) = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 19 = 6840$$

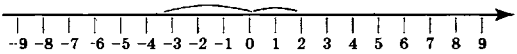
выписываем все делители меньшего числа и не совпадающие с ними делители другого числа

! НОК либо больше данных чисел, либо равен большему из них.

Действия с обыкновенными дробями

Сложение и вычитание: дробей с общим знаменателем дробей с разными знаменателями	$\frac{a}{b}+\frac{c}{b}=\frac{a+c}{b}$ $\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$ $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$ $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{ad-bc}{bd}$
Умножение	$\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$
Деление	$\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}$

Положительные и отрицательные числа



$$|-4| = 4 \quad |0| = 0 \quad |2| = 2$$

Модуль числа равен расстоянию от нуля до числа на координатной прямой.

Противоположные числа — числа с одинаковыми модулями и разными знаками (5 и –5, –1,5 и 1,5).

$\lvert a\rvert = a$, если $a > 0$ $\lvert a\rvert = -a$, если $a < 0$ $\lvert a - b\rvert = \lvert b - a\rvert$	$-a + a = 0$ $a + (-a) = 0$ $a - a = 0$

Действия с положительными и отрицательными числами

	Положительные числа		Отрицательные числа		Числа с разными знаками	
Сложение	+	Сложить	−	Сложить	Знак числа с большим модулем	Вычесть из большего модуля меньший
Вычитание	Заменяем на сложение: $a - b = a + (-b)$					
Умножение	+	Перемно-жить	+	Перемно-жить	−	Перемно-жить
Деление	+	Поделить	+	Поделить	−	Поделить
	Знак ответа	**Действия с модулями**	**Знак ответа**	**Действия с модулями**	**Знак ответа**	**Действия с модулями**

Формулы сокращенного умножения

Квадрат суммы	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
Квадрат разности	$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
Куб суммы	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b +$ $+ 3ab^2 + b^3$
Куб разности	$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b +$ $+ 3ab^2 - b^3$
Разность квадратов	$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$
Сумма кубов	$a^3 + b^3 = (a+b) \times$ $\times (a^2 - ab + b^2)$
Разность кубов	$a^3 - b^3 = (a-b) \times$ $\times (a^2 + ab + b^2)$

Свойства степени

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^0 = 1$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$
$a^m : a^n = a^{m-n}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$	
$(a^m)^n = a^{mn}$		$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$
$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$

Пропорция

Пропорция $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ равносильна следующим равенствам:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}; \quad \frac{d}{b} = \frac{c}{a}; \quad \frac{b}{a} = \frac{d}{c}.$$

Основное свойство пропорции:

$$ad = bc$$

Свойства квадратного (арифметического) корня

$$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab} \qquad \sqrt{ab} = \sqrt{|a|} \cdot \sqrt{|b|}$$

$$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \qquad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{|a|}}{\sqrt{|b|}}$$

$$(\sqrt{a})^m = \sqrt{a^m} \qquad \sqrt{a^m} = (\sqrt{|a|})^m$$

Свойства корня n-й степени

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[nk]{a^k} \qquad (\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m}$$

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

$$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \cdot b}$$

Свойства числовых неравенств

a, b — любые числа
Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (свойство транзитивности).
Если $a > b$, то $a + c > b + c$ $(c \in R)$.
Если $a > b$ и c — положительное число, то $ac > bc$.
Если $a > b$ и c — отрицательное число, то $ac < bc$.
Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$.
a, b — положительные числа
Если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.
Если $a > b > 0$ и $c > d > 0$, то $ac > bd$.
Если $a > b > 0$ и $m \in N$, то $a^m > b^m$.
Если $a > b > 0$ и $m \in N$, то $\sqrt[m]{a} > \sqrt[m]{b}$

Двойное неравенство ($a < b < c$)

Сложение двойных неравенств

Если $a \leqslant b \leqslant c$ и $p \leqslant m < q$,
то $a + p \leqslant b + m < c + q$.

Умножение двойных неравенств с положительными членами

Если $0 < a < b < c$ и $0 < p < m < q$,
то $ap < bm < cq$.

Модуль числа

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0 \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}$$

Свойства модуля

$$|a| \geqslant 0$$

$$|ab| = |a| \cdot |b|$$

$$|a + b| \leqslant |a| + |b|$$

$$|-a| = |a|$$

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$$

$$|a - b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$$

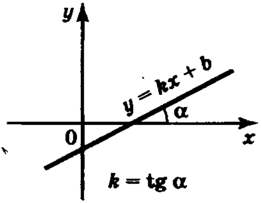
$$|a - b| = |b - a|$$

$$a^2 + b^2 \geqslant 2|ab|$$

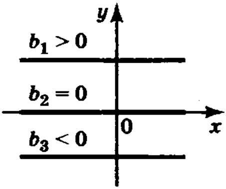
ФУНКЦИИ

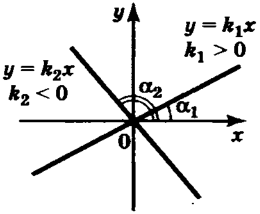
Линейная функция $y = kx + b$

График — ***прямая.***
Функция $y = kx$
(при $b = 0$) называется
прямая пропорциональность.



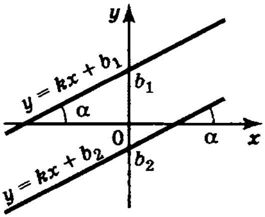
$y = b \quad (k = 0)$	$y = kx \quad (b = 0)$

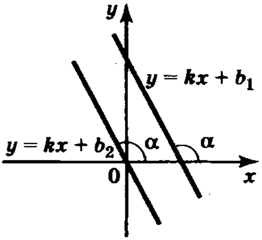




$$y = kx + b$$

$k > 0$	$k < 0$



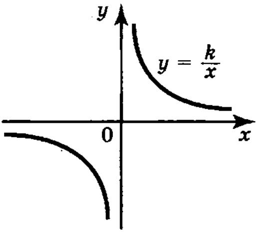
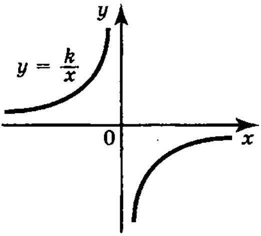


Дробно-линейная функция

$$y = \frac{k}{x} \quad (k \neq 0,\ x \neq 0)$$

(обратная пропорциональность)

График — *гипербола.*
Оси симметрии — прямые $y = x$ и $y = -x$.
Центр симметрии — начало координат (точка 0).

$k > 0$
Область определения: $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. Функция убывает на каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$. 
$k < 0$
Область определения: $(-\infty;\ 0) \cup (0;\ +\infty)$. Функция возрастает на каждом из промежутков $(-\infty;\ 0)$ и $(0;\ +\infty)$. 

Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$

Дискриминант: $D = b^2 - 4ac$,
$D > 0$ — два действительных корня,
$D = 0$ — один действительный корень,
$D < 0$ — нет действительных корней.

Формула корней	**Свойства корней (теорема Виета)**
Квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$	
$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$
Приведенное уравнение $(a = 1)$ $x^2 + px + q = 0$	
$x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$	$x_1 + x_2 = -p$ $x_1 \cdot x_2 = q$
Уравнение с четным вторым коэффициентом $(b = 2k)$ $ax^2 + 2kx + c = 0$	
$x_{1,2} = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$	$x_1 + x_2 = \frac{-2k}{a}$ $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

Квадратный трехчлен $ax^2 + bx + c$

Корни квадратного трехчлена:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

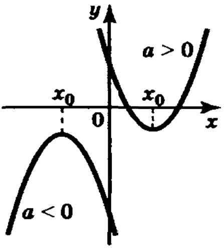
! **Чтобы найти корни квадратного трехчлена, нужно решить соответствующее квадратное уравнение $ax^2 + bx + c = 0$.**

Разложение квадратного трехчлена на множители	
$D < 0$	Не раскладывается
$D > 0$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$
$D = 0$	$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

Выделение квадрата двучлена из квадратного трехчлена
$ax^2 + bx + c =$ $= a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) =$ $= a\left(\left(x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a} \cdot x + \frac{b^2}{4a^2}\right) + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) =$ $= a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}$

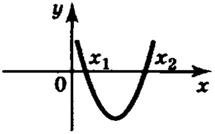
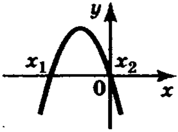
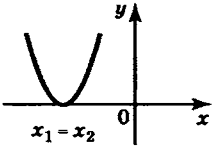
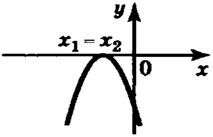
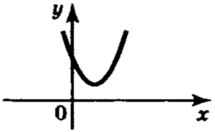
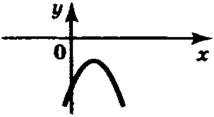
Квадратичная функция $y = ax^2 + bx + c$

График — *парабола.*
Ось симметрии — прямая $x = x_0$.
$a > 0$ — ветви вверх, при x_0 — наименьшее значение.
$a < 0$ — ветви вниз, при x_0 — наибольшее значение.
Координаты вершины параболы: $x_0 = -\dfrac{b}{2a}$, $y_0 = y(x_0)$.



Корни функции **(или нули функции) — это точки пересечения графика функции с осью** Ox.

! **Корни функции определяются как корни соответствующего квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$**

	$a > 0$	$a < 0$
$D > 0$ Два корня		
$D = 0$ Один корень		
$D < 0$ Нет корней		

Квадратное неравенство

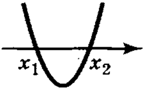
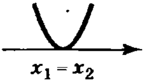
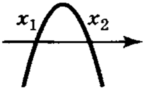
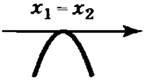
Решение квадратного неравенства:

1) найти корни соответствующего квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$;

2) схематично изобразить график квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$;

3) записать промежутки, на которых квадратичная функция положительна (неравенство $ax^2 + bx + c > 0$) или отрицательна (неравенство $ax^2 + bx + c < 0$).

① $ax^2 + bx + c > 0$ ② $ax^2 + bx + c \leqslant 0$

$a > 0$		$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
				
	①	$(-\infty; x_1) \cup$ $\cup (x_2; +\infty)$	$(-\infty; x_1) \cup$ $\cup (x_1; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
	②	$[x_1; x_2]$	$\{x_1\}$	$\varnothing$
$a < 0$		$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
				
	①	$(x_1; x_2)$	$\varnothing$	$\varnothing$
	②	$(-\infty; x_1] \cup$ $\cup [x_2; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$

Прогрессии

Арифметическая прогрессия	
Формула n-го члена	$a_n = a_1 + (n-1)d$
Характеристическое свойство	$\frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2} = a_n$
Сумма n первых членов	$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n$
Свойство	$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_k + a_{n-k}$
Геометрическая прогрессия	
Формула n-го члена	$b_n = b_1 \cdot q^{n-1}$
Характеристическое свойство	$b_{n-1} \cdot b_{n+1} = b_n^2$
Сумма n первых членов	$S_n = \frac{b_n q - b_1}{q-1} = b_1 \cdot \frac{1-q^n}{1-q}$
Свойство	$b_1 \cdot b_n = b_2 \cdot b_{n-1} = \ldots = b_k \cdot b_{n-k}$
Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии ($0 < \lvert q \rvert < 1$)	$S = \frac{b_1}{1-q}$

Средние величины

Среднее арифметическое

двух величин	$\dfrac{a+b}{2}$
n величин	$\dfrac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$

Среднее квадратичное

двух величин	$\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$
n величин	$\sqrt{\dfrac{1}{n}(a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2)}$

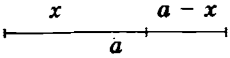
Среднее геометрическое (*среднее пропорциональное*)

двух величин	$\sqrt{ab}$
n величин	$\sqrt[n]{a_1\cdot a_2\cdot\ldots\cdot a_n}$

Золотое сечение

Величина a делится на части x и $a-x$ так,

чтобы $x=\sqrt{a(a-x)}=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\cdot a\approx 0{,}618a$



Тригонометрические тождества

Основные тождества	
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad$ $\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ $\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$ $1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$	
Формулы сложения	
$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \cos\alpha\sin\beta$ $\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$ $\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \dfrac{\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta}{1 \mp \operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{tg}\beta}$	
Формулы половинного угла	**Формулы двойного угла**
$\left\|\cos\dfrac{\alpha}{2}\right\| = \sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{2}}$ $\left\|\sin\dfrac{\alpha}{2}\right\| = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} =$ $= \dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$	$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$ $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha$ $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1-\cos 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}$$

Переход от суммы к произведению

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha\pm\beta}{2}\cos\frac{\alpha\mp\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{tg}\beta = \frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \pm\frac{\sin(\alpha\pm\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \pm \operatorname{ctg}\beta = \pm\frac{\cos(\alpha\mp\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}$$

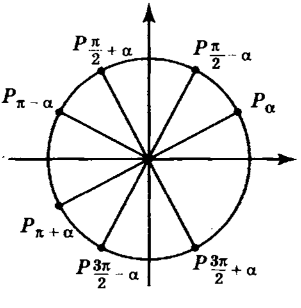
Переход от произведения к сумме

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$

Формулы приведения			
t	$\cos t$	$\sin t$	$\operatorname{tg} t$
$\pi-\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
$\pi+\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}-\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$
$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$



Логарифмы

Определение логарифма
Логарифмом числа b по основанию a называется показатель степени, в которую нужно возвести a, чтобы получить b. $\log_a b = c \Leftrightarrow a^c = b$
Свойства логарифма
$b^{\log_b a} = a$ $\log_a a = 1$ $\log_a 1 = 0$ $\log_a a^m = m$

Действия с логарифмами	
Логарифм произведения	$\log_c (ab) = \log_c a + \log_c b$
Логарифм частного	$\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$
Логарифм степени	$\log_c a^k = k \log_c a$
Логарифм корня	$\log_c \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \log_c a$
Переход к новому основанию	$\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$

Дополнительные формулы
$\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}$ $\dfrac{\log_n b}{\log_n c} = \dfrac{\log_m b}{\log_m c} = \log_c b$ $\log_n b \cdot \log_m c = \log_m b \cdot \log_n c$ $a^{\log_n b} = b^{\log_n a}$
Сравнение логарифмов
Если $0 < a < 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то $\log_a x_1 > \log_a x_2$ **(знак неравенства меняется).** **Если $a > 1$ и $0 < x_1 < x_2$, то** $\log_a x_1 < \log_a x_2$ **(знак неравенства не меняется).**
Если $1 < a < b$ и $x > 1$, то $\log_a x > \log_b x.$ **Если $0 < a < b < 1$ и $x > 1$, то** $\log_a x > \log_b x.$ **Если $1 < a < b$ и $0 < x < 1$, то** $\log_a x < \log_b x.$ **Если $0 < a < b < 1$ и $0 < x < 1$, то** $\log_a x < \log_b x.$

Пределы

Свойства пределов

$$\lim_{x \to a} c = c$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

$$\lim_{x \to a} (k \cdot f(x)) = k \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

Пределы некоторых последовательностей

$a > 0$, $b > 1$, $\alpha > 0$, p — натуральное число

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \qquad \lim_{n \to \infty} n(\sqrt[n]{a} - 1) = \ln a$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e \qquad \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{\log_b n}{n^\alpha} = 0$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{n^\alpha}{b^n} = 0 \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{a} = 1 \qquad \lim_{n \to \infty} \frac{\operatorname{tg} \frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1^p + 2^p + \ldots + n^p}{n^{p+1}} = \frac{1}{p+1}$$

Производная

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Вторая производная: $f''(x) = (f'(x))'$

Производные высших порядков:

$$f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$$

Производные некоторых функций

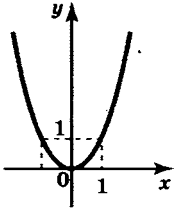
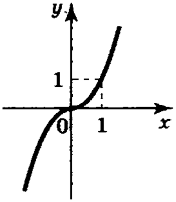
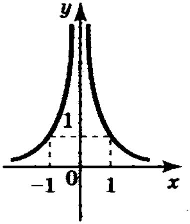
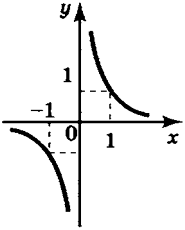
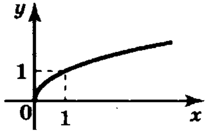
$C' = 0$ (C — константа)	$(e^x)' = e^x$
$x' = 1$	$(a^x)' = a^x \ln a$
$(x^2)' = 2x$	$(\sin x)' = \cos x$
$(x^n)' = nx^{n-1}$	$(\cos x)' = -\sin x$
$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	$(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
$\left(\frac{1}{x^n}\right)' = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$	$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$	$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}$
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$

$$(\lg x)' = \frac{1}{x} \lg e$$

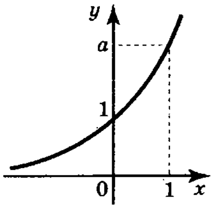
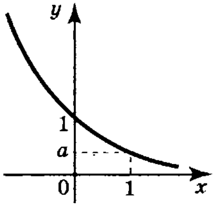
Правила вычисления производных
$u = u(x)$, $v = v(x)$, c – постоянная $(cu)' = cu'$ $(u + v)' = u' + v'$ $(u \cdot v)' = u'v + uv'$ $\left(\frac{u}{c}\right)' = \frac{u'}{c}$ $(u - v)' = u' - v'$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$
Производная сложной функции
$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$ $(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u'$ $(\sin u)' = \cos u \cdot u'$ $(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$ $(\operatorname{tg} u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$ $(\operatorname{ctg} u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$ $(\log_a u)' = \frac{1}{u \ln a} \cdot u'$ $(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$ $(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$ $(e^u)' = e^u \cdot u'$
Производная обратной функции
$f(x)$ и $g(x)$ взаимно обратные функции. Если существует $f'(x_0)$ и $g'(x_0)$, то $g'(x_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.
Свойства производных высшего порядка
$(u + v)^{(n)} = u^{(n)} + v^{(n)}$ $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(k)} v^{(n-k)}$

ФУНКЦИИ

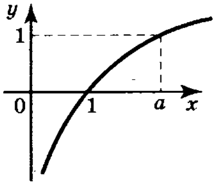
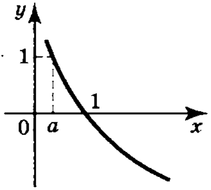
Степенная функция $y = x^n$

<table>
<tr><td></td><td>n — четное</td><td>n — нечетное</td></tr>
<tr><td>$n > 0$</td><td>$D(y) = (-\infty; +\infty)$
$E(y) = [0; +\infty)$</td><td>$D(y) = (-\infty; +\infty)$
$E(y) = (-\infty; +\infty)$</td></tr>
<tr><td>$n < 0$</td><td>$D(y) = (-\infty; 0) \cup$
$\cup\ (0; +\infty)$
$E(y) = (0; +\infty)$</td><td>$D(y) = E(y) =$
$= (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$</td></tr>
<tr><td>$0 < n < 1$</td><td colspan="2">$D(y) = [0; +\infty)$; $E(y) = [0; +\infty)$</td></tr>
</table>

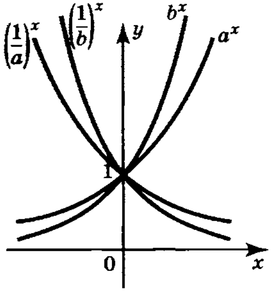
Показательная функция $y = a^x$
$(a > 0,\ a \neq 1)$

$a > 1$	$0 < a < 1$
	
$D(y) = (-\infty; +\infty)$ $E(y) = (0; +\infty)$ Возрастающая функция	$D(y) = (-\infty; +\infty)$ $E(y) = (0; +\infty)$ Убывающая функция

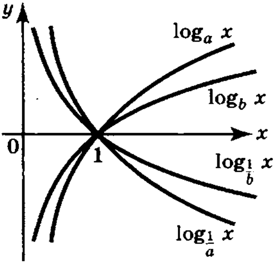
Логарифмическая функция $y = \log_a x$
$(a > 0,\ a \neq 1,\ x > 0)$

$a > 1$	$0 < a < 1$
	
$D(y) = (0; +\infty)$ $E(y) = (-\infty; +\infty)$ Возрастающая функция	$D(y) = (0; +\infty)$ $E(y) = (-\infty; +\infty)$ Убывающая функция

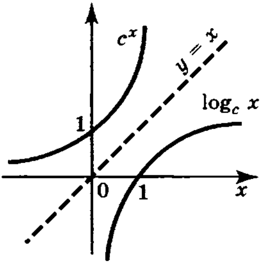
Сравнение графиков показательной и логарифмической функций



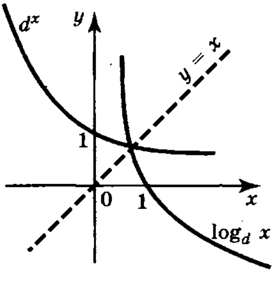
$\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 1 < a < b$



$\frac{1}{b} < \frac{1}{a} < 1 < a < b$

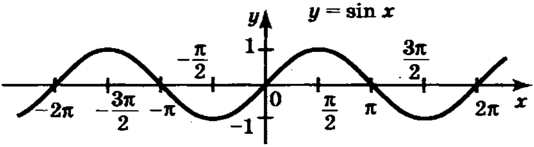
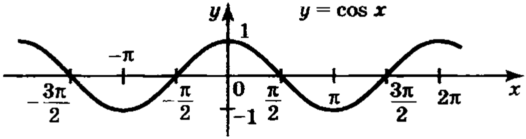


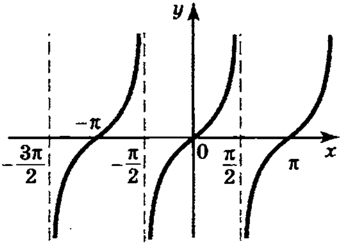
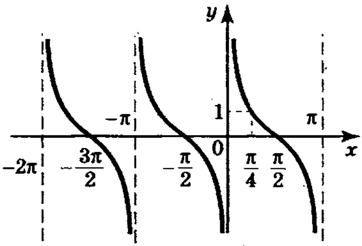
$c > 1$



$d < 1$

Тригонометрические функции

$y = \sin x$
$D(y) = (-\infty; +\infty)$; $E(y) = [-1; 1]$. Наименьший положительный период $T = 2\pi$. Нечетная функция. Нули функции: $x = \pi k$. Функция возрастает на промежутках $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$; убывает на промежутках $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$. 
$y = \cos x$
$D(y) = (-\infty; +\infty)$; $E(y) = [-1; 1]$. Наименьший положительный период $T = 2\pi$. Четная функция. Нули функции: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k$. Функция возрастает на промежутках $[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$; убывает на промежутках $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$. 

$y = \operatorname{tg} x$
$D(y) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k;\ \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$; $E(y) = (-\infty; +\infty)$.   Наименьший положительный период $T = \pi$.   Нечетная функция.   Функция возрастает на каждом промежутке из области определения.   Асимптоты: $x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$.   
$y = \operatorname{ctg} x$
$D(y) = (\pi k; 2\pi k)$; $E(y) = (-\infty; +\infty)$.   Наименьший положительный период $T = \pi$.   Нечетная функция.   Функция убывает на каждом промежутке из области определения.   Асимптоты: $x = \pi k,\ k \in Z$.   

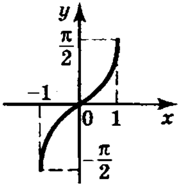
Обратные тригонометрические функции

$y = \arcsin x$

$D(y) = [-1; 1]$.

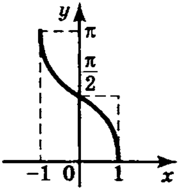
$E(y) = \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Нечетная функция.
Возрастает на всей области определения.



$y = \arccos x$

$D(y) = [-1; 1]$.
$E(y) = [0; \pi]$.
Убывает на всей области определения.



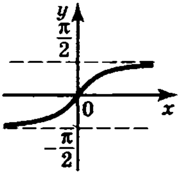
$y = \operatorname{arctg} x$

$D(y) = (-\infty; +\infty)$.

$E(y) = \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$.

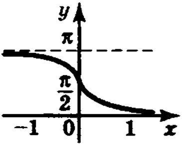
Нечетная функция.
Возрастает на всей области определения.

Асимптоты: $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$.



$y = \operatorname{arcctg} x$

$D(y) = (-\infty; +\infty)$.
$E(y) = (0; \pi)$.
Убывает на всей области определения.
Асимптоты: $x = 0$ и $x = \pi$.



Значения тригонометрических функций некоторых углов							
α, рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$
α°	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не опр.	0	не опр.
$\operatorname{ctg}\alpha$	не опр.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не опр.	0

Соотношения между обратными тригонометрическими функциями

$$\arcsin x = -\arcsin(-x) = \frac{\pi}{2} - \arccos x$$

$$\arccos x = \pi - \arccos(-x) = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$$

$$\operatorname{arctg} x = -\operatorname{arctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcctg} x$$

$$\operatorname{arcctg} x = \pi - \operatorname{arcctg}(-x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$$

Интеграл

Неопределенный интеграл — это выражение $F(x) + C$ для всех первообразных функций от данной функции $f(x)$:

$$F(x) + C = \int f(x)dx$$

Основное свойство

$$\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$$

Интегралы некоторых функций

$$\int k dx = kx + C \qquad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C \qquad \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C \qquad \int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{ctg} x + C$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \qquad \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C$$

Основные правила интегрирования

$$\int k \cdot f(x)dx = k \cdot \int f(x)dx$$

$$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

Формула Ньютона-Лейбница

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b$$

Свойства определенного интеграла

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx = k\cdot\int_a^b f(x)dx$$

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

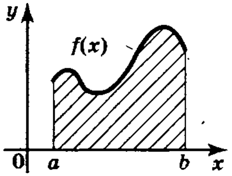
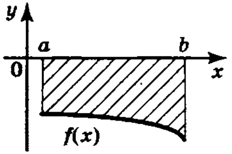
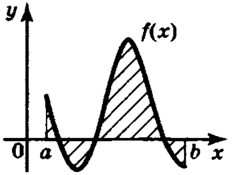
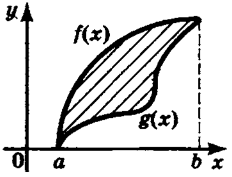
Если $f(x)$ четная, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 2\int_0^a f(x)dx$.

Если $f(x)$ нечетная, то $\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$.

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a),$$

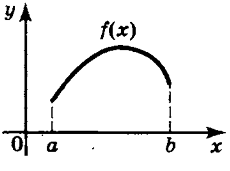
где M и m — наибольшее и наименьшее значения $f(x)$ на отрезке $[a; b]$.

Вычисления с помощью интеграла

Площадь криволинейной трапеции	
$S = \int\limits_a^b f(x)dx$	
$S = -\int\limits_a^b f(x)dx$	
$S = \int\limits_a^b \lvert f(x)\rvert dx$	
$S = \int\limits_a^b (f(x) - g(x))dx$	

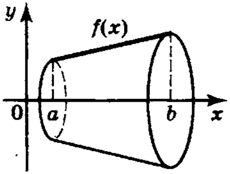
Длина кривой

$$l = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$



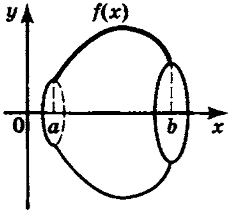
Площадь поверхности вращения

$$S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$



Объем тела вращения

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$$



Комбинаторика

Факториал
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$
Основное свойство факториала
$n! = n \cdot (n-1)!$
Размещения из n по m элементов
Соединения, отличающиеся самими элементами или их порядком. $A_n^m = \dfrac{n!}{(n-m)!} = n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)$
Перестановки
Соединения, отличающиеся только порядком элементов. $P_n = n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n;\quad P_n = A_n^n$
Сочетания из n по m элементов
Соединения, отличающиеся только самими элементами. $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!} = \dfrac{A_n^m}{P_m} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot m}$

Свойства сочетаний

$$C_n^m = C_n^{n-m} \qquad C_{n+1}^{m+1} = C_n^m + C_n^{m+1}$$

$$C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$$

Бином Ньютона

$$(a + b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 +$$

$$+ \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + b^n$$

$$C_n^1 = n; \quad C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}; \quad C_n^k = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Треугольник Паскаля

$n = 0$								1							
$n = 1$							1		1						
$n = 2$						1		2		1					
$n = 3$					1		3		3		1				
$n = 4$				1		4		6		4		1			
$n = 5$			1		5		10		10		5		1		
$n = 6$		1		6		15		20		15		6		1	
$n = 7$	1		7		21		35		35		21		7		1

По этой схеме определяются биномиальные коэффициенты.

Комплексные числа

$$z = x + iy \quad (i^2 = -1)$$

Re $z = x$ – *действительная часть* комплексного числа,
Im $z = y$ – *мнимая часть* коплексного числа.

Комплексно-сопряженные числа

$$z = a + ib \quad \text{и} \quad \bar{z} = a - ib$$

Действия с комплексными числами

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

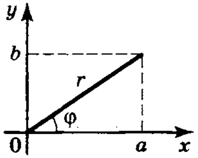
$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \quad (z_2 \neq 0)$$

Тригонометрическая форма записи комплексных чисел

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$



Модуль коплексного числа

$$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Аргумент комплексного числа

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi k \quad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $\arg z = \varphi$ — главное значение аргумента.

Показательная форма записи комплексных чисел

$$z = re^{i\phi}$$

Формула Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

Произведение и частное комплексных чисел

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)} =$$

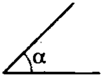
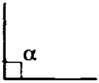
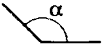
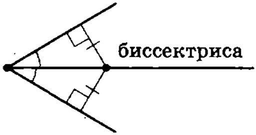
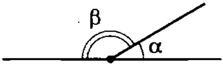
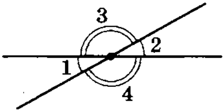
$$= r_1 r_2[\cos (\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 + \varphi_2)]$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)} =$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos (\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin (\varphi_1 - \varphi_2)]$$

$$(z_2 \neq 0)$$

Углы

Виды углов	Биссектриса угла
 Острый угол $\alpha < 90°$  Прямой угол $\alpha = 90°$  Тупой угол $\alpha > 90°$  Развернутый угол $\alpha = 180°$	*Биссектриса угла* — луч, выходящий из вершины угла и делящий его пополам.  **!** Точки биссектрисы находятся на одинаковом расстоянии от сторон угла.
Смежные углы	**Вертикальные углы**
 α и β — смежные углы $\alpha + \beta = 180°$ **!** Угол между биссектрисами смежных углов равен 90°.	 Вертикальные углы: $\angle 1$ и $\angle 2$, $\angle 3$ и $\angle 4$, причем $\angle 1 = \angle 2$, $\angle 3 = \angle 4$.

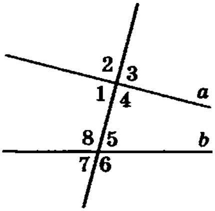
! При пересечении двух прямых образуются 2 пары вертикальных углов и 4 пары смежных углов.

Прямые и секущая

$\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 8$ — Накрест лежащие углы

$\angle 1$ и $\angle 8$, $\angle 4$ и $\angle 5$ — Односторонние углы

$\angle 1$ и $\angle 7$, $\angle 2$ и $\angle 8$, $\angle 3$ и $\angle 5$, $\angle 4$ и $\angle 6$ — Соответственные углы

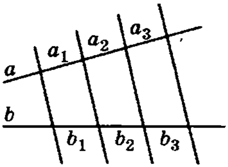


! $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$,
$\angle 5 = \angle 7$, $\angle 6 = \angle 8$.

Признаки параллельности прямых

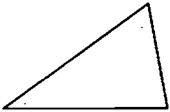
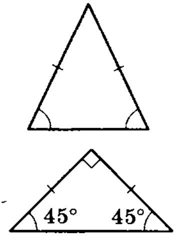
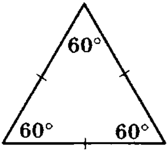
1) Если накрест лежащие углы равны, то $a \parallel b$.
2) Если соответственные углы равны, то $a \parallel b$.
3) Если сумма односторонних углов равна 180°, то $a \parallel b$.

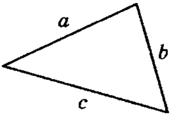
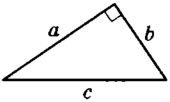
Теорема Фалеса

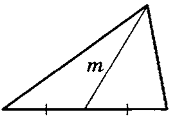
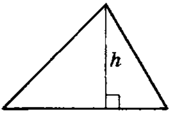


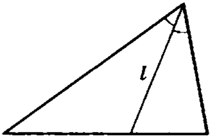
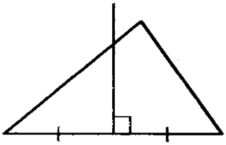
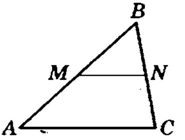
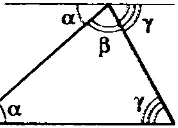
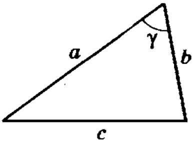
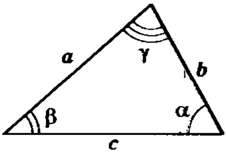
Если на прямой отложены равные отрезки ($a_1 = a_2 = a_3 = \ldots$), то параллельные прямые, проведенные через их концы и пересекающие другую прямую (b), отсекут на второй прямой равные между собой отрезки ($b_1 = b_2 = b_3 \ldots$).

Треугольник

Разно-сторонний	Равно-бедренный	Равно-сторонний
		

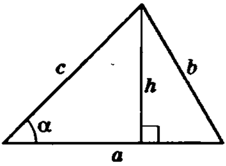
Неравенство треугольника	Теорема Пифагора
 $a + b > c$ $a + c > b$ $b + c > a$	 $c^2 = a^2 + b^2$

Медиана	Высота
 Точка пересечения медиан — центр тяжести.	 Точка пересечения высот — ортоцентр.

<table>
<tr><th>Биссектриса</th><th>Серединный перпендикуляр</th></tr>
<tr><td>
Точка пересечения биссектрис — центр вписанной окружности.</td><td>
Точка пересечения серединных перпендикуляров — центр описанной окружности.</td></tr>
<tr><th>Средняя линия</th><th>Сумма углов</th></tr>
<tr><td>
MN — средняя линия
$MN \parallel AC;\ MN = \frac{1}{2}AC$</td><td>
$\alpha + \beta + \gamma = 180°$</td></tr>
<tr><th>Теорема косинусов</th><th>Теорема синусов</th></tr>
<tr><td>
$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\gamma$</td><td>
$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$</td></tr>
</table>

Площадь треугольника

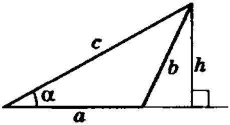
$S = \frac{1}{2} ah$



$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$,

где $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$

$S = \frac{1}{2} ac \sin \alpha$

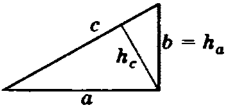


$S = pr$, r — радиус вписанной окружности

$S = \frac{abc}{4R}$, R — радиус описанной окружности

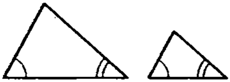
В прямоугольном треугольнике:

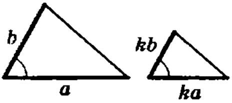
$$S = \frac{1}{2} ab = \frac{1}{2} ch_c$$

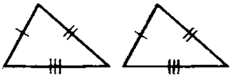
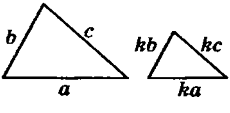


Равные и подобные треугольники

<table>
<tr><th>Признаки равенства треугольников</th><th>Признаки подобия треугольников</th></tr>
<tr><td>По двум сторонам и углу между ними

</td><td>По двум углам

</td></tr>
<tr><td>По стороне и двум прилежащим к ней углам

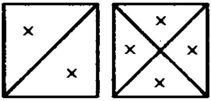
</td><td>По двум сторонам и углу между ними


</td></tr>
<tr><td>По трем сторонам

</td><td>По трем сторонам


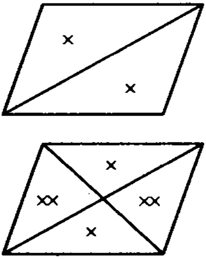
</td></tr>
</table>

Примеры равных треугольников

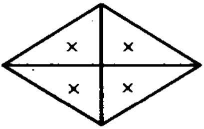
В квадрате



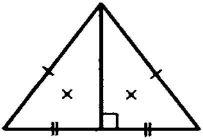
В параллелограмме



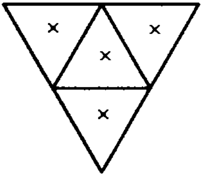
В ромбе



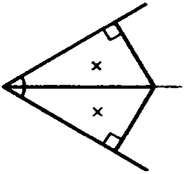
В равнобедренном треугольнике



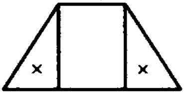
В равностороннем треугольнике



В углу

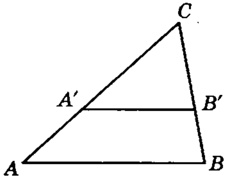


В равнобедренной трапеции

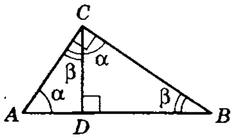


Примеры подобных треугольников

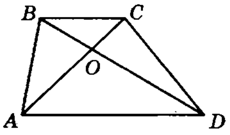
В произвольном треугольнике:
если $AB \parallel A'B'$,
то $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C$.



В прямоугольном треугольнике:
если $\angle ACB = 90°$ и $CD \perp AB$,
то $\triangle ABC \sim \triangle ACD \sim \triangle CBD$.

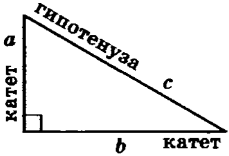


В произвольной трапеции:
если $AD \parallel BC$,
то $\triangle AOD \sim \triangle COB$.



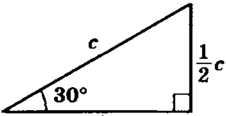
! Площади подобных треугольников относятся как квадраты длин соответствующих сторон (или других линейных элементов).

Прямоугольный треугольник

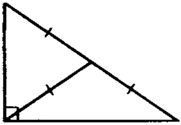


Теорема Пифагора

$c^2 = a^2 + b^2$



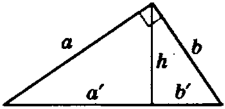
***Катет против угла в* 30° равен половине гипотенузы.**



Медиана к гипотенузе:

1) равна половине гипотенузы;

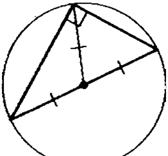
2) делит треугольник на два равнобедренных треугольника.



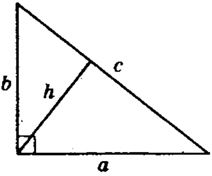
Высота, проведенная к гипотенузе:

1) равна $h = \sqrt{a'b'}$;

2) делит треугольник на два, подобных ему треугольника.



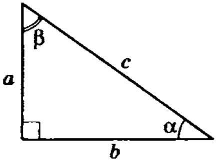
***Центр описанной окружности* лежит на середине гипотенузы.**



Площадь

$S = \frac{1}{2}ab \quad S = \frac{1}{2}ch$

Тригонометрические функции в прямоугольном треугольнике



$\cos\alpha = \frac{b}{c}$, $\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$, $\mathrm{ctg}\,\alpha = \frac{b}{a}$

$\cos\beta = \frac{a}{c}$ $\sin\beta = \frac{b}{c}$

$\mathrm{tg}\,\beta = \frac{b}{a}$ $\mathrm{ctg}\,\beta = \frac{a}{b}$

Решение прямоугольных треугольников

$$a = c\sin\alpha = b\,\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{b}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$$

$$b = c\cos\alpha = \frac{a}{\mathrm{tg}\,a} = a\,\mathrm{ctg}\,\alpha$$

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad \alpha + \beta = 90^\circ$$

Приближенные значения тригонометрических функций некоторых углов

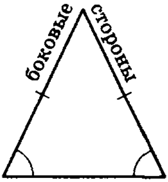
α°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	
$\sin\alpha \approx$	0,17	0,34	0,50	0,64	0,77	0,87	0,94	0,98	$\approx \cos\alpha$
$\mathrm{tg}\,\alpha \approx$	0,18	0,36	0,58	0,84	1,19	1,73	2,75	5,67	$\approx \mathrm{ctg}\,\alpha$
	80°	70°	60°	50°	40°	30°	20°	10°	α°

Для малых положительных чисел

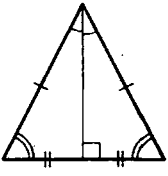
$\sin\alpha \approx \alpha$ и $\mathrm{tg}\,\alpha \approx \alpha$.

Равнобедренный треугольник

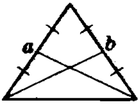
1) Углы при основании равны.



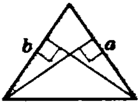
2) Медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.



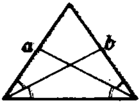
3) Медианы биссектрисы и высоты, проведенные к боковым сторонам, равны.



$m_a = m_b$



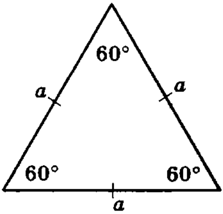
$h_a = h_b$



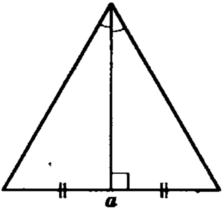
$l_a = l_b$

4) Углы при основании равнобедренного прямоугольного треугольника равны 45°.

Равносторонний треугольник



Все стороны равны.
Все углы равны.



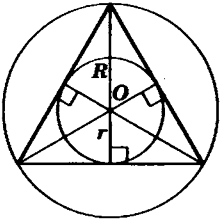
Любая медиана является также высотой и биссектрисой.
Все медианы (высоты, биссектрисы) равны между собой.

$$S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$$

$$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$

$$r = \frac{1}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{6}$$

$$R = \frac{2}{3}h = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$



Точка пересечения медиан (высот, биссектрис) является центром и вписанной, и описанной окружностей, причем $R = 2r$.

<table>
<tr>
<td>

Параллелограмм — это четырехугольник, стороны которого попарно параллельны.

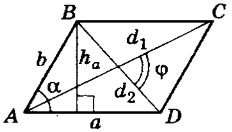
Свойства

1) Стороны попарно равны.

2) Диагонали делятся точкой пересечения пополам.

3) Противоположные углы равны.

</td>
<td>



$AB \parallel CD$

$BC \parallel AD$

Периметр: $P = 2(a + b)$.

Площадь: $S = ah_a =$

$= ab \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$.

</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">

Виды параллелограммов

</td>
</tr>
<tr>
<td>

Ромб — это параллелограмм, все стороны которого равны.

Свойства

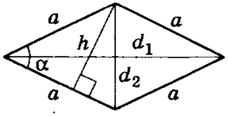
Свойства 1) — 3).

4) Диагонали перпендикулярны.

5) Диагонали — биссектрисы углов.

6) В любой ромб можно вписать окружность.

</td>
<td>



Периметр: $P = 4a$.

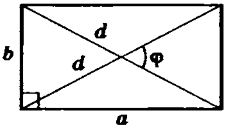
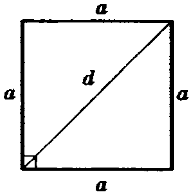
Площадь: $S = ah =$

$= a^2 \sin \alpha = \frac{1}{2} d_1 d_2$.

Радиус вписанной окружности:

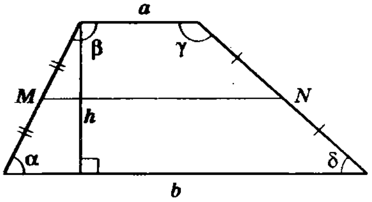
$r = \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} a \sin \alpha$.

</td>
</tr>
</table>

Виды параллелограммов (***продолжение***)	
Прямоугольник — это параллелограмм, все углы которого прямые. *Свойства* Свойства 1) — 3). 7) Диагонали равны. 8) Около любого прямоугольника можно описать окружность.	 Периметр: $P = 2(a + b)$. Площадь: $S = ab = \frac{1}{2} d^2 \sin \varphi$. Радиус описанной окружности: $R = \frac{1}{2} d = \frac{1}{2} \sqrt{a^2 + b^2}$.
Квадрат — это прямоугольник, у которого все стороны равны (или ромб с прямыми углами). *Свойства* Свойства 1) — 3). Свойства 4) — 6). Свойства 7) — 8).	 $P = 4a$ $S = a^2 = \frac{1}{2} d^2$ $d = a\sqrt{2}$ $r = \frac{1}{2} a$ $R = \frac{1}{2} d$

Трапеция

Трапеция — это четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие — непараллельны.



MN — средняя линия

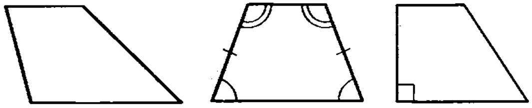
$MN = \frac{1}{2}(a + b)$

Площадь: $S = \frac{1}{2}(a + b)h.$

Свойство углов: $\alpha + \beta = \gamma + \delta = 180°$.

Виды трапеций

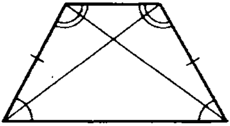
Произвольная Равнобедренная Прямоугольная



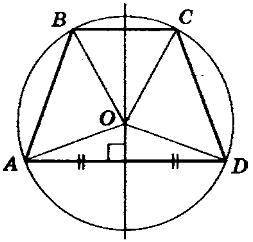
Свойства равнобедренной трапеции

1) Диагонали равны.

2) Углы при одном основании равны.



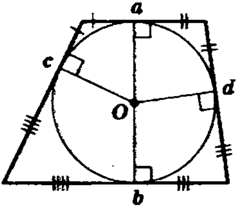
3) Около любой равнобедренной трапеции можно описать окружность (ее центр лежит на серединном перпендикуляре к основанию).



4) В равнобедренную трапецию можно вписать окружность, если средняя линия равна боковой стороне.

Трапеция и окружность

Описать окружность можно только около равнобедренной трапеции.



Вписать окружность можно только в трапецию, у которой сумма длин оснований равна сумме длин боковых сторон:

$$a + b = c + d.$$

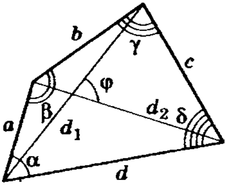
Многоугольники

Произвольный выпуклый четырехугольник

Свойство углов:
$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 360°$.

Площадь: $S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin \varphi$.

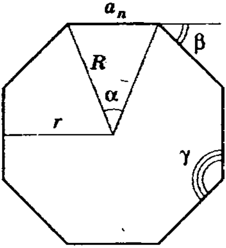
Описать окружность можно только,
если $\alpha + \gamma = \beta + \delta = 180°$.
Вписать окружность можно, если $a + c = b + d$.



Правильный n-угольник

Центральный угол
$\alpha = 360° : n$.
Внешний угол
$\beta = 360° : n$.
Внутренний угол
$\gamma = 180° - \beta$.

$$a_n = 2\sqrt{R^2 - r^2} = 2R \sin\frac{\alpha}{2} = 2r \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$$



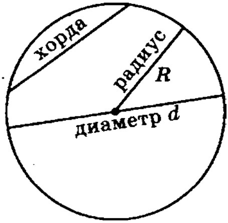
Радиус описанной окр.	Радиус вписанной окр.
$R = \dfrac{a_n}{2\sin\frac{\alpha}{2}}$	$r = \dfrac{a_n}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}$

Площадь

$$S = \frac{1}{2} n a_n r = n r^2 \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} n R^2 \sin\alpha = \frac{1}{4} n a_n^2 \operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}$$

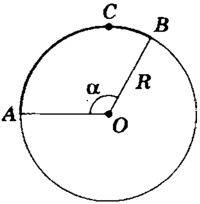
Правильные многоугольники				
Число сторон	Центральный угол	Радиус		Площадь
		вписанной окружности	описанной окружности	
n	α	r	R	S
3	60°	$\frac{a\sqrt{3}}{6}$	$\frac{a\sqrt{3}}{3}$	$\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
4	90°	$\frac{a}{2}$	$\frac{a\sqrt{2}}{2}$	a^2
6	120°	$\frac{a\sqrt{3}}{2}$	a	$\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$
8	135°	$\frac{a(1+\sqrt{2})}{2}$	$\frac{a\sqrt{4+2\sqrt{2}}}{2}$	$2a^2(1+\sqrt{2})$
12	150°	$\frac{a(2+\sqrt{3})}{2}$	$a \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}}$	$3a^2(2+\sqrt{3})$

Окружность



Длина окружности:

$$C = 2\pi R = \pi d$$

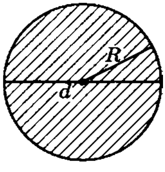


Длина дуги:

$$ACB = \alpha R = \frac{\pi\varphi^\circ}{180^\circ} \cdot R,$$

где α — величина угла в радианах,
φ — в градусах.

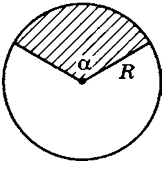
Круг



Площадь круга:

$$S = \pi R^2 = \frac{\pi d^2}{4}$$

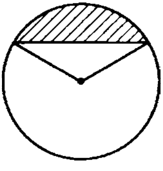
Сектор



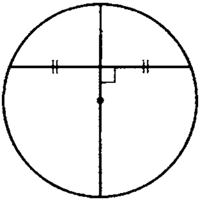
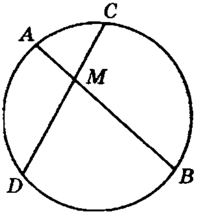
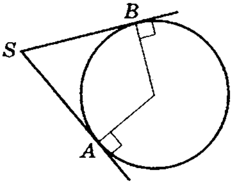
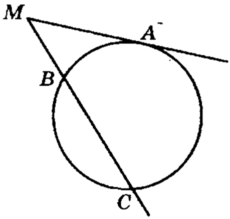
Площадь сектора:

$$S = \frac{1}{2} R^2 \alpha$$

Сегмент



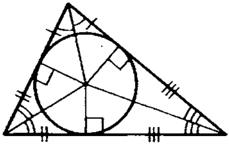
Площадь сегмента равна площади сектора без треугольника.

<table>
<tr><th colspan="2">Свойства хорд</th></tr>
<tr>
<td>Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам.
</td>
<td>$AM \cdot MB = CM \cdot MD$
</td>
</tr>
<tr><th>Свойства касательных</th><th>Секущая и касательная</th></tr>
<tr>
<td>Радиус, проведенный к точке касания, перпендикулярен касательной.

$SA = SB$
Отрезки касательных, проведенных из одной точки, равны.</td>
<td>$MA^2 = MB \cdot MC$
</td>
</tr>
</table>

Вписанная окружность

В любой треугольник можно вписать окружность. Центр ее — точка пересечения биссектрис.

Радиус $r = \frac{S}{p}$ (S — площадь, p — полупериметр).



! Точки касания отсекают на сторонах треугольника попарно равные отрезки.

! Центр вписанной окружности равноудален от сторон треугольника.

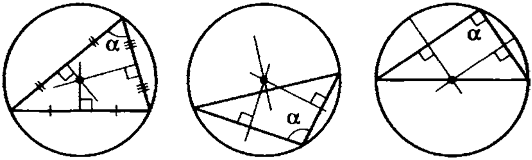
Описанная окружность

Около любого треугольника можно описать окружность.

Центр ее — точка пересечения серединных перпендикуляров.

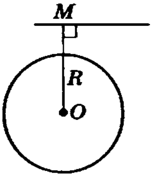
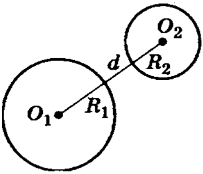
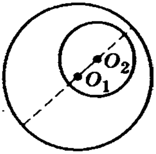
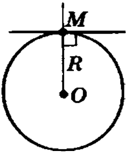
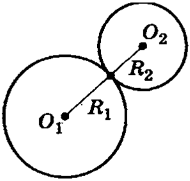
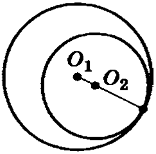
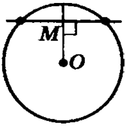
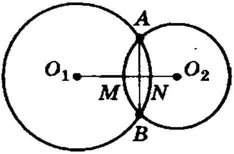
Радиус $R = \frac{abc}{4S}$ (a, b, c — длины сторон Δ,

S — его площадь).



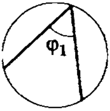
$\alpha < 90°$	$\alpha > 90°$	$\alpha = 90°$
центр — внутри	центр — вне	центр — на гипотенузе

! Центр описанной окружности равноудален от вершин треугольника.

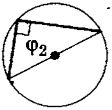
Прямая и окружность	**Две окружности**
Нет общих точек	
 $R < OM$	 $R_1 + R_2 < d$  $R_1 - R_2 > d$
Одна общая точка	
 $R = OM$	 $R_1 + R_2 = d$  $R_1 - R_2 = d$
Две общие точки	
 $R > OM$	 $MN = R_1 + R_2 - d$

Углы в окружности

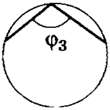
Вписанные углы



φ_1 — острый

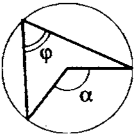


φ_2 — прямой

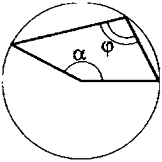


φ_3 — тупой

Измерение углов

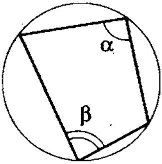


$$\varphi = \frac{1}{2}\alpha$$

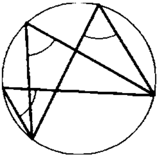


$$\varphi = 180° - \frac{1}{2}\alpha$$

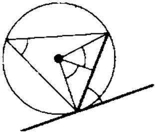
! Углы, опирающиеся на одну дугу, либо равны, либо дают в сумме 180°.



$$\alpha + \beta = 180°$$



Угол между касательной и хордой

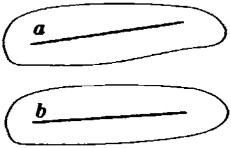
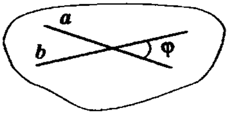
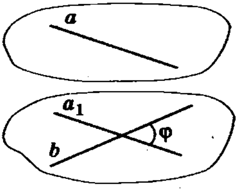


равен вписанному углу, опирающемуся на ту же хорду (или половине центрального угла).

Декартовы координаты на плоскости

$A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$	
Расстояние между точками	
$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$	
Координаты середины отрезка AB	
$x = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$; $y = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$	
Уравнение прямой на плоскости	
Общее уравнение: $ax + by + c = 0$. Если $a = 0$, прямая параллельна Ox; если $b = 0$, прямая параллельна Oy; если $c = 0$, прямая проходит через начало координат. *С угловым коэффициентом*: $y = kx + b$, k — тангенс угла наклона прямой к оси Ox.	
Взаимное расположение прямых	
$y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ Условие параллельности: $k_1 = k_2$. Условие перпендикулярности: $k_1 \cdot k_2 = -1$.	
Уравнение окружности	
С центром $O(0; 0)$: $x^2 + y^2 = R^2$	с центром в $A(a; b)$: $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$

Углы в пространстве

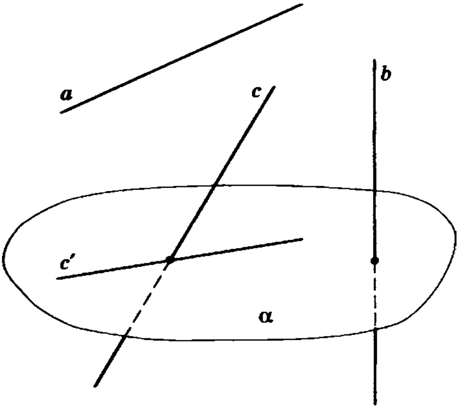
Угол между прямыми	
1) Угол между параллельными прямыми. Если $a \parallel b$, то $\angle(a, b) = 0$.	
2) Угол между пересекающимися прямыми. $\angle(a, b) = \varphi$.	
3) Угол между скрещивающимися прямыми. Если a и b — скрещиваются, то $\angle(a, b) = \angle(a_1, b) = \varphi$, где $a_1 \parallel a$.	

Угол между прямой и плоскостью

1) Прямая параллельна плоскости, если она параллельна какой-либо прямой этой плоскости.
Если $a \parallel \alpha$, то $\angle(a, \alpha) = 0°$.

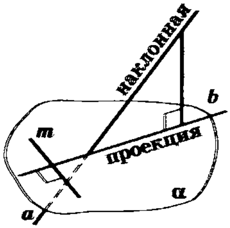
2) Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым этой плоскости.
Если $b \perp \alpha$, то $\angle(b, \alpha) = 90°$.

3) Прямая пересекает плоскость под углом, не равным 90°.
Тогда $\angle(c, \alpha) = \angle(c, c')$,
где c' — проекция c на α.



Теорема о трех перпендикулярах

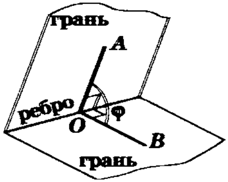
Если прямая на плоскости перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и наклонной.
(Если $m \perp b$, то $m \perp a$.)



Если прямая перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и ее проекции на ту же плоскость.
(Если $m \perp a$, то $m \perp b$.)

Двугранный угол

Двугранный угол измеряется величиной своего линейного угла:
$\angle\varphi = \angle AOB$, где AO и OB — перпендикулярны ребру двугранного угла.



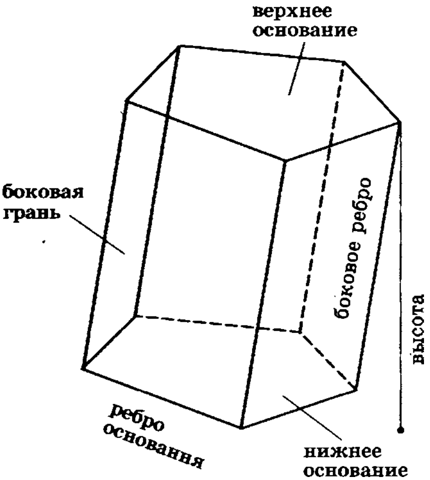
Угол между плоскостями

Угол между параллельными плоскостями равен 0°.
Угол между пересекающимися плоскостями равен меньшему из двугранных углов, образовавшихся при пересечении плоскостей.

МНОГОГРАННИКИ

Призма

Основания призмы — равные многоугольники, лежащие в паралельных плоскостях.
Боковые ребра параллельны друг другу.
Боковые грани параллелограммы.
Ребра оснований попарно параллельны.
Высота призмы — расстояние между плоскостями оснований.

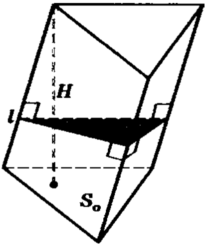


Наклонная призма

Боковые ребра не перпендикулярны основаниям.

Боковые грани — параллелограммы.

Перпендикулярное сечение — это сечение плоскостью, перпендикулярной боковому ребру.



$P_\perp$ — периметр перпендикулярного сечения, $S_\perp$ — его площадь.

Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = P_\perp \cdot l$.

Площадь полной поверхности: $S_{полн} = 2S_о + S_{бок}$.

Объем: $V = S_о \cdot H = S_\perp \cdot l$.

Прямая призма

Боковые ребра перпендикулярны основаниям.

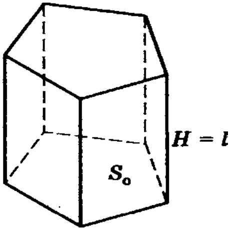
Боковые грани — прямоугольники.

Высота равна боковому ребру.

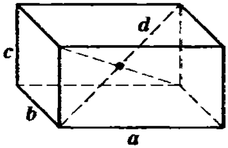
$S_{бок} = P_о \cdot H$ ($P_о$ — периметр основания).

$S_{полн} = 2S_о + S_{бок}$.

Объем: $V = S_о \cdot H$.



Прямоугольный параллелепипед



Прямоугольный параллелепипед — это прямая призма, в основании которой — прямоугольник.
Все грани — прямоугольники.

Все диагонали параллелепипеда равны.

$S_{\text{полн}} = 2(ab + bc + ac)$

$V = abc$

Около прямоугольного параллелепипеда всегда можно описать сферу $\left(R = \frac{d}{2}\right)$.

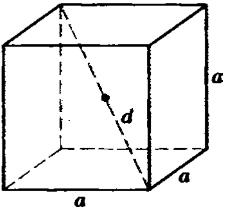
Куб

Куб — это прямоугольный параллелепипед, все ребра которого равны.

Все грани — квадраты.

$S_{\text{полн}} = 6a^2$

$V = a^3$



Около куба всегда можно описать сферу $\left(R = \frac{d}{2}\right)$ и в куб всегда можно вписать сферу $\left(r = \frac{a}{2}\right)$.

Пирамида

Основание пирамиды — многоугольник.

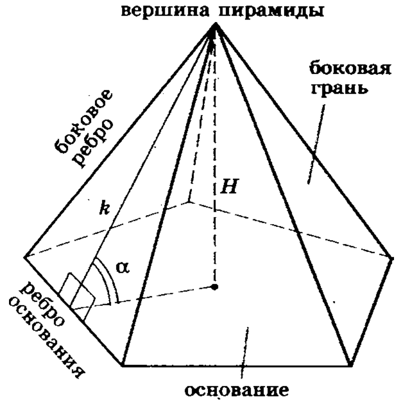
Боковые грани — треугольники с общей вершиной.

Высота H — отрезок перпендикуляра, опущенного из вершины пирамиды на плоскость ее основания.

Апофема k — высота боковой грани.

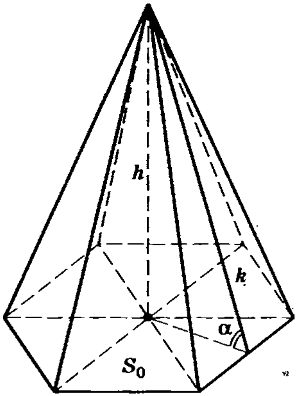
Угол α — угол наклона боковой грани к плоскости основания.

Объем: $V = \frac{1}{3} S_o H$.



Правильная пирамида

Правильная пирамида — это пирамида, в основании которой лежит правильный многоугольник, а вершина пирамиды проектируется в центр основания.



$S_{бок} = kp_o$, где k — апофема, p_o — полупериметр основания.

$$S_{бок} = \frac{S_o}{\cos\alpha}.$$

Все боковые грани — равные равнобедренные треугольники.

Все боковые ребра равны.

Все апофемы равны.

Около правильной пирамиды всегда можно описать сферу.

Тетраэдр

Тетраэдр — это треугольная пирамида.
У тетраэдра все грани — треугольники.
Около любого тетраэдра можно описать сферу, и в любой тетраэдр можно вписать сферу.

Правильный тетраэдр

Правильный тетраэдр — это тетраэдр, все грани которого правильные (равносторонние) треугольники.

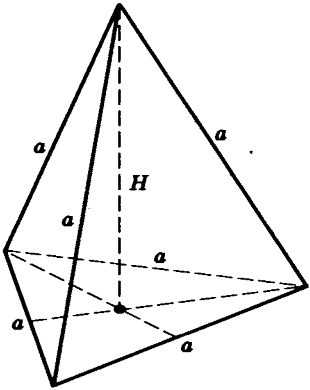
$$S_{\text{полн}} = a^2\sqrt{3}$$

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$

$$H = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$

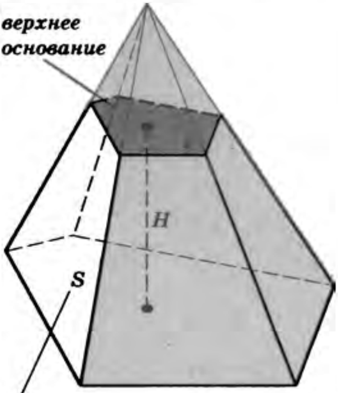
$$r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$



Около правильного тетраэдра всегда можно описать сферу $\left(R = \frac{3}{4}H\right)$ и в него всегда можно вписать сферу $\left(r = \frac{1}{4}H\right)$.

Усеченная пирамида

Плоскость, параллельная основанию пирамиды, рассекает ее на два многогранника — усеченную пирамиду и пирамиду, подобную исходной.



Верхнее и нижнее основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники.

Боковые грани — трапеции.

Высота — расстояние между основаниями.

Объем усеченной пирамиды:

$V = \frac{1}{3}H(S + \sqrt{S \cdot s} + s)$, где S и s — площади оснований, H — высота.

Правильная усеченная пирамида **— часть правильной пирамиды.**

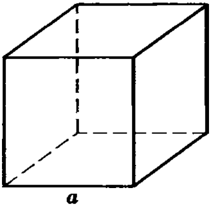
Ее боковые грани — равнобедренные трапеции.

Правильные многогранники

Обозначения:
a — ребро,
V — объем,
S — площадь боковой поверхности,
R — радиус описанной сферы,
r — радиус вписанной сферы,
H — высота.

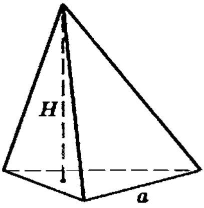
Куб

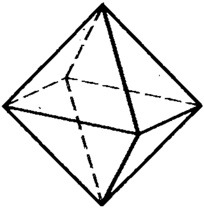
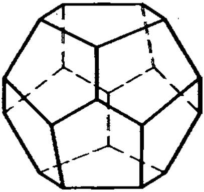
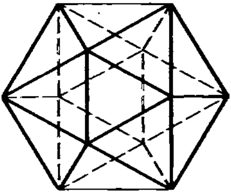
$$V = a^3$$
$$S = 6a^2$$
$$R = \frac{a\sqrt{3}}{2}$$
$$r = \frac{a}{2}$$
$$H = a$$



Тетраэдр

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$
$$S = a^2\sqrt{3}$$
$$R = \frac{a\sqrt{6}}{4}$$
$$r = \frac{a\sqrt{6}}{12}$$
$$H = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$



Октаэдр	
$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$ $S = 2a^2\sqrt{3}$ $R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ $r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$	
Додекаэдр	
$V = \frac{a^3(15+7\sqrt{5})}{4}$ $S = 3a^2\sqrt{5(5+2\sqrt{5})}$ $R = \frac{a\sqrt{3}(1+\sqrt{5})}{4}$ $r = \frac{a\sqrt{10(25+11\sqrt{5})}}{20}$	
Икосаэдр	
$V = \frac{5a^3(3+\sqrt{5})}{12}$ $S = 5a^2\sqrt{3}$ $R = \frac{a\sqrt{2(5+\sqrt{5})}}{4}$ $r = \frac{a\sqrt{3}(3+\sqrt{5})}{12}$	

ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ

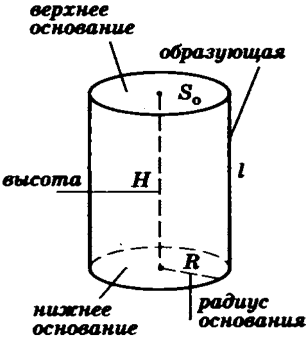
Цилиндр

$S_o = \pi R^2$

$S_{бок} = 2\pi RH = 2\pi Rl$

$S_{полн} = 2\pi R^2 + 2\pi RH$

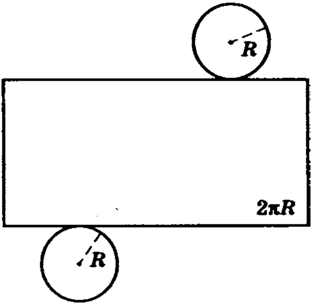
$V = S_o \cdot H = \pi R^2 H$



Около цилиндра всегда можно описать сферу. Ее радиус равен половине диагонали осевого сечения.

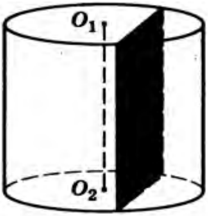
В цилиндр можно вписать сферу, если его осевое сечение — квадрат ($2R = H$) $R_ш = \frac{H}{2}$.

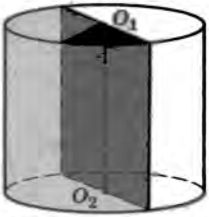
Развертка цилиндра



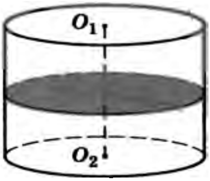
Сечения цилиндра

Если плоскость сечения параллельна оси цилиндра O_1O_2, то сечение — прямоугольник.

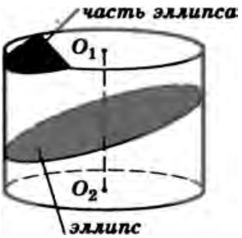




осевое сечение $S_{сеч} = 2RH$



Если плоскость сечения перпендикулярна оси цилиндра O_1O_2, то сечение — круг.



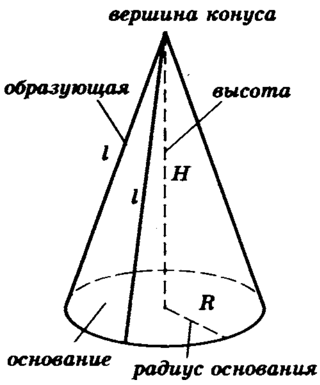
Если плоскость сечения — под острым углом к оси цилиндра, то сечение — эллипс или его часть.

Конус

$S_{бок} = \pi Rl$

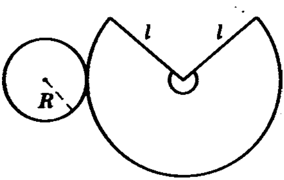
$S_{полн} = \pi R(l + R)$

$V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$



В конус всегда можно вписать сферу и около него всегда можно описать сферу.

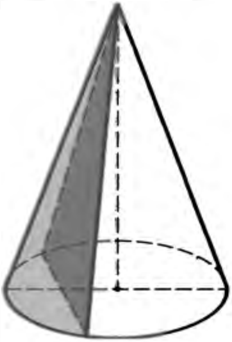
Развертка конуса



Сечения конуса

Если плоскость сечения перпендикулярна оси конуса MO,
то сечение — круг.

Если плоскость сечения проходит через вершину конуса, то сечение — равнобедренный треугольник.



осевое сечение $S = RH$

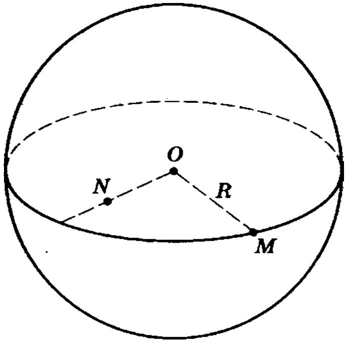
Сфера и шар

Сфера — это множество точек, удаленных от данной точки (центра сферы) на одинаковое расстояние (равное радиусу сферы).

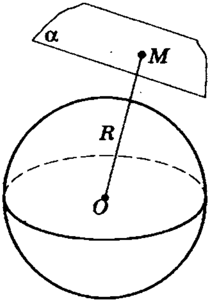
Шар — это множество точек, удаленных от данной точки (центра шара) на расстояние, не большее заданного (радиуса шара).

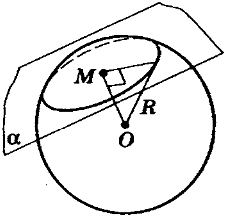
Площадь поверхности сферы: $S = 4\pi R^2$.

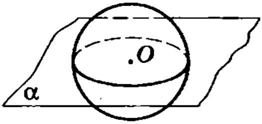
Объем шара: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

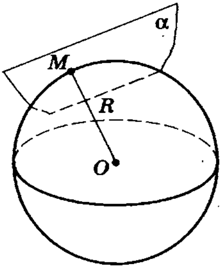


O — центр сферы (шара)
$OM = R$ — радиус сферы (шара)
M — точка сферы и шара ($OM = R$)
N — точка шара ($ON < R$)

<table>
<tr><th colspan="2">Сфера (шар) и плоскость</th></tr>
<tr><td>Нет общих точек</td><td>Множество общих точек</td></tr>
<tr><td>

$OM > R$</td><td rowspan="3">Сфера и плоскость: в пересечении — окружность.


$OM < R$, α — секущая плоскость.


Шар и плоскость: в пересечении — круг. Площадь диаметрального сечения (проходящего через диаметр) $S = \pi R^2$.</td></tr>
<tr><td>Одна общая точка</td></tr>
<tr><td>

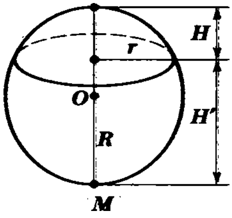
$OM = R$
α — касательная плоскость</td></tr>
</table>

Шаровой сегмент

Секущая плоскость разбивает шар на два шаровых сегмента высотой H и H'.
Объем сегмента:

$$V = \pi H^2\left(R - \frac{H}{3}\right).$$

Площадь сферической поверхности: $S = 2\pi RH$.

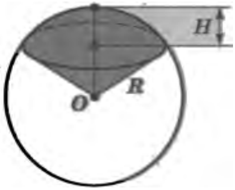


Шаровой сектор

Объем: $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$.

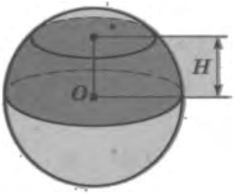
Площадь сферической поверхности равна площади сферической поверхности соответствующего шарового сегмента.
Площадь полной поверхности:

$$S = \pi R(2H + \sqrt{2RH - H^2}).$$



Шаровой слой

Шаровой слой — это часть шара между двумя параллельными секущими плоскостями.
Объем и *площадь* можно найти как разность объемов (площадей) двух шаровых сегментов.



Декартовы координаты в пространстве

Расстояние между точками
$A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$: $$AB = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$
Уравнение плоскости
Общее уравнение: $ax + by + cz + d = 0$. $a = 0$, плоскость параллельна прямой Ox; $b = 0$, плоскость параллельна прямой Oy; $c = 0$, плоскость параллельна прямой Oz; $d = 0$, плоскость проходит через начало координат; $a = b = 0$, плоскость параллельна плоскости xOy; $a = c = 0$, плоскость параллельна плоскости xOz; $b = c = 0$, плоскость параллельна плоскости yOz.
Координаты середины отрезка AB
$$x = \frac{x_1 + x_2}{2},\quad y = \frac{y_1 + y_2}{2},\quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}$$
Взаимное расположение плоскостей
Угол между плоскостями $$\cos\varphi = \frac{\lvert a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2\rvert}{\sqrt{a_1^2 + b_1^2 + c_1^2}\cdot\sqrt{a_2^2 + b_2^2 + c_2^2}}$$
Условие параллельности $$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$$
Условие перпендикулярности $$a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$$

Векторы

Координаты вектора
Начало $A(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и конец $B(x_2;\ y_2;\ z_2)$: $\overline{AB}\,(x_2 - x_1;\ y_2 - y_1;\ z_2 - z_1)$
Длина вектора
$\bar{a}\,(x;\ y;\ z) \quad \lvert\bar{a}\rvert = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
Сумма векторов
$\bar{a}\,(x_1;\ y_1;\ z_1)$ и $\bar{b}\,(x_2;\ y_2;\ z_2)$ $\bar{a} + \bar{b} = \bar{c}\,(x_1 + x_2;\ y_1 + y_2;\ z_1 + z_2)$
Свойства сложения
$\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a} \qquad \bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$ $(\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c})$ $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$
Умножение вектора на число
$\lambda \cdot \bar{a}\,(x;\ y;\ z) = \bar{c}\,(\lambda x;\ \lambda y;\ \lambda z)$
Свойства умножения
$(\lambda\mu)\bar{a} = \lambda(\mu\bar{a})$ $\lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b} \qquad (\lambda + \mu)\bar{a} = \lambda\bar{a} + \mu\bar{a}$ $0 \cdot \bar{a} = \lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$

Скалярное произведение векторов
$\bar{a}(x_1; y_1; z_1)$ и $\bar{b}(x_2; y_2; z_2)$ $\bar{a} \cdot \bar{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 =$ $= \lvert\bar{a}\rvert \cdot \lvert\bar{b}\rvert \cdot \cos(\widehat{a, b})$
Свойства скалярного произведения
$\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$ $\bar{a} \cdot \bar{a} \geqslant 0$ $\bar{a} \cdot \bar{a} = \lvert\bar{a}\rvert^2$ $\bar{a}(\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$ $(\lambda\bar{a}) \cdot \bar{b} = \lambda(\bar{a} \cdot \bar{b})$
Угол между векторами
$\cos(\widehat{\bar{a}, \bar{b}}) = \dfrac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\lvert\bar{a}\rvert \cdot \lvert\bar{b}\rvert}$
Условие коллинеарности векторов
$\bar{a} \parallel \bar{b} \Leftrightarrow x_1 : x_2 = y_1 : y_2 = z_1 : z_2$ или $x_1 = \lambda x_2, \quad y_1 = \lambda y_2, \quad z_1 = \lambda z_2$
Условие ортогональности векторов
$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow \bar{a} \cdot \bar{b} = 0$ или $x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$

Квадраты натуральных чисел от 11 до 99

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	121	144	169	196	225	256	289	324	361
2	441	484	529	576	625	676	729	784	841
3	961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521
4	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401
5	2601	2704	2809	2916	3025	3136	3249	3364	3481
6	3721	3844	3969	4096	4225	4356	4489	4624	4761
7	5041	5184	5329	5476	5625	5776	5929	6084	6241
8	6561	6724	6889	7056	7225	7396	7569	7744	7921
9	8281	8464	8649	8836	9025	9216	9409	9604	9801

Кубы натуральных чисел от 1 до 10

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x^3	1	8	27	64	125	256	343	512	729	1000

Простые числа от 2 до 997

2	3	5	7	11	13	17	19
23	29	31	37	41	43	47	53
59	61	67	71	73	79	83	89
97	101	103	107	109	113	127	131
137	139	149	151	157	163	167	173
179	181	191	193	197	199	211	223
227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311
313	317	331	337	347	349	353	359
367	373	379	383	389	397	401	409
419	421	431	433	439	443	449	457
461	463	467	479	487	491	499	503
509	521	523	541	547	557	563	569
571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659
661	673	677	683	691	701	709	719
727	733	739	743	751	757	761	769
773	787	797	809	811	821	823	827
829	839	853	857	859	863	877	881
883	887	907	911	919	929	937	941
947	953	967	971	977	983	991	997

Степени чисел 2, 3 и 5

n	2^n	3^n	5^n
0	1	1	1
1	2	3	5
2	4	9	25
3	8	27	125
4	16	81	625
5	32	243	3125
6	64	729	15 625
7	128	2187	78 125
8	256	6561	390 625
9	512	19 683	1 953 125
10	1024	59 049	9 765 625

Степени чисел 6, 7, 8 и 9

n	6	7	8	9
2	36	49	64	81
3	216	343	512	729
4	1296	2401	4096	6561
5	7776	16 807	32 768	59 049

Греческий алфавит

Α	α	альфа	Ν	ν	ню
Β	β	бета	Ξ	ξ	кси
Γ	γ	гамма	Ο	ο	омикрон
Δ	δ	дельта	Π	π	пи
Ε	ε	эпсилон	Ρ	ρ	ро
Ζ	ζ	дзета	Σ	σ	сигма
Η	η	эта	Τ	τ	тау
Θ	θ	тета	Υ	υ	ипсилон
Ι	ι	йота	Φ	φ	фи
Κ	κ	каппа	Χ	χ	хи
Λ	λ	лямбда	Ψ	ψ	пси
Μ	μ	мю	Ω	ω	омега

Латинский алфавит

A	a	а	N	n	эн
B	b	бе	O	o	о
C	c	це	P	p	пэ
D	d	де	Q	q	ку
E	e	е	R	r	эр
F	f	эф	S	s	эс
G	g	же	T	t	тэ
H	h	аш	U	u	у
I	i	и	V	v	вэ
J	j	жи	W	w	дубль-вэ
K	k	ка	X	x	икс
L	l	эль	Y	y	игрек
M	m	эм	Z	z	зет

Справочное издание

МАТЕМАТИКА В ТАБЛИЦАХ

5–11 классы

Редакция «Образовательные проекты»

Ответственный редактор *М. Г. Циновская*
Технический редактор *А. Л. Шелудченко*
Корректор *И. Н. Мокина*
Оригинал-макет подготовлен *ООО «Бета-Фрейм»*

Подписано в печать 15.10.2013. Формат $70\times90\ ^1/_{32}$. Усл. печ. л. 3,51
(Желт.) Доп. тираж 5000 экз. Заказ № 8956м.
(ЕГЭ) Доп. тираж 5000 экз. Заказ № 8955м.

Общероссийский классификатор продукции ОК-005-93, том 2;
953005 — литература учебная

Сертификат соответствия № РОСС RU.AE51.H16526 от 26.09.2013

ООО «Издательство Астрель»
129085, Москва, пр-д Ольминского, д. 3а

ООО «Издательство АСТ»
127006, г. Москва, ул. Садовая-Триумфальная,
д. 16, стр. 3, пом. 1, ком. 3

Наши электронные адреса: www.ast.ru E-mail: astpub@aha.ru

Типография ООО «Полиграфиздат»
144003. г. Электросталь, Московская область, ул. Тевосяна д. 25

- В справочнике в виде тематических таблиц представлены все основные материалы программы по математике с 5 по 11 класс.

- Разделы справочника соответствуют программе школьного курса: «Математика 5–6», «Алгебра 7–9», «Алгебра и начала анализа 10–11», «Геометрия 7–9», «Геометрия 10–11».

- Книга будет полезна для повторения и обобщения математических знаний при подготовке к урокам и выпускным экзаменам. Её могут использовать абитуриенты и репетиторы для подготовки к вступительным вузовским экзаменам.

Планета знаний