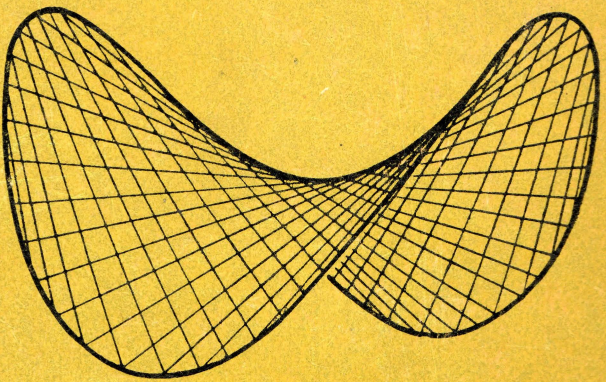
Л. С. АТАНАСЯН



Аналитическая геометрия

ГЛАВНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ВЫСШИХ И СРЕДНИХ ПЕДАГОГИЧЕСКИХ УЧЕБНЫХ ЗАВЕДЕНИЙ МИНИСТЕРСТВА ПРОСВЕЩЕНИЯ РСФСР
Московский государственный заочный педагогический институт

Л. С. АТАНАСЯН

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Часть вторая

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

Издательство «Просвещение»
Москва 1970

Атанасян Л. С.

А-92 Аналитическая геометрия. Ч. 2. Аналитическая геометрия в пространстве. М., «Просвещение», 1969.

000 с. (Глав. упр. высших и средн. пед. учеб. заведений М-ва просвещения РСФСР. Моск. гос. заоч. пед. ин-т.)

Книга представляет собой вторую часть курса аналитической геометрии (аналитическая геометрия в пространстве) и содержит как теоретический материал, так и набор упражнений, снабженных ответами.

2-2-3 **517. 3**

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая вторая (заключительная) часть курса аналитической геометрии посвящена изложению аналитической геометрии в пространстве. Она состоит из шести глав и приложения. В первой главе рассмотрены координаты векторов и точек в пространстве. Во второй главе введены скалярное, векторное и смешанное произведения векторов и изучены их основные свойства. В третьей и четвертой главах изложена теория плоскости и прямой в трехмерном пространстве. Последние две главы посвящены изучению поверхностей в пространстве. В частности, там дана классификация поверхностей второго порядка и рассмотрены основные типы этих поверхностей, заданных своими каноническими уравнениями. В приложении рассмотрены некоторые вопросы линейной алгебры, которые применяются как в первой, так и во второй частях настоящего учебника. Такими вопросами являются определители второго и третьего порядков, исследование и решение системы двух линейных уравнений с двумя неизвестными и трех линейных уравнений с тремя неизвестными, а также понятие матрицы и ее ранга для соответствующих случаев.

Так же, как и в первой части книги, автор руководствовался следующими принципами.

а) Учебник содержит минимальный теоретический материал, необходимый для усвоения всей программы. В частности, исходя из этих соображений по существу пришлось отказаться от изложения многих вопросов общей теории поверхностей второго порядка. Рассмотрена только классификация и изучены основные типы поверхностей второго порядка по каноническим уравнениям. Опущено изложение теории инвариантов и семиинвариантов многочленов второй степени от трех переменных.

Вместе с тем достаточно подробно изучены основы векторной алгебры, теория прямых и плоскостей в пространстве. В частности, подробно рассмотрена теория пучков и связок плоскостей.

б) Все теоретические вопросы, изложенные в учебнике, проиллюстрированы многочисленными примерами и задачами. Многие задачи приведены с подробными решениями. Кроме того, в конце каждого параграфа дано большое число примеров и задач для самостоятельного решения. В конце книги приведены ответы и краткие указания к задачам. Таким образом, при изучении аналитической геометрии по данному учебнику студенту по существу не потребуется привлечение какого-либо задачника.

в) В книге обращено большое внимание приложению аналитической геометрии к решению задач элементарной геометрии. В ряде случаев этому вопросу посвящены отдельные параграфы. Нам кажется, что этот принцип является существенным для учебника, предназначенного студентам педагогических институтов.

При написании второй части учебника использована литература по аналитической геометрии, список которой помещен на стр. 365—366. Широко использован задачник-практикум автора по аналитической геометрии [16]. Многие из помещенных там задач вошли в настоящий учебник.

Автор выражает глубокую благодарность проф. Г. Б. Гуревичу, который внимательно прочитал рукопись и сделал ряд ценных замечаний, способствующих улучшению книги.

Автор выражает также благодарность редактору книги А. З. Рывкину, положившему много труда при подготовке рукописи к изданию.

ГЛАВА I

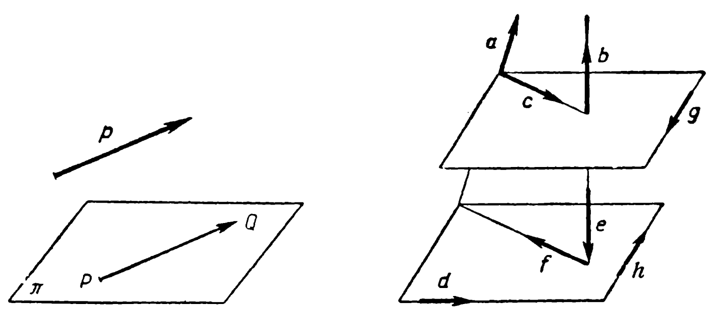
КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ И ТОЧЕК В ПРОСТРАНСТВЕ

§ 1. КООРДИНАТЫ ВЕКТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ

В первой части настоящей книги были определены векторы и основные операции над ними — сложение, вычитание векторов и умножение вектора на число. Эти операции вводились нами для векторов трехмерного пространства. Однако, как только мы перешли к аналитическому заданию векторов, т. е. к заданию векторов с помощью координат, мы ограничились рассмотрением векторов, лежащих в одной плоскости, или, точнее, векторов, параллельных одной плоскости.

В настоящем параграфе распространим понятие координат вектора на случай трехмерного пространства. Предварительно введем ряд простых понятий.

1. Система компланарных векторов. *Будем говорить, что вектор* $\boldsymbol{p}$ *п а р а л л е л е н (или к о л л и н е а р е н) плоскости* π, *если в этой плоскости найдутся две такие точки* P *и* Q, *что* $\overline{PQ}=\boldsymbol{p}$ (рис. 1,*a*). *Система векторов* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ *называется к о м п л а н а р н о й, если существует такая плоскость, которой параллельны все векторы системы. В противном случае система векторов называется н е к о м п л а н а р н о й.*



а *б*

Рис. 1

Например, на рисунке 1,*б* системы векторов $\boldsymbol{c}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{h}, \boldsymbol{d}$ и $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{f}, \boldsymbol{e}$ компланарны, а система векторов $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{g}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{h}$ — не компланарна. Очевидно, система, состоящая из двух векторов, всегда компланарна.

Докажем предложение, которым мы неоднократно будем пользоваться в дальнейшем.

Теорема [1.1][1]. *Для того чтобы система, состоящая из трех векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, была компланарной, необходимо и достаточно, чтобы существовали числа α, β и γ, не равные одновременно нулю и удовлетворяющие условию*:

$$\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c} = 0.$$

Доказательство. Пусть векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны. Рассмотрим векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Возможны следующие случаи: а) $\boldsymbol{a} = 0$; б) $\boldsymbol{a} \neq 0$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a}$ коллинеарны; в) $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны. Покажем, что в каждом из этих случаев существуют не равные одновременно нулю числа α, β и γ, удовлетворяющие условиям теоремы.

В самом деле, в случае а) наше утверждение очевидно, так как

$$1 \cdot \boldsymbol{a} + 0 \cdot \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{c} = 0.$$

В случае б) имеем: $\boldsymbol{b} = \alpha \boldsymbol{a}$, поэтому

$$\alpha \boldsymbol{a} + (-1)\, \boldsymbol{b} + 0 \cdot \boldsymbol{c} = 0.$$

В случае в) разложим вектор $\boldsymbol{c}$ по неколлинеарным векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$:

$$\boldsymbol{c} = \alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b},$$

полученное соотношение запишем так:

$$\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b} + (-1)\, \boldsymbol{c} = 0.$$

Теперь предположим, что

$$\alpha \boldsymbol{a} + \beta \boldsymbol{b} + \gamma \boldsymbol{c} = 0$$

и какой-либо из коэффициентов α, β и γ не равен нулю. Пусть, например, $\alpha \neq 0$. Разделив предыдущее соотношение на α, получим:

$$\boldsymbol{a} = -\frac{\beta}{\alpha} \boldsymbol{b} - \frac{\gamma}{\alpha} \boldsymbol{c}.$$

Перенесем векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ в точку O и через O проведем плоскость π, содержащую векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Из предыдущего соотношения следует, что вектор $\boldsymbol{a}$ также лежит в плоскости π. В самом деле, так как $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ лежат в плоскости π, то $-\frac{\beta}{\alpha}\boldsymbol{b}$ и $-\frac{\gamma}{\alpha}\boldsymbol{c}$ также лежат в плос-

[1] Так же, как и в первой части настоящей книги, в записи [1.1] первое число означает номер параграфа, а второе — номер теоремы. В дальнейшем теоремы будут нумероваться аналогичным образом.

кости π. Отсюда следует, что их сумма, т. е. вектор $\boldsymbol{a}$, лежит в π. Таким образом, система векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарна.

Из доказанного предложения следует теорема.

Теорема [1.2]. *Если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ не компланарны, то из соотношения*

$$\alpha\boldsymbol{a} + \beta\boldsymbol{b} + \gamma\boldsymbol{c} = 0$$

следует, что

$$\alpha = \beta = \gamma = 0.$$

2. Базис пространства. *Базисом или базой пространства называется система трех некомпланарных векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$, взятых в определенном порядке.* Вектор $\boldsymbol{e}_1$ называется при этом первым вектором базиса, вектор $\boldsymbol{e}_2$ — вторым и вектор $\boldsymbol{e}_3$ — третьим.

На векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$ накладывается, таким образом, только одно ограничение — требуется, чтобы они были не компланарны, в остальном векторы базиса произвольны. Важно отметить, что порядок следования векторов базиса существен. Так, например, системы векторов $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3$ образуют различные базисы.

Базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ называется прямоугольным декартовым, если векторы базиса взаимно перпендикулярны и $|\boldsymbol{e}_1| = |\boldsymbol{e}_2| = |\boldsymbol{e}_3| = 1$. В дальнейшем изложении векторы прямоугольного декартового базиса будем обозначать буквами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Произвольный базис, в отличие от прямоугольного декартова, называется общим декартовым или аффинным.

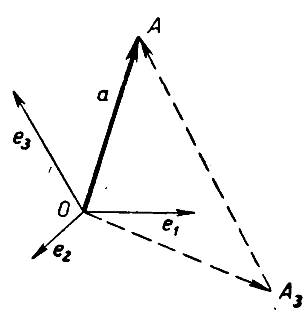


Рис. 2

3. Координаты вектора в пространстве. Пусть в пространстве дан аффинный базис $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$. Возьмем произвольный вектор $\boldsymbol{a}$. Все четыре вектора $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{a}$ отложим от некоторой точки O пространства (рис. 2). Проведем через конец A вектора $\boldsymbol{a}$ прямую, параллельную вектору $\boldsymbol{e}_3$, и обозначим через A_3 точку пересечения проведенной прямой с плоскостью $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$.

Очевидно, $\overline{OA} = \overline{OA_3} + \overline{A_3A}$. Вектор $\overline{OA_3}$ компланарен с векторами $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, поэтому $\overline{OA_3} = \alpha\boldsymbol{e}_1 + \beta\boldsymbol{e}_2$ (см. I, [4.1][1]).

[1] Все ссылки на параграфы или теоремы первой части настоящей книги обозначаются римской цифрой I с указанием номера параграфа или теоремы. Здесь I, [4.1] означает, что мы ссылаемся на теорему [4.1] первой части настоящей книги.

С другой стороны, вектор $\overline{A_3A}$ коллинеарен e_3, поэтому $\overline{A_3A} = \gamma e_3$. Подставив эти выражения в предыдущее соотношение, получаем:

$$a = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3. \tag{1}$$

Соотношение (1) называется разложением вектора a по векторам базиса e_1, e_2, e_3. Существенно подчеркнуть, что разложение (1) возможно для любого вектора a. Если, например, вектор a компланарен с e_1 и e_2, то в этом случае точки A и A_3 совпадают, поэтому $\gamma = 0$, и соотношение (1) принимает вид: $a = \alpha e_1 + \beta e_2$, т. е. мы приходим к случаю, рассмотренному в I, § 4. Если вектор a коллинеарен e_3, то A_3 совпадает с O и мы получаем $a = \gamma e_3$. Таким образом, в этом случае $\alpha = \beta = 0$.

Покажем, что если задан базис e_1, e_2, e_3, то для любого вектора a коэффициенты α, β, γ в соотношении (1) определяются однозначно. В самом деле, пусть a имеет разложение (1) и, кроме того, разложение

$$a = \alpha' e_1 + \beta' e_2 + \gamma' e_3. \tag{2}$$

Из (1) и (2) следует, что

$$\alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3 = \alpha' e_1 + \beta' e_2 + \gamma' e_3$$

или

$$(\alpha - \alpha') e_1 + (\beta - \beta') e_2 + (\gamma - \gamma') e_3 = 0;$$

так как векторы e_1, e_2, e_3 не компланарны, то из теоремы [1.2] следует, что $\alpha - \alpha' = \beta - \beta' = \gamma - \gamma' = 0$,
т. е.

$$\alpha = \alpha', \ \beta = \beta', \ \gamma = \gamma'.$$

Мы пришли к следующей теореме.

Теорема [1.3]. *Если дан базис e_1, e_2, e_3, то любой вектор a пространства может быть разложен по векторам e_1, e_2, e_3, причем коэффициенты α, β и γ в разложении* (1) *определяются однозначно и не зависят от способа разложения.*

Только что доказанная теорема показывает, что если в пространстве выбран базис e_1, e_2, e_3, то для любого вектора пространства однозначно определяются три числа α, β и γ — коэффициенты разложения вектора по базисным векторам. Эти числа называются координатами вектора в данном базисе.

Итак, *координатами вектора в данном базисе называются коэффициенты разложения вектора по базисным векторам*. При этом α называется первой координатой, β — второй, а γ — третьей. Для координат вектора приняты следующие обозначения: $a\,\{\alpha, \beta, \gamma\}_{e_1e_2e_3}$.

Очевидно, если в пространстве выбран базис e_1, e_2, e_3, то любые три числа, взятые в определенном порядке, в свою очередь определяют вектор. В самом деле, если α, β и γ — данные числа, то вектор

$a = \alpha e_1 + \beta e_2 + \gamma e_3$ имеет эти числа своими координатами. Числа $\{0, 0, 0\}$ являются координатами вектора 0. Важно подчеркнуть, что одни и те же числа в разных базисах, вообще говоря, определяют разные векторы (см. пример 2).

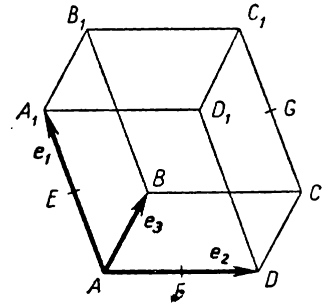


Рис. 3

Если выбранный базис прямоугольный декартовый, то координаты вектора называются **прямоугольными декартовыми**, в общем случае они называются **общими декартовыми** или **аффинными**.

Векторы, коллинеарные вектору e_1, имеют координаты $\{\alpha, 0, 0\}$, коллинеарные вектору e_2—координаты $\{0, \beta, 0\}$ и коллинеарные e_3 — координаты $\{0, 0, \gamma\}$.

4. Определение координат данных векторов. Пусть в пространстве заданы векторы и некоторый базис e_1, e_2, e_3.

Требуется определить координаты данных векторов.

Для решения задачи, очевидно, необходимо определить коэффициенты разложения данных векторов по векторам базиса. При этом согласно теореме [1.3] эти коэффициенты не зависят от способа разложения, поэтому для решения поставленной задачи достаточно *каким-либо* способом данные векторы разложить по e_1, e_2, e_3. Рассмотрим примеры.

Пример 1. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед, E, F, G — соответственно середины сторон AA_1, AD, CC_1. Принимая векторы $\overline{AA_1}$, $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ за координатные, определить координаты следующих векторов: $\overline{AC}$, $\overline{AE}$, $\overline{EC_1}$, $\overline{B_1C_1}$, $\overline{FG}$, $\overline{GD}$, $\overline{CB_1}$, $\overline{A_1G}$.

Решение. Координатами вектора в системе e_1, e_2, e_3 называются коэффициенты разложения его по координатным векторам e_1, e_2, e_3. При этом известно, что коэффициенты разложения не зависят от способа разложения, поэтому для решения задачи достаточно каким-либо способом данные векторы разложить по

$e_1 = \overline{AA_1}$, $e_2 = \overline{AD}$, $e_3 = \overline{AB}$ (рис. 3); $\overline{AC} = e_2 + e_3$, отсюда следует,

что $\overline{AC}\{0, 1, 1\}$; $\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AA_1} = \frac{1}{2}e_1$, отсюда следует, что

$\overline{AE}\left\{\frac{1}{2}, 0, 0\right\}$; $\overline{EC_1} = \overline{EA_1} + \overline{A_1D_1} + \overline{D_1C_1} = \frac{1}{2}e_1 + e_2 + e_3$, отсюда следует, что $\overline{EC_1}\left\{\frac{1}{2}, 1, 1\right\}$.

Аналогично можно получить координаты остальных векторов:

$$\overline{B_1C_1}\{0, 1, 0\},\ \overline{FG}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\},\ \overline{GD}\left\{-\frac{1}{2}, 0, -1\right\},$$

$$\overline{CB_1}\{1, -1, 0\},\ \overline{A_1G}\left\{-\frac{1}{2}, 1, 1\right\}.$$

Координаты вектора существенно зависят от выбора системы координат. Чтобы в этом убедиться, рассмотрим следующий пример.

Пример 2. Решить предыдущую задачу в предположении, что за координатные векторы взяты $e_1 = \overline{AC_1}$, $e_2 = \overline{B_1C_1}$, $e_3 = \overline{CD}$.

Решение. $\overline{AC} = \overline{AD} + \overline{DC} = \overline{B_1C_1} + (-1)\overline{CD} = e_2 + (-1)e_3$, отсюда следует, что $\overline{AC}\{0, 1, -1\}$;

$\overline{AE} = \frac{1}{2}\overline{AA_1} = \frac{1}{2}(\overline{AC_1} + \overline{C_1A_1}) = \frac{1}{2}\overline{AC_1} - \frac{1}{2}\overline{AC} = \frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{2}(e_2 - e_3)$,

отсюда следует, что $\overline{AE}\left\{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$;

$\overline{EC_1} = \overline{EA} + \overline{AC_1} = -\frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3 + e_1 = \frac{1}{2}e_1 + \frac{1}{2}e_2 - \frac{1}{2}e_3$;

отсюда следует, что $\overline{EC_1}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right\}$.

Аналогично получаем координаты остальных векторов:

$$\overline{B_1C_1}\{0, 1, 0\},\ \overline{FG}\left\{\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}\right\},\ \overline{CD}\{0, 0, 1\},$$

$$\overline{CB_1}\{1, -2, 1\},\ \overline{A_1G}\left\{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\frac{3}{2}\right\}.$$

5. Теорема о координатах линейной комбинации векторов. Если даны векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$, то, как известно, линейной комбинацией этих векторов называется всякий вектор вида: $\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \ldots + \alpha_k a_k$, где $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — произвольные числа (см. I, § 4, п. 5).

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Дано несколько векторов своими координатами в базисе e_1, e_2, e_3:

$$a_1\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\},\ a_2\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\},\ \ldots,\ a_k\{\alpha_k, \beta_k, \gamma_k\}.$$

Дана также некоторая линейная комбинация этих векторов: $p = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \ldots + \lambda_k a_k$ (т. е. известны коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$). Определить координаты вектора p в базисе e_1, e_2, e_3.

Решение. По определению координат векторов имеем:

$$\begin{aligned} a_1 &= \alpha_1 e_1 + \beta_1 e_2 + \gamma_1 e_3, \\ a_2 &= \alpha_2 e_1 + \beta_2 e_2 + \gamma_2 e_3, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k &= \alpha_k e_1 + \beta_k e_2 + \gamma_k e_3. \end{aligned}$$

Подставив эти значения в выражение для вектора $\boldsymbol{p}$, будем иметь:

$$\boldsymbol{p} = \lambda_1 (\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \beta_1 \boldsymbol{e}_2 + \gamma_1 \boldsymbol{e}_3) + \lambda_2 (\alpha_2 \boldsymbol{e}_1 + \beta_2 \boldsymbol{e}_2 + \gamma_2 \boldsymbol{e}_3) + \cdots + \lambda_k (\alpha_k \boldsymbol{e}_1 + \beta_k \boldsymbol{e}_2 + \gamma_k \boldsymbol{e}_3) = (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \cdots + \lambda_k \alpha_k) \boldsymbol{e}_1 + (\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \cdots + \lambda_k \beta_k) \boldsymbol{e}_2 + (\lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2 + \cdots + \lambda_k \gamma_k) \boldsymbol{e}_3.$$

Отсюда согласно теореме [1.3] получаем координаты x, y, z вектора $\boldsymbol{p}$:

$$x = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \ldots + \lambda_k \alpha_k,$$
$$y = \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 + \ldots + \lambda_k \beta_k,$$
$$z = \lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2 + \ldots + \lambda_k \gamma_k.$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему о координатах линейной комбинации векторов.

Теорема [1.4]. *Каждая координата линейной комбинации нескольких векторов равна той же линейной комбинации соответствующих координат составляющих векторов*[1].

Пример 3. Даны векторы $\boldsymbol{a}_1\{1, -2, 1\}$, $\boldsymbol{a}_2\{2, 1, 4\}$, $\boldsymbol{a}_3\{0, -1, 0\}$. Определить координаты вектора $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a}_1 - \boldsymbol{a}_2 + 4\boldsymbol{a}_3$.

Решение. Согласно предыдущей теореме каждая координата вектора $\boldsymbol{p}\{x, y, z\}$ равна той же линейной комбинации соответствующих координат составляющих векторов, поэтому

$$x = 1 - 2 + 4 \cdot 0 = -1, \quad y = -2 - 1 + 4(-1) = -7,$$
$$z = 1 - 4 + 4 \cdot 0 = -3.$$

Итак, $\boldsymbol{p}\{-1, -7, -3\}$.

Пример 4. В пространстве даны три некомпланарных вектора: $\boldsymbol{u}\{1, 0, 0\}$, $\boldsymbol{v}\{1, 1, 1\}$, $\boldsymbol{w}\{0, -1, 3\}$. Определить коэффициенты разложения вектора $\boldsymbol{a}\{2, -5, 11\}$ по данным векторам $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$.

Решение. Пусть $\boldsymbol{a} = \alpha\boldsymbol{u} + \beta\boldsymbol{v} + \gamma\boldsymbol{w}$. Определим коэффициенты α, β и γ. Согласно теореме [1.4] каждая координата вектора $\boldsymbol{a}$ равна той же линейной комбинации соответствующих координат векторов $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$, поэтому

$$2 = \alpha \cdot 1 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot 0,$$
$$-5 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot (-1),$$
$$11 = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 1 + \gamma \cdot (3).$$

Из последних двух соотношений определяем β и γ:

$$\beta = -1, \gamma = 4.$$

Из первого соотношения получаем: $\alpha = 3$. Таким образом,

$$\boldsymbol{a} = 3\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} + 4\boldsymbol{w}.$$

---

[1] Отметим, что соответствующая теорема на плоскости формулируется точно так же (см. I, теорема [4.2]).

6. Координаты суммы, разности векторов и произведения вектора на число. Векторы $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{q} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{r} = \lambda\boldsymbol{a}$ являются, очевидно, линейными комбинациями векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, поэтому к ним применима теорема [1.4]. Тем самым доказана теорема:

Теорема [1.5]. а) *Каждая координата суммы двух векторов равна сумме соответствующих координат слагаемых векторов.*

б) *Каждая координата разности двух векторов равна разности соответствующих координат уменьшаемого и вычитаемого векторов.*

в) *При умножении вектора на число каждая его координата умножается на то же число.*

Пример 5. Пусть в данной системе известны векторы:

$$\boldsymbol{a}\{1, -2, 1\}, \ \boldsymbol{b}\{0, 5, \sqrt{2}\}.$$

Определить координаты векторов $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$, $3\boldsymbol{a}$, $\sqrt{2}\boldsymbol{b}$.

Решение. Из сформулированной теоремы непосредственно следует, что $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\{1, 3, 1+\sqrt{2}\}$, $(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a})\{-1, 7, \sqrt{2}-1\}$,

$$3\boldsymbol{a}\{3, -6, 3\}, \ \sqrt{2}\boldsymbol{b}\{0, 5\sqrt{2}, 2\}.$$

7. Линейно зависимая система векторов. Система векторов $\boldsymbol{a}_1$, *$\boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ называется линейно зависимой, если существуют числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$, не равные одновременно нулю и удовлетворяющие условию:*

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \cdots + \lambda_k\boldsymbol{a}_k = 0. \tag{3}$$

В противном случае система называется линейно независимой.

Очевидно, система $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$ будет линейно независимой тогда и только тогда, когда равенство (3) имеет место только при $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 0$, ..., $\lambda_k = 0$. Из определения следует, что два вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они коллинеарны. Из теоремы [1.1] следует также, что три вектора линейно зависимы тогда и только тогда, когда они компланарны.

Легко показать, что *система, состоящая более чем из трех векторов, всегда линейно зависима.*

В самом деле, пусть имеем систему $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, где $k > 3$. Возьмем первые три вектора $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$. Возможны два случая:

а) Векторы $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \boldsymbol{a}_3$ компланарны. Согласно теореме [1.1] существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, не равные одновременно нулю и удовлетворяющие условию: $\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3 = 0$.

Но в этом случае, очевидно, справедливо равенство:

$$\lambda_1\boldsymbol{a}_1 + \lambda_2\boldsymbol{a}_2 + \lambda_3\boldsymbol{a}_3 + 0\cdot\boldsymbol{a}_4 + \cdots + 0\cdot\boldsymbol{a}_k = 0,$$

которое означает, что вся система векторов линейно зависима.

б) Векторы a_1, a_2, a_3 не компланарны. Тогда, принимая векторы a_1, a_2, a_3 за базисные, разложим вектор a_4 согласно теореме [1.3] по векторам a_1, a_2 a_3:

$$a_4 = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3.$$

Записывая последнее равенство в виде

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + (-1) a_4 = 0$$

или в виде

$$\lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \lambda_3 a_3 + (-1) a_4 + 0 \cdot a_5 + \cdots + 0 \cdot a_k = 0,$$

приходим к выводу, что система векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$ (где $k > 3$) линейно зависима.

Из теоремы [1.4] непосредственно следует

Теорема [1.6]. *Если система векторов*

$$a_1\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}, \; a_2\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}, \; \ldots, \; a_k\{\alpha_k, \beta_k, \gamma_k\}$$

линейно зависима и имеет место соотношение (3), *то та же линейная зависимость имеет место между соответствующими координатами данных векторов, т. е.*

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \cdots + \lambda_k\alpha_k = 0, \\ \lambda_1\beta_1 + \lambda_2\beta_2 + \cdots + \lambda_k\beta_k = 0, \\ \lambda_1\gamma_1 + \lambda_2\gamma_2 + \cdots + \lambda_k\gamma_k = 0. \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

В самом деле, соотношение (3) говорит о том, что вектор $\mathbf{0}$ есть линейная комбинация векторов $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Из теоремы [1.4] следует, что каждая координата вектора $\mathbf{0}\{0, 0, 0\}$ равна той же линейной комбинации составляющих векторов, т. е. имеют место соотношения (4).

Пример 6. Найти линейную зависимость между векторами

$$a\{1, 3, 0\}, \; b\{5, 10, 0\}, \; c\{4, -2, 6\}, \; d\left\{\frac{21}{2}, 17, 3\right\}.$$

Решение. Система, состоящая из четырех векторов, всегда линейно зависима, поэтому существуют коэффициенты $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$, одновременно не равные нулю и удовлетворяющие условию:

$$\lambda_1 a + \lambda_2 b + \lambda_3 c + \lambda_4 d = 0.$$

Известно, что та же линейная зависимость существует между координатами этих векторов, поэтому:

$$\begin{aligned} \lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 + \frac{21}{2}\lambda_4 &= 0, \\ 3\lambda_1 + 10\lambda_2 - 2\lambda_3 + 17\lambda_4 &= 0, \\ 6\lambda_3 + 3\lambda_4 &= 0. \end{aligned}$$

Получили систему однородных линейных уравнений относительно λ_1, λ_2, λ_3 и λ_4. Очевидно, $\lambda_4 \neq 0$. В самом деле, если $\lambda_4 = 0$, то из третьего соотношения следует, что $\lambda_3 = 0$. Тогда из первого и второго соотношений получаем: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$. Это противоречит условию линейной зависимости векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$. Таким образом, λ_4 можно положить равным любому числу, отличному от нуля. Пусть $\lambda_4 = 2$; тогда $\lambda_3 = -1$. Подставив эти значения в первое и второе соотношения, получаем:

$$\lambda_1 = -2;\ \lambda_2 = -3.$$

8. Условие коллинеарности двух векторов. Выведем необходимые и достаточные условия коллинеарности двух векторов, заданных своими координатами в пространстве. Пусть в некоторой системе координат даны два вектора $\boldsymbol{a}\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ и $\boldsymbol{b}\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, причем $\boldsymbol{b} \neq 0$. Для того чтобы векторы были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы существовало число λ, удовлетворяющее условию $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}$[1]. Отсюда на основании теоремы [1.4] заключаем, что

$$\alpha_1 = \lambda\alpha_2,\ \beta_1 = \lambda\beta_2,\ \gamma_1 = \lambda\gamma_2. \tag{5}$$

Обратно, пусть существует число λ, удовлетворяющее условиям (5). Умножив обе части первого соотношения на $\boldsymbol{e}_1$, второго соотношения на $\boldsymbol{e}_2$ и третьего — на $\boldsymbol{e}_3$, получаем:

$$\alpha_1\boldsymbol{e}_1 = \lambda\alpha_2\boldsymbol{e}_1,\ \beta_1\boldsymbol{e}_2 = \lambda\beta_2\boldsymbol{e}_2,\ \gamma_1\boldsymbol{e}_3 = \lambda\gamma_2\boldsymbol{e}_3.$$

Складывая почленно эти равенства, будем иметь:

$$\alpha_1\boldsymbol{e}_1 + \beta_1\boldsymbol{e}_2 + \gamma_1\boldsymbol{e}_3 = \lambda(\alpha_2\boldsymbol{e}_1 + \beta_2\boldsymbol{e}_2 + \gamma_2\boldsymbol{e}_3)$$

или $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{b}$. Последнее равенство означает, что векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны. Итак, мы получили следующее предложение.

Теорема [1.7]. *Для того чтобы векторы $\boldsymbol{a}\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ и $\boldsymbol{b}\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\} \neq 0$, заданные в аффинном базисе своими координатами, были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы координаты вектора $\boldsymbol{a}$ были пропорциональны координатам вектора $\boldsymbol{b}$.*

Условие коллинеарности двух векторов можно сформулировать несколько иначе.

Теорема [1.8]. *Для того чтобы векторы $\boldsymbol{a}\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ и $\boldsymbol{b}\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы одновременно были равны нулю три определителя второго порядка:*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = 0,\ \begin{vmatrix} \alpha_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0,\ \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Доказательство. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны. Если хотя бы один из них нулевой, то наше утверждение, очевидно, справедливо. Предположим, что $\boldsymbol{b} \neq 0$. В этом случае согласно предыдущей теореме $\alpha_1 = \lambda\alpha_2$, $\beta_1 = \lambda\beta_2$, $\gamma_1 = \lambda\gamma_2$, поэтому строки определителей (6) будут пропорциональны, а, значит, каждый из них обратится в нуль.

[1] См. I, лемму [3.1].

Обратно, пусть имеют место соотношения (6). Если $\alpha_1 = \beta_1 = \gamma_1 = 0$, то $\boldsymbol{a} = 0$ и наше утверждение справедливо. Предположим, что $\alpha_1 \neq 0$, тогда из соотношений (6) получаем: $\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2 = 0$, $\alpha_1\gamma_2 - \gamma_1\alpha_2 = 0$, откуда $\beta_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\beta_1$, $\gamma_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1}\gamma_1$. Если ввести обозначение $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \lambda$, то $\alpha_2 = \lambda\alpha_1$, $\beta_2 = \lambda\beta_1$, $\gamma_2 = \lambda\gamma_1$. Согласно теореме [1.7] векторы коллинеарны.

Если читатель знаком с понятием ранга матрицы[1], то ему нетрудно усмотреть, что доказанной теореме можно дать несколько иную формулировку.

Теорема [1.9]. *Для того чтобы векторы $\boldsymbol{a}\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ и $\boldsymbol{b}\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix},$$

образованной из координат векторов, был меньше двух.

Пример 7. Выяснить, какие из следующих пар векторов коллинеарны:

а) $\boldsymbol{a}_1\{1, 2, 3\}$, $\boldsymbol{b}_1\{0, 4, -1\}$; б) $\boldsymbol{a}_2\{-\sqrt{3}, 1, -3\}$, $\boldsymbol{b}_2\{3, -\sqrt{3}, 3\sqrt{3}\}$; в) $\boldsymbol{a}_3\{0, 1, 3\}$, $\boldsymbol{b}_3\{0, -2, -6\}$; г) $\boldsymbol{a}_4\{0, 1, 0\}$, $\boldsymbol{b}_4\{2, 0, 0\}$.

Решение. Векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{b}_1$ не коллинеарны, так как их координаты не пропорциональны. Можно в этом убедиться также, используя теорему [1.8]:

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4 \neq 0.$$

Первое из условий (6) не выполнено, поэтому векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{b}_1$ не коллинеарны. Важно подчеркнуть, что для коллинеарности векторов необходимо равенство нулю в с е х т р е х определителей второго порядка (6).

Векторы $\boldsymbol{a}_2$ и $\boldsymbol{b}_2$ коллинеарны, так как $\boldsymbol{b}_2 = -\sqrt{3} \cdot \boldsymbol{a}_2$. Аналогично убеждаемся в том, что векторы $\boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{b}_3$ коллинеарны, а $\boldsymbol{a}_4$ и $\boldsymbol{b}_4$ не коллинеарны.

Вопросы и упражнения

1. На рисунке 4 изображены три параллельные плоскости и ряд векторов. Укажите среди них коллинеарные и компланарные векторы.

2. В пространстве даны три вектора, среди которых два коллинеарны. Можно ли утверждать, что все три вектора компланарны?

---

[1] См. на стр. 347 Приложение, § 4.

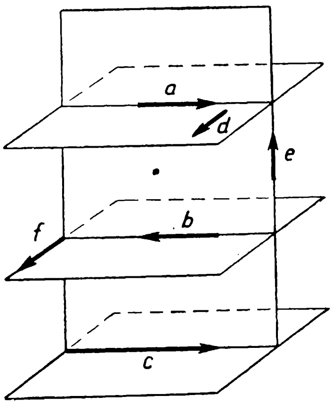


Рис. 4

3. При определении координат векторов было подчеркнуто, что векторы базиса не компланарны. Где было использовано это ограничение?

4. В базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$ вектор $\boldsymbol{a}$ имеет координаты $\{x, y, z\}$. Каковы координаты того же вектора в базисах:

а) $\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3$; б) $\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_1$;

в) $-\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2$?

5. Чему равны координаты векторов, направленных по диагоналям параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_3$?

6. Пусть $OABC$ — некоторый тетраэдр в пространстве. Определить векторы, имеющие одни и те же координаты $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\}$ в базисах: а) $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}$; б) $\overline{OC}, \overline{OB}, \overline{OA}$; в) $\overline{AO}, \overline{AC}, \overline{AB}$.

7. В пространстве даны два вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Всегда ли можно выбрать третий вектор $\boldsymbol{c}$ так, чтобы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ были: а) компланарны; б) не компланарны?

8. В тетраэдре $OABC$ векторы $\boldsymbol{e}_1 = \overline{OA}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overline{OB}$, $\boldsymbol{e}_3 = \overline{OC}$ приняты за координатные. Определить координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{AC}$, $\overline{OK}$, $\overline{OL}$. Здесь K и L — середины соответственно отрезков AB и OA.

9. В тетраэдре $ABCS$ точки A', B', C' — соответственно середины ребер SA, SB и SC; O и O' — точки пересечения медиан треугольников ABC и $A'B'C'$. Принимая векторы $\overline{O'C'}$, $\overline{O'B'}$ и $\overline{O'S}$ за координатные, определить координаты векторов $\overline{CS}$, $\overline{AC}$, $\overline{CA'}$, $\overline{O'A}$, $\overline{AS}$, $\overline{AC'}$, $\overline{BE'}$, $\overline{AE'}$, где E' — середина отрезка $A'C'$.

10. Решить предыдущую задачу, полагая

$$\boldsymbol{e}_1 = \overline{O'A'}, \quad \boldsymbol{e}_2 = \overline{O'E'}, \quad \boldsymbol{e}_3 = \overline{O'O}.$$

11. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (рис. 5) — векторы, совпадающие с его ребрами: $\boldsymbol{a} = \overline{AA_1}$, $\boldsymbol{b} = \overline{AD}$, $\boldsymbol{c} = \overline{AB}$, приняты за координатные. Определить координаты векторов $\overline{AD_1}$, $\overline{AC_1}$, $\overline{DD_1}$, $\overline{DE}$, $\overline{DF}$ в базисе $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$. Здесь E и F — соответственно середины сторон CC_1 и BB_1.

12. В условиях предыдущей задачи найти векторы, имеющие в базисе $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ координаты:

а) $\left\{-\frac{1}{2},\ 1,\ -1\right\}$;

б) $\{1, -1, -1\}$; в) $\{0, -1, -1\}$;

г) $\left\{\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right\}$; д) $\left\{\frac{1}{2}, 1,\ 1\right\}$.

13. Пусть в некотором базисе e_1, e_2, e_3 даны векторы $\boldsymbol{a}\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ и $\boldsymbol{b}\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$. Каково необходимое и достаточное условие компланарности векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и e_1?

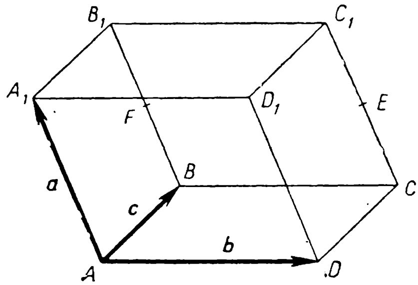


Рис. 5

14. Даны векторы: $\boldsymbol{a}_1\{1,\ -6,\ 1\}$, $\boldsymbol{a}_2\{0,\ 1,\ 3\}$, $\boldsymbol{a}_3\{2,\ 0,\ 0\}$,

$\boldsymbol{a}_4\{0,\ -3,\ 0\}$, $\boldsymbol{a}_5\{5,\ 0,\ -4\}$, $\boldsymbol{a}_6\{2,\ 2,\ 0\}$,

$\boldsymbol{a}_7\{4,\ 4,\ -4\}$, $\boldsymbol{a}_8\{0,\ 0,\ \sqrt{2}\}$, $\boldsymbol{a}_9\{-2,\ 0,\ 0\}$.

Укажите среди них векторы: а) коллинеарные вектору $-e_1$; б) коллинеарные вектору e_2; в) коллинеарные вектору e_3; г) коллинеарные вектору $e_1 + e_2$; д) коллинеарные вектору $e_1 + e_2 - e_3$; е) компланарные с векторами e_1 и e_2; ж) компланарные с векторами e_1, e_3; з) компланарные с векторами e_2 и e_3.

15. Даны векторы $\boldsymbol{a}\{2, 3, -1\}$, $\boldsymbol{b}\{0, 1, 4\}$, $\boldsymbol{c}\{1, 0, -3\}$. Определить координаты следующих векторов:

а) $\boldsymbol{p}_1 = 2\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - 2\boldsymbol{c}$; г) $\boldsymbol{p}_4 = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}$;

б) $\boldsymbol{p}_2 = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b} - 3\boldsymbol{c}$; д) $\boldsymbol{p}_5 = \dfrac{\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}}{2}$;

в) $\boldsymbol{p}_3 = \boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b} + 3\boldsymbol{c}$; е) $\boldsymbol{p}_6 = \dfrac{\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}}{3}$.

16. При обозначениях задачи 11 (рис. 5) найти линейную зависимость между векторами:

а) $\overline{B_1C_1}$, $\overline{EC_1}$, $\overline{AB_1}$, $\overline{CA}$;

б) $\overline{AA_1}$, $\overline{AD}$, $\overline{FD}$, $\overline{AB}$;

в) $\overline{FE}$, $\overline{CE}$, $\overline{CD}$, $\overline{FD}$.

17. Даны пары векторов:

а) $\boldsymbol{a}_1\{3,\ -1,\ 0\}$ и $\boldsymbol{a}_2\{0,\ 1,\ -3\}$;

б) $\boldsymbol{b}_1\{4,\ 0,\ -1\}$ и $\boldsymbol{b}_2\{-8,\ 0,\ 2\}$;

в) $\boldsymbol{c}_1\left\{\frac{3}{5},\ -\frac{4}{3},\ \frac{1}{2}\right\}$ и $\boldsymbol{c}_2\left\{\frac{1}{5},\ -\frac{4}{9},\ \frac{1}{6}\right\}$;

г) $\boldsymbol{d}_1\left\{\frac{1}{2},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{4}\right\}$ и $\boldsymbol{d}_2\left\{1,\ -\frac{4}{3},\ -\frac{1}{2}\right\}$.

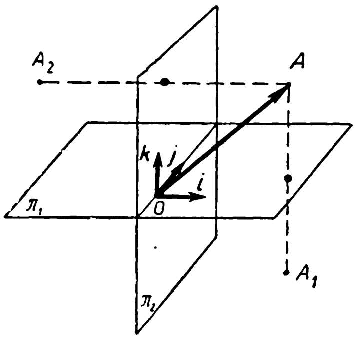


Рис. 6

Указать среди них пары коллинеарных векторов.

18. На рисунке 6 изображен прямоугольный декартовый базис. Обозначим через π_1 и π_2 плоскости $O\boldsymbol{ij}$ и $O\boldsymbol{jk}$. Точка A_1 симметрична A относительно плоскости π_1, а A_2 симметрична A относительно π_2. Вычислить координаты векторов $\overline{OA_1}$, $\overline{OA_2}$, $\overline{AA_1}$, $\overline{A_1A_2}$ и $\overline{AA_2}$, если $\overline{OA}$ $\{2,\ 3,\ 3\}$.

19. Показать, что, вообще говоря, в соотношениях (6) из любых двух следует третье. В каком случае это утверждение не справедливо?

§ 2. ПРЯМОУГОЛЬНЫЕ ДЕКАРТОВЫ И АФФИННЫЕ КООРДИНАТЫ ТОЧЕК В ПРОСТРАНСТВЕ. РЕШЕНИЕ ПРОСТЕЙШИХ ЗАДАЧ В КООРДИНАТАХ

1. Прямоугольные декартовы координаты точек в пространстве. Координатная система в пространстве вводится по аналогии с системой координат на плоскости. Возьмем в пространстве три взаимно перпендикулярные прямые a, b и c, пересекающиеся в точке O, и на каждой из прямых — единичный вектор, исходящий из точки O. Пусть $\boldsymbol{i}$ — вектор на прямой a, $\boldsymbol{j}$—на прямой b и $\boldsymbol{k}$— на прямой c.

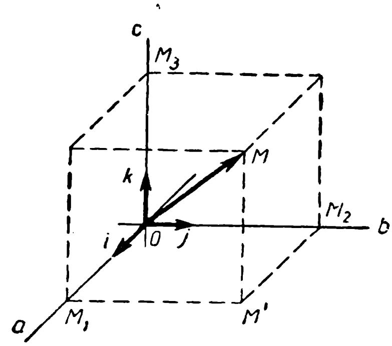


Рис. 7

Построенный геометрический образ, состоящий из трех взаимно перпендикулярных прямых, пересекающихся в точке O, и векторов $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ *назовем прямоугольной декартовой системой координат в пространстве* (рис. 7). Точка O называется началом координат, а направленные прямые a, b, c —осями координат[1]. Направления осей определяются соответственно единичными векторами $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$, которые называются координатными. Ось a называется первой координатной осью или осью абсцисс,

[1] Осью в геометрии называется всякая прямая, на которой зафиксировано одно из двух возможных направлений в качестве положительного.

b — второй координатной осью или осью ординат, а c — третьей координатной осью или осью аппликат. Оси координат обычно обозначаются так: Ox, Oy, Oz, а система координат: $Oijk$ или $Oxyz$. Плоскости Oxy, Oxz и Oyz называются координатными плоскостями.

Легко видеть, что задание системы координат в пространстве позволяет определять положение любой точки в пространстве при помощи трех чисел. В самом деле, пусть M — произвольная точка пространства. Проведем через нее три плоскости, соответственно параллельные координатным плоскостям[1], и обозначим через M_1, M_2 и M_3 точки пересечения этих плоскостей с осями координат (рис. 7). По существу M_1, M_2 и M_3 — проекции точки M на координатные оси. Числа

$$x = \frac{\overline{OM_1}}{i}, \quad y = \frac{\overline{OM_2}}{j}, \quad z = \frac{\overline{OM_3}}{k}$$

называются координатами точки M в системе $Oijk$, причем x — первая координата или абсцисса точки, y — вторая координата или ордината, а z — третья координата или аппликата этой точки. Если точка M не лежит на координатных плоскостях, то M_1, M_2 и M_3 не совпадают с точкой M, поэтому координаты точки M отличны от нуля. Если точка лежит на одной из координатных плоскостей, то соответствующая координата равна нулю. Например, для всех точек плоскости Oxy третьи координаты равны нулю. Если точка M имеет координаты x, y, z, то это обычно записывается так: $M(x, y, z)$.

Можно дать несколько иное определение координат точки, эквивалентное предыдущему. Пусть M — произвольная точка пространства. Проведем через нее прямую, параллельную оси Oz; пусть M' — точка пересечения этой прямой с плоскостью Oxy. Далее проведем через точку M' прямую, параллельную оси Oy. Точка пересечения этой прямой с осью Ox совпадает с точкой M_1 (рис. 7). Рассмотрим ломаную $OM_1M'M$ и назовем ее координатной ломаной точки M. Очевидно,

$$x = \frac{\overline{OM_1}}{i}, \; y = \frac{\overline{M_1M'}}{j}, \; z = \frac{\overline{M'M}}{k}.$$

Таким образом, длины звеньев координатной ломаной данной точки M, взятые с соответствующими знаками, определяют координаты этой точки. Например, точки, изображенные на рисунке 8, име-

[1] Здесь термин «параллельность» понимается в широком смысле слова, т. е. если, например, точка M лежит в плоскости Oxy, то «плоскость, проходящая через M и параллельная Oxy», будет та же плоскость Oxy.

ют координаты: $A(3,1,3)$, $B(0,5,4)$, $C(0, 5, -2)$, $D(2, -6, 1)$, $E(5, 0, 0)$, $F(0, 0, -1)$.

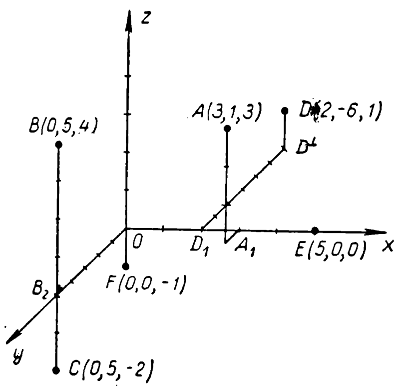


Рис. 8

Итак, если выбрана система координат, то любая точка пространства имеет три координаты. Обратно, при данной системе координат любые три действительных числа, взятых в определенном порядке, определяют некоторую точку пространства. Таким образом, задание системы координат устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел, взятых в определенном порядке. Для построения точки по координатам достаточно построить ее координатную ломаную. Например, точку $D(2, -6, 1)$ можно построить так (рис. 8). Отложим от точки O на оси Ox в *положительном* направлении отрезок OD_1, равный 2. Далее, через точку D_1 проведем прямую, параллельную оси Oy, и на ней отложим в *отрицательном* направлении отрезок D_1D', равный — 6. Через точку D' проведем прямую, параллельную оси Oz, и на ней в положительном направлении отложим отрезок $D'D$, равный единице. Точка D — искомая. Отметим, что отдельные звенья координатной ломаной могут быть равны нулю. Например, координатная ломаная точки B имеет два звена OB_2 и B_2B, а координатная ломаная точки E — одно звено OE.

Замечание. Пусть π_1, π_2 и π_3 — координатные плоскости Oyz, Oxz и Oxy. Возьмем произвольную точку M в плоскости π_3. Очевидно, ее третья координата равна нулю, а первые две координаты совпадают с соответствующими координатами той же точки, если мы ее будем рассматривать как точку, лежащую в плоскости π_3 с координатной системой $O\boldsymbol{ij}$. Аналогичные замечания имеют место для координат точек, лежащих в плоскостях π_1 и π_2.

Рассмотрим конкретные примеры определения координат точек по заданным геометрическим условиям.

Пример 1. Дана правильная шестиугольная призма

$$ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1,$$

радиус основания которой в выбранной системе единиц равен 1, а высота 3. Найти координаты ее вершин и центров оснований O_1 и O_2, если за начало прямоугольной декартовой системы координат взята вершина A, а оси координат направлены вдоль прямых AB, AE и AA_1 (рис. 9).

Решение. Как нижнее, так и верхнее основания пирамиды являются правильными шестиугольниками, вписанными в окружность, поэтому длины сторон этих оснований равны единице. Отсюда следует, что $\overline{AB} = \boldsymbol{i}$. Координаты всех точек, лежащих в нижнем основании, могут быть легко определены, если использовать приведенное выше замечание.

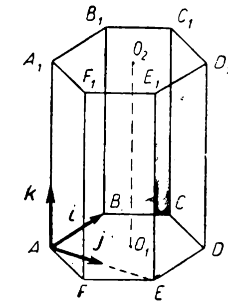


Рис. 9

В системе $A\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}$ точки нижнего основания имеют координаты $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $D(1, \sqrt{3})$, $E(0, \sqrt{3})$, $F\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, $O_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

(см. I, § 7, задача 1), поэтому эти же точки в трехмерном пространстве в системе $O\boldsymbol{i}\boldsymbol{j}\boldsymbol{k}$ имеют координаты:

$$A\,(0, 0, 0),\ B\,(1, 0, 0),\ C\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right),\ D(1, \sqrt{3}, 0),$$

$$E(0, \sqrt{3}, 0),\quad F\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right),\ O_1\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 0\right).$$

Так как верхнее основание призмы параллельно нижнему и высота призмы равна трем, то третьи координаты всех точек верхнего основания равны трем. У точек A и A_1 первые две координаты совпадают, так как они лежат на оси Oz. Совершенно аналогично, совпадают первые две координаты точек B и B_1, C и C_1 и т. д. Эти соображения позволяют сразу определить искомые координаты всех точек верхнего основания:

$$A_1\,(0, 0, 3),\quad B_1(1, 0, 3),\ C_1\left(\frac{3}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 3\right),$$

$$D_1(1, \sqrt{3}, 3),\ E_1(0, \sqrt{3}, 3), F_1\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 3\right),\ O_2\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 3\right).$$

2. Аффинные координаты точек в пространстве. В прямоугольной декартовой системе координат оси взаимно перпендикулярны, а координатные векторы — единичные. Если отказаться от этих двух требований, а во всем остальном поступить так, как в предыдущем пункте, то получим более общий способ аналитического задания точек в пространстве. Возьмем в пространстве три прямые a, b и c, не лежащие в одной плоскости и пересекающиеся в точке O.

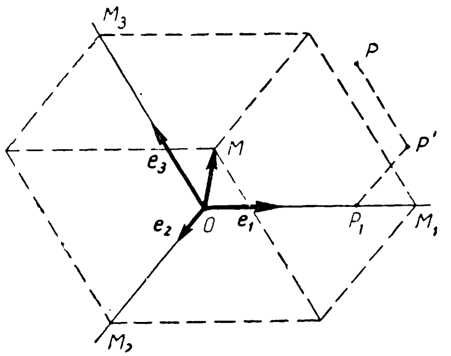


Рис. 10

На каждой из этих прямых выберем по ненулевому вектору: $\boldsymbol{e}_1$ — на прямой a, $\boldsymbol{e}_2$ — на прямой b, а $\boldsymbol{e}_3$ — на прямой c. *Построенный геометрический образ, состоящий из прямых a, b, c, пересекающихся в точке O и не лежащих в одной плоскости, и векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$, назовем* ***аффинной** или **общей декартовой системой координат**.* Терминология и обозначения для аффинной системы координат те же, что и в случае прямоугольной декартовой.

Покажем, что задание аффинной системы координат позволяет определить положение любой точки в пространстве при помощи трех чисел. В самом деле, пусть M — произвольная точка пространства. Проведем через нее три плоскости, соответственно параллельные координатным плоскостям, и обозначим через M_1, M_2 и M_3 точки пересечения этих плоскостей с осями координат (рис. 10). Числа

$$x = \frac{\overline{OM_1}}{\boldsymbol{e}_1}, \quad y = \frac{\overline{OM_2}}{\boldsymbol{e}_2}, \quad z = \frac{\overline{OM_3}}{\boldsymbol{e}_3}$$

называются **координатами точки** M в системе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$, причем x — **первая координата** или **абсцисса** точки, y — **вторая координата** или **ордината**, а z — **третья координата** или **аппликата** точки M. Запись: $M(x, y, z)_{O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3}$ означает, что M в системе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ имеет координаты x, y и z. Так же как и в случае прямоугольной декартовой системы, задание аффинной системы координат устанавливает взаимно однозначное соответствие между точками пространства и тройками чисел, взятых в определенном порядке.

Для построения точки по координатам, так же как и в случае прямоугольной декартовой системы, достаточно построить ее координатную ломаную. Например, для построения точки P (2, —2, 1) в системе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ можно поступить так (рис. 10). Отложим от точки O на оси Ox в *положительном* направлении отрезок OP_1, равный двум, *принимая за единицу длину вектора* $\boldsymbol{e}_1$. Точнее, строим точку P_1, удовлетворяющую условию: $\overline{OP_1} = 2\boldsymbol{e}_1$. Далее, через P_1 проведем прямую, параллельную оси Oy, и на ней в *отрицательном* направлении отложим отрезок P_1P', равный двум, *принимая за единицу измерения длину вектора* $\boldsymbol{e}_2$. Точнее, $\overline{P_1P'} = -2\boldsymbol{e}_2$. Через точку P' проведем прямую, параллельную $\boldsymbol{e}_3$, и на ней отложим отрезок $P'P$, равный единице, *принимая за единицу измерения длину вектора* $\boldsymbol{e}_3$, т. е. $\overline{P'P} = \boldsymbol{e}_3$. Точка P — искомая. Подчеркнем еще раз, что на каждом из звеньев координатной ломаной принята своя единица измерения. В общем случае эти единицы измерения не совпадают. Рассмотрим следующий пример.

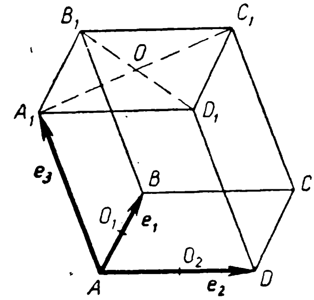


Рис. 11

П р и м е р 2. В пространстве дан параллелепипед

$$ABCDA_1B_1C_1D_1.$$

Принимая точку A за начало аффинной системы координат и полагая $\overline{AB} = \boldsymbol{e}_1$, $\overline{AD} = \boldsymbol{e}_2$, $\overline{AA_1} = \boldsymbol{e}_3$, определить координаты всех вершин и центра O верхней грани параллелепипеда (рис. 11).

Р е ш е н и е. Так как A — начало координат, а B, D и A_1 — концы координатных векторов, то

$$A\ (0,\ 0,\ 0),\ B\ (1,\ 0,\ 0,),\ D\ (0,\ 1,\ 0),\ A_1\ (0,\ 0,\ 1).$$

Из определения координат точек непосредственно следует, что

$$C\ (1,\ 1,\ 0),\ D_1\ (0,\ 1,\ 1),\ C_1(1,\ 1,\ 1),\ B_1\ (1,\ 0,\ 1).$$

Для определения координат точки O проведем через нее плоскости, параллельные координатным плоскостям (эти плоскости на рисунке 11 не изображены). Очевидно, они пересекают координатные оси соответственно в точках O_1, O_2, A_1. Здесь O_1 — середина отрезка AB, а O_2 — середина отрезка AD. Отсюда следует, что $O\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$.

Заметим, что координаты точки, так же как и координаты вектора, существенно зависят от выбора системы координат. Одна и та же точка в различных системах имеет, вообще говоря, различные координаты. Например, точка O на рисунке 11 в системе $A\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$, как мы показали, имеет координаты $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right)$. Та же точка в системе A_1, $\overline{A_1A}$, $\overline{A_1B_1}$, $\overline{A_1D_1}$ имеет координаты $\left(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

Легко видеть, что прямоугольная декартова система координат есть частный случай аффинной, поэтому все теоремы и предложения, доказанные для аффинной системы координат, справедливы и для прямоугольной декартовой. Обратное утверждение, конечно, не справедливо. Поэтому в дальнейшем изложении во всех случаях, когда это возможно, будем пользоваться аффинной системой координат. В прямоугольной декартовой системе будем рассматривать только такие вопросы, изложение которых существенно упрощается, если пользоваться прямоугольной декартовой системой координат. Итак, *во всем дальнейшем изложении, если* *не будет специальных оговорок, мы предполагаем, что система координат аффинная.*

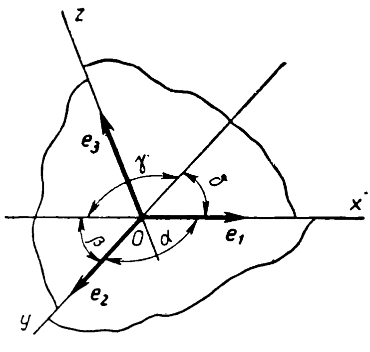


Рис. 12

3. Координатные октанты. Координатные плоскости Oxy, Oxz и Oyz аффинной системы разделяют пространство на восемь частей, называемых к о о р д и н а т н ы м и о к т а н т а м и. Введем нумерацию для координатных октантов. Предположим, что координатные векторы приложены к точке O. Прежде всего рассмотрим координатную плоскость Oxy и в этой плоскости введем нумерацию для координатных углов, определяемых системой Oe_1e_2. Пусть α — первый угол, β — второй, γ — третий и δ — четвертый[1] (рис. 12). Плоскость Oxy делит пространство на два полупространства. Октанты, расположенные по ту же сторону от Oxy, что и e_3, и примыкающие к углам α, β, γ и δ, называются соответственно п е р в ы м, в т о р ы м, т р е т ь и м и ч е т в е р т ы м. Октанты, расположенные по другую сторону от плоскости Oxy и примыкающие к углам α, β, γ и δ, называются соответственно п я т ы м, ш е с т ы м, с е д ь м ы м и в о с ь м ы м.

Если точка M (x, y, z) не лежит на координатных плоскостях, то по знакам чисел x, y и z можно определить, в каком из восьми координатных октантов она расположена. В самом деле,

если $x > 0$, $y > 0$, $z > 0$, то точка лежит в первом октанте,
если $x < 0$, $y > 0$, $z > 0$, то точка лежит во втором октанте,
если $x < 0$, $y < 0$, $z > 0$, то точка лежит в третьем октанте,
если $x > 0$, $y < 0$, $z > 0$, то точка лежит в четвертом октанте,
если $x > 0$, $y > 0$, $z < 0$, то точка лежит в пятом октанте,
если $x < 0$, $y > 0$, $z < 0$, то точка лежит в шестом октанте,
если $x < 0$, $y < 0$, $z < 0$, то точка лежит в седьмом октанте,
если $x > 0$, $y < 0$, $z < 0$, то точка лежит в восьмом октанте.

Очевидно, имеют место и обратные утверждения.

По этим критериям легко определить положение точки в пространстве по ее координатам, не прибегая к чертежу. Так, например, если A (2,4,1), B (—2, 3, 4), C $(-5, -\sqrt{2}, -1)$, D $(-3, 5, -\sqrt{3})$, то из предыдущего изложения следует, что A лежит в первом октанте, B — во втором, C — в седьмом, D — в шестом.

4. Радиус-вектор точки. Пусть $Oe_1e_2e_3$ — данная система координат, а M — произвольная точка пространства. Вектор $\overline{OM}$ на-

---

[1] См. I, § 7, п. 3.

зывается радиус-вектором точки M (рис. 10). Если M имеет координаты x, y, z, то по определению

$$x = \frac{\overline{OM}_1}{e_1}, \ y = \frac{\overline{OM}_2}{e_2}, \ z = \frac{\overline{OM}_3}{e_3},$$

или

$$\overline{OM}_1 = x\boldsymbol{e}_1, \ \overline{OM}_2 = y\boldsymbol{e}_2, \ \overline{OM}_3 = z\boldsymbol{e}_3.$$

Но так как $\overline{OM} = \overline{OM}_1 + \overline{OM}_2 + \overline{OM}_3$, то

$$\overline{OM} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3. \tag{1}$$

Это соотношение имеет место также и в том случае, когда M лежит на одной из координатных плоскостей. Соотношение (1) показывает, что *координаты точки M в системе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ соответственно равны координатам радиус-вектора точки M в базисе $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3$.* Это утверждение, по существу являющееся очевидным, играет существенную роль во всем дальнейшем изложении. Следует заметить, что предыдущее утверждение, высказанное по отношению к аффинной системе координат, очевидно, справедливо и для ее частного случая — прямоугольной декартовой системы, т. е. координаты точки M в прямоугольной декартовой системе $O\boldsymbol{ijk}$ соответственно равны координатам радиус-вектора этой точки в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$.

Используем понятие радиус-вектора для решения следующей задачи.

Пример 3. Дана наклонная шестиугольная призма

$$ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1,$$

в основании которой лежит правильный шестиугольник. Принимая точку A за начало координат и полагая

$$\overline{AB} = \boldsymbol{e}_1, \ \overline{AF} = \boldsymbol{e}_2, \ \overline{AA}_1 = \boldsymbol{e}_3,$$

определить координаты всех вершин и центров O_1 и O_2 двух оснований.

Решение. Предположим, что вершины призмы обозначены по аналогии с обозначениями рисунка 9. Так как начало координат совпадает с точкой A, а точки B, F и A_1 являются концами координатных векторов, то A (0, 0, 0), B (1, 0, 0), F (0, 1, 0), A_1 (0, 0, 1). Для определения координат остальных точек выразим их радиус-векторы через $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$ и $\boldsymbol{e}_3$:

$$\overline{AC} = \overline{AF} + \overline{FC} = \boldsymbol{e}_2 + 2\boldsymbol{e}_1, \text{ поэтому } C(2, 1, 0);$$

$$\overline{AD} = \overline{AC} + \overline{CD} = 2\boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2 + \boldsymbol{e}_2 = 2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2, \text{ поэтому } D(2, 2, 0);$$

$$\overline{AE} = \overline{AD} + \overline{DE} = 2\boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2 - \boldsymbol{e}_1 = \boldsymbol{e}_1 + 2\boldsymbol{e}_2, \text{ поэтому } E(1, 2, 0);$$

$$\overline{AO}_1 = \frac{1}{2}\overline{AD} = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \text{ поэтому } O_1(1, 1, 0);$$

$$\overline{AB}_1 = \overline{AB} + \overline{BB}_1 = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_3, \text{ поэтому } B_1(1, 0, 1);$$

$$\overline{AC_1} = \overline{AC} + \overline{CC_1} = e_2 + 2e_1 + e_3, \quad \text{поэтому } C_1(2,\ 1,\ 1);$$
$$\overline{AD_1} = \overline{AD} + \overline{DD_1} = 2e_1 + 2e_2 + e_3, \quad \text{поэтому } D_1(2,\ 2,\ 1);$$
$$\overline{AE_1} = \overline{AE} + \overline{EE_1} = e_1 + 2e_2 + e_3, \quad \text{поэтому } E_1(1,\ 2,\ 1);$$
$$\overline{AF_1} = \overline{AF} + \overline{FF_1} = e_2 + e_3, \quad \text{поэтому } F_1(0,\ 1,\ 1);$$
$$\overline{AO_2} = \overline{AO_1} + \overline{O_1O_2} = e_1 + e_2 + e_3, \quad \text{поэтому } O_2(1,\ 1,\ 1).$$

Очевидно, полученные результаты справедливы также и в том случае, когда призма правильная. Сравнивая между собой координаты одних и тех же точек в примерах 1 и 3, мы замечаем, что они различны и существенно зависят от выбора системы координат.

Перейдем к решению некоторых простейших задач аналитической геометрии в координатах[1].

5. Разыскание координат вектора по координатам его концов.

З а д а ч а 1. Даны две точки A и B своими координатами в аффинной системе: A (x_1, y_1, z_1), B (x_2, y_2, z_2). Определить координаты вектора $\overline{AB}$.

Р е ш е н и е. Если O — начало аффинной системы координат, то $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$. Но $\overline{OA}$ и $\overline{OB}$ являются радиус-векторами точек A и B, поэтому их координаты нам известны:

$$\overline{OA}\ \{x_1,\ y_1,\ z_1\},\ \overline{OB}\ \{x_2,\ y_2,\ z_2\}.$$

Таким образом, $\overline{AB}$ как разность векторов $\overline{OB}$ и $\overline{OA}$ имеет координаты:

$$\{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}.$$

Итак,

Т е о р е м а [2.1]. *Каждая координата вектора равна разности соответствующих координат конца и начала вектора.*

П р и м е р 4. Даны точки A (2; —5, 3), B (1, —1, 4) и C $(\sqrt{2},\ 4,\ 0)$. Определить координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{AC}$.

Р е ш е н и е. Вычитая из координат точки B соответствующие координаты точки A, получаем координаты вектора

$$\overline{AB}\ \{-1,\ 4,\ 1\}.$$

Аналогично получаем координаты остальных векторов:

$$\overline{BC}\{\sqrt{2} - 1,\ 5,\ -4\},\ \overline{AC}\{\sqrt{2} - 2,\ 9,\ -3\}.$$

П р и м е р 5. Найти координаты начала вектора $\boldsymbol{a}\{2,\ -3,\ 4\}$, если конец этого вектора имеет координаты (3, —1, 0).

Р е ш е н и е. Пусть $\overline{AB} \Rightarrow \boldsymbol{a}$. Нам известны координаты вектора $\boldsymbol{a}$ и точки B. По этим данным легко определить координаты точки A. В самом деле,

$$A\ (x, y, z),\quad B\ (3, -1, 0),\quad \boldsymbol{a}\ \{2, -3, 4\}.$$

[1] Ср. I, § 8.

По теореме [2, 1] находим:

$$3 - x = 2,\ -1 - y = -3,\ 0 - z = 4.$$

Отсюда

$$x = 1, \quad y = 2, \quad z = -4; \quad A\ (1,\ 2,\ -4).$$

Проверка: $A\ (1, 2, -4)$, $B\ (3, -1, 0)$, $\overline{AB}\ \{2, -3, 4\}$. Мы видим, что $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$, задача решена правильно.

Пример 6. Вершины четырехугольника находятся в точках

$$A\ (1, 3, 4),\ B\ (4, 0, 6),\ C\ (1, 0, -1) \text{ и } D\ (-2, 3, -3).$$

Показать, что $ABCD$ — параллелограмм. Система координат аффинная.

Решение. Для решения задачи достаточно показать, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ не коллинеарны и $\overline{AB} = \overline{DC}$. Вычислим координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{BC}$ и $\overline{DC}$. Имеем: $\overline{AB}\{3, -3, 2\}$, $\overline{BC}\{-3, 0, -7\}$, $\overline{DC}\ \{3, -3, 2\}$.

Отсюда видно, что векторы $\overline{AB}$ и $\overline{BC}$ не коллинеарны, так как их координаты не пропорциональны. Векторы $\overline{AB}$ и $\overline{DC}$ равны, так как соответствующие координаты этих векторов равны. Значит, четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

6. Определение координат точки, делящей данный отрезок в данном отношении. Напомним понятие деления отрезка в данном отношении, которое было введено нами в I, § 8[1]. Говорят, что точка M, лежащая на прямой AB, делит направленный отрезок AB в отношении λ, если $\lambda = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$.

Рассмотрим задачу об определении координат точки, делящей данный отрезок в отношении λ.

Задача 2. Пусть в аффинной системе даны две различные точки своими координатами $A\ (x_1, y_1, z_1)$ и $B\ (x_2, y_2, z_2)$. Определить координаты точки M, которая делит отрезок AB в отношении $\lambda \neq -1$.

Решение. Пусть $\boldsymbol{r}_1$, $\boldsymbol{r}_2$ и $\boldsymbol{r}$ — соответственно радиус-векторы точек A, B и M. Так как $\lambda = \dfrac{\overline{AM}}{\overline{MB}}$, то $\overline{AM} = \lambda \cdot \overline{MB}$. Но $\overline{AM} = \boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1$, $\overline{MB} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}$. Подставив эти значения в предыдущее соотношение, получаем: $\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_1 = \lambda\,(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r})$. Отсюда, учитывая, что $\lambda \neq -1$, получаем:

$$\boldsymbol{r} = \frac{\boldsymbol{r}_1 + \lambda \boldsymbol{r}_2}{1 + \lambda}. \qquad (2)$$

---

[1] Рекомендуем читателю еще раз внимательно прочитать содержание I, § 8, п. 2.

Пользуясь теоремой о координатах линейной комбинации векторов, получаем:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}. \tag{3}$$

В частности, если точка M делит отрезок AB пополам, то $\lambda = 1$, поэтому

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z = \frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{4}$$

Таким образом, мы доказали теорему:

Теорема [2.2]. *Координаты точки, делящей отрезок AB, $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ в отношении λ, определяются из соотношений* (3).

Координаты середины отрезка равны полусуммам соответствующих координат концов отрезка.

Пример 7. Определить координаты точек, делящих отрезок AB, $A(1, 2, -5)$, $B(0, 1, 4)$, в отношении $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = \frac{1}{4}$, $\lambda_4 = 1$.

Решение. Для определения координат точек $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$ и $M_4(x_4, y_4, z_4)$, делящих отрезок AB соответственно в отношениях λ_1, λ_2, λ_3 и λ_4, воспользуемся формулами (3):

$$x_1 = \frac{1+2\cdot 0}{1+2} = \frac{1}{3}, \quad y_1 = \frac{2+2\cdot 1}{1+2} = \frac{4}{3}, \quad z_1 = \frac{-5+2\cdot 4}{1+2} = 1;$$

$$x_2 = \frac{1-3\cdot 0}{1-3} = -\frac{1}{2}, \quad y_2 = \frac{2-3\cdot 1}{1-3} = \frac{1}{2}, \quad z_2 = \frac{-5-3\cdot 4}{1-3} = \frac{17}{2};$$

$$x_3 = \frac{1+\frac{1}{4}\cdot 0}{1+\frac{1}{4}} = \frac{4}{5}, \quad y_3 = \frac{2+\frac{1}{4}\cdot 1}{1+\frac{1}{4}} = \frac{9}{5}, \quad z_3 = \frac{-5+\frac{1}{4}\cdot 4}{1+\frac{1}{4}} = -\frac{16}{5};$$

$$x_4 = \frac{1+0}{2} = \frac{1}{2}, \quad y_4 = \frac{2+1}{2} = \frac{3}{2}, \quad z_4 = \frac{-5+4}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Пример 8. Найти отношение, в котором каждая из координатных плоскостей делит отрезок AB, если даны $A(2, -1, 7)$ и $B(4, 5, -2)$.

Решение. Пусть λ_1, λ_2 и λ_3 — отношения, в которых каждая из координатных плоскостей Oyz, Oxz и Oxy делит отрезок AB.

Если обозначить через P_1, P_2 и P_3 точки пересечения прямой AB с плоскостями Oyz, Oxz и Oxy, то

$$P_1\left(\frac{2+\lambda_1\cdot 4}{1+\lambda_1}, \quad \frac{-1+\lambda_1\cdot 5}{1+\lambda_1}, \quad \frac{7-\lambda_1\cdot 2}{1+\lambda_1}\right),$$

$$P_2\left(\frac{2+\lambda_2\cdot 4}{1+\lambda_2},\quad \frac{-1+\lambda_2\cdot 5}{1+\lambda_2},\quad \frac{7-\lambda_2\cdot 2}{1+\lambda_2}\right),$$
$$P_3\left(\frac{2+\lambda_3\cdot 4}{1+\lambda_3},\quad \frac{-1+\lambda_3\cdot 5}{1+\lambda_3},\quad \frac{7-\lambda_3\cdot 2}{1+\lambda_3}\right).$$

Так как P_1 лежит в плоскости Oyz, то $\frac{2+\lambda_1\cdot 4}{1+\lambda_1}=0$, отсюда $\lambda_1=-\frac{1}{2}$.

Точно так же получаем: $\lambda_2=\frac{1}{5}$ и $\lambda_3=\frac{7}{2}$.

Пример 9. Дана точка M (2, —4, 4) в прямоугольной декартовой системе координат. Определить координаты точки M', симметричной с точкой M:

а) относительно начала координат;

б) относительно координатных плоскостей

$$Oxy,\ Oyz,\ Oxz;$$

в) относительно координатных осей Ox, Oy, Oz.

Решение. а) Если $M(x, y, z)$ и $M'(x', y', z')$ симметричны относительно начала координат, то

$$\frac{x+x'}{2}=0,\quad \frac{y+y'}{2}=0 \text{ и } \frac{z+z'}{2}=0.$$

Отсюда $x'=-x$, $y'=-y$, $z'=-z$. Для данной точки M получаем: M' (—2, 4, —4);

б) если $M(x, y, z)$ и $M'(x', y', z')$ симметричны относительно координатной плоскости Oxy, то отрезок MM' перпендикулярен к плоскости Oxy и его середина принадлежит этой плоскости, поэтому вектор $\overline{MM'}$ коллинеарен вектору $\boldsymbol{k}$, и середина отрезка MM' лежит в плоскости Oxy. Следовательно, $x'-x=0$, $y'-y=0$ (условие коллинеарности: $\overline{MM'}\parallel \boldsymbol{k}$); $\frac{z+z'}{2}=0$ (середина отрезка MM' лежит в плоскости Oxy). Таким образом, $x'=x$, $y'=y$, $z'=-z$.

Для данной точки получаем: M'(2, —4, —4).

Если N и P — точки, симметричные точке M относительно плоскостей Oxz и Oyz, то аналогично предыдущему получаем: N (2, 4, 4), P (—2, —4, 4);

в) если $M(x, y, z)$ и $M'(x', y', z')$ симметричны относительно оси Ox, то вектор $\overline{MM'}$ параллелен плоскости Oyz, т. е. компланарен с векторами $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$, и середина отрезка MM' лежит на оси Ox.

Следовательно, $x-x'=0$ (условие компланарности векторов $\overline{MM'}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$), $\frac{y+y'}{2}=0$, $\frac{z+z'}{2}=0$ (середина отрезка MM' лежит на оси Ox).

Таким образом, $x' = x$, $y' = -y$, $z' = -z$. Для данной точки получаем: $M'(2, 4, -4)$.

Если R и S — точки, симметричные точке M относительно осей Oy и Oz, то аналогично предыдущему получаем: $R(-2, -4, -4)$, $S(-2, 4, 4)$.

7. Условие коллинеарности трех точек.

Задача 3. Пусть в аффинной системе координат $Oe_1e_2e_3$ даны три точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и $C(x_3, y_3, z_3)$. Найти необходимое и достаточное условие коллинеарности этих точек.

Решение. *Точки называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой.* Для того чтобы A, B и C были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ были коллинеарны. Отсюда легко получить искомое условие. По теореме [2.1] имеем:

$\overline{AB}\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, $\overline{AC}\{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\}$.
Согласно теореме [1.8] условие коллинеарности этих векторов запишется так:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (5)$$

Согласно теореме [1.9] условие коллинеарности тех же точек состоит в следующем: ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2' - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

равен единице. Мы получили теорему.

Теорема [2.3]. *Для того чтобы три точки $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ и $C(x_3, y_3, z_3)$ были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия* (5) *или чтобы ранг матрицы* (6) *был равен единице.*

Пример 10. Даны тройки точек:

а) $A_1(2, -1, 1)$, $B_1(-1, 0, 0)$, $C_1(2, -4, 15)$;
б) $A_2(1, 0, -1)$, $B_2(3, 2, 1)$, $C_2(0, -1, -2)$;
в) $A_3(3, 4, -1)$, $B_3(3, 4, 1)$, $C_3(3, 4, -18)$.

Выяснить, какие из этих троек точек коллинеарны.

Решение. Проверяем условие коллинеарности соответствующих векторов для каждой из троек чисел:

а) $\overline{A_1B_1}\{-3, 1, -1\}$, $\overline{A_1C_1}\{0, -3, 14\}$.

Векторы не коллинеарны, так как, например, $\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$. Отсюда следует, что точки A_1, B_1 и C_1 не лежат на одной прямой;

б) $\overline{A_2B_2}\{2, 2, 2\}$, $\overline{A_2C_2}\{-1, -1, -1\}$.

Векторы коллинеарны, так как условие (5) выполнено; поэтому точки A_2, B_2 и C_2 лежат на одной прямой;

в) $\overline{A_3B_3}\{0, 0, 2\}$, $\overline{A_3C_3}\{0, 0, -17\}$.

Условие (5) выполнено, поэтому векторы коллинеарны и точки A_3, B_3, C_3 лежат на одной прямой.

Вопросы и упражнения

20. Дайте определение системы координат в пространстве. Чем отличается понятие системы координат от понятия базиса пространства?

21. Всякие ли три направленные прямые, проходящие через точку O, можно принять за оси аффинной системы координат?

22. Как расположены относительно системы координат точки:

$$A_1(1, 2, 0),\ A_2(-1, 0, 0),\ A_3(0, 3, 0),$$
$$A_4(2, -1, 3),\ A_5(-1, -5, -\sqrt{2}),\ A_6(-5, -1{,}3),$$
$$A_7(2, -4, -4),\ A_8(0, 0, 1)?$$

23. На рисунке 13 изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка E — середина ребра AA_1, а K — точка пересечения диагоналей параллелограмма BCB_1C_1. Вычислить координаты всех вершин и точек K и E, если A — начало координат и $e_1 = \overline{AB}$, $e_2 = \overline{AD}$, $e_3 = \overline{AE}$.

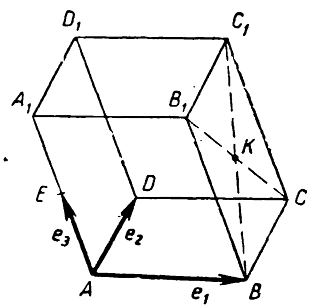


Рис. 13

24. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ даны координаты четырех вершин

$$A(2, -1, 1),\ B(1, 3, 4),\ A_1(4, 2, 0),\ D(6, 0, 1).$$

Найти координаты остальных вершин.

25. Вершины четырехугольника находятся в точках

$$A(1, -3, -2),\ B(8, 0, -4),\ C(4, 8, -3),\ D(-3, 5, -1).$$

Показать, что $ABCD$ — параллелограмм.

26. Даны три вершины параллелограмма

$$A(2, 5, 4),\ B(0, 1, 0) \text{ и } C(4, 1, 3).$$

Найти координаты четвертой вершины D.

27. В пространстве дан треугольник ABC. Можно ли выбрать систему координат так, чтобы вершины треугольника имели координаты $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(-3, -3, -3)$?

28. Выяснить, в каких октантах расположены точки, симметричные точкам

$A(-3, -1, 1)$, $B(-4, 2, -1)$, $C(1, \sqrt{2}, 3)$, $D(\sqrt{2}, -\sqrt{3}, -5)$ относительно оси Oz.

29. В прямоугольной декартовой системе координат даны точки $A(5, -1, 4)$, $B(7, 0, 5)$, $C(-1, -1, -1)$. Найти координаты точек, симметричных данным: а) относительно начала координат; б) относительно координатных плоскостей Oxy, Oyz, Oxz; в) относительно координатных осей Ox, Oy, Oz.

30. В точке $A(x_1, y_1, z_1)$ помещен груз m_1 *кг*, а в точке $B(x_2, y_2, z_2)$ груз m_2 *кг*. Определить координаты центра тяжести этой системы.

31. Если в вершины тетраэдра поместить одинаковые массы, то центр тяжести данной системы называется ц е н т р о и д о м тетраэдра. Доказать, что координаты центроида равны средним арифметическим соответствующих координат вершин.

32. Определить координаты точек B_1, B_2 и B_3, если $A_1(0, 0, 0)$, $A_2(1, 3, -4)$, $A_3(1, \sqrt{2}, 0)$ и $\overline{A_1B_1}\{2, 1, -1\}$, $\overline{A_2B_2}\{0, 0, -1\}$, $\overline{A_3B_3}\{0, 0, -4\}$.

33. Определить координаты точек, которые делят отрезок AB в отношениях $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $\lambda_2 = -3$, $\lambda_3 = 4$, если концы отрезка имеют координаты: $A(1, -1, 0)$, $B(2, 4, 3)$.

34. Найти середины отрезков A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, если

$$A_1(1, 3, -1),\ B_1(0, 0, 1),\ A_2(1, -1, -1),\ B_2(\sqrt{2}, 1, -3),$$
$$A_3(0, 0, -5),\ B_3(4, 4, -4).$$

35. Доказать, что середины отрезков AB, CD и EF лежат на одной прямой. Здесь $A(3, 2, 1)$, $B(-4, -2, -1)$, $C(2, 0, 0)$, $D(4, 0, 0)$, $E(5, -2, 3)$, $F(1, 2, -3)$.

36. Даны тройки точек:

а) $A(2, 4, -3)$, $B(3, 6, 0)$, $C(1, 2, -6)$;
б) $A(\sqrt{2}, 4, 1)$, $B(0, 0, -3)$, $C(1, 1, 1)$;
в) $A(3, 0, 0)$, $B(4, 5, 0)$, $C(5, 10, 0)$;
г) $A(-1, 1, 2)$, $B(4, 3, 0)$, $C(3, 4, 1)$.

Выяснить, какие из этих троек точек коллинеарны.

37. Если треугольник ABC задан в пространстве координатами своих вершин в аффинной системе координат:

$$A(x_1, y_1, z_1),\ B(x_2, y_2, z_2),\ C(x_3, y_3, z_3),$$

то координаты центра тяжести определяются по формуле:

$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3},\quad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3},\quad z = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

Доказать.

§ 3. ПРИЛОЖЕНИЕ МЕТОДА КООРДИНАТ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМ И РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Изложенная в первых двух параграфах теория может быть с успехом применена для доказательства теорем и решения задач из курса элементарной геометрии. В этом параграфе мы приведем примеры приложения метода координат к решению элементарно геометрических задач. Рассмотрим некоторые свойства тетраэдров, параллелепипедов и пространственных многоугольников.

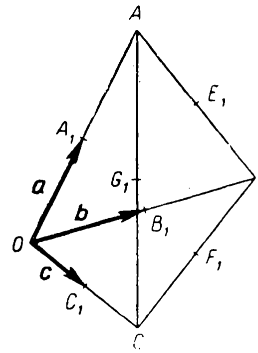


Рис. 41

1. Свойства тетраэдров[1].

Задача 1. Доказать, что отрезки, соединяющие середины противоположных ребер тетраэдра, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

Решение. Пусть $OABC$—данный тетраэдр, а A_1, B_1, C_1, G_1, F_1 и E_1 — соответственно середины ребер OA, OB, OC, CA, CB, AB (рис. 14). Принимая вершину O за начало координат и полагая $\overline{OA}_1 = \boldsymbol{a}$, $\overline{OB}_1 = \boldsymbol{b}$ и $\overline{OC}_1 = \boldsymbol{c}$, выразим радиус-векторы середин отрезков A_1F_1, B_1G_1 и C_1E_1 через $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$. Если середины отрезков A_1F_1, B_1G_1 и C_1E_1 обозначить соответственно через R, S и T, а их радиус-векторы соответственно через $\boldsymbol{r}_R$, $\boldsymbol{r}_S$ и $\boldsymbol{r}_T$, то получим:

$$\boldsymbol{r}_R = \frac{\overline{OA}_1 + \overline{OF}_1}{2} = \frac{\boldsymbol{a} + \dfrac{2\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}}{2}}{2} = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2},$$

$$\boldsymbol{r}_S = \frac{\overline{OB}_1 + \overline{OG}_1}{2} = \frac{\boldsymbol{b} + \dfrac{2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{c}}{2}}{2} = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2},$$

$$\boldsymbol{r}_T = \frac{\overline{OC}_1 + \overline{OE}_1}{2} = \frac{\boldsymbol{c} + \dfrac{2\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{b}}{2}}{2} = \frac{\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}}{2}.$$

Таким образом, $\boldsymbol{r}_R = \boldsymbol{r}_S = \boldsymbol{r}_T$, а это и означает, что точки R, S, T совпадают, что и требовалось доказать.

Рассмотрим задачу, в каком-то смысле обратную предыдущей.

Задача 2. Даны три отрезка, которые не лежат в одной

[1] Здесь и в дальнейшем тетраэдром называется произвольная треугольная пирамида.

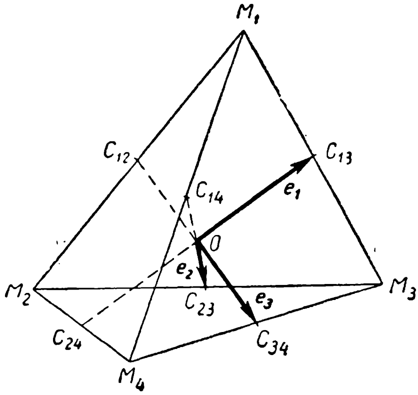


Рис. 15

плоскости. Известно, что они пересекаются в одной точке, являющейся серединой каждого из них. Доказать, что существует такой тетраэдр, серединами ребер которого служат концы данных отрезков.

Решение. Пусть $C_{12}C_{34}$, $C_{13}C_{24}$, $C_{14}C_{23}$ — данные отрезки, а O — их общая середина. Примем точку O за начало, а $e_1 = \overline{OC}_{13}$, $e_2 = \overline{OC}_{23}$, $e_3 = \overline{OC}_{34}$ за координатные векторы аффинной системы координат (рис. 15). Докажем, что в пространстве существуют точки M_1, M_2, M_3, M_4, удовлетворяющие условиям: середина отрезка M_iM_j есть точка C_{ij}. Здесь $i \neq j$, $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3, 4$. Для координат искомых точек введем обозначения: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, $M_4(x_4, y_4, z_4)$. Очевидно, в выбранной системе координат точки C_{ij} имеют координаты: $C_{13}(1, 0, 0)$, $C_{24}(-1, 0, 0)$, $C_{23}(0, 1, 0)$, $C_{14}(0, -1, 0)$, $C_{34}(0, 0, 1)$, $C_{12}(0, 0, -1)$.

Записывая предыдущие условия в координатах, получим:

$$\begin{array}{lll}
x_1 + x_3 = 2, & x_2 + x_4 = -2, & x_2 + x_3 = 0,\\
y_1 + y_3 = 0, & y_2 + y_4 = 0, & y_2 + y_3 = 2,\\
z_1 + z_3 = 0, & z_2 + z_4 = 0, & z_2 + z_3 = 0,\\
x_1 + x_4 = 0, & x_3 + x_4 = 0, & x_1 + x_2 = 0,\\
y_1 + y_4 = -2, & y_3 + y_4 = 0, & y_1 + y_2 = 0,\\
z_1 + z_4 = 0, & z_3 + z_4 = 2, & z_1 + z_2 = -2.
\end{array}$$

Таким образом, с алгебраической точки зрения задача свелась к определению девяти неизвестных ($x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2, x_3, y_3, z_3$), удовлетворяющих восемнадцати линейным уравнениям.

Из курса алгебры известно, что система восемнадцати линейных уравнений с девятью неизвестными, как правило, неразрешима, однако в данном частном случае система имеет решение. В самом деле, выпишем все уравнения, содержащие x_1, x_2, x_3 и x_4:

$$\begin{array}{lll}
x_1 + x_3 = 2, & x_2 + x_4 = -2, & x_2 + x_3 = 0,\\
x_1 + x_4 = 0, & x_3 + x_4 = 0, & x_1 + x_2 = 0.
\end{array}$$

Отсюда получаем:

$$x_1 - x_2 = 2,\ x_1 + x_2 = 0,\ x_3 - x_4 = 2,\ x_3 + x_4 = 0$$

или

$x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = -1.$

Найденные значения неизвестных удовлетворяют всем шести уравнениям.

Совершенно аналогично можно получить значения остальных неизвестных:

$y_1 = -1,\ y_2 = 1,\ y_3 = 1,\ y_4 = -1,$

$z_1 = -1,\ z_2 = -1,\ z_3 = 1,\ z_4 = 1.$

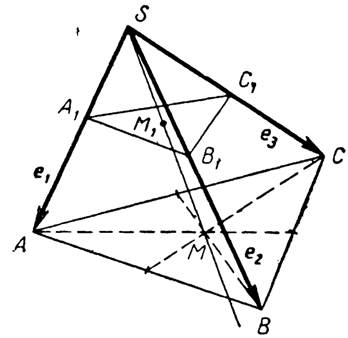


Рис. 16

Таким образом, мы определили координаты вершин тетраэдра, для которого точки C_{ij} служат серединами сторон: $M_1(1, -1, -1)$, $M_2(-1, 1, -1)$, $M_3(1, 1, 1)$, $M_4(-1, -1, 1)$. Задача решена.

Задача 3. Пусть $SABC$ — тетраэдр, M — точка пересечения медиан треугольника ABC, а A_1, B_1 и C_1 — три точки, лежащие соответственно на ребрах SA, SB и SC. Доказать, что точка M_1 пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$ лежит на прямой SM тогда и только тогда, когда плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны.

Решение. Возьмем точку S за начало, а $\boldsymbol{e}_1 = \overline{SA}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overline{SB}$ и $\boldsymbol{e}_3 = \overline{SC}$ за координатные векторы аффинной системы координат в пространстве (рис. 16). В этой системе вершины тетраэдра и точка M имеют координаты[1]:

$$S(0, 0, 0),\ A(1, 0, 0),\ B(0, 1, 0),\ C(0, 0, 1),\ M\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Так как точки A_1, B_1, C_1 лежат на координатных осях, то их координаты можно обозначить так: $A_1(x_0, 0, 0)$, $B_1(0, y_0, 0)$, $C_1(0, 0, z_0)$. Точка пересечения медиан треугольника $A_1B_1C_1$ имеет координаты $M_1\left(\frac{x_0}{3}, \frac{y_0}{3}, \frac{z_0}{3}\right)$. Точка M_1 лежит на прямой SM тогда и только тогда, когда S, M и M_1 коллинеарны. Согласно теореме [2.3] будем иметь:

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{x_0}{3} & \frac{y_0}{3} \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{y_0}{3} & \frac{z_0}{3} \end{vmatrix} = 0 \text{ или } x_0 = y_0 = z_0.$$

Таким образом, $\frac{\overline{SA_1}}{\overline{SA}} = \frac{\overline{SB_1}}{\overline{SB}} = \frac{\overline{SC_1}}{\overline{SC}}$, т. е. плоскости ABC и $A_1B_1C_1$ параллельны.

---

[1] Для определения координат точки M необходимо воспользоваться задачей 37, стр. 32.

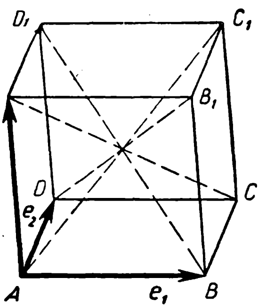


Рис. 17

2. Свойства параллелепипедов.

Задача 4. Доказать, что диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

Решение. Пусть $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — параллелепипед. Примем точку A за начало, а $\boldsymbol{e}_1=\overline{AB}$, $\boldsymbol{e}_2=\overline{AD}$, $\boldsymbol{e}_3=\overline{AA}_1$ за координатные векторы аффинной системы координат (рис. 17). В этой системе координат вершины параллелепипеда имеют координаты: $A\ (0, 0, 0)$, $B\,(1, 0, 0)$, $C\,(1, 1, 0)$, $D\ (0, 1, 0)$, $A_1\,(0, 0, 1)$, $B_1\ (1, 0, 1)$, $C_1\ (1, 1, 1)$, $D_1\,(0, 1, 1)$.

Рассмотрим диагонали AC_1, BD_1, DB_1 и CA_1, Из теоремы [2.2] следует, что середины этих четырех отрезков имеют одни и те же координаты $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, поэтому диагонали проходят через точку $M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ и в этой точке делятся пополам. Задача решена.

Задача 5. Доказать, что диагональ AC_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проходит через центры тяжести треугольников A_1BD и B_1D_1C.

Решение. Пусть аффинная система выбрана так, как в задаче 4 (рис. 17). В этой системе, как было отмечено выше, вершины параллелепипеда имеют координаты:

$$A\ (0, 0, 0),\quad B\ (1, 0, 0),\quad C\ (1, 1, 0),\quad D\ (0, 1, 0),$$
$$A_1\ (0, 0, 1),\ B_1\ (1, 0, 1),\ C_1\ (1, 1, 1),\ D_1\ (0, 1, 1).$$

Центр тяжести G_1 треугольника A_1BD имеет координаты $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, а центр тяжести G_2 треугольника B_1D_1C координаты $\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$[1]. На рисунке 17 точки G_1 и G_2 не изображены. Пользуясь теоремой [2.3], легко показать, что точки

$$A(0, 0, 0,),\quad G_1\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right),\quad G_2\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \text{ и } C_1(1, 1, 1)$$

лежат на одной прямой.

3. Свойства пространственных многоугольников. Напомним ряд простых понятий из курса элементарной геометрии. Система отрезков AB, BC, CD, ..., KL называется *ломаной, соединяющей точки* A и L. Если точки A и L совпадают, то такая ломаная называется многоугольником и обозначается так: $ABC...K$. Отрезки AB, BC, ..., KA называются *сторонами*, а

[1] См. задачу 37, стр. 32.

точки A, B, C, D, ..., K — **вершинами** многоугольника. Многоугольники, имеющие 3, 4, ..., n вершин, называются соответственно **треугольниками**, **четырехугольниками**, ..., **n-угольниками**.

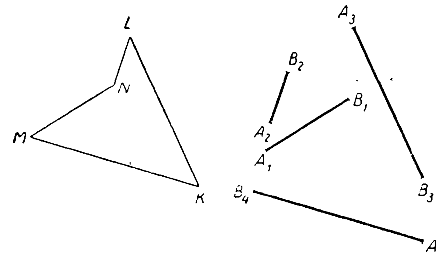


Рис. 18

Обычно в курсе элементарной геометрии рассматривают **простые** многоугольники, т. е. многоугольники, удовлетворяющие условиям: все вершины различны и лежат в одной плоскости, ни одна из вершин не лежит на его стороне и никакая пара его сторон не имеет общей внутренней точки. В настоящем параграфе мы, вообще говоря, не предполагаем, что рассматриваемые многоугольники простые. В частности, не предполагаем, что вершины обязательно лежат в одной плоскости. Такие многоугольники мы называем **пространственными**. Очевидно, для того чтобы ломаная $ABC...KL$ была многоугольником, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{AB} + \overline{BC} + ... + \overline{KL} = 0$.

Мы будем говорить, что из системы *направленных отрезков*

$$A_1B_1,\ A_2B_2,\ ...,\ A_kB_k$$

можно составить пространственный многоугольник, если

$$\overline{A_1B_1} + \overline{A_2B_2} + ... + \overline{A_kB_k} = 0.$$

На рисунке 18 изображены направленные отрезки A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 и A_4B_4, из которых можно составить четырехугольник $NMKL$.

Мы будем говорить, что многоугольник $A_1A_2...A_{2n}$ ($n > 1$), имеющий четное число вершин, является **составным**, если как из системы направленных отрезков A_1A_2, A_3A_4, ..., $A_{2n-1}A_{2n}$, так и из системы направленных отрезков

$$A_2A_3,\ A_4A_5,\ ...,\ A_{2n-2}A_{2n-1},\ A_{2n}A_1$$

можно составить многоугольники. Легко показать, что для того, чтобы многоугольник $A_1A_2...A_{2n}$ был составным, необходимо и достаточно, чтобы

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_3A_4} + ... + \overline{A_{2n-1}A_{2n}} = 0 \tag{1}$$

или

$$\overline{A_2A_3} + \overline{A_4A_5} + ... + \overline{A_{2n}A_1} = 0. \tag{2}$$

В самом деле, пусть, например, выполняется условие (1). Так как $A_1A_2...A_{2n}$ — многоугольник, то

$$\overline{A_1A_2} + \overline{A_2A_3} + ... + \overline{A_{2n}A_1} = 0.$$

Вычитая из этого соотношения равенство (1), получаем (2). Из этих соотношений следует, что из каждой системы направленных отрезков

$$A_1A_2,\ A_3A_4,\ \ldots,\ A_{2n-1}A_{2n} \quad \text{и}\ A_2A_3,\ A_4A_5,\ \ldots,\ A_{2n}A_1$$

можно составить многоугольник, т. е. многоугольник $A_1A_2\ldots A_{2n}$ составной.

Легко видеть, что составной четырехугольник, вершины которого не лежат на одной прямой, является параллелограммом. В самом деле, если четырехугольник $MNPQ$ составной, то по предыдущему предложению $\overline{MN}+\overline{PQ}=\mathbf{0}$ или $\overline{MN}=\overline{QP}$; этим условием характеризуется параллелограмм.

Задача 6. Пусть $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ — произвольный пространственный шестиугольник. Доказать, что шестиугольник, образованный из середин сторон данного шестиугольника, является составным.

Решение. Пусть $M_1,\ M_2,\ \ldots,\ M_6$ — середины сторон $A_1A_2,\ A_2A_3,\ \ldots,\ A_6A_1$. Требуется доказать, что шестиугольник $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ составной. Для этого достаточно показать, что

$$\overline{M_1M_2}+\overline{M_3M_4}+\overline{M_5M_6}=\mathbf{0}. \qquad (3)$$

Возьмем в пространстве произвольную аффинную систему координат и обозначим координаты вершин исходного шестиугольника следующим образом:

$$A_1\,(x_1,\ y_1,\ z_1),\ A_2\,(x_2,\ y_2,\ z_2),\ \ldots,\ A_6(x_6,\ y_6,\ z_6).$$

В этой системе середины сторон шестиугольника будут иметь координаты:

$$M_1\left\{\frac{x_1+x_2}{2},\ \frac{y_1+y_2}{2},\ \frac{z_1+z_2}{2}\right\},\quad M_2\left\{\frac{x_2+x_3}{2},\ \frac{y_2+y_3}{2},\ \frac{z_2+z_3}{2}\right\},$$

$$M_3\left\{\frac{x_3+x_4}{2},\ \frac{y_3+y_4}{2},\ \frac{z_3+z_4}{2}\right\},\quad M_4\left\{\frac{x_4+x_5}{2}\ \frac{y_4+y_5}{2},\ \frac{z_4+z_5}{2}\right\},$$

$$M_5\left\{\frac{x_5+x_6}{2},\ \frac{y_5+y_6}{2},\ \frac{z_5+z_6}{2}\right\},\quad M_6\left\{\frac{x_6+x_1}{2},\ \frac{y_6+y_1}{2},\ \frac{z_6+z_1}{2}\right\},$$

а векторы $\overline{M_1M_2},\ \overline{M_3M_4},\ \overline{M_5M_6}$ — координаты:

$$\overline{M_1M_2}\left\{\frac{x_3-x_1}{2},\ \frac{y_3-y_1}{2},\ \frac{z_3-z_1}{2}\right\},\quad \overline{M_3M_4}\left\{\frac{x_5-x_3}{2},\ \frac{y_5-y_3}{2},\ \frac{z_5-z_3}{2}\right\},$$

$$\overline{M_5M_6}\left\{\frac{x_1-x_5}{2},\ \frac{y_1-y_5}{2},\ \frac{z_1-z_5}{2}\right\}.$$

Отсюда непосредственно следует, что выполняется условие (3), т. е. шестиугольник $M_1M_2M_3M_4M_5M_6$ составной.

Задача 7. Дан неплоский шестиугольник $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, противоположные стороны которого попарно параллельны. Доказать, что у этого шестиугольника диагонали, соединяющие противоположные вершины, пересекаются в одной точке и делятся в ней пополам.

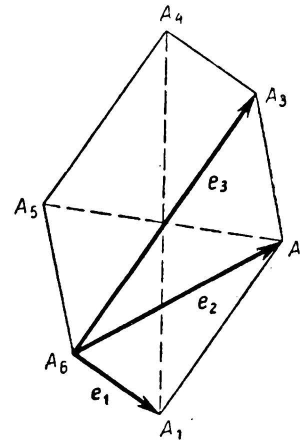


Рис. 19

Решение. Возьмем четыре последовательные вершины так, чтобы они не лежали в одной плоскости, и обозначим их через A_6, A_1, A_2 и A_3. Остальные две вершины обозначим через A_4 и A_5. Точку A_6 возьмем за начало, а векторы $\boldsymbol{e}_1 = \overline{A_6A_1}$, $\boldsymbol{e}_2 = \overline{A_6A_2}$, $\boldsymbol{e}_3 = \overline{A_6A_3}$ — за координатные векторы аффинной системы координат (рис. 19). В выбранной системе координат вершины A_6, A_1, A_2, A_3 имеют координаты:

$$A_6(0,\ 0,\ 0),\ A_1\,(1,\ 0,\ 0),\ A_2\,(0,\ 1,\ 0),\ A_3\,(0,\ 0,\ 1).$$

Обозначим координаты остальных вершин так:

$$A_4(x_1,\ y_1,\ z_1),\ A_5(x_2,\ y_2,\ z_2).$$

По условию задачи $\overline{A_1A_2} \parallel \overline{A_4A_5}$, $\overline{A_2A_3} \parallel \overline{A_5A_6}$, $\overline{A_3A_4} \parallel \overline{A_6A_1}$. Эти условия накладывают ограничения на координаты точек A_4 и A_5. В самом деле, согласно теореме [2.1]

$$\overline{A_1A_2}\,\{-1,\ 1,\ 0\},\ \overline{A_2A_3}\,\{0,\ -1,\ 1\},$$
$$\overline{A_3A_4}\,\{x_1,\ y_1,\ z_1-1\},\ \overline{A_4A_5}\,\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\},$$
$$\overline{A_5A_6}\,\{-x_2,\ -y_2,\ -z_2\},\ \overline{A_6A_1}\,\{1,\ 0,\ 0\}.$$

Запишем условия коллинеарности векторов, пользуясь теоремой [1.8]. Из условия $\overline{A_3A_4} \parallel \overline{A_6A_1}$ получаем: $y_1 = 0$, $z_1 = 1$. Из условия $\overline{A_1A_2} \parallel \overline{A_4A_5}$ получаем: $z_2 = z_1$ и $x_2 - x_1 = y_1 - y_2$. Из условия $\overline{A_2A_3} \parallel \overline{A_5A_6}$ получаем: $x_2 = 0$, $-y_2 = z_2$.

Таким образом, $y_1 = 0$, $z_1 = 1$, $x_2 = 0$, $z_2 = 1$, $y_2 = -1$, $x_1 = -1$ и точки A_4 и A_5 имеют координаты: $A_4\,(-1,\ 0,\ 1)$, $A_5(0,\ -1,\ 1)$.

Теперь легко доказать, что середины диагоналей A_1A_4, A_2A_5 и A_3A_6 совпадают. В самом деле, вычислив координаты середин P, Q и R этих отрезков, мы убеждаемся в том, что все три точки имеют одни и те же координаты:

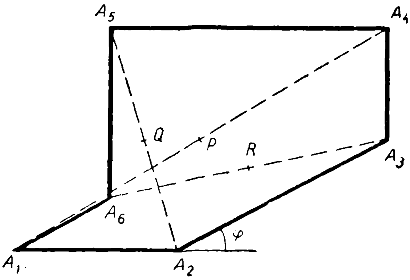


Рис. 20

$$P\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right),\quad Q\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right),$$
$$R\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right).$$

Задача решена.

Важно отметить, что утверждение, высказанное в задаче, справедливо только для неплоского шестиугольника. Для плоского шестиугольника с параллельными противоположными сторонами середины диагоналей, вообще говоря, не совпадают (рис. 20).

Задачи и упражнения

38. Доказать, что четыре отрезка, соединяющие каждую вершину тетраэдра с точкой пересечения медиан противоположной грани, пересекаются в одной точке, и каждый из отрезков делится этой точкой в отношении $\lambda = 3$ (считая от вершины тетраэдра).

39. В тетраэдре $ABCD$ ребра AB, AC, DB и DC разделены соответственно точками M, N, P и Q в одном и том же отношении λ. Доказать, что четырехугольник $MNPQ$ — параллелограмм.

40. Дан тетраэдр $ABCD$ и точка S на ребре AB. Доказать, что середины отрезков AD, BC, SD и SC лежат в одной плоскости.

41. Пусть O — точка пересечения диагоналей параллелепипеда, а l — произвольная прямая, проходящая через O. Доказать, что отрезок прямой l, заключенный между гранями параллелепипеда, делится в точке O пополам.

42. Доказать, что две плоскости A_1BD и CB_1D_1, проведенные через вершины параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ делят его диагональ AC_1 на три равные части.

43. Доказать, что во всяком пространственном четырехугольнике середины сторон образуют параллелограмм.

44. Пусть $ABC\ldots K$ — произвольный пространственный многоугольник с четным числом вершин. Доказать, что многоугольник, вершинами которого являются середины сторон этого многоугольника, является составным.

45. Пусть в неплоском шестиугольнике противоположные стороны попарно параллельны. Доказать, что точки P, Q и R, делящие диагонали шестиугольника в одном и том же отношении, отличном от единицы, не лежат на одной прямой.

46. В неплоском четырехугольнике проведены три отрезка, соединяющие соответственно: а) середины двух противоположных сторон; б) середины двух других противоположных сторон; в) середины диагоналей.

Доказать, что эти три отрезка пересекаются в одной точке и каждый из них делится в этой точке пополам.

47. На сторонах неплоского четырехугольника $ABCD$ выбраны точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, что

$$\frac{AA_1}{A_1B} = \frac{DC_1}{C_1C} = \lambda \text{ и } \frac{AD_1}{D_1D} = \frac{BB_1}{B_1C} = \mu.$$

Доказать, что четырехугольник $A_1B_1C_1D_1$ плоский.

48. Доказать, что если у шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ противоположные стороны попарно параллельны, а вершины не лежат в одной плоскости, то

$$A_1A_2 = A_4A_5,\ A_2A_3 = A_5A_6,\ A_3A_4 = A_6A_1.$$

Будет ли справедливо это свойство для плоского шестиугольника?

ГЛАВА II

ПРОИЗВЕДЕНИЯ ВЕКТОРОВ

§ 4. СКАЛЯРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

1. Проекция вектора на ось. Как известно, осью называется прямая, на которой указано некоторое направление в качестве положительного. Обычно ось задается прямой и ненулевым вектором, коллинеарным данной прямой. Ось, заданная прямой l и ненулевым вектором $\boldsymbol{u}$, обозначается так: $\{l, \boldsymbol{u}\}$. Если O — точка прямой l, то та же ось может быть задана точкой O и вектором $\boldsymbol{u}$.

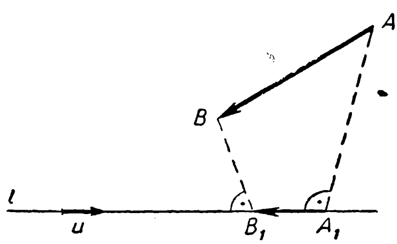


Рис. 21

Пусть в пространстве задана ось $\{l, \boldsymbol{u}\}$ и некоторый вектор $\overline{AB}$(рис. 21). Предположим, что $\boldsymbol{u}_0$ — единичный вектор, сонаправленный с вектором $\boldsymbol{u}$. Спроектируем концы вектора $\overline{AB}$ на прямую l и обозначим через A_1, B_1 проекции концов A и B. *Число* $\frac{\overline{A_1B_1}}{\boldsymbol{u}_0}$ *называется* *п р о е к ц и е й   в е к т о р а* $\overline{AB}$ на ось $\{l, \boldsymbol{u}\}$.

Из определения следует, что проекция вектора на ось есть число, равное длине вектора $\overline{A_1B_1}$, взятой со знаком плюс, если вектор $\overline{A_1B_1}$ сонаправлен с осью, и со знаком минус, если вектор $\overline{A_1B_1}$ и ось имеют противоположные направления. Предлагаем читателю доказать, что проекции равных векторов на одну и ту же ось равны, проекции одного и того же вектора на различные непараллельные оси различны. Однако если оси параллельны и направления их совпадают, то проекции вектора $\boldsymbol{a}$ на эти оси одинаковы. Таким образом, проекция вектора на ось $\{l, \boldsymbol{u}\}$ зависит по существу только от направления вектора $\boldsymbol{u}$, поэтому проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на ось, определяемую вектором $\boldsymbol{u}$, обозначается как $\text{Пр}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}$.

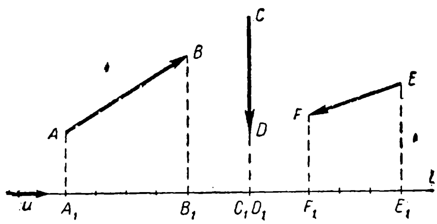


Рис. 22

Из определения проекции следует, что проекция нулевого вектора на любую ось равна нулю, а проекция ненулевого вектора $\overline{AB}$ равна нулю тогда и только тогда, когда точки A_1 и B_1 совпадают, т. е. когда вектор $\overline{AB}$ перпендикулярен к оси $\{l, \boldsymbol{u}\}$. На рисунке 22 изображены векторы $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ и $\overline{EF}$ и ось $\{l, \boldsymbol{u}\}$, где $\boldsymbol{u}$ — единичный вектор. Из рисунка видно, что

$$\text{Пр}_u\overline{AB} = 4, \ \text{ПР}_u\overline{CD} = 0, \ \text{Пр}_u\overline{EF} = -3.$$

Пример 1. Дан прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$ (рис. 23), при этом $AB = 2$, $AD = 1$ и $AA' = 4$. Вычислить проекции векторов $\overline{AC'}$, $\overline{B'A'}$, $\overline{B'A}$, $\overline{CA}$, $\overline{B'C}$ на ось $\{AB, \boldsymbol{u}\}$, где $\boldsymbol{u}$ — вектор, направленный вдоль прямой AB от точки A к точке B.

Решение. $\text{Пр}_u\overline{AC'} = \dfrac{\overline{AB}}{\boldsymbol{u}_0} = 2$, так как B есть проекция точки C' на ось $\{AB, \boldsymbol{u}\}$. Здесь $\boldsymbol{u}_0$ — единичный вектор, сонаправленный с вектором $\boldsymbol{u}$.

$$\text{Пр}_u\overline{B'A'} = \frac{\overline{BA}}{\boldsymbol{u}_0} = -2,$$

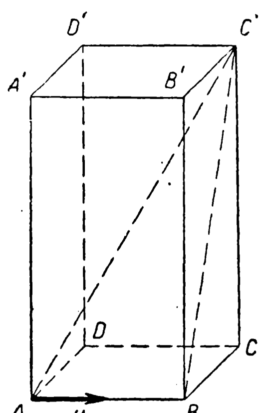


Рис. 23

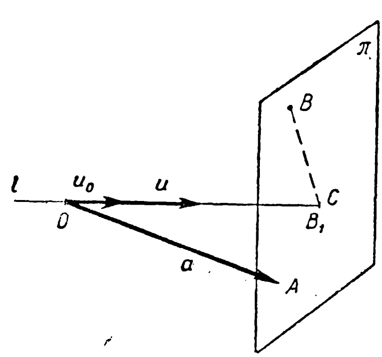


Рис. 24

так как B и A являются соответственно проекциями точек B' и A'. Точно так же определяем проекции остальных векторов:

$$\text{Пр}_u \overline{B'A} = \frac{\overline{BA}}{u_0} = -2, \quad \text{Пр}_u \overline{CA} = \frac{\overline{BA}}{u_0} = -2,$$

$$\text{Пр}_u \overline{B'C} = \frac{\overline{BB}}{u_0} = 0.$$

П р и м е р 2. Определить геометрическое место концов векторов $\boldsymbol{a}$, приложенных к точке O оси $\{l, \boldsymbol{u}\}$ и удовлетворяющих условию: $\text{Пр}_u\, \boldsymbol{a} = m$, где m — действительное число.

Р е ш е н и е. Пусть $\boldsymbol{u}_0$ — единичный вектор, сонаправленный с вектором $\boldsymbol{u}$. Рассмотрим вектор $\overline{OC} = m\boldsymbol{u}_0$ (рис. 24). Очевидно, точка C принадлежит рассматриваемому геометрическому месту точек, так как

$$\text{Пр}_u \overline{OC} = \frac{\overline{OC}}{\boldsymbol{u}_0} = m.$$

Кроме того, она лежит на оси $\{l, \boldsymbol{u}\}$. Через точку C проведем плоскость π, перпендикулярную к оси $\{l, \boldsymbol{u}\}$. Докажем, что искомое геометрическое место точек совпадает с множеством всех точек плоскости. Возьмем произвольную точку A плоскости π и рассмотрим проекцию вектора $\overline{OA}$ на ось $\{l, \boldsymbol{u}\}$. Так как проекция точки O совпадает с точкой O, а проекция точки A — с точкой C, то $\text{Пр}_u \overline{OA} = \frac{\overline{OC}}{\boldsymbol{u}_0} = m$.

Обратно, пусть B — точка геометрического места, а B_1 — ее проекция на ось $\{l, \boldsymbol{u}\}$. По условию $\text{Пр}_u\, \overline{OB} = m$. С другой стороны, $\text{Пр}_u \overline{OB} = \frac{\overline{OB_1}}{\boldsymbol{u}_0}$, поэтому $\frac{\overline{OB_1}}{\boldsymbol{u}_0} = m$ и $\overline{OB_1} = m\boldsymbol{u}_0$.

Отсюда следует, что B_1 совпадает с точкой C, поэтому B — точка плоскости π. Мы показали, что искомое геометрическое место точек есть множество всех точек плоскости π.

Выведем формулу для вычисления проекции вектора на ось. Предварительно уточним понятие угла между двумя векторами. Пусть в пространстве даны два ненулевых вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Перенесем их в точку O и рассмотрим угол кратчайшего поворота от вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{b}$ Этот угол называется у г л о м м е ж д у в е к т о р а м и $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Его мера, очевидно, лежит в пределах от нуля до π. Угол между коллинеарными векторами равен нулю, если они сонаправлены, и равен π, если они имеют противоположные направления. Отметим, наконец, что если один из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ нулевой, то по определению мы считаем, что угол $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$ произволен.

У г л о м м е ж д у в е к т о р о м $\boldsymbol{a}$ *и о с ь ю* $\{l, \boldsymbol{u}\}$ *называется угол между векторами* $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{u}$.

Теперь докажем следующую теорему.

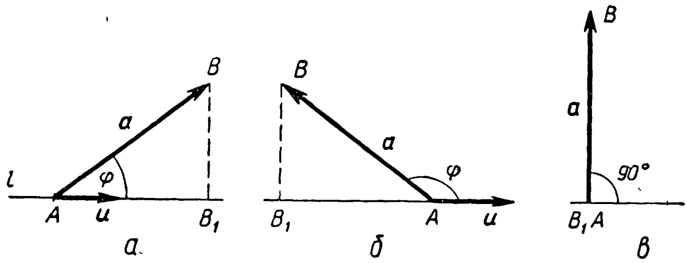


Рис. 25

Теорема [4.1]. *Если дана ось* $\{l, \boldsymbol{u}\}$ и вектор $\boldsymbol{a}$, то

$$\text{Пр}_u \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}}).$$

Доказательство. Если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, то $|\boldsymbol{a}| = \boldsymbol{0}$, поэтому

$$\text{Пр}_u \boldsymbol{a} = 0 \cdot \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}}) = 0.$$

Доказательство проведем для случая $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$. Пусть $\varphi = (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}})$.

Возможны три случая:

а) $\varphi < \frac{\pi}{2}$ (рис. 25, *а*); б) $\varphi > \frac{\pi}{2}$ (рис. 25, *б*); в) $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (рис. 25, *в*).

Рассмотрим случаи а) и б). Не нарушая общности, можно считать, что вектор $\boldsymbol{u}$ единичный и начало вектора $\boldsymbol{a} = \overline{AB}$ лежит на оси $\{l, \boldsymbol{u}\}$ и совпадает с началом вектора $\boldsymbol{u}$. Пусть B_1 — проекция точки B на ось $\{l, \boldsymbol{u}\}$.

а) Из прямоугольного треугольника ABB_1 имеем (рис. 25,*а*):

$$\cos\varphi = \frac{AB_1}{AB}, \quad AB_1 = AB \cdot \cos\varphi.$$

С другой стороны, $\text{Пр}_u \overline{AB} = \frac{\overline{AB_1}}{\boldsymbol{u}}$. В данном случае векторы $\overline{AB_1}$ и $\boldsymbol{u}$ сонаправлены, так как $\varphi < \frac{\pi}{2}$, поэтому $\frac{\overline{AB_1}}{\boldsymbol{u}} = AB_1$.

Таким образом,

$$\text{Пр}_u \overline{AB} = AB_1 = AB \cdot \cos\varphi = |\boldsymbol{a}| \cos\varphi;$$

б) Из прямоугольного треугольника ABB_1 имеем (рис. 25,*б*): $\cos(180° - \varphi) = \frac{AB_1}{AB}$, $AB_1 = -AB \cdot \cos\varphi$. С другой стороны, $\text{Пр}_u \overline{AB} = \frac{\overline{AB_1}}{\boldsymbol{u}} = -AB_1$, таким образом,

$$\text{Пр}_u \overline{AB} = AB \cdot \cos\varphi = |\boldsymbol{a}| \cos\varphi.$$

Предоставляем читателю убедиться в том, что и в случае в) теорема справедлива.

2. Координаты вектора как проекции. Понятие проекции вектора на ось тесно связано с понятием координат вектора. Имеет место следующая теорема.

Т е о р е м а [4.2] *Если вектор* $\boldsymbol{a}$ *задан в прямоугольной декартовой системе координат* $O\boldsymbol{ijk}$ *своими координатами* x, y, z, *то каждая координата есть проекция вектора на соответствующую ось, т. е.* $x = \text{Пр}_{\boldsymbol{i}}\, \boldsymbol{a}$, $y = \text{Пр}_{\boldsymbol{j}} \boldsymbol{a}$, $z = \text{Пр}_{\boldsymbol{k}}\, \boldsymbol{a}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $\boldsymbol{a} = \overline{OM}$ — данный вектор, а $O\boldsymbol{ijk}$ — прямоугольная декартова система координат (см. рис. 7 на стр. 18). По условию теоремы вектор $\boldsymbol{a}$ имеет координаты x, y, z, поэтому $\boldsymbol{a} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. В п. 4, §2 было показано, что координаты радиус-вектора данной точки совпадают с координатами самой точки. Поэтому числа x, y, z совпадают с координатами конца вектора $\boldsymbol{a}$, т. е. точки M. Но по определению координат точки имеем:

$$x = \frac{\overline{OM_1}}{\boldsymbol{i}},\ y = \frac{\overline{OM_2}}{\boldsymbol{j}},\ z = \frac{\overline{OM_3}}{\boldsymbol{k}},$$

где M_1, M_2, M_3 являются проекциями точки M на координатные оси. С другой стороны, отношения $\frac{\overline{OM_1}}{\boldsymbol{i}}, \frac{\overline{OM_2}}{\boldsymbol{j}}, \frac{\overline{OM_3}}{\boldsymbol{k}}$ являются проекциями вектора $\overline{OM} = \boldsymbol{a}$ на оси координат. Итак,

$$x = \text{Пр}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a},\ y = \text{Пр}_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a},\ z = \text{Пр}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}.$$

Теорема доказана.

В заключение докажем два важных свойства проекций, необходимых для дальнейшего изложения.

Т е о р е м а [4.3]. *Пусть* $\{l, \boldsymbol{u}\}$ — *ось,* $\boldsymbol{u}$ — *единичный вектор этой оси. Каковы бы ни были векторы* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и каково бы ни было число* λ, *имеют место соотношения*:

а) $\text{Пр}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \text{Пр}_{\boldsymbol{u}}\, \boldsymbol{a} + \text{Пр}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b}$,

б) $\text{Пр}_{\boldsymbol{u}}(\lambda\boldsymbol{a}) = \lambda\, \text{Пр}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a}$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Докажем сначала соотношение а). Выберем в пространстве прямоугольную декартову систему координат так, чтобы начало O лежало на прямой l, а вектор $\boldsymbol{u}$ был первым координатным вектором. Два других вектора обозначим через $\boldsymbol{v}$ и $\boldsymbol{w}$. Итак, $O\boldsymbol{uvw}$ — прямоугольная декартова система координат. Пусть в этой системе векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ заданы своими координатами: $\boldsymbol{a}\,\{x_1, y_1, z_1\}$, $\boldsymbol{b}\,\{x_2, y_2, z_2\}$. По теореме [1.5] имеем:

$$(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\,\{x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2\}.$$

Согласно теореме [4.2]

$$x_1 = \text{Пр}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a},\quad x_2 = \text{Пр}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b},\ x_1 + x_2 = \text{Пр}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}).$$

Отсюда следует, что

$$\text{Пр}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{a} + \text{Пр}_{\boldsymbol{u}}\boldsymbol{b} = \text{Пр}_{\boldsymbol{u}}(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}).$$

Для доказательства соотношения б) заметим, что вектор $\lambda \boldsymbol{a}$ согласно теореме [1.5] имеет координаты $\lambda \boldsymbol{a}\{\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1\}$, поэтому

$$\text{Пр}_u(\lambda \boldsymbol{a}) = \lambda x_1 = \lambda \, \text{Пр}_u \boldsymbol{a}.$$

Теорема доказана.

Замечание. Свойство а) может быть распространено на любое конечное число слагаемых. В самом деле, $\text{Пр}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}) = \text{Пр}_u[(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}] = \text{Пр}_u(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}) + \text{Пр}_u\boldsymbol{c} = \text{Пр}_u\boldsymbol{a} + \text{Пр}_u\boldsymbol{b} + \text{Пр}_u\boldsymbol{c}$.

Аналогично,

$$\text{Пр}_u(\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\ldots+\boldsymbol{a}_k) = \text{Пр}_u\boldsymbol{a}_1 + \text{Пр}_u\boldsymbol{a}_2 + \ldots + \text{Пр}_u\boldsymbol{a}_k.$$

3. Скалярное произведение векторов. *Скалярным произведением вектора* $\boldsymbol{a}$ *на вектор* $\boldsymbol{b}$ *называется число* $\alpha = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$, *если векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *ненулевые, и число нуль, если хотя бы один из них равен нулю.* Скалярное произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ обозначается так: $\boldsymbol{ab}$.

Пользуясь соглашением, введенным на стр. 44, мы будем считать, что нулевой вектор перпендикулярен к любому вектору пространства. Итак, $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \frac{\pi}{2}$, если хотя бы один из этих векторов нулевой. Таким образом, каковы бы ни были векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$,

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}), \tag{1}$$

Если $\boldsymbol{a}$ — ненулевой вектор, то согласно теореме [4. 1] имеем: $\text{Пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}})$, поэтому

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}| \, \text{Пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b}. \tag{2}$$

Аналогично, если $\boldsymbol{b}$ — ненулевой вектор, то согласно теореме [4.1] $\text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$, поэтому

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{b}| \cdot \text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a}. \tag{3}$$

Из определения непосредственно следует, что скалярное произведение двух векторов есть скалярная величина, т. е. число. Отсюда и происходит термин «скалярное» произведение.

Ниже мы перейдем к рассмотрению свойств скалярного произведения. Предварительно выясним геометрический смысл знака скалярного произведения.

Пусть $\boldsymbol{ab} > 0$. Из определения скалярного произведения следует, что $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) > 0$, откуда

$$|\boldsymbol{a}| \neq 0, \quad |\boldsymbol{b}| \neq 0, \quad \angle(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}) < \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Обратно, если выполнены условия (4), то $\boldsymbol{ab} > 0$.

Пусть $ab < 0$, тогда $|a||b| \cos(\widehat{a, b}) < 0$, откуда

$$|a| \neq 0, |b| \neq 0, \quad \angle (a, b) > \frac{\pi}{2}. \tag{5}$$

и, обратно, если выполнены условия (5), то $a\,b < 0$.

Рассмотрим, наконец, случай, когда

$$a\,b = 0 \quad \text{или} \quad |a|\,|b| \cos(\widehat{a, b}) = 0.$$

Это равенство может иметь место, если выполнено одно из условий:

$$\text{а) } a = 0; \text{ б) } b = 0; \text{ в) } a \neq 0, \quad b \neq 0, \text{ но } a \perp b. \tag{6}$$

Обратно, если выполняется одно из условий (6), то $a\,b = 0$, Мы пришли к следующей теореме.

Теорема [4.4]. а) *Скалярное произведение векторов a и b положительно тогда и только тогда, когда $a \neq 0$, $b \neq 0$, $\angle (a, b) < \frac{\pi}{2}$.*

б) *Скалярное произведение векторов a и b отрицательно тогда и только тогда, когда $a \neq 0$, $b \neq 0$, $\angle (a, b) > \frac{\pi}{2}$.*

в) *Скалярное произведение векторов a и b равно нулю тогда и только тогда, когда они взаимно перпендикулярны*[1].

Пример 3. Определить знаки скалярных произведений следующих пар векторов:

$$\text{а) } \overline{A_6A_1} \cdot \overline{A_6A_5}; \text{ б) } \overline{A_5A_6} \cdot \overline{A_5A_4};$$

$$\text{в) } \overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_2A_3}; \text{ г) } \overline{A_1A_6} \cdot \overline{A_1A_2},$$

где каждый из сомножителей есть вектор, образованный соответствующей стороной плоского шестиугольника $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$, изображенного на рисунке 20 (см. стр. 40).

Решение. а) $\overline{A_6A_1} \cdot \overline{A_6A_5} < 0$, так как $\angle A_1A_6A_5 > \frac{\pi}{2}$;

б) $\overline{A_5A_6} \cdot \overline{A_5A_4} = 0$, так как $\angle A_6A_5A_4 = \frac{\pi}{2}$;

в) $\overline{A_1A_2} \cdot \overline{A_2A_3} > 0$, так как $\varphi = \angle (\overline{A_1A_2}, \overline{A_2A_3}) < \frac{\pi}{2}$.

В самом деле, угол φ острый, так как смежный с ним $\angle A_1A_2A_3$ тупой;

г) $\overline{A_1A_6} \cdot \overline{A_1A_2} > 0$, так как $\angle A_6A_1A_2 < \frac{\pi}{2}$

4. Основные свойства скалярного произведения. В следующей теореме сформулированы основные свойства скалярного произведения векторов.

[1] Здесь термин «перпендикулярность» распространяется и на тот случай, когда один из векторов нулевой.

Теорема [4.5]. *Для произвольных векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *и произвольного числа* α *имеют место следующие свойства скалярного произведения:*

а) $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$;

б) $(\alpha\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{ab})$; $\boldsymbol{a}(\alpha\boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{ab})$;

в) $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}$; $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ac} + \boldsymbol{bc}$.

Доказательство свойства а) непосредственно следует из определения скалярного произведения. В самом деле,

$$\boldsymbol{ab} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}); \quad \boldsymbol{ba} = |\boldsymbol{b}||\boldsymbol{a}|\cos(\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}}).$$

Но правые части этих равенств равны, так как произведение чисел не зависит от порядка сомножителей, а $\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \cos(\widehat{\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}})$. Отсюда следует, что равны и левые части, т. е. $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{ba}$.

б) Приведем доказательство свойства б): $(\alpha\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{ab})$.

Если $\boldsymbol{b} = 0$, то соотношение, очевидно, справедливо, так как по определению $(\alpha\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = 0$ и $\boldsymbol{ab} = 0$, поэтому $(\alpha\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = \alpha(\boldsymbol{ab})$.

Если $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, то из соотношения (3) и теоремы [4. 3], получаем:

$$(\alpha\boldsymbol{a})\boldsymbol{b} = |\boldsymbol{b}| \text{ Пр}_{\boldsymbol{b}}(\alpha\boldsymbol{a}) = \alpha|\boldsymbol{b}|\text{Пр}_{\boldsymbol{b}}\boldsymbol{a} = \alpha(\boldsymbol{ab}).$$

На основании доказанного свойства и свойства а) легко показать, что $\boldsymbol{a}(\alpha\boldsymbol{b}) = \alpha(\boldsymbol{ab})$. В самом деле, $\boldsymbol{a}(\alpha\boldsymbol{b}) = (\alpha\boldsymbol{b})\boldsymbol{a} = \alpha(\boldsymbol{ba}) = \alpha(\boldsymbol{ab})$.

Совершенно аналогично можно доказать свойство в):

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}.$$

В самом деле, если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, то $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = 0$, $\boldsymbol{ab} = 0$, $\boldsymbol{ac} = 0$, поэтому $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}$. Если $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$, то из соотношения (2) и теоремы [4.3] получаем:

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}|\text{ Пр}_{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}|(\text{Пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} + \text{Пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c}) =$$
$$= |\boldsymbol{a}|\text{ Пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{b} + |\boldsymbol{a}|\text{Пр}_{\boldsymbol{a}}\boldsymbol{c} = \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{ac}.$$

Предлагаем читателю самостоятельно доказать второе из соотношений в).

Следствия. 1°. *Для произвольных векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и произвольных чисел* α, β *имеет место соотношение:*

$$(\alpha\boldsymbol{a})(\beta\boldsymbol{b}) = \alpha\beta(\boldsymbol{ab}).$$

2° *Каковы бы ни были векторы* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}_1, \ldots, \boldsymbol{b}_k$, *имеет место соотношение*

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}_1 + \boldsymbol{b}_2 + \ldots + \boldsymbol{b}_k) = \boldsymbol{ab}_1 + \boldsymbol{ab}_2 + \ldots + \boldsymbol{ab}_k.$$

В самом деле, 1^0 непосредственно следует из свойства б) теоремы [4.5], а 2^0 является обобщением пункта в) той же теоремы. Предлагаем читателю самостоятельно доказать это следствие методом индукции.

Пример 4. Пусть $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ — единичные взаимно перпендикулярные векторы. Вычислить скалярное произведение

$$(2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k}) \ (\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}).$$

Решение. Пусть $\alpha = (2\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k})(\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k})$. Пользуясь свойством в) теоремы [4.5], получаем:

$$\alpha = 2\boldsymbol{i}(\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{j}(\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}) + (-3\boldsymbol{k})(\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{k}) =$$

$$= (2\boldsymbol{i})\boldsymbol{i} + (2\boldsymbol{i})(3\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{j}\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}(3\boldsymbol{k}) + (-3\boldsymbol{k})\boldsymbol{i} + (-3\boldsymbol{k})(3\boldsymbol{k}).$$

Теперь используем следствие 1^0:

$$\alpha = 2(\boldsymbol{i}\boldsymbol{i}) + 6(\boldsymbol{i}\boldsymbol{k}) + \boldsymbol{j}\boldsymbol{i} + 3(\boldsymbol{j}\boldsymbol{k}) - 3(\boldsymbol{k}\boldsymbol{i}) - 9(\boldsymbol{k}\boldsymbol{k}).$$

Векторы $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ единичные и взаимно перпендикулярные, поэтому $\boldsymbol{i}\boldsymbol{i} = 1$, $\boldsymbol{k}\boldsymbol{k} = 1$, $\boldsymbol{i}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{j}\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}\boldsymbol{i} = 0$.

Подставив эти значения в выражение для α, получаем: $\alpha = 2 - 9 = -7$.

Пример 5. Какой угол составляют между собой ненулевые векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, если известно, что вектор $\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b}$ перпендикулярен к вектору $7\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b}$, а вектор $\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b}$ перпендикулярен к вектору $7\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$?

Решение. Так как пары векторов

$$\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b},\ 7\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b} \text{ и } \boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b},\ 7\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}$$

взаимно перпендикулярны, то

$$(\boldsymbol{a} + 3\boldsymbol{b})(7\boldsymbol{a} - 5\boldsymbol{b}) = 0 \text{ и } (\boldsymbol{a} - 4\boldsymbol{b})(7\boldsymbol{a} - 2\boldsymbol{b}) = 0.$$

Отсюда, пользуясь свойствами скалярного произведения, получаем: $7\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} + 16\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} - 15\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} = 0$, $7\boldsymbol{a}\boldsymbol{a} - 30\boldsymbol{a}\boldsymbol{b} + 8\boldsymbol{b}\boldsymbol{b} = 0$, или

$$7a^2 + 16ab\cos\varphi - 15b^2 = 0, \quad 7a^2 - 30ab\cos\varphi + 8b^2 = 0,$$

где $a = |\boldsymbol{a}|$, $b = |\boldsymbol{b}|$.

Разделив эти соотношения на a^2 и введя обозначение $\lambda = \frac{b}{a}$, получим:

$$7 + 16\lambda\cos\varphi - 15\lambda^2 = 0, \ 7 - 30\lambda\cos\varphi + 8\lambda^2 = 0.$$

Исключив из этих двух соотношений λ, получим одно уравнение для определения $\cos\varphi$. Вычитая из первого соотношения второе, получаем:

$$46\lambda\cos\varphi - 23\lambda^2 = 0.$$

Так как a и b — ненулевые векторы, то $\lambda = \frac{b}{a} \neq 0$, поэтому, сократив на 23λ, получаем: $2\cos\varphi = \lambda$. Подставив это значение в одно из предыдущих уравнений, получим: $7 + 32\cos^2\varphi - 60\cos^2\varphi = 0$, или $\cos^2\varphi = \frac{1}{4}$; $\cos\varphi = \pm\frac{1}{2}$, $\varphi_1 = 60°$, $\varphi_2 = 120°$.

5. Выражение скалярного произведения через координаты сомножителей. Рассмотрим следующую задачу, имеющую важные практические приложения.

Задача 1. Даны векторы a и b своими координатами в прямоугольном декартовом базисе:

$$a\{x_1, y_1, z_1\} \text{ и } b\ \{x_2, y_2, z_2\}.$$

Вычислить их скалярное произведение.

Решение. Пусть i, j, k — векторы данного прямоугольного декартового базиса. Из определения скалярного произведения непосредственно следует, что

$$\begin{array}{lll} ii = 1, & ij = 0, & ik = 0, \\ ji = 0, & jj = 1, & jk = 0, \\ ki = 0, & kj = 0, & kk = 1. \end{array} \tag{7}$$

Теперь легко вычислить скалярное произведение векторов a и b:

$$a = x_1 i + y_1 j + z_1 k, \quad b = x_2 i + y_2 j + z_2 k,$$
$$ab = (x_1 i + y_1 j + z_1 k)(x_2 i + y_2 j + z_2 k).$$

Пользуясь следствиями 1^0 и 2^0 теоремы [4. 5], преобразуем это выражение так:

$$\begin{aligned} ab &= (x_1 i)(x_2 i) + (x_1 i)(y_2 j) + (x_1 i)(z_2 k) + (y_1 j)(x_2 i) + (y_1 j)(y_2 j) + \\ &+ (y_1 j)(z_2 k) + (z_1 k)(x_2 i) + (z_1 k)(y_2 j) + (z_1 k)(z_2 k) = \\ &= x_1x_2(ii) + x_1y_2(ij) + x_1z_2(ik) + y_1x_2(ji) + y_1y_2(jj) + y_1z_2(jk) \\ &+ z_1x_2(ki) + z_1y_2(kj) + z_1z_2(kk). \end{aligned}$$

Учитывая соотношения (7), окончательно получаем:

$$ab = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \tag{8}$$

Мы пришли к следующей теореме.

Теорема [4.6]. *Если два вектора заданы в прямоугольном декартовом базисе своими координатами, то их скалярное произведение равно сумме парных произведений одноименных координат.*

Из этой теоремы и теоремы [4.4] в) получаем:

Следствие. *Для того чтобы два вектора, заданные своими координатами в прямоугольном декартовом базисе, были взаимно перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы сумма парных произведений одноименных координат равнялась нулю.*

Пример 6. В прямоугольном декартовом базисе даны векторы $a\{1, 3, 0\}$ и $b\ \{2, -3, 1\}$.

Вычислить

а) ab; б) $(a+b)(a-b)$; в) $\sqrt{aa}$; г) bb.

Решение. а) По формуле (8) получаем:

$$ab = 1 \cdot 2 + 3 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 = -7.$$

б) Сначала вычислим координаты векторов $a+b$ и $a-b$, а потом воспользуемся формулой (8):

$$(a+b)\{3,\ 0,\ 1\},\ (a-b)\{-1,\ 6,\ -1\};$$

$$(a+b)(a-b) = 3 \cdot (-1) + 0 \cdot 6 + 1 \cdot (-1) = -4.$$

$$\text{в) } aa = 1 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 0 \cdot 0 = 10,\ \sqrt{aa} = \sqrt{10}.$$

$$\text{г) } bb = 2 \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) + 1 \cdot 1 = 4 + 9 + 1 = 14.$$

Произведем косвенную проверку полученного в п. б) результата. Мы получили $(a+b)(a-b) = -4$.

Преобразуем левую часть, пользуясь распределительным законом скалярного произведения векторов:

$$aa - ab + ba - bb = -4,\ 10 - 14 = -4.$$

Мы получили правильное числовое равенство.

Пример 7. Выяснить, какие из пар следующих векторов, заданных своими координатами в прямоугольном декартовом базисе, взаимно перпендикулярны:

$$a\{3,\ -1,\ 2\},\ b\{1,\ 1,\ 0\},\ c\{0,\ 0,\ 3\},\ d\left\{1,\ 0,\ -\frac{3}{2}\right\}.$$

Решение. Вычислим попарно скалярные произведения данных векторов:

$$ab = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 = 2,\quad bc = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 3 = 0,$$

$$ac = 3 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot 3 = 6,\quad bd = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 1,$$

$$ad = 3 \cdot 1 + (-1) \cdot 0 + 2 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = 0,$$

$$cd = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 3 \cdot \left(-\frac{3}{2}\right) = -\frac{9}{2}.$$

Отсюда видно, что $a \perp d$ и $b \perp c$.

Другие пары векторов не перпендикулярны. Например, векторы a и b согласно теореме [4.4] образуют острый угол, а векторы c и d — тупой угол.

Задачи и упражнения[1]

49. На рисунке 23 изображен прямоугольный параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$. Определить проекции векторов $\overline{AD'}$, $\overline{C'A'}$, $\overline{C'B}$, $\overline{DC'}$, $\overline{CA'}$ на ось $\{AB, \boldsymbol{u}\}$, если $\boldsymbol{u}$ — единичный вектор, а $AB = 2$.

50. Даны две оси $\{l, \boldsymbol{u}\}$ и $\{l, -\boldsymbol{u}\}$. Как связаны проекции одного и того же вектора на эти оси? Существуют ли векторы, для которых проекции на данные две оси равны?

51. Дана сферическая поверхность радиуса r. Доказать, что если концы вектора $\boldsymbol{a}$ лежат на этой поверхности, то проекция вектора $\boldsymbol{a}$ на любую ось по модулю не больше, чем $2r$.

52. Определить проекцию вектора $\boldsymbol{p} = 5\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ на ось, имеющую направление $\boldsymbol{q} = 5\boldsymbol{i} - 12\boldsymbol{j}$.

53. Найти проекцию вектора $\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ на ось, образующую равные острые углы с тремя координатными осями.

54. Дан параллелограмм $OABC$; $\overline{OA} = \overline{CB} = \boldsymbol{a}$, $\overline{OC} = \overline{AB} = \boldsymbol{b}$. Дать геометрическое истолкование формул:

а) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 + (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = 2(\boldsymbol{a}^2+\boldsymbol{b}^2)$;

б) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})^2 - (\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2 = 4\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}$;

в) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2$.

55. Даны векторы: $\boldsymbol{a}\{1, 5, 2\}$, $\boldsymbol{b}\{2, 0, -1\}$, $\boldsymbol{c}\left\{2, 3, \frac{1}{3}\right\}$, $\boldsymbol{d}\{0, 0, -2\}$, $\boldsymbol{e}\{1, 0, 0\}$. Вычислить их попарные скалярные произведения и по этим произведениям узнать, образуют ли они острый, прямой или тупой угол.

56. Даны векторы: $\boldsymbol{a}\{2, -1, 0\}$, $\boldsymbol{b}\{1, \sqrt{2}, -5\}$, $\boldsymbol{c}\{1, 2, 5\}$, $\boldsymbol{d}\{1, 0, 2\}$. Вычислить скалярные произведения: $\boldsymbol{ab}$, $\boldsymbol{ac}$, $\boldsymbol{ad}$, $\boldsymbol{bc}$, $\boldsymbol{bd}$, $\boldsymbol{cd}$.

57. Даны векторы $\boldsymbol{a}\{4, -2, -4\}$, $\boldsymbol{b}\{2, 4, 3\}$, $\boldsymbol{c}\{0, 1, -1\}$. Вычислить: а) $\boldsymbol{ab}$; б) $\boldsymbol{ac}$; в) $\sqrt{\boldsymbol{a}^2}$; г) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c})$; д) $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^2$.

58. В прямоугольной декартовой системе координат даны векторы $\boldsymbol{a}\{2, -1, 3\}$, $\boldsymbol{b}\{1, -3, 2\}$, $\boldsymbol{c}\{3, 2, -4\}$. Определить координаты вектора $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющего условиям:

$$\boldsymbol{xa} = 10, \ \boldsymbol{xb} = 22, \ \boldsymbol{xc} = -40.$$

59. Доказать, что в аффинном базисе скалярное произведение векторов $\boldsymbol{a}\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$ и $\boldsymbol{b}\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$ вычисляется по формуле

$$\boldsymbol{ab} = \sum_{ij=1}^{3} g_{ij}\alpha_i\beta_i, \text{ где } g_{ij} = \boldsymbol{e}_i\boldsymbol{e}_j.$$

60. Если векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ не компланарны и $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{p} = 0$, $\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{p} = 0$, $\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{p} = 0$, то $\boldsymbol{p} = 0$. Доказать.

---

[1] Во всех задачах этого параграфа предполагается, что базис прямоугольный декартовый.

61. Доказать, что если векторы $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3$ не компланарны, то

$$\Delta = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3 \\ \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_1 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_2 & \boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_3 \end{vmatrix} \neq 0.$$

62. Пусть $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ — аффинный базис. Числа

$$\boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_1 = \alpha_1,\ \boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_2 = \alpha_2,\ \boldsymbol{a}\boldsymbol{e}_3 = \alpha_3$$

называются ковариантными координатами вектора $\boldsymbol{a}$. Доказать, что: а) ковариантные координаты вектора однозначно определяют вектор; б) любые три числа, взятые в определенном порядке, могут быть ковариантными координатами некоторого вектора.

63. Установить связь между ковариантными и обычными координатами вектора $\boldsymbol{a}$ в аффинном базисе. Существует ли такой базис, в котором каждая ковариантная координата совпадает с соответствующей обычной координатой?

§ 5. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ СКАЛЯРНОГО ПРОИЗВЕДЕНИЯ; ЕГО СВОЙСТВА, ОТЛИЧНЫЕ ОТ СВОЙСТВ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ЧИСЕЛ

1. Вычисление модуля вектора.

Задача 1. Дан вектор $\boldsymbol{a}$ своими координатами x, y, z в прямоугольном декартовом базисе $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. Вычислить модуль этого вектора.

Решение. Рассмотрим скалярное произведение $\boldsymbol{aa}$. По определению $\boldsymbol{aa} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}| \cos(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{a}}) = |\boldsymbol{a}|^2$. Отсюда следует, что

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{aa}} = \sqrt{\boldsymbol{a}^2}\,[1].$$

Эта формула позволяет решить поставленную задачу. Так как $\boldsymbol{a}\,\{x, y, z\}$, то из соотношения (8), § 4 получаем

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \tag{1}$$

Мы доказали следующую теорему.

Теорема [5.1]. *Модуль вектора в прямоугольном декартовом базисе равен корню квадратному из суммы квадратов координат вектора.*

Если вектор $\boldsymbol{a}$ компланарен с векторами $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$, то $z = 0$ и формула (1) принимает вид: $\boldsymbol{a} = \sqrt{x^2 + y^2}$. Мы пришли к теореме I, [5.2].

Пример 1. В прямоугольном декартовом базисе даны векторы: $\boldsymbol{a}\{0, 4, -3\}$, $\boldsymbol{b}\{1, 0, 5\}$, $\boldsymbol{c}\{4, 1, 2\sqrt{2}\}$. Определить их модули.

---

[1] Здесь по определению $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{aa}$.

Решение. По теореме [5. 1] $|\boldsymbol{a}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = 5$, $|\boldsymbol{b}| = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$, $|\boldsymbol{c}| = \sqrt{16 + 1 + 8} = 5$.

Пример 2. Дан вектор $\boldsymbol{a}\,\{3, 5, -1\}$ в прямоугольном декартовом базисе. Определить координаты единичного вектора, сонаправленного с данным вектором.

Решение. Пусть $\boldsymbol{a}_0\{x_0, y_0, z_0\}$ искомый вектор. Очевидно, $\boldsymbol{a} = \lambda\boldsymbol{a}_0$, где $\lambda > 0$. Отсюда следует, что $3 = \lambda x_0$, $5 = \lambda y_0$, $-1 = \lambda z_0$, или

$$x_0 = \frac{3}{\lambda}, \quad y_0 = \frac{5}{\lambda}, \quad z_0 = -\frac{1}{\lambda}. \tag{2}$$

Вектор $\boldsymbol{a}_0$ единичный, поэтому

$$|\boldsymbol{a}_0| = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2} = 1, \quad \frac{\sqrt{9 + 25 + 1}}{\lambda^2} = 1, \quad \lambda = \sqrt{35}.$$

Из соотношений (2) получаем координаты вектора $\boldsymbol{a}_0$:

$$\boldsymbol{a}_0\left\{\frac{3}{\sqrt{35}}, \quad \frac{5}{\sqrt{35}}, \quad -\frac{1}{\sqrt{35}}\right\}.$$

2. Вычисление косинуса угла между векторами.

Задача 2. Даны ненулевые векторы своими координатами в прямоугольном декартовом базисе: $\boldsymbol{a}_1\,\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\boldsymbol{a}_2\,\{x_2, y_2, z_2\}$. Вычислить $\cos(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2})$.

Решение. Вычислим скалярное произведение данных векторов: $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2 = |\boldsymbol{a}_1| \cdot |\boldsymbol{a}_2| \cos(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2})$. Так как векторы $\boldsymbol{a}_1$ и $\boldsymbol{a}_2$ ненулевые, то $\cos(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2}) = \dfrac{\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2}{|\boldsymbol{a}_1| \cdot |\boldsymbol{a}_2|}$.

Подставив сюда значения $\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2$, $|\boldsymbol{a}_1|$, $|\boldsymbol{a}_2|$, выраженные через координаты[1], получаем:

$$\cos(\widehat{\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2}) = \frac{x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}\sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}. \tag{3}$$

Мы пришли к следующей теореме.

Теорема [5.2]. *Косинус угла между двумя ненулевыми векторами в прямоугольном декартовом базисе равен отношению суммы произведений соответствующих координат данных векторов к произведению модулей этих векторов.*

Пример 3. Определить косинус угла между векторами

$$\boldsymbol{a}\{2, -2, 1\} \text{ и } \boldsymbol{b}\{3, 0, -4\}.$$

Решение. Согласно формуле (3)

---

[1] См. формулу (8), § 4 и формулу (1) настоящего параграфа.

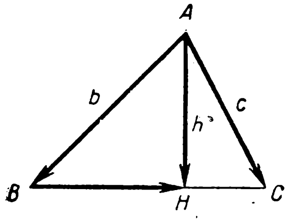


Рис. 26

$$\cos(\widehat{a, b}) = \frac{2\cdot 3 - 2\cdot 0 + 1\cdot(-4)}{\sqrt{4+4+1}\sqrt{9+0+16}} = \frac{2}{15}.$$

3. Вычисление расстояния между двумя точками. Доказанная выше теорема [5.1] позволяет получить формулу для вычисления расстояния между двумя точками, заданными своими координатами в прямоугольной декартовой системе. В самом деле, пусть в прямоугольной декартовой системе координат даны две точки $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. По определению модуля вектора (см. I, § 1, п. 4) $AB = |\overline{AB}|$. Из теоремы [2.1] следует, что $\overline{AB}\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, поэтому согласно теореме [5.1]

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Мы доказали следующую теорему.

Теорема [5.3]. *Расстояние между двумя точками, заданными своими координатами в прямоугольной декартовой системе, равно корню квадратному из суммы квадратов разностей соответствующих координат данных точек.*

4. Геометрические приложения. Скалярное произведение с успехом может быть применено для решения задач и доказательства теорем элементарной геометрии.

Задача 3. Дан произвольный треугольник ABC. Выразить $\cos\angle BAC$ через стороны AB, BC и CA.

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, $\varphi = \angle BAC$. Введем обозначения: $\overline{AB} = \boldsymbol{c}$, $\overline{AC} = \boldsymbol{b}$, $\overline{BC} = \boldsymbol{a}$. Очевидно $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}$, Отсюда $(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{aa}$, $\boldsymbol{bb} - 2\boldsymbol{bc} + \boldsymbol{cc} = \boldsymbol{aa}$,

$$\boldsymbol{bc} = \frac{\boldsymbol{bb} + \boldsymbol{cc} - \boldsymbol{aa}}{2}.$$

Рассмотрим каждое из скалярных произведений в отдельности:

$$\boldsymbol{bc} = AC\cdot AB\cos\varphi;\ \boldsymbol{bb} = AC^2;\ \boldsymbol{cc} = AB^2;\ \boldsymbol{aa} = BC^2.$$

Подставив эти выражения в предыдущее соотношение, получаем:

$$\cos\varphi = \frac{AC^2 + AB^2 - BC^2}{2AC\cdot AB}.$$

Эта формула хорошо известна из курса средней школы. Если $\varphi = \frac{\pi}{2}$, т. е. если треугольник прямоугольный, то отсюда получаем теорему Пифагора:

$$AC^2 + AB^2 - BC^2 = 0.$$

З а д а ч а 4. Треугольник ABC задан векторами $\overline{AB} = \boldsymbol{b}$ и $\overline{AC} = \boldsymbol{c}$. Выразить через векторы $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ вектор $\boldsymbol{h} = \overline{AH}$, где H — основание перпендикуляра, опущенного из вершины A на сторону BC.

Р е ш е н и е. Вектор $\overline{BH}$ коллинеарен с вектором $\overline{BC}$ (рис. 26), поэтому

$$\overline{BH} = \lambda \overline{BC} = \lambda (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}),$$

$$\boldsymbol{h} = \overline{AB} + \overline{BH} = \boldsymbol{b} + \lambda (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}). \tag{4}$$

Так как векторы $\boldsymbol{h}$ и $\overline{BC}$ взаимно перпендикулярны, то $\boldsymbol{h}\cdot\overline{BC} = 0$ или $[\boldsymbol{b} + \lambda(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b})](\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) = 0$, откуда $\lambda = \frac{(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b}}{(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b})^2}$.

Подставляя найденное значение λ в выражение (4), получим:

$$\boldsymbol{h} = \boldsymbol{b} + \frac{(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{c})\,\boldsymbol{b}}{(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b})^2}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}). \tag{5}$$

П р и м е р 4. Показать, что четырехугольник A (4, 0, 8), B (5, 2, 6), C (3, 1, 4), D (2, —1, 6), заданный в прямоугольной декартовой системе координат, есть квадрат.

Р е ш е н и е. Из курса элементарной геометрии известно, что квадрат есть параллелограмм, у которого две смежные стороны равны и взаимно перпендикулярны. Поэтому для того, чтобы решить задачу, достаточно показать, что $\overline{AB} = \overline{DC}$, $AB = AD$ и $\overline{AB} \perp \overline{AD}$.

Определим координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{DC}$:

$$\overline{AB}\{1,\ 2,\ -2\},\ \overline{AD}\{-2,\ -1,\ -2\},\ \overline{DC}\{1,\ 2,\ -2\}.$$

Отсюда непосредственно следует, что $\overline{AB} = \overline{DC}$, $\overline{AB} \perp \overline{AD}$. Далее, $AB = \sqrt{1 + 4 + 4} = 3$, $AD = \sqrt{4 + 1 + 4} = 3$.

5. Выражения координат вектора через скалярное произведение; направляющие косинусы. Если вектор $\boldsymbol{a}$ в прямоугольном декартовом базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ имеет координаты x, y и z, то согласно п. 2, § 4 имеем: $x = \text{Пр}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}$, $y = \text{Пр}_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}$, $z = \text{Пр}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}$.

Из формулы (3), § 4 следует, что $\boldsymbol{ai} = |\boldsymbol{i}|\,\text{Пр}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a} = \text{Пр}_{\boldsymbol{i}}\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{aj} = \text{Пр}_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{ak} = \text{Пр}_{\boldsymbol{k}}\boldsymbol{a}$, поэтому $x = \boldsymbol{ai}$, $y = \boldsymbol{aj}$, $z = \boldsymbol{ak}$. Таким образом, разложение вектора $\boldsymbol{a}$ по базисным векторам может быть записано в следующем виде:

$$\boldsymbol{a} = (\boldsymbol{ai})\,\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{aj})\,\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{ak})\,\boldsymbol{k}. \tag{6}$$

Если $\boldsymbol{a}$ — ненулевой вектор и $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{i}}) = \alpha$, $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{j}}) = \beta$, $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{k}}) = \gamma$, то числа $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ называются *н а п р а в л я ю щ и м и к о с и н у с а м и в е к т о р а* $\boldsymbol{a}$ в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. Легко доказать, что для любого ненулевого вектора

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1. \tag{7}$$

В самом деле, из (6) получаем:

$$\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| (\boldsymbol{i} \cos\alpha + \boldsymbol{j} \cos\beta + \boldsymbol{k} \cos\gamma).$$

Из формулы (1) следует, что

$$|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a}| \sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}.$$

Так как $|\boldsymbol{a}| \neq 0$, то отсюда следует соотношение (7).

Если $\boldsymbol{a}_0$ — единичный вектор, сонаправленный с вектором $\boldsymbol{a}$, то, очевидно, $\boldsymbol{a}_0$ и $\boldsymbol{a}$ имеют одни и те же направляющие косинусы, поэтому соотношение (6), записанное для $\boldsymbol{a}_0$, принимает вид:

$$\boldsymbol{a}_0 = (\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{i})\,\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{j})\,\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{a}_0\boldsymbol{k})\,\boldsymbol{k} = \boldsymbol{i}\cos\alpha + \boldsymbol{j}\cos\beta + \boldsymbol{k}\cos\gamma.$$

Мы пришли к выводу.

Теорема [5.4]. *Направляющие косинусы ненулевого вектора $\boldsymbol{a}$ являются координатами единичного вектора, сонаправленного с данным вектором $\boldsymbol{a}$.*

Пример 5. Диагональ AC' прямоугольного параллелепипеда образует с каждым из ребер AB и AD угол 60° (см. рис. 23). Определить угол, который образует диагональ с третьим ребром AA'.

Решение. Пусть $\boldsymbol{i} = \frac{\overline{AB}}{AB}$, $\boldsymbol{j} = \frac{\overline{AD}}{AD}$, $\boldsymbol{k} = \frac{\overline{AA'}}{AA'}$. Если $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ — направляющие косинусы вектора $\overline{AC'}$, то $\cos\alpha = \cos 60° = \frac{1}{2}$, $\cos\beta = \cos 60° = \frac{1}{2}$, и по формуле (7) получаем: $\cos^2\gamma = 1 - \cos^2\alpha - \cos^2\beta = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$; $\cos\gamma = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\gamma_1 = \frac{\pi}{4}$, $\gamma_2 = \frac{3\pi}{4}$. Но $\angle A'AC' < \frac{\pi}{2}$, так как AA' перпендикулярен к плоскости BAD, а концы векторов $\overline{AA'}$ и $\overline{AC'}$ лежат по одну и ту же сторону от нижней грани, поэтому $\angle A'AC' = \gamma_1 = \frac{\pi}{4}$.

6. Свойства скалярного произведения, отличные от свойств произведения чисел. Из предыдущего изложения видно, что формальные свойства скалярного произведения векторов в основном совпадают с соответствующими свойствами произведения чисел. Однако ошибочно думать, что любое свойство произведений чисел можно автоматически распространить на скалярное произведение векторов. Скалярное произведение имеет некоторые специфические свойства, не присущие операции умножения чисел. Рассмотрим основные из этих свойств.

а) Одной из существенных особенностей скалярного произведения является то обстоятельство, что произведение двух векторов дает число, т. е. *объект другой природы,* в то время как произведение двух чисел есть число, т. е. *объект той же природы.* Отсюда, например, вытекает, что, пользуясь скалярным произведением, нельзя ввести вектор-единицу и вектор, обратный данному вектору. В самом деле, во множестве чисел всегда существует число 1, обладающее тем свойством, что $\alpha \cdot 1 = \alpha$ для любого числа α. Но произведение вектора на вектор есть число, поэтому соотношение $\boldsymbol{ab} = \boldsymbol{a}$ принципиально невозможно.

б) Если $\alpha \neq 0$, то числовое уравнение $\alpha x = \beta$ всегда имеет единственное решение. Аналогичные уравнения для скалярного произведения векторов $\boldsymbol{ax} = \boldsymbol{b}$, как было указано выше, не имеют смысла. В связи с этим операция, обратная скалярному произведению, не вводится. Однако можно ставить вопрос о решении уравнения вида $\boldsymbol{ax} = \alpha$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{x}$ — векторы, а α — число. В отличие от предыдущего это уравнение имеет бесчисленное множество решений. Рассмотрим более подробно этот вопрос. Пусть

$$\boldsymbol{ax} = \alpha \tag{8}$$

— данное уравнение и $\boldsymbol{a} \neq 0$. Возьмем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $O\boldsymbol{ijk}$ так, чтобы вектор $\boldsymbol{i}$ был сонаправлен с вектором $\boldsymbol{a}$. Приложим искомый вектор $\boldsymbol{x}$ к точке O и обозначим через x, y, z прямоугольные декартовы координаты конца M этого вектора. В этом случае $\boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|\,\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, поэтому согласно теореме [4.6] уравнение (8) равносильно соотношению

$$|\boldsymbol{a}|\, x = \alpha. \tag{9}$$

Если $\overline{OM}$ — решение уравнения (8), то первая координата точки M (x, y, z) удовлетворяет уравнению (9). Обратно, если первая координата некоторой точки M удовлетворяет уравнению (9), то вектор $\overline{OM}$, очевидно, является решением уравнения (8). Таким образом, уравнение (9) является уравнением геометрического места концов всех решений векторного уравнения (8), если начала их приложены к точке O.

Так как $|\boldsymbol{a}| \neq 0$, то уравнение (9) равносильно соотношению $x = \frac{\alpha}{|\boldsymbol{a}|}$, откуда видно, что точки M лежат в плоскости π, перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{a}$. При $\alpha = 0$ плоскость π проходит через точку O и, следовательно, уравнению (8) удовлетворяют те и только те векторы, которые перпендикулярны к $\boldsymbol{a}$.

в) Если α и β — числа, то из равенства $\alpha\beta = 0$ следует, что хотя бы одно из чисел α и β равно нулю. Аналогичного свойства для скалярного произведения нет. В самом деле, если, например, $\boldsymbol{a} \neq 0$, $\boldsymbol{b} \neq 0$ и $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$, то $\boldsymbol{ab} = 0$.

Однако, если соотношение $\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} = 0$ имеет место для любого вектора $\boldsymbol{x}$, то отсюда следует, что $\boldsymbol{a} = 0$.

В самом деле, положив $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{a}$, получаем: $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}=0$ или $|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{a}| = 0$, отсюда $|\boldsymbol{a}|=0$ и $\boldsymbol{a}=0$.

г) Выше было отмечено, что скалярное произведение вектора на вектор есть число, поэтому квадрат вектора $\boldsymbol{a}$, т. е. $\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}$, есть скалярная величина. Если рассмотреть произведение $(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a})\,\boldsymbol{a}$, то естественно его назвать кубом вектора. Мы видим, что куб вектора есть векторная величина. Таким образом, операция возведения в степень сопряжена с принципиальными трудностями, ввиду чего в векторной алгебре эта операция не вводится. Точнее, рассматривается только квадрат вектора $\boldsymbol{a}^2 = \boldsymbol{a}\boldsymbol{a}$.

Представляет определенный интерес исследование «квадратных» векторных уравнений, т. е. уравнений типа

$$\boldsymbol{x}^2 + 2\boldsymbol{a}\boldsymbol{x} + \alpha = 0. \tag{10}$$

Здесь $\boldsymbol{x}$ — искомый вектор, $\boldsymbol{a}$ — данный вектор, а α — данное число.

Возьмем в пространстве прямоугольную декартову систему координат $O\boldsymbol{ijk}$ и все рассматриваемые векторы приложим к точке O. Обозначим через x, y, z координаты искомого вектора, а через a_1, a_2, a_3 координаты данного вектора. Тогда по теореме [4.6] получаем:

$$\boldsymbol{x}^2 = x^2 + y^2 + z^2,\ \boldsymbol{a}\boldsymbol{x} = a_1x + a_2y + a_3z;$$

поэтому уравнение (10) в координатах запишется так

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2\,(a_1x + a_2y + a_3z) + \alpha = 0 \tag{11}$$

или

$$(x + a_1)^2 + (y + a_2)^2 + (z + a_3)^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 - \alpha = \boldsymbol{a}^2 - \alpha. \tag{11'}$$

Исследуем это уравнение.

а) $\boldsymbol{a}^2 - \alpha > 0$. Предоставляем читателю на основе теоремы [5.3] самостоятельно убедиться в том, что геометрическое место концов векторов $\boldsymbol{x}$, приложенных в начале координат, удовлетворяющих уравнению (11), есть сфера с центром в точке $(-a_1, -a_2, -a_3)$ и радиуса $R = \sqrt{\boldsymbol{a}^2 - \alpha}$.

б) $\boldsymbol{a}^2 - \alpha = 0$. В этом случае соотношение (11′) принимает вид: $(x + a_1)^2 + (y + a_2)^2 + (z + a_3)^2 = 0$. Так как в левой части все слагаемые неотрицательны, то $x = -a_1$, $y = -a_2$, $z = -a_3$ и $\boldsymbol{x} = -\boldsymbol{a}$.

Итак, в этом случае уравнение (10) имеет единственное решение.

в) $\boldsymbol{a}^2 - \alpha < 0$. Уравнение (11′) не имеет ни одного действительного решения, поэтому нет действительных векторов, удовлетворяющих уравнению (10).

Пример 6. Решить уравнение

$$x^2 + 2ax + 30 = 0,$$

где a в некотором прямоугольном базисе имеет координаты: $a\{1, 2, -5\}$.

Решение. В данном случае $a^2 - \alpha = 1 + 4 + 25 - 30 = 0$. Уравнение имеет единственное решение: $x\{-1, -2, 5\}$.

Задачи и упражнения

64. Доказать, что диагонали четырехугольника, заданного координатами своих вершин

$$A(-4, -4, 4),\ B(-3, 2, 2),\ C(2, 5, 1),\ D(3, -2, 2),$$

взаимно перпендикулярны.

65. Определить косинус угла между векторами:

а) $a_1\{2, -1, 3\}$ и $b_1\{1, -4, 3\}$;

б) $a_2\{0, -1, 5\}$ и $b_2\{7, 5, 1\}$.

66. Даны вершины треугольника: $A(2, 1, \sqrt{2})$, $B(1, 0, 0)$, $C(1 + \sqrt{3}, \sqrt{3}, -\sqrt{6})$. Найти углы треугольника.

67. Найти косинус угла при вершине равнобедренного треугольника, если медианы, проведенные из концов его основания, взаимно перпендикулярны.

68. Даны координаты вершин треугольника: $A(1, 1, 1)$, $B(5, 3, 0)$, $C(2, 0, 1)$. Определить координаты и длину вектора $\overline{BH}$, где H — основание перпендикуляра, опущенного из вершины B на противоположную сторону.

69. Даны три некомпланарных вектора: $\overline{OA}\{1, -1, -2\}$, $\overline{OB}\{1, 0, -1\}$ и $\overline{OC}\{2, 2, -1\}$. Найти координаты вектора $\overline{OH}$, где H — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость ABC.

70. Доказать теорему: для того чтобы сумма двух неколлинеарных векторов a и b была направлена вдоль биссектрисы угла, образованного этими векторами, необходимо и достаточно, чтобы $|a| = |b|$.

71. Определить вектор, коллинеарный биссектрисе угла A треугольника ABC с вершинами в точках $A(1, 3, 5)$, $B(3, 5, 6)$ и $C(4, 7, 5)$.

72. Найти углы между любыми двумя биссектрисами плоских углов прямого трехгранного угла.

73. Решить и исследовать уравнения:

а) $x^2 + 2ax + 1 = 0$;

б) $x^2 - bx + 15 = 0$,

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — векторы, заданные в прямоугольном декартовом базисе: $\boldsymbol{a}\,\{0,\ 2,\ 0\}$, $\boldsymbol{b}\,\{1,\ 1,\ -2\}$.

74. Пусть $\boldsymbol{ac} = \boldsymbol{bc}$ при $\boldsymbol{c} \neq 0$. Можно ли сократить это соотношение на $\boldsymbol{c}$. Объяснить результат.

75. Справедливо ли соотношение $(\boldsymbol{ab})\,\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{bc})$ для произвольных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$? Объясните результат. Для каких векторов имеет место это соотношение?

76. Пусть $\boldsymbol{x}^3 = (\boldsymbol{xx})\,\boldsymbol{x}$. Решить уравнения: а) $\boldsymbol{x}^2\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}^3 = 0$; б) $\boldsymbol{x}^3 = \boldsymbol{a}$. Здесь $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — данные ненулевые векторы.

§ 6. ВЕКТОРНОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

1. Упорядоченная тройка векторов. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — система трех некомпланарных векторов. Эту систему будем называть *упорядоченной тройкой векторов* или *репером*, если векторы системы заданы в определенном порядке, т. е. указано, какой из них считается первым, какой вторым и какой третьим. Если $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — упорядоченная тройка векторов, то будем считать, что порядок их задания совпадает с порядком записи, т. е. первым вектором является вектор $\boldsymbol{a}$, вторым — вектор $\boldsymbol{b}$ и третьим — вектор $\boldsymbol{c}$. Таким образом, $\boldsymbol{abc}$, $\boldsymbol{bac}$ и $\boldsymbol{cab}$ — разные упорядоченные тройки векторов. Легко видеть, что три некомпланарных вектора могут образовывать шесть различных упорядоченных троек: $\boldsymbol{abc}$, $\boldsymbol{bca}$, $\boldsymbol{cab}$, $\boldsymbol{bac}$, $\boldsymbol{acb}$, $\boldsymbol{cba}$.

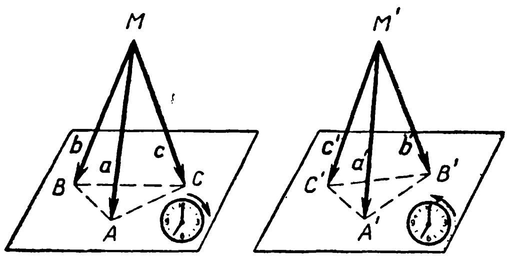
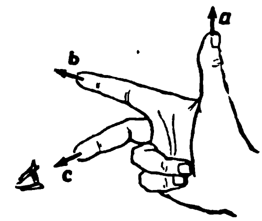


Рис. 27

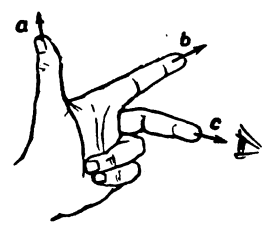
Пусть $\boldsymbol{abc}$ — упорядоченная тройка векторов. Перенесем эти векторы в точку M пространства и концы их обозначим через A, B и C. В силу некомпланарности векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ точки M, A, B, C не лежат в одной плоскости (рис. 27).

Введем следующее определение ориентации репера: *репер* $\boldsymbol{abc}$ *называется правым или имеющим правую ориентацию, если наблюдателю, глаз которого расположен в точке M, направление движения по контуру треугольника ABC от точки A к точке B, от точки B к точке C и от точки C к точке A кажется совпадающим с направлением движения часовой стрелки. Репер* $\boldsymbol{abc}$ *называется левым или имеющим левую ориентацию, если это движение кажется совершающимся против движения часовой стрелки.* На рисунке 27 репер $\boldsymbol{abc}$ правый, а репер $\boldsymbol{a'b'c'}$ левый.

Можно указать другое правило для определения ориентации репера. Репер $\boldsymbol{abc}$ будет правым (левым), если кратчайший поворот вектора $\boldsymbol{a}$ к вектору $\boldsymbol{b}$ в плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ виден из конца вектора $\boldsymbol{c}$ совершающимся против движения (по движению) часовой стрелки.



а



б

Рис. 28

Рассмотрим, для примера, репер, составленный тремя векторами, направленными вдоль первых трех пальцев правой руки; точнее, первый вектор $\boldsymbol{a}$ направлен вдоль большого пальца, второй вектор $\boldsymbol{b}$ — вдоль указательного пальца, а третий вектор $\boldsymbol{c}$ — вдоль среднего пальца правой руки (рис. 28,*а*). Согласно нашему определению этот репер имеет правую ориентацию. Легко также усмотреть, что репер, составленный тремя векторами, направленными вдоль соответствующих пальцев левой руки, имеет левую ориентацию (рис. 28,*б*). Это обстоятельство может быть использовано на практике для определения ориентации репера. В самом деле, если дан репер $\boldsymbol{abc}$, то для определения его ориентации достаточно постараться направить первые три пальца какой-либо руки вдоль соответствующих векторов репера. Если это удается сделать с помощью пальцев правой (левой) руки, то репер $\boldsymbol{abc}$ — правый (левый).

П р и м е р 1. На рисунке 13 (см. стр. 31) изображен параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, в котором репер $\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ имеет правую ориентацию. Определите ориентации реперов:

а) $\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3$; б) $\overline{A_1D_1}\,\overline{A_1A}\,\overline{DC}$; в) $\overline{C_1B}\,\overline{C_1B_1}\,\overline{C_1D_1}$; г) $\overline{CB}\,\overline{CD}\,\overline{CC_1}$.

Р е ш е н и е. а) Репер $\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_3$ — левый, так как наблюдателю, глаз которого помещен в точке A, движение по контуру треугольника DBE кажется совершающимся против часовой стрелки.

б) В репере $\overline{A_1D_1}\,\overline{A_1A}\,\overline{DC}$ заменим вектор $\overline{DC}$ равным ему вектором $\overline{A_1B_1}$. Очевидно, при этом ориентация репера не меняется. В репере $\overline{A_1D_1}\,\overline{A_1A}\,\overline{A_1B_1}$ векторы приложены к точке A_1, а концы образуют треугольник D_1AB_1. Если глаз наблюдателя помещен в точке A_1, то, очевидно, движение по контуру треугольника D_1AB_1 кажется совершающимся против часовой стрелки, поэтому данный репер левый. Предлагаем учащемуся самостоятельно убедиться в том, что репер в) правый, а г) левый.

2. Свойства ориентации репера; ориентация системы координат. Имеют место следующие свойства ориентации упорядоченных троек векторов:

а) При циклической перестановке векторов ориентация упорядоченной тройки не меняется, т. е. тройки $\boldsymbol{abc}$; $\boldsymbol{bca}$; $\boldsymbol{cab}$ имеют одну и ту же ориентацию.

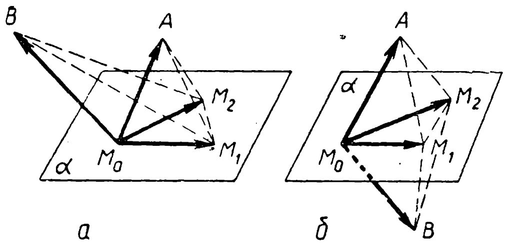


Рис. 29

б) При перестановке двух векторов ориентация упорядоченной тройки меняется на обратную, т. е. $\boldsymbol{abc}$ и $\boldsymbol{bac}$ или $\boldsymbol{abc}$ и $\boldsymbol{acb}$ или $\boldsymbol{abc}$ и $\boldsymbol{cba}$ имеют разные ориентации.

в) Пусть M_0, M_1, M_2 — три точки плоскости α, не лежащие на одной прямой, а A и B — две точки, не лежащие в этой плоскости. Если точки A и B лежат по одну сторону от плоскости α, то реперы

$$\overline{M_0M_1},\ \overline{M_0M_2},\ \overline{M_0A} \quad \text{и} \quad \overline{M_0M_1},\ \overline{M_0M_2},\ \overline{M_0B}$$

имеют одну и ту же ориентацию (рис. 29, *а*); если же A и B лежат по разные стороны от α, то реперы имеют разные ориентации (рис. 29, *б*).

Эти свойства непосредственно следуют из определения ориентаций упорядоченной тройки векторов[1].

Примером упорядоченной тройки векторов является тройка координатных векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$. В соответствии с предыдущим определением система координат называется п р а в о й (л е в о й), если упорядоченная тройка $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ является правой (левой). На рисунке 30 система $O\boldsymbol{ijk}$ правая, а система $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}'$ левая. В дальнейшем, если не будет специальных оговорок, все рассматриваемые прямоугольные декартовы системы координат будем считать правыми.

3. Площадь параллелограмма, построенного на двух векторах. Пусть $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — два произвольных вектора. Возьмем в пространстве любую точку C и перенесем в эту точку данные векторы. Концы этих векторов обозначим через A и B (рис. 31). Возможны два случая:

---

[1] Понятие ориентации упорядоченной тройки векторов нами введено исходя из наглядных соображений, поэтому оно с логической точки зрения не совсем корректно. Однако оно просто и наглядно и для наших целей вполне достаточно. Более строгое изложение этих вопросов требует сложных рассуждений. См., например, учебник П. С. Моденова [7], § 134.

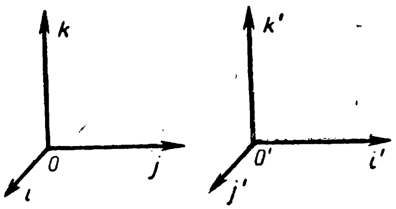


Рис. 30

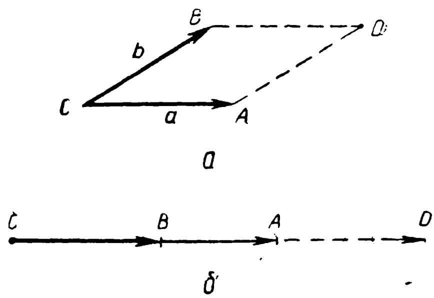


Рис. 31

а) Точки C, A, B не лежат на одной прямой. Этот случай возможен тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны. Проведем через A и B прямые, параллельные соответственно CB и CA, и их точку пересечения обозначим через D. Мы получим четырехугольник $CADB$, который называется п а р а л л е л о г р а м м о м, п о с т р о е н н ы м н а в е к т о р а х $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Так как $\overline{BD} = \boldsymbol{a}$ и $\overline{AD} = \boldsymbol{b}$, то для построения точки D можно было поступить несколько иначе: перенести вектор $\boldsymbol{b}$ в точку A (или вектор $\boldsymbol{a}$ в точку B) и обозначить через D конец полученного вектора. Очевидно, площадь S этого параллелограмма не зависит от выбора точки C. Из тригонометрии известно, что эта площадь вычисляется по формуле:

$$S = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}). \qquad (1)$$

б) Точки C, A, B лежат на одной прямой. Этот случай возможен тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны. Мы не исключаем из рассмотрения и тот случай, когда один из векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ нулевой или оба нулевые. Перенесем вектор $\boldsymbol{b}$ в точку A и обозначим конец полученного вектора через D. По аналогии с предыдущим четырехугольник $CADB$ называется параллелограммом, построенным на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (см. § 3, п. 3). Все вершины этого параллелограмма лежат на одной прямой, поэтому естественно считать, что площадь S этого параллелограмма равна нулю. При этом соглашении формула (1) остается справедливой. В самом деле, если $\boldsymbol{a} \neq 0$ и $\boldsymbol{b} \neq 0$, то $\sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = 0$, поэтому $S = 0$. Если, например, $\boldsymbol{a} = 0$, то и $S = 0$.

Мы приходим к следующему выводу.

[6.1]. *Каковы бы ни были векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$, *площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, вычисляется по формуле* (1).

П р и м е р 2. Определить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, в каждом из следующих случаев:

$$\text{а) } |\boldsymbol{a}| = 3, \ |\boldsymbol{b}| = 4, \ (\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = \frac{\pi}{4};$$

б) $\boldsymbol{a} = \overline{AA'}$, $\boldsymbol{b} = \overline{C'C}$ (см. рис. 23 на стр. 43);

в) $\boldsymbol{a} = \overline{AB}$, $\boldsymbol{b} = \overline{BC}$, где $ABCD$ — квадрат, сторона которого равна трем.

Решение. Для вычисления площади параллелограмма, построенного на данных векторах, воспользуемся формулой (1):

а) $S = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = 3 \cdot 4 \cdot \sin\frac{\pi}{4} = 6\sqrt{2}$;

б) $S = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = |\overline{AA'}| \cdot |\overline{C'C}|\sin(\widehat{\overline{AA'}, \overline{C'C}}) =$
$= |\overline{AA'}||\overline{C'C}|\sin\pi = 0$;

в) $S = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}}) = |\overline{AB}| \cdot |\overline{BC}|\sin(\widehat{\overline{AB}, \overline{BC}}) =$
$= |\overline{AB}||\overline{BC}|\sin\frac{\pi}{2} = 3 \cdot 3 = 9.$

4. Векторное произведение векторов. Пусть в пространстве дан базис $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ и два произвольных вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Векторным произведением вектора $\boldsymbol{a}$ *на вектор* $\boldsymbol{b}$ *называется вектор* $\boldsymbol{p}$, *определяемый следующими условиями:*

а) *Модуль вектора* $\boldsymbol{p}$ *равен площади параллелограмма, построенного на векторах* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$.

б) *Вектор* $\boldsymbol{p}$ *перпендикулярен как к вектору* $\boldsymbol{a}$, *так и к вектору* $\boldsymbol{b}$.

в) *Если векторы* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *не коллинеарны, то вектор* $\boldsymbol{p}$ *направлен так, что ориентации троек упорядоченных векторов* $\boldsymbol{abp}$ *и* $\boldsymbol{i}\ \boldsymbol{j}\ \boldsymbol{k}$ *совпадают.*

Векторное произведение вектора $\boldsymbol{a}$ на вектор $\boldsymbol{b}$ обозначается так: $[\boldsymbol{ab}]$ или $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$. Из условия а) приведенного выше определения непосредственно следует:

[6.2] *Для того чтобы векторы были коллинеарны, необходимо и достаточно, чтобы их векторное произведение равнялось нулю.*

Если $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{0}$ и $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$, то, очевидно, условие а) может быть записано так: $|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}|\sin(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$.

Важно подчеркнуть, что векторное произведение двух векторов в отличие от скалярного произведения есть вектор. Сформулированные выше условия однозначно определяют этот вектор. В самом деле, если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то их произведение согласно условию а) есть нуль-вектор, если же они не коллинеарны, то условие а) определяет модуль векторного произведения, условия б) и в) — направление этого вектора. Кроме того, отметим, что векторное произведение существенно зависит от порядка сомножителей, т. е., вообще говоря, $[\boldsymbol{ab}] \neq [\boldsymbol{ba}]$.

Выше было отмечено, что если нет специальных оговорок, то мы будем предполагать, что все координатные базисы правые. Так как согласно условию в) ориентации троек $\boldsymbol{abp}$ и $\boldsymbol{i}\ \boldsymbol{j}\ \boldsymbol{k}$ совпадают, то в дальнейшем мы будем предполагать, что репер $\boldsymbol{abp}$ имеет правую ориентацию.

Пример 3. Пусть $ABCDA'B'C'D'$ — прямоугольный параллелепипед, стороны которого имеют длины $AB = 3$, $AD = 4$, $AA' = 5$; векторы $\overline{AB}$, $\overline{AD}$ и $\overline{AA'}$ образуют правую тройку (рис. 23). Найти векторы: а) $[\overline{AD}, \overline{BC}]$; б) $[\overline{AD}, \overline{AA'}]$; в) $[\overline{B'A'}, \overline{BC}]$.

Решение. а) Пусть $\boldsymbol{p} = [\overline{AD}, \overline{BC}]$. Так как векторы $\overline{AD}$ и $\overline{BC}$ коллинеарны, то площадь параллелограмма, построенного на этих векторах, равна нулю, поэтому $|\boldsymbol{p}| = 0$ и $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{0}$.

б) Пусть $\boldsymbol{q} = [\overline{AD}, \overline{AA'}]$. Параллелограмм, построенный на векторах $\overline{AD}$ и $\overline{AA'}$, является прямоугольником, поэтому $|\boldsymbol{q}| = AD \cdot AA' = 20$. Репер $\overline{AB}\,\overline{AD}\,\overline{AA'}$ по условию имеет правую ориентацию, поэтому согласно первому свойству ориентации трех векторов репер $\overline{AD}\ \overline{AA'}\,\overline{AB}$ также имеет правую ориентацию. Но репер $\overline{AD}\ \overline{AA'}\boldsymbol{q}$ по определению векторного произведения имеет правую ориентацию. Следовательно, $\overline{AB}$ и $\boldsymbol{q}$ сонаправлены; $|\overline{AB}| = 3$, $|\boldsymbol{q}| = 20$, поэтому $\boldsymbol{q} = \frac{20}{3}\overline{AB}$.

в) По аналогии с предыдущим самостоятельно покажите, что $[\overline{B'A'}, \overline{BC}] = -\frac{12}{5}\overline{BB'}$.

5. Объем ориентированного параллелепипеда, построенного на трех векторах. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$—три произвольных вектора. Возьмем в пространстве любую точку M и перенесем в эту точку данные векторы. Концы этих векторов обозначим через A, B и C. Возможны два случая:

а) Точки M, A, B, C не лежат в одной плоскости. Этот случай возможен тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ не компланарны. Проведем через точки A, B и C плоскости, соответственно параллельные плоскостям MBC, MAC и MAB. Эти плоскости совместно с плоскостями MBC, MAC и MAB образуют параллелепипед $MADBCA_1D_1B_1$, который называется *ориентированным параллелепипедом, построенным на векторах* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ (рис. 32). Пусть V — объем этого параллелепипеда. Число $\pm V$ называется *объемом ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, причем знак плюс берется в том случае, когда репер $\boldsymbol{abc}$ правый, а минус — когда репер $\boldsymbol{abc}$ левый.

б) Точки M, A, B, C лежат в одной плоскости. Этот случай возможен тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны. Мы не исключаем из рассмотрения и тот случай, когда отдельные из векторов a, b и c или даже все три вектора равны нулю. Из геометрических соображений ясно, что параллелепипеда, построенного на компланарных векторах a, b и c не существует. Однако в целях общности по аналогии с предыдущим мы будем считать, что на этих векторах также построен параллелепипед, объем которого равен нулю. Таким образом, каковы бы ни были три вектора, можно говорить об объеме ориентированного параллелепипеда, построенного на этих векторах.

Имеет место следующая теорема.

Теорема [6.3]. *Если α — объем ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах a, b и c, то $\alpha = [ab]\, c$.*

Доказательство. Возможны два случая: а) векторы a, b и c компланарны; б) векторы a, b и c не компланарны. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности:

а) Векторы a, b и c компланарны. Не нарушая общности, можно считать, что векторы a, b и c лежат в одной плоскости π. Но тогда, согласно определению векторного произведения, вектор $[ab]$ перпендикулярен π, поэтому $[ab]$ перпендикулярен c и $[ab]\, c = 0$. С другой стороны, объем параллелепипеда, построенного на компланарных векторах, по определению равен нулю. Следовательно, теорема в данном случае справедлива.

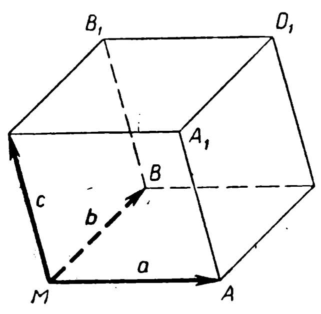


Рис. 32

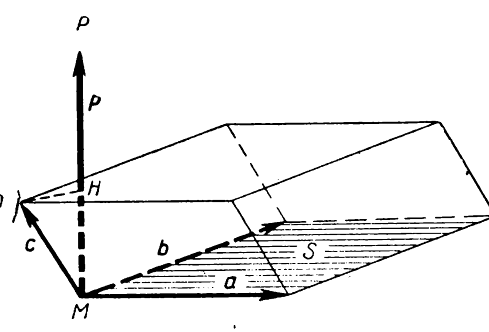


Рис. 33

б) Векторы a, b и c не компланарны. Приложим их к точке M и построим параллелепипед на этих векторах так, как изображено на рисунке 33. Пусть $\beta = [ab]\, c = pc$, где $p = \overline{MP} = [ab]$. Так как в данном случае $p \neq 0$, то $\beta = pc = |p| \, \text{Пр}_p c$. По определению $|p|$ есть площадь S параллелограмма, построенного на векторах a и b, а $|\text{Пр}_p c| = MH$, поэтому $|\beta| = \overline{MH} \cdot S = |\alpha|$.

Теперь выясним, каков знак числа β. Очевидно, знак числа β определяется углом между векторами p и c, так как $\beta = pc$. Согласно теореме [4.4] число β положительно тогда и только тогда, когда $(\widehat{p, c}) < \frac{\pi}{2}$, и отрицательно тогда и только тогда, когда $(\widehat{p, c}) > \frac{\pi}{2}$. Так как $p \perp \sigma$, где σ — плоскость векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, то $\beta > 0$ тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{c}$ расположены по одну сторону от плоскости σ, и $\beta < 0$ в противном случае. Но репер $\boldsymbol{abp}$ имеет правую ориентацию, поэтому из третьего свойства ориентаций следует, что $\beta > 0$ тогда и только тогда, когда репер $\boldsymbol{abc}$ правый, а $\beta < 0$ тогда и только тогда, когда репер $\boldsymbol{abc}$ левый. Мы пришли к выводу, что знаки чисел α и β, а следовательно, и сами числа совпадают. Теорема доказана полностью.

Следствие. *Каковы бы ни были векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, имеет место соотношение*

$$[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{ca}]\,\boldsymbol{b}\,. \tag{2}$$

Доказательство. Пусть α и β — объемы ориентированных параллелепипедов, построенных на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$. Из доказанной теоремы следует, что $\alpha = [\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}$, $\beta = [\boldsymbol{ca}]\,\boldsymbol{b}$. Если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны, то по определению $\alpha = 0$ и $\beta = 0$, поэтому $\alpha = \beta$. Пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ не компланарны. Так как параллелепипеды, построенные на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, совпадают, то $|\alpha| = |\beta|$. По свойствам ориентаций реперы $\boldsymbol{abc}$ и $\boldsymbol{cab}$ ориентированы одинаково, поэтому знаки чисел α и β также совпадают. Таким образом, $\alpha = \beta$, т. е. имеет место соотношение (2).

6. Свойства векторного произведения. В следующей теореме сформулированы основные свойства векторного произведения векторов.

Теорема [6.4]. *Для произвольных векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ и произвольного числа α имеют место следующие свойства векторного произведения*:

а) $[\boldsymbol{ab}] = -[\boldsymbol{ba}]$;
б) $[\boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b}] = \alpha[\boldsymbol{ab}]$, $[\alpha\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}] = \alpha[\boldsymbol{ab}]$;
в) $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{ab}] + [\boldsymbol{ac}]$, $[\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{ac}] + [\boldsymbol{bc}]$.

Доказательство. Свойство а) непосредственно следует из определения векторного произведения. В самом деле, пусть $\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{ab}]$, $\boldsymbol{q} = [\boldsymbol{ba}]$.

Очевидно, $|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{q}|$, так как каждый из этих модулей есть площадь параллелограмма, построенного на одних и тех же векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$. Если $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны, то $|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{q}| = 0$, поэтому $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{q} = \boldsymbol{0}$.

Рассмотрим случай, когда $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны. Векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ перпендикулярны к векторам $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, поэтому $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ коллинеарны. Так как реперы $\boldsymbol{abp}$ и $\boldsymbol{baq}$ имеют одну и ту же ориентацию, а $\boldsymbol{baq}$ и $\boldsymbol{abq}$ имеют разные ориентации, то $\boldsymbol{abp}$ и

$\boldsymbol{abq}$ имеют разные ориентации. Из свойств 3) ориентаций следует, что векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ противоположно направлены. Мы пришли к выводу, что $|\boldsymbol{p}| = |\boldsymbol{q}|$, $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ коллинеарны, имеют противоположные направления, поэтому $\boldsymbol{p} = -\boldsymbol{q}$.

б) Сначала докажем, что $[\boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b}] = \alpha\,[\boldsymbol{ab}]$.

Возьмем *произвольный* вектор $\boldsymbol{x}$ пространства и, пользуясь следствием теоремы [6.3], преобразуем выражение: $[\boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b}]\,\boldsymbol{x}$. Имеем:

$$[\boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b}]\,\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{xa}]\,(\alpha\boldsymbol{b}) = \alpha\,([\boldsymbol{xa}]\,\boldsymbol{b}) = \alpha\,([\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{x}) = (\alpha\,[\boldsymbol{ab}])\,\boldsymbol{x}.$$

Отсюда следует, что $([\boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b}] - \alpha\,[\boldsymbol{ab}])\,\boldsymbol{x} = 0$. Так как соотношение справедливо для любого вектора $\boldsymbol{x}$, то $[\boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b}] - \alpha\,[\boldsymbol{ab}] = 0$ и $[\boldsymbol{a}, \alpha\boldsymbol{b}] = \alpha\,[\boldsymbol{ab}]$.

Доказательство второй части свойства б) непосредственно следует из доказанного и из свойства а). В самом деле,

$$[\alpha\boldsymbol{ab}] = -[\boldsymbol{b}, \alpha\boldsymbol{a}] = -\alpha\,[\boldsymbol{ba}] = \alpha\,[\boldsymbol{ab}].$$

в) Сначала докажем, что $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{ab}] + [\boldsymbol{ac}]$.

Доказательство проводится по аналогии с предыдущим. Возьмем *произвольный* вектор $\boldsymbol{x}$ пространства и, пользуясь следствием теоремы [6.3], преобразуем выражение $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}]\,\boldsymbol{x}$. Получим:

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}]\,\boldsymbol{x} = [\boldsymbol{xa}]\,(\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = [\boldsymbol{xa}]\,\boldsymbol{b} + [\boldsymbol{xa}]\,\boldsymbol{c} =$$
$$= [\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{x} + [\boldsymbol{ac}]\,\boldsymbol{x} = ([\boldsymbol{ab}] + [\boldsymbol{ac}])\,\boldsymbol{x}.$$

Отсюда следует, что $([\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}] - [\boldsymbol{ab}] - [\boldsymbol{ac}])\,\boldsymbol{x} = 0$. Так как это соотношение справедливо для любого вектора $\boldsymbol{x}$, то

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}] - [\boldsymbol{ab}] - [\boldsymbol{ac}] = 0.$$

Доказательство второй части свойства в) предлагаем провести самостоятельно.

Из доказанной теоремы непосредственно следуют:

Следствия 1°. *Для произвольных векторов* $\boldsymbol{a}$ *и* $\boldsymbol{b}$ *и произвольных чисел* α *и* β *имеет место соотношение:*

$$[\alpha\boldsymbol{a}, \beta\boldsymbol{b}] = \alpha\beta\,[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}].$$

2°. *Каковы бы ни были векторы* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k$, *имеет место соотношение:*

$$[\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \cdots + \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}] = [\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{b}] + [\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{b}] + \cdots + [\boldsymbol{a}_k\boldsymbol{b}].$$

Пример 4. Пользуясь доказанными свойствами, преобразовать выражение $[(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})]$.

Решение. Имеем:

$$[(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})] = [(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\,\boldsymbol{a}] + [(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(-\boldsymbol{b})] =$$
$$= [\boldsymbol{aa}] + [\boldsymbol{ba}] - [\boldsymbol{ab}] - [\boldsymbol{bb}].$$

Но $[\boldsymbol{aa}] = 0$, $[\boldsymbol{bb}] = 0$, $[\boldsymbol{ba}] = -[\boldsymbol{ab}]$, поэтому

$$[(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})] = -2\,[\boldsymbol{ab}].$$

7. Выражение векторного произведения через координаты сомножителей.

Задача 1. В прямоугольном декартовом базисе даны векторы $\boldsymbol{a}\,\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\boldsymbol{b}\,\{x_2, y_2, z_2\}$. Определить координаты вектора $\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{ab}]$.

Решение. Прежде всего заметим, что векторные произведения базисных векторов $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ имеют следующие значения:

$$\left.\begin{array}{lll} [\boldsymbol{ii}] = 0, & [\boldsymbol{ij}] = \boldsymbol{k}, & [\boldsymbol{ik}] = -\boldsymbol{j}, \\ [\boldsymbol{ji}] = -\boldsymbol{k}, & [\boldsymbol{jj}] = 0, & [\boldsymbol{jk}] = \boldsymbol{i}, \\ [\boldsymbol{ki}] = \boldsymbol{j}, & [\boldsymbol{kj}] = -\boldsymbol{i}, & [\boldsymbol{kk}] = 0. \end{array}\right\} \qquad (3)$$

Соотношения $[\boldsymbol{ii}] = [\boldsymbol{jj}] = [\boldsymbol{kk}] = 0$ следуют из [6.2], а остальные легко получить непосредственно из определения векторного произведения.

Пусть x, y, z — координаты вектора $\boldsymbol{p}$.

Запишем разложение векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ по базисным векторам:

$$\boldsymbol{a} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}, \quad \boldsymbol{b} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}.$$

Таким образом,

$$\boldsymbol{p} = [\boldsymbol{ab}] = [(x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k})(x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k})].$$

Воспользовавшись следствиями 1° и 2° теоремы [6.4] и принимая во внимание соотношения (3), получаем:

$$\boldsymbol{p} = (y_1z_2 - z_1y_2)\,\boldsymbol{i} + (x_2z_1 - x_1z_2)\,\boldsymbol{j} + (x_1y_2 - y_1x_2)\,\boldsymbol{k}. \qquad (4)$$

Это соотношение может быть записано несколько иначе:

$$\boldsymbol{p} = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k}, \qquad (4')$$

т. е.

$$x = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}, \; y = \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}, \; z = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}. \qquad (5)$$

Мы пришли к следующей теореме.

Теорема [6.5]. *Если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ заданы в прямоугольном декартовом базисе своими координатами:*

$$\boldsymbol{a}\,\{x_1, y_1, z_1\}, \; \boldsymbol{b}\,\{x_2, y_2, z_2\},$$

то координаты x, y, z векторного произведения $[\boldsymbol{ab}]$ определяются по формулам (5).

Выведенную нами формулу (4′) условно можно записать в следующем, удобном для запоминания виде:

$$[\boldsymbol{ab}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \qquad (6)$$

«Определитель» в правой части этого равенства не является, конечно, определителем в обычном смысле слова. Эта условная запись удобна тем, что если «определитель» правой части разложить по элементам (векторным!) первой строки, пользуясь обычными правилами разложения определителя, то получим формулу (4′), которая уже имеет вполне определенный смысл.

Пример 5. Даны векторы $\boldsymbol{a}\,\{2,\ 4,\ 0\}$ и $\boldsymbol{b}\,\{-1,\ 2,\ 5\}$ в прямоугольном декартовом базисе. Вычислить координаты вектора $[\boldsymbol{ab}]$.

Решение. Для определения координат вектора $[\boldsymbol{ab}]$ воспользуемся правилом (6):

$$[\boldsymbol{ab}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 2 & 4 & 0 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 20\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j} + (4+4)\,\boldsymbol{k} = 20\boldsymbol{i} - 10\boldsymbol{j} + 8\boldsymbol{k}.$$

Таким образом, вектор $[\boldsymbol{ab}]$ имеет координаты $\{20,\ -10,\ 8\}$. Важно отметить, что в «определителе» (6) элементами второй строки являются координаты *первого* вектора-сомножителя $\boldsymbol{a}$, а элементами третьей строки — координаты *второго* вектора-сомножителя $\boldsymbol{b}$.

Пример 6. Определите координаты вектора $[[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}]$, если в прямоугольном декартовом базисе $\boldsymbol{a}\,\{1,\ 1,\ 0\}$, $\boldsymbol{b}\,\{0,\ -3,\ 4\}$, $\boldsymbol{c}\,\{3,\ -5,\ 1\}$.

Решение. Сначала определим координаты вектора $[\boldsymbol{ab}]$:

$$[\boldsymbol{ab}] = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} = 4\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{j} - 3\boldsymbol{k},\quad [\boldsymbol{ab}]\{4,\ -4,\ -3\}.$$

Далее определим координаты искомого вектора $\boldsymbol{p} = [[\boldsymbol{ab}]\ \boldsymbol{c}]$:

$$\boldsymbol{p} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 4 & -4 & -3 \\ 3 & -5 & 1 \end{vmatrix} = -19\boldsymbol{i} - 13\boldsymbol{j} - 8\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{p}\,\{-19,\ -13,\ -8\}.$$

В заключение рассмотрим некоторые тождества, полезные при решении задач.

Теорема [6.6]. *Каковы бы ни были векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$, имеют место следующие соотношения*:

а) $[[\boldsymbol{ab}]\,\boldsymbol{c}] = \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{bc})$, (7)

б) $[\boldsymbol{ab}]\,[\boldsymbol{cd}] = (\boldsymbol{ac})\,(\boldsymbol{bd}) - (\boldsymbol{ad})\,(\boldsymbol{bc})$, (8)

в) $[\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{bc}]] + [\boldsymbol{b}\,[\boldsymbol{ca}]] + [\boldsymbol{c}\,[\boldsymbol{ab}]] = \boldsymbol{0}$, (9)

г) $[\boldsymbol{ab}]^2 = \boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{ab})^2$. (10)

Доказательство. а) Пусть

$$[[\boldsymbol{ab}]\ \boldsymbol{c}] = \boldsymbol{p},\ \ \boldsymbol{b}\,(\boldsymbol{ac}) - \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{bc}) = \boldsymbol{q}.$$

Если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$, то соотношение очевидно, так как в этом случае

$$[\boldsymbol{ab}] = \boldsymbol{0},\ (\boldsymbol{ac}) = \boldsymbol{0},\ \ \boldsymbol{a}\,(\boldsymbol{bc}) = 0.$$

Следовательно, $p = 0$, $q = 0$.

Теперь рассмотрим случай, когда $a \neq 0$. Введем в рассмотрение прямоугольный декартовый базис i, j, k так, чтобы $a = i$, $b = \alpha_1 i + \beta_1 j$. Очевидно, при $a \neq 0$ это всегда возможно. Пусть в этом базисе $c = \alpha_2 i + \beta_2 j + \gamma_2 k$. Вычислим координаты векторов p и q.

Имеем: $a\ \{1, 0, 0\}$, $b\ \{\alpha_1, \beta_1, 0\}$, поэтому $[ab]\ \{0, 0, \beta_1\}$. Вектор p есть векторное произведение $[ab]$ на c, следовательно, $p\ \{-\beta_1\beta_2, \beta_1\alpha_2, 0\}$.

Далее, $ac = \alpha_2$, $bc = \alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2$, поэтому

$$q = \alpha_2 b - (\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2)\, a.$$

Отсюда следует, что q имеет координаты:

$$q\ \{-\beta_1\beta_2, \alpha_2\beta_1, 0\}.$$

Мы пришли к выводу, что соответствующие координаты векторов p и q совпадают поэтому $p = q$.

б) Запишем соотношение (7) для $[cd]\, b$. Имеем:

$$[[cd]\, b] = d\,(cb) - c\,(db),$$

или, поменяв местами сомножители в левой части, получаем:

$$[b\,[cd]] = c\,(db) - d\,(cb).$$

Умножив скалярно на a, будем иметь:

$$[b\,[cd]]\, a = (db)(ca) - (cb)(da).$$

Воспользовавшись следствием теоремы [6.3] (см. формулу (2), окончательно получаем:

$$[ab]\,[cd] = (ac)(bd) - (ad)(bc).$$

в) Воспользовавшись соотношениями (7), выразим тройные векторные произведения через векторы-сомножители:

$$\begin{aligned}
[a\,[bc]] &= -[[bc]\, a] = -c\,(ab) + b\,(ca),\\
[b\,[ca]] &= -[[ca]\, b] = -a\,(bc) + c\,(ab),\\
[c\,[ab]] &= -[[ab]\, c] = -b\,(ca) + a\,(bc).
\end{aligned}$$

Сложив все эти соотношения, получаем (9).

г) Соотношение (10) есть частный случай соотношения (8). В самом деле, положив в (8) $c = a$, $d = b$, получаем:

$$[ab]\,[ab] = (aa)(bb) - (ab)(ba),$$

т. е. соотношение (10).

8. Вычисление площади треугольника по координатам вершин.

З а д а ч а 2. Вычислить площадь треугольника ABC, если вершины его заданы координатами в прямоугольной декартовой системе $A\ (x_1, y_1, z_1)$, $B\ (x_2, y_2, z_2)$, $C\ (x_3, y_3, z_3)$.

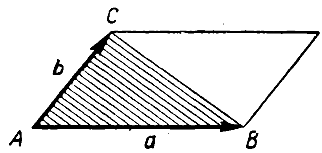


Рис. 34

Решение. Из определения векторного произведения следует, что если векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ приложены к некоторой точке A, то площадь параллелограмма, построенного на этих векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (рис. 34), равна $|[\boldsymbol{ab}]|$. Отсюда следует, что площадь треугольника ABC, изображенного на рисунке 34, равна $\frac{|[\boldsymbol{ab}]|}{2}$.

Пользуясь этим замечанием, легко решить поставленную задачу. В самом деле, пусть даны координаты вершин треугольника в прямоугольной декартовой системе:

$$A\ (x_1,\ y_1,\ z_1),\ B\ (x_2,\ y_2,\ z_2),\ C\ (x_3,\ y_3,\ z_3).$$

Тогда

$$\overline{AB}\ \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\},\quad \overline{AC}\ \{x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ z_3 - z_1\}.$$

Поэтому векторное произведение $[\overline{AB}\ \overline{AC}]$ согласно теореме [6.5] имеет координаты:

$$[\overline{AB}\,\overline{AC}]\left\{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}\right\}.$$

Площадь треугольника ABC равна:

$$S = \frac{|[\overline{AB}\cdot\overline{AC}]|}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_2 - z_1 & x_2 - x_1 \\ z_3 - z_1 & x_3 - x_1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}^2}. \quad (11)$$

Пример 7. Вычислить площадь треугольника, вершины которого в прямоугольной декартовой системе имеют координаты:

$$A\ (5,\ 3,\ 4),\ B\ (6,\ 8,\ 1),\ C\ (3,\ 9,\ 0).$$

Решение. По формуле (11) находим:

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{\begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 6 & -4 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -3 & 1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4 + 100 + 256} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{360} = 3\sqrt{10}.$$

9. Свойства векторного произведения, отличные от свойств произведения чисел. Из предыдущего изложения видно, что формальные свойства векторного произведения векторов в основном совпадают с соответствующими свойствами произведений чисел. Однако так же, как и в случае скалярного произведения, нельзя любое свойство произведения чисел автоматически переносить на векторное произведение. Векторное произведение векторов имеет некоторые специфические свойства, не присущие операции произведения чисел. Рассмотрим основные из этих свойств.

а) Прежде всего отметим, что векторное произведение есть операция, которая двум векторам ставит в соответствие третий *вектор*, т. е. в отличие от скалярного произведения векторное произведение векторов аналогично операции умножения чисел. Однако в отличие от произведения чисел векторное произведение существенно зависит от порядка сомножителей, так как $[\boldsymbol{ab}] = -[\boldsymbol{ba}]$. Следует подчеркнуть, что здесь мы впервые встречаемся с произведением, зависящим от порядка сомножителей.

б) Если $\alpha \neq 0$, то числовое уравнение $\alpha x = \beta$ всегда имеет единственное решение. Аналогичное уравнение для векторного произведения $[\boldsymbol{ax}] = \boldsymbol{b}$ далеко не всегда разрешимо. Исследуем этот вопрос более подробно. Пусть дано уравнение

$$[\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{b}, \tag{12}$$

где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — данные векторы, причем $\boldsymbol{a} \neq 0$.

1) $\boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}$. В этом случае, очевидно, $\boldsymbol{x}$ существует тогда и только тогда, когда $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$. В самом деле, если вектор $\boldsymbol{a}$ не перпендикулярен $\boldsymbol{b}$, то при любом $\boldsymbol{x}$ вектор $[\boldsymbol{ax}]$ не может быть равен $\boldsymbol{b}$, поскольку $[\boldsymbol{ax}]$ по определению векторного произведения перпендикулярен $\boldsymbol{a}$. Отсюда вытекает, что если $\boldsymbol{a}$ не перпендикулярен $\boldsymbol{b}$, то уравнение (12) не имеет ни одного решения.

Если вектор $\boldsymbol{a}$ перпендикулярен $\boldsymbol{b}$, то уравнение (12) имеет бесчисленное множество решений. Все эти решения параллельны плоскости, перпендикулярной $\boldsymbol{b}$. Пусть π — плоскость, перпендикулярная вектору $\boldsymbol{b}$, а O — некоторая точка в этой плоскости. Перенесем векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ и все решения $\boldsymbol{x}$ уравнения (12) в эту точку. Тогда нетрудно видеть, что геометрическое место концов всех векторов $\boldsymbol{x}$ образует прямую в плоскости π, параллельную вектору $\boldsymbol{a}$ и отстоящую от точки O на расстоянии $\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$.

В самом деле, из соотношения (12) следует, что площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{x}$, для всех векторов $\boldsymbol{x}$ имеет одно и то же значение $|\boldsymbol{b}|$, поэтому высота h этого параллелограмма также постоянна и равна отношению площади к длине основания, т. е. $\frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$. Концы векторов $\boldsymbol{x}$ лежат по одну и ту же сторону от прямой, проходящей через O и параллельной $\boldsymbol{a}$, так как репер $\boldsymbol{axb}$ имеет правую ориентацию.

2) $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$. Уравнение (12) принимает вид $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{0}$. Отсюда, учитывая теорему [6.2], мы приходим к выводу, что $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{a}$, где λ — произвольное действительное число. Важно подчеркнуть, что при *любом* λ соотношение $\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{a}$ есть решение данного уравнения.

Приведенное нами исследование показывает, что уравнение (12) либо не имеет решения, либо имеет бесчисленное множество решений. В частности, уравнение $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{x}] = \boldsymbol{a}$ не имеет решения, поэтому нельзя ввести понятие вектора-единицы, т. е. вектора, удовлетворяющего предыдущему соотношению для *любого* $\boldsymbol{a}$. Нельзя ввести также понятие вектора, обратного данному вектору.

в) Так же как и в случае скалярного произведения, векторное произведение обладает делителями нуля, т. е. существуют ненулевые векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, произведение которых равно нулю: $[\boldsymbol{a}\,\boldsymbol{b}] = \boldsymbol{0}$. Такими векторами по теореме [6.2] будут коллинеарные векторы.

г) Так как произведение коллинеарных векторов есть нуль-вектор, то $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}] = \boldsymbol{0}$, поэтому $[[\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}]\,\boldsymbol{a}] = \boldsymbol{0}$ и т. д. Отсюда следует, что для векторного произведения нецелесообразно вводить понятие степени.

д) Как известно, для чисел справедлив ассоциативный закон, т. е. для любых трех чисел α, β, γ имеем: $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$. Операция векторного произведения не обладает аналогичным свойством. В самом деле, пусть $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ — произвольные векторы. Согласно теореме [6.6]

$$[[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]\,\boldsymbol{c}] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}), \quad [\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}]] = -[[\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}]\,\boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}).$$

Отсюда следует, что $[[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]\,\boldsymbol{c}] - [\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}]] = \boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c})$. Итак,

$$[[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]\,\boldsymbol{c}] - [\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}]] = (\boldsymbol{a}\boldsymbol{b})\,\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}).$$

Если, например, $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ не коллинеарны, то правая часть не равна нулю, поэтому и левая часть отлична от нуля, т. е. в этом случае $[[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]\boldsymbol{c}] \neq [\boldsymbol{a}\,[\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}]]$.

Задачи и упражнения

77. Репер $\boldsymbol{abc}$ имеет правую ориентацию. Какую ориентацию имеют следующие реперы

а) $\boldsymbol{bac}$, $\boldsymbol{acb}$, $\boldsymbol{bca}$, $\boldsymbol{cba}$, $\boldsymbol{cab}$;

б) $-\frac{1}{2}\boldsymbol{b}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{c}$; $-\boldsymbol{a}, \sqrt{2}\boldsymbol{b}, -3\boldsymbol{c}$; $-2\boldsymbol{b}, -\boldsymbol{a}, \frac{1}{2}\boldsymbol{c}$;

в) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, -\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$; $\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{c}, \boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}$; $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}, \boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$?

78. Тетраэдр $ABCD$ имеет правую ориентацию[1]. Определить ориентации следующих тетраэдров:

а) $BCAD$; б) $ACDB$; в) $DACB$; г) $CADB$; д) $BACD$.

79. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ репер $\overline{AA_1}\ \overline{AB}\ \overline{AD}$ имеет левую ориентацию. Определить ориентации реперов:

а) $\overline{DA}\ \overline{DC}\ \overline{DD_1}$; б) $\overline{C_1C}\ \overline{C_1D_1}\ \overline{C_1B_1}$; в) $\overline{D_1A_1}\ \overline{D_1D}\ \overline{D_1B_1}$;
г) $\overline{BA}\ \overline{BB_1}\ \overline{BC}$; д) $\overline{FB}\ \overline{FD}\ \overline{FA_1}$,

где F — середина ребра AD.

[1] Ориентацией тетраэдра $ABCD$ называется ориентация репера $\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}$.

80. Пусть объем ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, равен -3. Вычислить объем ориентированных параллелепипедов, построенных на векторах:

а) $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \frac{1}{2}\boldsymbol{c}$; б) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$;

в) $\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}$; г) $-3\boldsymbol{c}, \boldsymbol{a}, \frac{1}{4}\boldsymbol{b}$;

д) $\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

е) $-2\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}-3\boldsymbol{c}, 2\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}, -\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a}$.

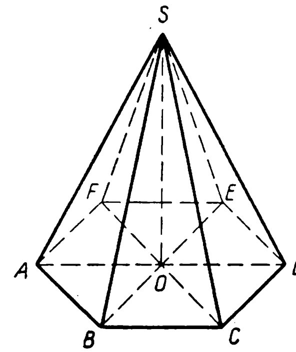


Рис. 35

81. $SABCDEF$ — правильная шестиугольная пирамида, сторона основания которой равна 2, а высота $SO = 3$ (рис. 35). Найти векторные произведения следующих векторов:

1) $[\overline{AB}\cdot\overline{AF}]$; 2) $[\overline{AD}\cdot\overline{AB}]$; 3) $[\overline{DF}\cdot\overline{DE}]$; 4) $[\overline{AD}\cdot\overline{FO}]$; 5) $[\overline{AE}\cdot\overline{AC}]$.

82. Определить координаты векторов:

а) $[\boldsymbol{ab}]$; б) $[\boldsymbol{bc}]$; в) $[\boldsymbol{bd}]$; г) $[\boldsymbol{cb}]$; д) $[\boldsymbol{da}]$; е) $[\boldsymbol{ca}]$,

если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ и $\boldsymbol{d}$ в прямоугольной декартовой системе имеют координаты:

$\boldsymbol{a}\{-1, 0, 4\}$, $\boldsymbol{b}\{2, 1, 3\}$, $\boldsymbol{c}\{-3, 1, -1\}$ и $\boldsymbol{d}\{2, 1, -5\}$.

83. Пользуясь векторным произведением, вычислить площадь параллелограмма, построенного на векторах $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ в каждом из следующих случаев:

а) $\boldsymbol{a}\{-3, 0, 4\}$, $\boldsymbol{b}\{3, -1, 5\}$; б) $\boldsymbol{a}\{1, 0, 6\}$, $\boldsymbol{b}\{3, -2, 1\}$;
в) $\boldsymbol{a}\{7, 1, -3\}$, $\boldsymbol{b}\{0, 1, 0\}$.

84. Пользуясь векторным произведением, вычислить площадь треугольника ABC в каждом из следующих случаев:

а) $A(-1, 0, 2)$, $B(2, 3, -3)$, $C(1, 2, -1)$;
б) $A(3, 4, 0)$, , $B(-4, 3, 1)$, $C(2, 7, -8)$;
в) $A(-3, 2, 1)$ $B(3, 0, 3)$, $C(-2, 4, 1)$.

85. При каком условии $[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{cb}]\boldsymbol{a}$?

86. Пользуясь следствием из теоремы [6.3], показать, что

$$[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c} = [\boldsymbol{bc}]\boldsymbol{a}, \quad [\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c} = -[\boldsymbol{cb}]\boldsymbol{a}.$$

87. При каком условии: а) $[\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{ac}]$; б) $[\boldsymbol{ab}] = [\boldsymbol{ba}]$?

88. Определить координаты вектора $[[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}]$, если в прямоугольном декартовом базисе векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ имеют координаты:

а) $\boldsymbol{a}\{1, 1, -3\}$, $\boldsymbol{b}\{-2, 1, 3\}$, $\boldsymbol{c}\{7, 1, 0\}$;
б) $\boldsymbol{a}\{0, 3, 2\}$, $\boldsymbol{b}\{-1, 0, 2\}$, $\boldsymbol{c}\{2, 1, 2\}$;
в) $\boldsymbol{a}\{1, 2, -1\}$, $\boldsymbol{b}\{3, 5, 0\}$, $\boldsymbol{c}\{-1, 4, -2\}$.

89. Пользуясь соотношением (10), доказать тождество Лагранжа:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 \\ z_2 & x_2 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 \\ x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2 & x_2^2+y_2^2+z_2^2 \end{vmatrix}.$$

90. Пусть $[\boldsymbol{ac}] = [\boldsymbol{bc}]$ при $\boldsymbol{c} \neq \boldsymbol{0}$. Можно ли сократить это соотношение на $\boldsymbol{c}$, т. е. следует ли из предыдущего соотношения, что $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$?

91. Пусть $[\boldsymbol{ap}] = [\boldsymbol{bp}]$ для любого вектора $\boldsymbol{p}$. Следует ли отсюда, что $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$?

92. Доказать, что из соотношения $[[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]]$ следует: $(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc})$ и, обратно, из соотношения $(\boldsymbol{ab})\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}(\boldsymbol{bc})$ следует $[[\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}] = [\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]]$.

93. Моментом приложенной к точке A силы $\boldsymbol{f}$ относительно точки B называется вектор $\boldsymbol{p} = [\overline{BA} \cdot \boldsymbol{f}]$. Определить момент силы $\boldsymbol{f}$ в каждом из следующих случаев:

а) $\boldsymbol{f}\{2, -4, 3\}$, $A(1, 5, 0)$, $B(0, 0, 0)$;

б) $\boldsymbol{f}\{2, -4, 3\}$, $A(1, 5, 0)$, $B(5, -3, 6)$;

в) $\boldsymbol{f}\{3, 0, 1\}$, $A(5, 2, 6)$, $B(4, 5, 2)$.

94. Показать, что:

а) момент силы относительно точки не меняется, если точку приложения силы переместить по прямой, вдоль которой сила действует;

б) момент равнодействующей нескольких сил, приложенных к одной и той же точке, равен сумме моментов составляющих сил относительно той же точки.

95. Найти вектор $\boldsymbol{x}$ из системы уравнений:

$$\boldsymbol{xa} = \alpha, \quad [\boldsymbol{xa}] = \boldsymbol{b} \text{ при } \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}.$$

Написать условия разрешимости этой системы.

96. Дан треугольник координатами своих вершин:

$$A(-1, 1, 2),\ B(1, 1, 0),\ C(2, 6, -2).$$

Найти: а) площадь треугольника; б) косинусы внутренних углов; в) длину высоты BH и координаты вектора $\overline{BH}$; г) вектор $\boldsymbol{a}$, коллинеарный биссектрисе угла A; д) координаты центра тяжести треугольника. Система координат прямоугольная декартова.

97. Четырехугольник $ABCD$ задан координатами своих вершин:

$$A(2, -3, 1),\ B(-1, 1, 1),\ C(-4, 5, 6),\ D(2, -3, 6).$$

Доказать, что $ABCD$ — плоский выпуклый четырехугольник. Найти: а) площадь четырехугольника; б) косинусы его углов; в) вектор $\boldsymbol{a}$, коллинеарный биссектрисе угла A; г) вектор $\overline{BH}$, где H — основание перпендикуляра, опущенного из точки B на прямую AC; д) координаты центра тяжести четырехугольника. Система координат прямоугольная декартова.

98. Даны векторы $\overline{AB}\ \{3, -1, 2\}$, $\overline{AC}\ \{1, 1, 0\}$. Определить площадь треугольника ABC. Определить координаты какого-либо вектора $\boldsymbol{h}$, компланарного с векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ и перпендикулярного к вектору $\boldsymbol{m} = \overline{AB} - \overline{AC}$.

§ 7. СМЕШАННОЕ ПРОИЗВЕДЕНИЕ ВЕКТОРОВ

1. Смешанное произведение векторов. В предыдущем параграфе мы вводили понятие объема ориентированного параллелепипеда. На основе этого понятия вводится новая операция — смешанное произведение векторов. *Смешанным, или тройным, произведением векторов* $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$ *называется объем ориентированного параллелепипеда, построенного на векторах* $\boldsymbol{a}$; $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$. Смешанное произведение векторов $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ обозначается так: $\boldsymbol{abc}$ или $(\boldsymbol{abc})$.

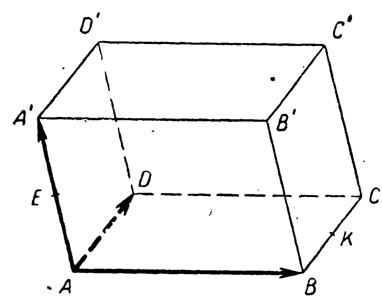


Рис. 36

Из определения следует, что смешанное произведение трех векторов есть скалярная величина, которая равна нулю в том и только в том случае, когда векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны. Если векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ не компланарны, то $\boldsymbol{abc} > 0$ тогда и только тогда, когда репер $\boldsymbol{abc}$ правый, и $\boldsymbol{abc} < 0$ тогда и только тогда, когда репер $\boldsymbol{abc}$ левый.

Пример 1. Пусть $ABCDA'B'C'D'$ — параллелепипед, объем которого $V = 4$, а репер $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AA'}$ правый (рис. 36). Вычислить:

а) $(\overline{AB}\ \overline{AD}\ \overline{AA'})$; б) $(\overline{AA'}\ \overline{CC'}\ \overline{A'D})$; в) $(\overline{AE}\ \overline{AD}\ \overline{AB})$;

г) $(\overline{AC}\ \overline{AD}\ \overline{AA'})$; д) $(\overline{AK}\ \overline{AD}\ \overline{AC})$.

Здесь E — середина ребра AA', а K — середина ребра BC.

Решение. а) Так как параллелепипед, построенный на векторах $\overline{AB}, \overline{AD}, \overline{AA'}$, совпадает с параллелепипедом $ABCDA'B'C'D'$ и репер $\overline{AB}\,\overline{AD}\,\overline{AA'}$ по условию правый, то $(\overline{AB}\ \overline{AD}\,\overline{AA'}) = 4$.

б) Векторы $\overline{AA'}$, $\overline{CC'}$, $\overline{A'D}$ компланарны, поэтому имеем $(\overline{AA'}\,\overline{CC'}\,\overline{A'D}) = 0$.

в) Параллелепипед, построенный на векторах $\overline{AE}$, $\overline{AD}$, $\overline{AB}$, имеет объем $\frac{1}{2}V$, так как E — середина ребра AA'. Реперы $\overline{AE}\ \overline{AD}\ \overline{AB}$ и $\overline{AA'}\ \overline{AD}\,\overline{AB}$ имеют одну и ту же ориентацию, а реперы $\overline{AA'}\,\overline{AD}\ \overline{AB}$ и $\overline{AB}\ \overline{AD}\ \overline{AA'}$ — разные ориентации (см. § 6, п. 2).

Отсюда следует, что репер $\overline{AE}, \overline{AD}, \overline{AB}$ имеет левую ориентацию. Таким образом, $(\overline{AE}\ \overline{AD}\ \overline{AB}) = -2$. По аналогии с этим предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что $(\overline{AC}\ \overline{AD}\ \overline{AA'}) = 4$, а $(\overline{AK}\ \overline{AD}\ \overline{AC}) = 0$.

2. Свойства смешанного произведения. Из теоремы [6.3] немедленно следует, что $\boldsymbol{abc} = [\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}$. С другой стороны, согласно следствию этой теоремы $[\boldsymbol{bc}]\boldsymbol{a} = [\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}$ или $\boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}] = [\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}$. Таким образом, мы приходим к теореме:

Теорема [7.1]. *Каковы бы ни были векторы* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ *и* $\boldsymbol{c}$, *имеют место соотношения*:

$$\boldsymbol{abc} = [\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}[\boldsymbol{bc}]. \tag{1}$$

Термин «смешанное произведение» исходит из этого соотношения.

Основные свойства смешанного произведения сформулированы в следующей теореме.

Теорема [7.2]. *Для произвольных векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *и* $\boldsymbol{d}$ *и произвольного числа* α *имеют место следующие свойства смешанного произведения*:

а) $\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{bca} = \boldsymbol{cab}$;

б) $\boldsymbol{abc} = -\boldsymbol{bac}$, $\boldsymbol{abc} = -\boldsymbol{cba}$, $\boldsymbol{abc} = -\boldsymbol{acb}$;

в) $(\alpha\boldsymbol{a})\boldsymbol{bc} = \alpha(\boldsymbol{abc})$, $\boldsymbol{a}(\alpha\boldsymbol{b})\boldsymbol{c} = \alpha(\boldsymbol{abc})$, $\boldsymbol{ab}(\alpha\boldsymbol{c}) = \alpha(\boldsymbol{abc})$;

г) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{cd} = \boldsymbol{acd} + \boldsymbol{bcd}$, $\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{d} = \boldsymbol{abd} + \boldsymbol{acd}$, $\boldsymbol{ab}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}) = \boldsymbol{abc} + \boldsymbol{abd}$.

Доказательства свойств а) и б) непосредственно следуют из определения смешанного произведения и первых двух свойств ориентаций репера, сформулированных в § 6, п. 2. Докажем свойства в) и г), причем ограничимся доказательством первых соотношений. Остальные можно доказать аналогично.

в) По теореме [7. 1] имеем: $(\alpha\boldsymbol{a})\boldsymbol{bc} = [(\alpha\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]\boldsymbol{c}$. Но по теореме [6. 4] б) имеем $[(\alpha\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}] = \alpha[\boldsymbol{ab}]$, поэтому

$$(\alpha\boldsymbol{a})\boldsymbol{bc} = (\alpha[\boldsymbol{ab}])\boldsymbol{c} = \alpha([\boldsymbol{ab}]\boldsymbol{c}) = \alpha(\boldsymbol{abc}).$$

г) По теореме [7. 1] $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\boldsymbol{cd} = (\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})[\boldsymbol{cd}]$. В силу распределительного свойства скалярного произведения получаем:

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})[\boldsymbol{cd}] = \boldsymbol{a}[\boldsymbol{cd}] + \boldsymbol{b}[\boldsymbol{cd}] = \boldsymbol{acd} + \boldsymbol{bcd}.$$

Из указанной теоремы вытекают следующие следствия:

1°. *Для произвольных векторов* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *и произвольных чисел* α, β, γ *имеет место соотношение*: $(\alpha\boldsymbol{a})(\beta\boldsymbol{b})(\gamma\boldsymbol{c}) = \alpha\beta\gamma(\boldsymbol{abc})$.

2°. *Каковы бы ни были векторы* $\boldsymbol{a}_1, \boldsymbol{a}_2, \ldots, \boldsymbol{a}_k, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$, *имеет место соотношение*:

$$(\boldsymbol{a}_1 + \boldsymbol{a}_2 + \ldots + \boldsymbol{a}_k)\boldsymbol{bc} = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{bc} + \boldsymbol{a}_2\boldsymbol{bc} + \ldots + \boldsymbol{a}_k\boldsymbol{bc}.$$

3°. *Если* $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ — *произвольные векторы, а* $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ *компланарны, то*

$$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{p})\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}^{1}.$$

Пример 2. Вычислить произведения

$$\alpha=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}),\quad \beta=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c}),$$

если $\boldsymbol{abc}=5$.

Решение. Пользуясь свойствами смешанного произведения, получаем:

$$\alpha=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})[\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})]=\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}+\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})=0,$$

так как в каждом из слагаемых векторы компланарны;

$$\beta=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})(\boldsymbol{b}+2\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})(2\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}+\boldsymbol{a})(2\boldsymbol{c})=$$
$$=\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}(2\boldsymbol{c})+\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}(2\boldsymbol{c})=2(\boldsymbol{bac})=-2(\boldsymbol{abc})=-10.$$

3. Выражение смешанного произведения через координаты векторов сомножителей.

Задача 1. Пусть в аффинном базисе $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$ даны векторы координатами: $\boldsymbol{a}\,\{\alpha_1,\beta_1,\gamma_1\}$, $\boldsymbol{b}\,\{\alpha_2,\beta_2,\gamma_2\}$, $\boldsymbol{c}\,\{\alpha_3,\beta_3,\gamma_3\}$. Выразить $\boldsymbol{abc}$ через $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$.

Решение. По условию задачи имеем:

$$\boldsymbol{a}=\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\beta_1\boldsymbol{e}_2+\gamma_1\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{b}=\alpha_2\boldsymbol{e}_1+\beta_2\boldsymbol{e}_2+\gamma_2\boldsymbol{e}_3,\quad \boldsymbol{c}=\alpha_3\boldsymbol{e}_1+\beta_3\boldsymbol{e}_2+\gamma_3\boldsymbol{e}_3.$$

Тогда

$$\boldsymbol{abc}=(\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\beta_1\boldsymbol{e}_2+\gamma_1\boldsymbol{e}_3)(\alpha_2\boldsymbol{e}_1+\beta_2\boldsymbol{e}_2+\gamma_2\boldsymbol{e}_3)(\alpha_3\boldsymbol{e}_1+\beta_3\boldsymbol{e}_2+\gamma_3\boldsymbol{e}_3).$$

Пользуясь следствиями теоремы [7. 2], это соотношение можно записать так:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{abc}&=(\alpha_1\boldsymbol{e}_1)(\alpha_2\boldsymbol{e}_1+\beta_2\boldsymbol{e}_2+\gamma_2\boldsymbol{e}_3)(\alpha_3\boldsymbol{e}_1+\beta_3\boldsymbol{e}_2+\gamma_3\boldsymbol{e}_3)+\\&\quad+(\beta_1\boldsymbol{e}_2)(\alpha_2\boldsymbol{e}_1+\beta_2\boldsymbol{e}_2+\gamma_2\boldsymbol{e}_3)(\alpha_3\boldsymbol{e}_1+\beta_3\boldsymbol{e}_2+\gamma_3\boldsymbol{e}_3)+\\&\quad+(\gamma_1\boldsymbol{e}_3)(\alpha_2\boldsymbol{e}_1+\beta_2\boldsymbol{e}_2+\gamma_2\boldsymbol{e}_3)(\alpha_3\boldsymbol{e}_1+\beta_3\boldsymbol{e}_2+\beta_3\boldsymbol{e}_3)=\\&=(\alpha_1\boldsymbol{e}_1)(\beta_2\boldsymbol{e}_2+\gamma_2\boldsymbol{e}_3)(\beta_3\boldsymbol{e}_2+\gamma_3\boldsymbol{e}_3)+\\&\quad+(\beta_1\boldsymbol{e}_2)(\alpha_2\boldsymbol{e}_1+\gamma_2\boldsymbol{e}_3)(\alpha_3\boldsymbol{e}_1+\gamma_3\boldsymbol{e}_3)+\\&\quad+(\gamma_1\boldsymbol{e}_3)(\alpha_2\boldsymbol{e}_1+\beta_2\boldsymbol{e}_2)(\alpha_3\boldsymbol{e}_1+\beta_3\boldsymbol{e}_2)=\\&=(\alpha_1\boldsymbol{e}_1)(\beta_2\boldsymbol{e}_2)(\gamma_3\boldsymbol{e}_3)+(\alpha_1\boldsymbol{e}_1)(\gamma_2\boldsymbol{e}_3)(\beta_3\boldsymbol{e}_2)+\\&\quad+(\beta_1\boldsymbol{e}_2)(\alpha_2\boldsymbol{e}_1)(\gamma_3\boldsymbol{e}_3)+(\beta_1\boldsymbol{e}_2)(\gamma_2\boldsymbol{c}_3)(\alpha_3\boldsymbol{e}_1)+\\&\quad+(\gamma_1\boldsymbol{e}_3)(\alpha_2\boldsymbol{e}_1)(\beta_3\boldsymbol{e}_2)+(\gamma_1\boldsymbol{e}_3)(\beta_2\boldsymbol{e}_2)(\alpha_3\boldsymbol{e}_1).\end{aligned}$$

Пользуясь теоремой [7.2] а), б) и следствием 1° этой теоремы, получаем:

$$\boldsymbol{abc}=(\alpha_1\beta_2\gamma_3+\alpha_3\beta_1\gamma_2+\alpha_2\beta_3\gamma_1-\alpha_1\beta_3\gamma_2-\alpha_2\beta_1\gamma_3-\alpha_3\beta_2\gamma_1)\,(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3).$$

Таким образом, окончательно получаем:

$$\boldsymbol{abc}=\begin{vmatrix}\alpha_1&\alpha_2&\alpha_3\\\beta_1&\beta_2&\beta_3\\\gamma_1&\gamma_2&\gamma_3\end{vmatrix}(\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3).\qquad(2)$$

[1] Следствия 2° и 3° могут быть записаны также относительно остальных сомножителей.

В частности, если исходный базис прямоугольный декартовый и правый, то $e_1 e_2 e_3 = 1$, и формула (2) принимает вид:

$$abc = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}. \qquad (3)$$

Мы пришли к теореме

Теорема [7.3]. *Если векторы a, b и c заданы в аффинном базисе e_1, e_2, e_3 координатами $a\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, $b\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, $c\{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3\}$, то a, b, c и e_1, e_2, e_3 связаны соотношением* (2).

Если же базис e_1, e_2, e_3 прямоугольный декартовый правый, то abc вычисляется по формуле (3).

Формула (2) позволяет установить условие компланарности трех векторов, заданных своими координатами в аффинном базисе. В самом деле, векторы a, b и c компланарны тогда и только тогда, когда $abc = 0$. Но в силу некомпланарности векторов e_1, e_2, e_3 имеем: $e_1e_2e_3 \neq 0$.

Таким образом, из соотношения (2) получаем:

Теорема [7.4]. *Для того чтобы векторы $a\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, $b\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, $c\{\alpha_3, \beta_3, \gamma_3\}$, заданные в аффинном базисе, были компланарны, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0. \qquad (4)$$

Пример 3. Пусть векторы a, b и c в базисе e_1, e_2, e_3 имеют координаты: $a\{3, 4, 5\}$, $b\{2, 1, 2\}$, $c\{-4, -2, -3\}$. Вычислить abc, если $e_1e_2e_3 = -3$.

Решение. Воспользуемся соотношением (2):

$$abc = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix} (e_1e_2e_3) = (-5)(-3) = 15.$$

Пример 4. Выяснить, какие из следующих троек векторов, заданных в аффинном базисе, компланарны:

а) $a\{4, 5, 3\}$, $b\{1, 3/2, 1\}$, $c\{-1, -2, -1\}$;
б) $a\{3, 8, 2\}$, $b\{4, 7, -1\}$, $c\{5/2, 1, -4\}$;
в) $a\{1, 2, 3\}$, $b\{4, 5, 6\}$, $c\{7, 8, 9\}$;
г) $a\{0, 1, 1\}$, $b\{1, 0, 1\}$, $c\{1, 1, 0\}$.

Решение. Из теоремы [7.4] следует, что задача по существу сводится к проверке выполнения условия (4).

$$\text{а)} \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 5 & \frac{3}{2} & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5 & \frac{3}{2} & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2} + 2 = \frac{1}{2} \neq 0;$$

векторы a, b и c не компланарны.

б) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & \frac{5}{2} \\ 8 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & \frac{5}{2} \\ 0 & 11 & 17 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{11}{2} & \frac{17}{2} \\ 0 & 11 & 17 \\ 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = 0,$

так как первые две строки пропорциональны. Таким образом, данные векторы компланарны.

Предлагаем читателю аналогично убедиться в том, что в случае в) векторы компланарны, а в случае г) — не компланарны.

4. Вычисление объема тетраэдра по координатам его вершин

Пример 5. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого даны в прямоугольной декартовой системе координатами: A (1, 1, 1), B (4, 2, —1), C (—3, 1, 4), D (2, 6, 0).

Решение. Из определения смешанного произведения следует, что объем W параллелепипеда, построенного на векторах $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ и $\overline{AD}$, равен: $W = |(\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD})|$. Отсюда вытекает, что объем V тетраэдра $ABCD$ определяется соотношением:

$$V = \frac{1}{6} |\overline{AB}\ \overline{AC}\ \overline{AD}|. \tag{5}$$

Вычислим координаты векторов $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ по данным координатам концов этих векторов:

$$\overline{AB}\ \{3,\ 1,\ -2\},\ \overline{AC}\ \{-4,\ 0,\ 3\},\ \overline{AD}\ \{1,\ 5,\ -1\}.$$

Из соотношения (5), воспользовавшись формулой (3), получаем:

$$V = \frac{1}{6} \bmod \begin{vmatrix} 3 & -4 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \bmod (-6) = 1.$$

5. Условие компланарности четырех точек. Точки называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости. Точки A (x_1, y_1, z_1), B (x_2, y_2, z_2), C (x_3, y_3, z_3), D (x_4, y_4, z_4) будут компланарны тогда и только тогда, когда векторы $\overline{AB}$, $\overline{AC}$, $\overline{AD}$ компланарны. Вычислим координаты этих векторов, воспользовавшись теоремой [2.1]:

$$\overline{AB}\ \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\},$$
$$\overline{AC}\ \{x_3 - x_1,\ y_3 - y_1,\ z_3 - z_1\},$$
$$\overline{AD}\ \{x_4 - x_1,\ y_4 - y_1,\ z_4 - z_1\}.$$

Из теоремы [7.4] следует, что точки A, B, C, D будут компланарны тогда и только тогда, когда

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & x_4 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 & y_4 - y_1 \\ z_2 - z_1 & z_3 - z_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0. \tag{6}$$

Т е о р е м а [7.5]. *Для того чтобы точки* $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$, $D(x_4, y_4, z_4)$, *заданные в аффинной системе координат, лежали в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы их координаты удовлетворяли соотношению* (6).

П р и м е р 6. Показать, что точки $A(2, -1, 4)$, $B(1, 5, -2)$, $C(3, 4, 2)$ лежат в плоскости, проходящей через начало координат. Система координат аффинная.

Р е ш е н и е. Задача сводится к проверке условия компланарности точек A, B, C, O. Воспользуемся соотношением (6), при этом за первую точку примем начало координат $O(0, 0, 0)$:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & 4 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

З а м е ч а н и е. При выводе соотношения (6) точку (x_1, y_1, z_1) приняли за исходную, поэтому оно не симметрично относительно координат всех четырех точек. Однако по существу за исходную можно было бы принять любую из четырех данных точек.

Задачи и упражнения

99. Что можно сказать о векторах $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, если $\boldsymbol{abc} = \boldsymbol{bac}$?

100. Доказать тождество

$$(\boldsymbol{abc})(\boldsymbol{xyz}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{ax} & \boldsymbol{bx} & \boldsymbol{cx} \\ \boldsymbol{ay} & \boldsymbol{by} & \boldsymbol{cy} \\ \boldsymbol{az} & \boldsymbol{bz} & \boldsymbol{cz} \end{vmatrix}.$$

101. Доказать, что если $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ и $\boldsymbol{k}$ — взаимно перпендикулярные единичные векторы, то для любых векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ справедливо соотношение:

$$[\boldsymbol{ab}] = (\boldsymbol{abi})\,\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{abj})\,\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{abk})\,\boldsymbol{k}.$$

102. Найти вектор $\boldsymbol{x}$, удовлетворяющий условию $\boldsymbol{abx} = \alpha$, где $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ — данные векторы, а α — данное число. Всегда ли уравнение имеет решение? Выяснить геометрический смысл.

103. Доказать, что точки $A(3, -1, 2)$, $B(-1, 0, 2)$, $C(0, 3, 1)$ лежат в плоскости, проходящей через точку $D\left(2, -\frac{3}{4}, 2\right)$.

104. Вычислить объем тетраэдра, вершины которого находятся в точках: а) $A(1, 2, 2)$, $B(5, 1, 3)$, $C(3, 0, -3)$, $D(6, 0, -1)$; б) $A(0, 0, 0)$, $B(3, 4, -1)$, $C(2, 3, 5)$, $D(6, 0, -3)$. Система координат прямоугольная декартова.

105. Дан параллелепипед $ABCDA'B'C'D'$, построенный на векторах $\overline{AB}\,\{4, 3, 0\}$, $\overline{AD}\,\{2, 1, 2\}$ и $\overline{AA'}\,\{-3, -2, 5\}$ (см. рис. 36). Найти: а) объем параллелепипеда; б) площади граней; в) длину высоты, проведенной из вершины A' на грань $ABCD$; г) косинус угла φ_1 между ребром AB и диагональю $B'D$; д) косинус угла φ_2 между гранями $ABCD$ и $ADD'A'$. Система координат прямоугольная декартова.

106. В треугольной призме $ABCA'B'C'$ векторы $\overline{AB}\ \{0,\ 1,\ -1\}$ и $\overline{AC}\ \{2,\ -1,\ 4\}$ определяют основание, а вектор $\overline{AA'}\ \{-3,\ 2,\ 2\}$ направлен по боковому ребру. Найти: а) объем призмы; б) площади граней; в) высоту; г) угол φ между ребрами $B'C'$ и AA'.

Система координат прямоугольная декартова.

107. Дан тетраэдр, построенный на векторах $\overline{AB}\ \{2,\ 0,\ 0\}$, $\overline{AC}\ \{3,\ 4,\ 0\}$ и $\overline{AD}\ \{3,\ 4,\ 2\}$. Найти: а) объем тетраэдра; б) площади граней; в) длину высоты h, проведенной из вершины D; г) косинус угла φ_1 между ребрами AB и BC; д) косинус угла φ_2 между гранями ABC и ADC. Система координат прямоугольная декартова.

§ 8. ПРИЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРНОЙ АЛГЕБРЫ К ЭЛЕМЕНТАРНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Ниже на ряде примеров будет показано, как можно использовать скалярное, векторное и смешанное произведения векторов в элементарной геометрии. Читателю, желающему более подробно ознакомиться с подобного рода примерами, рекомендуем обратиться к следующим учебникам и задачникам: [6], [9], [12], [15], [17] и др.

1. Некоторые теоремы и задачи планиметрии. Скалярное произведение векторов, как правило, находит применение в задачах метрического характера. Так называются задачи, в условия которых входят метрические понятия: длина отрезка, величина угла, перпендикулярность и т. д. Рассмотрим теорему, хорошо известную из курса элементарной геометрии.

Т е о р е м а [8.1]. *Диагонали ромба взаимно перпендикулярны.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $ABCD$ — данный ромб с диагоналями AC и BD (рис. 37). Полагая $\overline{AB} = \boldsymbol{a}$, $\overline{AD} = \boldsymbol{b}$, выразим векторы $\overline{AC}$ и $\overline{BD}$ через $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$.

Имеем:

$$\overline{AC} = \overline{AB} + \overline{AD} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{b},$$
$$\overline{DB} = \overline{AB} - \overline{AD} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}.$$

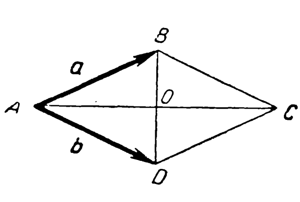


Рис. 37

Отсюда получаем:

$$\overline{AC} \cdot \overline{DB} = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{b}^2,$$
$$\boldsymbol{a}^2 = |\boldsymbol{a}|^2 = AB^2,\ \boldsymbol{b}^2 = |\boldsymbol{b}|^2 = AD^2.$$

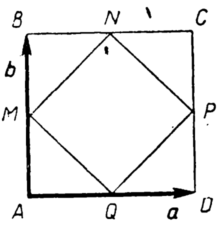


Рис. 38

Так как для ромба $AB = AD$, то $\overline{AC}\times\overline{BD}=AB^2-AD^2=0$. Скалярное произведение двух ненулевых векторов равно нулю в том и только в том случае, когда они взаимно перпендикулярны. Поэтому $\overline{AC}\perp\overline{DB}$, т. е. диагонали ромба взаимно перпендикулярны.

Применим скалярное произведение для решения следующей задачи.

Задача 1. В квадрат $ABCD$ вписан прямоугольник $MNPQ$ так, что вершины M, N, P и Q лежат соответственно на сторонах AB, BC, CD и DA. Показать, что либо $MNPQ$ есть также квадрат, либо стороны прямоугольника $MNPQ$ параллельны диагоналям квадрата $ABCD$.

Решение. Пусть $\overline{AD}=\boldsymbol{a}$, $\overline{AB}=\boldsymbol{b}$. Так как векторы $\overline{AQ}$ и $\overline{NC}$ коллинеарны $\boldsymbol{a}$, то $\overline{AQ}=\alpha\boldsymbol{a}$ и $\overline{CN}=\lambda\boldsymbol{a}$ (рис. 38).

Точно так же в силу коллинеарности векторов AB и $\overline{AM}$, $\overline{AB}$ и $\overline{CP}$ получаем: $\overline{AM}=\beta\boldsymbol{b}$, $\overline{CP}=\mu\boldsymbol{b}$.

Воспользуемся далее тем, что $MNPQ$ — прямоугольник. Это означает, что выполнены следующие условия:

$$\overline{MQ}=\overline{NP} \text{ и } \overline{MQ}\,\overline{MN}=0, \qquad (1)$$

$$\left.\begin{aligned}&\overline{MQ}=\overline{AQ}-\overline{AM}=\alpha\boldsymbol{a}-\beta\boldsymbol{b},\\&\overline{NP}=\overline{CP}-\overline{CN}=\mu\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a},\\&\overline{MN}=\overline{BN}-\overline{BM}=(\overline{BC}+\overline{CN})-(\overline{BA}+\overline{AM})=\\&=(1+\lambda)\boldsymbol{a}+(1-\beta)\boldsymbol{b}.\end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Подставив эти значения в соотношения (1), получаем:

$$\alpha\boldsymbol{a}-\beta\boldsymbol{b}=\mu\boldsymbol{b}-\lambda\boldsymbol{a};\quad (\alpha\boldsymbol{a}-\beta\boldsymbol{b})[(1+\lambda)\boldsymbol{a}+(1-\beta)\boldsymbol{b}]=0.$$

Из первого соотношения в силу неколлинеарности $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ получаем: $\alpha=-\lambda$, $\beta=-\mu$. Из второго соотношения имеем: $\alpha(1+\lambda)\boldsymbol{a}^2-\beta(1-\beta)\boldsymbol{b}^2=0$. Отсюда в силу равенства $\boldsymbol{a}^2=\boldsymbol{b}^2$ получаем:

$$\alpha(1+\lambda)-\beta(1-\beta)=0,$$

$$\text{или } \alpha(1-\alpha)-\beta(1-\beta)=0,\ (\alpha-\beta)(1-\alpha-\beta)=0.$$

Возможны два случая:

а) $\alpha-\beta=0$, $\alpha=\beta$. Тогда из соотношений (2) имеем: $\overline{MQ}=\alpha(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$, $\overline{MN}=(1-\alpha)(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$. Эти соотношения показывают, что $\overline{MQ}\parallel(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$ и $\overline{MN}\parallel(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$, т. е. стороны прямоугольника $MNPQ$ параллельны диагоналям квадрата.

б) $1-\alpha-\beta=0$, $\overline{MQ}^2=\alpha^2\boldsymbol{a}^2+\beta^2\boldsymbol{b}^2=(\alpha^2+\beta^2)\boldsymbol{a}^2$;

$$\overline{MN}^2=(1-\alpha)^2\boldsymbol{a}^2+(1-\beta)^2\boldsymbol{b}^2=[(1-\alpha)^2+(1-\beta)^2]\boldsymbol{a}^2=$$
$$=[2(1-\alpha-\beta)+\alpha^2+\beta^2]\boldsymbol{a}^2=(\alpha^2+\beta^2)\boldsymbol{a}^2.$$

Таким образом, $\overline{MQ}^2 = \overline{MN}^2$ или $MQ = MN$; в этом случае прямоугольник $MNPQ$ является квадратом.

Докажем следующее предложение:

Теорема [8.2]. *Для того чтобы сумма квадратов двух противоположных сторон некоторого (не обязательно плоского) четырехугольника была равна сумме квадратов двух других сторон, необходимо и достаточно, чтобы диагонали четырехугольника были взаимно перпендикулярны.*

Доказательство. Пусть $ABCD$ — данный четырехугольник.

Пусть $\overline{AC} = \boldsymbol{a}$, $\overline{AB} = \boldsymbol{b}$, $\overline{AD} = \boldsymbol{c}$ (рис. 39). Так как $\overline{AD} = \boldsymbol{c}$, $\overline{BC} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}$, $\overline{AB} = \boldsymbol{b}$, $\overline{DC} = \boldsymbol{a} - \boldsymbol{c}$, то $AD^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2 = \boldsymbol{c}^2 + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2 - \boldsymbol{b}^2 - (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{c})^2$.

Воспользовавшись свойствами скалярного произведения, получаем: $AD^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2 = -2\boldsymbol{ab} + 2\boldsymbol{ac} = 2\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b})$.

Но $\boldsymbol{a} = \overline{AC}$, $\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b} = \overline{BD}$, поэтому окончательно получаем:

$$AD^2 + BC^2 - AB^2 - CD^2 = 2\overline{AC} \cdot \overline{BD}.$$

Отсюда и вытекает утверждение данного предложения.

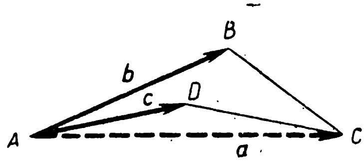


Рис. 39

2. Соотношения между сторонами и углами треугольника. Рассмотрим задачи, устанавливающие некоторые соотношения между сторонами, углами и другими элементами треугольника. Обозначим через a, b и c стороны, а A, B и C противолежащие вершины треугольника. Прежде всего, пользуясь векторной алгеброй, докажем следующие основные соотношения:

Теорема [8.3]. *Во всяком треугольнике*

$$\text{а)}\ \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \text{ (теорема синусов);} \tag{3}$$

$$\text{б)}\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \text{ (теорема косинусов).} \tag{4}$$

Доказательство. Пусть ABC — данный треугольник, а S — его площадь. Выше было показано (см. § 6, задачу 2), что площадь треугольника может быть вычислена при помощи любого из следующих соотношений:

$$S = \frac{1}{2}\left|[\overline{AB}\,\overline{AC}]\right| = \frac{1}{2}\left|[\overline{BA}\,\overline{BC}]\right| = \frac{1}{2}\left|[\overline{CA}\,\overline{CB}]\right|.$$

Пользуясь определением векторного произведения, эти соотношения можно записать так:

$$S = \frac{1}{2} cb \sin A = \frac{1}{2} ca \sin B = \frac{1}{2} ba \sin C.$$

Отсюда немедленно получаем соотношения (3). Соотношение (4) нами уже выведено, см. задачу 3, § 5.

Задача 2. Доказать, что в любом треугольнике

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}, \tag{5}$$

где S — площадь, а a, b и c — длины сторон треугольника ABC.

Решение. Пусть ABC — данный треугольник, $\overline{CA} = \boldsymbol{b}$, $\overline{CB} = \boldsymbol{a}$. Тогда, очевидно,

$$\operatorname{ctg} C = \frac{\cos C}{\sin C} = \frac{\boldsymbol{ab}}{|\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \sin C} = \frac{\boldsymbol{ab}}{2S}.$$

Аналогично определяем $\operatorname{ctg} A$ и $\operatorname{ctg} B$:

$$\operatorname{ctg} A = \frac{\overline{AB}\,\overline{AC}}{2S} = \frac{(\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})(-\boldsymbol{b})}{2S},$$

$$\operatorname{ctg} B = \frac{\overline{BA}\,\overline{BC}}{2S} = \frac{(\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})(-\boldsymbol{a})}{2S},$$

$$\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B + \operatorname{ctg} C = \frac{1}{2S}(-\boldsymbol{ab} + \boldsymbol{b}^2 - \boldsymbol{ab} + \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{ab}) =$$

$$= \frac{1}{2S}(\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - \boldsymbol{ab}) = \frac{1}{4S}(\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + \boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 - 2\boldsymbol{ab}) =$$

$$= \frac{1}{4S}[\boldsymbol{a}^2 + \boldsymbol{b}^2 + (\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b})^2] = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

Задача 3. Доказать, что длина m_a медианы треугольника, опущенной из вершины A на сторону BC, вычисляется по формуле:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}.$$

Решение: Пусть ABC — данный треугольник (рис. 40) и M — середина отрезка BC. Если $\overline{AB} = \boldsymbol{c}$, $\overline{AC} = \boldsymbol{b}$, то $\overline{AM} = \boldsymbol{c} + \overline{BM}$, $\overline{AM} = \boldsymbol{b} + \overline{CM}$; $2\overline{AM} = \boldsymbol{c} + \overline{BM} + \boldsymbol{b} + \overline{CM}$.

Но $\overline{BM} + \overline{CM} = \boldsymbol{0}$, поэтому $\overline{AM} = \frac{\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}}{2}$. Отсюда легко получить искомую формулу. В самом деле, $m_a = \sqrt{\overline{AM} \cdot \overline{AM}} =$ $= \frac{1}{2}\sqrt{(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})} = \frac{1}{2}\sqrt{\boldsymbol{bb}+\boldsymbol{cc} + 2\boldsymbol{bc}} = \frac{1}{2}\sqrt{b^2 + c^2 + 2bc \cos A}.$

3. Некоторые теоремы и задачи стереометрии. В заключение рассмотрим ряд стереометрических задач, для решения которых применим умножение векторов.

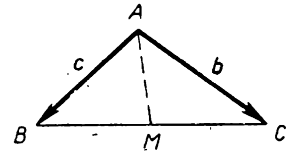


Рис. 40

З а д а ч а 4. Показать, что угол θ между двумя противоположными ребрами произвольного тетраэдра вычисляется по формуле:

$$\cos\theta = \frac{c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2}{2aa'}, \tag{6}$$

где a и a' — длины рассматриваемых ребер, а b и b', c и c' — длины противоположных ребер двух других пар.

Р е ш е н и е. Пусть $OABC$ — данный тетраэдр, а OA и BC — рассматриваемые ребра. Введем обозначения:

$$\overline{OA} = \boldsymbol{a},\ \overline{OB} = \boldsymbol{b},\ \overline{OC} = \boldsymbol{c};\ OA = a,\ OB = b,\ OC = c,$$
$$BC = a',\ AC = b',\ AB = c'.$$

Искомое соотношение (6) может быть записано следующим образом:

$$2\,aa'\cos\theta = c^2 + c'^2 - b^2 - b'^2$$

или

$$2\boldsymbol{a}\cdot\overline{BC} = \boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b}^2 + \overline{AB}^2 - \overline{AC}^2,$$

$$2\boldsymbol{a}(\boldsymbol{c} - \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{c}^2 - \boldsymbol{b}^2 + (\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a})^2 - (\boldsymbol{c} - \boldsymbol{a})^2.$$

Пользуясь распределительным свойством скалярного произведения (теорема [4.5]в), непосредственно убеждаемся в справедливости этого соотношения.

З а д а ч а 5. В основании пирамиды $SOACB$ лежит прямоугольник $OACB$ со сторонами $OA = a$, $OB = b$; ребро OS перпендикулярно плоскости основания и равно h. На стороне основания AC пирамиды взята такая точка K, что $AK = c$. Найти угол φ между плоскостями SBC и SOK.

Р е ш е н и е. Направленные прямые OA, OB и OS примем за оси прямоугольной декартовой системы координат (рис. 41). В этой системе вершины пирамиды и точка K имеют координаты: $O\,(0, 0, 0)$, $A\,(a, 0, 0)$, $B\,(0, b, 0)$, $C\,(a, b, 0)$, $S\,(0, 0, h)$, $K\,(a, c, 0)$.

Угол φ между плоскостями SBC и SOK равен углу между двумя векторами, перпендикулярными соответственно этим плоскостям. Для нахождения таких векторов воспользуемся векторным произведением. Рассмотрим векторы $\boldsymbol{p} = [\overline{BC}\cdot\overline{SB}]$ и $\boldsymbol{q} = [\overline{OS}\cdot\overline{OK}]$. Вектор $\boldsymbol{p}$ перпендикулярен к векторам $\overline{BC}$ и $\overline{SB}$, поэтому он перпендикулярен к плоскости SBC. Точно так же вектор $\boldsymbol{q}$ перпендикулярен к векторам $\overline{OS}$ и $\overline{OK}$, поэтому он перпендикулярен к плоскости SOK.

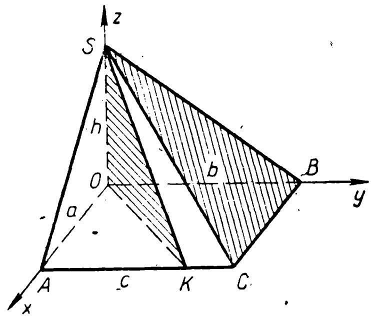


Рис. 41

Дальнейший план решения задачи таков.

а) По координатам точек определяем координаты векторов $\overline{BC}$, $\overline{SB}$, $\overline{OS}$ и $\overline{OK}$.

б) По координатам этих векторов определяем координаты векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$.

в) Определяем косинус угла между векторами $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$. Векторы $\overline{BC}$, $\overline{SB}$, $\overline{OS}$ и $\overline{OK}$ имеют координаты: $\overline{BC}\{a,\ 0,\ 0\}$, $\overline{SB}\{0,\ b,\ -h\}$, $\overline{OS}\{0,\ 0,\ h\}$, $\overline{OK}\{a,\ c,\ 0\}$.

Далее определяем координаты векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$:

$$\boldsymbol{p}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & -h \end{vmatrix} = ah\boldsymbol{j}+ab\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{p}\{0,\ ah,\ ab\},$$

$$\boldsymbol{q}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & h \\ a & c & 0 \end{vmatrix} = -hc\boldsymbol{i}+ah\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{q}\{-hc,\ ah,\ 0\}.$$

Отсюда, пользуясь теоремой [5.2], получаем:

$$\cos\varphi=\frac{a^2h^2}{\sqrt{a^2h^2+a^2b^2}\ \sqrt{h^2c^2+a^2h^2}}=\frac{ah}{\sqrt{a^2+c^2}\ \sqrt{b^2+h^2}}.$$

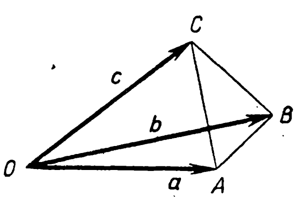


Рис. 42

З а д а ч а 6. Доказать, что если в тетраэдре две пары противоположных ребер взаимно перпендикулярны, то третья пара ребер также взаимно перпендикулярна.

Р е ш е н и е. Пусть $OABC$ — данный тетраэдр, у которого $OA \perp CB$ и $OB \perp AC$ (рис. 42). Требуется доказать, что $OC \perp AB$. Для решения задачи введем в рассмотрение векторы $\overline{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overline{OB}=\boldsymbol{b}$ и $\overline{OC}=\boldsymbol{c}$ и запишем данные условия, используя скалярное произведение векторов. Так как $OA \perp CB$, то $\overline{OA}\ \overline{CB}=\mathbf{0}$ или

$$\boldsymbol{a}(\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c})=\mathbf{0}. \qquad (7)$$

Так как $OB \perp AC$, то $\overline{OB}\cdot\overline{AC}=\mathbf{0}$ или

$$\boldsymbol{b}(\boldsymbol{c}-\boldsymbol{a})=\mathbf{0}. \qquad (8)$$

Сложив эти два соотношения, получаем: $ab - ac + bc - ab = 0$, $c\,(b - a) = 0$ или $\overline{OC} \cdot \overline{AB} = 0$. Отсюда следует, что прямые OC и AB взаимно перпендикулярны.

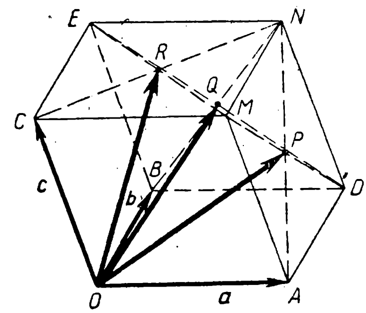


Рис. 43

В тех случаях, когда в условиях задачи фигурирует объем многогранника, полезно воспользоваться смешанным произведением векторов. Рассмотрим пример.

З а д а ч а 7. Вершина параллелепипеда и центры трех противоположных для данной вершины граней служат вершинами пирамиды. Вычислить, какую часть объема параллелепипеда составляет объем этой пирамиды.

Р е ш е н и е. Пусть OA, OB, OC — ребра параллелепипеда, исходящие из вершины O, а P, Q и R — центры граней, противоположных вершине O (рис. 43).

Если W — объем данного параллелепипеда, а V — объем пирамиды $OPQR$, то из содержания § 7 следует, что $W = |\overline{OA}\ \overline{OB}\ \overline{OC}|$, $V = \frac{1}{6}|\overline{OP}\ \overline{OQ}\ \overline{OR}|$.

Для того чтобы установить связь между W и V, выразим векторы $\overline{OP}$, $\overline{OQ}$, $\overline{OR}$ через $a = \overline{OA}$, $b = \overline{OB}$, $c = \overline{OC}$. Легко видеть, что $\overline{OP} = \overline{OA} + \overline{AP} = a + \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c$, $\overline{OQ} = \overline{OB} + \overline{BQ} = b + \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}c$, $\overline{OR} = \overline{OC} + \overline{CR} = c + \frac{1}{2}a = \frac{1}{2}b$.

Примем a, b и c за базисные векторы пространства. Тогда $\overline{OP}\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right\}$, $\overline{OQ}\left\{\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right\}$, $\overline{OR}\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Из формулы (2), § 7 следует, что

$$\overline{OP}\ \overline{OQ}\ \overline{OR} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} (abc) = \frac{1}{2}(abc).$$

Но

$$W = |a\ b\ c|,\ V = \frac{1}{6}|\overline{OP}\ \overline{OQ}\ \overline{OR}| = \frac{1}{12}|abc| = \frac{W}{12}.$$

Таким образом, объем пирамиды $OPQR$ составляет $\frac{1}{12}$ часть объема исходного параллелепипеда.

Задачи и упражнения

108. Доказать, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов его сторон.

109. Доказать, что сумма квадратов диагоналей любого четырехугольника равна сумме квадратов всех его сторон без учетверенного квадрата отрезка, соединяющего середины диагоналей.

110. Вершина A треугольника соединена с точками A_1 и A_2, делящими сторону BC на три равные части. Показать, что разность квадратов отрезков AA_1 и AA_2 в три раза меньше разности квадратов сторон, выходящих из вершины A.

111. На сторонах параллелограмма вне его построены квадраты. Доказать, что центры этих квадратов являются вершинами нового квадрата.

112. Основания равнобочной трапеции равны $2a$ и $2b$, а высота ее равна h. Найти угол φ между диагоналями параллелограмма, обращенный к стороне b.

113. Показать, что если AM — биссектриса треугольника ABC, то

$$\overline{AM} = \frac{b\overline{AB} + c\overline{AC}}{b+c},$$

где $b = AC$, $c = AB$.

Пользуясь этим соотношением:

а) вывести формулу для вычисления длины биссектрисы:

$$AM = \frac{2bc \cdot \cos \frac{A}{2}}{b+c};$$

б) доказать теорему: $\frac{BM}{MC} = \frac{b}{c}$.

114. Доказать, что диагонали четырехугольника (не обязательно плоского) перпендикулярны друг другу в том и только в том случае, когда отрезки, соединяющие середины противоположных сторон, равны между собой [1].

115. Для треугольной пирамиды $OABC$ введены обозначения: $\angle CAB = \alpha$, $\angle ABC = \beta$, $\angle BCA = \gamma$, $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$. Показать, что если плоские углы при вершине O прямые, то $\operatorname{ctg}\alpha : \operatorname{ctg}\beta : \operatorname{ctg}\gamma = a^2 : b^2 : c^2$.

116. Даны треугольник ABC и прямая l, пересекающая плоскость треугольника. Доказать, что прямая составляет со сторонами треугольника ABC равные углы тогда и только тогда, когда она перпендикулярна к плоскости треугольника ABC.

---

[1] Две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 называются взаимно перпендикулярными, если прямые l_1' и l_2', проведенные через произвольную точку пространства, соответственно параллельные данным прямым, перпендикулярны.

117. Показать, что в правильной треугольной пирамиде противоположные ребра взаимно перпендикулярны.

118 Зная длины всех шести ребер тетраэдра, определить длины отрезков, соединяющих попарно середины противоположных сторон.

119. Из вершины произвольного параллелепипеда проведены три диагонали прилегающих граней. Пользуясь свойствами смешанного произведения, установить, какую часть объема параллелепипеда составляет объем пирамиды, боковыми ребрами которой служат эти диагонали.

120. Доказать, что высоты тетраэдра ABC попарно пересекаются тогда и только тогда, когда сумма квадратов двух противоположных ребер одна и та же для всех трех пар.

ГЛАВА III

ПЛОСКОСТЬ

§ 9. УРАВНЕНИЕ ПЛОСКОСТИ В АФФИННОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ

1. Понятие уравнения поверхности. В главе III первой части настоящей книги мы подробно изучили понятие уравнения геометрического места точек на плоскости. Там были рассмотрены разнообразные примеры на составление уравнений геометрических мест точек и на исследование геометрических мест по уравнениям. Понятие уравнения геометрического места точек, которое было введено для точек плоскости, по существу без каких-либо принципиальных трудностей можно распространить на трехмерное пространство. Ниже приводятся основные определения для этого случая.

Пусть нам дано некоторое выражение $F(x, y, z)$, зависящее от трех переменных x, y и z. Будем говорить, что x_0, y_0, z_0 являются *допустимыми значениями выражения* $F(x, y, z)$, если $F(x_0, y_0, z_0)$ — действительное число. Рассмотрим соотношение

$$F(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Может случиться, что соотношение (1) выполняется для всех допустимых значений x, y и z. В этом случае равенство (1) называется *тождеством*.

Например, если

$$F(x, y, z) = \sin^2(x + y + z) + \cos^2(x + y + z) - 1,$$

то соотношение

$$\sin^2(x + y + z) + \cos^2(x + y + z) - 1 = 0$$

выполняется для всех допустимых значений x, y и z, т. е. в данном случае мы имеем тождество. В большинстве случаев соотношение (1) выполняется далеко не для всех допустимых значений x, y и z. В этом случае оно называется *уравнением*. Например, если $F(x, y, z) = 5x - y + z$, то, очевидно, любые числа x, y и z являются допустимыми значениями выражения $5x - y + z$.

Соотношение (1) в данном случае имеет вид: $5x - y + z = 0$. Это соотношение выполняется не для всех x, y и z, поэтому оно является уравнением.

Пусть в пространстве дана система координат $Oe_1e_2e_3$. Под **уравнением геометрического места точек пространства** мы будем понимать такие аналитические условия, которым удовлетворяют координаты всех точек данного геометрического места и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих этому геометрическому месту. Если аналитическая характеристика совокупности точек сводится к одному уравнению $F(x, y, z) = 0$, то такое геометрическое место точек называется **поверхностью**, а соотношение (1) — уравнением поверхности.

Таким образом, если S — некоторая поверхность в пространстве, где дана система координат $Oe_1e_2e_3$, то соотношение (1) является уравнением этой поверхности, если координаты каждой точки поверхности S удовлетворяют уравнению (1) и координаты любой точки пространства, не принадлежащей S, не удовлетворяют этому уравнению.

В аналитической геометрии ставятся две основные задачи:

а) Зная поверхность как геометрическое место точек, написать ее уравнение.

б) Зная уравнение геометрического места, исследовать его свойства.

В этой главе рассмотрим указанные задачи для случая, когда поверхность представляет собой плоскость.

2. Понятие плоскости и ее уравнения. В курсе элементарной геометрии плоскость не определяется, так как она является основным, неопределяемым геометрическим объектом. Основные свойства плоскости задаются аксиомами, а остальные выводятся из них логическим путем. Однако, пользуясь понятием компланарности векторов, можно задать геометрическое место всех точек пространства, принадлежащих плоскости. В самом деле, если M_0 — произвольная точка плоскости π, а $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ — неколлинеарные векторы, параллельные этой плоскости, то точка M принадлежит плоскости π тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}$, $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ компланарны. Другими словами, если G_π — множество всех точек, принадлежащих плоскости π, то G_π есть геометрическое место точек M пространства, удовлетворяющих условию: векторы $\overline{M_0M}$, $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ компланарны. Это свойство может быть использовано для составления уравнения геометрического места точек G_π, т. е. **уравнения плоскости**[1].

[1] В аналитической геометрии термин «плоскость» понимается в смысле совокупности всех точек, принадлежащих некоторой плоскости, а уравнение плоскости — как уравнение этого геометрического места точек.

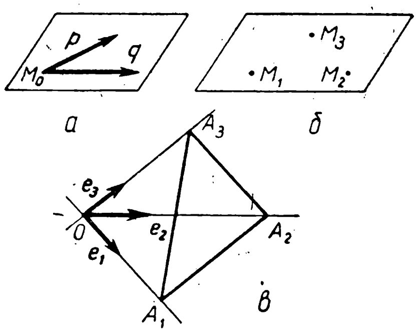


Рис. 44

3. Различные способы задания плоскости в аффинной системе координат. В аналитической геометрии пользуются следующими способами задания плоскости.

а) Пусть π —данная плоскость, M_0 — произвольная точка на ней, а $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ — неколлинеарные векторы, параллельные этой плоскости. Очевидно, положение плоскости π в пространстве однозначно определяется, если даны точка M_0 и векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ (рис. 44, *а*). Точка M_0 называется н а ч а л ь н о й т о ч к о й, а векторы $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ — н а п р а в л я ю щ и м и в е к т о р а м и. Заметим, что за начальную точку можно выбрать любую точку плоскости, а за направляющие векторы — любые неколлинеарные векторы, параллельные плоскости. Если в пространстве выбрана аффинная система координат, то M_0, $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ будут иметь координаты:

$$M_0(x_0,\ y_0,\ z_0),\quad \boldsymbol{p}\{\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1\},\quad \boldsymbol{q}\{\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2\}.$$

Итак, девять чисел $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, $\{\alpha_1,\ \beta_1, \gamma_1\}$, $\{\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2\}$ однозначно характеризуют положение плоскости в пространстве.

б) Плоскость π может быть задана тремя ее точками M_1, M_2 и M_3, не лежащими на одной прямой (рис. 44,*б*). Если в выбранной аффинной системе координат точки имеют координаты $M_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $M_2\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$, $M_3\ (x_3,\ y_3,\ z_3)$, то девять чисел $(x_1,\ y_1,\ z_1)$, $(x_2,\ y_2,\ z_2)$, $(x_3,\ y_3,\ z_3)$ однозначно характеризуют положение плоскости в пространстве.

в) Если плоскость π не проходит через начало аффинной системы координат и пересекает оси координат, то ее можно определить заданием длин направленных отрезков, которые она отсекает на осях координат (рис. 44, *в*). Пусть A_1, A_2 и A_3 — точки пересечения плоскости соответственно с осями Ox, Oy и Oz. Если $a = \dfrac{\overline{OA_1}}{e_1}$, $b = \dfrac{\overline{OA_2}}{e_2}$, $c = \dfrac{\overline{OA_3}}{e_3}$, то числа a, b и c однозначно определяют положение плоскости в пространстве. Этот способ называется заданием плоскости в отрезках.

Итак, если в пространстве выбрана аффинная система координат, то плоскость может быть задана одним из следующих трех способов.

а) Начальной точкой $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$ и направляющими векторами

$$\boldsymbol{p}\{\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1\}\ \text{ и }\ \boldsymbol{q}\{\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2\}.$$

б) Тремя точками, не лежащими на одной прямой:

$$M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2) \text{ и } M_3(x_3, y_3, z_3).$$

в) Длинами направленных отрезков a, b и c, отсекаемых на осях координат.

Очевидно, эти способы несущественно отличаются друг от друга. Основными следует считать первые два способа, так как ими может быть задана плоскость, имеющая произвольное расположение относительно системы координат, в то время как последний способ может быть использован с указанными выше ограничениями.

Пример 1. Пусть плоскость π проходит через точки

$$M_1(1, 2, 0),\ M_2(0, -1, 3) \text{ и } M_3(1, -1, 1).$$

Перейти к другим способам задания.

Решение. а) За начальную точку плоскости можно выбрать любую из данных трех точек, например, $M_1(1, 2, 0)$ и за направляющие векторы можно взять $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$. Так как M_1, M_2 и M_3 не лежат на одной прямой, то эти векторы не коллинеарны: $\overline{M_1M_2}\{-1, -3, 3\}$, $\overline{M_1M_3}\{0, -3, 1\}$.

Итак, плоскость π определяется точкой $M_1(1, 2, 0)$ и неколлинеарными векторами

$$\overline{M_1M_2}\{-1, -3, 3\},\ \overline{M_1M_3}\{0, -3, 1\}.$$

б) Определим точки пересечения плоскости π с осями координат: $A_1(a, 0, 0)$, $A_2(0, b, 0)$ и $A_3(0, 0, c)$. Так как A_1, M_1, M_2, M_3 компланарны, то из формулы (7), п. 5, § 7 получаем:

$$\begin{vmatrix} a-1 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \\ 0 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда, после раскрытия определителя, будем иметь: $a = \frac{4}{3}$.

Точно так же из условий компланарности точек A_2, M_1, M_2, M_3 и A_3, M_1, M_2, M_3 получаем: $b = 8$, $c = \frac{8}{3}$. Таким образом, числа $a = \frac{4}{3}$, $b = 8$, $c = \frac{8}{3}$ являются длинами отрезков, которые плоскость π отсекает на осях координат; эти числа характеризуют положение плоскости в пространстве.

4. Уравнение плоскости, заданной начальной точкой и направляющими векторами.

Задача 1. Написать уравнение плоскости π, заданной в некоторой аффинной системе координат, начальной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющими векторами $\boldsymbol{p}\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ и $\boldsymbol{q}\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$.

Р е ш е н и е. Выше было отмечено, что произвольная точка M принадлежит плоскости π тогда и только тогда, когда вектор $\overline{M_0M}$ компланарен с векторами $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$. Если x, y, z — координаты точки M, то $\overline{M_0M}$ $\{x - x_0, y - y_0, z - z_0\}$. При этом условие компланарности векторов $\overline{M_0M}$, $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ запишется так:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (2)$$

Это и есть уравнение плоскости π, так как координаты любой точки плоскости π удовлетворяют этому уравнению, а координаты точек, не принадлежащих плоскости π, не удовлетворяют уравнению.

П р и м е р 2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (1, —3, 0) и параллельной векторам $\boldsymbol{p}$ $\{1, 3, -4\}$, $\boldsymbol{q}$ $\{0, 1, 2\}$.

Р е ш е н и е. Подставив в соотношение (2) значения координат начальной точки и направляющих векторов, получаем:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y + 3 & z \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 0, \ (x - 1) \cdot 10 - (y + 3) \cdot 2 + z \cdot 1 = 0.$$

Таким образом, данная плоскость имеет уравнение: $10x - 2y + z - 16 = 0$. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что точка M_0 (1, —3, 0) лежит в плоскости π.

П р и м е р 3. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 (1, 2, —3), M_2 (0, 1, 0) и параллельной оси Ox.

Р е ш е н и е. Для того чтобы написать уравнение плоскости, достаточно знать координаты двух неколлинеарных векторов, параллельных плоскости. За один из таких векторов можно принять первый координатный вектор $\boldsymbol{e}_1$, а за второй — вектор $\overline{M_1M_2}$. Очевидно, $\boldsymbol{e}_1$ $\{1, 0, 0\}$, $\overline{M_1M_2}$ $\{-1, -1, 3\}$. Если M_1 принять за начальную точку, то уравнение (2) принимает вид:

$$\begin{vmatrix} x - 1 & y - 2 & z + 3 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } 3(y - 2) + (z + 3) = 0.$$

Таким образом, данная плоскость имеет уравнение:

$$3y + z - 3 = 0.$$

П р и м е р 4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0(1, 2, —3) и параллельной координатной плоскости Oxy.

Р е ш е н и е. Данная плоскость параллельна координатным векторам $\boldsymbol{e}_1$ и $\boldsymbol{e}_2$, поэтому ее уравнение можно записать так:

$$\begin{vmatrix} x-1 & y-2 & z+3 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } z+3=0.$$

5. Уравнение плоскости, проходящей через три неколлинеарные точки.

Задача 2. Написать уравнение плоскости π, проходящей через три неколлинеарные точки M_1 (x_1, y_1, z_1), M_2 (x_2, y_2, z_2) и M_3 (x_3, y_3, z_3), заданные своими координатами в некоторой аффинной системе координат.

Решение. Плоскость π дана тремя точками, не лежащими на одной прямой. Перейдем к первому способу задания плоскости и воспользуемся уравнением (2). Точку M_1 примем за начальную точку, а векторы $\overline{M_1M_2}$ и $\overline{M_1M_3}$ — за направляющие векторы. Так как

$\overline{M_1M_2}\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\}$, $\overline{M_1M_3}\{x_3-x_1,\ y_3-y_1,\ z_3-z_1\}$,

то уравнение (2) в данном случае принимает вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0. \quad (3)$$

Соотношение (3) является уравнением плоскости, проходящей через три неколлинеарные точки.

Пример 5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки O (0, 0, 0), P (1, —3, 4), Q (0, —5, 5).

Решение. Подставив значения координат точек в соотношение (3), получаем:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 0,\quad x(-15+20) - y\cdot 5 + z(-5) = 0$$

или $x - y - z = 0$. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что координаты точек O, P и Q удовлетворяют этому уравнению.

6. Уравнение плоскости в отрезках.

Задача 3. Пусть плоскость π в некоторой аффинной системе пересекает оси координат в точках A_1, A_2 и A_3, отличных от начала координат (см. рис. 44, *в*). Известны длины отрезков, отсекаемых ею на осях координат:

$$a = \frac{\overline{OA_1}}{e_1},\ b = \frac{\overline{OA_2}}{e_2},\quad c = \frac{\overline{OA_3}}{e_3}.$$

Написать уравнение плоскости π.

Р е ш е н и е. Плоскость π проходит через точки A_1 $(a, 0, 0)$, A_2 $(0, b, 0)$, A_3 $(0, 0, c)$, поэтому мы получим ее уравнение с помощью соотношения (3):

$$\begin{vmatrix} x-a & y & z \\ 0-a & b & 0 \\ 0-a & 0 & c \end{vmatrix} = 0 \text{ или } (x-a)bc + yac + zab = 0.$$

Так как $a \neq 0$, $b \neq 0$ и $c \neq 0$, то, разделив полученное уравнение на abc, получаем:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \tag{4}$$

Это соотношение называется у р а в н е н и е м п л о с к о с т и в о т р е з к а х.

П р и м е р 6. Написать уравнение плоскости, которая отсекает на осях координат отрезки: а) $a = 3$, $b = 5$, $c = 1$; б) $a = -\frac{1}{4}$, $b = 2$, $c = -3$; в) $a = -\sqrt{2}$, $b = +\sqrt{3}$, $c = 1$.

Р е ш е н и е. Подставив в соотношение (4) значения a, b и c, получаем:

а) $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{z}{1} = 1$ или $5x + 3y + 15z - 15 = 0$;

б) $\frac{x}{-\frac{1}{4}} + \frac{y}{2} + \frac{z}{-3} = 1$ или $-24x + 3y - 2z - 6 = 0$;

в) $\frac{x}{-\sqrt{2}} + \frac{y}{\sqrt{3}} + \frac{z}{1} = 1$ или

$$-\sqrt{3}\,x + \sqrt{2}\,y + \sqrt{6}\,z - \sqrt{6} = 0.$$

7. Параметрическое задание плоскости. В заключение рассмотрим параметрическое задание плоскости, т. е. выразим координаты любой точки плоскости через произвольные параметры. Пусть в аффинной системе координат плоскость π дана начальной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющими векторами $p\,\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ и $q\,\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$. Точка M (x, y, z) принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}$, p и q компланарны, т. е. когда

$$\lambda_1 \overline{M_0M} + \lambda_2 p + \lambda_3 q = 0,$$

где λ_1, λ_2, и λ_3 одновременно не равны нулю.

Поскольку векторы p и q по условию не коллинеарны, то $\lambda_1 \neq 0$. Поэтому, разделив последнее соотношение на λ_1 и вводя обозначения $\lambda = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}$, $\mu = -\frac{\lambda_3}{\lambda_1}$, окончательно получим $\overline{M_0M} = \lambda p + \mu q$. Это соотношение в координатах запишется так:

$$\left.\begin{array}{lcl} x-x_0=\lambda\alpha_1+\mu\alpha_2, & & x=x_0+\lambda\alpha_1+\mu\alpha_2,\\ y-y_0=\lambda\beta_1+\mu\beta_2, & \text{или} & y=y_0+\lambda\beta_1+\mu\beta_2,\\ z-z_0=\lambda\gamma_1+\mu\gamma_2, & & z=z_0+\lambda\gamma_1+\mu\gamma_2. \end{array}\right\} \quad (5)$$

Этот способ задания плоскости называется параметрическим, а уравнения (5) — параметрическими уравнениями плоскости. Их смысл заключается в следующем: каковы бы ни были действительные числа λ и μ, точка с координатами x, y, z, удовлетворяющая условиям (5), лежит в плоскости π. Обратно, если (x, y, z) — точка плоскости π, то всегда найдутся такие числа λ и μ, что x, y и z выражаются через координаты точки M_0 и координаты векторов p и q при помощи соотношений (5).

Пример 7. Написать параметрические уравнения плоскости, проходящей через точку $M_0(2, 3, -1)$ и параллельной векторам $p\,\{1, 1, 3\}$ и $q\,\{2, -1, 0\}$.

Решение. Подставив координаты данной точки и направляющих векторов плоскости в соотношения (5), получаем:

$$\begin{aligned} x &= 2+\lambda+2\mu,\\ y &= 3+\lambda-\mu,\\ z &= -1+3\lambda. \end{aligned}$$

Задачи и упражнения

121. Определить координаты нескольких точек, принадлежащих плоскости $2x-5y+z-4=0$.

122. Среди точек $A_1(-1, 4, 3)$, $A_2(1, -1, 1)$, $A_3(1, 0, 5)$, $A_4\left(2, 2, \frac{4}{3}\right)$ и $A_5(4, 2, 0)$ указать точки, принадлежащие плоскости $2x-y+3z-6=0$.

123. Составить уравнения: а) координатных плоскостей; б) плоскостей, проходящих через точку $P(1, -3, 2)$ и соответственно параллельных координатным плоскостям.

124. Найти уравнение плоскости: а) проходящей через точку $A(-1, 3, 6)$ и параллельной векторам $p\,\{-3, 1, 2\}$ и $q\,\{2, 0, -1\}$; б) проходящей через точку $A(-2, 0,4)$ и параллельной векторам $p\,\{0, 0, 3\}$ и $q\,\{-4, 1, 2\}$; в) проходящей через точки $M_1(0, 1, -3)$, $M_2(-4, 5, 0)$ и $M_3(2, 1, -1)$; г) проходящей через точки $M_1(-3, 1, 7)$ и $M_2(0, 1, 2)$ и параллельной вектору $p\,\{-1, 1, 3\}$.

125. Написать уравнение плоскости: а) проходящей через ось Ox и точку $M(-1, 2, 3)$; б) проходящей через ось Oz и точку $M(3, 0, -1)$; в) проходящей через ось Oy и точку $M(-3, 2, 4)$.

126. Написать уравнения трех плоскостей, каждая из которых проходит через точки $(0, 1, -4)$ и $(-1, 3, 5)$ и параллельна одной из координатных осей Ox, Oy, Oz.

127. Даны координаты вершин тетраэдра A $(-1, 0, 4)$, B $(2, 3, 1)$, C $(-1, 1, 1)$ и D $(3, 2, -1)$.

а) Составить уравнения граней тетраэдра.

б) Составить уравнения плоскостей, проходящих через ребра тетраэдра параллельно противоположным ребрам.

в) Составить уравнения плоскостей, проходящих через вершины тетраэдра параллельно противоположным граням.

128. Записать уравнение плоскости $x - 3y + 4z + 5 = 0$ «в отрезках».

129. Плоскость проходит через точку M $(6, -2, 1)$ и отсекает на оси Ox отрезок $a = -3$, а на оси Oy отрезок $b = 2$. Составить для этой плоскости уравнение «в отрезках».

130. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M $(-1, 2, 4)$ и отсекающей на осях координат отличные от нуля отрезки равной длины.

131. Найти уравнения плоскостей, проходящих через точки $(0, 4, -3)$ и $(6, -4, 3)$, не проходящих через начало координат и отсекающих на осях направленные отрезки, сумма длин которых равна нулю.

132. Составить параметрические уравнения плоскости, проходящей через точку M $(1, -3, 5)$ и параллельной векторам $\boldsymbol{p}$ $\{2, 0, 4\}$ и $\boldsymbol{q}$ $\{-3, 2, 1\}$.

133. Указать несколько точек, принадлежащих плоскости, заданной уравнениями: $x = 3\lambda - \mu$; $y = 1 + \lambda + 2\mu$; $z = -3 + 2\lambda - 4\mu$.

134. Какие из точек M_1 $(0, -1, 3)$, M_2 $(1, 1, 2)$, M_3 $(1, 0, 5)$, M_4 $(0, 3, 4)$ и $M_5\left(0, 1, \frac{9}{2}\right)$ принадлежат плоскости, заданной уравнениями: $x = -1 + \lambda + \mu$, $y = 2 - 3\lambda + \mu$, $z = 4 - \lambda + 2\mu$.

§ 10. ПЛОСКОСТЬ КАК ПОВЕРХНОСТЬ ПЕРВОГО ПОРЯДКА; РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

1. Плоскость как поверхность первого порядка. Для полученных в предыдущем параграфе уравнений, соответствующих различным способам задания плоскости, можно указать следующую характерную особенность: все они являются алгебраическими уравнениями первой степени, т. е. уравнениями вида: $Ax + By + Cz + D = 0$. Естественно возникает вопрос, всякое ли уравнение первой степени относительно переменных x, y, z определяет в пространстве плоскость? На этот вопрос отвечает следующая основная теорема.

Теорема [10.1]. *Геометрическое место точек пространства, координаты которых в аффинной системе координат удовлетворяют уравнению*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \tag{1}$$

где коэффициенты A, B и C одновременно не равны нулю, есть плоскость, параллельная векторам $\boldsymbol{p}\{B, -A, 0\}$, $\boldsymbol{q}\{C, 0, -A\}$, $\boldsymbol{r}\{0, C, -B\}$.

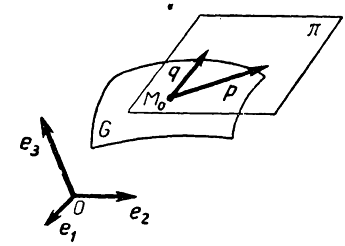


Рис. 45

Доказательство. По условию теоремы коэффициенты A, B и C одновременно не равны нулю. Доказательство проведем в предположении, что $A \neq 0$. Пусть G— поверхность, заданная уравнением (1) (рис. 45). Возьмем произвольную точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на этой поверхности. Такая точка всегда существует, например $(-\frac{D}{A}, 0, 0)$. Согласно теореме [1.8] векторы $\boldsymbol{p}\{B, -A, 0\}$ и $\boldsymbol{q}\{C, 0, -A\}$ не коллинеарны. В самом деле, $\begin{vmatrix} -A & 0 \\ 0 & -A \end{vmatrix} = A^2 \neq 0$. Напишем уравнение плоскости π, проходящей через точку M_0 и параллельной векторам $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$:

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ B & -A & 0 \\ C & 0 & -A \end{vmatrix} = 0$$

$$\text{или} \quad A^2(x - x_0) + AB(y - y_0) + AC(z - z_0) = 0.$$

Так как $A \neq 0$, то это уравнение равносильно уравнению $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ или $Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0$. Точка M_0 лежит на поверхности (1), поэтому $Ax_0 + By_0 + Cz_0 = -D$. Подставив это значение в предыдущее уравнение, мы приходим к выводу, что уравнение плоскости π совпадает с уравнением поверхности G. Следовательно, поверхность G есть плоскость π. Нетрудно заметить, что вектор $\boldsymbol{r}$ также параллелен этой плоскости, так как $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$ компланарны:

$$\begin{vmatrix} B & -A & 0 \\ C & 0 & -A \\ 0 & C & -B \end{vmatrix} = BAC - CAB = 0.$$

Теорема полностью доказана для случая $A \neq 0$. Если $A = 0$, а какой-либо из коэффициентов B или C отличен от нуля, то, как нетрудно видеть, доказательство несущественно отличается от предыдущего. В этих случаях при доказательстве теоремы вместо векторов $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ следует брать либо $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{r}$, либо $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$.

Уравнение (1) называется общим уравнением плоскости.

Пример 1. Найти геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой аффинной системе координат удовлетворяют уравнению $3x - y + z + 1 = 0$.

Р е ш е н и е. Согласно предыдущей теореме рассматриваемое геометрическое место точек есть плоскость. За направляющие векторы плоскости можно выбрать любую пару, составленную из векторов

$$p\ \{-1,\ -3,\ 0\},\ q\ \ \{1,\ 0,\ -3\},\ r\ \ \{\ 0,\ 1,\ 1\}.$$

Для определения положения плоскости в пространстве достаточно иметь одну из ее точек. В качестве такой точки можно взять любую точку плоскости, например $M_0(0,\ 1,\ 0)$.

Доказанную теорему можно сформулировать несколько иначе, если ввести следующее определение: *а л г е б р а и ч е с к о й п о в е р х н о с т ь ю п е р в о г о п о р я д к а называется геометрическое место точек, координаты которых в некоторой аффинной системе удовлетворяют уравнению* (1), *где коэффициенты A, B и C одновременно не равны нулю.*

Т е о р е м а [10.1′]. *Всякая алгебраическая поверхность первого порядка есть плоскость.*

Важно отметить, что в условиях теоремы [10.1] требуется, чтобы коэффициенты A, B и C одновременно не равнялись нулю. Это требование существенно. В самом деле, если $A = B = C = 0$, то уравнение (1) принимает вид: $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + D = 0$. Если $D \neq 0$, то в пространстве не существует ни одной точки, координаты которой удовлетворяли бы этому уравнению. Если же $D = 0$, то уравнение имеет вид: $0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z + 0 = 0$. Этому уравнению удовлетворяют координаты любой точки пространства.

2. Условие параллельности вектора и плоскости. Пусть в аффинной системе координат дана плоскость уравнением (1) и вектор $p\ \{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$. При каком условии вектор p параллелен плоскости? На этот вопрос отвечает следующая теорема.

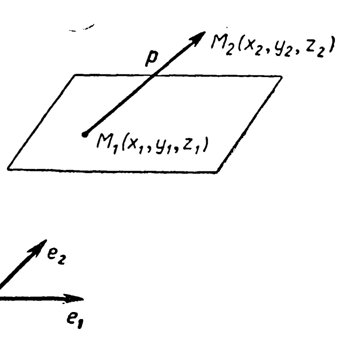


Рис. 46

Т е о р е м а [10.2]. *Для того чтобы вектор p, имеющий координаты $\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ в некоторой аффинной системе, был параллелен плоскости, заданной в той же системе уравнением* (1), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0. \qquad (2)$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть вектор $p\,\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$ параллелен плоскости (1). Согласно определению (см. п. 1, § 1) в плоскости найдутся две такие точки M_1 и M_2, что $\overline{M_1M_2} = p$.

Если в данной системе точки M_1 и M_2 имеют координаты $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0,$$
$$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0.$$

Отсюда получаем:

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0. \qquad (3)$$

Но $\overline{M_1M_2} = \boldsymbol{p}$, а вектор $\boldsymbol{p}$ согласно теореме [2.1] имеет координаты $\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, поэтому $x_2 - x_1 = \alpha$, $y_2 - y_1 = \beta$, $z_2 - z_1 = \gamma$. Подставив эти значения в соотношение (3), получаем (2).

Обратно, пусть выполняется соотношение (2). Возьмем произвольную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ в плоскости (1) и приложим вектор $\boldsymbol{p}$ к этой точке (рис. 46). Если $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — конец вектора $\boldsymbol{p}$, то $\alpha = x_2 - x_1$, $\beta = y_2 - y_1$, $\gamma = z_2 - z_1$, поэтому соотношение (2) принимает вид (3). Так как точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ принадлежит плоскости (1), то

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0. \qquad (4)$$

Сложив соотношения (3) и (4), получаем: $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0$, т. е. точка M_2 принадлежит плоскости (1), поэтому вектор $\boldsymbol{p}$ параллелен этой плоскости.

П р и м е р 2. В аффинной системе координат дана плоскость $3x - 4y + 5z - 1 = 0$. Выяснить, какие из данных векторов

$$\boldsymbol{a}_1\{0, 5, 4\},\ \boldsymbol{a}_2\{1, 1, 1\},\ \boldsymbol{a}_3\{5, 0, -3\},\ \boldsymbol{a}_4\{1, 2, 1\},\ \boldsymbol{a}_5\{4, \sqrt{2}, -1\}$$

параллельны этой плоскости.

Р е ш е н и е. Вектор $\boldsymbol{a}_1$ параллелен плоскости, так как $3\cdot 0 - 4\cdot 5 + 5\cdot 4 = 0$. Вектор $\boldsymbol{a}_2$ не параллелен плоскости, так как $3\cdot 1 - 4\cdot 1 + 5\cdot 1 \neq 0$. Точно так же можно убедиться в том, что векторы $\boldsymbol{a}_3$ и $\boldsymbol{a}_4$ параллельны, а $\boldsymbol{a}_5$ — не параллелен этой плоскости.

3. Условие совпадения двух плоскостей. Мы показали, что каждое уравнение вида (1) в пространстве определяет плоскость. Выясним, при каком условии два уравнения

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \qquad (5)$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \qquad (6)$$

определяют одну и ту же плоскость. Докажем следующую теорему.

Т е о р е м а [10.3]. *Для того чтобы плоскости π_1 и π_2, заданные уравнениями* (5) *и* (6), *совпадали, необходимо и достаточно, чтобы соответствующие коэффициенты уравнений были пропорциональны, т. е. чтобы существовало такое число λ, что*

$$A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1,\ C_2 = \lambda C_1,\ D_2 = \lambda D_1.$$

Доказательство. Пусть плоскости, определяемые уравнениями (5) и (6), совпадают. Согласно теореме [10.1] векторы $p_1\{B_1, -A_1, 0\}$, $q_1\{C_1, 0, -A_1\}$, $r_1\{0, C_1, -B_1\}$ параллельны плоскости π_1. В силу совпадения плоскостей они параллельны также и плоскости π_2. Тогда согласно теореме [10.2], устанавливающей условие параллельности вектора и плоскости, будем иметь:

$$B_1A_2 - A_1B_2 = 0,\ C_1A_2 - A_1C_2 = 0,\ C_1B_2 - B_1C_2 = 0.$$

Если, например, $A_1 \neq 0$, то, положив $\frac{A_2}{A_1} = \lambda$ или $A_2 = \lambda A_1$, из первых двух соотношений получаем: $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$. Точка $\left(-\frac{D_1}{A_1}, 0, 0\right)$ лежит в плоскости π_1, поэтому она лежит также в плоскости π_2:

$$A_2\left(-\frac{D_1}{A_1}\right) + D_2 = 0,$$

откуда $D_2 = \lambda D_1$. Итак, мы показали, что $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$ и $D_2 = \lambda D_1$.

При выводе этих соотношений мы предположили, что $A_1 \neq 0$. Однако это ограничение не существенно, так как если, например, $A_1 = 0$, а $B_1 \neq 0$, то, положив $\frac{B_2}{B_1} = \lambda$, мы приходим к тому же выводу.

Обратно, пусть в уравнениях (5) и (6) все коэффициенты пропорциональны, т. е. пусть существует такое число $\lambda \neq 0$, что

$$A_2 = \lambda A_1,\ B_2 = \lambda B_1,\ C_2 = \lambda C_1,\ D_2 = \lambda D_1.$$

Докажем, что плоскости (5) и (6) совпадают. Перепишем уравнение (6) следующим образом:

$$\lambda A_1x + \lambda B_1y + \lambda C_1z + \lambda D_1 = 0$$

или

$$\lambda\,(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) = 0. \qquad (7)$$

Из соотношений (5) и (7) видно, что всякое решение уравнения (5) является решением уравнения (7). Таким образом, любая точка плоскости π_1 принадлежит плоскости π_2, т. е. плоскости π_1 и π_2 совпадают.

Если воспользоваться понятием ранга матрицы, то теорему [10.3] можно сформулировать так:

Теорема [10.3′]. *Для того чтобы плоскости π_1 и π_2, заданные уравнениями* (5) *и* (6), *совпадали, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы*

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}$$

был равен единице.

Пример 3. Выяснить, какие из следующих пар плоскостей совпадают:

а) $x - 2y + z - 1 = 0$ и $x - 3y + 2z - 1 = 0$;

б) $x + y - 3 = 0$ и $x + y - 4 = 0$;

в) $\sqrt{2}x + 3y - \sqrt{3}z + \sqrt{2} = 0$ и $2x + 3\sqrt{2}y - \sqrt{6}z + 2 = 0$;

г) $-x + y + 5z - 1 = 0$ и $x - y + 5z + 1 = 0$;

д) $2x - \frac{3}{2}y + 4z = 0$ и $12x - 9y + 24z = 0$.

Решение. а) Плоскости не совпадают, так как коэффициенты 1, —2, 1, —1 и 1, —3, 2, —1 не пропорциональны.

б) Плоскости не совпадают, так как коэффициенты 1, 1, 0, —3 и 1, 1, 0, —4 не пропорциональны.

в) Плоскости совпадают, так как коэффициенты в уравнениях плоскостей пропорциональны: $\lambda = \sqrt{2}$.

г) Плоскости не совпадают.

д) Плоскости совпадают и $\lambda = 6$.

4. Расположение плоскости относительно системы координат. Пусть в некоторой определенной системе координат дана плоскость (1). Выясним, как она расположена относительно системы координат.

а) Условие прохождения плоскости через начало координат. Если плоскость (1) проходит через начало координат, то координаты начала координат удовлетворяют уравнению плоскости $A \cdot 0 + B \cdot 0 + C \cdot 0 + D = 0$, отсюда $D = 0$. Обратно, если в уравнении (1) $D = 0$, то начало координат принадлежит плоскости, так как координаты точки O (0, 0, 0) в данном случае удовлетворяют уравнению (1).

Итак, *плоскость* (1) *проходит через начало координат тогда и только тогда, когда* $D = 0$. *Плоскость, проходящая через начало координат, имеет уравнение*:

$$Ax + By + Cz = 0.$$

б) Условия, при которых плоскость параллельна одной из координатных осей. Условие параллельности плоскости (1) и оси Ox, очевидно, сводится к условию параллельности плоскости и вектора $e_1\{1, 0, 0\}$. Согласно теореме [10.2] это условие сводится к соотношению: $A \cdot 1 + B \cdot 0 + C \cdot 0 = 0$ или $A = 0$. Если при этом и $D = 0$, то плоскость (1) проходит через начало координат и, следовательно, содержит ось Ox; если же $D \neq 0$, то плоскость параллельна оси Ox и не имеет с ней ни одной общей точки.

Итак, плоскость (1) *параллельна оси* Ox *тогда и только тогда, когда* $A = 0$, $D \neq 0$ *и содержит ось* Ox *тогда и только тогда, когда* $A = D = 0$.

Совершенно аналогично определяются условия параллельности плоскости осям Oy и Oz.

Плоскость (1) параллельна оси Oy тогда и только тогда, когда $B = 0$, $D \neq 0$ и содержит ось Oy тогда и только тогда, когда $B = D = 0$.

Плоскость (1) параллельна оси Oz тогда и только тогда, когда $C = 0$, $D \neq 0$ и содержит ось Oz тогда и только тогда, когда $C = D = 0$.

Запишем общий вид уравнений плоскостей, параллельных одной из координатных осей или содержащих эту ось.

Координатная ось	Плоскость параллельна оси	Плоскость проходит через ось
Ox	$By + Cz + D = 0,\ D \neq 0$	$By+Cz=0$
Oy	$Ax + Cz + D = 0,\ D \neq 0$	$Ax+Cz=0$
Oz	$Ax + By + D = 0,\ D \neq 0$	$Ax+By=0$

в) Условия, при которых плоскость параллельна одной из координатных плоскостей. Используя рассмотренные выше условия параллельности плоскости одной из координатных осей, легко вывести условия, при которых плоскость параллельна одной из координатных плоскостей. В самом деле, плоскость (1) параллельна координатной плоскости Oxy тогда и только тогда, когда она параллельна как оси Ox, так и оси Oy, т. е. когда $A = 0$, $B = 0$, $D \neq 0$. Если при этом и $D = 0$, то плоскость (1) совпадает с координатной плоскостью Oxy. Аналогично плоскость (1) параллельна координатной плоскости Oyz (соответственно Oxz) тогда и только тогда, когда $B = 0$, $C = 0$, $D \neq 0$ ($A = 0$, $C = 0$, $D \neq 0$). Если при этом и $D = 0$, то плоскость (1) совпадает с соответствующей координатной плоскостью.

Запишем общий вид уравнений плоскостей, параллельных одной из координатных плоскостей или совпадающих с ней.

Координатная плоскость	Плоскость параллельна координатной плоскости	Плоскость совпадает с координатной плоскостью
Oxy	$Cz + D = 0,\ C \neq 0,\ D \neq 0$	$z = 0$
Oyz	$Ax + D = 0,\ A \neq 0;\ D \neq 0$	$x = 0$
Oxz	$By + D = 0,\ B \neq 0,\ D \neq 0$	$y = 0$

Пример 4. Исследовать расположение следующих плоскостей:

а) $3x - z + 1 = 0$;

б) $y + z = 0$; в) $2x = 0$;

г) $3y - 4 = 0$

относительно системы координат.

Решение. а) В уравнении плоскости отсутствует переменная y, поэтому плоскость параллельна оси Oy, но не проходит через эту ось ввиду того, что свободный член в уравнении плоскости отличен от нуля.

б) Плоскость проходит через ось Ox, так как $A = D = 0$.

в) Плоскость совпадает с плоскостью Oyz, так как $B = C = D = 0$.

г) Плоскость параллельна координатной плоскости Oxz, так как $A = C = 0$.

На практике часто возникает необходимость изобразить на рисунке так называемые следы плоскости, т. е. линии пересечения плоскости с координатными плоскостями. Рассмотрим пример решения такой задачи.

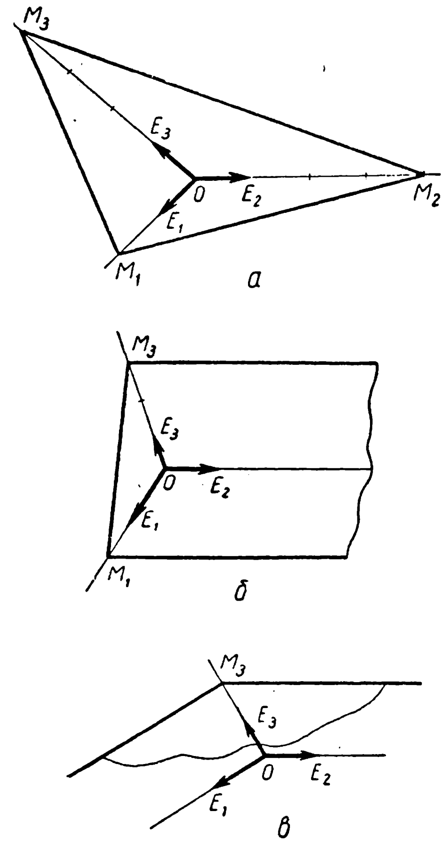


Рис. 47

Пример 5. На плоскости чертежа дано изображение начала координат и координатных векторов общей аффинной системы координат. Построить изображение следов следующих плоскостей:

а) $2x + y + z - 4 = 0$ (π_1);

б) $2x + z - 3 = 0$ (π_2); в) $z - 2 = 0$ (π_3).

Решение. а) Так как в уравнении плоскости π_1 коэффициенты A, B, C и D отличны от нуля, то плоскость не проходит через начало и не параллельна ни одной из координатных осей. Для определения следа плоскости π_1 на координатной плоскости $O^*x^*y^*$[1] достаточно найти две общие точки плоскости π_1 и плоскости

[1] При решении этого примера звездочками обозначены геометрические объекты пространства. Их изображения на плоскость чертежа обозначены соответствующими буквами без звездочек.

$O^*x^*y^*$. В качестве таких точек удобнее всего выбрать точки пересечения плоскости π с осями O^*x^* и O^*y^*. Положив в уравнении плоскости $y=0$ и $z=0$, найдем: $x=2$. Следовательно, точка M_1^* $(2, 0, 0)$ и будет точкой пересечения плоскости π_1 с осью Ox^*. Аналогично определяем координаты точек пересечения плоскости π_1 с осями O^*y^* и O^*z^*.

Пусть O — изображение начала координат O^*, а $\overline{OE}_1$, $\overline{OE}_2$, $\overline{OE}_3$ — изображения координатных векторов $\boldsymbol{e}_1^*$, $\boldsymbol{e}_2^*$, $\boldsymbol{e}_3^*$ (рис. 47, *а*). Построим на этом рисунке изображения точек M_1^*, M_2^*, M_3^*. Так как точка M_1^* лежит на оси O^*x^*, то ее изображение M лежит на прямой OE_1; кроме того, $\frac{O^*M_1^*}{e_1^*}=2$, поэтому $\frac{\overline{OM_1}}{\overline{OE_1}}=2$. Таким образом, $\overline{OM}_1 = 2\cdot\overline{OE}_1$. Аналогично строим точки M_2 и M_3. Прямые M_1M_2, M_2M_3 и M_1M_3, попарно соединяющие эти точки, и будут изображениями следов плоскости.

б) Плоскость π_2 параллельна оси O^*y^*, поэтому ее следы на плоскостях $O^*x^*y^*$ и $O^*y^*z^*$ параллельны оси Oy^*. Отсюда следует, что изображения этих следов на плоскости рисунка параллельны изображению оси O^*y^*. Определим координаты точек пересечения M_1^* и M_3^* плоскости π_2 с осями O^*x^* и O^*z^*:

$$M_1^*\left(\frac{3}{2}, 0, 0\right), \qquad M_3^*\ (0, 0, 3).$$

Изображения следов плоскости даны на рисунке 47, *б*.

в) Плоскость π_3 параллельна координатной плоскости $O^*x^*y^*$, поэтому у нее нет следа на этой плоскости. Два других следа параллельны соответственно координатным осям O^*x^* и O^*y^*, поэтому их изображения параллельны прямым OE_1 и OE_2 (см. рис. 47, *в*).

Задачи и упражнения

135. В аффинной системе координат дана плоскость

$$2x - y + 3z + 6 = 0.$$

а) Найти координаты точки этой плоскости, имеющей абсциссу 2 и лежащей одновременно в координатной плоскости Oxy.

б) Найти координаты точек пересечения этой плоскости с осями координат.

136. Выяснить, какие из векторов:

$$\boldsymbol{a}_1\{-1, 0, 4\},\ \boldsymbol{a}_2\{1, 1, 1\},\ \boldsymbol{a}_3\{1, 3, 4\},$$
$$\boldsymbol{a}_4\{2, 0, -1\},\ \boldsymbol{a}_5\{3, 5, -6\},\ \boldsymbol{a}_6\{4, 0, -2\}$$

параллельны плоскости

$$x - 3y + 2z - 8 = 0.$$

Система координат общая аффинная.

137. В аффинной системе координат дана плоскость своим уравнением: $5x - 4y + 2z - 7 = 0$. Указать несколько векторов, параллельных одновременно данной плоскости и одной из координатных плоскостей.

138. Найти точки пересечения с осями координат следующих плоскостей:

а) $2x - y + 5z - 8 = 0$; б) $x + y - 6z + 4 = 0$;
в) $3x + y - 8 = 0$; г) $x - 2y + z - 5 = 0$;
д) $x - 3z + 4 = 0$; е) $2x - 3z = 0$;
ж) $x - 8y + z = 0$; з) $3x - 8 = 0$.

139. Указать особенности в расположении следующих плоскостей относительно системы координат:

а) $2y - 3z + 6 = 0$; б) $2z - 9 = 0$; в) $2x + 3z = 0$;
г) $3x - y + 4 = 0$; д) $2x + 5z + 4 = 0$; е) $2x - y = 0$;
ж) $3x - 8 = 0$; з) $4y = 0$; и) $2y + 1 = 0$.

140. Начертить изображения начала координат и координатных векторов общей аффинной системы координат и построить изображения следов следующих плоскостей:

а) $x - 2y + z - 4 = 0$; б) $3x + y + 2z + 6 = 0$;
в) $2x + y + 2z - 4 = 0$; г) $5x - 2y + 10 = 0$;
д) $x + 2z - 4 = 0$; е) $2x - 5 = 0$;
ж) $8x - 5y = 0$; з) $2y + 3z = 0$;
и) $3z - 8 = 0$; к) $y + 3 = 0$.

141. Выяснить, какие пары плоскостей совпадают:

а) $-2x - y + \frac{1}{3}z - 4 = 0$, $6x + 3y - z + 12 = 0$;
б) $2x - y + 3z - 1 = 0$, $4x - 2y + 6z + 2 = 0$;
в) $3x - 8y = 0$, $-\frac{3}{4}x + 2y = 0$;
г) $x - 2y + 3z - 1 = 0$, $2x - 4y - 6z - 2 = 0$.

§ 11. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПЛОСКОСТЕЙ; ПУЧОК И СВЯЗКА ПЛОСКОСТЕЙ

1. Взаимное расположение двух плоскостей. Пусть в аффинной системе координат даны две плоскости:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{1}$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{2}$$

Установим критерии, позволяющие по коэффициентам уравнений

(1) и (2) определить их взаимное расположение. По теореме [10.3] плоскости (1) и (2) совпадают тогда и только тогда, когда соответствующие коэффициенты в уравнениях (1) и (2) пропорциональны. Найдем условия параллельности и пересечения двух плоскостей.

Теорема [11.1]. *Для того чтобы две плоскости, заданные в аффинной системе уравнениями* (1) *и* (2), *были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое отличное от нуля число* λ, *что*

$$A_2 = \lambda A_1, B_2 = \lambda B_1, C_2 = \lambda C_1, D_2 \neq \lambda D_1. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть плоскости (1) и (2) параллельны. Это означает, что каждый вектор, параллельный плоскости (1), параллелен плоскости (2). Векторы

$$p\{B_1, -A_1, 0\},\ q\ \{C_1, 0, -A_1\},\ r\ \{0, C_1, -B_1\}$$

согласно теореме [10.1] параллельны плоскости (1), поэтому они параллельны также плоскости (2). Из теоремы [10.2] следует, что

$$\left.\begin{array}{lcl} A_2B_1 + B_2(-A_1) + C_2\cdot 0 = 0 & & A_1B_2 - B_1A_2 = 0, \\ A_2C_1 + B_2 0 + C_2(-A_1) = 0 & \text{или} & A_1C_2 - C_1A_2 = 0, \\ A_2\cdot 0 + B_2C_1 + C_2(-B_1) = 0 & & B_1C_2 - C_1B_2 = 0. \end{array}\right\} \tag{4}$$

При доказательстве теоремы [1.8] было показано, что в этом случае существует такое число λ, которое удовлетворяет условиям: $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$. Очевидно, $D_2 \neq \lambda D_1$, так как в противном случае согласно теореме [10.3] плоскости (1) и (2) совпадают.

Обратно, пусть выполняются условия (3). Тогда согласно теореме [10.2] каждый вектор, параллельный одной из плоскостей, параллелен другой. В самом деле, если, например, $p\{\alpha, \beta, \gamma\}$ параллелен плоскости (1), то $A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma = 0$. Отсюда следует, что $\lambda A_1\alpha + \lambda B_1\beta + \lambda C_1\gamma = 0$ или $A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma = 0$. Это означает, что вектор параллелен также плоскости (2). Отсюда и из условий (3) следует, что плоскости (1) и (2) параллельны. Теорема доказана.

Теоремы [10.3] и [11.1] позволяют сразу сформулировать условия пересечения двух плоскостей. В самом деле, плоскости (1) и (2) пересекаются тогда и только тогда, когда они не параллельны и не совпадают. Аналитически это означает, что коэффициенты при x, y и z не пропорциональны. Таким образом, мы пришли к теореме.

Теорема [11.2]. *Для того чтобы две плоскости, заданные в аффинной системе уравнениями* (1) *и* (2), *пересекались, необходимо и достаточно, чтобы в уравнениях* (1) *и* (2) *коэффициенты при* x, y *и* z *не были пропорциональны.*

Теоремы [10.3], [11.1] и [11.2] позволяют полностью ответить на вопрос о взаимном расположении двух плоскостей, заданных уравнениями в аффинной системе координат.

Т е о р е м а [11.3]. *Плоскости, заданные в аффинной системе координат уравнениями* (1) *и* (2):

а) *пересекаются тогда и только тогда, когда коэффициенты при текущих координатах в уравнениях* (1) *и* (2) *не пропорциональны* (рис. 48, *а*);

б) *параллельны тогда и только тогда, когда коэффициенты при текущих координатах в уравнениях* (1) *и* (2) *пропорциональны, но все коэффициенты, включая свободные члены, не пропорциональны* (рис. 48, *б*);

в) *совпадают тогда и только тогда, когда все коэффициенты (включая и свободные члены) в уравнениях* (1) *и* (2) *пропорциональны* (рис. 48, *в*).

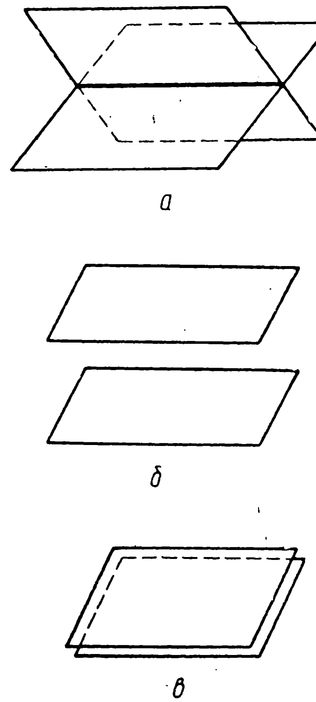


Рис. 48

Если пользоваться понятием ранга матрицы, то теорему [11.3] можно сформулировать следующим образом.

Т е о р е м а [11.3′]. *Пусть даны две плоскости в аффинной системе координат уравнениями* (1) *и* (2). *Обозначим через* r *и* R *соответственно ранги матриц*

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}.$$

а) *Для того чтобы плоскости* (1) *и* (2) *пересекались, необходимо и достаточно, чтобы* $r = 2$.

б) *Для того чтобы плоскости* (1) *и* (2) *были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы* $r = 1$, $R = 2$.

в) *Для того чтобы плоскости* (1) *и* (2) *совпадали, необходимо и достаточно, чтобы* $R = 1$.

П р и м е р 1. Определить взаимное расположение следующих пар плоскостей:

а) $x + y - 3z + 1 = 0, \qquad x - 3y + z = 0;$

б) $x + 4y - 3z + 6 = 0, \qquad \frac{1}{2}x + 2y - \frac{3}{2}z + 3 = 0;$

в) $\sqrt{3}x - y + 6z = 0, \qquad x - \frac{\sqrt{3}}{3}y + 2\sqrt{3}z + 1 = 0;$

г) $x - y = 0, \qquad z = 0.$

Решение. а) Коэффициенты при текущих координатах не пропорциональны, поэтому плоскости пересекаются.

б) Плоскости совпадают, так как все коэффициенты, включая свободные члены, пропорциональны.

в) Плоскости параллельны, так как коэффициенты при текущих координатах пропорциональны $\left(\lambda = \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$, но все коэффициенты не пропорциональны.

г) Плоскости пересекаются, так как коэффициенты при текущих координатах не пропорциональны.

2. Взаимное расположение трех плоскостей[1]. Пусть в аффинной системе координат даны три плоскости:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad (5)$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \quad (6)$$
$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \quad (7)$$

Установим критерии, позволяющие по коэффициентам уравнений (5), (6) и (7) определить их взаимное расположение. Для этой цели введем в рассмотрение матрицы:

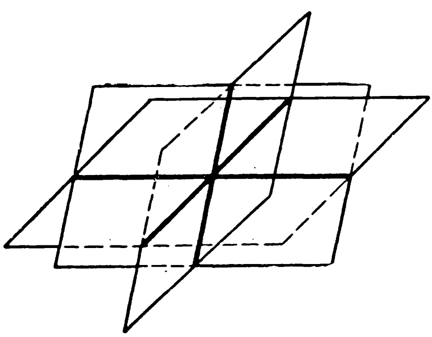


Рис. 49

$$(r)\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix},\ (R)\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}, \quad (8)$$

$$(r_{12})\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix},\ (R_{12})\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$(r_{13})\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix},\ (R_{13})\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}, \quad (10)$$

$$(r_{23})\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{pmatrix},\ (R_{23})\begin{pmatrix} A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \end{pmatrix}. \quad (11)$$

Здесь в скобках обозначены ранги соответствующих матриц. Совершенно очевидно, что ранги матриц (8)—(11) удовлетворяют неравенствам:

$$r \leqslant R \leqslant 3,\quad r_{12} \leqslant R_{12} \leqslant 2,\quad r_{13} \leqslant R_{13} \leqslant 2,\ r_{23} \leqslant R_{23} \leqslant 2,$$
$$r_{12} \leqslant r,\ r_{13} \leqslant r,\ r_{23} \leqslant r,\quad R_{12} \leqslant R,\ R_{13} \leqslant R,\ R_{23} \leqslant R.$$

Пользуясь соответствующими теоремами алгебры, покажем, как по рангам матриц (8) — (11) определяется взаимное расположение плоскостей (5)—(7). Рассмотрим ряд случаев в зависимости от значений r и R.

1. $r = R = 3$. В этом случае, как известно из курса алгебры (см. приложение § 3, теорема 1), система (5) — (7) имеет единственное решение. Геометрический смысл этого заключается в том, что все три плоскости (5), (6) и (7) имеют единственную общую точку (рис. 49). Очевидно, в данном случае

$$r_{12} = r_{13} = r_{23} = R_{12} = R_{13} = R_{23} = 2.$$

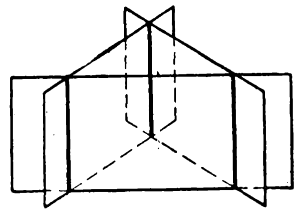
---

[1] При изложении этого вопроса мы будем пользоваться понятием ранга матрицы. Читателю, не знакомому с этим понятием, этот пункт можно опустить.

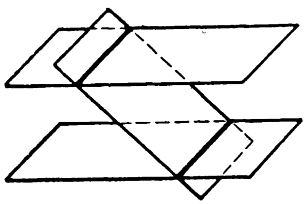
2. $r = 2$, $R = 3$. В этом случае система (5) —(7) несовместна, т. е. соответствующие плоскости не имеют ни одной общей точки. С другой стороны, система однородных уравнений

$$A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma = 0,$$
$$A_2\alpha + B_2\beta + C_2\gamma = 0,$$
$$A_3\alpha + B_3\beta + C_3\gamma = 0$$

в силу условия $r = 2$ имеет единственное решение, определяемое с точностью до числового множителя. Геометрически это означает, что имеется единственное направление, параллельное одновременно плоскостям (5), (6) и (7).



а



б

Рис. 50

Рассмотрим более подробно различные подслучаи взаимного расположения плоскостей при $r = 2$ и $R = 3$. Для этой цели воспользуемся рангами матриц (9) — (11). Так как $r = 2$, то по крайней мере два числа из чисел r_{12}, r_{13}, r_{23} равны двум. В самом деле, если, например, $r_{12} = r_{13} = 1$, то в соответствующих матрицах вторые строки $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ пропорциональны строке $A_1B_1C_1$, поэтому $A_2B_2C_2$ и $A_3B_3C_3$ пропорциональны. Отсюда следует, что $r_{23} = 1$, поэтому $r = 1$. С другой стороны, так как $R = 3$, то $R_{12} = R_{13} = R_{23} = 2$. Это приводит к следующим двум различным случаям:

а) $r_{12} = r_{13} = r_{23} = 2$. В этом случае, очевидно, $R_{12} = R_{23} = R_{13} = 2$. Плоскости (5), (6) и (7) попарно пересекаются (теорема [11.3]) и все три прямые, по которым они пересекаются, параллельны друг другу. В самом деле, выше было отмечено, что существует ненулевой вектор, параллельный всем трем плоскостям. Отсюда следует, что этот вектор параллелен линии пересечения любой пары плоскостей. Очевидно, прямые, по которым пересекаются плоскости, не лежат в одной плоскости (рис. 50, *а*).

б) $r_{12} = 1$, $r_{13} = r_{23} = 2$, $R_{12} = R_{23} = R_{13} = 2$. Плоскости (5) и (6) параллельны, а плоскость (7) пересекает как плоскость (5), так и плоскость (6) (теорема [11.3′] (рис. 50, *б*). Случаи $r_{13} = 1$, $r_{12} = r_{23} = 2$ и $r_{23} = 1$, $r_{13} = r_{12} = 2$ несущественно отличаются от предыдущего.

3. $r = 2$, $R = 2$. В этом случае система (5) — (7) имеет бесчисленное множество решений. Но так как имеется единственное направление, параллельное всем данным плоскостям, то плоскости (5)—(7) пересекаются по прямой.

Легко видеть, что здесь так же, как и в предыдущем случае, возможны два подслучая:

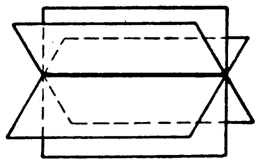
а) $r_{12} = r_{13} = r_{23} = 2$, $R_{12} = R_{13} = R_{23} = 2$. Все три плоскости попарно различны и пересекаются по прямой (рис. 51, *а*);

б) $r_{12} = 1$, $r_{13} = r_{23} = 2$, $R_{12} = 1$, $R_{13} = R_{23} = 2$. Плоскости (5) и (6) совпадают, а (7) пересекает их (рис. 51, *б*). Очевидно, случай $r_{12} = 1$, $r_{13} = r_{23} = 2$, $R_{12} = R_{13} = R_{23} = 2$ здесь невозможен, так как при этом случае система (5) — (7) несовместна.

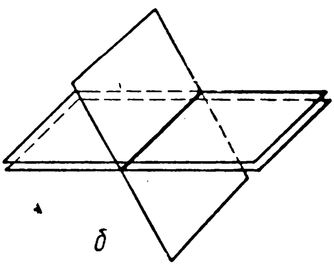
4. $r = 1$, $R = 2$. В этом случае система (5) — (7) несовместна, поэтому плоскости не имеют общих точек. Здесь, очевидно, $r_{12} = r_{13} = r_{23} = 1$, поэтому возможны только два подслучая.

а) $R_{12} = R_{13} = R_{23} = 2$. Все три плоскости попарно параллельны (рис. 52, *а*).

б) $R_{12} = 1$, $R_{13} = R_{23} = 2$. Плоскости (5) и (6) совпадают, а плоскость (7) им параллельна (рис. 52, *б*).

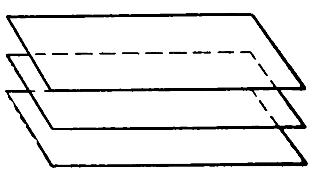


а

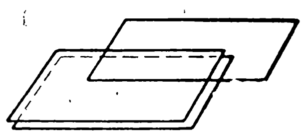


б

Рис. 51



а



б

Рис. 52

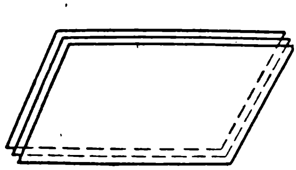


Рис. 53

5. $r = R = 1$. Все три плоскости совпадают (рис. 53).

Очевидно, имеют место предложения, обратные каждому из сформулированных выше предложений. Эти предложения могут быть доказаны рассуждением от противного. В самом деле, в качестве примера докажем предложение: если три плоскости пересекаются по трем параллельным прямым, то

$$r = 2,\ R = 3,\ r_{12} = r_{13} = r_{23} =$$
$$= R_{12} = R_{13} = R_{23} = 2.$$

Доказательство проведем от противного. Пусть, например, $r \neq 2$. Тогда либо $r = 1$, либо $r = 3$. Если $r = 1$, то имеет место либо случай 4, либо случай 5. И в том и в другом случае плоскости, как было показано выше, не пересекаются по трем прямым. Если $r = 3$, то имеет место случай 1 и плоскости имеют одну и только одну общую точку.

Проведенное выше исследование может быть подытожено в виде следующего предложения.

Т е о р е м а [11.4]. *Пусть в аффинной системе координат даны три плоскости уравнениями* (5), (6) и (7). *Если r, R, r_{ij}, R_{ij} соответственно ранги матриц* (8) — (11), *то возможны следующие восемь случаев взаимного расположения данных плоскостей* (см. таблицу на стр. 117).

Сформулированные критерии являются необходимыми и достаточными для любого случая взаимного расположения трех плоскостей.

П р и м е р 2. Определить взаимное расположение следующих троек плоскостей:

а) $x - 3y + z + 1 = 0,$ б) $x - 4y + z + 1 = 0,$

$6x - 7y + 10z - 3 = 0,$ $x + 3y + 2z + 4 = 0,$

$4x - y + 2z - 5 = 0;$ $-2x + y - 3z = 0;$

в) $3x - 7y + z - 1 = 0,$ г) $x - 2y + z - 4 = 0,$

$5x + 3y - 11z + 3 = 0,$ $2x - 4y + 2z + 6 = 0,$

$x + 5y - 6z + 2 = 0;$ $x + y + z - 8 = 0.$

№ п/п	r	R	r_{ij}	R_{ij}	Взаимное расположение плоскостей
1	3	3	2	2	*Плоскости имеют единственную общую точку*
2	2	3	2	2	*Плоскости попарно пересекаются по трем параллельным прямым*
3	2	3	1,2	2	*Две плоскости параллельны, а третья их пересекает*
4	2	2	2	2	*Три плоскости попарно различны и пересекаются по одной прямой*
5	2	2	1,2	1,2	*Две плоскости совпадают, а третья их пересекает*
6	1	2	1	2	*Плоскости попарно параллельны*
7	1	2	1	1,2	*Две плоскости совпадают, а третья им параллельна*
8	1	1	1	1	*Все три плоскости совпадают*

Решение. Для определения взаимного расположения троек плоскостей воспользуемся теоремой [11.4]. Для этой цели подсчитаем ранги r, R, r_{ij}, R_{ij} матриц (8) — (11) для каждого случая в отдельности.

а) Легко видеть, что для данных плоскостей $r = 3$, т. е. имеет место случай 1 теоремы [11.4]. Следовательно, плоскости пересекаются в одной точке.

б) $r = 2$ и $R = 3$. Легко видеть, что в этом случае $r_{12} = r_{13} = r_{23} = 2$, т. е. имеет место случай 2 теоремы [11.4]: плоскости попарно различны и пересекаются по трем параллельным прямым.

в) В данном случае $r = 2$, $R = 2$, $r_{12} = r_{13} = r_{23} = 2$. Таким образом, имеет место случай 4 теоремы [11.4], т. е. плоскости попарно различны и пересекаются по одной прямой.

г) $r = 2$, $R = 3$, $r_{12} = 1$, $r_{13} = 2$, $r_{23}=2$. Это случай 3 теоремы [11.4]. В данном случае две плоскости параллельны, а третья их пересекает.

3. Уравнение пучка пересекающихся плоскостей. Пучком пересекающихся плоскостей с осью l называется совокупность всех плоскостей пространства, содержащих прямую l. Пучок пересекающихся плоскостей может быть задан двумя различными плоскостями, принадлежащими этому пучку. В самом деле, две различные плоскости, проходящие через l, определяют прямую l, а тем самым и весь пучок. По аналогии с I, § 17[1] выведем уравнение пучка пересекающихся плоскостей.

[1] См. подстрочное примечание на стр. 7.

Т е о р е м а [11.5]. *Если в аффинной системе координат пучок пересекающихся плоскостей Ω задан двумя различными плоскостями* (1) *и* (2), *то уравнение*

$$\alpha (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta (A_2x + B_2y+C_2z + D_2) = 0, \quad (12)$$

где α и β принимают всевозможные значения, не равные одновременно нулю, определяет данный пучок.

Смысл теоремы заключается в следующем: каковы бы ни были числа α, β, не равные одновременно нулю, уравнением (12) определяется некоторая плоскость пучка Ω. Обратно, для произвольной плоскости π пучка Ω всегда найдутся такие коэффициенты α, β, что (12) является уравнением плоскости π. Поэтому уравнение (12) называется у р а в н е н и е м п у ч к а Ω.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Прежде всего покажем, что при любых значениях α и β, не равных одновременно нулю, уравнение (12) будет служить уравнением некоторой плоскости. Для доказательства пишем уравнение (12) в следующем виде:

$$(\alpha A_1 + \beta A_2) x + (\alpha B_1 + \beta B_2)y+(\alpha C_1+\beta C_2) z+(\alpha D_1+ \beta D_2)=0. \quad (12')$$

Уравнение (12') представляет собой алгебраическое уравнение первой степени с коэффициентами при x, y и z, одновременно не равными нулю. В самом деле, если предположить, что

$$\alpha A_1 + \beta A_2 = 0, \quad \alpha B_1 + \beta B_2 = 0, \quad \alpha C_1 + \beta C_2 = 0,$$

то в силу того, что α и β не равны одновременно нулю, числа A_1 и A_2, B_1 и B_2, C_1 и C_2 будут пропорциональны, что невозможно, так как данные плоскости (1) и (2) пересекаются (см. теорему [11.3]).

Покажем, что плоскость (12) при любых α и β принадлежит пучку Ω, т. е. проходит через линию пересечения плоскостей (1) и (2). В самом деле, если $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — произвольная точка прямой l, то $A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1 =0$ и $A_2x_0 + B_2y_0+ C_2z_0 + D_2 = 0$, поэтому координаты точки M_0 удовлетворяют уравнению (12) при любых значениях α и β.

Таким образом, при любых α и β, одновременно не равных нулю, уравнение (12) определяет плоскость пучка. Чтобы доказать, что уравнением (12) задается весь пучок плоскостей, остается показать, что для любой плоскости π пучка можно подобрать числа α и β так, чтобы уравнение (12) было уравнением плоскости π. Положение плоскости π в пространстве вполне определяется осью l пучка и точкой $M_1 (x_1, y_1, z_1)$, принадлежащей плоскости и не принадлежащей l. Плоскость (12), как было показано выше, всегда проходит через ось l пучка. Подберем α и β так, чтобы плоскость (12) проходила через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$. Подставим координаты точки M_1 в уравнение (12):

$$\alpha (A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1) + \beta (A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2) = 0.$$

Числа $A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1$ и $A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2$ одновременно не равны нулю, так как точка $M_1 (x_1, y_1, z_1)$ не лежит на прямой l. Если, например,

$$A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2 \neq 0,$$

то α можно выбрать произвольно, а β определить равенством:

$$\beta = -\frac{A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1}{A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2}\alpha.$$

При выбранных значениях α и β плоскость (12) проходит через l и точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$, т. е. совпадает с π. Теорема доказана полностью.

Пример 3. Написать уравнение пучка, определяемого пересекающимися плоскостями:

$$x - 3y + z = 0, \quad 2x - y + 2z + 2 = 0.$$

Решение. Подставив в соотношение (12) значения коэффициентов уравнений плоскостей, получаем:

$$\alpha (x - 3y + z) + \beta (2x - y + 2z + 2) = 0$$

или

$$(\alpha + 2\beta)\, x - (3\alpha + \beta)\, y + (\alpha + 2\beta)\, z + 2\beta = 0.$$

Пример 4. В пучке $\alpha (x - 3y + 4z + 1) + \beta (y + z) = 0$ найти плоскость, проходящую через точку (1, 1, 4).

Решение. Точка (1, 1, 4) принадлежит искомой плоскости, поэтому $\alpha (1 - 3 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1) + \beta (1 + 4) = 0$, $15\alpha + 5\beta = 0$. Этому соотношению удовлетворяют значения: $\alpha = 1, \beta = -3$. Подставив полученные значения в уравнение пучка, получаем:

$$x - 3y + 4z + 1 - 3 (y + z) = 0 \quad \text{или} \quad x - 6y + z + 1 = 0.$$

4. Уравнение пучка параллельных плоскостей. Пучком параллельных плоскостей называется совокупность всех плоскостей пространства, параллельных данной плоскости, включая эту плоскость. По аналогии с предыдущим можно доказать следующую теорему.

Теорема [11.6]. *Если в аффинной системе координат даны две параллельные плоскости* (1) *и* (2), *принадлежащие пучку* Ω, *то уравнение* (12), *где* α *и* β *принимают всевозможные значения, не обращающие одновременно в нуль выражения*

$$a(\alpha, \beta) = \alpha A_1 + \beta A_2, \quad b(\alpha, \beta) = \alpha B_1 + \beta B_2, \quad c(\alpha, \beta) = \alpha C_1 + \beta C_2, \tag{13}$$

определяет данный пучок.

Доказательство. Плоскости (1) и (2) параллельны, поэтому $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$.

Подставив эти значения в соотношение (12'), получаем:

$$A_1(\alpha+\lambda\beta)\,x+B_1(\alpha+\lambda\beta)\,y+C_1(\alpha+\lambda\beta)\,z+D_1\alpha+D_2\beta=0. \quad (14)$$

Легко видеть, что в этом уравнении не все коэффициенты при x, y и z равны нулю. В самом деле, в данном случае выражения (13) имеют вид:

$$a(\alpha,\ \beta)=A_1(\alpha+\lambda\beta),\quad b(\alpha,\ \beta)=B_1(\alpha+\lambda\beta),$$
$$c(\alpha,\ \beta)=C_1(\alpha+\lambda\beta),$$

откуда и следует утверждение, сформулированное выше. Мы пришли к выводу, что уравнением (14) определяется плоскость, которая в силу теоремы [11.1] параллельна плоскости (1) и поэтому принадлежит пучку Ω.

Обратно, пусть π — некоторая плоскость пучка Ω. Покажем, что α и β всегда можно подобрать так, чтобы соотношение (12) было уравнением плоскости π. Пусть плоскость π проходит через точку $(x_0,\ y_0,\ z_0)$. Числа α_0 и β_0 подберем так, чтобы хотя бы одно из них было отлично от нуля и

$$\alpha_0(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)+\beta_0(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)=0. \quad (15)$$

Это всегда можно сделать, так как выражения в скобках в силу параллельности плоскостей (1) и (2) не равны одновременно нулю.

Покажем, что соотношение, полученное из (12) при $\alpha=\alpha_0$ $\beta=\beta_0$:

$$\alpha_0(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\beta_0(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0 \quad (16)$$

является уравнением плоскости π. Прежде всего покажем, что не все коэффициенты при x, y и z равны нулю. Пусть, напротив,

$$\alpha_0A_1+\beta_0A_2=0,\quad \alpha_0B_1+\beta_0B_2=0,\quad \alpha_0C_1+\beta_0C_2=0.$$

Учитывая эти соотношения, из (15) получаем: $\alpha_0D_1+\beta_0D_2=0$. В силу теоремы [10.3] плоскости (1) и (2) совпадают, что противоречит условиям теоремы. Уравнением (16) согласно теореме [10.1] задается плоскость. Выше было показано, что эта плоскость принадлежит пучку Ω. Кроме того, она проходит через точку $(x_0,\ y_0,\ z_0)$, поэтому совпадает с π. Теорема доказана.

Пучок параллельных плоскостей, очевидно, однозначно определяется, если дано уравнение одной из плоскостей этого пучка: $Ax+By+Cz+D=0$. В этом случае уравнение пучка может быть записано так: $Ax+By+Cz+\lambda=0$, где λ принимает всевозможные значения. При $\lambda=D$ получаем уравнение данной плоскости.

Пример 5. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 (2, —3, 1) и параллельной плоскости $3x-4y+z+$ $+15=0$.

Решение. Напишем уравнение пучка плоскостей, определяемого данной плоскостью $3x - 4y + z + \lambda = 0$. Потребуем, чтобы точка M_0 лежала в этой плоскости $3 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) + 1 + \lambda = 0$. Отсюда получаем: $\lambda = -19$. Таким образом, искомая плоскость имеет уравнение: $3x - 4y + z - 19 = 0$.

Доказанные две теоремы [11.5] и [11.6] позволяют утверждать, что если плоскости (1) и (2) не совпадают, то уравнение (12) всегда определяет пучок плоскостей. Если плоскости (1) и (2) совпадают, то $A_2 = \lambda A_1$, $B_2 = \lambda B_1$, $C_2 = \lambda C_1$, $D_2 = \lambda D_1$, поэтому уравнение (12) при любых α и β определяет ту же самую плоскость. Таким образом, мы приходим к предложению.

Теорема [11.7]. *Уравнение* (12) *в аффинной системе координат определяет*:

а) *пучок пересекающихся плоскостей, если плоскости* (1) *и* (2) *пересекаются*;

б) *пучок параллельных плоскостей, если плоскости* (1) *и* (2) *параллельны*;

в) *одну плоскость, если плоскости* (1) *и* (2) *совпадают*.

5. Условия принадлежности трех плоскостей одному пучку. Теорема [11.4] позволяет сформулировать условия, при которых три плоскости принадлежат одному пучку. Выделим из восьми случаев взаимного расположения трех плоскостей те случаи, при которых три плоскости принадлежат одному пучку пересекающихся плоскостей. Такими будут случаи 4, 5 и 8. Три плоскости принадлежат пучку параллельных плоскостей в случаях 6,7 и 8. В остальных случаях плоскости не принадлежат одному пучку. Таким образом, мы приходим к теореме.

Теорема [11.8]. *Три плоскости, заданные в аффинной системе координат уравнениями* (5), (6) *и* (7), *принадлежат одному пучку тогда и только тогда, когда ранг R второй матрицы* (8) *меньше трех.*

В частности, плоскости принадлежат пучку пересекающихся плоскостей тогда и только тогда, когда $r = R \leqslant 2$. Плоскости принадлежат пучку параллельных плоскостей тогда и только тогда, когда $r = 1$.

6. Уравнение собственной связки плоскостей. Собственной связкой плоскостей называется совокупность всех плоскостей пространства, проходящих через M_0. Точка M_0 называется центром связки. Если в пространстве выбрана аффинная система координат, то собственная связка плоскостей может быть дана либо координатами центра, либо тремя плоскостями, пересекающимися в единственной точке — центре связки.

Имеют место следующие две теоремы, доказательства которых мы не приводим, так как они совершенно аналогичны доказательству теоремы [11.5][1].

---

[1] См. также 1, теоремы [17.4] и [17.5].

Т е о р е м а [11.9]. *Если в аффинной системе координат дана связка плоскостей с центром в точке* (x_0, y_0, z_0), *то уравнение*

$$\alpha (x - x_0) + \beta (y - y_0) + \gamma (z - z_0) = 0,$$

где α *и* β *принимают всевозможные значения, не равные одновременно нулю, определяет данную связку.*

Т е о р е м а [11.10]. *Если в аффинной системе координат собственная связка плоскостей дана тремя плоскостями* (5), (6) *и* (7), *пересекающимися в единственной точке, то уравнение*

$$\alpha (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \\ + \gamma (A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0,$$

где α, β, *и* γ *принимают всевозможные значения, не равные одновременно нулю, определяет данную связку.*

Из теоремы [11.4] непосредственно следует, что три плоскости принадлежат связке пересекающихся плоскостей тогда и только тогда, когда $r = R$.

7. Уравнение несобственной связки плоскостей. Н е с о б с т в е н н о й с в я з к о й п л о с к о с т е й, определяемой ненулевым вектором $\boldsymbol{p}$, называется совокупность всех плоскостей пространства, параллельных вектору $\boldsymbol{p}$. Направление вектора $\boldsymbol{p}$ называется н а п р а в л е н и е м с в я з к и.

Если в пространстве выбрана аффинная система координат, то связка плоскостей, определяемая вектором $\boldsymbol{p}$, может быть дана одним из следующих способов:

а) координатами вектора $\boldsymbol{p}$;

б) двумя пересекающимися плоскостями, принадлежащими связке;

в) тремя плоскостями, принадлежащими связке, но не принадлежащими одному пучку.

Ниже приведем теоремы, которые позволяют записывать уравнения связок, задаваемых одним из названных выше способов.

Т е о р е м а [11.11]. *Если в аффинной системе координат дана несобственная связка* Ω, *определяемая вектором* $\boldsymbol{p}\{p_1, p_2, p_3\}$, *то уравнение*

$$\alpha (p_3x - p_1z + p_2) + \beta (p_2x - p_1y - p_3) + \gamma (p_3y - p_2z - p_1) = 0, \quad (17)$$

где α, β *и* γ *принимают всевозможные значения, не обращающие одновременно в нуль выражения*

$$a_{23} = \alpha p_3 + \beta p_2 \quad a_{13} = \gamma p_3 - \beta p_1, \quad a_{12} = \alpha p_1 + \gamma p_2,$$

определяет данную связку.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Запишем уравнение (17) в виде

$$(\alpha p_3 + \beta p_2)x + (\gamma p_3 - \beta p_1)y - (\alpha p_1 + \gamma p_2) z + \alpha p_2 - \beta p_3 - \gamma p_1 = 0.$$

Так как выражения a_{23}, a_{13}, a_{12} одновременно не равны нулю, то этим уравнением определяется плоскость. Из теоремы [10.2] следует, что эта плоскость при произвольных значениях α, β и γ параллельна вектору $p\{p_1, p_2, p_3\}$.

В самом деле,

$$(\alpha p_3 + \beta p_2)p_1 + (\gamma p_3 - \beta p_1)p_2 - (\alpha p_1 + \gamma p_2) p_3 \equiv 0.$$

Отсюда следует, что плоскость (17) принадлежит связке Ω.

Обратно, пусть π — заданная уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{18}$$

произвольная плоскость связки Ω. Докажем, что α, β и γ всегда можно подобрать так, чтобы плоскости (17) и (18) совпадали. Для этого достаточно показать, что система

$$\begin{aligned} \alpha p_3 + \beta p_2 &= A, \\ \gamma p_3 - \beta p_1 &= B, \\ -\alpha p_1 - \gamma p_2 &= C, \\ \alpha p_2 - \beta p_3 - \gamma p_1 &= D \end{aligned}$$

относительно α, β, γ имеет решения при любых значениях A, B, C и D и произвольном ненулевом векторе $p\{p_1, p_2, p_3\}$. Рассмотрим матрицу системы и расширенную матрицу:

$$\begin{pmatrix} p_3 & p_2 & 0 \\ 0 & -p_1 & p_3 \\ -p_1 & 0 & -p_2 \\ p_2 & -p_3 & -p_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} p_3 & p_2 & 0 & A \\ 0 & -p_1 & p_3 & B \\ -p_1 & 0 & -p_2 & C \\ p_2 & -p_3 & -p_1 & D \end{pmatrix}.$$

Ранг r первой матрицы равен трем, так как хотя бы один из следующих определителей третьего порядка отличен от нуля:

$$\begin{vmatrix} p_3 & p_2 & 0 \\ -p_1 & 0 & -p_2 \\ p_2 & -p_3 & -p_1 \end{vmatrix} = -p_2 (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2),$$

$$\begin{vmatrix} p_3 & p_2 & 0 \\ 0 & -p_1 & p_3 \\ p_2 & -p_3 & -p_1 \end{vmatrix} = p_3 (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2),$$

$$\begin{vmatrix} 0 & -p_1 & p_3 \\ -p_1 & 0 & -p_2 \\ p_2 & -p_3 & -p_1 \end{vmatrix} = p_1 (p_1^2 + p_2^2 + p_3^2).$$

Ранг R второй матрицы также равен трем, так как $r \leqslant R$ и первые три строки этой матрицы линейно зависимы. В самом деле, непосредственным вычислением легко убедиться в том, что все определители третьего порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} p_3 & p_2 & 0 & A \\ 0 & -p_1 & p_3 & B \\ -p_1 & 0 & -p_2 & C \end{pmatrix}$$

равны нулю. При этом необходимо учесть, что плоскость (18) параллельна вектору p, поэтому $Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 = 0$. Теорема доказана.

Пример 6. Написать уравнение связки плоскостей, определяемой вектором $p\{1, -2, 4\}$.

Решение. Подставив значения координат вектора p в уравнение (17), получаем:

$$\alpha(4x - z - 2) + \beta(-2x - y - 4) + \gamma(4y + 2z - 1) = 0.$$

После элементарных преобразований получаем:

$$(4\alpha - 2\beta)x + (4\gamma - \beta)y + (2\gamma - \alpha)z - 2\alpha - 4\beta - \gamma = 0.$$

Теорема [11.12]. *Если в аффинной системе координат несобственная связка плоскостей дана двумя пересекающимися плоскостями* (1) *и* (2), *принадлежащими связке, то уравнение*

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \gamma = 0,$$

где α, β, γ *принимают всевозможные значения, причем* α *и* β *одновременно не равны нулю, определяет данную связку.*

Доказательство теоремы предоставляем читателю.

Теорема [11.13]. *Если в аффинной системе координат несобственная связка плоскостей* Ω *дана тремя плоскостями* (5), (6) *и* (7), *принадлежащими связке, но не принадлежащими одному пучку, то уравнение*

$$\alpha(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) + \gamma(A_3x + B_3y + C_3z + D_3) = 0 \qquad (19)$$

определяет связку Ω. *Здесь* α, β *и* γ *принимают всевозможные значения, не обращающие одновременно в нуль выражения*

$$a = \alpha A_1 + \beta A_2 + \gamma A_3,\quad b = \alpha B_1 + \beta B_2 + \gamma B_3,$$
$$c = \alpha C_1 + \beta C_2 + \gamma C_3.$$

Доказательство. В силу условий теоремы в уравнении (19) коэффициенты при x, y и z одновременно не равны нулю, следовательно, этим уравнением определяется плоскость. Пусть $p\{p_1, p_2, p_3\}$ — вектор, определяющий данную связку. Так как плоскости (5), (6) и (7) параллельны этому вектору, то плоскость (19) согласно теореме [10.3] при любых значениях α, β и γ параллельна вектору p. Отсюда следует, что эта плоскость принадлежит связке Ω.

Обратно, пусть плоскость π — заданная уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (20)$$

произвольная плоскость связки Ω. Докажем, что α, β и γ всегда можно подобрать так, чтобы плоскости (19) и (20) совпадали. Для этого достаточно показать, что система уравнений относительно α, β, γ

$$\left.\begin{aligned}A_1\alpha + A_2\beta + A_3\gamma &= A,\\ B_1\alpha + B_2\beta + B_3\gamma &= B,\\ C_1\alpha + C_2\beta + C_3\gamma &= C,\\ D_1\alpha + D_2\beta + D_3\gamma &= D\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

всегда имеет ненулевые решения. Это легко доказать, учитывая, что четыре плоскости (5), (6), (7) и (20) параллельны ненулевому вектору $p\ \{p_1,\ p_2,\ p_3\}$, поэтому:

$$\left.\begin{aligned}Ap_1 + Bp_2 + Cp_3 &= 0,\\ A_1p_1 + B_1p_2 + C_1p_3 &= 0,\\ A_2p_1 + B_2p_2 + C_2p_3 &= 0,\\ A_3p_1 + B_3p_2 + C_3p_3 &= 0.\end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Это означает, что одно из первых трех уравнений системы (21) есть следствие двух других.

В самом деле, если, например, $p_1 \neq 0$, то, разделив все четыре соотношения (22) на p_1, мы приходим к выводу, что все коэффициенты первого уравнения системы (21) линейно выражаются через соответствующие коэффициенты второго и третьего уравнений той же системы. Но ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\\ D_1 & D_2 & D_3\end{pmatrix}$$

согласно теореме [11.8] равен трем, поэтому хотя бы один из определителей третьего порядка этой матрицы отличен от нуля. Но первые три строки линейно зависимы, поэтому отличный от нуля определитель обязательно содержит последнюю строку. Пусть, например,

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ D_1 & D_2 & D_3\end{vmatrix} \neq 0.$$

Система

$$\begin{aligned}A_1\alpha + A_2\beta + A_3\gamma &= A,\\ B_1\alpha + B_2\beta + B_3\gamma &= B,\\ D_1\alpha + D_2\beta + D_3\gamma &= D\end{aligned}$$

имеет единственное решение $(\alpha_0,\ \beta_0,\ \gamma_0)$.

Так как третье уравнение в системе (21) в силу условий (22) есть следствие первых двух, то числа α_0, β_0, γ_0 удовлетворяют всем четырем уравнениям системы (21). Теорема доказана.

Задачи и упражнения

142. Установить взаимное расположение следующих пар плоскостей:

а) $x - 2y + z - 4 = 0,\quad 2x + y - z - 1 = 0;$
б) $2x - y + z - 1 = 0,\quad 4x - 2y + 2z - 3 = 0;$
в) $2x - y + 1 = 0,\quad z - 4 = 0;$
г) $x + y + z = 0,\quad x + y + z + 1 = 0;$
д) $y - z = 0,\quad 2x + 3 = 0.$

143. Установить взаимное расположение трех плоскостей:

$$2x + 5y - z + 6 = 0,\ x + y - 2z - 1 = 0,\ 2x + 5y - z - 1 = 0.$$

144. Показать, что плоскости

$$x - y + 2z - 5 = 0,\quad x + 2y - z + 1 = 0,$$
$$3x + y + 7z - 12 = 0$$

пересекаются в одной точке, и найти ее координаты.

145. Показать, что плоскости

$$3x - 2y + 5z - 1 = 0,\ x - 2y + 2 = 0,\quad x + 2y + 5z - 5 = 0$$

пересекаются по одной прямой.

146. Показать, что плоскости

$$x - y - z + 4 = 0,\quad 3x - z + 5 = 0,\quad 5x + y - z + 1 = 0$$

пересекаются по трем параллельным между собой прямым.

147. Установить взаимное расположение плоскостей в каждом из следующих случаев:

а) $3x - y + 4z - 6 = 0,\ x + y + z - 3 = 0,\ 2x - y - 1 = 0;$
б) $x - 3y + 2z - 8 = 0;\ x - y + 2z - 4 = 0,\ x + y + 2z = 0;$
в) $x - y + z + 5 = 0,\quad 2x + y = 0,\ x + 2y - z - 5 = 0;$
г) $3x - y + 2z - 5 = 0,\quad 6x - 2y + 4z - 5 = 0,$
$x + y + z = 0.$

148. Показать, что четыре плоскости

$$x - 3y + 4z - 5 = 0,\qquad 5x - y + 7z - 12 = 0,$$
$$x + y + z - 2 = 0,\qquad 7x - 3y + 12z - 19 = 0$$

пересекаются в одной точке. Найти координаты точки пересечения.

149. В аффинной системе координат даны три плоскости:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$
$$A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0.$$

При каких условиях, накладываемых на коэффициенты, эти плоскости пересекаются в одной и только одной точке, лежащей в плоскости Oxy?

150. В аффинной системе координат даны две пересекающиеся плоскости:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

При каком условии линия пересечения этих плоскостей: а) пересекает ось Oz; б) лежит в плоскости Oxy?

151. Составить уравнение плоскости, проходящей через начало координат и параллельной:

а) плоскости $7x - 5y + z - 6 = 0$;
б) плоскости $2x + y + 3z - 4 = 0$;
в) плоскости $3z - 5 = 0$;
г) плоскости $3x + 4z - 6 = 0$.

152. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M (3, 1, —2) и параллельной:

а) плоскости $x + y + z - 6 = 0$;
б) плоскости $3x - y + 3z + 1 = 0$;
в) плоскости $2x - z + 4 = 0$;
г) плоскости $2y - 5 = 0$.

153. Через линию пересечения плоскостей

$$x - y + 2z - 4 = 0, \qquad 2x + y + z + 2 = 0$$

провести плоскость:

а) проходящую через начало координат;
б) проходящую через точку M (1, 1, 1);
в) параллельную оси Oz;
г) параллельную оси Ox.

154. Через линию пересечения плоскостей

$$2x - y + 2z - 3 = 0 \quad \text{и} \quad 3x + y - 3z - 1 = 0$$

провести плоскость так, чтобы она отсекала на оси Ox отрезок, равный — 2.

155. Написать уравнение собственной связки плоскостей с центром в точке $M_0(-1, 5, 2)$.

156. Написать уравнение связки плоскостей, задаваемой плоскостями:

$$2x - y + 3z - 2 = 0, \quad x - y + 2 = 0, \quad 3x + y - z + 1 = 0.$$

157. В общей аффинной системе координат тетраэдр задан уравнениями своих граней:

$$5x - 2y + z - 4 = 0\ (ABC), \qquad x - 3y + 4z - 2 = 0\ (ABD),$$
$$x + z - 2 = 0\ (ACD), \qquad 2x + y + z + 5 = 0\ (BCD).$$

Через вершину A тетраэдра провести плоскость, параллельную грани BCD.

158. Даны уравнения боковых граней треугольной призмы

$$2x + y + z - 4 = 0, \qquad x + 2z - 3 = 0,$$
$$4x + y + 5z + 1 = 0.$$

Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $A(-3, 0, 1)$ и $B(1, -2, 1)$ параллельно ребрам призмы.

159. Написать уравнение несобственной связки плоскостей, определяемой вектором $\boldsymbol{p}\{-5, 1, 8\}$.

§ 12. МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ПЛОСКОСТИ

Теория плоскости, изложенная в предыдущих двух параграфах, справедлива как в аффинной, так и в прямоугольной декартовой системе координат. В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторые метрические вопросы этой теории, т. е. вопросы, в постановку которых входят понятия длины отрезка и величины угла. Эти вопросы особенно просто решаются в прямоугольных декартовых системах координат, поэтому в данном параграфе всюду будем предполагать, что система координат прямоугольная декартова.

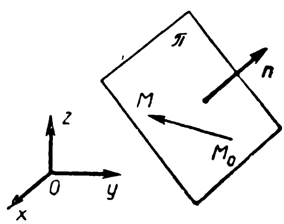


Рис. 54

1. Способы задания плоскости в прямоугольной декартовой системе. В предыдущем параграфе были рассмотрены основные случаи задания плоскости в пространстве. Очевидно, эти способы могут быть применены так же и в том случае, когда данная система координат является прямоугольной декартовой. Однако в этом случае возможны еще два способа задания плоскости.

а) Пусть π — данная плоскость, M_0— произвольная точка на ней, а $\boldsymbol{n}$ — некоторый ненулевой вектор, перпендикулярный к этой плоскости. Очевидно, положение плоскости π в пространстве вполне определяется, если даны точка M_0 и вектор $\boldsymbol{n}$ (рис. 54). Точка M_0 называется *начальной точкой*, а вектор $\boldsymbol{n}$ — *нормальным вектором плоскости*. Если в пространстве выбрана прямоугольная декартова система координат, то M_0 и $\boldsymbol{n}$ будут иметь координаты: $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и $\boldsymbol{n}\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Числа (x_0, y_0, z_0) и $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ однозначно характеризуют положение плоскости в пространстве.

б) Пусть $O\boldsymbol{ijk}$ — прямоугольная декартова система координат в пространстве, а π — данная плоскость. Опустим из точки O перпендикуляр на плоскость π; обозначим через H основание перпендикуляра, опущенного из O на π. Обозначим, далее, через $\boldsymbol{n}_0$ единичный вектор, перпендикулярный к плоскости π, а через ρ — длину отрезка OH. Если $OH = \rho \neq 0$, то вектор $\overline{OH}$ ненулевой. В этом случае $\boldsymbol{n}_0$ возьмем так, чтобы $\overline{OH}$ и $\boldsymbol{n}_0$ были сонаправлены (рис. 55,*а*). Если $OH = \rho = 0$, то направление $\boldsymbol{n}_0$ возьмем произвольно (рис. 55,*б*). Очевидно, вектор $\boldsymbol{n}_0$ и число ρ однозначно определяют положение плоскости в пространстве. В системе $O\boldsymbol{ijk}$ координаты вектора $\boldsymbol{n}_0$ являются направляющими косинусами этого вектора (теорема [5.4]) $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, $\cos\alpha_3$, поэтому положение плоскости однозначно характеризуется числами $\cos\alpha_1$, $\cos\alpha_2$, $\cos\alpha_3$, ρ.

2. Уравнение плоскости, заданной точкой и нормальным вектором.

Задача 1. Написать уравнение плоскости, заданной в некоторой прямоугольной декартовой системе координат нормальным вектором $\boldsymbol{n}\ \{\alpha, \beta, \gamma\}$ и начальной точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$.

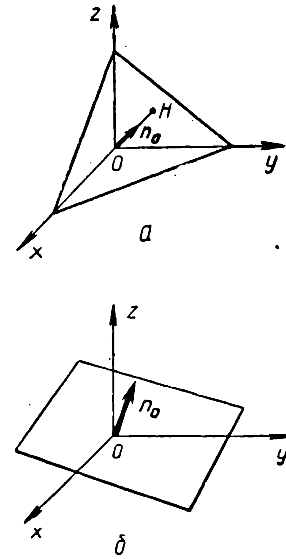


Рис. 55

Решение. Произвольная точка $M\ (x, y, z)$ пространства принадлежит плоскости тогда и только тогда, когда вектор $\overline{M_0M}$ перпендикулярен к вектору $\boldsymbol{n}$ (см. рис. 54). Так как $\overline{M_0M}$ имеет координаты $\{x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0\}$, то условие перпендикулярности векторов $\boldsymbol{n}$ и $\overline{M_0M}$ запишется так:

$$\alpha\,(x - x_0) + \beta\,(y - y_0) + \gamma\,(z - z_0) = 0. \qquad (1)$$

Это и есть уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{n}\ \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Если плоскость проходит через начало координат, то за начальную точку можно выбрать начало координат $O\ (0, 0, 0)$. Поэтому в данном случае уравнение (1) принимает вид:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = 0. \qquad (2)$$

Пример 1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(10, -5, 4)$ и перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{n}\ \{-2, 1, 4\}$.

Решение. Подставив в уравнение (1) значения координат начальной точки и нормального вектора, получаем:

$$-2\,(x - 10) + 1(y + 5) + 4\,(z - 4) = 0 \quad \text{или}$$
$$-2x + y + 4z + 9 = 0.$$

Проверка. Плоскость $-2x + y + 4z + 9 = 0$ проходит через точку $M_0\ (10, -5, 4)$, так как координаты этой точки удовлетворяют уравнению плоскости: $-2 \cdot 10 + (-5) + 4 \cdot 4 + 9 = 0$. Плоскость имеет согласно теореме [10.1] направляющие векторы $\boldsymbol{p}\ \{1, 2, 0\}$, $\boldsymbol{q}\ \{4, 0, 2\}$, которые не коллинеарны друг другу. Вектор $\boldsymbol{n}$ перпендикулярен этим векторам, так как $-2 \cdot 1 + 1 \cdot 2 + 4 \cdot 0 = 0$ и $-2 \cdot 4 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 2 = 0$. Отсюда следует, что вектор $\boldsymbol{n}$ перпендикулярен плоскости. Задача решена правильно.

3. Нормальное уравнение плоскости.

Задача 2. Написать уравнение плоскости, заданной в прямоугольной декартовой системе координат единичным нормальным вектором $\boldsymbol{n}_0\{\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3\}$ и расстоянием ρ от начала координат до плоскости.

Решение. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из начала координат на плоскость (см. рис. 55,*а*), а $\overline{OH}$ — радиус-вектор этой точки. Так как $\overline{OH} = \rho\boldsymbol{n}_0$, то

$$\overline{OH}\ \{\rho\cos\alpha_1,\ \rho\cos\alpha_2,\ \rho\cos\alpha_3\}.$$

Таким образом, задача сводится к предыдущей: написать уравнение плоскости, проходящей через точку $H(\rho\cos\alpha_1, \rho\cos\alpha_2, \rho\cos\alpha_3)$ и перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{n}_0\{\cos\alpha_1, \cos\alpha_2, \cos\alpha_3\}$. Подставив координаты вектора $\boldsymbol{n}$ и точки H в (1), получаем:

$$\cos\alpha_1(x - \rho\cos\alpha_1) + \cos\alpha_2(y - \rho\cos\alpha_2) + \cos\alpha_3(z - \rho\cos\alpha_3) = 0.$$

Так как $\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3 = 1$ (см. формулу (7), § 5), то это соотношение сводится к следующему:

$$x\cos\alpha_1 + y\cos\alpha_2 + z\cos\alpha_3 - \rho = 0. \tag{3}$$

Это уравнение называется **нормальным уравнением** плоскости. Оно существенно отличается от других уравнений тем, что все коэффициенты имеют геометрический смысл: коэффициенты при x, y и z есть направляющие косинусы любого вектора, перпендикулярного к плоскости, а свободный член — расстояние от начала координат до плоскости, взятое со знаком минус.

Задача 3. Дано уравнение плоскости в прямоугольной декартовой системе

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{4}$$

Написать нормальное уравнение этой плоскости.

Решение. Пусть (3) — нормальное уравнение плоскости (4). Согласно теореме [10.3]

$$A = \lambda\cos\alpha_1,\ B = \lambda\cos\alpha_2,\ C = \lambda\cos\alpha_3,\ D = \lambda\rho. \tag{5}$$

Отсюда получаем:

$$A^2 + B^2 + C^2 = \lambda^2,\ \lambda = \pm\sqrt{A^2+B^2=C^2} + \frac{1}{\varepsilon}\sqrt{A^2+B^2+C^2},$$

где $\varepsilon = \pm 1$. Если $D > 0$, то из $D = -\lambda\rho$ и $\rho > 0$ следует, что $\lambda < 0$. Следовательно, $\varepsilon = -1$. Если $D < 0$, то $\lambda > 0$, поэтому $\varepsilon = +1$. Если же $D = 0$, то ε можно выбрать произвольно. Подставив значения λ в соотношения (5), получаем:

$$\cos\alpha_1 = \frac{\varepsilon A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \cos\alpha_2 = \frac{\varepsilon B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

$$\cos\alpha_3 = \frac{\varepsilon C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},\quad \rho = \frac{-\varepsilon D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Из уравнения (3), учитывая эти соотношения, получаем:

$$\frac{\varepsilon A}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}x+\frac{\varepsilon B}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}y+\frac{\varepsilon C}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}z+\frac{\varepsilon D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=0. \quad (6)$$

Мы пришли к следующей теореме.

Теорема [12.1]. *Если плоскость в прямоугольной декартовой системе координат дана уравнением* (4), *то нормальное уравнение этой плоскости имеет вид* (6), *где* $\varepsilon = -1$, *если* $D > 0$; $\varepsilon = +1$, *если* $D < 0$ *и* $\varepsilon = \pm 1$, *если* $D = 0$.

Пример 2. Написать нормальное уравнение плоскости, заданной в прямоугольной декартовой системе координат уравнением:

$$3x + 4y - \sqrt{11}\,z - 5 = 0.$$

Решение. Так как $D = -5$, то $\varepsilon = +1$, поэтому из (6) получаем:

$$\frac{3}{6}x + \frac{4}{6}y - \frac{\sqrt{11}}{6}z - \frac{5}{6} = 0.$$

4. Нормальный вектор плоскости, заданной общим уравнением. Имеет место следующая теорема, которая часто используется при решении разнообразных задач, связанных с плоскостью.

Теорема [12.2]. *Если плоскость задана в прямоугольной декартовой системе уравнением* $Ax + By + Cz + D = 0$, *то вектор* $\boldsymbol{n}\,\{A, B, C\}$ *перпендикулярен к плоскости.*

Доказательство. Возьмем произвольный ненулевой вектор $\boldsymbol{p}\,\{\alpha, \beta, \gamma\}$, параллельный данной плоскости, и докажем, что $\boldsymbol{n}$ и $\boldsymbol{p}$ взаимно перпендикулярны. В самом деле, так как $\boldsymbol{p}$ параллелен плоскости, то согласно теореме [10.2] $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$. Но система координат прямоугольная декартова, поэтому согласно теореме [4.6] это соотношение в векторном виде можно записать так: $\boldsymbol{p}\boldsymbol{n} = 0$, т. е. $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{n}$ взаимно перпендикулярны. Итак, мы доказали, что вектор $\boldsymbol{n}$ перпендикулярен к *произвольному* вектору, параллельному плоскости. Отсюда следует, что вектор $\boldsymbol{n}\,\{A, B, C\}$ перпендикулярен к плоскости.

5. Вычисление расстояния от точки до плоскости.

Задача 4. В прямоугольной декартовой системе координат дана плоскость своим общим уравнением (4). Вычислить расстояние d от точки $M_0\,(x_0, y_0, z_0)$ до этой плоскости.

Решение. Пусть H — основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на плоскость (рис. 56). Согласно предыдущей теореме вектор $\boldsymbol{n}\,\{A, B, C\}$ перпендикулярен плоскости, следовательно, коллинеарен вектору $\overline{HM_0}$. По определению скалярного произведения имеем:

$$\overline{HM_0}\boldsymbol{n} = |\overline{HM_0}|\cdot|\boldsymbol{n}|\cos(\widehat{\overline{HM_0}, \boldsymbol{n}}) = d\,|\boldsymbol{n}|\cdot(\pm 1).$$

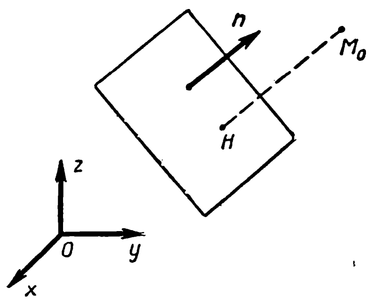


Рис. 56

Таким образом,

$$d = \frac{|\overline{HM_0}\, \boldsymbol{n}|}{|\boldsymbol{n}|}. \qquad (7)$$

Вычислим скалярное произведение $\overline{HM_0}\boldsymbol{n}$. Пусть x_1, y_1, z_1 — координаты точки H; тогда $\overline{HM_0}\,\{x_0 - x_1,\ y_0 - y_1,\ z_0 - z_1\}$, $\overline{HM_0}\boldsymbol{n} = (x_0 - x_1) A + (y_0 - y_1) B + (z_0 - z_1) C = Ax_0 + By_0 + Cz_0 - (Ax_1 + By_1 + Cz_1)$. Так как точка H лежит в данной плоскости, то $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0$. Таким образом, $\overline{HM_0}\boldsymbol{n} = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D$. Учитывая, что $|\boldsymbol{n}| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$, окончательно, получаем:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \qquad (8)$$

Мы пришли к следующей теореме.

Теорема [12.3]. *Если плоскость в прямоугольной декартовой системе координат дана уравнением* (4), *то расстояние от точки* M_0 (x_0, y_0, z_0) *до этой плоскости вычисляется по формуле* (8).

Формула (8) принимает простой вид, если плоскость дана нормальным уравнением (3). В этом случае

$$A = \cos\alpha_1,\ B = \cos\alpha_2,\ C = \cos\alpha_3,\ D = -\rho,$$

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} = \sqrt{\cos^2\alpha_1 + \cos^2\alpha_2 + \cos^2\alpha_3} = 1.$$

Поэтому формула (8) принимает вид:

$$d = |x_0 \cos\alpha_1 + y_0 \cos\alpha_2 + z_0 \cos\alpha_3 - \rho|. \qquad (9)$$

Теорема [12.4]. *Если плоскость в прямоугольной декартовой системе координат дана нормальным уравнением* (3), *то расстояние от точки* $M_0(x_0, y_0, z_0)$ *до прямой* (3) *равно модулю левой части уравнения плоскости, куда вместо переменных* x, y *и* z *подставлены координаты точки* M_0.

Пример 3. В прямоугольной декартовой системе координат дана точка $M_0(3, 4, -9)$ и плоскость $x + 2y - 2z + 13 = 0$. Вычислить расстояние от точки M_0 до данной плоскости.

Решение. По формуле (8) находим:

$$d = \frac{|1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 - 2 \cdot (-9) + 13|}{\sqrt{1 + 4 + 4}} = \frac{42}{3} = 14.$$

П р и м е р 4. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки $M_1(-1, 0, 1)$ и $M_2(1, 1, 2)$ и отстоящей от начала координат на расстоянии $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

Р е ш е н и е. Пусть $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ — искомое уравнение. Так как плоскость не проходит через начало координат, то $D' \neq 0$; поэтому, разделив уравнение на D' и вводя обозначения

$$A = \frac{A'}{D'}; \quad B = \frac{B'}{D'}; \quad C = \frac{C'}{D'},$$

получаем:

$$Ax + By + Cz + 1 = 0.$$

Искомые коэффициенты A, B и C должны удовлетворять следующим условиям:

$$A \cdot (-1) + C \cdot 1 + 1 = 0$$

(точка M_1 принадлежит искомой плоскости).

$$A \cdot 1 + B \cdot 1 + C \cdot 2 + 1 = 0$$

(точка M_2 принадлежит искомой плоскости),

$\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ (искомая плоскость отстоит от начала координат на расстоянии $\left.\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$.

Из первых двух уравнений получаем:

$C = A - 1$, $B = -A - 2C - 1 = -A - 2 \cdot (A - 1) - 1 = -3A + 1$.

Подставив эти значения в последнее уравнение, получим:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{A^2 + (1 - 3A)^2 + (A - 1)^2} = \sqrt{11A^2 - 8A + 2},$$

или $44A^2 - 32A + 5 = 0$. Это уравнение имеет два решения:

$$A = \frac{16 \pm 6}{44}; \quad A_1 = \frac{5}{22}; \quad A_2 = \frac{1}{2}.$$

Из первых двух соотношений получаем:

$$C_1 = -\frac{17}{22}; \quad C_2 = -\frac{1}{2}; \quad B_1 = \frac{7}{22}; \quad B_2 = -\frac{1}{2}.$$

Таким образом, существуют две плоскости, удовлетворяющие условиям задачи:

$$\frac{5}{22}x + \frac{7}{22}y - \frac{17}{22}z + 1 = 0, \text{ или } 5x + 7y - 17z + 22 = 0, \quad (10)$$

и

$$\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y - \frac{1}{2}z + 1 = 0, \text{ или } x - y - z + 2 = 0. \quad (11)$$

Проверка. Плоскости (10) и (11) проходят через точки M_1 и M_2, в чем легко убедиться непосредственной подстановкой. Для проверки второго условия вычислим расстояния от плоскостей (10), (11) до начала координат:

$$d_1 = \frac{22}{\sqrt{25+49+289}} = \frac{2}{\sqrt{3}}; \quad d_2 = \frac{2}{\sqrt{1+1+1}} = \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Выведем формулу для вычисления расстояния между двумя параллельными плоскостями.

Задача 5. Даны две параллельные плоскости в прямоугольной декартовой системе координат:

$$Ax + By + Cz + D_1 = 0, \ Ax + By + Cz + D_2 = 0,$$

где $D_1 \neq D_2$. Вычислить расстояние между ними.

Решение. Прежде всего отметим, что данные плоскости действительно параллельны. В самом деле, согласно теореме [12.2] обе плоскости перпендикулярны к одному и тому же вектору $\boldsymbol{n}\{A, B, C\}$ и не совпадают. Идея решения задачи заключается в следующем: возьмем некоторую точку на одной из плоскостей и вычислим расстояние от этой точки до другой плоскости.

Очевидно, в уравнениях плоскостей хотя бы один из коэффициентов A, B и C отличен от нуля. Если, например, $A \neq 0$, то точка $\left(-\frac{D_1}{A}, 0, 0\right)$ лежит в первой плоскости. Вычисляя расстояние от этой точки до второй плоскости, получаем:

$$d = \frac{|-D_1 + D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}. \qquad (12)$$

Если $A = 0$, а $B \neq 0$ или $C \neq 0$ то, поступая аналогично, получаем тот же результат.

Пример 5. Вычислить расстояние между параллельными плоскостями:

$$2x - 3y + \sqrt{3}\,z - 4 = 0 \text{ и } 2\sqrt{3}\,x - 3\sqrt{3}\,y + 3z - 11 = 0.$$

Решение. Запишем данные уравнения следующим образом:

$$2x - 3y + \sqrt{3}\,z - 4 = 0, \ 2x - 3y + \sqrt{3}\,z - \frac{11}{\sqrt{3}} = 0.$$

Согласно формуле (12) получаем:

$$d = \frac{\left|4 - \frac{11}{\sqrt{3}}\right|}{\sqrt{4+9+3}} = \frac{11 - 4\sqrt{3}}{4\sqrt{3}}.$$

6. Вычисление угла между двумя плоскостями.

Задача 6. В прямоугольной декартовой системе координат даны две плоскости своими уравнениями:

$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0,$ (13)

$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$ (14)

Вычислить угол между ними.

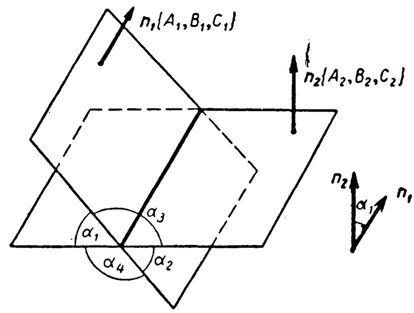


Рис. 57

Решение. Если плоскости пересекаются, то они образуют четыре двугранных угла; меры этих углов обозначим через α_1 α_2, α_3 и α_4 (рис. 57). Как известно, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = \alpha_4$ и $\alpha_1 + \alpha_3 = 180°$, поэтому достаточно вычислить один из этих углов; этот угол определяет все остальные углы. Согласно теореме [12.2] векторы $\boldsymbol{n}_1\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\boldsymbol{n}_2\{A_2, B_2, C_2\}$ соответственно перпендикулярны к данным плоскостям, поэтому угол между ними равен одному из углов между плоскостями. На рисунке 57 угол между векторами $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ равен α_1. Если $\varphi = (\widehat{\boldsymbol{n}_1, \boldsymbol{n}_2})$, то, как известно,

$$\cos\varphi = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (15)$$

Мы пришли к теореме.

Теорема [12.5]. *Если две плоскости в прямоугольной декартовой системе координат даны уравнениями* (13) *и* (14), *то* $\cos\varphi$, *где* φ — *один из углов между плоскостями, определяется формулой* (15).

Частным случаем теоремы [12.5] является

Теорема [12.6]. *Для того чтобы две плоскости, заданные в прямоугольной декартовой системе координат, были взаимно перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы*

$$A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \qquad (16)$$

Пример 6. Определить углы между плоскостями, заданными в прямоугольной декартовой системе координат уравнениями:

$$\sqrt{3}x + y - 3 = 0,$$
$$2x + 2\sqrt{3}y - 2\sqrt{2}z + 15 = 0.$$

Решение. По формуле (15) находим:

$$\cos\varphi = \frac{2\sqrt{3} + 2\sqrt{3}}{\sqrt{3+1}\sqrt{4+12+8}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Отсюда следует, что $\varphi = 45°$, поэтому плоскости, пересекаясь, составляют углы: $\alpha_1 = \alpha_2 = 45°$, $\alpha_3 = \alpha_4 = 135°$.

Пример 7. Даны пары плоскостей в прямоугольной декартовой системе:

а) $x - 3y + z = 0,\ x + y + 1 = 0$;
б) $x + 4y - 5z = 0,\ x + y + z - 3 = 0$;
в) $x - 4y - z + 1 = 0,\ 2x + 2z - 15 = 0$.

Выяснить, какие из этих пар плоскостей взаимно перпендикулярны.

Решение. а) Плоскости не перпендикулярны друг другу, так как условие (16) не выполняется:

$$1 \cdot 1 + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 0 = -2 \neq 0.$$

б) Плоскости взаимно перпендикулярны, так как

$$1 \cdot 1 + 4 \cdot 1 - 5 \cdot 1 = 0.$$

Точно также можно убедиться в том, что и в случае в) плоскости взаимно перпендикулярны.

Задачи и упражнения[1]

160. Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную к векторам:

а) $\{-1, 0, 4\}$; б) $\{3, 1, -2\}$; в) $\{2, 1, 0\}$; г) $\{3, 5, 1\}$.

161. Через точку $M_0(-3, 1, 5)$ провести плоскость, перпендикулярную к векторам

а) $\{1, 3, -4\}$; б) $\{2, 1, 7\}$; в) $\{2, -3, 1\}$; г) $\{3, 0, -1\}$.

162. Через середину отрезка AB, где $A\ (3, 1, -2)$ и $B\ (5, -3, 4)$, провести плоскость, перпендикулярную к отрезку AB.

163. Найти нормальные векторы плоскостей:
а) $3x - y + z - 6 = 0$;
б) $x + y - z + 1 = 0$;
в) $x - 3z = 0$.

164. Среди пар плоскостей:

а) $2x - y + 3z - 6 = 0,\quad x + 2y + 5 = 0$;
б) $x - y - z - 3 = 0,\quad x + y + z - 2 = 0$;
в) $2x - y + z - 6 = 0,\quad x + y - z - 1 = 0$;
г) $3x + 5y - 6z - 1 = 0,\quad x + y + z - 2 = 0$

указать взаимно перпендикулярные плоскости.

---

[1] Во всех задачах этого параграфа предполагается, что система координат прямоугольная декартова.

165. В пучке, определяемом плоскостями

$$7x - 3y + 3z - 15 = 0 \text{ и } x + 12y - 6z + 6 = 0,$$

найти две взаимно перпендикулярные плоскости, одна из которых проходит через точку $M(-1, 0, 3)$.

166. В прямоугольной декартовой системе координат даны уравнения граней трехгранного угла:

$$2x - 3y + z - 16 = 0,\ x + y - z + 1 = 0,\ x - 2y + 2 = 0.$$

Написать уравнения трех плоскостей, каждая из которых проходит через некоторое ребро и перпендикулярна к противолежащей грани.

167. Через точки $M(-3, 1, 0)$ и $N(2, 1, -1)$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $2x - 5y + 2z - 6 = 0$.

168. Через начало координат провести плоскость, перпендикулярную к плоскостям

$$x - y + 3z - 5 = 0 \quad \text{и} \quad x + y - 5z + 6 = 0.$$

169. Через точку $M(-6, 0, 3)$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскостям $3x + z + 6 = 0$ и $x + 5y - z - 1 = 0$.

170. Найти уравнения трех плоскостей, проходящих через точки $(1, -2, 4)$ и $(3, -4, 5)$, перпендикулярных соответственно к координатным плоскостям.

171. Привести к нормальному виду уравнения плоскостей:

а) $x + 2y - 2z + 9 = 0$;
б) $\frac{3}{7}x - \frac{6}{7}y + \frac{2}{7}z + 6 = 0$;
в) $2x + 3 = 0$;
г) $x - 3y + z = 0$;
д) $6x - 5y - 7 = 0$;
е) $x + 3z - 1 = 0$.

172. Вычислить расстояние от начала координат до плоскости в каждом из следующих случаев:

а) $x - 3y + 5z - 8 = 0$; б) $15x + 10y - 6z + 18 = 0$.

173. Найти расстояние от точки до плоскости в каждом из следующих случаев:

а) $M(1, 0, 5)$, $2x + 7y + 3z + 6 = 0$;
б) $M(-1, 2, 6)$, $x + y + z + 1 = 0$;
в) $M(3, 1, 8)$, $x + 2y - 3 = 0$.

174. Вычислить расстояние между следующими парами параллельных плоскостей:

а) $2x - 2y + z + 10 = 0$, $2x - 2y + z - 20 = 0$;
б) $6x - 2y + 3z - 49 = 0$, $6x - 2y + 3z + 28 = 0$;
в) $x + y - 5z + 54 = 0$, $x + y - 5z + 27 = 0$;
г) $x - y + z - 3 = 0$, $x - y + z - 18 = 0$.

175. На оси Ox найти точку, равноудаленную от точки M (4, 1, 1) и от плоскости $x - 2y + 2z - 12 = 0$.

176. На оси Oy найти точку, равноудаленную от плоскостей:

$$3x - 6 = 0, \quad 2x + y - 2z + 6 = 0.$$

177. Составить уравнение геометрического места точек, отстоящих от плоскости $3x-2y+6z-35 = 0$ на расстоянии, равном пяти.

178. Составить уравнение геометрического места точек, отстоящих от плоскости $3x + 16 = 0$ на расстоянии, равном трем.

179. Составить уравнение геометрического места точек, равноудаленных от двух параллельных плоскостей в каждом из следующих случаев:

а) $2x - y + 3z - 14 = 0, \quad 2x - y + 3z + 28 = 0;$
б) $x - 4y + 5z + 3 = 0, \quad x - 4y + 5z - 15 = 0;$
в) $x + y - z + 8 = 0, \quad x + y - z + 16 = 0.$

180. Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 (—1, 0, 1) и M_2 (1, 1, 2) и отстоящей от начала координат на расстоянии $\frac{2}{\sqrt{3}}$.

181. Написать уравнения плоскостей, делящих пополам двугранные углы между плоскостями:

а) $7x + 3y - z - 4 = 0, \quad 5x - 5y + 3z + 2 = 0;$
б) $x + 7z - 8 = 0, \quad 3x - 5z + 4y - 10 = 0.$

182. Найти уравнения плоскостей, параллельных плоскости $6x + 3y + 2z = 0$ и отстоящих от точки (0, —1, 2) на расстоянии 3.

183. Определить двугранные углы между следующими парами плоскостей:

а) $16x + 8y + 2z + 1 = 0, \quad 2x - 2y + z + 5 = 0;$
б) $2x + 5y + 4z + 15 = 0, \quad 6x - 3z + 2 = 0.$

§ 13. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ТРЕМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

1. Определение отношения, в котором плоскость делит данный отрезок. Пусть π — плоскость, а M_1 и M_2 — две различные точки, расположенные в пространстве так, что прямая M_1M_2 не параллельна плоскости π. Будем говорить, что плоскость π делит отрезок M_1M_2 в отношении λ, если $\lambda = \frac{\overline{M_1P}}{\overline{PM_2}}$, где P — точка пересечения прямой M_1M_2 и плоскости π. Поставим следующую задачу.

З а д а ч а 1. В аффинной системе координат дана плоскость π уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (1)$$

и даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и M_2 (x_2, y_2, z_2) своими координатами. Определить отношение λ, в котором плоскость π делит отрезок M_1M_2.

Решение. Пусть P — точка пересечения прямой M_1M_2 и плоскости π. Очевидно, λ есть отношение, в котором точка P делит отрезок M_1M_2. Если P имеет координаты x_0, y_0, z_0, то

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda}, \quad z_0 = \frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda}.$$

Точка P принадлежит плоскости (1), поэтому

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0 \text{ или}$$

$$A\frac{x_1 + \lambda x_2}{1+\lambda} + B\frac{y_1 + \lambda y_2}{1+\lambda} + C\frac{z_1 + \lambda z_2}{1+\lambda} + D = 0.$$

После элементарных преобразований получаем:

$$(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) + \lambda(Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D) = 0. \quad (2)$$

Исследуем полученное соотношение. Возможны следующие случаи:

а) $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$ и
$Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D \neq 0.$

В этом случае, разделив соотношение (2) на $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$, определяем λ:

$$\lambda = -\frac{Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D}{Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D} \neq -1. \quad (3)$$

б) $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D \neq 0.$

В этом случае, очевидно, точки M_1 и M_2 не лежат в плоскости π, но вектор $\overline{M_1M_2}$ параллелен этой плоскости, так как $Ax_1 + By_1 + Cz_1 = Ax_2 + By_2 + Cz_2$ или

$$A(x_2 - x_1) + B(y_2 - y_1) + C(z_2 - z_1) = 0.$$

Поэтому точка P не существует. Заметим, что в данном случае соотношение (2) принимает вид: $1 + \lambda = 0$ или $\lambda = -1$. Известно, что на прямой M_1M_2 не существует точки, которая делит отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = -1$. Таким образом, мы пришли к тому же результату: в случае б) точки P не существует.

в) $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0.$

В данном случае точки M_1 и M_2 лежат в плоскости π, поэтому поставленная задача теряет смысл.

г) $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq 0$, $Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D = 0.$

Для данного случая точкой пересечения прямой M_1M_2 с плоскостью π служит M_2, для которой не существует числа λ. Соотношение (2) в данном случае принимает вид: $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D + \lambda \cdot 0 = 0$.

В результате этого исследования мы пришли к следующей теореме.

Теорема [13.1]. *Если в аффинной системе координат даны плоскость* (1) *и две точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2, z_2)$, *расположенные так, что* M_2 *не лежит в данной плоскости и прямая* M_1M_2 *не параллельна ей, то отношение* λ, *в котором данная плоскость делит отрезок* M_1M_2, *определяется по формуле* (3).

Пример 1. Найти отношение, в котором плоскость $3x - 4y + z + 1 = 0$ делит отрезок, соединяющий точки $M_1(1, 0, -2)$ и $M_2(2, -3, 1)$.

Решение. Подставив значения координат точек в левую часть уравнения плоскости, получаем:

$$\delta_1 = 3 \cdot 1 - 4 \cdot 0 + 1 \cdot (-2) + 1 = 2,$$
$$\delta_2 = 3 \cdot 2 - 4 \cdot (-3) + 1 \cdot 1 + 1 = 20.$$

Имеет место случай а), поэтому по формуле (3) получаем:

$$\lambda_1 = -\frac{\delta_1}{\delta_2} = -\frac{1}{10}.$$

Проверка. Точка P, делящая отрезок M_1M_2 в отношении $\lambda = -\frac{1}{10}$, имеет координаты

$$P\left(\frac{8}{9}, \frac{3}{9}, -\frac{21}{9}\right).$$

Непосредственной проверкой убеждаемся в том, что точка P лежит в данной плоскости.

2. Условие расположения двух точек по разные стороны от плоскости. Из приведенного выше исследования вытекает одно важное следствие. Пусть точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ не лежат в плоскости π. Тогда $\delta_1 = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D \neq 0$ и $\delta_2 = Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D \neq 0$.

Имеет место следующая теорема.

Теорема [13.2]. *Для того чтобы точки* $M_1(x_1, y_1, z_1)$ *и* $M_2(x_2, y_2, z_2)$ *лежали по разные стороны от плоскости* π, *заданной уравнением* (1), *необходимо и достаточно, чтобы* $\delta_1 = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ *и* $\delta_2 = Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$ *имели разные знаки.*

Доказательство. Пусть M_1 и M_2 лежат по разные стороны от π. Тогда отрезок M_1M_2 пересекает плоскость π в точке P, лежащей между M_1 и M_2, поэтому $\lambda > 0$. Из (3) вытекает, что $\lambda = -\frac{\delta_1}{\delta_2}$, поэтому δ_1 и δ_2 имеют разные знаки.

Обратно, пусть δ_1 и δ_2 имеют разные знаки. Из предыдущего исследования вытекает, что имеет место случай а) и $\lambda = -\frac{\delta_1}{\delta_2} > 0$, т. е. точка пересечения плоскости π и отрезка M_1M_2 лежит между M_1 и M_2, поэтому точки M_1, M_2 лежат по разные стороны от плоскости π.

Из доказанной теоремы немедленно следует

Теорема [13.3]. *Для того чтобы точки M_1 (x_1, y_1, z_1) и M_2 (x_2, y_2, z_2) лежали по одну сторону от плоскости* (1), *необходимо и достаточно, чтобы* $\delta_1 = Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D$ и $\delta_2 = Ax_2 + By_2 + Cz_2 + D$ *имели один и тот же знак.*

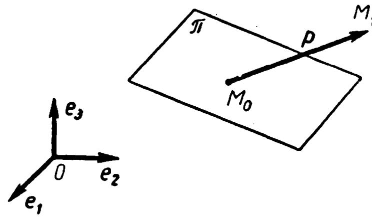


Рис. 58

Пример 2. Даны точки $M_1(5, 0, 0)$, $M_2(-1, 2, -3)$, $M_3(2, 1, 1)$, $M_4(0, 0, -1)$ и плоскость $x - 2y + 4z - 1 = 0$. Среди указанных точек выбрать те точки, которые лежат по ту же сторону от плоскости, что и начало координат.

Решение. Для начала координат $\delta_0 = 1 \cdot 0 - 2 \cdot 0 + 4 \cdot 0 - 1 = -1 < 0$. Вычислим числа δ для всех данных точек: $\delta_1 = 4$, $\delta_2 = -18$, $\delta_3 = 3$, $\delta_4 = -5$. Таким образом, искомыми точками являются M_2 и M_4.

3. Линейные неравенства, характеризующие области, ограниченные плоскостями. Для дальнейшего изложения необходимо доказать следующую теорему.

Теорема [13.4]. *Если в аффинной системе координат дана плоскость π уравнением* (1), *то вектор p $\{A, B, C\}$ не параллелен плоскости и если его приложить к некоторой точке плоскости, то координаты x_1, y_1, z_1 его конца удовлетворяют условию*: $Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D > 0$.

Доказательство. Из теоремы [10.2] непосредственно следует, что вектор p не параллелен плоскости π, так как $AA + BB + CC \neq 0$. Для доказательства второй части теоремы приложим вектор p к точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ плоскости (рис. 58) и обозначим через $M_1(x_1, y_1, z_1)$ координаты его конца. В этом случае $p = \overline{M_0M_1}$; $A = x_1 - x_0$, $B = y_1 - y_0$, $C = z_1 - z_0$ и $x_0 = x_1 - A$, $y_0 = y_1 - B$, $z_0 = z_1 - C$. Так как точка M_0 лежит в плоскости π, то

$$A(x_1 - A) + B(y_1 - B) + C(z_1 - C) + D = 0$$

или

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = A^2 + B^2 + C^2 > 0.$$

Теорема доказана.

Проверим утверждение теоремы для плоскости

$$4x - 3y + z - 25 = 0.$$

Возьмем вектор p $\{4, -3, 1\}$ и приложим к точке $M_1(1, 1, 24)$. Конец вектора, очевидно, имеет координаты $M_1(5, -2, 25)$. Для этой точки $S_1 = 4 \cdot 5 - 3 \cdot (-2) + 1 \cdot 25 - 25 > 0$.

Поставим следующую задачу.

Задача 2. В аффинной системе координат дана плоскость $Ax+By+Cz+D=0$. Определить геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$Ax+By+Cz+D>0. \tag{4}$$

Решение. Возьмем точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ так, чтобы $Ax_1+By_1+Cz_1+D>0$. Из теоремы [13.4] следует, что такая точка всегда существует.

Из теоремы [13.3] следует, что всякая точка $M(x, y, z)$, для которой $\delta=Ax+By+Cz+D>0$, лежит по ту же сторону от данной плоскости, что и точка M_1. Обратно, если для точки $M(x, y, z)$ имеем неравенство (4), то она лежит по ту же сторону от данной плоскости, что и точка M_1. Таким образом, мы приходим к выводу:

Геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют неравенству (4), *есть то из полупространств, определяемых плоскостью* (1), *в котором лежит конец вектора* $\boldsymbol{p}\{A, B, C\}$, *если начало приложено к некоторой точке плоскости* (1). Отсюда следует, что геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют условию

$$Ax+By+Cz+D<0,$$

есть другое полупространство.

Если $D\neq 0$, то плоскость (1) не проходит через начало координат, поэтому для всех точек полупространства, в котором лежит начало координат, знак выражения $\delta=Ax+By+Cz+D$ совпадает со знаком числа D.

Доказанные выше теоремы могут быть использованы для аналитической характеристики некоторых областей пространства, ограниченных плоскостями. Решим, например, следующую задачу.

Задача 3. Даны две пересекающиеся плоскости

$$A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \tag{π_1}$$
$$A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \tag{π_2}$$

и точка $M_1(x_1, y_1; z_1)$, не лежащая на них. Пусть Ω — внутренняя область того двугранного угла, образованного данными плоскостями, которой принадлежит точка M_1. Записать линейные неравенства, характеризующие область Ω.

Решение. Пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка области Ω. Это означает, что: а) M и M_1 лежат по одну и ту же сторону от плоскости π_1; б) M и M_1 лежат по одну и ту же сторону от плоскости π_2.

Обратно, если для какой-то точки M пространства выполнены условия а) и б), то эта точка принадлежит области Ω. Пусть

$$\delta_1 = A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1 \text{ и } \delta_2 = A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2.$$

Мы приходим к выводу, что $M(x, y, z)$ принадлежит области Ω тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два условия:

а) $A_1x + B_1y + C_1z + D_1$ и δ_1 имеют один и тот же знак.

б) $A_2x + B_2y + C_2z + D_2$ и δ_2 имеют один и тот же знак.

Эти условия, очевидно, эквивалентны следующим:

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_1x_1 + B_1y_1 + C_1z_1 + D_1) > 0$$

и

$$(A_2x + B_2y + C_2z + D_2)(A_2x_1 + B_2y_1 + C_2z_1 + D_2) > 0.$$

Пример 3. Пусть Ω — внутренняя область того двугранного угла, образованного плоскостями $3x - y + 4z + 1 = 0$ и $x + y + z - 2 = 0$, которой принадлежит начало координат. Записать линейные неравенства, характеризующие область Ω.

Решение. В данном случае $\delta_1 = 1$, $\delta_2 = -2$, поэтому область Ω характеризуется неравенствами:

$$3x - y + 4z + 1 > 0, \qquad x + y + z - 2 < 0.$$

Задача 4. Даны две параллельные плоскости

$$Ax + By + Cz + D_1 = 0, \qquad Ax + By + Cz + D_2 = 0,$$

где $D_1 \neq D_2$.

Записать линейные неравенства, характеризующие область Ω, расположенную между ними, и две другие внешние области: Ω_1 и Ω_2.

Решение. Пусть π_1 и π_2 — данные параллельные плоскости, Ω — область, расположенная между ними, Ω_1 — внешняя область, примыкающая к плоскости π_1, а Ω_2 — внешняя область, примыкающая к плоскости π_2 (рис. 59). Возьмем на данных плоскостях соответственно точки M_1 и M_2 и приложим к этим точкам вектор $\boldsymbol{p}\{A, B, C\}$. Пусть $\overline{M_1M_1'} = \boldsymbol{p}$ и $\overline{M_2M_2'} = \boldsymbol{p}$. Возможны два случая: а) точка M_1' принадлежит области Ω_1 и, следовательно, M_2' не принадлежит Ω_2 (рис. 59,*а*); б) точка M_1' не принадлежит Ω_1 и, следовательно, M_2' принадлежит Ω_2 (рис. 59,*б*). Согласно теореме [13.4] в случае а) области Ω, Ω_1 и Ω_2 характеризуются неравенствами:

$$\begin{aligned}
(\Omega)&: Ax + By + Cz + D_1 < 0, & Ax + By + Cz + D_2 > 0;\\
(\Omega_1)&: Ax + By + Cz + D_1 > 0, & Ax + By + Cz + D_2 > 0;\\
(\Omega_2)&: Ax + By + Cz + D_1 < 0, & Ax + By + Cz + D_2 < 0.
\end{aligned}$$

В случае б) те же области характеризуются неравенствами:

$$
\begin{aligned}
&(\Omega)\ : Ax + By + Cz + D_1 > 0, &\quad& Ax + By + Cz + D_2 < 0;\\
&(\Omega_1) : Ax + By + Cz + D_1 < 0, && Ax + By + Cz + D_2 < 0;\\
&(\Omega_2) : Ax + By + Cz + D_1 > 0, && Ax + By + Cz + D_2 > 0.
\end{aligned}
$$

Мы приходим к выводу, что в любом из этих случаев для точек области Ω числа $Ax + By + Cz + D_1$ и $Ax + By + Cz + D_2$ имеют разные знаки, поэтому

$$(Ax + By + Cz + D_1)(Ax + By + Cz + D_2) < 0.$$

Для точек каждой из областей Ω_1 и Ω_2 числа

$Ax + By + Cz + D_1$ и $Ax + By + Cz + D_2$ имеют один и тот же знак.

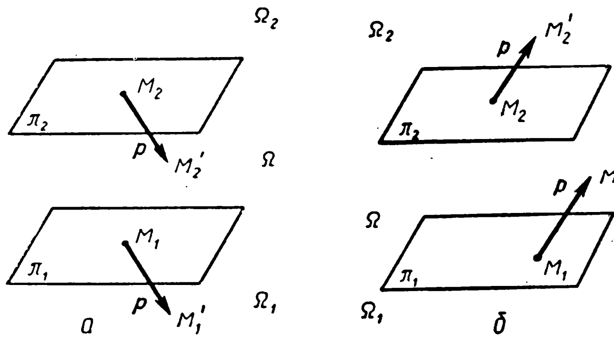


Рис. 59

Пример 4. Даны две параллельные плоскости

$$x - 4y + z - 1 = 0 \quad \text{и} \quad x - 4y + z - 3 = 0.$$

Записать линейные неравенства, характеризующие области, определяемые этими плоскостями.

Решение. Внутренняя область Ω характеризуется неравенством

$$(x - 4y + z - 1)(x - 4y + z - 3) < 0.$$

Две внешние области характеризуются неравенствами:

$$
\begin{aligned}
&(\Omega') : x - 4y + z - 1 > 0 \ \text{и}\ x - 4y + z - 3 > 0;\\
&(\Omega'') : x - 4y + z - 1 < 0 \ \text{и}\ x - 4y + z - 3 < 0.
\end{aligned}
$$

Для более точного определения внешних областей заметим, что например, для точки M_1 (1, 0, 0), лежащей на первой плоскости левая часть уравнения второй плоскости отрицательна, поэтому Ω'' примыкает к первой плоскости, а Ω' — ко второй.

Используя рассмотренные выше теоремы и задачи, можно записывать «уравнения» различных областей, ограниченных многогранными поверхностями.

П р и м е р 5. Записать при помощи линейных неравенств аналитическое задание внутренней области Ω треугольной призмы $AOBA_1O_1B_1$, изображенной на рисунке 60, если

$$A\ (3,\ 0,\ 0);\ O\ (0,\ 0,\ 0),\ B\ (0,\ 2,\ 0),$$
$$A_1\ (3,\ 0,\ 5),\ O_1\ (0,\ 0,\ 5),$$
$$B_1\ (0,\ 2,\ 5).$$

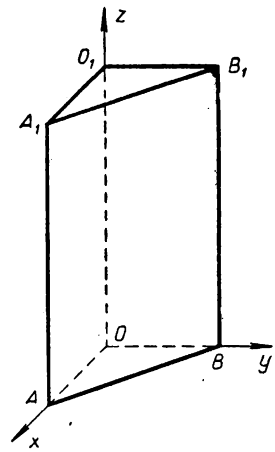


Рис. 60

Р е ш е н и е. Призма ограничена пятью плоскостями:

$$A_1O_1B_1,\ AOB,\ AA_1O_1O,\ BB_1O_1O \text{ и } ABB_1A_1.$$

Запишем уравнения всех этих плоскостей:

$$(A_1O_1B_1) : z = 5, \quad (BB_1O_1O) : x = 0,$$

$$(AOB) : z = 0, \quad (ABB_1A_1) : \frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1.$$

$$(AA_1O_1O) : y = 0,$$

Область Ω расположена между параллельными плоскостями $A_1O_1B_1$ и AOB, поэтому согласно выводам задачи 4 имеем: $z(z-5)<0$. Точка Ω лежит по ту же сторону от плоскости AA_1B_1B, что и начало координат, поэтому $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 1 < 0$. Аналогично получаем еще два неравенства: $y > 0$ и $x > 0$. Итак, область Ω характеризуется неравенствами:

$$z(z-5) < 0, \quad y > 0, \quad x > 0, \quad \frac{x}{3} + \frac{y}{2} - 1 < 0.$$

В заключение докажем следующее предложение.

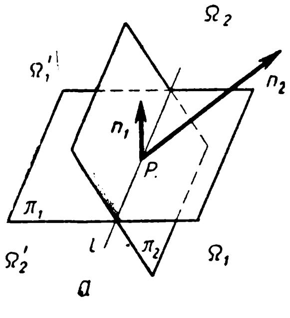
Т е о р е м а [13.5]. *Пусть плоскости π_1 и π_2, заданные в прямоугольной декартовой системе координат уравнениями*

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

пересекаются, но не взаимно перпендикулярны; тогда внутренние области двух вертикальных двугранных острых углов, образованных этими плоскостями, характеризуются неравенством:

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) \times$$
$$\times (A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2) < 0,$$

а внутренние области двух вертикальных двугранных тупых углов — неравенством:



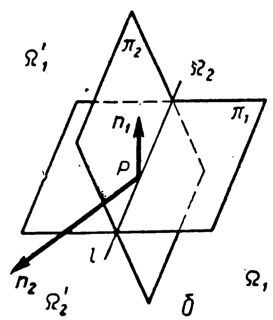


Рис. 61

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2)(A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2) > 0.$$

Доказательство. Плоскости π_1 и π_2, пересекаясь по прямой l, образуют четыре двугранных угла, внутренние области которых обозначим через Ω_1, Ω_1', Ω_2 и Ω_2'. Пусть Ω_1 и Ω_1' — внутренние области острых углов, а Ω_2 и Ω_2' — внутренние области тупых углов. Приложим векторы $\boldsymbol{n}_1\{A_1, B_1, C_1\}$ и $\boldsymbol{n}_2\{A_2, B_2, C_2\}$ к какой-либо точке P прямой l. Очевидно, векторы $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ расположены в плоскости, перпендикулярной к прямой l, а угол, определяемый ими, равен линейному углу одного из двугранных углов, образованных данными плоскостями. Так как $\boldsymbol{n}_1 \perp \pi_1$, а $\boldsymbol{n}_2 \perp \pi_2$, то концы этих векторов будут лежать либо в Ω_2, либо в Ω_2'. Возможны два случая.

1) Концы векторов $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ лежат в одной и той же области, скажем Ω_2 (рис. 61,*а*). В этом случае угол, определяемый векторами $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$, будет острым, поэтому $\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 > 0$. С другой стороны, область Ω_2 характеризуется неравенствами $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 > 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 > 0$, область Ω_2' — неравенствами $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 < 0$ и $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 < 0$. Таким образом, для всех внутренних точек областей Ω_2 и Ω_2' имеем:

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) \times \times (A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2) > 0.$$

Область Ω_1 характеризуется неравенствами

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 < 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 > 0,$$

а область Ω_1' — неравенствами

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 > 0 \text{ и } A_2x + B_2y + C_2z + D_2 < 0.$$

Таким образом, для всех внутренних точек областей Ω_1 и Ω_1' имеем:

$$(A_1x + B_1y + C_1z + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) \times \times (A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2) < 0.$$

2) Конец вектора $\boldsymbol{n}_1$ лежит в области Ω_2, а конец вектора $\boldsymbol{n}_2$ — в Ω'_2 (рис. 61,*б*). В этом случае угол между векторами $\boldsymbol{n}_1$ и $\boldsymbol{n}_2$ будет тупым, поэтому

$$\boldsymbol{n}_1\boldsymbol{n}_2 = A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 < 0.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, получаем тот же результат.

Пример 6. Даны две пересекающиеся плоскости своими уравнениями в прямоугольной декартовой системе координат:

$$2x - 10y + 8z + 3 = 0,\ 2x - y + z + 9 = 0.$$

Выяснить, какие из точек, указанных ниже, принадлежат внутренним областям острых двугранных углов, образованных данными плоскостями:

A (2, 0, — 10), B (2, 0, 1), C (4, 1, 0), D (3, 0, —2), E (3, 1, 1).

Решение. Воспользуемся доказанной выше теоремой. Внутренние области двух вертикальных двугранных острых углов, образованных данными плоскостями, характеризуются неравенством:

$$(2x - 10y + 8z + 3)(2x - y - z + 9) \cdot 22 < 0.$$

Это неравенство, как нетрудно видеть, выполняется для точек A и D.

Задачи и упражнения

184. Даны точки P_1 (1, —1, 4), P_2 (3, 1, 5), P_3 (—6, 0, 1), P_4(3, —4, 2), P_5(—6, 5, 8), P_6(0, 0, 8) и плоскости

а) $2x - y + z + 1 = 0$;
б) $3x - z + 5 = 0$;
в) $x + y - 3z - 2 = 0$;
г) $4x - 8y - 6 = 0$.

Для каждой из этих плоскостей среди данных точек указать те, которые лежат по ту же сторону от плоскости, что и начало координат.

185. Даны плоскость $x - 3y + 2z - 7 = 0$ и пары точек:

а) A_1 (1, 1, 1) и A_2(3, —1, 3); б) B_1 (0, 0, 0) и B_2 (—1, 2, 3);
в) C_1 (1, $-\sqrt{2}$, —1) и C_2 (4, —1,5); г) D_1 (6, 0, 4) и D_2 (1, —3, 1).

Найти отношения, в которых данная плоскость делит указанные выше пары. Указать, какие пары точек лежат по одну сторону от плоскости и какие по разные.

186. Даны вершины треугольника:

$$A_1\ (-1, -3, 4),\ B\ (2, -1, 5) \text{ и } C\ (1, 3, -9).$$

Выяснить, какие из сторон треугольника пересекаются каждой из координатных плоскостей.

187. Даны вершины тетраэдра:

$$A\ (1,\ 0,\ 4),\ B\ (3,\ -1,\ 1),\ C\ (7,\ -1,\ 0),\ D\ (1,\ 1,\ 1).$$

Записать систему линейных неравенств, характеризующих внутреннюю область тетраэдра.

188. Две пересекающиеся плоскости

$$5x - y + 2z - 3 = 0 \text{ и } x + 2y - 5z + 1 = 0$$

делят множество всех точек пространства на четыре области. Составить систему неравенств, характеризующих внутреннюю область того двугранного угла, которому принадлежит точка $M(1,\ 1,\ 3)$.

189. Найти уравнение плоскости, делящей пополам тот угол между плоскостями

$$3x - 6y + 2z + 5 = 0, \qquad 4x - 12y + 3z - 3 = 0,$$

в котором лежит начало координат.

190. Даны две параллельные плоскости π_1 и π_2:

$$2x - y + 5z - 1 = 0, \qquad 2x - y + 5z + 6 = 0,$$

и точки

$$M_1\ (1,\ 6,\ 0),\ M_2\ (1,\ 1,\ 1),\ M_3\ (1,\ 2,\ -4),$$
$$M_4(0,\ 0,\ 0),\ M_5(7,\ 1,\ 3),\ M_6(2,\ 0,\ 1).$$

В какой из трех областей, определяемых параллельными плоскостями π_1 и π_2, расположены данные точки?

191. Охарактеризовать системой неравенств каждую из трех областей, определяемых двумя параллельными плоскостями:

$$5x - 3y + z - 2 = 0 \text{ и } 5x - 3y + z + 8 = 0.$$

192. Даны две пересекающиеся плоскости

$$2x - 5y + 2z + 1 = 0 \quad \text{и} \quad x - y + z - 6 = 0.$$

Выяснить, какие из точек

$$M_1\ (1,\ 1,\ 2),\ M_2\ (1,\ -5,\ 1),\ M_3\ (0,\ 0,\ 0),$$
$$M_4(1,\ 1,\ 0),\ M_5(2,\ -1,\ 2)$$

принадлежат внутренней области острых двугранных углов, образованных данными плоскостями.

193. Определить область, заданную системами неравенств в каждом из следующих случаев:

а) $x > 0,\ y < 0,\ z < 0;\ x - y - 2z - 4 < 0;$
б) $y > 0,\ y - 3 < 0;$
в) $3x + y - 6 < 0,\ x - z - 4 < 0;\ x + 2y + 3 > 0.$

ГЛАВА IV

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

§ 14. ПРЯМАЯ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Понятие уравнения линии. В § 9 было дано понятие уравнения или аналитической характеристики геометрического места точек пространства. Под уравнением геометрического места точек пространства мы понимаем такие аналитические условия, которым удовлетворяют координаты всех точек данного геометрического места и не удовлетворяют координаты точек, не принадлежащих этому геометрическому месту. Там же было указано, что если аналитическая характеристика геометрического места сводится к одному уравнению $F(x, y, z) = 0$, то такое геометрическое место точек называется поверхностью, а данное соотношение — уравнением поверхности.

Введем следующее определение: *геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой аффинной системе координат удовлетворяют уравнениям:*

$$\left.\begin{aligned} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

называется *линией* *или* *кривой*. Здесь предполагается, что $F_1(x, y, z)$ и $F_2(x, y, z)$ — некоторые аналитические выражения и уравнения (1) независимы, т. е. не каждое решение одного из этих уравнений является решением другого. Таким образом, если L — некоторая линия пространства, то соотношения (1) называются уравнениями этой линии, если координаты всех точек линии удовлетворяют обоим уравнениям (1), а координаты любой точки пространства, не принадлежащей линии L, не удовлетворяют хотя бы одному из уравнений (1).

В настоящем параграфе методами аналитической геометрии изучим простейшую линию в пространстве — прямую линию.

2. Прямая и ее уравнения. В курсе элементарной геометрии прямая не определяется, так как она является основным геометрическим объектом. Основные свойства прямой задаются аксиоматически, а остальные — выводятся из них логическим путем. Однако, пользуясь понятием коллинеарности векторов, можно задать геометрическое место всех точек, принадлежащих прямой. В самом деле, если M_0 — произвольная точка прямой l, а p — ненулевой вектор, параллельный прямой, то M принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}$ и p коллинеарны. Другими словами, если G_l — множество всех точек прямой l, то G_l есть геометрическое место точек пространства, удовлетворяющих условию: векторы $\overline{M_0M}$ и p коллинеарны. Это свойство может быть использовано для составления уравнений прямой[1].

3. Различные способы задания прямой в аффинной системе координат. В аналитической геометрии пользуются следующими способами задания прямой.

а) Пусть l — данная прямая, M_0 — ее произвольная точка, а p — ненулевой вектор, параллельный прямой. Положение прямой l в пространстве однозначно определяется, если даны точка M_0 и вектор p (рис. 62, *а*). Точка M_0 называется н а ч а л ь н о й точкой, а вектор p — н а п р а в л я ю щ и м вектором прямой. Заметим, что за начальную точку можно выбрать любую точку прямой, а за направляющий вектор — любой ненулевой вектор, параллельный прямой. Если в пространстве выбрана аффинная система координат, то точка M_0 и вектор p будут иметь координаты: $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $p\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Итак, числа (x_0, y_0, z_0), $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ однозначно определяют положение прямой в пространстве.

б) Прямая l может быть задана двумя различными точками M_1 и M_2, принадлежащими этой прямой (рис. 62, *б*). Если в аффинной системе координат выбранные точки имеют координаты: $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, то шесть чисел (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) полностью определяют положение прямой в пространстве.

в) Положение прямой l в пространстве может быть определено также заданием двух различных плоскостей π_1 и π_2, проходящих через эту прямую. В самом деле, так как плоскости π_1 и π_2 различны, то, пересекаясь, они определяют единственную прямую l (рис. 62,*в*).

Итак, если в пространстве задана аффинная система координат, то прямая может быть задана одним из следующих трех способов:

а) начальной точкой M_0 и направляющим вектором p;

б) двумя различными точками M_1 и M_2;

в) двумя различными плоскостями π_1 и π_2, пересекающимися по прямой l.

Эти способы задания несущественно отличаются друг от друга. Как мы увидим ниже, от одного способа задания прямой легко перейти к любому другому способу.

---

[1] В аналитической геометрии термин «прямая» понимается как совокупность всех точек прямой, а уравнения прямой как уравнения этой совокупности точек.

4. Уравнения прямой, заданной начальной точкой и направляющим вектором.

Задача 1. Написать уравнения прямой, заданной в некоторой аффинной системе координат точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющим вектором $p\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Решение. Выше было отмечено, что точка M пространства принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}$ и p коллинеарны. Если (x, y, z) — координаты точки M, то вектор $\overline{M_0M}$ имеет координаты $\{x - x_0,\ y - y_0,\ z - z_0\}$, поэтому условия коллинеарности векторов $\overline{M_0M}$ и $p\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ согласно теореме [1.8] запишутся следующим образом:

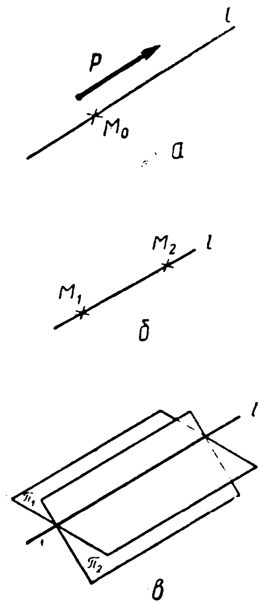


Рис. 62

$$\left.\begin{aligned} &\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix} = 0, \\ &\begin{vmatrix} y - y_0 & z - z_0 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0, \\ &\begin{vmatrix} z - z_0 & x - x_0 \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

Эти соотношения являются уравнениями прямой l. В самом деле, координаты любой точки прямой l удовлетворяют этим соотношениям, а координаты точек, не принадлежащих прямой l, не удовлетворяют им. Очевидно, в соотношениях (2) два уравнения являются независимыми, а третье зависит от них. В каждом конкретном случае одно из соотношений (2) можно отбросить.

Выясним геометрический смысл каждого из соотношений (2). Пусть, например, в первом из этих соотношений α и β одновременно не равны нулю. Тогда это соотношение принимает вид:

$$\beta(x - x_0) - \alpha(y - y_0) = 0.$$

Так как здесь отсутствует переменная z, то этим соотношением определяется плоскость, параллельная оси Oz. Координаты любой точки прямой удовлетворяют полученному уравнению, поэтому эта плоскость будет проходить через нашу прямую. Итак, первое соотношение (если, конечно, α и β одновременно не равны нулю) определяет плоскость, проходящую через прямую l и параллельную оси Oz. Эта плоскость проектирует данную прямую на координатную плоскость Oxy по направлению оси Oz. Точно так же можно показать, что если β и γ одновременно не равны нулю, то вторым соотношением определяется плоскость, проходящая через данную прямую и параллельная оси Ox (если β и γ одновременно не равны нулю), а третьим — плоскость, проходящая через данную прямую и параллельная оси Oy (если α и γ одновременно не равны нулю). Если система координат прямоугольная декартова, то эти плоскости будут плоскостями, проектирующими (в обычном смысле этого слова) данную прямую на координатные плоскости.

Если ни одна из координат вектора $\boldsymbol{p}$ не равна нулю, то условие коллинеарности векторов $\overline{M_0M}$ и $\boldsymbol{p}$ можно записать также следующим образом:

$$\frac{x-x_0}{\alpha}=\frac{y-y_0}{\beta}=\frac{z-z_0}{\gamma}. \qquad (3)$$

В случае $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$ и $\gamma \neq 0$ уравнения (2) и (3) эквивалентны.

Соотношения (3) называются **каноническими уравнениями прямой** в пространстве[1].

Пример 1. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-1, 3, 7)$ и параллельной вектору $\boldsymbol{p}\ \{3, -2, 4\}$.

Решение. Подставив в соотношения (3) значения координат вектора $\boldsymbol{p}$ и начальной точки M_0, получаем:

$$\frac{x+1}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z-7}{4}.$$

Пример 2. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1, -1, 2)$ и параллельной вектору $\boldsymbol{p}\ \{0, 4, -3\}$.

Решение. В данном случае первая координата вектора $\boldsymbol{p}$ равна нулю, поэтому вместо соотношений (3) мы воспользуемся соотношениями (2):

$$\begin{vmatrix} x-1 & y+1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} y+1 & z-2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} z-2 & x-1 \\ -3 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

или, раскрыв определители, будем иметь:

$$x-1=0, \quad 3y+4z-5=0, \quad x-1=0.$$

Мы видим, что первое и третье уравнения совпадают, поэтому, отбросив одно из них, получаем уравнения прямой в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned} 3y+4z-5=0, \\ x-1=0. \end{aligned}\right\}$$

[1] В некоторых руководствах канонические уравнения (3) записываются и в том случае, когда отдельные координаты равны нулю. Например:

$$\frac{x-1}{0}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-5}.$$

С алгебраической точки зрения такая запись не имеет смысла. В данном случае эта запись просто означает, что числители пропорциональны знаменателям, т. е.

$$x-1=0, \quad \frac{y-2}{2}=\frac{z+3}{-5}.$$

Пример 3. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(2, -3, 4)$ и параллельной оси Ox.

Решение. Так как ось Ox параллельна вектору $\boldsymbol{e}_1\{1, 0, 0\}$, то этот вектор является направляющим вектором прямой, поэтому искомые уравнения прямой запишутся так:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} y+3 & z-4 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} z-4 & x-2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\left.\begin{aligned} y+3 &= 0, \\ z-4 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

5. Уравнения прямой, проходящей через две точки.

Задача 2. Написать уравнения прямой l, проходящей через две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, заданные своими координатами в некоторой аффинной системе координат.

Решение. Прямую l можно задать начальной точкой $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и направляющим вектором

$$\overline{M_1M_2}\{x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1\},$$

поэтому мы можем сразу написать уравнения прямой в виде соотношений (2):

$$\left.\begin{aligned} &\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} y-y_1 & z-z_1 \\ y_2-y_1 & z_2-z_1 \end{vmatrix} = 0, \\ &\qquad\qquad \begin{vmatrix} z-z_1 & x-x_1 \\ z_2-z_1 & x_2-x_1 \end{vmatrix} = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Если $x_2-x_1 \neq 0$, $y_2-y_1 \neq 0$, $z_2-z_1 \neq 0$, то соотношения (4) эквивалентны следующим:

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1}. \tag{5}$$

Соотношения (4) или (5) называются *уравнениями прямой, проходящей через две точки.*

Пример 4. Написать уравнения прямой, проходящей через две точки: а) $M_1(3, -4, 5)$ и $M_2(-1, 2, 0)$; б) $M_1(2, -1, -3)$ и $M_2(3, -1, 5)$.

Решение. а) Подставив координаты данных точек в соотношения (5), получаем:

$$\frac{x-3}{-1-3} = \frac{y+4}{2+4} = \frac{z-5}{0-5}, \quad \text{или} \quad \frac{x-3}{-4} = \frac{y+4}{6} = \frac{z-5}{-5}.$$

б) В данном случае вторая координата вектора $\overline{M_1M_2}\{1, 0, 8\}$ равна нулю; поэтому для составления уравнений прямой воспользуемся соотношениями (4):

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} y+1 & z+3 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} z+3 & x-2 \\ 8 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

или

$$\begin{aligned} 8x - z - 19 &= 0, \\ y + 1 &= 0. \end{aligned}$$

6. Прямая как линия пересечения двух плоскостей.

Задача 3. Прямая l является линией пересечения плоскостей π_1 и π_2, которые в некоторой аффинной системе координат заданы уравнениями:

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \tag{6}$$

$$\pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \tag{7}$$

Написать уравнения прямой l.

Решение. Координаты любой точки прямой l, очевидно, удовлетворяют одновременно уравнениям (6) и (7). В самом деле, прямая l лежит в плоскости π_1, поэтому координаты всех ее точек удовлетворяют уравнению (6). Прямая l лежит также в плоскости π_2, поэтому координаты всех ее точек удовлетворяют уравнению (7). Обратно, если координаты некоторой точки пространства удовлетворяют уравнениям (6) и (7), то данная точка лежит на прямой l, так как эта точка лежит одновременно на плоскостях π_1 и π_2.

Мы приходим к выводу, что уравнения (6) и (7) являются уравнениями прямой l. Заметим, что согласно теореме [11.2] в этих уравнениях коэффициенты при x, y и z не пропорциональны.

Таким образом, для того чтобы составить уравнения прямой l, заданной двумя плоскостями, проходящими через эту прямую, достаточно написать систему из двух уравнений, определяющих данные плоскости.

Имеет место обратное предложение.

Теорема [14.1]. *Геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой аффинной системе координат удовлетворяют уравнениям* (6) *и* (7), *где коэффициенты при* x, y, z *не пропорциональны, есть прямая, параллельная вектору*:

$$\mathbf{p}\left\{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right\}. \tag{8}$$

Доказательство. Пусть L — данное геометрическое место точек. Если π_1 — плоскость, заданная уравнением (6), а π_2 — плоскость, заданная уравнением (7), то, поскольку координаты любой точки L удовлетворяют уравнениям (6) и (7), L целиком лежит в плоскостях π_1 и π_2. Значит, каждая точка геометрического места L принадлежит прямой l, по которой пересекаются плоскости π_1 и π_2. С другой стороны, координаты любой точки прямой l удовлетворяют уравнениям (6) и (7), значит, любая точка прямой l принадлежит L. Отсюда следует, что L и прямая l совпадают.

Остается доказать, что вектор p (см. соотношение (8)) является направляющим вектором прямой l. Покажем, что p параллелен плоскости π_1. Как известно из теоремы [10.2], условие параллельности вектора p $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ и плоскости π_1 записывается так: $A_1\alpha + B_1\beta + C_1\gamma = 0$. Для вектора p имеем:

$$A_1\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} + B_1\begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} + C_1\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} =$$

$$= A_1B_1C_2 - A_1B_2C_1 + B_1C_1A_2 - B_1A_1C_2 + C_1A_1B_2 - C_1B_1A_2 = 0.$$

Аналогично можно доказать, что вектор p параллелен плоскости π_2. Вектор p, параллельный плоскостям π_1 и π_2, параллелен линии их пересечения, т. е. прямой l. Теорема доказана.

Система уравнений (6) и (7) называется **общими уравнениями прямой** в пространстве.

Доказанная теорема позволяет написать канонические уравнения прямой, если она задана своими общими уравнениями (6) и (7). Для того чтобы написать канонические уравнения прямой, достаточно найти координаты какой-либо точки M_0 и направляющего вектора p прямой. За начальную точку M_0 можно, очевидно, взять любую точку пространства, координаты которой удовлетворяют уравнениям (6) и (7). Задача по существу сводится к решению системы двух уравнений с тремя неизвестными. Координаты направляющего вектора p непосредственно определяются из теоремы [14.1].

Пример 5. Дана прямая общими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} x - y + 2z - 3 = 0, \\ 2x + y - z + 6 = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Написать канонические уравнения этой прямой.

Решение. Определим координаты начальной точки M_0. Заметим, что в данном случае

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0,$$

поэтому, придав z произвольное значение (например, $z = 0$), определим x_0, y_0 из соотношений (9): $x_0 = -1$, $y_0 = -4$. Итак, точка M_0 имеет координаты $(-1, -4, 0)$.

Координаты направляющего вектора определяются из соотношений (8):

$$p\left\{\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}\right\}$$

или p $\{-1, 5, 3\}$. Таким образом, канонические уравнения прямой, заданной уравнениями (9), имеют вид:

$$\frac{x+1}{-1} = \frac{y+4}{5} = \frac{z}{3}.$$

7. Параметрическое задание прямой. В заключение рассмотрим параметрическое задание прямой в пространстве, т. е. выразим координаты любой точки прямой через произвольный параметр.

Задача 4. Написать параметрические уравнения прямой, заданной в аффинной системе координат точкой $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и направляющим вектором $\boldsymbol{p}\{\alpha, \beta, \gamma\}$.

Решение. Очевидно, точка M принадлежит прямой l тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_0M}$ и $\boldsymbol{p}$ коллинеарны, т. е. существует такое число t, что $\overline{M_0M} = t\boldsymbol{p}$. Это соотношение в координатах запишется так:

$$\begin{aligned} x - x_0 &= t\alpha, \\ y - y_0 &= t\beta, \\ z - z_0 &= t\gamma \end{aligned} \qquad \text{или} \qquad \left.\begin{aligned} x &= x_0 + \alpha t, \\ y &= y_0 + \beta t, \\ z &= z_0 + \gamma t. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Эти соотношения называются **параметрическими уравнениями прямой**. Их смысл заключается в следующем: каково бы ни было число t, точка с координатами, определяемыми соотношениями (10), лежит на прямой l. Обратно, если (x, y, z) — точка прямой l, то всегда найдется такое число t, что x, y, z выражаются через x_0, y_0, z_0 и α, β, γ при помощи соотношений (10).

Пример 6. Написать параметрические уравнения прямой:

а) проходящей через точку $M_0(2, 3, -1)$ и параллельной вектору $\boldsymbol{p}\{2, 5, -7\}$;

б) проходящей через две точки $M_1(1, 2, -5)$, $M_2(1, 4, 2)$.

Решение. а) Подставив координаты точки M_0 и вектора p в соотношения (10), получим искомые уравнения:

$$x = 2 + 2t,\ y = 3 + 5t,\ z = -1 - 7t.$$

б) В данном случае за направляющий вектор прямой можно взять вектор $\overline{M_1M_2}\{0, 2, 7\}$. Подставив координаты точки M_1 и координаты вектора $\overline{M_1M_2}$ в соотношения (10), получим:

$$x = 1,\quad y = 2 + 2t,\quad z = -5 + 7t.$$

Пример 7. Написать параметрические уравнения следующих прямых:

$$\text{а)}\ \begin{cases} x - 3y + z = 0, \\ \qquad\ \ y = 0; \end{cases} \qquad \text{б)}\ \begin{cases} x + 2y + z - 1 = 0, \\ \qquad x - z + 3 = 0. \end{cases}$$

Решение: а) Сначала найдем координаты начальной точки прямой. Поскольку для всех точек данной прямой $y = 0$, то, полагая в уравнениях $z_0 = 1$, получим $x_0 = -1$. Таким образом, точка $M_0(-1, 0, 1)$ принадлежит данной прямой. Для отыскания направляющего вектора прямой воспользуемся соотношениями (8):

$$\boldsymbol{p}\left\{\begin{vmatrix} -3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right\} \text{ или } \boldsymbol{p}\{-1, 0, 1\}.$$

Теперь легко найти параметрические уравнения прямой:

$$x = -1 - t,\ y = 0,\ z = 1 + t.$$

б) Для отыскания координат начальной точки M_0 прямой положим $z_0 = 0$, тогда из данных уравнений получим $x_0 = -3$, $y_0 = 2$. Таким образом, точка M (—3, 2, 0) принадлежит данной прямой. Направляющий вектор p имеет координаты:

$$\left\{ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right\}$$

или $p\{-2,\ 2,\ -2\}$. Очевидно, в качестве направляющего вектора прямой l можно также взять вектор $p'\{1,\ -1,\ 1\}$, коллинеарный вектору p. Итак, параметрические уравнения данной прямой имеют вид:

$$x = -3 + t,\ y = 2 - t,\ z = t.$$

Задачи и упражнения

194. Определить координаты нескольких точек, лежащих на прямых:

а) $\dfrac{x-3}{-1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+4}{3}$;

б) $x = 2 - 3t,\ y = -1 + 7t,\ z = 2t$;

в) $\begin{cases} x + y - z + 6 = 0, \\ 2x - y + 3z - 8 = 0. \end{cases}$

195. Определить координаты точек, лежащих на прямой $\dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y+4}{-3} = \dfrac{z-6}{5}$ и имеющих: а) абсциссу, равную -3; б) ординату, равную 2.

196. Какие из точек M_1 (—1, 3, 5), M_2 (—1, 4, —2), M_3 (—3, 0, 4), M_4(2, 10, —11), M_5(3, —1,6) лежат на прямой:

$$x = -3 + t,\ y = 2t,\ z = 4 - 3t.$$

197. Составить канонические и параметрические уравнения прямой:

а) проходящей через точку M_0(—3, 8, 1) и параллельной вектору $p\{-1,\ 2,\ 3\}$;

б) проходящей через точку M_0(—1, 3, 5) и параллельной вектору $p\{-2,\ 0,\ 1\}$;

в) проходящей через точку M_0(8, 3, 7) и параллельной оси Oz;

г) проходящей через точки M_1 (—2, 1, 5) и M_2 (1, 1, 3);

д) проходящей через начало координат и точку (—3, 1, 5).

198. Составить уравнения прямой, образованной:

а) пересечением плоскостей $3x - y + z - 6 = 0$ и $x + y - 3 = 0$;

б) пересечением плоскости $2x + y - 3z - 5 = 0$ и координатной плоскости Oxy;

в) пересечением плоскости $x - y + 2z = 0$ с плоскостью, проходящей через три точки: $M_1\ (1, 1, 1)$, $M_2\ (-3, 1, 0)$, $M_3(1, -6, 5)$.

199. Тетраэдр $ABCD$ задан координатами своих вершин $A\ (-3, 4, 1)$, $B\ (0, 4, 2)$, $C\ (-5, 1, 3)$, $D\ (3, 5, 1)$. Составить уравнения его ребер.

200. Найти направляющие векторы следующих прямых:

а) $\begin{cases} x - 2y + 5z - 8 = 0, \\ 2x + 2y - z + 6 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x = 0, \\ y + z = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - z = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = 0, \\ y = 0. \end{cases}$

201. Через точку $M_0(-3, 1, 2)$ провести прямую, параллельную прямой

$$\begin{cases} x + 2y - z + 4 = 0, \\ 3x - y + z - 6 = 0. \end{cases}$$

202. Составить параметрические уравнения прямых:

а) $\begin{cases} x + y - 3z - 1 = 0, \\ 2x - y + 9z - 2 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x + z - 8 = 0, \\ 2y + 3z - 7 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x - y + 2z - 6 = 0, \\ x = 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} x = 2, \\ y - z = 5. \end{cases}$

§ 15. ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

В настоящем параграфе мы рассмотрим взаимное расположение двух прямых, а также прямой и плоскости в пространстве.

1. Условие, при котором две прямые лежат в одной плоскости. Пусть в некоторой аффинной системе координат даны две прямые своими уравнениями. Выясним, при каком условии эти прямые лежат в одной плоскости. Для решения этой задачи из уравнений прямых определим координаты начальной точки и направляющих векторов. Пусть l_1 — прямая, проходящая через точку $M_1\ (x_1, y_1, z_1)$ и параллельная вектору $\boldsymbol{p}_1\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, а l_2 — вторая прямая, проходящая через точку $M_2\ (x_2, y_2, z_2)$ и параллельная вектору $\boldsymbol{p}_2\ \{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$. Рассмотрим три вектора:

$\overline{M_1M_2}\{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$, $\boldsymbol{p}_1\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, $\boldsymbol{p}_2\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$.

Очевидно, прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_1M_2}$, $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ компланарны (рис. 63,*а*). Условие компланарности этих векторов в координатах согласно теореме [7.4] запишется так:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (1)$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме.

Т е о р е м а [15.1]. *Для того чтобы прямая l_1, проходящая через точку M_1 $(x_1, y_1; z_1)$ и параллельная вектору $p_1\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, и прямая l_2, проходящая через точку M_2 (x_2, y_2, z_2) и параллельная вектору $p_2\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, лежали в одной плоскости, необходимо и достаточно, чтобы координаты точек M_1, M_2 и векторов $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ удовлетворяли условию* (1). *Система координат аффинная.*

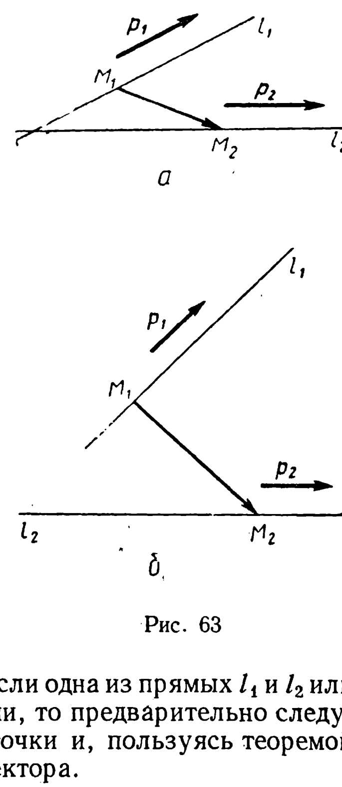


Рис. 63

Если прямые l_1 и l_2 в пространстве заданы своими уравнениями, то для того, чтобы воспользоваться сформулированной выше теоремой, необходимо предварительно найти координаты начальных точек M_1 и M_2 и направляющих векторов p_1 и p_2 данных прямых. Координаты точек M_1 и M_2 и векторов p_1 и p_2 непосредственно определяются, если прямые заданы параметрическими или каноническими уравнениями. В случае если одна из прямых l_1 и l_2 или обе прямые заданы общими уравнениями, то предварительно следует определить координаты начальной точки и, пользуясь теоремой [14.1], координаты направляющего вектора.

П р и м е р 1. Показать, что прямые

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y}{-1} = \frac{z+4}{5}, \qquad (2)$$

$$\begin{cases} 3x - y + 2z - 15 = 0, \\ x + y + z - 4 = 0, \end{cases} \qquad (3)$$

заданные в аффинной системе координат, лежат в одной плоскости.

Р е ш е н и е. Пусть l_1 — прямая, заданная каноническими уравнениями (2), а l_2 — прямая, заданная общими уравнениями (3). Определим координаты начальных точек и направляющих векторов этих прямых. Из содержания § 14 следует, что прямая l_1 проходит через точку $M_1(1, 0, -4)$ и параллельна вектору $\boldsymbol{p}_1\{3, -1, 5\}$. Для определения координат начальной точки прямой l_2 достаточно подобрать три числа x, y, z, удовлетворяющие системе уравнений (3). Для этого можно положить $z = 1$ и решить полученную систему двух уравнений с двумя неизвестными x и y. В результате получим $x = 4$, $y = -1$. Координаты направляющего вектора прямой l_2 непосредственно определяются по теореме [14.1]: $\boldsymbol{p}_2\{-3, -1, 4\}$. Подставив координаты точек M_1, M_2 и векторов $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ в соотношение (1), получим:

$$\begin{vmatrix} 4-1 & -1 & 1+4 \\ 3 & -1 & 5 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 3 & -1 & 5 \\ -3 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 0.$$

Таким образом, прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости.

Рассмотрим более подробно взаимное расположение двух прямых, лежащих в одной плоскости.

Если прямые лежат в одной плоскости, то возможны следующие три случая их взаимного расположения:

а) прямые l_1 и l_2 пересекаются. Это возможно тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ не коллинеарны;

б) прямые l_1 и l_2 параллельны. Это возможно тогда и только тогда, когда векторы $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ коллинеарны, но вектор $\overline{M_1M_2}$ не коллинеарен векторам $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$;

в) прямые l_1 и l_2 совпадают. Это возможно тогда, когда векторы $\overline{M_1M_2}$, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ коллинеарны.

Для того чтобы дать аналитическую характеристику каждого из этих случаев, введем в рассмотрение следующие матрицы:

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{pmatrix}. \tag{5}$$

Предыдущие условия аналитически могут быть сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема [15.2]. *Пусть прямая l_1, проходящая через точку M_1 (x_1, y_1, z_1) и параллельная вектору $\boldsymbol{p}_1\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, и прямая l_2, проходящая через точку M_2 (x_2, y_2, z_2) и параллельная вектору $\boldsymbol{p}_2\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, лежат в одной плоскости.*

а) *Для того чтобы прямые l_1 и l_2 пересекались, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы* (4) *был равен двум.*

б) *Для того чтобы прямые l_1 и l_2 были параллельны, необходимо и достаточно, чтобы ранг матрицы* (4) *был равен единице, а ранг матрицы* (5) *был равен двум.*

в) *Для того чтобы прямые l_1 и l_2 совпадали, необходимо и достаточно, чтобы ранги матриц* (4) *и* (5) *были равны единице. Система координат аффинная.*

Пример 2. Выяснить взаимное расположение двух прямых:

$$\frac{x}{10}=\frac{y+1}{-4}=\frac{z-3}{-6}, \quad \begin{cases} 3x+6y+z-8=0, \\ 2x+5y=0, \end{cases}$$

заданных в аффинной системе координат.

Решение. Обозначим первую прямую через l_1, а вторую — через l_2. Нетрудно видеть, что прямая l_1 проходит через точку M_1 (0, —1, 3) и параллельна вектору $p_1\{10, -4, -6\}$, а прямая l_2 проходит через точку M_2 (0, 0, 8) и параллельна вектору $p_2\{-5, 2, 3\}$. Для данных прямых вектор $\overline{M_1M_2}$ имеет координаты {0, 1, 5}. Координаты векторов p_1 и p_2 пропорциональны, поэтому векторы p_1 и p_2 коллинеарны. Координаты вектора $\overline{M_1M_2}$ не пропорциональны координатам векторов p_1 и p_2, следовательно, вектор $\overline{M_1M_2}$ не коллинеарен векторам p_1 и p_2. Таким образом, прямые l_1 и l_2 параллельны.

Пример 3. Выяснить взаимное расположение прямых:

$$(l_1): \frac{x-1}{3}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z-3}{1}; \quad (l_2): \begin{cases} y+z-1=0, \\ x+y-2z+7=0, \end{cases}$$

заданных своими уравнениями в аффинной системе координат.

Решение. Прямая l_1 проходит через начальную точку M_1 (1, —2, 3) и параллельна направляющему вектору $p_1\{3, -1, 1\}$.

Для прямой l_2 начальную точку M_2 и направляющий вектор p_2 определим так же, как и в примере 5 § 14: M_2 (—8,1,0), $p_2\{-3, 1, -1\}$. Вектор $\overline{M_1M_2}$ для данных прямых имеет координаты $\{-9, 3, -3\}$. Как видим, координаты векторов $\overline{M_1M_2}$, p_1 и p_2 пропорциональны, следовательно, векторы $\overline{M_1M_2}$, p_1 и p_2 коллинеарны. Это означает, что прямые l_1 и l_2 совпадают.

Если прямые l_1 и l_2 пересекаются, то легко найти координаты их точки пересечения. Для этого достаточно рассмотреть систему уравнений, состоящую из всех уравнений, определяющих прямые l_1 и l_2. В случае пересечения прямых эта система уравнений будет иметь одно решение.

Пример 4. Убедившись в том, что прямые l_1 и l_2, заданные уравнениями

$$\frac{x-3}{2}=\frac{y-7}{1}=\frac{z-1}{-1} \text{ и } \frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{-2}=\frac{z+2}{-5},$$

пересекаются, найти координаты точки их пересечения.

Р е ш е н и е. Для данных прямых выполнено условие (1), поэтому прямые l_1 и l_2 лежат в одной плоскости. Так как при этом направляющие векторы этих прямых $p_1\{2, 1, -1\}$ и $p_2\{3, -2, -5\}$ не параллельны, то прямые пересекаются.

Для определения координат точки пересечения можно пользоваться двумя способами.

П е р в ы й с п о с о б. Канонические уравнения двух прямых представляют собой шесть линейных уравнений с тремя неизвестными. Вообще говоря, эта система не имеет решений. Однако в данном случае, когда прямые l_1 и l_2 пересекаются в одной точке, система будет иметь единственное решение. Для определения этого решения из шести уравнений, определяющих прямые l_1 и l_2, составим систему из трех независимых линейных уравнений и найдем ее решение. В данном случае можно составить следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} x - 2y + 11 &= 0, \\ y + z - 8 &= 0, \\ 2x + 3y - 13 &= 0. \end{aligned}$$

Решая эту систему, получим: $x = -1$, $y = 5$, $z = 3$. Это решение, очевидно, определяет координаты общей точки прямых l_1 и l_2.

В т о р о й с п о с о б. Запишем параметрические уравнения прямой l_1:

$$x = 2t + 3,\ y = t + 7,\ z = -t + 1.$$

Подберем такое значение параметра t, при котором координаты x, y, z, определяемые предыдущими соотношениями, удовлетворяют уравнениям прямой l_2. Заметим, что в общем случае эта задача не имеет решения, однако в данном конкретном случае, когда известно, что прямые l_1 и l_2 пересекаются в единственной точке, существует одно и только одно t, удовлетворяющее уравнениям прямой l_2.

Подставив предыдущие соотношения в уравнения прямой l_2, получаем:

$$\frac{(2t+3)-2}{3} = \frac{(t+7)-3}{-2} = \frac{(-t+1)+2}{-5},$$

или

$$\frac{2t+1}{3} = \frac{t+4}{-2} = \frac{-t+3}{-5}, \quad \text{отсюда} \quad t = -2.$$

Точка пересечения имеет координаты $(-1, 5, 3)$.

2. Условия, при которых две прямые скрещиваются. Пусть в некоторой аффинной системе координат две прямые даны своими уравнениями. Выясним, при каком условии они скрещиваются.

Для решения этой задачи поступим так же, как в предыдущем случае, когда выясняли вопрос о принадлежности двух прямых одной плоскости. Пусть l_1 — прямая, проходящая через точку M_1 (x_1, y_1, z_1) и коллинеарная вектору $\boldsymbol{p}_1\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, а l_2 — прямая, проходящая через точку M_2 (x_2, y_2, z_2) и коллинеарная вектору $\boldsymbol{p}_2\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$. Рассмотрим три вектора:

$$\overline{M_1M_2}\{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\},\quad \boldsymbol{p}_1\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\},\quad \boldsymbol{p}_2\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}.$$

Прямые l_1 и l_2 скрещиваются тогда и только тогда, когда векторы $\overline{M_1M_2}$, $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ не компланарны (рис. 63,*б*). В самом деле, пусть l_1 и l_2 скрещиваются. Перенесем векторы $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ в точку M_1 прямой l_1 и рассмотрим три вектора $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ и $\overline{M_1M_2}$ (рис. 64). Векторы $\boldsymbol{p}_1$ и $\overline{M_1M_2}$ не коллинеарны, так как точка M_2 не лежит на прямой l_1. Проведем через точку M_1 плоскость π, параллельную векторам $\boldsymbol{p}_1$ и $\overline{M_1M_2}$. Очевидно, конец P вектора $\boldsymbol{p}_2$ не лежит в плоскости π. В самом деле, если P лежит в плоскости π, то прямая l_2, проходящая через точку M_2 плоскости π, также лежит в плоскости π, что невозможно, так как прямые l_1 и l_2 скрещиваются. Таким образом, вектор $\boldsymbol{p}_2$ не параллелен плоскости π. Значит, векторы $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ и $\overline{M_1M_2}$ не компланарны. Обратно, если векторы $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\overline{M_1M_2}$ не компланарны, то прямые l_1 и l_2 скрещиваются. В самом деле, если допустить, что прямые l_1 и l_2 не скрещиваются, то они будут лежать в одной плоскости, но тогда, очевидно, векторы $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$, $\overline{M_1M_2}$ будут компланарны, что противоречит нашему условию.

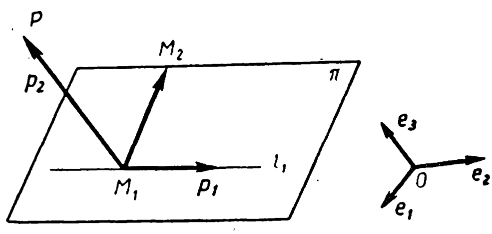


Рис. 64

Теорема [15.3]. *Для того чтобы прямая l_1, проходящая через точку M_1 (x_1, y_1, z_1) и коллинеарная вектору $\boldsymbol{p}_1\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, и прямая l_2, проходящая через точку M_2 (x_2, y_2, z_2) и коллинеарная вектору $\boldsymbol{p}_2\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, были скрещивающимися, необходимо и достаточно, чтобы координаты точек M_1 и M_2 и векторов $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ удовлетворяли следующему условию*:

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{6}$$

Система координат аффинная.

Пример 5. Показать, что прямые

$$(l_1): \frac{x-2}{5} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z}{1},$$

$$(l_2): x = 1 + 2t,\ y = -3 - t,\ z = 2 + 6t$$

скрещиваются.

Решение. Из уравнений прямых непосредственно следует, что прямая l_1 проходит через точку M_1 (2, —3, 0) и коллинеарна вектору $p_1\{5, -2, 1\}$ а прямая l_2 — через точку M_2 (1, —3, 2) и коллинеарна вектору $p_2\{2, -1, 6\}$. Вектор $\overline{M_1M_2}$, очевидно, имеет координаты: $\{-1, 0, 2\}$. Подставив координаты векторов $\overline{M_1M_2}$, p_1, p_2 в соотношение (6), получаем:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 5 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 6 \end{vmatrix} = 9 \neq 0.$$

Таким образом, прямые l_1 и l_2 скрещиваются.

Мы установили критерий для определения взаимного расположения двух прямых, заданных начальными точками и направляющими векторами. Пользуясь понятием ранга матрицы, можно теоремы [15.1], [15.2] и [15.3] объединить в одно предложение. Введем в рассмотрение матрицы:

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{pmatrix} \tag{7}$$

и обозначим через R и r соответственно ранги этих матриц. Очевидно, $R \geqslant r$. Из теорем [15.1], [15.2] и [15.3] непосредственно следует.

Теорема [15.4]. *Пусть в пространстве дана прямая с начальной точкой $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и направляющим вектором $p_1\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ и прямая l_2 с начальной точкой $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и направляющим вектором $p_2\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$. Рассмотрим матрицы (7) и обозначим через R и r ранги этих матриц. Тогда*

а) *прямые l_1* и *l_2 скрещиваются тогда и только тогда, когда $R = 3$;*

б) *прямые l_1 и l_2 пересекаются тогда и только тогда, когда $R = r = 2$;*

в) *прямые l_1 и l_2 параллельны тогда и только тогда, когда $R = 2$, $r = 1$;*

г) *прямые l_1 и l_2 совпадают тогда и только тогда, когда $R = r = 1$.*

Система координат аффинная.

3. Взаимное расположение плоскости и прямой, заданной начальной точкой и направляющим вектором. Пусть в некоторой аффинной системе координат даны прямая l и плоскость π своими уравнениями. Выясним их взаимное расположение.

Для решения этой задачи найдем координаты начальной точки и координаты направляющего вектора прямой l. Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0)$ — начальная точка, а $\boldsymbol{p}\{\alpha, \beta, \gamma\}$ — направляющий вектор прямой l. Допустим, далее, что плоскость π задана своим общим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0. \tag{8}$$

Сначала рассмотрим взаимное расположение вектора $\boldsymbol{p}$ и плоскости π. Возможны два случая:

а) Вектор $\boldsymbol{p}$ не параллелен плоскости π. В этом случае, очевидно, прямая l пересекает плоскость π. Обратно, если прямая l пересекает плоскость π, то вектор $\boldsymbol{p}$ не параллелен плоскости π. Учитывая теорему [10.2], мы приходим к выводу, что прямая l пересекает плоскость π тогда и только тогда, когда

$$A\alpha + B\beta + C\gamma \neq 0.$$

б) Вектор $\boldsymbol{p}$ параллелен плоскости π. В этом случае, очевидно, прямая l либо параллельна плоскости π, либо лежит в ней. Для того чтобы установить, какой из этих случаев имеет место, рассмотрим точку M_0. Очевидно, если точка M_0 лежит в плоскости π, то прямая l целиком лежит в плоскости π, если же точка M_0 не лежит в плоскости π, то прямая параллельна плоскости π. Принимая во внимание теорему [10.2], мы приходим к следующему выводу: прямая l лежит в плоскости π тогда и только тогда, когда

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0 \text{ и } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D = 0;$$

прямая l параллельна плоскости π тогда и только тогда, когда

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0 \text{ и } Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D \neq 0.$$

Таким образом, мы приходим к следующей теореме, характеризующей взаимное расположение прямой и плоскости.

Теорема [15.5]. *Пусть l проходит через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и параллельна вектору $\boldsymbol{p}\{\alpha, \beta, \gamma\}$, а плоскость π задана общим уравнением* (8). *Рассмотрим числа*:

$$\xi = A\alpha + B\beta + C\gamma \text{ и } \eta = Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D.$$

а) *Для того чтобы прямая l пересекала плоскость π, необходимо и достаточно, чтобы $\xi \neq 0$.*

б) *Для того чтобы прямая l была параллельна плоскости π, необходимо и достаточно, чтобы $\xi = 0$ и $\eta \neq 0$.*

в) *Для того чтобы прямая l лежала в плоскости π, необходимо и достаточно, чтобы $\xi = \eta = 0$.*

Пример 6. В аффинной системе координат дана плоскость π и прямые l_1, l_2, l_3 своими уравнениями:

$$(\pi) : 3x - 5y + z - 7 = 0;$$
$$(l_1) : x = 3t, \ y = -1 + t, \ z = 4 + 5t;$$
$$(l_2) : \frac{x-1}{1} = \frac{y+2}{1} = \frac{z-7}{2};$$
$$(l_3) : \frac{x-3}{-2} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z-3}{-4}.$$

Выясним взаимное расположение плоскости π с каждой из прямых l_1, l_2 и l_3.

Решение. а) Прямая l_1 характеризуется начальной точкой M_1 (0, —1, 4) и направляющим вектором $p_1\{3, 1, 5\}$. Поэтому для плоскости π и прямой l число ξ, введенное в рассмотрение в теореме [15.5], имеет вид:

$$\xi_1 = 3 \cdot 3 - 5 \cdot 1 + 1 \cdot 5 = 9 \neq 0.$$

Из теоремы [15.5] следует, что прямая l_1 пересекает плоскость π.

б) Прямая l_2 характеризуется начальной точкой $M_2(1, -2, 7)$ и направляющим вектором $p_2\{1, 1, 2\}$. В данном случае

$$\xi_2 = 3 \cdot 1 - 5 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 0,$$

$$\eta_2 = 3 \cdot 1 - 5\,(-2) + 1 \cdot 7 - 7 = 13 \neq 0.$$

Из теоремы [15.5] следует, что прямая l_2 параллельна плоскости π.

Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что прямая l_3 лежит в плоскости π.

4. Взаимное расположение плоскости и прямой, заданной общими уравнениями. Рассмотрим предыдущую задачу для случая, когда прямая l задана своими общими уравнениями:

$$\left.\begin{aligned} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

а плоскость π — уравнением (8). Для того чтобы выяснить взаимное расположение прямой и плоскости, воспользуемся результатами п. 2, § 11. Введем в рассмотрение три плоскости:

$$(\pi_1)\colon A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0;$$
$$(\pi_2)\colon A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0;$$
$$(\pi)\colon Ax + By + Cz + D = 0.$$

Очевидно, прямая l пересекает плоскость π в одной точке тогда и только тогда, когда плоскости π_1, π_2 и π имеют единственную общую точку; прямая l параллельна плоскости π тогда и только тогда, когда плоскости π_1, π_2 и π не имеют ни одной общей точки и, наконец, прямая l лежит в плоскости π тогда и только тогда, когда три плоскости принадлежат одному пучку. Пользуясь теоремой [11.4], получаем аналитические характеристики каждого из этих случаев.

Теорема [15.6]. *Пусть прямая l задана общими уравнениями (9), а плоскость π — уравнением (8). Обозначим через R и r соответственно ранги матриц:*

$$\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A & B & C & D \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A & B & C \end{pmatrix}.$$

а) *Для того чтобы прямая l и плоскость π пересекались, необходимо и достаточно, чтобы $r = R = 3$.*

б) *Для того чтобы прямая l была параллельна плоскости π, необходимо и достаточно, чтобы $r = 2$, $R = 3$.*

в) *Для того чтобы прямая l лежала в плоскости π, необходимо и достаточно, чтобы $r = R = 2$.*

Пример 7. Выяснить взаимное расположение прямой и плоскости в каждом из следующих случаев:

а) прямая l задана уравнениями:

$$\begin{cases} x - y + 5z - 6 = 0, \\ 2x + y - z + 1 = 0; \end{cases}$$

плоскость π — уравнением: $2x + 5y - z + 7 = 0$;

б) прямая l задана уравнениями:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z - 8 = 0, \\ x + y + z = 0; \end{cases}$$

плоскость π — уравнением: $3x - 7y + z = 0$.

Решение. а) Для данного случая $r = 3$, следовательно, согласно теореме [15.6] прямая l пересекает плоскость π.

б) В данном случае $r = 2$, а $R = 3$, поэтому в силу той же теоремы прямая l параллельна плоскости π.

В заключение отметим, что если прямая и плоскость пересекаются, то задача вычисления координат их точки пересечения по существу сводится к совместному решению уравнений прямой и плоскости. Задача решается особенно просто, если прямая задана параметрически.

Пример 8. Убедившись в том, что прямая

$$x = -1 + 3t,\ y = 1 + 4t,\ z = -1 + t \tag{10}$$

пересекает плоскость $2x - y + z + 1 = 0$, найти координаты точки пересечения.

Решение. Направляющий вектор прямой имеет координаты: $p\{3, 4, 1\}$, поэтому $\xi = 2\cdot 3 - 1\cdot 4 + 1\cdot 1 = 0$; прямая пересекает плоскость. Для вычисления координат точки пересечения сначала определим параметр этой точки. Для этой цели подставим в уравнение плоскости выражения x, y и z из соотношений (10):

$$2(-1 + 3t) - (1 + 4t) + (-1 + t) + 1 = 0.$$

Отсюда получаем: $-3+3t=0$, или $t=1$. Подставив это значение в соотношения (10), получаем: $x=2$, $y=5$, $z=0$. Итак, точка пересечения имеет координаты (2, 5, 0).

Задачи и упражнения

203. Из приведенных ниже пар прямых выделить те, которые лежат в одной плоскости:

а) $\frac{x+4}{3}=\frac{y+6}{5}=\frac{z-1}{-2}$ и $\begin{cases}3x-2y+z+5=0,\\2x+3y+4z-4=0;\end{cases}$

б) $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{-3}$ и $\frac{x}{1}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{5}$;

в) $x=2t,\ y=-1+t,\ z=3-t$ и $\begin{cases}2y+2z+5=0,\\x+y+3z-6=0;\end{cases}$

г) $\begin{cases}x+2y-5z-15=0,\\3x-y+2z+6=0\end{cases}$ и $\begin{cases}2x+3y-z-3=0,\\4x-5y+z+3=0;\end{cases}$

д) $\begin{cases}2x-y+z=0,\\y=0\end{cases}$ и $\begin{cases}2x+3y-5z+6=0,\\z=0.\end{cases}$

204. Установить взаимное расположение прямых в каждом из следующих случаев:

а) $\begin{cases}x=9t,\\y=5t,\\z=-3+t,\end{cases}$ и $\begin{cases}2x-3y-3z-9=0,\\x-2y+z+3=0;\end{cases}$

б) $\begin{cases}2x+3y=0,\\z-4=0\end{cases}$ и $\begin{cases}x+z-8=0,\\2y+3z-7=0;\end{cases}$

в) $\begin{cases}x=t,\\y=-8-4t,\\z=-3-3t\end{cases}$ и $\begin{cases}x+y-z=0,\\2x-y+2z=0;\end{cases}$

г) $\begin{cases}x+y-3z-1=0,\\2x-y-9z-2=0\end{cases}$ и $\begin{cases}2x+y+2z-2=0,\\2x-2y-z-2=0;\end{cases}$

д) $\begin{cases}x=2+4t,\\y=-6t,\\z=-1-8t\end{cases}$ и $\begin{cases}x=7-6t,\\y=2+9t,\\z=12t.\end{cases}$

205. Показать, что прямые

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+1}{-3}=\frac{z+10}{8} \text{ и } \frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{-4}=\frac{z+1}{7}$$

пересекаются. Найти координаты точки их пересечения.

206. Показать, что прямые

$$\begin{cases}x-3y+2z+4=0,\\2x+y+4z+1=0\end{cases} \text{ и } \begin{cases}3x+2y+5z-1=0,\\2y+z=0\end{cases}$$

пересекаются. Найти координаты точки их пересечения.

207. Показать, что прямые

$$\frac{x-x_1}{x_2}=\frac{y-y_1}{y_2}=\frac{z-z_1}{z_2} \text{ и } \frac{x-x_2}{x_1}=\frac{y-y_2}{y_1}=\frac{z-z_2}{z_1}$$

пересекаются, если числа x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2 не пропорциональны. Найти координаты точки их пересечения.

Установить взаимное расположение этих прямых в случае пропорциональности чисел x_1, y_1, z_1 и x_2, y_2, z_2.

208. Установить взаимное расположение плоскости

$$x-2y+5z-6=0$$

и каждой из следующих прямых:

а) $\frac{x}{1}=\frac{y-1}{3}=\frac{z+2}{1}$;

б) $x=3t,\ y=-1+2t,\ z=3+t$;

в) $\begin{cases}2x-y+z-3=0,\\ x-z=0.\end{cases}$

209. Показать, что прямая $x=1+2t$, $y=3t$, $z=-2+t$ пересекает плоскость $2x-y+z+1=0$. Найти координаты точки пересечения.

210. а) Доказать, что прямая

$$\begin{cases}2x-y+z-2=0,\\ -3x+y-2z+3=0\end{cases}$$

пересекает ось Ox. Найти координаты точки пересечения.

б) Доказать, что прямая

$$\begin{cases}x-y+z+1=0,\\ x-2y+4z=0\end{cases}$$

пересекает все координатные плоскости. Определить координаты точек пересечения.

211. Найти точку пересечения прямой

$$\begin{cases}3x-y+2z-1=0\\ 6x+y-z+7=0\end{cases}$$

с плоскостью $x+3y+z-8=0$.

212. Составить уравнения прямой, проходящей через точки пересечения двух прямых

$$\begin{cases}x+y-z+6=0\\ 2x-y+3z-25=0\end{cases} \text{ и } \frac{x+1}{2}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z+9}{5}$$

с плоскостью $x+4y+2z+3=0$.

213. Через точку пересечения плоскости $x-2y+3z+5=0$ с осью Ox провести прямую так, чтобы она лежала в данной плоскости и была параллельна плоскости Oyz.

§ 16. НЕКОТОРЫЕ МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ НА ПРЯМУЮ И ПЛОСКОСТЬ

Теория прямой, изложенная в двух предыдущих параграфах, справедлива как в аффинной, так и в прямоугольной декартовой системе координат. В настоящем параграфе мы рассмотрим некоторые метрические вопросы теории прямой и плоскости, т. е. вопросы, в которые входят понятия длины отрезка и величины угла. Задачи такого типа особенно просто решаются в прямоугольных декартовых системах координат; поэтому в данном параграфе всюду будем предполагать, что система координат прямоугольная декартова.

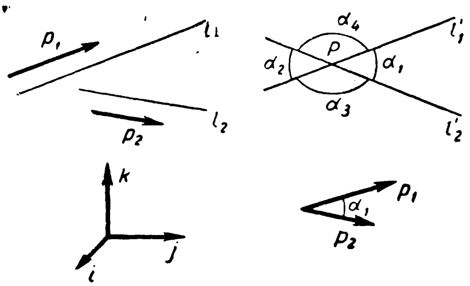


Рис. 65

1. Вычисление угла между двумя прямыми. Пусть в пространстве даны две прямые l_1 и l_2. Возьмем произвольную точку P и проведем через эту точку прямые l'_1 и l'_2, соответственно параллельные l_1 и l_2 (рис. 65). Прямые l'_1 и l'_2 образуют четыре угла α_1, α_2, α_3 и α_4. Эти углы называются углами между прямыми l_1 и l_2. Из курса стереометрии известно, что понятие угла между прямыми не зависит от выбора точки P. Легко видеть, что если дан один из четырех углов α_1, α_2, α_3 и α_4, то остальные углы определяются однозначно. В самом деле, $\alpha_1 = \alpha_2$, $\alpha_3 = \alpha_4$, как вертикальные углы, и $\alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_4 = 180°$, как смежные углы. Поставим перед собой следующую задачу.

Задача 1. В прямоугольной декартовой системе координат даны координаты $\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ и $\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ направляющих векторов $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ двух прямых l_1 и l_2. Вычислить косинус угла между прямыми l_1 и l_2.

Решение. Легко видеть, что угол между векторами $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ равен одному из указанных выше четырех углов, образованных данными прямыми (рис. 65). На рисунке 65 угол между векторами $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ равен углу α_1. Если $\alpha = (\widehat{\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2})$, то согласно формуле (3), § 5 мы приходим к теореме.

Теорема [16.1]. *Пусть в прямоугольной декартовой системе координат направляющие векторы двух прямых l_1 и l_2 имеют соответственно координаты:*

$$\boldsymbol{p}_1\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\} \text{ и } \boldsymbol{p}_2\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}.$$

Тогда косинус угла α между прямыми l_1 и l_2 определяется формулой

$$\cos\alpha = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \beta_1^2 + \gamma_1^2}\sqrt{\alpha_2^2 + \beta_2^2 + \gamma_2^2}}. \qquad (1)$$

Следствием данной теоремы является следующая

Теорема [16.2]. *Если в прямоугольной декартовой системе координат направляющие векторы прямых l_1 и l_2 имеют соответственно координаты $p_1\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ и $p_2\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, то для того чтобы прямые l_1 и l_2 были взаимно перпендикулярны, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0. \qquad (2)$$

Как видим из доказанных выше теорем, для вычисления угла между двумя прямыми необходимо предварительно найти направляющие векторы этих прямых. Если прямые заданы своими каноническими или параметрическими уравнениями, то координаты направляющих векторов определяются непосредственно из уравнений; если же обе прямые или одна из них заданы общими уравнениями, то координаты направляющих векторов определяются по теореме [14.1].

Пример 1. В прямоугольной декартовой системе координат даны прямые

$$(l_1):\ \frac{x-1}{2} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{-1} \text{ и } (l_2):\ \begin{cases} x + y + z = 0, \\ x - z = 0. \end{cases}$$

Вычислить угол между ними.

Решение. Предварительно вычислим координаты направляющих векторов этих прямых. Как видно из уравнений прямой l_1, направляющий вектор p_1 этой прямой имеет координаты $p_1\{2, -1, -1\}$. По теореме [14.1] направляющий вектор p_2 прямой l_2 имеет координаты $p_2\{-1, 2, -1\}$. Подставив координаты этих векторов в соотношение (1), получаем:

$$\cos\alpha = \frac{-2-2+1}{\sqrt{4+1+1}\sqrt{1+4+1}} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2}.$$

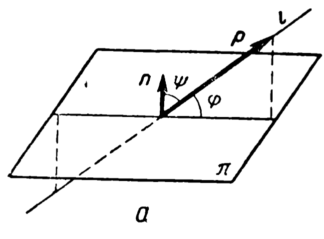
Таким образом, один из углов между прямыми равен 120°. Остальные углы равны 60°, 60°, 120°.

Пример 2. Доказать, что прямые

$$\begin{cases} x = 2 + 4t, \\ y = -1 + 3t, \\ z = -t \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + 2y - z - 2 = 0 \end{cases}$$

взаимно перпендикулярны.

Решение. Найдем направляющие векторы этих прямых и воспользуемся теоремой [16.2]. Направляющий вектор прямой l_1 имеет координаты $p_1\{4, 3, -1\}$. В силу теоремы [14.1] направляющий вектор прямой l_2 имеет координаты $p_2\{-1, 3, 5\}$. Мы видим,



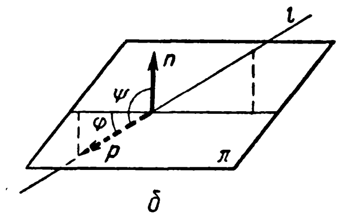


Рис. 66

что для векторов p_1 и p_2 выполнено условие (2), поэтому прямые l_1 и l_2 взаимно перпендикулярны.

Замечание. При решении задачи об определении угла между двумя прямыми мы оставили открытым вопрос о том, пересекаются прямые или скрещиваются. В каждом конкретном случае может быть тот или иной случай. Например, в примере 1 прямые пересекаются, а в примере 2 — скрещиваются.

2. Вычисление угла между прямой и плоскостью. Если прямая l не перпендикулярна к плоскости π, то **углом между прямой** l **и плоскостью** π называется угол между прямой l и ее проекцией на плоскость π. При этом из двух углов, которые образует прямая с плоскостью, выбирается меньший угол. Если прямая перпендикулярна к плоскости, то угол между прямой и плоскостью считается равным $\frac{\pi}{2}$.

Задача 2. В прямоугольной декартовой системе координат дана плоскость π своим уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0 \qquad (3)$$

и даны координаты $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ направляющего вектора $\boldsymbol{p}$ прямой l. Вычислить угол между прямой l и плоскостью π.

Решение. Согласно теореме [12.2] вектор $\boldsymbol{n}\{A, B, C\}$ перпендикулярен к плоскости π. Пусть φ — угол между прямой l и плоскостью π, а $\psi = \angle(\boldsymbol{p}, \boldsymbol{n})$ (рис. 66). Если $\psi \leqslant \frac{\pi}{2}$, то, очевидно, $\varphi = 90^\circ - \psi$ и $\sin\varphi = \cos\psi$ (рис. 66,*а*). Если же $\psi > \frac{\pi}{2}$, то $\varphi = \psi - \frac{\pi}{2}$ и $\sin\varphi = -\cos\psi$ (рис. 66,*б*). Так как $\sin\varphi \geqslant 0$, то для любого φ имеем $\sin\varphi = |\cos\psi|$.

Из определения скалярного произведения следует, что $\cos\psi = \frac{\boldsymbol{np}}{|\boldsymbol{n}|\cdot|\boldsymbol{p}|}$, поэтому получаем следующую формулу для вычисления $\sin\varphi$:

$$\sin\varphi = \frac{|A\alpha + B\beta + C\gamma|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}. \qquad (4)$$

Задача решена. Мы пришли к следующей теореме.

Теорема [16.3]. *Если в прямоугольной декартовой системе координат дана плоскость π уравнением* (3) *и даны координаты* $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ *направляющего вектора прямой l, то синус угла между прямой l и плоскостью π определяется по формуле* (4).

Если прямая l задана своими общими уравнениями, то, для того чтобы воспользоваться этой теоремой, предварительно необходимо определить координаты направляющего вектора $\boldsymbol{p}$ этой прямой.

Пример 3. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат дана плоскость

$$x - y + 2z - 5 = 0$$

и прямая $x = 3 + \sqrt{5}\,t, \quad y = -1 + \sqrt{5}\,t, \quad z = \sqrt{6}\,t$. Вычислить угол между прямой и плоскостью.

Решение. Для определения угла между прямой и плоскостью найдем синус этого угла, воспользовавшись формулой (4):

$$\sin\varphi = \frac{|\sqrt{5} - \sqrt{5} + 2\sqrt{6}|}{\sqrt{6}\cdot\sqrt{16}} = \frac{1}{2}, \text{ откуда } \varphi = 30^\circ.$$

Заметим, что из формулы (4) можно получить условия пересечения прямой и плоскости. В самом деле, очевидно, прямая l пересекает плоскость тогда и только тогда, когда угол φ между ними не равен нулю. Поэтому из формулы (4) мы снова получаем условие пересечения прямой и плоскости: $A\alpha + B\beta + C\gamma \neq 0$. Это условие получено нами ранее в теореме [15.5] для более общего случая, когда прямая и плоскость заданы в аффинной системе координат.

Получим далее условие перпендикулярности прямой с направляющим вектором $\boldsymbol{p}\{\alpha, \beta, \gamma\}$ и плоскости π, заданной уравнением (3). Для того чтобы прямая l была перпендикулярна к плоскости π, необходимо и достаточно, чтобы векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{n}$ были взаимно перпендикулярны, где $\boldsymbol{n}\{A, B, C\}$ — вектор, перпендикулярный к плоскости (см. теорему [12.2]).

Теорема [16.4]. *Пусть в прямоугольной декартовой системе координат дана плоскость π уравнением* (3) *и прямая l направляющим вектором $\boldsymbol{p}$ $\{\alpha, \beta, \gamma\}$. Для того чтобы прямая l была перпендикулярна к плоскости π, необходимо и достаточно, чтобы числа A, B, C были пропорциональны числам α, β, γ, т. е. чтобы ранг матрицы* $\begin{pmatrix} A & B & C \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$ *был равен единице.*

Пример 4. Доказать, что прямая l, заданная в прямоугольной декартовой системе координат уравнениями

$$\begin{cases} 2x + 2y - 6z + 1 = 0, \\ 2x - y + z - 2 = 0, \end{cases}$$

перпендикулярна плоскости $2x + 7y + 3z - 12 = 0$.

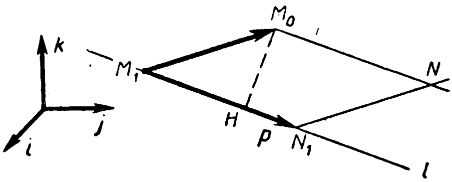


Рис. 67

Решение. Согласно теореме [14.1] направляющий вектор прямой l имеет координаты $\{-4,-14,-6\}$.

Мы видим, что этот вектор коллинеарен вектору $\boldsymbol{n}$ $\{2, 7, 3\}$, перпендикулярному к плоскости. Таким образом, прямая l перпендикулярна к данной плоскости.

3. Вычисление расстояния от точки до прямой.

Задача 3. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и прямая l своими каноническими уравнениями

$$\frac{x-x_1}{\alpha}=\frac{y-y_1}{\beta}=\frac{z-z_1}{\gamma}. \tag{5}$$

Вычислить расстояние от точки M_0 до данной прямой l.

Решение. Опустим из точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ перпендикуляр на прямую l и обозначим через H основание этого перпендикуляра. Нас интересует длина d отрезка M_0H. Очевидно, M_0H есть высота параллелограмма $M_1M_0NN_1$, построенного на векторах $\overline{M_1M_0}$ и $\boldsymbol{p}$, где M_1 (x_1, y_1, z_1), $\boldsymbol{p}$ $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ (рис. 67). Для нахождения высоты этого параллелограмма мы можем воспользоваться следующей формулой: $d=\frac{S}{M_1N_1}$, где S — площадь данного параллелограмма, а M_1N_1 — модуль вектора $\boldsymbol{p}$. Из определения векторного произведения (см. § 6, п. 4) вытекает, что

$$S=|[\overline{M_1M_0}\boldsymbol{p}]|,\ \text{а}\ M_1N_1=|\boldsymbol{p}|.$$

Поэтому предыдущее соотношение принимает вид:

$$d=\frac{|[\overline{M_1M_0}\boldsymbol{p}]|}{|\boldsymbol{p}|}. \tag{6}$$

Чтобы получить окончательную формулу для вычисления d, заметим, что векторы $\overline{M_1M_0}$ и $\boldsymbol{p}$ имеют соответственно координаты:

$$\overline{M_1M_0}\ \{x_0-x_1,\ y_0-y_1,\ z_0-z_1\}\ \text{и}\ \boldsymbol{p}\ \{\alpha, \beta, \gamma\},$$

поэтому векторное произведение $[\overline{M_1M_0}\ \boldsymbol{p}]$ согласно теореме [6.5] будет иметь координаты:

$$\left\{\begin{vmatrix} y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} z_0-z_1 & x_0-x_1 \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} x_0-x_1 & y_0-y_1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}\right\}.$$

Подставив в соотношение (6) выражения для $|[\overline{M_1M_0}\ \boldsymbol{p}]|$ и $|\boldsymbol{p}|$ через координаты, получаем следующую теорему.

Теорема [16.5]. *Если в прямоугольной декартовой системе координат прямая l определяется начальной точкой M_1 (x_1, y_1, z_1) и направляющим вектором $p\ \{\alpha, \beta, \gamma\}$, то расстояние от точки M_0 (x_0, y_0, z_0) до данной прямой определяется по формуле*:

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} y_0 - y_1 & z_0 - z_1 \\ \beta & \gamma \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_0 - z_1 & x_0 - x_1 \\ \gamma & \alpha \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} x_0 - x_1 & y_0 - y_1 \\ \alpha & \beta \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2}}. \quad (7)$$

Пример 5. Вычислить расстояние от точки $M_0(4, -5, 3)$ до прямой l, заданной уравнениями:

$$\frac{x-5}{3} = \frac{y+2}{-4} = \frac{z-6}{5}.$$

Решение. Из уравнений прямой мы определяем координаты начальной точки и направляющего вектора:

$$M_1\ (5, -2, 6),\ p\ \{3, -4, 5\}.$$

Подставив значения координат точек M_0, M_1 и координаты вектора p в формулу (7), получим:

$$d = \frac{\sqrt{\begin{vmatrix} -3 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -3 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix}^2}}{\sqrt{9 + 16 + 25}} = \frac{\sqrt{457}}{5}.$$

Если прямая задана не каноническими и не параметрическими, а общими уравнениями, то для решения поставленной выше задачи необходимо предварительно найти координаты начальной точки и направляющего вектора прямой.

4. Вычисление расстояния между двумя прямыми. Пусть l_1 и и l_2 — две прямые в пространстве. Возьмем произвольные точки M_1 и M_2, соответственно лежащие на прямых l_1 и l_2, и обозначим через ρ расстояние между ними. Очевидно, ρ существенно зависит от выбора точек M_1 и M_2. *Расстоянием d между прямыми l_1 и l_2 называется кратчайшее из всевозможных расстояний ρ между любыми двумя точками прямых l_1 и l_2.*

Покажем, что, каковы бы ни были две различные прямые l_1 и l_2, всегда существует расстояние d между ними. В самом деле, рассмотрим три случая в зависимости от взаимного расположения прямых l_1 и l_2.

а) Прямые l_1 и l_2 пересекаются в точке P. В этом случае $d = 0$, так как на данных прямых существуют точки $M_1 \equiv P$ и $M_2 \equiv P$, расстояние между которыми равно нулю.

б) Прямые l_1 и l_2 параллельны. В этом случае расстояние между прямыми l_1 и l_2, очевидно, равно расстоянию от любой точки одной прямой до другой прямой.

в) Прямые l_1 и l_2 — скрещиваются. Пусть h — прямая, которая пересекает прямые l_1 и l_2 и перпендикулярна к каждой из этих пря-

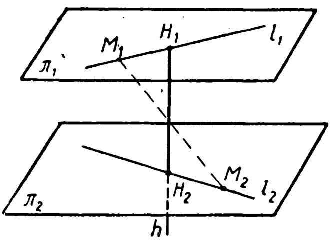


Рис. 68

мых. Из курса элементарной геометрии известно, что для двух скрещивающихся прямых существует одна и только одна прямая h, обладающая этими свойствами.

Обозначим через H_1 и H_2 точки пересечения прямой h соответственно с прямыми l_1 и l_2. Легко показать, что *длина отрезка* H_1H_2 *есть расстояние между прямыми* l_1 *и* l_2. В самом деле, пусть M_1 — произвольная точка на прямой l_1, а M_2 — произвольная точка на прямой l_2. Допустим, что M_1 не совпадает с H_1 или M_2 не совпадает с H_2, и докажем, что $M_1M_2 > H_1H_2$. Проведем плоскость π_1 через прямую l_1 параллельно l_2 и плоскость π_2 через прямую l_2 параллельно l_1 (так называемые опорные плоскости двух скрещивающихся прямых, рис. 68). Плоскости π_1 и π_2 параллельны друг другу, а прямая h перпендикулярна к этим плоскостям, в то время как прямая M_1M_2 не перпендикулярна к плоскостям π_1 и π_2. Отсюда вытекает, что $H_1H_2 < M_1M_2$.

Теперь выведем формулу для вычисления расстояния между двумя прямыми. Сначала рассмотрим общий случай, когда прямые скрещиваются.

Задача 4. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат даны две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 своими каноническими уравнениями:

$$(l_1): \ \frac{x - x_1}{\alpha_1} = \frac{y - y_1}{\beta_1} = \frac{z - z_1}{\gamma_1}, \tag{8}$$

$$(l_2): \ \frac{x - x_2}{\alpha_2} = \frac{y - y_2}{\beta_2} = \frac{z - z_2}{\gamma_2}. \tag{9}$$

Вычислить расстояние между ними.

Решение. Из уравнений (8) и (9) определим координаты начальных точек и направляющих векторов прямых l_1 и l_2:

$$M_1(x_1, y_1, z_1), \ M_2(x_2, y_2, z_2), \ \boldsymbol{p}_1\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}, \ \boldsymbol{p}_2\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}.$$

Перенесем векторы $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ в точку M_1 и построим параллелепипед на векторах $\boldsymbol{p}_1$, $\boldsymbol{p}_2$ и $\overline{M_1M_2}$ (рис. 69). Очевидно, если

$$M_1N_1P_1Q_1M_2N_2P_2Q_2 —$$

построенный нами параллелепипед и обозначения выбраны так, что вектор $\boldsymbol{p}_1$ направлен вдоль ребра M_1N_1, а вектор $\boldsymbol{p}_2$ — вдоль ребра M_1Q_1, то прямая l_1 совпадает с прямой M_1N_1, а прямая l_2 — с прямой M_2Q_2 (см. рис. 69). Пусть π_1 — плоскость грани $M_1N_1P_1Q_1$, а π_2 — плоскость параллельной грани $M_2N_2P_2Q_2$. Из предыдущих рассуждений следует, что искомое расстояние d между прямыми l_1 и l_2 равно расстоянию между плоскостями π_1 и π_2, а это расстояние есть не что иное, как высота построенного нами параллелепипеда. Итак, $d = \frac{V}{S}$, где V — объем параллелепипеда, а S — площадь грани $M_1N_1P_1Q_1$. Из свойств смешанного и векторного произведений следует, что $V = |\overline{M_1M_2}\, \boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2|$, а $S = |[\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2]|$, поэтому

$$d = \frac{|\overline{M_1M_2}\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2|}{|[\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2]|}.$$

Остается выразить модули тройного и векторного произведений через координаты рассматриваемых векторов. Очевидно, вектор $\overline{M_1M_2}$ имеет координаты $\{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\}$, поэтому, воспользовавшись формулами для вычисления тройного и векторного произведений, окончательно получаем формулу:

$$d = \frac{\left|\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}\right|}{\sqrt{\begin{vmatrix}\beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2\end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}^2}}. \quad (10)$$

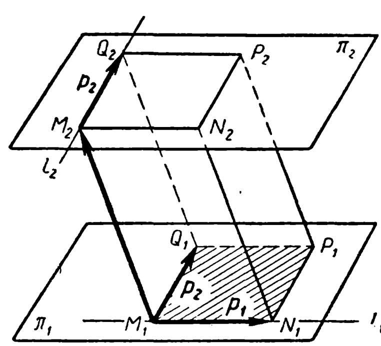


Рис. 69

Заметим, что полученная нами формула определяет расстояние между двумя прямыми и в случае, когда они пересекаются. В самом деле, в этом случае векторы $\overline{M_1M_2}$, $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ будут компланарными и числитель рассматриваемого выше выражения обратится в нуль, т. е. $d = 0$.

Формула (10) не пригодна в случае, когда прямые l_1 и l_2, параллельны, поскольку в этом случае как числитель, так и знаменатель обращаются в нуль. В этом случае расстояние между данными прямыми равно расстоянию от произвольной точки прямой l_1 до прямой l_2 (см. теорему [16.5]). Мы доказали следующую теорему.

Теорема [16.6]. *Если в прямоугольной декартовой системе координат даны две непараллельные прямые уравнениями* (8) *и* (9), *то расстояние* d *между ними вычисляется по формуле* (10).

Пример 6. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат даны две прямые своими уравнениями:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+15}{-7} = \frac{z-9}{5} \quad \text{и} \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-9}{-3}.$$

Вычислить расстояние между ними.

Решение. Из уравнений прямых найдем координаты начальных точек и направляющих векторов прямых:

$M_1\ (3, -15, 9)$, $M_2\ (-1, 1, 9)$, $\boldsymbol{p}_1\ \{2, -7, 5\}$ и $\boldsymbol{p}_2\ \{2, 1, -3\}$. Векторы $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ не коллинеарны (их координаты не пропорциональны), поэтому для вычисления расстояния между непараллельными прямыми l_1 и l_2 можно воспользоваться предыдущей теоремой. Подставив координаты начальных точек и направляющих векторов в формулу (10), получаем $d = 4\sqrt{3}$.

Задачи и упражнения

214. Найти косинус угла между прямыми:

а) $\dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{-1} = \dfrac{z+3}{2}$ и $\dfrac{x+3}{1} = \dfrac{y-5}{1} = \dfrac{z}{2}$;

б) $\dfrac{x+5}{-1} = \dfrac{y+2}{3} = \dfrac{z-4}{0}$ и $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x - 3y + 5 = 0; \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x + y + z - 6 = 0, \\ x + y + 4 = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x + 2y + 3z - 6 = 0, \\ x - 3y + z + 1 = 0. \end{cases}$

215. Доказать, что следующие прямые взаимно перпендикулярны[1]:

а) $\dfrac{x+7}{4} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z-3}{-1}$ и $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+5}{-1} = \dfrac{z+1}{3}$;

б) $\dfrac{x-2}{-7} = \dfrac{y+3}{1} = \dfrac{z-1}{5}$ и $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z-2}{2}$.

216. Доказать, что прямые AC и BD, проходящие соответственно через точки $A\ (2, -3, 1)$, $B\ (1, 4, 0)$, $C\ (-4, 1, 1)$, $D\ (-5, -5, 3)$, взаимно перпендикулярны.

217. Найти косинусы углов между осями координат и каждой из следующих прямых:

а) $\dfrac{x-3}{5} = \dfrac{y-2}{1} = \dfrac{z}{3}$; б) $\dfrac{x+1}{-2} = \dfrac{y}{3} = \dfrac{z}{-1}$;

в) $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y+1}{1} = \dfrac{z}{1}$; г) $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+1}{0} = \dfrac{z-3}{5}$.

218. Определить синус угла между прямой $\dfrac{x}{-2} = \dfrac{y+1}{3} = \dfrac{z-2}{-1}$ и плоскостью $x + 2y - z + 1 = 0$.

219. Найти синус угла между прямой $\begin{cases} 2x + y - z + 3 = 0, \\ x + y + z - 4 = 0 \end{cases}$ и каждой из координатных плоскостей.

220. Среди прямых:

а) $\begin{cases} 2x - y + z - 6 = 0, \\ x + 3y - z + 1 = 0; \end{cases}$ б) $x = 2t - 1,\ y = 3t,\ z = 5;$

---

[1] Мы, вообще говоря, не предполагаем, что прямые пересекаются.

в) $\frac{x-1}{3}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{0}$; г) $\frac{x-3}{-4}=\frac{y+1}{6}=\frac{z-5}{14}$

указать прямые, перпендикулярные к плоскости $2x-3y-7z+$ $+6=0$.

221. Найти расстояние от точки $M_0(-2, 1, 3)$ до прямой

$$\begin{cases} x+y-2z=0, \\ 3x-y+z-3=0. \end{cases}$$

222. Найти расстояния между прямыми в каждом из следующих случаев:

а) $\begin{cases} x=2t-3, \\ y=t+1, \\ z=-2t-\frac{5}{2} \end{cases}$ и $\begin{cases} x+2y+2z+6=0, \\ x+y-1=0; \end{cases}$

б) $\frac{x+1}{-1}=\frac{y+2}{3}=\frac{z-4}{-\frac{1}{2}}$ и $\frac{x}{2}=\frac{y-1}{6}=\frac{z+1}{1}$;

в) $\frac{x-3}{-1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z+2}{1}$ и $\frac{x-1}{1}=\frac{y+7}{3}=\frac{z+2}{2}$;

г) $\begin{cases} 5x-y-z=0, \\ 7x-4y-2z=0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-2y+z+3=0, \\ x-y+z-3=0; \end{cases}$

д) $\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{4}$ и $\frac{x-2}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-4}{5}$.

223. Треугольник ABC задан координатами своих вершин: A (2, —8, 6), B (0, 8, 3) и C (3, 1, 6). Найти длину высоты этого треугольника, проведенной из вершины C.

§ 17. ЗАДАЧИ НА СОЧЕТАНИЯ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ

В приложениях аналитической геометрии часто приходится предварительно рассматривать различного рода задачи на сочетания прямых и плоскостей в пространстве. Этому вопросу посвящен данный параграф. Здесь решения задач даются в общем виде и отдельные задачи иллюстрируются конкретными числовыми примерами. От читателя не требуется запоминание всех выводов и формул этого параграфа. Требуется только четкое понимание принципов решения задач. Необходимо также в каждом конкретном случае уметь решать тот или иной числовой пример.

Для удобства дальнейшего изложения введем следующую нумерацию для уравнений прямых и плоскостей, встречающихся в формулировках задач этого параграфа:

$$\frac{x-x_1}{\alpha_1}=\frac{y-y_1}{\beta_1}=\frac{z-z_1}{\gamma_1}, \tag{1}$$

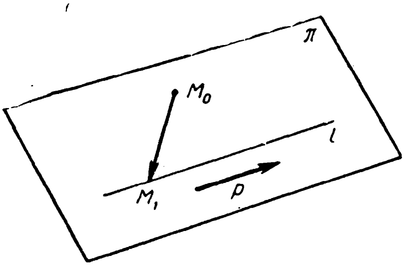


Рис. 70

$$\frac{x-x_2}{\alpha_2}=\frac{y-y_2}{\beta_2}=\frac{z-z_2}{\gamma_2}; \qquad (2)$$

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0; \end{cases} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0, \\ A_4x+B_4y+C_4z+D_4=0; \end{cases} \qquad (4)$$

$$Ax+By+Cz+D=0. \qquad (5)$$

1. Задачи на составление уравнения плоскости, определяемой различными данными.

Задача 1. В некоторой аффинной системе координат дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и не проходящая через нее прямая l каноническими уравнениями (1). Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 и содержащей прямую l.

Решение. Пусть π — плоскость, проходящая через M_0 и содержащая прямую l. Для того чтобы написать уравнение плоскости π, очевидно, необходимо иметь координаты некоторой точки этой плоскости и двух неколлинеарных векторов, параллельных ей (рис. 70). Если в качестве начальной точки выбрать точку M_0, а за направляющие векторы взять неколлинеарные векторы $\overline{M_0M_1}\ \{x_1-x_0, y_1-y_0, z_1-z_0\}$ и $p\ \{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, где M_1 — начальная точка, а p — направляющий вектор прямой, то уравнение плоскости π будет иметь следующий вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix}=0. \qquad (6)$$

Пример 1. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(-1, 0, 5)$ и содержащей прямую l, заданную уравнениями

$$\frac{x}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z}{4}.$$

Решение. В данном случае начальная точка M_1 прямой совпадает с началом координат, а вектор p имеет координаты $\{2, -3, 4\}$. Поэтому уравнение (6) имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x+1 & y & z-5 \\ 1 & 0 & -5 \\ 2 & -3 & 4 \end{vmatrix}=0$$

или $15x+14y+3z=0$. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что полученное уравнение плоскости удовлетворяет всем условиям задачи.

Решим предыдущую задачу в предположении, что прямая l задана своими общими уравнениями.

Задача 2. В некоторой аффинной системе координат дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и не проходящая через нее прямая l общими уравнениями (3). Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 и содержащей прямую l.

Решение. Первый способ. Пользуясь способом, изложенным в § 14, легко определить координаты начальной точки и направляющего вектора прямой l, и тем самым задачу можно свести к предыдущей задаче. Предлагаем читателю самостоятельно написать уравнение искомой плоскости в данном случае.

Второй способ. Искомая плоскость π, проходящая через точку M_0 и прямую l, принадлежит пучку плоскостей, определяемых плоскостями (3). Поэтому намечается следующий план решения задачи.

1) Напишем уравнение пучка плоскостей, определяемого плоскостями (3). Пусть λ и μ — параметры пучка.

2) Потребуем, чтобы плоскость, принадлежащая данному пучку, проходила через точку M_0, и из полученного соотношения определим значения параметров λ и μ.

3) Подставив значения λ и μ в общее уравнение пучка, получим уравнение искомой плоскости.

Осуществим намеченный план.

Как известно, уравнение пучка, определяемого прямой (3), записывается следующим образом:

$$\lambda(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \quad (7)$$

Подставив сюда координаты точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$, получаем:

$$\lambda(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1) + \mu(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2) = 0.$$

Так как точка M_0 не лежит на прямой l, то по крайней мере один из коэффициентов при λ и μ не равен нулю. Поэтому за λ и μ можно принять следующие числа:

$$\lambda = A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2, \quad \mu = -(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1).$$

Подставив эти значения λ и μ в соотношение (7), окончательно получаем:

$$(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2z_0 + D_2)(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) - \\ -(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1z_0 + D_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \quad (8)$$

Пример 2. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(2, 5, -3)$ и содержащей прямую l:

$$\begin{cases} x - y + z = 0, \\ x + 2y - 4z + 1 = 0. \end{cases}$$

Система координат аффинная.

Решение. Подставив значение координат точки M_0 и коэффициентов уравнений прямой l в соотношение (8), получаем:

$$25(x - y + z) + 6(x + 2y - 4z + 1) = 0$$

или $31x - 13y + z + 6 = 0$.

Задача. 3. Написать уравнение плоскости π, определяемой двумя различными пересекающимися или параллельными прямыми l_1 и l_2, которые в аффинной системе координат заданы каноническими уравнениями (1) и (2).

Решение. Из канонических уравнений прямых l_1 и l_2 определяем координаты начальных точек и направляющих векторов этих прямых:

$$M_1(x_1,\ y_1,\ z_1),\ \boldsymbol{p}_1\{\alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1\},\ M_2(x_2,\ y_2,\ z_2),\ \boldsymbol{p}_2\{\alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2\}.$$

Возможны два случая:

а) Прямые l_1 и l_2 не параллельны. В этом случае векторы $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ не коллинеарны, поэтому плоскость π может быть определена точкой M_1 и векторами $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$. Уравнение плоскости имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0. \qquad (9)$$

б) Прямые l_1 и l_2 параллельны. В этом случае векторы $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ коллинеарны, но $\boldsymbol{p}_1$ и $\overline{M_1M_2}$ не коллинеарны, поэтому в уравнении (9) координаты вектора $\boldsymbol{p}_2$ можно заменить координатами вектора $\overline{M_1M_2}$:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0. \qquad (10)$$

Интересно отметить, что если прямые l_1 и l_2 не лежат в одной плоскости, то уравнением (9) определяется плоскость, содержащая прямую l_1 и параллельная прямой l_2, а уравнением (10) — плоскость, проходящая через l_1 и пересекающая прямую l_2 в точке M_2. Предлагаем читателю самостоятельно доказать эти предложения.

Задача 4. Пусть в аффинной системе координат дана плоскость (5) и точка $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$, не лежащая в этой плоскости. Написать уравнение плоскости π, проходящей через данную точку M_0 и параллельной данной плоскости.

Решение. В § 11, п. 4 было отмечено, что уравнение пучка плоскостей, параллельных данной, имеет вид: $Ax + By + Cz + \lambda = 0$. Подберем коэффициент λ так, чтобы плоскость пучка проходила через точку $M_0(x_0,\ y_0,\ z_0)$. Для этого в уравнение пучка подставим координаты точки M_0:

$$Ax_0 + By_0 + Cz_0 + \lambda = 0,$$

откуда $\lambda = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$.

Таким образом, уравнение искомой плоскости имеет вид:

$$Ax + By + Cz - (Ax_0 + By_0 + Cz_0) = 0. \qquad (11)$$

П р и м е р 3. В аффинной системе координат дана точка $M_0(-3, 5, 1)$ и плоскость уравнением $x - 2y + z + 1 = 0$. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку M_0 и параллельной данной плоскости.

Р е ш е н и е. Подставив координаты точки M_0 и коэффициенты данной плоскости в уравнение (11), получаем:

$$x - 2y + z - (-3 - 2 \cdot 5 + 1) = 0 \quad \text{или} \quad x - 2y + z + 12 = 0.$$

З а д а ч а 5. В аффинной системе координат даны две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 своими уравнениями (1) и (3). Написать уравнение плоскости π, проходящей через прямую l_2 и параллельной прямой l_1[1].

Р е ш е н и е. П е р в ы й с п о с о б. Определим координаты начальной точки M_2 и направляющего вектора p_2 прямой l_2. Согласно теореме [14.1] имеем:

$$p_2\left\{\begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}\right\}.$$

Если $M_2(x_2, y_2, z_2)$ — начальная точка прямой l_2, то уравнение плоскости π имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \begin{vmatrix} B_1 & C_1 \\ B_2 & C_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} C_1 & A_1 \\ C_2 & A_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0.$$

В т о р о й с п о с о б. Запишем уравнение пучка, определяемого плоскостями, заданными уравнениями (3), и из этого пучка выберем плоскость, параллельную прямой l_1. Уравнение пучка имеет вид:

$$\lambda (A_1x + B_1y + C_1z + D_1) + \mu (A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0.$$

Для того чтобы плоскость пучка была параллельна прямой l_1, необходимо и достаточно, чтобы

$$\lambda (A_1\alpha_1 + B_1\beta_1 + C_1\gamma_1) + \mu(A_2\alpha_1 + B_2\beta_1 + C_2\gamma_1) = 0.$$

Так как данные прямые скрещиваются, то хотя бы один из коэффициентов при λ и μ в этом соотношении отличен от нуля. Поэтому за λ и μ можно принять следующие числа: $\lambda_1 = A_2\alpha_1 + B_2\beta_1 + C_2\gamma_1$, $\mu = -(A_1\alpha_1 + B_1\beta_1 + C_1\gamma_1)$. Подставив их в уравнение пучка, получим уравнение искомой плоскости:

$$(A_2\alpha_1 + B_2\beta_1 + C_2\gamma_1)(A_1x + B_1y + C_1z + D_1) - \\ - (A_1\alpha_1 + B_1\beta_1 + C_1\gamma_1)(A_2x + B_2y + C_2z + D_2) = 0. \quad (12)$$

---

[1] Плоскость π называем о п о р н о й. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит одна и только одна опорная плоскость (см. теорему [18.3]).

П р и м е р 4. В аффинной системе координат даны две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 своими уравнениями:

$$(l_1):\ \frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z+1}{4} \text{ и } (l_2):\ \begin{cases} x+y-2z+1=0,\\ x-z=0.\end{cases}$$

Написать уравнение плоскости, проходящей через прямую l_2 и параллельной прямой l_1.

Р е ш е н и е. Подставив в (12) значения коэффициентов уравнений прямой l_2 и координат вектора p_1, получаем: $(2-4)(x+y-2z+1)-(2+3-8)(x-z)=0$ или окончательно: $x-2y+z-2=0$.

Предлагаем учащемуся по аналогии с предыдущими задачами решить следующую задачу.

З а д а ч а 6. В аффинной системе координат даны две точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и прямая l_1 каноническими уравнениями (1). Написать уравнение плоскости, проходящей через точки M_1 и M_2 и параллельной прямой l_1. Выяснить, всегда ли существует такая плоскость.

2. Задачи на составление уравнений прямой, определяемой различными данными.

З а д а ч а 7. В аффинной системе координат дана прямая l_1 своими каноническими уравнениями (1) и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не лежащая на этой прямой. Написать уравнения прямой l, проходящей через точку M_0 и параллельной прямой l_1.

Р е ш е н и е. Прямая l проходит через точку M_0 и параллельна прямой l_1, поэтому точку M_0 можно принять за начальную точку, а вектор $p_1\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$—за направляющий вектор этой прямой. Таким образом, мы сразу получаем канонические уравнения прямой l:

$$\frac{x-x_0}{\alpha_1}=\frac{y-y_0}{\beta_1}=\frac{z-z_0}{\gamma_1}.$$

З а д а ч а 8. В аффинной системе координат дана точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и прямая l, не проходящая через эту точку, своими общими уравнениями (3). Написать уравнения прямой, проходящей через точку M_0 и параллельной прямой l.

Р е ш е н и е. Задача решается аналогично предыдущей. Пользуясь теоремой [14.1], найдем координаты направляющего вектора прямой l, а следовательно, и искомой прямой:

$$p\left\{\begin{vmatrix} B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}\right\}.$$

Таким образом, искомая прямая имеет следующие уравнения:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} B_1 & C_1\\ B_2 & C_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} C_1 & A_1\\ C_2 & A_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1\\ A_2 & B_2\end{vmatrix}}.$$

Пример 5. Через точку $M_0(1, -6, 3)$ провести прямую, параллельную прямой $\begin{cases} 3x - y + 4 = 0, \\ x + y - 4z - 1 = 0. \end{cases}$

Система координат аффинная.

Решение. В силу теоремы [14.1] направляющий вектор данной, а следовательно, и искомой прямой имеет координаты: $p\{4, 12, 4\}$. Поэтому уравнение искомой прямой имеет вид:

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y+6}{12} = \frac{z-3}{4}.$$

Задача 9. В аффинной системе координат даны две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 своими каноническими уравнениями (1) и (2) и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не лежащая на этих прямых. Написать уравнения прямой l, проходящей через точку M_0 и пересекающей данные две прямые.

Решение. Первый способ. Воспользуемся следующим очевидным геометрическим фактом: прямая l является линией пересечения двух плоскостей π_1 и π_2, где π_1 — плоскость, проходящая через прямую l_1 и точку M_0, а π_2 — плоскость, проходящая через прямую l_2 и точку M_0.

Плоскости π_1 и π_2 согласно задаче 1 имеют следующие уравнения:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0, \tag{13}$$

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0. \tag{14}$$

Система, состоящая из уравнений (13) и (14), есть общие уравнения прямой l.

Второй способ. Пусть $p\{\alpha, \beta, \gamma\}$ — направляющий вектор прямой l. Как прямые l_1 и l, так и прямые l_2 и l пересекаются, поэтому согласно теореме [15.1] будем иметь:

$$\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha & \beta & \gamma \end{vmatrix} = 0.$$

Из этих двух соотношений определяем $\alpha : \beta : \gamma$.

Искомые уравнения прямой l имеют вид:

$$\frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}.$$

Пример 6. В аффинной системе координат дана точка $M_0(1, -2, 1)$ и две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y+2}{-1}=\frac{z+3}{1} \text{ и } \frac{x}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-1}{5}.$$

Написать уравнения прямой, проходящей через точку M_0 и пересекающей две данные прямые.

Решение. Пользуясь соотношениями (13) и (14), напишем уравнения плоскостей π_1 и π_2, проходящих через точку M_0 и соответственно через прямые l_1 и l_2:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y+2 & z+3 \\ -2 & 0 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0 \text{ и } \begin{vmatrix} x & y+1 & z-1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 5 \end{vmatrix}=0.$$

После элементарных преобразований получаем общие уравнения искомой прямой l:

$$\begin{cases} 2x+3y+z+3=0, \\ 5x+5y-z+6=0. \end{cases}$$

Задача 10. В аффинной системе координат даны две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 общими уравнениями (3) и (4) и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не лежащая на этих прямых. Написать уравнения прямой, проходящей через точку M_0 и пересекающей прямые l_1 и l_2.

Решение. Напишем уравнения плоскостей π_1 и π_2, проходящих через точку M_0 и соответственно через прямые l_1 и l_2, пользуясь решением задачи 2:

$$(A_2x_0+B_2y_0+C_2z_0+D_2)(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)-$$
$$-(A_1x_0+B_1y_0+C_1z_0+D_1)(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0,$$
$$(A_4x_0+B_4y_0+C_4z_0+D_4)(A_3x+B_3y+C_3z+D_3)-$$
$$-(A_3x_0+B_3y_0+C_3z_0+D_3)(A_4x+B_4y+C_4z+D_4)=0.$$

Эти два уравнения являются общими уравнениями прямой l.

Задача 11. В афинной системе координат даны две прямые l_1, l_2 соответственно своими каноническими уравнениями (1), (2) и прямая l_3 уравнениями

$$\frac{x-x_3}{\alpha_3}=\frac{y-y_3}{\beta_3}=\frac{z-z_3}{\gamma_3}.$$

Написать уравнения прямой l, пересекающей прямые l_1, l_2 и параллельной прямой l_3[1].

Решение. Очевидно, задача имеет единственное решение в том и только в том случае, когда направляющие векторы данных

[1] В этой задаче термин «параллельность» понимается в широком смысле слова: искомая прямая должна быть либо параллельна прямой l_3, либо совпадать с ней.

прямых не компланарны. Будем предполагать, что это условие выполнено. Прямую l можно рассматривать, как линию пересечения двух плоскостей: π_1, проходящей через l_1 и параллельной l_3, и π_2, проходящей через l_2 и параллельной l_3. Записав уравнения этих плоскостей, мы получим соотношения, определяющие в своей совокупности уравнения искомой прямой. Для отыскания уравнений плоскостей π_1 и π_2 воспользуемся решением задачи 5:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Эти соотношения являются общими уравнениями искомой прямой l.

3. Некоторые метрические задачи на сочетания прямых и плоскостей. Во всех задачах этого пункта предполагается, что система координат прямоугольная декартова.

З а д а ч а 12. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат дана точка M_0 и прямая l_1 уравнением (1). Написать уравнение плоскости π, проходящей через данную точку и перпендикулярной к данной прямой.

Р е ш е н и е. Так как π перпендикулярна к прямой l_1, то она перпендикулярна к направляющему вектору $\boldsymbol{p}$ этой прямой. Таким образом, задача сводится к составлению уравнения плоскости, проходящей через точку M_0 (x_0, y_0, z_0) и перпендикулярной к вектору $\boldsymbol{p}_1\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$. Пользуясь задачей 1, § 12, получаем уравнение искомой плоскости:

$$\alpha_1 (x-x_0) + \beta_1(y-y_0)+\gamma_1 (z-z_0) = 0.$$

Полученное уравнение справедливо как в том случае, когда точка M_0 не лежит на прямой l_1, так и в том случае, когда она принадлежит l_1.

З а д а ч а 13. В прямоугольной декартовой системе координат дана плоскость π общим уравнением (5) и не перпендикулярная к ней прямая l_1 каноническими уравнениями (1). Написать уравнение плоскости π', проходящей через прямую l и перпендикулярной к плоскости π.

Р е ш е н и е. Искомая плоскость проходит через прямую l_1, поэтому она содержит начальную точку M_1 (x_1, y_1, z_1) прямой l_1 и параллельна направляющему вектору $\boldsymbol{p}\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$. Так как, кроме того, плоскость π' перпендикулярна к плоскости π, то вектор $\boldsymbol{n}\{A, B, C\}$ согласно теореме [12.2] параллелен π'. Итак, задача сводится к составлению уравнения плоскости, проходящей через точку M_1 и параллельной векторам $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{n}$:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ A & B & C \end{vmatrix} = 0.$$

Пользуясь этой задачей, можно написать уравнения плоскостей, проектирующих данную прямую l на координатные плоскости. В самом деле, рассмотрим следующий пример.

Пример 7. В пространстве дана прямая своими каноническими уравнениями:

$$\frac{x-3}{4}=\frac{y}{-1}=\frac{z+1}{-2}.$$

Составить уравнения плоскостей, проектирующих данную прямую на координатные плоскости.

Решение. В силу предыдущей задачи проектирующие плоскости будут иметь следующие уравнения:

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0,$$

$$\begin{vmatrix} x-3 & y & z+1 \\ 4 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0,$$

или

$$\begin{vmatrix} y & z+1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x-3 & z+1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix}=0, \quad \begin{vmatrix} x-3 & y \\ 4 & -1 \end{vmatrix}=0.$$

Мы видим, что полученные уравнения в точности совпадают с каноническими уравнениями прямой. Это не случайно (сравни § 14, стр. 151, 152).

Задача 14. Пусть в аффинной системе координат дана прямая l_1 своими каноническими уравнениями (1) и плоскость π уравнением (5), причем прямая l_1 не лежит в плоскости π. Написать уравнение проекции прямой l_1 на плоскость π.

Решение. Пусть l — проекция прямой l_1 на плоскость π. Очевидно, l есть линия пересечения двух плоскостей: плоскости π и плоскости π', проектирующей прямую l_1 на плоскость π. В силу предыдущей задачи уравнение плоскости π' имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0.$$

Таким образом, соотношения:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ A & B & C \end{vmatrix}=0, \\ Ax+By+Cz+D=0 \end{cases}$$

являются общими уравнениями прямой l.

Пример 8. Написать уравнения проекции прямой

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y+5}{-7}=\frac{z-2}{2}$$

на координатные плоскости.

Решение. Так как $\frac{x-1}{3}=\frac{y+5}{-7}$ есть уравнение плоскости, проектирующей данную прямую на плоскость Oxy, то соотношения

$$\begin{cases}\frac{x-1}{3}=\frac{y+5}{-7},\\ z=0\end{cases}$$

являются уравнениями проекции данной прямой на координатную плоскость Oxy. Аналогично получаем проекции этой прямой на другие координатные плоскости:

$$\begin{cases}\frac{y+5}{-7}=\frac{z-2}{2},\\ x=0;\end{cases}\qquad \begin{cases}\frac{x-1}{3}=\frac{z-2}{2},\\ y=0.\end{cases}$$

Задача 15. Составить уравнения прямой l, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ и перпендикулярной к плоскости π, заданной уравнением $Ax+By+Cz+D=0$.

Предлагаем учащемуся самостоятельно убедиться в том, что прямая l имеет уравнение: $\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-z_0}{C}$.

Задача 16. Через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ провести прямую l, перпендикулярную одновременно к двум непараллельным прямым l_1 и l_2, заданным каноническими уравнениями (1) и (2).

Решение. За направляющий вектор прямой l можно взять векторное произведение направляющих векторов $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$ прямых l_1 и l_2. В данном случае $\boldsymbol{p}_1\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$, $\boldsymbol{p}_2\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$, поэтому

$$\boldsymbol{p}=[\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2]\left\{\begin{vmatrix}\beta_1 & \gamma_1\\ \beta_2 & \gamma_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}\gamma_1 & \alpha_1\\ \gamma_2 & \alpha_2\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}\right\}.$$

Искомое уравнение прямой l имеет вид:

$$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix}\beta_1 & \gamma_1\\ \beta_2 & \gamma_2\end{vmatrix}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix}\gamma_1 & \alpha_1\\ \gamma_2 & \alpha_2\end{vmatrix}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{vmatrix}}.$$

Пример 9. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(1, 2, 4)$ и перпендикулярной к оси Oz и к биссектрисе угла, образованного координатными векторами $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$.

Решение. Заметим, что координатный вектор $\boldsymbol{k}$ является направляющим вектором оси Oz, а вектор $\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}$ направлен по биссектрисе угла, образованного векторами $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$. Поэтому направляющие векторы данных прямых имеют координаты: $p_1\{0, 0, 1\}$ и $p_2\{1, 1, 0\}$.

В силу предыдущей задачи уравнения искомой прямой имеют вид:

$$\frac{x-1}{\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}} = \frac{y-2}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{z-4}{\begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} \text{ или } \frac{x-1}{-1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-4}{0}.$$

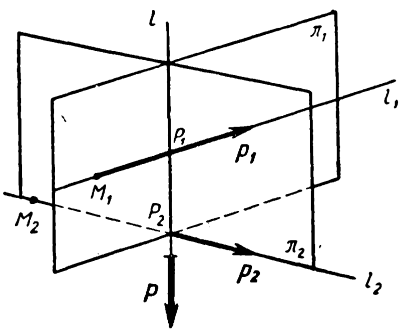


Рис. 71

Задача 17. В пространстве даны две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2 своими каноническими уравнениями (1) и (2). Написать уравнения прямой, перпендикулярной к данным прямым и пересекающей каждую из них.

Решение. Пусть l — прямая, пересекающая прямые l_1 и l_2 соответственно в точках P_1 и P_2 и перпендикулярная к этим прямым (рис. 71). Рассмотрим две плоскости: плоскость π_1, проходящую через l_1 и l, и плоскость π_2, проходящую через l_2 и l. Очевидно, эти плоскости не совпадают, так как прямые l_1 и l_2 скрещиваются; они пересекаются по прямой l. Таким образом, задача сводится к составлению уравнений плоскости π_1 и π_2.

Легко понять, что плоскость π_1 проходит через начальную точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ прямой l_1 и коллинеарна направляющему вектору $p_1\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ прямой l_1 и направляющему вектору p прямой l. В силу предыдущей задачи направляющий вектор p прямой l имеет координаты:

$$\left\{ \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \right\}.$$

Таким образом, уравнение плоскости π_1 имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0.$$

По аналогии уравнение плоскости π_2 имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_2 & y-y_2 & z-z_2 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = 0.$$

Система, состоящая из полученных уравнений плоскостей π_1 и π_2, определяет искомую прямую l.

Замечание. При решении этой задачи можно было рассуждать несколько иначе. По существу π_1 и π_2 есть плоскости, проходящие соответственно через прямые l_1 и l_2 и перпендикулярные к опорным плоскостям. Уравнения этих плоскостей легко записать, если воспользоваться задачей 13.

Задача 18. Дана прямая l_1 каноническими уравнениями (1) и не лежащая на ней точка M_0. Написать уравнения прямой l, проходящей через точку M_0 и пересекающей прямую l_1 под прямым углом.

Решение. Первый способ. Очевидно, прямая l является линией пересечения плоскости π_1, проходящей через данную точку M_0 и прямую l_1, и плоскости π_2, проходящей через данную точку M_0 и перпендикулярной к l_1. Поэтому, записав уравнения плоскостей π_1 и π_2, мы получим общие уравнения прямой:

$$\begin{cases} \begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_0-x_1 & y_0-y_1 & z_0-z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} = 0, \\ \alpha_1(x-x_0)+\beta_1(y-y_0)+\gamma_1(z-z_0)=0. \end{cases}$$

Второй способ. Пусть $p\{\alpha, \beta, \gamma\}$ — направляющий вектор прямой l. Если $p_1\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ — направляющий вектор, а $M_1(x_1, y_1, z_1)$ — начальная точка прямой l_1, то из условий задачи следует, что векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{p}_1$ взаимно перпендикулярны, а векторы $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{p}_1$ и $\overline{M_0M_1}$ компланарны. В координатах эти условия пишутся так:

$$\alpha\alpha_1+\beta\beta_1+\gamma\gamma_1=0,$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Из этих двух соотношений определяем $\alpha : \beta : \gamma$. Далее записываем канонические уравнения прямой l.

Пример 10. Написать уравнения прямой, проходящей через точку $M_0(-1, 3, 5)$ и пересекающей ось Ox под прямым углом.

Решение. Пользуясь предыдущей задачей, напишем уравнения плоскостей π_1 и π_2. Ось Ox определяется начальной точкой

$O\,(0, 0, 0)$ и направляющим вектором $\mathbf{i}\{1, 0, 0\}$, поэтому уравнения плоскостей π_1 и π_2 имеют вид:

$$(\pi_1): \begin{vmatrix} x & y & z \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } 5y - 3z = 0,$$

$$(\pi_2): 1\cdot(x+1) + 0\cdot(y-3) + 0\cdot(z-5) = 0 \text{ или } x + 1 = 0.$$

Таким образом, искомая прямая задается следующими общими уравнениями:

$$\begin{cases} 5y - 3z = 0, \\ x + 1 = 0. \end{cases}$$

Задачи и упражнения

224. Написать уравнения плоскостей, проходящих через начало координат и каждую из прямых:

а) $\frac{x-1}{3} = \frac{4}{7} = \frac{z+5}{-1}$; б) $\begin{cases} 2x - y + z - 3 = 0, \\ x + y - 5z + 3 = 0; \end{cases}$

в) $x = t, \quad y = -1 + 5t, \quad z = 3 - 2t$.

225. Написать уравнения плоскостей, проходящих через точку $M\,(-1, 5, 3)$ и каждую из координатных осей.

226. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\begin{cases} x - 3y + z - 7 = 0, \\ 2x + y - z + 5 = 0 \end{cases}$ и точку $(3, -1, 5)$.

227. Показать, что прямые

$$\frac{x+3}{2} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-7}{-3} \text{ и } \frac{x+1}{4} = \frac{y+1}{5} = \frac{z+1}{-1}$$

лежат в одной плоскости. Составить уравнение плоскости, проходящей через эти прямые.

228. Показать, что прямые

$$\frac{x+5}{3} = \frac{y+4}{1} = \frac{z-7}{-2} \text{ и } \begin{cases} 3x + 2y + z - 2 = 0, \\ x - 3y + 2z - 13 = 0 \end{cases}$$

лежат в одной плоскости. Составить уравнение этой плоскости.

229. Доказать, что следующие пары прямых параллельны:

а) $x = 2 + 4t, \quad y = -6t, \quad z = -1 - 8t$ и
$x = 7 - 6t, \; y = 2 + 9t, \quad z = 12t$;

б) $\frac{x+2}{3} = \frac{y+1}{-2} = \frac{z}{1}$ и $\begin{cases} x + y - z = 0, \\ x - y - 5z - 8 = 0. \end{cases}$

Составить уравнения плоскостей, проходящих через каждую из этих пар прямых.

230. Составить уравнение плоскости, проходящей через прямую $\frac{x+1}{1}=\frac{y-3}{4}=\frac{z-1}{2}$ и параллельной прямой

$$\begin{cases} 2x-y+z-3=0, \\ x+2y-3z+5=0. \end{cases}$$

231. Составить уравнение плоскости, проходящей через точку M (1, 1, —3) и параллельной прямым

$$\begin{cases} 2x-2y+3z-4=0, \\ x+2y-4z+1=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 3x-y-z=0, \\ x+y-3z+1=0. \end{cases}$$

232. Написать уравнение плоскости, проходящей через начало координат, точку $M_0(-3, 1, 7)$ и параллельной прямой $x=5t$, $y=-1+t$, $z=-2t$.

233. Составить уравнения прямой, проходящей через точку (0, 0, 1) и пересекающей каждую из прямых:

$$\begin{cases} x-2y+z-1=0, \\ 2x-y+2z-3=0; \end{cases} \quad \frac{x-1}{3}=\frac{y}{2}=\frac{z+1}{-1}.$$

234. Составить уравнения прямой, проходящей через точку (2, —1, 1) и пересекающей каждую из прямых:

$$\begin{cases} 2x-y+4=0, \\ 2y+3z-10=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} x+3z-4=0, \\ 2x+5z-8=0. \end{cases}$$

235. Составить уравнения прямой, пересекающей прямые

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z-5}{-3}, \quad \frac{x+2}{3}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+1}{-5}$$

и параллельной прямой

$$x=1-2t, \ y=3t, \ z=5-t.$$

236. Найти уравнения прямой, параллельной прямой

$$\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{3}$$

и пересекающей прямые:

$$\begin{cases} 2x+y-1=0, \\ x-2y+3z=0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} 3x-y+z+2=0, \\ 4x+5y-2z-3=0. \end{cases}$$

237. Составить уравнения прямой, проходящей через точку пересечения прямой $\frac{x-3}{3}=\frac{y}{7}=\frac{z+1}{4}$ с плоскостью Oyz и параллельной прямой

$$\begin{cases} x-y+5z-1=0, \\ 2x+y-z+6=0. \end{cases}$$

238. Из начала координат опустить перпендикуляр на плоскость $x - 3y + 5z - 6 = 0$.

239. Из точки $(1, -2, 5)$ опустить перпендикуляры на координатные плоскости.

240. Найти координаты проекции точки $(5, -6, 7)$ на плоскость $x - 4y + 3z + 4 = 0$.

241. Написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M(1, -5, 3)$ и перпендикулярной к прямой в каждом из следующих случаев:

а) $\frac{x+1}{5} = \frac{y-6}{-1} = \frac{z+2}{3}$; б) $\begin{cases} x + 3y + 5z - 7 = 0, \\ x + y - z + 1 = 0. \end{cases}$

242. Написать уравнения перпендикуляра, опущенного из точки $(2, 3, -1)$ на прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y-2}{4} = \frac{z}{3}$.

243. Найти координаты проекции точки $(-3, 10, 2)$ на прямую $\frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{-5} = \frac{z}{1}$.

244. Через прямую $\frac{x-1}{-2} = \frac{y+2}{1} = \frac{z+5}{3}$ провести плоскость, перпендикулярную к плоскости $x + 5y + 7z - 3 = 0$.

245. Составить уравнения проекции прямой

$$\frac{x-1}{3} = \frac{y-3}{-1} = \frac{z-2}{5}$$

на плоскость $3x - y + z - 1 = 0$.

246. Составить уравнения проекции прямой

$\begin{cases} x + 3y + z - 6 = 0 \\ x + 2y - z - 1 = 0 \end{cases}$ на плоскость $2x + y - z - 6 = 0$.

247. Составить уравнения проекций прямой $x = -1 + t$, $y = -4t$, $z = 2 + 6t$ на координатные плоскости.

248. Составить уравнения прямой, проходящей через начало координат и перпендикулярной к прямым:

$$\frac{x+1}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}, \quad \frac{x+5}{1} = \frac{y-7}{5} = \frac{z+1}{-2}.$$

249. Составить уравнения общего перпендикуляра двух прямых:

$$\frac{x+3}{-4} = \frac{y-6}{3} = \frac{z}{2}, \quad \frac{x+2}{-4} = \frac{y}{1} = \frac{z-7}{1}.$$

250. Составить уравнения общего перпендикуляра двух прямых:

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y+15}{-7} = \frac{z-9}{5}, \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z-9}{-3}.$$

251. Составить уравнения общего перпендикуляра двух прямых:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0, \\ 7x - 4y - 2z = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 2y + z + 3 = 0, \\ x - y + z - 3 = 0. \end{cases}$$

§ 18. ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ПЛОСКОСТИ И ПРЯМОЙ К ДОКАЗАТЕЛЬСТВУ ТЕОРЕМ И РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ СТЕРЕОМЕТРИИ

Изложенная в главах III и IV теория плоскости и прямой может быть применена к доказательству теорем и решению задач элементарной геометрии. В этом параграфе будут рассмотрены некоторые примеры приложения теории прямой и плоскости к доказательству теорем и решению задач стереометрии.

1. Теоремы о взаимном расположении прямых и плоскостей.

Теорема [18.1]. *Если прямая l_1 и плоскость π перпендикулярны к одной и той же прямой l_2, то они параллельны между собой*[1].

Доказательство. Пусть в произвольно выбранной прямоугольной декартовой системе координат данные прямые l_1, l_2 и плоскость π имеют уравнения:

$$(l_1):\ \frac{x-x_0}{\alpha_1} = \frac{y-y_0}{\beta_1} = \frac{z-z_0}{\gamma_1},$$

$$(l_2):\ \frac{x-x_1}{\alpha_2} = \frac{y-y_1}{\beta_2} = \frac{z-z_1}{\gamma_2},$$

$$(\pi):\ Ax + By + Cz + D = 0.$$

Так как прямые l_1 и l_2 взаимно перпендикулярны, то

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0. \tag{1}$$

С другой стороны, в силу того что плоскость π перпендикулярна к прямой l_2, имеем: $\alpha_2 = \lambda A$, $\beta_2 = \lambda B$, $\gamma_2 = \lambda C$, где $\lambda \neq 0$. Подставив эти выражения в (1) и сократив на λ, получаем: $A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1 = 0$, т. е. направляющий вектор прямой l_1 параллелен плоскости π. Таким образом, прямая l_1 либо параллельна плоскости π, либо принадлежит этой плоскости. Теорема доказана.

Теорема [18.2]. *Если прямая l параллельна двум пересекающимся плоскостям π и π', то она параллельна их линии пересечения.*

Доказательство. Пусть в некоторой аффинной системе координат данные плоскости π и π' и прямая l имеют уравнения:

$$(\pi):\ Ax + By + Cz + D = 0, \tag{2}$$

$$(\pi'):\ A'x + B'y + C'z + D' = 0, \tag{3}$$

$$(l):\ \frac{x-x_0}{\alpha} = \frac{y-y_0}{\beta} = \frac{z-z_0}{\gamma}. \tag{4}$$

---

[1] В этом параграфе термин «параллельность» понимается в широком смысле слова. Например, предложение «прямая l параллельна плоскости α» следует понимать так: либо $l \parallel \alpha$ в обычном смысле, либо l принадлежит α.

Так как $l \parallel \pi$ и $l \parallel \pi'$, то

$$A\alpha + B\beta + C\gamma = 0, \quad A'\alpha + B'\beta + C'\gamma = 0. \qquad (5)$$

В силу того что плоскости π и π' пересекаются, коэффициенты в уравнениях (2) и (3) не пропорциональны, поэтому хотя бы один из определителей $\begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}$ не равен нулю. Пусть, например, $\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \neq 0$.

Решив систему (5) относительно α и β, получаем:

$$\alpha = -\frac{\begin{vmatrix} C & B \\ C' & B' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}\gamma, \quad \beta = -\frac{\begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}}\gamma.$$

Если ввести обозначение $\dfrac{\gamma}{\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}} = \lambda$, то предыдущие соотношения запишутся так:

$$\alpha = \lambda \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}, \quad \beta = \lambda \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}, \quad \gamma = \lambda \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix}.$$

Таким образом, векторы

$$\{\alpha, \beta, \gamma\} \text{ и } \left\{ \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \right\}$$

коллинеарны. Согласно теореме [14.1] второй вектор является направляющим вектором линии пересечения плоскостей π и π'. Теорема доказана.

Теорема [18.3]. *Если даны две скрещивающиеся прямые, то через каждую из них можно провести одну и только одну плоскость, параллельную второй прямой.*

Доказательство. Пусть l_1 и l_2 — данные скрещивающиеся прямые, определяемые соответственно начальными точками $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$ и направляющими векторами $\boldsymbol{p}_1\{\alpha_1, \beta_1, \gamma_1\}$ и $\boldsymbol{p}_2\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$. Докажем, что существует одна и только одна плоскость π, проходящая через прямую l_1 и параллельная прямой l_2. Доказательство существования нами уже проведено при решении задачи 5, § 17. В самом деле, плоскость π, проходящая через точку M_1 и параллельная неколлинеарным векторам $\boldsymbol{p}_1$ и $\boldsymbol{p}_2$, является искомой. Ее уравнение имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Если раскрыть определитель левой части этого уравнения по элементам первой строки и ввести обозначения

$$\Delta_{\beta\gamma} = \begin{vmatrix} \beta_1 & \gamma_1 \\ \beta_2 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{\gamma\alpha} = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \alpha_1 \\ \gamma_2 & \alpha_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_{\alpha\beta} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \beta_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 \end{vmatrix}, \tag{6}$$

то предыдущее уравнение примет вид:

$$\Delta_{\beta\gamma}x + \Delta_{\gamma\alpha}y + \Delta_{\alpha\beta}z - (\Delta_{\beta\gamma}x_1 + \Delta_{\gamma\alpha}y_1 + \Delta_{\alpha\beta}z_1) = 0. \tag{7}$$

Теперь докажем, что плоскость π, проходящая через l_1 и параллельная l_2, единственная. В самом деле, пусть

$$Ax + By + Cz + D = 0 \tag{8}$$

— уравнение какой-либо плоскости π', проходящей через l_1 и параллельной l_2. Так как l_1 лежит в плоскости π', а l_2 параллельна ей, то согласно теореме [15.5] имеем:

$$A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1 = 0, \tag{9}$$

$$Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D = 0, \tag{10}$$

$$A\alpha_2 + B\beta_2 + C\gamma_2 = 0. \tag{11}$$

Из соотношений (9) и (11), учитывая обозначения (6), получаем:

$$A = \lambda\Delta_{\beta\gamma}, \quad B = \lambda\Delta_{\gamma\alpha}, \quad C = \lambda\Delta_{\alpha\beta}$$

(см. доказательство теоремы [18.2]). Подставив эти значения в соотношения (10), определяем коэффициент D:

$$D = -\lambda(\Delta_{\beta\gamma}x_1 + \Delta_{\gamma\alpha}y_1 + \Delta_{\alpha\beta}z_1).$$

Мы видим, что все коэффициенты уравнения (8) плоскости π' пропорциональны соответствующим коэффициентам уравнения (7) плоскости π. Из теоремы [10.3] следует, что плоскости π и π' совпадают.

Точно так же можно доказать, что существует одна и только одна плоскость, проходящая через l_2 и параллельная l_1.

Теорема [18.4]. *Даны две прямые l_1 и l_2. Для того чтобы существовала плоскость, проходящая через l_1 и перпендикулярная к l_2, необходимо и достаточно, чтобы прямые l_1 и l_2 были взаимно перпендикулярны.*

Доказательство. Пусть прямые l_1 и l_2 даны своими уравнениями в прямоугольной декартовой системе.

$$\frac{x - x_1}{\alpha_1} = \frac{y - y_1}{\beta_1} = \frac{z - z_1}{\gamma_1}, \quad \frac{x - x_2}{\alpha_2} = \frac{y - y_2}{\beta_2} = \frac{z - z_2}{\gamma_2}.$$

Сначала предположим, что через прямую l_1 можно провести плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$, перпендикулярную к прямой l_2. Так как эта плоскость проходит через прямую l_1, то $A\alpha_1 + B\beta_1 + C\gamma_1 = 0$. Кроме того, плоскость перпендикулярна к l_2, поэтому векторы $\{\alpha_2, \beta_2, \gamma_2\}$ и $\{A, B, C\}$ коллинеарны, т. е. $A = \lambda\alpha_2$,

$B = \lambda\beta_2$, $C = \lambda\gamma_2$. Подставив эти значения в предыдущее соотношение, получаем: $\lambda(\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2) = 0$. В силу условия $\lambda \neq 0$ будем иметь:

$$\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + \gamma_1\gamma_2 = 0. \tag{12}$$

Таким образом, мы пришли к выводу, что если через l_1 проходит плоскость, перпендикулярная к l_2, то прямые l_1 и l_2 перпендикулярны друг к другу.

Теперь докажем обратное утверждение. Пусть l_1 и l_2 взаимно перпендикулярны. Докажем, что существует плоскость, проходящая через l_1 и перпендикулярная к l_2. В самом деле, рассмотрим плоскость

$$\alpha_2(x - x_1) + \beta_2(y - y_1) + \gamma_2(z - z_1) = 0. \tag{13}$$

Согласно теореме [15.5] и условию (12) прямая l_1 лежит в этой плоскости. Кроме того, направляющий вектор плоскости (13) совпадает с направляющим вектором прямой l_2, поэтому плоскость (13) перпендикулярна к прямой l_2. Теорема доказана.

2. Теоремы о свойствах тетраэдра.

Т е о р е м а [18.5]. *В произвольном тетраэдре шесть плоскостей, каждая из которых проходит через ребро и середину непересекающегося с ним ребра, пересекаются в одной точке.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $OABC$— данный тетраэдр. Примем за начало координат точку O, а за координатные векторы $e_1 = \overline{OA}$, $e_2 = \overline{OB}$, $e_3 = \overline{OC}$.

Обозначив середины ребер OA, OB, OC, AB, BC, CA соответственно через M_1, M_2, M_3, M_4, M_5 и M_6, будем иметь:

$$M_1\left(\frac{1}{2},\ 0,\ 0\right),\quad M_2\left(0,\ \frac{1}{2},\ 0\right),\quad M_3\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right),$$

$$M_4\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right),\quad M_5\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\quad M_6\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right).$$

Запишем уравнения плоскостей:

$$\begin{array}{llll} (OAM_5): & y - z = 0, & (ABM_3): & x + y + 2z = 1, \\ (OBM_6): & x - z = 0, & (BCM_1): & 2x + y + z = 1, \\ (OCM_4): & x - y = 0, & (CAM_2): & x + 2y + z = 1. \end{array}$$

Легко убедиться в том, что все эти плоскости проходят через точку $Q\left(\frac{1}{4},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$. Других общих точек плоскости не имеют.

В самом деле, координаты точки Q, как нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, удовлетворяют уравнениям всех шести плоскостей. С другой стороны, плоскости

$$y - z = 0,\quad x - z = 0,\quad x + y + 2z = 1$$

имеют единственную общую точку, так как

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0.$$

Отсюда вытекает, что все шесть плоскостей не могут иметь более чем одну общую точку.

Теорема [18.6]. *Если в тетраэдре $OABC$ ребра OA, OB и OC взаимно перпендикулярны, то имеет место соотношение*

$$\frac{1}{OA^2} + \frac{1}{OB^2} + \frac{1}{OC^2} = \frac{1}{OH^2},$$

где OH — высота, опущенная из вершины O на грань ABC, а H — основание перпендикуляра, опущенного из точки O на плоскость ABC.

Доказательство. Точку O примем за начало, а направленные прямые OA, OB, OC — за оси прямоугольной декартовой системы координат. Пусть $OA = a$, $OB = b$, $OC = c$, $OH = h$. Тогда в выбранной системе координат плоскость ABC будет иметь следующее уравнение «в отрезках» (см. § 9, п. 6):

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \quad \text{или} \quad bcx + acy + abz - abc = 0.$$

Вычислим расстояние h от начала координат до этой плоскости, воспользовавшись теоремой [12.3]:

$$h = \frac{|-abc|}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}} = \frac{abc}{\sqrt{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}}.$$

Отсюда получаем:

$$\frac{1}{h^2} = \frac{b^2c^2 + a^2c^2 + a^2b^2}{a^2b^2c^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}.$$

Теорема [18.7] *Во всяком тетраэдре четыре прямые, соединяющие каждую вершину с центром тяжести противоположной грани, пересекаются в одной точке.*

Доказательство. Примем вершину O данного тетраэдра $OABC$ за начало аффинной системы координат, а векторы $e_1 = \overline{OA}$, $e_2 = \overline{OB}$, $e_3 = \overline{OC}$ за координатные векторы. В этой системе вершины тетраэдра имеют координаты:

O (0, 0, 0), A (1, 0, 0), B (0, 1, 0), C (0, 0, 1),

поэтому, согласно задаче 37, стр. 32 центры тяжести граней OAB, OAC, OBC, ABC имеют соответственно координаты:

$$\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right), \quad \left(\frac{1}{3}, 0, \frac{1}{3}\right), \quad \left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \quad \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Если обозначить через l_1, l_2, l_3 и l_4 прямые, соединяющие соответственно вершины O, A, B и C с центрами тяжести противоположных граней, то легко записать уравнения этих прямых:

$$(l_1): \frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{3}}, \quad \text{или } x = y = z,$$

$$(l_2): \frac{x-1}{-1} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z}{\frac{1}{3}}, \quad \text{или } -\frac{1}{3}(x-1) = y = z,$$

$$(l_3): \frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{\frac{1}{3}}, \quad \text{или } x = -\frac{1}{3}(y-1) = z,$$

$$(l_4): \frac{x}{\frac{1}{3}} = \frac{y}{\frac{1}{3}} = \frac{z-1}{-1}, \quad \text{или } x = y = -\frac{1}{3}(z-1).$$

Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что все эти прямые проходят через точку $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$.

3. Примеры решения задач стереометрии.

Задача 1. В правильной четырехугольной пирамиде $SABCD$ боковая грань наклонена к основанию под углом α. Найти угол φ между плоскостями AKC и SAB, если K — середина ребра SB.

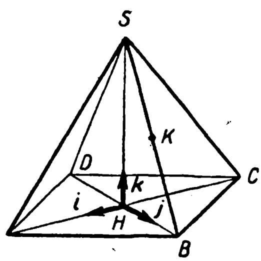


Рис. 72

Решение. Для решения задачи сначала необходимо выбрать систему координат. За начало прямоугольной декартовой системы координат возьмем основание H высоты SH, опущенной из вершины S на плоскость $ABCD$ (рис. 72), а за координатные оси — диагонали AC, BD и высоту SH. Положительные направления осей выберем так, как указано на рисунке 72. Если $AC = BD = 2a$, $SH = h$, то вершины пирамиды и точка K будут иметь координаты:

$$A\,(a, 0, 0),\ B\,(0, a, 0),\ C\,(-a, 0, 0),$$
$$D\,(0, -a, 0),\ S\,(0, 0, h),\ K\left(0, \frac{a}{2}, \frac{h}{2}\right).$$

Запишем уравнения плоскостей SAB, ABC и AKC. Плоскость ABC совпадает с координатной плоскостью Oxy, поэтому она имеет уравнение

$$z = 0. \qquad (14)$$

Плоскость SAB отсекает на координатных осях отрезки a, a, h, поэтому она имеет уравнение «в отрезках»:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{a}+\frac{z}{h}=1. \qquad (15)$$

Уравнение третьей плоскости AKC легко записать как уравнение плоскости, проходящей через ось Ox и через точку K:

$$-hy+az=0. \qquad (16)$$

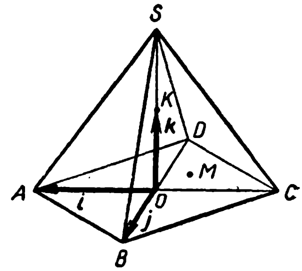


Рис. 73

По уравнениям (14), (15) определяем:

$$\cos\alpha=\frac{\frac{1}{h}}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^2}+\frac{1}{h^2}}}=\frac{\frac{1}{h}}{\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{1}{h^2}}}=\frac{a}{\sqrt{2h^2+a^2}}.$$

По уравнениям (15) и (16) определяем:

$$\cos\varphi=\frac{-\frac{h}{a}+\frac{a}{h}}{\sqrt{\frac{2}{a^2}+\frac{1}{h^2}}\sqrt{a^2+h^2}}=\frac{a^2-h^2}{\sqrt{2h^2+a^2}\sqrt{a^2+h^2}}.$$

Если ввести обозначение $k=\frac{h}{a}$, то предыдущие соотношения примут вид:

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{2k^2+1}}, \qquad (17)$$

$$\cos\varphi=\frac{1-k^2}{\sqrt{2k^2+1}\cdot\sqrt{1+k^2}}=\frac{1-k^2}{\sqrt{1+k^2}}\cos\alpha. \qquad (18)$$

Из соотношения (17) получаем:

$$k^2=\frac{1-\cos^2\alpha}{2\cos^2\alpha}.$$

Подставив это выражение в соотношение (18), после элементарных преобразований получаем:

$$\cos\varphi=\frac{3\cos^2\alpha-1}{\sqrt{2(1+\cos^2\alpha)}}.$$

Задача 2. Пусть $SABCD$ — правильная четырехугольная пирамида. Доказать, что сумма расстояний от любой точки M, лежащей внутри основания $ABCD$, до боковых граней есть величина постоянная, не зависящая от выбора точки M.

Решение. Пирамида $SABCD$ правильная, поэтому основание $ABCD$ является квадратом. Точку O пересечения диагоналей примем за начало, а векторы $\overline{OA} = \boldsymbol{i}$, $\overline{OB} = \boldsymbol{j}$, $\overline{OK} = \boldsymbol{k}$ за координатные векторы прямоугольной декартовой системы координат (рис. 73). Здесь K — точка, лежащая на луче OS и удовлетворяющая условию: $OK = OA = OB$.

Если $h = \frac{OS}{OK}$, то в выбранной системе координат боковые грани пирамиды будут иметь следующие уравнения «в отрезках»:

$$(ABS): \quad \frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{h} = 1, \text{ или } \quad hx + hy + z - h = 0;$$

$$(BCS): \quad -\frac{x}{1} + \frac{y}{1} + \frac{z}{h} = 1, \text{ или } \quad -hx + hy + z - h = 0;$$

$$(CDS): \quad -\frac{x}{1} - \frac{y}{1} + \frac{z}{h} = 1, \text{ или } \quad -hx - hy + z - h = 0;$$

$$(DAS): \quad \frac{x}{1} - \frac{y}{1} + \frac{z}{h} = 1, \text{ или } \quad hx - hy + z - h = 0.$$

Пусть M $(a, b, 0)$ — произвольная точка, лежащая внутри квадрата $ABCD$. Так как точки O и M лежат по одну и ту же сторону от любой боковой грани, то согласно теореме [13.3] имеем:

$$\begin{aligned} ha + hb - h &< 0, \\ -ha + hb - h &< 0, \\ -ha - hb - h &< 0, \\ ha - hb - h &< 0. \end{aligned} \tag{19}$$

Вычислим расстояния от точки M до боковых граней пирамиды, пользуясь теоремой [12.3]. При этом будем учитывать также неравенства (19).

$$d_{ABS} = \frac{|ha + hb - h|}{\sqrt{h^2 + h^2 + 1}} = \frac{h - ha - hb}{\sqrt{2h^2 + 1}},$$

$$d_{BCS} = \frac{|-ha + hb - h|}{\sqrt{h^2 + h^2 + 1}} = \frac{h + ha - hb}{\sqrt{2h^2 + 1}},$$

$$d_{CDC} = \frac{|-ha - hb - h|}{\sqrt{h^2 + h^2 + 1}} = \frac{ha + hb + h}{\sqrt{2h^2 + 1}},$$

$$d_{DAS} = \frac{|ha - hb - h|}{\sqrt{h^2 + h^2 + 1}} = \frac{h - ha + hb}{\sqrt{2h^2 + 1}}.$$

Отсюда следует, что

$$d_{ABS} + d_{BCS} + d_{CDS} + d_{DAS} = \frac{4h}{\sqrt{2h^2 + 1}}.$$

Мы видим, что полученная сумма не зависит от координат a, b точки M. Задача решена.

Задачи и упражнения

252. Доказать, что если плоскость α и прямая l перпендикулярны к одной и той же плоскости β, то они параллельны между собой.

253. Доказать, что две параллельные плоскости пересекают третью плоскость по параллельным прямым.

254. Доказать, что если взаимно перпендикулярные плоскости α и β пересекаются по прямой l и если другая прямая l' проведена в плоскости α и перпендикулярна к l, то l' перпендикулярна к β.

255. Доказать, что внутренние равноделящие плоскости двугранных углов трехгранного угла пересекаются по одной прямой.

256. Найти геометрическое место точек пространства, равноудаленных от трех вершин данного треугольника.

257. Найти геометрическое место точек, разность квадратов расстояний от которых до двух данных точек постоянна.

258. Доказать, что плоскости, перпендикулярные к ребрам треугольной пирамиды и делящие их пополам, пересекаются в одной точке.

259. Доказать, что перпендикуляры, опущенные из концов диагонали параллелограмма на плоскость, проходящую через другую диагональ, равны по длине.

260. В правильной треугольной пирамиде $SABC$ высота SH равна h, сторона основания равна a. Найти угол φ между плоскостями AKC и HBC, где K — середина ребра SB.

261. Доказать, что во всяком тетраэдре три прямые, соединяющие середины непересекающихся ребер, пересекаются в одной точке.

262. В усеченной (параллельно основанию) треугольной пирамиде $A_1A_2A_3A_1'A_2'A_3'$ середина каждого из боковых ребер A_1A_1', A_2A_2', A_3A_3' соединена с точкой пересечения диагоналей противоположной боковой грани. Доказать, что полученные три прямые пересекаются в одной точке.

263. Дан куб, ребро которого равно a. Вычислить расстояние между вершиной A куба и его диагональю, не проходящей через точку A и лежащей в том диагональном сечении куба, которое содержит эту точку.

264. В произвольной точке M плоскости основания правильной четырехугольной пирамиды восставлен перпендикуляр к основанию, который пересекает плоскости боковых граней соответственно в точках N_1, N_2, N_3 и N_4. Доказать, что $MN_1 + MN_2 + MN_3 + MN_4$ есть величина постоянная, не зависящая от точки M.

265. Обобщить и доказать предыдущую задачу на случай правильной пирамиды с произвольным числом вершин.

266. Пусть $SA_1A_2...A_n$ — правильная пирамида. Доказать, что сумма расстояний от любой точки M, лежащей внутри основания $A_1A_2...A_n$ до боковых граней есть величина постоянная, не зависящая от выбора точки M.

ГЛАВА V

ПОВЕРХНОСТЬ И ЕЕ УРАВНЕНИЕ. УРАВНЕНИЯ ОТДЕЛЬНЫХ ВИДОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

§ 19. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

В первой главе настоящей книги при определении координат векторов и точек было отмечено, что они существенно зависят от выбора систем координат. В настоящем параграфе мы установим связь между аффинными и прямоугольными декартовыми координатами одного и того же вектора, а также одной и той же точки в двух различных системах координат.

1. Зависимость между координатами вектора в двух различных аффинных базисах.

Пусть e_1, e_2, e_3 и e_1', e_2', e_3' — два различных аффинных базиса пространства, а p — произвольный вектор, имеющий координаты[1] p_1, p_2, p_3 в базисе e_1,e_2, e_3 и p_1', p_2', p_3' в базисе e_1', e_2', e_3'. Для удобства дальнейшего изложения базис e_1, e_2, e_3 назовем старым или исходным, а e_1',e_2',e_3' новым. Предположим, что векторы нового базиса заданы своими координатами в старом базисе:

$$e_1'\{c_{11},\ c_{21},\ c_{31}\},\quad e_2'\{c_{12},\ c_{22},\ c_{32}\},\quad e_3'\{c_{13},\ c_{23},\ c_{33}\}. \tag{1}$$

Из определения координат вектора следует[2], что

$$p = p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3 = \sum p_ie_i \tag{2}$$

и

$$p = p_1'e_1' + p_2'e_2' + p_3'e_3' = \sum p_i'e_i'.$$

---

[1] В этом и последующем параграфах вместо обычных обозначений x, y, z для координат вектора или точки мы будем применять также индексные обозначения x_1, x_2, x_3. Это позволит в ряде случаев широко пользоваться знаком суммирования Σ.

[2] Здесь и в дальнейшем знаком Σ мы будем пользоваться только для обозначения сумм, состоящих из трех слагаемых, поэтому для сокращения записи мы не будем указывать значений, которые принимают индексы суммирования. Например, для обозначения суммы $p_1e_1 + p_2e_2 + p_3e_3$ вместо $\sum\limits_{i=1}^{i=3} p_ie_i$ мы будем записывать так: $\sum p_ie_i$ или $\sum\limits_i p_ie_i$.

Согласно (1) векторы e'_1, e'_2, e'_3 выражаются через векторы e_1, e_2, e_3 следующим образом:

$$e'_1 = \sum c_{j1} e_j, \quad e'_2 = \sum c_{j2} e_j, \quad e'_3 = \sum c_{j3} e_j$$

или

$$e'_i = \sum_j c_{ji} e_j, \text{ где } i = 1,\ 2,\ 3.$$

Подставив эти значения в выражение для p, получаем[1]:

$$p = \sum_{i,j} p'_i c_{ji} e_j. \tag{3}$$

Из соотношений (2) и (3) в силу теоремы о единственности разложения вектора по базисным векторам получаем:

$$p_1 = \sum p'_i c_{1i}, \quad p_2 = \sum p'_i c_{2i}, \quad p_3 = \sum p'_i c_{3i}$$

или в развернутом виде:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= c_{11} p'_1 + c_{12} p'_2 + c_{13} p'_3, \\ p_2 &= c_{21} p'_1 + c_{22} p'_2 + c_{23} p'_3, \\ p_3 &= c_{31} p'_1 + c_{32} p'_2 + c_{33} p'_3. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Эти соотношения называются **формулами преобразования координат векторов**. В сокращенной записи они имеют вид:

$$p_i = \sum_\alpha c_{i\alpha} p'_\alpha, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{4'}$$

Как видим, координаты вектора p в базисе e_1, e_2, e_3 выражаются через координаты того же вектора в базисе e_1', e_2', e_3' при помощи системы линейных функций. Коэффициентами при p_1' служат числа c_{11}, c_{21}, c_{31}, которые суть координаты вектора e_1'в исходном базисе e_1, e_2, e_3; в свою очередь коэффициентами при p_2'служат координаты вектора e_2' и при p_3' — координаты вектора e_3'.

Так как векторы e_1', e_2', e_3' не компланарны, то

$$|c_{ij}| = \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{5}$$

Мы доказали следующую теорему.

[1] Здесь мы пользуемся следующим сокращенным обозначением:

$$\sum_{i,\ j} p'_i c_{ji} e_j = \sum_{j=1}^{j=3} \sum_{i=1}^{i=3} p'_i c_{ji} e_j.$$

В этой сумме — 9 слагаемых.

Т е о р е м а [19.1]. *Пусть* e_1, e_2, e_3 *и* e_1', e_2', e_3' *— два произвольных аффинных базиса, причем векторы* e_1', e_2', e_3' *заданы в базисе* e_1, e_2, e_3 *координатами* (1). *Если* p_1, p_2, p_3 *и* p_1', p_2', p_3' *суть соответственно координаты вектора* p *в базисах* e_1, e_2, e_3 и e_1', e_2', e_3', *то* p_1, p_2, p_3 *выражаются через* p_1', p_2', p_3' *при помощи соотношений* (4).

В силу (5) *система* (4) *всегда разрешима относительно* p_1', p_2', p_3':

$$\left.\begin{aligned} p_1' &= \tilde{c}_{11}p_1 + \tilde{c}_{12}p_2 + \tilde{c}_{13}p_3, \\ p_2' &= \tilde{c}_{21}p_1 + \tilde{c}_{22}p_2 + \tilde{c}_{23}p_3, \\ p_3' &= \tilde{c}_{31}p_1 + \tilde{c}_{32}p_2 + \tilde{c}_{33}p_3 \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

или в сокращенной записи

$$p_i' = \sum \tilde{c}_{i\alpha} p_\alpha.$$

Матрицы

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{13} \\ \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22} & \tilde{c}_{23} \\ \tilde{c}_{31} & \tilde{c}_{32} & \tilde{c}_{33} \end{pmatrix} \qquad (7)$$

являются в з а и м н о о б р а т н ы м и. Это означает, что их элементы удовлетворяют соотношениям:

$$\sum c_{i\alpha}\tilde{c}_{\alpha j} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Здесь $\delta_{ij} = 1$, если $i = j$, и $\delta_{ij} = 0$, если $i \neq j$. В развернутом виде эти соотношения имеют вид:

$$\left.\begin{aligned} c_{11}\tilde{c}_{11} + c_{12}\tilde{c}_{21} + c_{13}\tilde{c}_{31} &= 1, \\ c_{11}\tilde{c}_{12} + c_{12}\tilde{c}_{22} + c_{13}\tilde{c}_{32} &= 0, \\ c_{11}\tilde{c}_{13} + c_{12}\tilde{c}_{23} + c_{13}\tilde{c}_{33} &= 0, \\ c_{21}\tilde{c}_{11} + c_{22}\tilde{c}_{21} + c_{23}\tilde{c}_{31} &= 0, \\ c_{21}\tilde{c}_{12} + c_{22}\tilde{c}_{22} + c_{23}\tilde{c}_{32} &= 1, \\ c_{21}\tilde{c}_{13} + c_{22}\tilde{c}_{23} + c_{23}\tilde{c}_{33} &= 0, \\ c_{31}\tilde{c}_{11} + c_{32}\tilde{c}_{21} + c_{33}\tilde{c}_{31} &= 0, \\ c_{31}\tilde{c}_{12} + c_{32}\tilde{c}_{22} + c_{33}\tilde{c}_{32} &= 0, \\ c_{31}\tilde{c}_{13} + c_{32}\tilde{c}_{23} + c_{33}\tilde{c}_{33} &= 1. \end{aligned}\right\} \qquad (8)$$

Пример 1. Написать формулы преобразования координат векторов, если новые базисные векторы в старом базисе имеют координаты: $e_1'\{2, -1, 3\}$, $e_2'\{1, 0, 2\}$, $e_3'\{3, -2, 2\}$.

Решение. Подставим координаты новых базисных векторов в формулы (4). Получаем:

$$p_1 = 2p_1' + p_2' + 3p_3',$$
$$p_2 = -p_1' - 2p_3',$$
$$p_3 = 3p_1' + 2p_2' + 2p_3'.$$

Здесь выражены старые координаты векторов через новые. Разрешив эти соотношения относительно p_1', p_2', p_3', получим выражения новых координат через старые:

$$p_1' = -2p_1 - 2p_2 + p_3,$$
$$p_2' = 2p_1 + \frac{5}{2}p_2 - \frac{1}{2}p_3,$$
$$p_3' = p_1 + \frac{1}{2}p_2 - \frac{1}{2}p_3.$$

Если, например, вектор p в старом базисе имеет координаты $\{3, -4, 2\}$, то, подставив значения в последние соотношения, получим координаты вектора p в новом базисе: $\{4, -5, 0\}$.

2. Зависимость между координатами векторов в двух различных прямоугольных декартовых базисах. Формулы преобразования (4) применяются также и в том случае, когда старый и новый базисы являются прямоугольными декартовыми. В этом случае коэффициенты c_{ij}, кроме условия (5), удовлетворяют ряду дополнительных соотношений. Получим эти соотношения. Пусть g_1, g_2, g_3 и g_1', g_2', g_3'[1] — два прямоугольных декартовых базиса, причем

$$g_1'\{c_{11}, c_{21}, c_{31}\},\quad g_2'\{c_{12}, c_{22}, c_{32}\},\quad g_3'\{c_{13}, c_{23}, c_{33}\}.$$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{aligned} g_1' &= c_{11}g_1 + c_{21}g_2 + c_{31}g_3,\\ g_2' &= c_{12}g_1 + c_{22}g_2 + c_{32}g_3,\\ g_3' &= c_{13}g_1 + c_{23}g_2 + c_{33}g_3. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

[1] В этом параграфе вместо обычных обозначений прямоугольного декартова базиса будем применять индексные обозначения: g_1, g_2, g_3.

Если обозначить координаты векторов g_1, g_2, g_3 в системе g'_1, g'_2, g'_3 через $g_1\{\tilde{c}_{11}, \tilde{c}_{21}, \tilde{c}_{31}\}$, $g_2\{\tilde{c}_{12}, \tilde{c}_{22}, \tilde{c}_{32}\}$, $g_3\{\tilde{c}_{13}, \tilde{c}_{23}, \tilde{c}_{33}\}$, то

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= \tilde{c}_{11}g'_1 + \tilde{c}_{21}g'_2 + \tilde{c}_{31}g'_3, \\ g_2 &= \tilde{c}_{12}g'_1 + \tilde{c}_{22}g'_2 + \tilde{c}_{32}g'_3, \\ g_3 &= \tilde{c}_{13}g'_1 + \tilde{c}_{23}g'_2 + \tilde{c}_{33}g'_3. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

Умножая каждое из соотношений (9) поочередно на g_1, g_2, g_3 и учитывая, что базис g_1, g_2, g_3 прямоугольный декартовый, получим:

$$\begin{aligned} &g'_1g_1 = c_{11}, \quad g'_1g_2 = c_{21}, \quad g'_1g_3 = c_{31}, \\ &g'_2g_1 = c_{12}, \quad g'_2g_2 = c_{22}, \quad g'_2g_3 = c_{32}, \\ &g'_3g_1 = c_{13}, \quad g'_3g_2 = c_{23}, \quad g'_3g_3 = c_{33}. \end{aligned}$$

Поступая аналогично с соотношениями (10), получим:

$$\begin{aligned} &g_1g'_1 = \tilde{c}_{11}, \quad g_1g'_2 = \tilde{c}_{21}, \quad g_1g'_3 = \tilde{c}_{31}, \\ &g_2g'_1 = \tilde{c}_{12}, \quad g_2g'_2 = \tilde{c}_{22}, \quad g_2g'_3 = \tilde{c}_{32}, \\ &g_3g'_1 = \tilde{c}_{13}, \quad g_3g'_2 = \tilde{c}_{23}, \quad g_3g'_3 = \tilde{c}_{33}. \end{aligned}$$

Сравнивая полученные соотношения и учитывая, что скалярное произведение не зависит от порядка сомножителей, получаем:

$$\begin{aligned} &c_{11} = \tilde{c}_{11}, \quad c_{21} = \tilde{c}_{12}, \quad c_{31} = \tilde{c}_{13}, \\ &c_{12} = \tilde{c}_{21}, \quad c_{22} = \tilde{c}_{22}, \quad c_{32} = \tilde{c}_{23}, \\ &c_{13} = \tilde{c}_{31}, \quad c_{23} = \tilde{c}_{32}, \quad c_{33} = \tilde{c}_{33}. \end{aligned}$$

Таким образом, соотношения (10) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} g_1 &= c_{11}g_1' + c_{12}g_2' + c_{13}g_3', \\ g_2 &= c_{21}g_1' + c_{22}g_2' + c_{23}g_3', \\ g_3 &= c_{31}g_1' + c_{32}g_2' + c_{33}g_3'. \end{aligned}\right\} \qquad (10')$$

Учитывая, что векторы g_1, g_2, g_3 и g'_1, g'_2, g'_3 являются единичными и взаимно перпендикулярными, мы из соотношений (9) и (10′), на основании теорем [5.1] и [5.2] получаем:

$$\left.\begin{aligned} &c_{11}^2 + c_{21}^2 + c_{31}^2 = 1, \qquad c_{11}c_{12} + c_{21}c_{22} + c_{31}c_{32} = 0, \\ &c_{12}^2 + c_{22}^2 + c_{32}^2 = 1, \qquad c_{11}c_{13} + c_{21}c_{23} + c_{31}c_{33} = 0, \\ &c_{13}^2 + c_{23}^2 + c_{33}^2 = 1, \qquad c_{12}c_{13} + c_{22}c_{23} + c_{32}c_{33} = 0; \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

$$\left.\begin{aligned} c_{11}^2+c_{12}^2+c_{13}^2&=1,\\ c_{21}^2+c_{22}^2+c_{23}^2&=1,\\ c_{31}^2+c_{32}^2+c_{33}^2&=1,\\ c_{11}c_{21}+c_{12}c_{22}+c_{13}c_{23}&=0,\\ c_{11}c_{31}+c_{12}c_{32}+c_{13}c_{33}&=0,\\ c_{21}c_{31}+c_{22}c_{32}+c_{23}c_{33}&=0. \end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

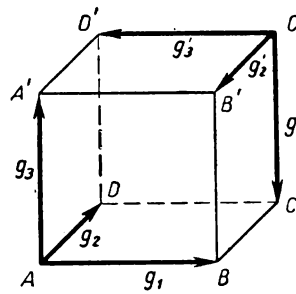


Рис. 74

Итак, если старый и новый базисы являются прямоугольными декартовыми, то в формулах преобразования (4) коэффициенты удовлетворяют соотношениям (11) и (12). Эти соотношения легко запомнить, если ввести в рассмотрение матрицу, составленную из коэффициентов соотношений (4):

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13}\\ c_{21} & c_{22} & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & c_{33}\end{pmatrix}. \qquad (13)$$

Соотношения (11) и (12) означают, что *сумма квадратов элементов любой строки или столбца равна единице, а сумма произведений соответствующих элементов различных строк или столбцов равна нулю.* Матрица, элементы которой удовлетворяют этим соотношениям, называется ортогональной матрицей.

Например, матрица

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

является ортогональной. В самом деле, сумма квадратов элементов любой строки или столбца этой матрицы равна единице, а сумма произведений соответствующих элементов различных строк или столбцов равна нулю.

Например, для первой и третьей строк имеем:

$$0\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}=0.$$

Таким образом, мы пришли к следующей теореме.

Теорема [19.2]. *Пусть $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$ и $\boldsymbol{g}_1', \boldsymbol{g}_2', \boldsymbol{g}_3'$ — два прямоугольных декартовых базиса, причем векторы $\boldsymbol{g}_1', \boldsymbol{g}_2', \boldsymbol{g}_3'$ заданы в базисе $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2, \boldsymbol{g}_3$ своими координатами:*

$$\boldsymbol{g}_1'\{c_{11}, c_{21}, c_{31}\},\quad \boldsymbol{g}_2'\{c_{12}, c_{22}, c_{32}\},\quad \boldsymbol{g}_3'\{c_{13}, c_{23}, c_{33}\}.$$

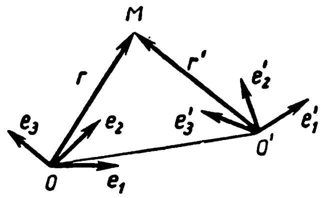


Рис. 75

Если p_1, p_2, p_3 и p_1', p_2', p_3' суть координаты вектора $\boldsymbol{p}$ *соответственно в базисах* $\boldsymbol{g}_1$, $\boldsymbol{g}_2$, $\boldsymbol{g}_3$ *и* $\boldsymbol{g}_1'$, $\boldsymbol{g}_2'$, $\boldsymbol{g}_3'$, *то* p_1, p_2, p_3 *выражаются через* p_1', p_2', p_3' *при помощи соотношений* (4), *где матрица* (13) *ортогональная.*

Пример 2. Пусть $ABCDA'B'C'D'$ — некоторый куб, сторона которого равна единице. Написать формулы преобразования координат векторов, если $\overline{AB}$, $\overline{AD}$, $\overline{AA'}$ — старый базис, а $\overline{C'C}$, $\overline{C'B'}$, $\overline{C'D'}$ —новый (рис. 74).

Решение. Из рисунка 74 видно, что новые координатные векторы $\boldsymbol{g}_1'=\overline{C'C}$, $\boldsymbol{g}_2'=\overline{C'B'}$, $\boldsymbol{g}_3'=\overline{C'D'}$ имеют в исходном базисе следующие координаты:

$$\boldsymbol{g}_1'\{0,\ 0,\ -1\},\quad \boldsymbol{g}_2'\{0,\ -1,\ 0\},\quad \boldsymbol{g}_3'\{-1,\ 0,\ 0\}.$$

Таким образом, формулы (4) в данном случае будут иметь вид:

$$p_1 = -p_3',\quad p_2 = -p_2',\ p_3 = -p_1'.$$

3. Связь между координатами точек в различных аффинных системах координат. Пусть $Oe_1e_2e_3$ и $O'e_1'e_2'e_3'$—две аффинные системы координат в пространстве, а M — произвольная точка, имеющая координаты $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ в системе $Oe_1e_2e_3$ и $(x_1',\ x_2',\ x_3')$ в системе $O'e_1'e_2'e_3'$. Установим зависимость между x_1, x_2, x_3 и x_1', x_2', x_3'.

Предположим, что новое начало и новые координатные векторы в исходной системе $Oe_1e_2e_3$ имеют координаты:

$$e_1'\{c_{11},\ c_{21},\ c_{31}\},\quad e_2'\{c_{12},\ c_{22},\ c_{32}\},\quad e_3'\{c_{13},\ c_{23},\ c_{33}\},\quad O'(a_1,\ a_2,\ a_3). \tag{14}$$

Если $\boldsymbol{r} = \overline{OM}$ — радиус-вектор точки M в старой системе, а $\boldsymbol{r}' = \overline{O'M}$ — радиус-вектор той же точки в новой системе (рис. 75), то, рассматривая треугольник $OO'M$ и применяя к нему правило треугольника для сложения векторов (см. 1, § 2, п.2), получаем: $\overline{OM} = \overline{OO'} + \overline{O'M}$, или

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}' + \overline{OO'}. \tag{15}$$

Так как координаты точки согласно § 2, п. 4 совпадают с координатами ее радиус-вектора, то в системе $Oe_1e_2e_3$ векторы $\boldsymbol{r}$ и $\overline{OO'}$ имеют координаты: $\boldsymbol{r}\{x_1,\ x_2,\ x_3\}$, $\overline{OO'}\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$. Если вектор $\boldsymbol{r}'$ в системе $Oe_1e_2e_3$ имеет координаты $\{y_1,\ y_2,\ y_3\}$, то из соотношений (15) получаем:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= y_1 + a_1,\\ x_2 &= y_2 + a_2,\\ x_3 &= y_3 + a_3. \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

Координаты вектора $\boldsymbol{r}'$ в новой системе совпадают с координатами точки M в системе $O'\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'\boldsymbol{e}_3'$, т. е. $\boldsymbol{r}'\{x_1', x_2', x_3'\}$. Но выше было показано, что координаты вектора в старом и новом базисах связаны соотношениями (4), поэтому

$$y_1 = \sum c_{1\alpha} x'_\alpha, \quad y_2 = \sum c_{2\alpha} x_\alpha, \quad y_3 = \sum c_{3\alpha} x'_\alpha.$$

Подставив найденные значения y_1, y_2, y_3 в формулы (16), получим:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + c_{13}x_3' + a_1, \\ x_2 &= c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + c_{23}x_3' + a_2, \\ x_3 &= c_{31}x_1' + c_{32}x_2' + c_{33}x_3' + a_3 \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

или в сокращенной записи

$$x_i = \sum c_{i\alpha} x'_\alpha + a_i. \tag{17'}$$

Формулы (17) называются **формулами преобразования координат точек в пространстве**. В этих формулах, так же как и в формулах (4), коэффициентами при x_1', x_2', x_3' являются соответственно координаты векторов $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, $\boldsymbol{e}_3'$. Свободными членами являются координаты нового начала в исходной системе. Так как векторы $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, $\boldsymbol{e}_3'$ не компланарны, то $|c_{ij}| \neq 0$, поэтому уравнения (17) разрешимы относительно x_1', x_2', x_3':

$$\left.\begin{aligned} x_1' &= \tilde{c}_{11}x_1 + \tilde{c}_{12}x_2 + \tilde{c}_{13}x_3 + \tilde{a}_1, \\ x_2' &= \tilde{c}_{21}x_1 + \tilde{c}_{22}x_2 + \tilde{c}_{23}x_3 + \tilde{a}_2, \\ x_3' &= \tilde{c}_{31}x_1 + \tilde{c}_{32}x_2 + \tilde{c}_{33}x_3 + \tilde{a}_3 \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

или в сокращенной записи:

$$x_i' = \sum \tilde{c}_{i\alpha} x_\alpha + \tilde{a}_i. \tag{18'}$$

Матрицы

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix} \text{ и } \begin{pmatrix} \tilde{c}_{11} & \tilde{c}_{12} & \tilde{c}_{13} \\ \tilde{c}_{21} & \tilde{c}_{22} & \tilde{c}_{23} \\ \tilde{c}_{31} & \tilde{c}_{32} & \tilde{c}_{33} \end{pmatrix}$$

являются взаимно обратными. Это означает, что их элементы удовлетворяют соотношениям (8). Мы доказали следующую теорему.

Теорема [19.3]. *Пусть $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ и $O'\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'\boldsymbol{e}_3'$ — аффинные системы координат, причем точка O' и векторы $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, $\boldsymbol{e}_3'$ заданы в системе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ своими координатами* (14). *Если* x_1, x_2, x_3 и x_1', x_2', x_3' *явля-*

ются координатами точки M пространства относительно систем $Oe_1e_2e_3$ и $O'e_1'e_2'e_3'$, то x_1, x_2, x_3 выражаются через x_1', x_2', x_3' при помощи соотношений (17), *а x_1', x_2', x_3' — через x_1, x_2, x_3 при помощи соотношений* (18).

Пример 3. Написать формулы преобразования координат точек в пространстве, если даны координаты новых координатных векторов и нового начала в старой системе O' (—1, 0, 2):

$$e_1'\{3,\ -1,\ 4\},\quad e_2'\{0,\ -2,\ 1\},\quad e_3'\{3,\ -5,\ 5\}.$$

Решение. Подставив координаты нового начала и новых координатных векторов в формулы (17), получаем:

$$x_1 = 3x_1' + 3x_3' - 1,$$
$$x_2 = -x_1' - 2x_2' - 5x_3',$$
$$x_3 = 4x_1' + x_2' + 5x_3' + 2.$$

Отсюда, разрешив эти соотношения относительно x_1', x_2', x_3', получаем выражения новых координат через старые:

$$x_1' = -\frac{5}{6}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + x_3 - \frac{17}{6},$$
$$x_2' = -\frac{5}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + 2x_3 - \frac{13}{2},$$
$$x_3' = \frac{7}{6}x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3 + \frac{19}{6}.$$

Пример 4. Пусть $OABC$ — произвольный тетраэдр. Написать формулы преобразования координат точек при переходе от координатной системы $Oe_1e_2e_3$, где $e_1 = \overline{OA}$, $e_2 = \overline{OB}$, $e_3 = \overline{OC}$, к системе $O'e_1'e_2'e_3'$, где $O' = A$, $e_1' = \overline{AB}$, $e_2' = \overline{AO}$, $e_3' = \overline{AC}$.

Решение. Определим координаты нового начала и новых координатных векторов в старой системе. Так как $e_1 = \overline{OA}$, то точка A имеет координаты A (1, 0, 0). С другой стороны,

$$e_1' = \overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA} = e_2 - e_1,\quad e_2' = \overline{AO} = -\overline{OA} = -e_1,$$
$$e_3' = \overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = e_3 - e_1.$$

Отсюда следует, что

$$e_1'\{-1,\ 1,\ 0\},\quad e_2'\{-1,\ 0,\ 0\},\quad e_3'\{-1,\ 0,\ 1\}.$$

Подставив координаты точки A и векторов e_1', e_2', e_3' в соотношения (17), мы получаем формулы преобразования координат точек:

$$x_1 = -x_1' - x_2' - x_3' + 1,\quad x_2 = x_1',\quad x_3 = x_3'.$$

Пример 5. Найти точку M, которая имеет одинаковые координаты в двух различных системах: $Oe_1e_2e_3$ и $O'e_1'e_2'e_3'$, где

$O'(-4,\ 1,\ -8)$, $e_1'\{3,\ -1,\ 1\}$, $e_2'\{-1,\ 5,\ 1\}$, $e_3'\{1,\ 2,\ -3\}$.

Решение. Формулы (17) для данного случая имеют вид:

$$
\begin{aligned}
x_1 &= 3x_1' - x_2' + x_3' - 4,\\
x_2 &= -x_1' + 5x_2' + 2x_3' + 1,\\
x_3 &= x_1' + x_2' - 3x_3 - 8.
\end{aligned}
$$

Для искомой точки $x_1 = x_1'$, $x_2 = x_2'$, $x_3 = x_3'$; поэтому координаты точки M удовлетворяют системе уравнений

$$
\begin{aligned}
2x_1 - x_2 + x_3 - 4 &= 0,\\
-x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 1 &= 0,\\
x_1 + x_2 - 4x_3 - 8 &= 0.
\end{aligned}
$$

Отсюда определяем координаты точки M:

$$x_1 = 3,\ x_2 = 1,\ x_3 = -1.$$

4. Частные случаи преобразований аффинных систем координат точек. Если при переходе от системы $Oe_1e_2e_3$ к системе $O'e_1'e_2'e_3'$ векторы e_1, e_2, e_3 не меняются, т. е. $e_1' = e_1$, $e_2' = e_2$, $e_3' = e_3$, то такое преобразование называется переносом начала координат. В данном случае векторы e_1', e_2', e_3' имеют координаты e_1' $\{1, 0, 0\}$, e_2' $\{0, 1, 0\}$, e_3' $\{0, 0, 1\}$; поэтому формулы (17) принимают вид:

$$
\left.
\begin{aligned}
x_1 &= x_1' + a_1,\\
x_2 &= x_2' + a_2,\\
x_3 &= x_3' + a_3.
\end{aligned}
\right\}
\qquad (19)
$$

Эти выражения называются формулами преобразования координат при переносе начала координат. Заметим, что при переносе начала координат, все точки меняют свои координаты.

Пример 6. Написать формулы преобразования координат точек при переносе начала в точку $O(2, -3, 4)$.

Решение. Подставив координаты точки O' в формулы (19), получаем: $x_1 = x_1' + 2$, $x_2 = x_2' - 3$, $x_3 = x_3' + 4$.

Если при переходе от системы $Oe_1e_2e_3$ к другой системе $O'e_1'e_2'e_3'$ начало координат не меняется, т. е. $O \equiv O'$, то такое преобразование называется аффинным поворотом системы координат. Существенно отметить, что при аффинном повороте углы между координатными векторами и длины векторов, вообще говоря, меняются. Координаты точки O' при аффинном повороте равны (0, 0, 0); поэтому соотношения (17) принимают вид:

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= c_{11}x_1' + c_{12}x_2' + c_{13}x_3', \\ x_2 &= c_{21}x_1' + c_{22}x_2' + c_{23}x_3', \\ x_3 &= c_{31}x_1' + c_{32}x_2' + c_{33}x_3'. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Эти соотношения называются формулами преобразования при аффинном повороте.

Пример 7. Написать формулы преобразования координат точек при аффинном повороте, если:

$$\boldsymbol{e}_1' = \boldsymbol{e}_1 + \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_2' = \boldsymbol{e}_2, \quad \boldsymbol{e}_3' = \boldsymbol{e}_1 - \boldsymbol{e}_3.$$

Решение. Подставив значения координат векторов $\boldsymbol{e}_1', \boldsymbol{e}_2', \boldsymbol{e}_3'$ в формулы (20), получаем:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' \phantom{{}+x_2'} + x_3', \\ x_2 &= x_1' + x_2', \\ x_3 &= - x_3'. \end{aligned}$$

5. Связь между координатами точек в различных прямоугольных декартовых системах координат. Частные случаи преобразования прямоугольной декартовой системы координат. Формулы преобразования координат точек (17) и (18) применяются также и в том случае, когда старая и новая системы координат прямоугольные декартовы. Как было показано в п. 2 настоящего параграфа, в данном случае матрицы преобразований (7) должны быть ортогональными, т. е. удовлетворять условиям (11) и (12).

Формулы преобразования координат точек для частных случаев (переноса начала и поворота системы) по существу ничем не отличаются от соответствующих частных случаев преобразования общей аффинной системы координат. Таким образом, при параллельном переносе прямоугольной декартовой системы координат формулы преобразования имеют вид (19), а при повороте прямоугольной декартовой системы координат формулы преобразования совпадают с формулами (20) с той лишь разницей, что матрица преобразования в данном случае будет ортогональной.

6. Обратная задача. Поставим обратную задачу: пусть дана аффинная система координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ и система уравнений (17) с определителем, отличным от нуля. Существует ли такая новая аффинная система координат $O'\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'\boldsymbol{e}_3'$, при переходе к которой формулы преобразования координат точек имеют вид (17)? Легко убедиться в том, что такая система $O'\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'\boldsymbol{e}_3'$ существует. Для этого достаточно в качестве начальной точки этой системы взять O' (a_1, a_2, a_3) и за базисные векторы $\boldsymbol{e}_1'$ $\{c_{11}, c_{21}, c_{31}\}$, $\boldsymbol{e}_2'\{c_{12}, c_{22}, c_{32}\}$, $\boldsymbol{e}_3'\{c_{13}, c_{23}, c_{33}\}$, где числа $a_1, a_2, a_3, c_{11}, c_{21}, \ldots, c_{33}$ взяты из уравнений (17). В силу условия $|c_{\alpha\beta}| \neq 0$ векторы $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$, $\boldsymbol{e}_3'$ не компланарны, поэтому они определяют новый базис. Нетрудно видеть, что формулы перехода от системы координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ к системе $O'\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'\boldsymbol{e}_3'$ совпадают с формулами (17). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема [19.4]. *Если дана аффинная система координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ и система линейных уравнений* (17) *с определителем, отличным от нуля, то существует система координат $O'\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'\boldsymbol{e}_3'$, при переходе к которой уравнения* (17) *являются формулами преобразования координат точек. Новая система координат определяется соотношениями* (14).

Аналогичная теорема имеет место для прямоугольной декартовой системы координат.

Теорема [19.5]. *Если дана прямоугольная декартова система координат $O\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3$ и система линейных уравнений* (17), *коэффициенты которой при x_1', x_2', x_3' образуют ортогональную матрицу, то существует прямоугольная декартова система координат $O'\boldsymbol{g}_1'\boldsymbol{g}_2'\boldsymbol{g}_3'$, при переходе к которой соотношения* (17) *являются формулами преобразования координат точек. Новая система координат определяется так:*

$$O'(a_1, a_2, a_3),\ \boldsymbol{g}_1'\{c_{11}, c_{21}, c_{31}\},\quad \boldsymbol{g}_2'\{c_{12}, c_{22}, c_{32}\},\ \boldsymbol{g}_3'\{c_{13}, c_{23}, c_{33}\}.$$

Пример 8. Являются ли соотношения

$$\begin{aligned} x &= 2y' + 2z' - 6, \\ y &= 2x' - y' + 2z' + 1, \\ z &= 3x' + y' + 4z' - 3 \end{aligned}$$

формулами преобразования координат точек? В случае положительного ответа найти координаты нового начала и координаты новых базисных векторов $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}'_2$, $\boldsymbol{e}_3'$.

Решение. Данные формулы являются формулами преобразования координат точек, так как

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 6 \neq 0.$$

Новая система координат в данном случае определяется так:

$$O'(-6, 1, -3),\ e_1'\{0, 2, 3\},\ e_2'\{2, -1, 1\},\ e_3'\{2, 2, 4\}.$$

Пример 9. Даны формулы преобразования координат:

$$x = \frac{2}{7}x' + \frac{3}{7}y' + \frac{6}{7}z',$$

$$y = \frac{6}{7}x' + \frac{2}{7}y' - \frac{3}{7}z',$$

$$z = \frac{3}{7}x' - \frac{6}{7}y' + \frac{2}{7}.$$

Найти новую координатную систему. Будет ли новая система координат прямоугольной и декартовой, если исходная система прямоугольная декартова?

Решение. Так как определитель, составленный из коэффициентов, равен — 1, то согласно теореме [19.4] существует система $O'e_1'e_2'e_3'$, при переходе к которой данные соотношения являются формулами преобразования координат точек. Если исходная система прямоугольная декартова, то новая система также является прямоугольной декартовой в силу того, что матрица, образованная из коэффициентов при x', y', z' является ортогональной.

7. Невещественные точки, линии и поверхности в пространстве. В I, § 26 было введено понятие невещественных точек и линий на плоскости. Введем в рассмотрение аналогичные понятия для случая трехмерного пространства.

Если в пространстве выбрана система координат, то каждой точке сопоставляются три действительных числа x, y, z — координаты точки, взятые в определенном порядке; в свою очередь любой упорядоченной тройке действительных чисел соответствует точка. Таким образом, выбор системы координат позволяет установить взаимно однозначное соответствие между точками пространства и упорядоченными тройками действительных чисел. По аналогии с I, § 26 расширим понятие точки пространства. *При фиксированной системе координат точкой назовем любую упорядоченную тройку комплексных чисел. Точки* (x_1, y_1, z_1) *и* (x_2, y_2, z_2) *совпадают тогда и только тогда, когда* $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$. Если три координаты точки вещественные, то она называется вещественной или действительной; если же хотя бы одна координата невещественна — невещественной или комплексной. Если точка в системе $Oe_1e_2e_3$ имеет координаты (x_1, x_2, x_3), то мы будем считать, что та же точка в системе $O'e_1'e_2'e_3'$ имеет координаты x_1', x_2', x_3', определяемые из соотношений (17), где $O'(a_1, a_2, a_3)$, $e_1'\{c_{11}, c_{21}, c_{31}\}$, $e_2'\{c_{12}, c_{22}, c_{32}\}$, $e_3'\{c_{13}, c_{23}, c_{33}\}$. Важно отметить, что числа a_1, a_2, a_3, c_{11}, c_{12}, ..., c_{33} всегда считаются действительными, поэтому понятие действительных и комплексных точек не зависит от выбора системы координат.

Две точки, соответственные координаты которых являются сопряженными комплексными числами, называются комплексно сопряженными точками. Можно показать, что это понятие также не зависит от выбора системы координат.

Поверхностью, определяемой уравнением $F(x, y, z) = 0$, будем называть совокупность всех точек (x, y, z), как действительных, так и комплексных, координаты которых удовлетворяют этому уравнению.

В частности, плоскостью называется геометрическое место точек, координаты которых удовлетворяют уравнению $Ax + By + Cz + D = 0$, где по крайней мере один из коэффициентов A, B или C отличен от нуля. Если все коэффициенты A, B, C и D — действительные числа или пропорциональны действительным числам (коэффициент пропорциональности может быть и комплексным), то плоскость называется вещественной или действительной, в противном случае она называется невещественной. Нетрудно видеть, что вещественная плоскость содержит как вещественные, так и невещественные точки. Например, вещественной плоскости $x + y - 3z - 2 = 0$ принадлежит комплексная точка $(5, 3i, 1 + i)$.

Каждая поверхность, определяемая уравнением $F(x, y, z) = 0$, содержит, вообще говоря, бесчисленное множество как действительных, так и комплексных точек. Однако существуют поверхности, которые содержат конечное число действительных точек или вовсе их не содержат. Например, поверхность $2x^2 + 4y^2 + 3z^2 = 0$ содержит только одну действительную точку $(0, 0, 0)$, все остальные точки комплексные, а поверхность

$$x^2 + 3y^2 + 4z^2 + 1 = 0$$

не содержит ни одной вещественной точки.

Линией, определяемой системой уравнений

$$\begin{cases} F_1(x, y, z) = 0, \\ F_2(x, y, z) = 0, \end{cases}$$

назовем совокупность всех точек (x, y, z) действительных и комплексных, координаты которых удовлетворяют данной системе уравнений. Линией, определяемой системой параметрических уравнений

$$x_1 = f_1(t), \quad x_2 = f_2(t), \quad x_3 = f_3(t),$$

называется совокупность всех точек с координатами (x_1, x_2, x_3), которые можно получить из данных уравнений, придавая t действительные или комплексные значения.

Задачи и упражнения

267. Даны координаты новых базисных векторов в старом базисе: $e_1' \{-3, 1, 1\}$, $e_2' \{1, 0, 4\}$, $e_3' \{1, 1, 5\}$. Найти координаты вектора p в старом базисе, если в новом этот вектор имеет координаты $\{-1, 5, 2\}$.

268. Написать формулы преобразования аффинной системы координат в пространстве, если даны координаты нового начала и новых координатных векторов в старой системе:

а) $e_1' \{-3, 0, 0\}$, $e_2' \{1, 5, -2\}$, $e_3' \{1, 7, -1\}$, $O'(3, -4, 5)$;

б) $e_1' \{-1, 1, 0\}$, $e_2' \{2, 3, 5\}$, $e_3' \{0, 2, 5\}$, $O'(5, -3, 0)$;

в) $e_1' \{1, 0, 0\}$, $e_2' \{0, 1, 0\}$, $e_3' \{0, 0, 1\}$, $O'(-3, 1, 2)$.

269. Определить координаты новых координатных векторов и нового начала в старой системе, если формулы преобразования имеют вид:

а) $x_1 = x_1' - 3x_2' + x_3'$,
$x_2 = x_1' + x_2'$,
$x_3 = x_1' + 1$;

б) $x_1 = x_1' - 2x_2' + 5$,
$x_2 = -4x_1' + x_2' - 2x_3' - 1$,
$x_3 = 3x_1' - 4x_2' + x_3'$;

в) $x_1 = x_1' - x_2' + 3x_3' - 1$,
$x_2 = 3x_1' - x_3' + 2$,
$x_3 = x_3' - 1$;

г) $x_1 = x_2'$;
$x_2 = x_1'$,
$x_3 = x_1' + x_2' + x_3' + 1$.

270. Являются ли соотношения

$$\begin{aligned} x_1 &= x_1' + 2x_2' + x_3' - 1, \\ x_2 &= 2x_1' - x_2' + x_3', \\ x_3 &= x_1' - 3x_2' + 1 \end{aligned}$$

формулами преобразования координат?

271. Какие из приведенных ниже матриц ортогональны:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 3 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$?

272. Даны формулы преобразования координат точек:

$$x = 2 + \frac{2}{7}x' + \frac{3}{7}y' + \frac{6}{7}z',$$

$$y = 1 + \frac{6}{7}x' + \frac{2}{7}y' - \frac{3}{7}z',$$

$$z = 3 + \frac{3}{7}x' - \frac{6}{7}y' + \frac{2}{7}z'.$$

Является ли новая система координат прямоугольной декартовой, если исходная система прямоугольная и декартова?

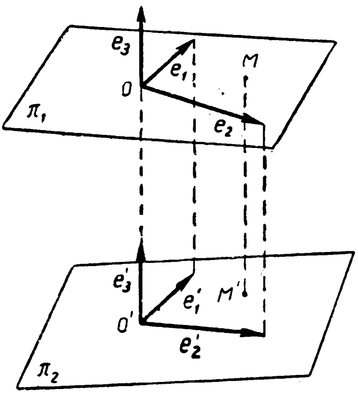


Рис. 76

273. Найти формулы преобразования координат при переходе от прямоугольной декартовой системы $Oxyz$ к прямоугольной декартовой системе $Ox'y'z'$, если начало новой системы совпадает с началом O старой системы, ось Oz' совпадает с осью Oz, а лучи Ox' и Oy' являются соответственно биссектрисами углов, образованных векторами $(\widehat{\mathbf{i}, \mathbf{j}})$ и $(\widehat{\mathbf{i}, -\mathbf{j}})$.

274. Пусть π_1 и π_2 — две различные плоскости в пространстве, а $\mathbf{e}_3$ — вектор, не параллельный этим плоскостям. Две аффинные системы $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ и $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$ расположены в пространстве так, что точка O и векторы $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ лежат в плоскости π_1, а точка O' и векторы $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ — в плоскости π_2. Причем O', $\mathbf{e}_1'$, $\mathbf{e}_2'$ являются проекциями O, $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ по направлению вектора $\mathbf{e}_3$ (рис. 76).

а) Написать формулы преобразования координат при переходе от системы $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2\mathbf{e}_3$ к системе $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'\mathbf{e}_3'$.

б) Показать, что если точка M лежит в плоскости π_1 и имеет в системе $O\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$ координаты (x, y), то проекция M' этой точки на плоскость π_2 по направлению $\mathbf{e}_3$ имеет те же координаты в системе $O'\mathbf{e}_1'\mathbf{e}_2'$.

§ 20. ПОВЕРХНОСТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ С ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТЬЮ

1. Понятие уравнения поверхности. В § 9 было дано понятие поверхности и ее уравнения. Пусть дано уравнение

$$F(x, y, z) = 0. \qquad (1)$$

Геометрическое место всех точек пространства, координаты которых в некоторой аффинной системе координат удовлетворяют соотношению (1), называется *поверхностью*, определяемой уравнением (1). Таким образом, соотношение (1) называется *уравнением* данной *поверхности* S, если соблюдены следующие два условия: а) координаты любой точки поверхности S удовлетворяют уравнению (1), б) координаты любой точки, не принадлежащей поверхности S, не удовлетворяют этому уравнению.

В двух предыдущих главах нами рассмотрен один частный, но весьма важный вид поверхности — плоскость. Из теоремы [10.1] следует, что плоскость есть поверхность, определяемая уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, где A, B и C одновременно не равны нулю.

Рассмотрим другие примеры поверхностей.

Пример 1. Найти поверхность S, которая в прямоугольной декартовой системе координат определяется уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0.$$

Решение. Если $M(x, y, z)$ — произвольная точка пространства, заданная в прямоугольной декартовой системе своими координатами, то согласно теореме [5.3] $OM^2 = x^2 + y^2 + z^2$, где O — начало координат. Таким образом, точка M будет принадлежать поверхности S тогда и только тогда, когда $OM^2 - 9 = 0$ или $OM = 3$. Мы видим, что все точки поверхности S отстоят от начала координат на расстоянии $r = 3$.

Обратно, если некоторая точка M пространства удалена от начала координат на расстояние $r=3$, то для этой точки согласно теореме [5.3] имеем: $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = 3$ или $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, т. е. эта точка принадлежит поверхности. Таким образом, данным уравнением определяется сфера с центром в начале координат и радиусом, равным трем.

Пример 2. Определить поверхность, заданную уравнением $x^2 + y^2 = 0$. Система координат аффинная.

Решение. Так как сумма квадратов двух чисел равна нулю только в том случае, когда каждое из чисел равно нулю, то заданному уравнению удовлетворяют координаты тех и только тех точек пространства, для которых $x = 0$ и $y = 0$. Геометрическое место точек, определяемое уравнениями $x = 0$, $y = 0$, есть ось Oz. Итак, уравнение $x^2 + y^2 = 0$ определяет прямую — ось Oz.

Пример 3. Найти поверхность, заданную уравнением

$$x^2 + 4y^2 + z^2 = 0.$$

Решение. Этому уравнению удовлетворяет только одна тройка чисел 0, 0, 0, так как сумма квадратов трех чисел равна нулю только в том случае, когда каждое из этих чисел равно нулю. Таким образом, в данном случае вся поверхность, определяемая уравнением $x^2 + 4y^2 + z^2 = 0$ состоит из одной точки — начала координат.

Пример 4. Найти поверхность, определяемую уравнением

$$x^2 - xz + yx - yz - x + z = 0.$$

Решение. Легко видеть, что это уравнение можно преобразовать следующим образом: $(x + y - 1)(x - z) = 0$. Если точка $M(x, y, z)$ лежит на данной поверхности, то, очевидно, координаты этой точки удовлетворяют по крайней мере одному из следующих уравнений: $x + y - 1 = 0$, $x - z = 0$, так как произведение двух чисел равно нулю только тогда, когда один из сомножителей равен нулю. Обратно, если координаты некоторой точки пространства удовлетворяют одному из этих уравнений, то, очевидно, такая точка лежит на данной поверхности. Отсюда мы приходим к выводу, что рассматриваемая поверхность есть совокупность всех точек пространства, координаты которых удовлетворяют одному из уравнений: $x + y - 1 = 0$, $x - z = 0$. Каждым из этих уравнений определяется в пространстве плоскость, поэтому рассматриваемая поверхность есть совокупность двух пересекающихся плоскостей: $x + y - 1 = 0$, $x - z = 0$.

Пример 5. Найти поверхность, определяемую уравнением

$$x^2 + 3y^2 + z^2 + 1 = 0.$$

Решение. Легко видеть, что не существует в пространстве ни одной точки, координаты которой удовлетворяли бы данному уравнению. В самом деле, уравнение поверхности можно записать так: $x^2 + 3y^2 + z^2 = -1$, Но сумма трех неотрицательных чисел не может равняться -1. Итак, поверхность, определяемая данным уравнением, не имеет ни одной, действительной точки. Такие поверхности называются *нулевыми*.

Из рассмотренных примеров следует, что введенное выше понятие поверхности в ряде случаев не совпадает с обычным, интуитивным понятием поверхности, известным нам из курса элементарной геометрии. Однако в большинстве случаев, как мы увидим ниже, данное нами определение приводит к обычным поверхностям.

2. Поверхности второго порядка. Приведенное выше определение поверхности как геометрического места точек, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), приводит нас к естественной классификации поверхностей по свойствам их уравнений. Поверхность называется *алгебраической*, если она задается уравнением (1), где $F(x, y, z)$ — целый многочлен от переменных x, y и z, т. е. алгебраическая сумма конечного числа членов вида $Ax^m y^n z^p$, где A — постоянный коэффициент, а m, n и p — целые неотрицательные показатели. Сумма $m + n + p$ называется *степенью* данного члена, а наибольшая из степеней членов многочлена называется *степенью многочлена*. Всякую неалгебраическую поверхность называют *трансцендентной*. Алгебраические поверхности различают по порядку их уравнений, т. е. по степеням многочлена, стоящего в левой части уравнения (1). Из теоремы [10.1] следует, что в предыдущих двух главах мы по существу изучали поверхности первого порядка. Объектом нашего изучения в настоящей и следующей главах будут алгебраические поверхности второго порядка.

Поверхностью второго порядка называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой (вообще говоря, аффинной) системе координат удовлетворяют уравнению

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Rz + L = 0, \qquad (2)$$

где $A, B, \ldots, L$ — действительные числа, причем по крайней мере один из коэффициентов A, B, C, D, E, F отличен от нуля. Другими словами, поверхность второго порядка есть геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению (1), где $F(x, y, z)$ — некоторый многочлен второй степени.

Покажем, что это определение носит геометрический характер, т. е. не зависит от выбора системы координат в пространстве. Пусть $Oe_1e_2e_3$ — исходная, а $O'e_1'e_2'e_3'$ — новая системы координат, где O', e_1', e_2' и e_3' заданы в старой системе при помощи соотношений (14) из § 19. Найдем уравнение геометрического места (2) в новой системе координат. Для этой цели перейдем к индексным обозначениям — как для координат точек пространства, так и для коэффициентов уравнения (2). Так же как и в предыдущем параграфе, для координат точек вместо обычных обозначений x, y, z будем применять индексные обозначения x_1, x_2, x_3. Если, далее, положить

$$A = a_{11},\ B = a_{22},\ C = a_{33},\ D = 2a_{12} = 2a_{21},\ E = 2a_{13} = 2a_{31},$$
$$F = 2a_{23} = 2a_{32},\ G = 2a_{14},\ H = 2a_{24},\ K = 2a_{34},\ L = a_{44},$$

то в новых обозначениях уравнение (2) примет вид:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 +$$
$$+ 2a_{23}x_2x_3 + 2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44} = 0. \qquad (2')$$

Или в сокращенной записи:

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j + 2\sum a_{i4}x_i + a_{44} = 0^1. \qquad (3)$$

Теперь легко записать уравнение поверхности в новой системе координат. В самом деле, подставив в соотношение (3) вместо x_1, x_2, x_3 их выражения через координаты точек в новой системе (см. (17) из § 19), получаем искомое уравнение:

$$\sum_{i,j} a'_{ij}x'_ix'_j + 2\sum a'_{i4}x'_i + a'_{44} = 0. \qquad (4)$$

Здесь a_{ij}', a_{i4}', a_{44}' — действительные числа, подробные выражения которых через a_{ij} нет надобности выписывать.

[1] См. сноску[2] на стр. 204 и сноску [1] на стр. 205.

Мы пришли к выводу, что в новой системе координат исходная поверхность определяется алгебраическим уравнением (4), степень которого не выше степени уравнения (3), т. е. не выше двух. Покажем, что степень этого уравнения не ниже степени уравнения (3).

В самом деле, если предположить, что степень уравнения (4) ниже степени уравнения (3), то при обратном переходе от системы $O'e_1'e_2'e_3'$ к системе $Oe_1e_2e_3$ степень уравнения должна повыситься, что противоречит предыдущему выводу. Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема [20.1]. *Если в некоторой аффинной системе координат $Oe_1e_2e_3$ геометрическое место точек задано алгебраическим уравнением второй степени* (2),*то в любой другой системе $O'e_1'e_2'e_3'$ это геометрическое место также будет задано алгебраическим уравнением второй степени.*

Тем самым доказано, что понятие поверхности второго порядка не зависит от выбора системы координат.

Нашей ближайшей задачей является изучение геометрических свойств поверхностей второго порядка и классификация этих поверхностей по примеру классификации кривых второго порядка. Предварительно рассмотрим задачи пересечения поверхности с прямой и плоскостью которые в дальнейшем неоднократно будут использованы при изучении формы поверхностей второго порядка.

3. Пересечение поверхности второго порядка с прямой. Пусть в аффинной системе координат $Oe_1e_2e_3$ дана поверхность второго порядка уравнением (3) и прямая параметрическими уравнениями:

$$x_1 = p_1t + \xi_1,\quad x_2 = p_2t + \xi_2,\quad x_3 = p_3t + \xi_3, \tag{5}$$

где $\boldsymbol{p}\ \{p_1, p_2, p_3\}$ — направляющий вектор прямой, а $M_0\ (\xi_1,\xi_2,\xi_3)$ — начальная точка этой прямой. Найдем точки пересечения прямой (5) и поверхности второго порядка (3). Для решения этой задачи поступим точно так же, как и при решении аналогичной задачи в теории кривых второго порядка (см. I, § 29). Сначала определим параметры точек пересечения прямой (5) и поверхности (3). Для этой цели подставим значения x_1, x_2, x_3 из соотношений (5) в уравнение (3) и найдем корни полученного уравнения относительно t:

$$\sum_{i,j} a_{ij}(p_it + \xi_i)(p_jt + \xi_j) + 2\sum a_{i4}(p_it + \xi_i) + a_{44} = 0.$$

После необходимых преобразований получаем:

$$Pt^2 + 2Qt + R = 0, \tag{6}$$

где

$$P = \sum_{i,j} a_{ij}p_ip_j, \tag{7}$$

$$Q = \sum p_i (a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + a_{i3}\xi_3 + a_{i4}); \tag{8}$$

$$R = \sum_{i,\,j} a_{ij}\xi_i\xi_j + 2\sum a_{i4}\xi_i + a_{44}. \tag{9}$$

Корни уравнения (6) являются параметрами точек пересечения прямой (5) с поверхностью, заданной уравнением (3). Подставив найденные значения параметров в уравнение (5), получаем координаты точек пересечения.

Заметим, что каждому корню уравнения (6) соответствует точка пересечения, причем различным корням соответствуют различные точки. Существенно отметить, что вещественным корням уравнения (6) соответствуют вещественные точки, а невещественным корням — невещественные точки. Таким образом, для выяснения количества и характера точек пересечения необходимо исследовать уравнение (6).

Прежде всего заметим, что коэффициент P в уравнении (6), как видно из соотношения (7), зависит от направления прямой (5) и не зависит от выбора начальной точки этой прямой. Отсюда следует, что если для всех параллельных прямых выбрать один и тот же направляющий вектор, то коэффициент P будет иметь одно и то же значение. Поэтому если для некоторой прямой коэффициент P отличен от нуля, то для всех прямых, параллельных этой прямой, коэффициент P не равен нулю. Это обстоятельство позволяет ввести следующее определение: *прямые, направляющие векторы которых удовлетворяют условию $P = 0$, называются прямыми асимптотического направления по отношению к данной поверхности, а направляющие векторы этих прямых — векторами асимптотического направления или асимптотическими векторами.*

Мы не будем проводить подробного исследования уравнения (6), так как оно по существу ничем не отличается от исследования аналогичного уравнения (3) из I, § 29. Используя выводы, к которым мы пришли в I, § 29, где подробно рассматривался вопрос о пересечении кривой второго порядка с прямой линией, мы приходим к теореме, аналогичной теореме I, [29.1].

Теорема [20.2]. *Если прямая (5) не имеет асимптотического направления по отношению к поверхности второго порядка (3), то она пересекает поверхность в двух точках:*

а) *вещественных различных, если* $Q^2 - PR > 0$;

б) *комплексно-сопряженных, если* $Q^2 - PR < 0$;

в) *совпадающих, если* $Q^2 - PR = 0$.

Если прямая имеет асимптотическое направление по отношению к поверхности второго порядка, то она либо пересекается с ней в одной точке ($P = 0$, $Q \neq 0$), либо не имеет с ней ни одной общей точки ($P = 0$, $Q = 0$, $R \neq 0$), либо принадлежит поверхности всеми своими точками ($P = 0$, $Q = 0$, $R = 0$).

Из этой теоремы непосредственно следует:

Теорема [20.3]. *Если прямая имеет с поверхностью более двух общих точек, то она целиком лежит на поверхности.*

Прямые, принадлежащие поверхности всеми своими точками, называются прямолинейными образующими поверхности второго порядка.

Пример 6. Определить точки пересечения поверхности второго порядка $x^2 - 2xy + 2z^2 + xz - x - y = 0$ с прямой $x = 3 + 4t$, $y = 3 + 4t$, $z = 3 + 4t$.

Решение. Подставив значения x, y, z в уравнение данной поверхности, получим уравнение для определения параметров точек пересечения прямой с поверхностью: $8t^2 + 10t + 3 = 0$. Отсюда $t_1 = -\frac{3}{4}$ и $t_2 = -\frac{1}{2}$. Мы видим, что заданная прямая неасимптотического направления, так как она пересекает поверхность в двух точках. Для того чтобы определить координаты этих точек, подставим найденные значения параметра в уравнение прямой. Мы получим:

$$M_1(0, 0, 0), \quad M_2(1, 1, 1).$$

Пример 7. Найти те прямолинейные образующие поверхности

$$x^2 + y^2 - z^2 = 1,$$

которые проходят через точку $(1, 1, 1)$.

Решение. Если $p(\alpha, \beta, \gamma\}$ — направляющий вектор искомой прямолинейной образующей, то параметрические уравнения этой образующей запишутся так:

$$x = 1 + \alpha t, \quad y = 1 + \beta t, \quad z = 1 + \gamma t.$$

Подставив эти значения в уравнение поверхности, после элементарных преобразований получаем:

$$(\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2)t^2 + 2(\alpha + \beta - \gamma)t = 0.$$

Прямая l будет прямолинейной образующей в том и только в том случае, когда

$$\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0, \qquad \alpha + \beta - \gamma = 0.$$

Заметим, что $\gamma \neq 0$, так как в противном случае из первого соотношения получаем: $\alpha = 0$ и $\beta = 0$.

Разделив последние соотношения на γ и вводя новые неизвестные $\frac{\alpha}{\gamma} = \xi$, $\frac{\beta}{\gamma} = \eta$, получаем:

$$\xi^2 + \eta^2 = 1, \quad \xi + \eta = 1.$$

Из этих двух уравнений легко получить значения ξ и η:

$$\xi_1 = 0, \quad \eta_1 = 1, \quad \xi_2 = 1, \quad \eta_2 = 0.$$

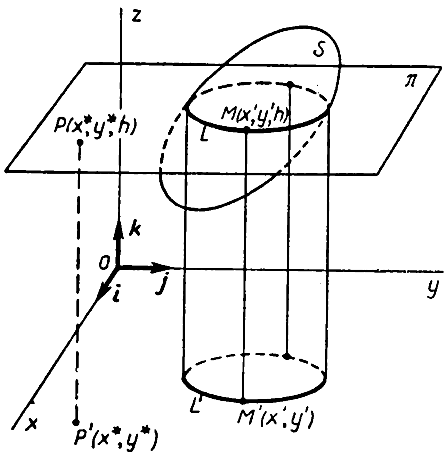


Рис. 77

Положив $\gamma = 1$, получаем координаты двух направляющих векторов прямолинейных образующих:

$$p_1\{0, 1, 1\}, \; p_2\{1, 0, 1\}.$$

Таким образом, параметрические уравнения прямолинейных образующих имеют вид:

$$x = 1, \; y = 1+t, \; z=1+t;$$
$$x = 1+t, \; y=1, \; z=1+t.$$

Подставив значения x, y и z в исходное уравнение поверхности, убеждаемся в том, что оно превращается в тождество относительно t.

4. Метод сечений для изучения формы поверхности. Для изучения формы поверхности удобнее всего задавать ее в прямоугольной декартовой системе координат.

Пусть S — некоторая поверхность, заданная в прямоугольной декартовой системе координат уравнением (1). Для изучения формы поверхности будем пользоваться так называемым методом сечений. Сущность этого метода заключается в следующем: поверхность S рассекается плоскостями, параллельными координатным плоскостям, и определяются линии пересечения поверхности с плоскостями. По виду этих линий судят о форме данной поверхности.

Применение метода сечений основывается на следующей теореме:

Теорема [20.4]. *Если S — поверхность, заданная в прямоугольной декартовой системе координат уравнением* (1), *а $z = h$ — плоскость π, параллельная координатной плоскости Oxy, то проекция линии пересечения поверхности S с данной плоскостью π на плоскость Oxy в системе $O\boldsymbol{ij}$ имеет уравнение*

$$F(x, y, h) = 0. \tag{10}$$

Доказательство. Пусть L — линия пересечения поверхности S с плоскостью π, а L' — проекция этой линии на координатную плоскость Oxy (рис. 77). Мы должны доказать, что линия L' в системе Oxy имеет уравнение (10). Для этой цели необходимо показать, что координаты любой точки линии L' на плоскости Oxy удовлетворяют уравнению (10), а координаты точки плоскости Oxy, не лежащей на линии L', не удовлетворяют этому уравнению. Возьмем произвольную точку M' на кривой L'. Пусть в плоскости Oxy точка M' имеет координаты (x', y'). Эта же точка в пространстве будет иметь координаты $(x', y', 0)$. Так как точка M' лежит на кривой L', то она является проекцией некоторой точки M кривой L.

Точки M и M' лежат на одной прямой, параллельной оси Oz, поэтому первые две координаты этих точек совпадают. Так как, кроме того, точка M лежит в плоскости π, то она имеет координаты $M(x', y', h)$. Точка M одновременно лежит на поверхности (1), так что $F(x', y', h) = 0$. Мы видим, что координаты точки $M'(x', y')$ в плоскости Oxy удовлетворяют уравнению (10). Возьмем, далее, произвольную точку $P'(x^*, y^*)$ в плоскости Oxy, не лежащую на кривой L', и покажем, что координаты этой точки не удовлетворяют уравнению (10). В самом деле, проведем через точку P' прямую, параллельную оси Oz, и обозначим через P точку пересечения этой прямой с плоскостью π. Так как точка P' в пространстве имеет координаты $(x^*, y^*, 0)$, то точка P будет иметь координаты (x^*, y^*, h). Но точка P' не лежит на кривой L', поэтому точка P не лежит на кривой L, т. е. координаты точки P не удовлетворяют уравнению поверхности S:

$$F(x^*, y^*, h) \neq 0.$$

Таким образом, мы показали, что если точка плоскости не лежит на кривой L', то ее координаты не удовлетворяют уравнению (10). Теорема доказана.

Следствие. *Линия пересечения плоскости Oxy с поверхностью* (1) *в системе Oij имеет уравнение*

$$F(x, y, 0) = 0.$$

Аналогичные теоремы могут быть доказаны для случаев, когда поверхность S подвергается сечению плоскостями, параллельными координатным плоскостям Oyz и Oxz.

Доказанная теорема позволяет построить так называемую карту поверхности в горизонталях и с помощью карты изучить ее форму. Пересечем поверхность S плоскостями $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$, заданными уравнениями $z = h_1$, $z = h_2$, ..., $z = h_k$, где числа $h_1, h_2, \ldots, h_k$ следуют друг за другом через одинаковые, достаточно малые числовые промежутки. Если для каждого сечения построить ее проекцию на плоскость Oxy, то получим множество кривых, которое называется картой поверхности в горизонталях. Эта карта дает некоторое представление как о всей поверхности, так и о некоторых ее участках. Например, сгущение линий на карте означает возрастание крутизны поверхности в соответствующем участке.

Пример 8. Дана поверхность в прямоугольной декартовой системе координат $Oijk$ уравнением $x^2 + y^2 = z^2$. Построить карту этой поверхности в горизонталях.

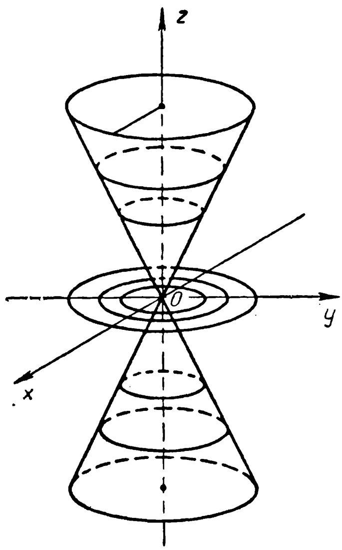


Рис. 78

Решение. Определим проекции сечений этой поверхности с плоскостями $z = h$ при $h_1 = 0$, $h_2 = 1$, $h_3 = 2$, $h_4 = 3$, $h_5 = 4$. Согласно теореме [20.4] проекции этих сечений в системе Oij имеют уравнения: $x^2 + y^2 = 0$, $x^2 + y^2 = 1$, $x^2 + y^2 = 2^2$, $x^2 + y^2 = 3^2$ и $x^2 + y^2 = 4^2$. Уравнение $x^2 + y^2 = 0$ определяет на плоскости Oxy единственную точку — начало координат, а остальные уравнения, как мы знаем, определяют окружности соответствующего радиуса. Таким образом, карта данной поверхности в горизонталях есть совокупность концентрических окружностей. Позже мы увидим, что этим уравнением определяется коническая поверхность, образованная вращением прямой вокруг оси Oz (см. рис. 78).

5. Пересечение поверхности второго порядка с плоскостью. В предыдущем пункте был указан способ для определения линии пересечения поверхности с плоскостью, параллельной одной из координатных плоскостей. Пользуясь найденными результатами, изучим характер линии, полученной при пересечении поверхности второго порядка с произвольной плоскостью. Докажем следующую теорему.

Теорема [20.5]. *Пусть в некоторой системе координат дана поверхность второго порядка уравнением* (2′) *и плоскость* π *своим общим уравнением*

$$A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3 + A_4 = 0. \qquad (11)$$

Если существует хотя бы один вектор $\boldsymbol{p}$, *параллельный плоскости* π *и не имеющий асимптотического направления, то линия пересечения поверхности* (2′) *с данной плоскостью* π *является кривой второго порядка.*

Доказательство. Пусть $O'\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2\boldsymbol{g}_3$ — новая прямоугольная декартова система координат, которая расположена в пространстве так, что точка O' и векторы $\boldsymbol{g}_1, \boldsymbol{g}_2$ лежат в плоскости π. В этой системе координат поверхность второго порядка имеет уравнение (4), а плоскость π — уравнение $x_3' = 0$. Найдем уравнение линии пересечения данной поверхности с плоскостью π в системе $O'\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2$. Для этой цели (см. следствие теоремы [20.4]) необходимо в уравнение (4) подставить $x_3' = 0$:

$$a'_{11}x_1'^2 + 2a'_{12}x'_1x'_2 + a'_{22}x_2'^2 + 2a'_{14}x'_1 + 2a'_{24}x'_2 + a'_{44} = 0. \qquad (12)$$

Согласно условиям теоремы существует вектор p неасимптотического направления относительно данной поверхности и параллельный секущей плоскости $O'\boldsymbol{g}_1\boldsymbol{g}_2$. Обозначая координаты этого вектора относительно новой системы координат через $\{p_1', p_2', 0\}$ и подставляя их в соотношения (7), получаем:

$$P = a'_{11}p_1'^2 + 2a'_{12}p'_1p'_2 + a'_{22}p_2'^2 \neq 0.$$

Отсюда следует, что хотя бы один из коэффициентов a_{11}', a_{12}', a_{22}' не равен нулю. Это означает, что кривая (12), по которой поверхность второго порядка пересекается с плоскостью π, является кривой второго порядка. Теорема доказана.

При доказательстве теоремы [20.5] мы предположили, что существует хотя бы один вектор неасимптотического направления, параллельный плоскости π. Покажем, что это предположение весьма существенно. В самом деле, имеет место следующая

Теорема [20.6]. *Пусть в некоторой аффинной системе координат дана поверхность второго порядка уравнением* (2') *и плоскость π общим уравнением* (11), *причем любой вектор, параллельный плоскости π, имеет асимптотическое направление относительно поверхности второго порядка. Тогда имеют место три случая взаимного расположения плоскости π с данной поверхностью*:

а) *плоскость π пересекает поверхность или касается поверхности по прямой линии;*

б) *плоскость π целиком принадлежит поверхности второго порядка;*

в) *плоскость π не имеет ни одной общей точки с поверхностью второго порядка.*

Доказательство. Как и в предыдущем случае, выберем новую прямоугольную декартову систему координат $O'\boldsymbol{g}_1'\boldsymbol{g}_2'\boldsymbol{g}_3'$ так, чтобы точка O' и векторы $\boldsymbol{g}_1'$ и $\boldsymbol{g}_2'$ лежали в плоскости π. В этой системе координат поверхность определяется уравнением (4), а плоскость π — уравнением $x_3' = 0$. Линия пересечения плоскости π с поверхностью второго порядка, как было показано выше, имеет уравнение (12). Легко видеть, что в данном случае коэффициенты a_{11}', a_{12}' a_{22}' равны нулю. В самом деле, в данном случае векторы $\boldsymbol{g}_1'$ $\{1, 0, 0\}$ $\boldsymbol{g}_2'$ $\{0, 1, 0\}$ и $(\boldsymbol{g}_1' + \boldsymbol{g}_2')$ $\{1, 1, 0\}$ имеют асимптотические направления относительно данной поверхности. Поэтому, подставив координаты этих векторов в соотношение (7), получаем:

$$a_{11}' = 0, \quad a_{22}' = 0, \quad a_{12}' \quad 0.$$

Таким образом, уравнение (12), характеризующее совокупность общих точек поверхности второго порядка и плоскости π, имеет вид:

$$2a_{14}'\, x_1' + 2a_{24}'\, x_2' + a_{44}' = 0. \qquad (13)$$

Возможны следующие три случая.

1) Хотя бы один из коэффициентов a_{14}', a_{24}' отличен от нуля. В этом случае уравнением (13) определяется в плоскости π прямая линия, и, следовательно, поверхность (4) пересекается с плоскостью π или касается плоскости π по прямой, имеющей в плоскости $O'g_1'g_2'$ уравнение (13).

2) $a_{14}'=0$, $a_{24}'=0$, $a_{44}'\neq 0$. В этом случае на плоскости $O'g_1'g_2'$ не существует ни одной точки, координаты которой удовлетворяли бы уравнению (13), т. е. поверхность не имеет с плоскостью π ни одной общей точки.

3) $a_{14}'=0$, $a_{24}'=0$, $a_{44}'=0$. В этом случае координаты любой точки плоскости π будут удовлетворять уравнению (13), т. е. плоскость π целиком принадлежит данной поверхности.

Теорема доказана.

Пример 9. Определить характер пересечения поверхности $(S): x^2-y^2=2$ с плоскостью $(\pi): x-y=4$.

Решение. Прежде всего выясним, существует ли хотя бы один вектор, параллельный данной плоскости и не имеющий асимптотического направления относительно поверхности S. Для данной поверхности S уравнение (7), определяющее векторы асимптотического направления, имеет вид: $p_1^2-p_2^2=0$. Координаты $\{p_1, p_2, p_3\}$ любого вектора, параллельного плоскости $x-y=4$, удовлетворяют условию: $p_1-p_2=0$. Из этого и предыдущего соотношений вытекает что все векторы, параллельные плоскости π, будут иметь асимптотическое направление относительно поверхности. Таким образом, в данном случае применима теорема [20.6]. Пересечение поверхности второго порядка S с плоскостью π определяется системой уравнений

$$\begin{cases} x^2-y^2=2, \\ x-y=4. \end{cases}$$

Эта система эквивалентна следующей:

$$\begin{cases} 4(x+y)=2, \\ x-y=4, \end{cases}$$

так как каждое решение первой системы является решением второй системы и наоборот. Мы видим, что рассматриваемая поверхность пересекается с плоскостью π по прямой линии, которая определяется уравнениями: $x+y=\frac{1}{2}$, $x-y=4$.

Задачи и упражнения

275. Найти точки пересечения поверхности $x^2-xy+zy-5z=0$ с прямой $\frac{x-10}{7}=\frac{y-5}{3}=\frac{z}{-1}$.

276. Найти точки пересечения поверхности $y^2-2x^2+z^2-2xy-xz+4yz+3y-5z=0$ с прямой $\frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{4}=\frac{z}{0}$.

277. Найти точки пересечения поверхности

$$z^2 - 3xz + 2yz - yx + 3x + 2z = 0$$

а) с осью Oy;

б) с прямой $\frac{x}{16} = \frac{y}{-24} = \frac{z}{-9}$.

278. Какие из следующих прямых:

а) $\frac{x-4}{1} = \frac{y+2}{-1} = \frac{z-3}{-1}$; б) $\frac{x-3}{8} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-1}$;

в) $\frac{x-1}{-6} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{-3}$; г) $\frac{x}{-3} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{4}$; д) $\frac{x}{5} = \frac{y}{-1} = \frac{z}{0}$

имеют асимптотическое направление относительно поверхности второго порядка $2xy + yz - zx - 2x + 2y - 3z - 2 = 0$?

279. Найти линию пересечения поверхности $x^2 - y^2 = 0$ с плоскостью $z = 5$.

280. Найти линию пересечения поверхности $x^2 + 3y^2 - 4xz - 2yz + z - 6 = 0$ с плоскостью Oxy.

281. Для поверхности $x^2 - y^2 - 2x + z - 3 = 0$ построить карту в горизонталях.

282. Методом сечений изучить поверхность $x^2 - 2y^2 + z^2 - 2x + 6 = 0$.

283. Методом сечений изучить поверхность $y^2 - z^2 - 2x + 5z + 3 = 0$.

§ 21. СФЕРИЧЕСКАЯ ПОВЕРХНОСТЬ

1. Уравнение сферической поверхности. Сферическая поверхность или сфера, есть геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой точки, называемой центром. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат $O\boldsymbol{ijk}$ точка $C(x_0, y_0, z_0)$ является центром сферической поверхности радиуса r (рис. 79). Для того чтобы точка $M(x, y, z)$ принадлежала сферической поверхности, необходимо и достаточно, чтобы $MC = r$ или согласно теореме [5.3]:

$$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = r.$$

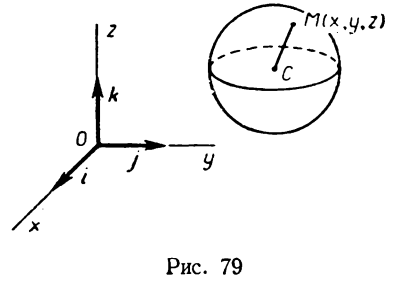


Рис. 79

Так как в левой части равенства выбирается арифметическое значение корня, то предыдущее равенство эквивалентно следующему:

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2, \tag{1}$$

или в развернутом виде:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x_0x - 2y_0y - 2z_0z + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - r^2 = 0. \tag{2}$$

В частности, если точка C совпадает с началом координат, то уравнение сферы имеет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2. \tag{3}$$

Мы пришли к следующей теореме.

Теорема [21.1]. *В прямоугольной декартовой системе координат сферическая поверхность с центром в точке C (x_0, y_0, z_0) радиуса r имеет уравнение* (1). *Если центр сферической поверхности совпадает с началом координат, то уравнение этой поверхности имеет вид* (3).

Пример 1. Написать уравнение сферической поверхности: а) с центром в точке C (1, —2, 3) радиусом $r = 5$; б) с центром в начале координат радиусом $r = 2$.

Решение. а) Пользуясь соотношением (1), получаем уравнение искомой сферической поверхности:

$$(x - 1)^2 + (y + 2)^2 + (z - 3)^2 = 25,$$

или в развернутом виде:

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0.$$

б) Пользуясь соотношением (3), получаем:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 4.$$

Важно подчеркнуть, что уравнения (1), (2) и (3) записаны в прямоугольной декартовой системе. В аффинной системе координат этими уравнениями, вообще говоря, определяется не сферическая поверхность.

2. Обратная задача. В предыдущем пункте было доказано, что уравнение любой сферической поверхности имеет вид (2). Поскольку уравнение (2) является алгебраическим уравнением второй степени, то сферическая поверхность есть поверхность второго порядка. Отметим некоторые особенности уравнения (2):

а) в уравнении отсутствуют члены с произведениями xy, xz и yz;

б) коэффициенты при x^2, y^2, z^2 равны друг другу.

Таким образом, уравнение любой сферической поверхности имеет вид:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0. \tag{4}$$

Верно ли обратное утверждение, т. е., всегда ли уравнением (4) определяется сферическая поверхность? Ответ на этот вопрос дает следующая теорема.

Теорема [21.2]. *Геометрическое место точек пространства, координаты которых удовлетворяют уравнению* (4), *есть*:

а) *сферическая поверхность с центром* $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$ *и радиусом* $r = \frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}{2}$, *если* $A^2+B^2+C^2-4D>0$;

б) *точка с координатами* $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$, *если* $A^2+B^2+C^2-4D=0$;

в) *пустое множество, если* $A^2+B^2+C^2-4D<0$ [1].

Доказательство. Данное уравнение (4) можно преобразовать следующим образом:

$$x^2+Ax+\frac{A^2}{4}+y^2+By+\frac{B^2}{4}+z^2+Cz+\frac{C^2}{4}+D-\frac{A^2}{4}-\frac{B^2}{4}-\frac{C^2}{4}=0,$$

или

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2+C^2-4D}{4}. \quad (5)$$

Возможны следующие случаи:

а) $A^2+B^2+C^2-4D>0$. В этом случае соотношение (5), которое эквивалентно соотношению (4), может быть переписано так:

$$\left[x-\left(-\frac{A}{2}\right)\right]^2+\left[y-\left(-\frac{B}{2}\right)\right]^2+\left[z-\left(-\frac{C}{2}\right)\right]^2=\left[\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}{2}\right]^2.$$

Этим уравнением определяется сферическая поверхность с центром в точке $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$ и радиусом $r=\frac{\sqrt{A^2+B^2+C^2-4D}}{2}$.

В самом деле, если, воспользовавшись теоремой [21.1], записать уравнение сферической поверхности с центром в точке $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$ и радиусом r, то мы в точности получим приведенное выше уравнение.

б) $A^2+B^2+C^2-4D=0$. Соотношение (5) в этом случае принимает вид:

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2+\left(z+\frac{C}{2}\right)^2=0.$$

Этому уравнению удовлетворяют координаты единственной точки $\left(-\frac{A}{2}, -\frac{B}{2}, -\frac{C}{2}\right)$. Таким образом, геометрическое место точек состоит из одной точки. Для общности можно сказать, что в данном случае уравнением (5) определяется сфера нулевого радиуса.

[1] Ср. I, теорема [12.2].

в) $A^2 + B^2 + C^2 - 4D < 0$. В этом случае не существует в пространстве ни одной вещественной точки, координаты которой удовлетворяют уравнению (5) или (4). Искомое геометрическое место не имеет ни одной действительной точки. Как видим, в данном случае поверхность (5) является нулевой. Поскольку в последнем случае существуют комплексные числа, удовлетворяющие уравнению (5), то поверхность (5) при $A^2 + B^2 + C^2 - 4D < 0$ называют также *мнимой сферической поверхностью*.

Теорема доказана.

Пример 2. Выяснить, какие из приведенных ниже уравнений определяют в прямоугольной декартовой системе координат сферическую поверхность. В случае когда уравнение определяет сферическую поверхность, найти ее радиус и координаты центра.

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y - 10z + 1 = 0$;
б) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 4y + 2z + 3 = 0$;
в) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$;
г) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 2z + 8 = 0$.

Решение. Для решения данной задачи воспользуемся результатами теоремы [21.2].

а) Для уравнения а) имеем: $A^2 + B^2 + C^2 - 4D = 196 > 0$. Следовательно, данное уравнение определяет в пространстве сферу, центр которой находится в точке (3, —4, 5) и радиус которой равен 7.

б) Для уравнения б) имеем: $A^2 + B^2 + C^2 - 4D = 0$. Следовательно, уравнением б) определяется точка $C\left(+\frac{1}{2}, -1, -\frac{1}{2}\right)$ или сфера нулевого радиуса с центром в точке C.

в) В данном случае $A^2 + B^2 + C^2 - 4D > 0$, поэтому мы имеем сферу с центром в точке (—1, 2, 3) радиуса $r = 3$.

г) В данном случае $A^2 + B^2 + C^2 - 4D < 0$, значит, поверхность, определяемая уравнением г), нулевая.

3. Сферическая поверхность, проходящая через четыре данные точки. Уравнение сферической поверхности (4) содержит четыре независимых параметра A, B, C и D, поэтому, вообще говоря, сферическая поверхность однозначно определяется в случае, если заданы какие-либо четыре условия, накладываемые на коэффициенты A, B, C и D. В частности, сферическая поверхность вполне определяется заданием четырех точек, лежащих в этой поверхности и не лежащих в одной плоскости. В самом деле, поставим следующую задачу.

Задача 1. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат даны четыре точки своими координатами:

$$M_1(x_1, y_1, z_1),\ M_2(x_2, y_2, z_2),\ M_3(x_3, y_3, z_3) \text{ и } M_4(x_4, y_4, z_4).$$

Точки M_1, M_2, M_3, M_4 не лежат в одной плоскости. Написать уравнение сферической поверхности, проходящей через эти точки.

Р е ш е н и е. Пусть соотношение (4) является искомым уравнением сферической поверхности, проходящей через точки M_1, M_2, M_3 и M_4. Так как эти точки принадлежат поверхности (4), то координаты их удовлетворяют уравнению (4):

$$\left.\begin{aligned} x_1^2+y_1^2+z_1^2+Ax_1+By_1+Cz_1+D=0, \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2+Ax_2+By_2+Cz_2+D=0, \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2+Ax_3+By_3+Cz_3+D=0, \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2+Ax_4+By_4+Cz_4+D=0. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

В этих уравнениях неизвестными являются коэффициенты A, B, C и D. Таким образом, мы получили четыре линейных уравнения с четырьмя неизвестными A, B, C и D. Из теории линейных уравнений известно, что если определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных, отличен от нуля, то система линейных уравнений имеет единственное решение. В данном случае этот определитель имеет вид:

$$\Delta=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}. \tag{7}$$

Так как точки M_1, M_2, M_3, M_4 не лежат в одной плоскости, то этот определитель не равен нулю. Определив из соотношений (6) неизвестные A, B, C, D и подставив найденные значения в уравнение (4), получим искомое уравнение сферической поверхности.

Задачу можно решить значительно проще, если поступить несколько иначе. Исключим из соотношений (4) и (6) A, B, C, D. Для этого поступим так, как обычно делают в алгебре: приравняем нулю определитель пятого порядка, составленный из коэффициентов при A, B, C, D и свободных членов:

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ x_1^2+y_1^2+z_1^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2^2+y_2^2+z_2^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3^2+y_3^2+z_3^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4^2+y_4^2+z_4^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}=0. \tag{8}$$

Легко убедиться в том, что это уравнение действительно является уравнением сферической поверхности. В самом деле, раскрыв определитель по элементам первой строки и разделив его на неравный нулю определитель (7), мы получаем уравнение вида (4). Полученному уравнению удовлетворяют координаты всех точек M_1, M_2, M_3 и M_4. В самом деле, если, например, подставить координаты точки M_1 в соотношение (8), то в определителе образуются две равные строки, следовательно, получим правильное числовое равенство: $0=0$.

Итак, уравнение (8) имеет вид уравнения (4) и этому уравнению удовлетворяют координаты четырех вещественных точек. Значит, в силу теоремы [21.2], уравнением (8) определяется вещественная сфера.

П р и м е р 3. Определить уравнение сферической поверхности, проходящей через четыре точки, заданные в прямоугольной декартовой системе своими координатами:

$M_1(4, -1, 2)$, $M_2(0, -2, 3)$, $M_3(1, -5, -1)$, $M_4(2, 0, 1)$.

Р е ш е н и е. Запишем уравнение сферической поверхности, проходящей через данные точки, пользуясь соотношением (8):

$$\begin{vmatrix} x^2+y^2+z^2 & x & y & z & 1 \\ 4^2+(-1)^2+2^2 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 0^2+(-2)^2+3^2 & 0 & -2 & 3 & 1 \\ 1^2+(-5)^2+(-1)^2 & 1 & -5 & -1 & 1 \\ 2^2+0^2+1^2 & 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв этот определитель по элементам первой строки, после необходимых преобразований, получаем:

$$x^2+y^2+z^2-4x+6y-2z+5=0.$$

4. Сферическая поверхность, проходящая через две диаметрально противоположные точки.

З а д а ч а 2. В прямоугольной декартовой системе координат даны две различные точки своими координатами: $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$. Написать уравнение сферической поверхности, для которой отрезок M_1M_2 является одним из диаметров.

Р е ш е н и е. Из геометрических свойств сферической поверхности известно, что точка M принадлежит этой поверхности тогда и только тогда, когда $\angle M_1MM_2 = 90^\circ$ или более точно, когда векторы $\overline{M_1M}$ и $\overline{M_2M}$ перпендикулярны. Используя это свойство, легко записать искомое уравнение сферической поверхности. В самом деле, пусть $M(x, y, z)$ — произвольная точка пространства. Для того чтобы эта точка принадлежала рассматриваемой сферической поверхности, необходимо и достаточно, чтобы $\overline{M_1M}\cdot\overline{M_2M} = 0$. Векторы $\overline{M_1M}$ и $\overline{M_2M}$ имеют следующие координаты: $\overline{M_1M}\{x-x_1, y-y_1, z-z_1\}$, $\overline{M_2M}\{x-x_2, y-y_2, z-z_2\}$, поэтому предыдущее соотношение в координатах запишется следующим образом:

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0. \quad (9)$$

Мы получили уравнение сферической поверхности, для которой отрезок M_1M_2 является одним из диаметров.

П р и м е р 4. Написать уравнение сферической поверхности, для которой отрезок OK является одним из диаметров, где O — начало координат, а точка K имеет координаты (2, 4, 3).

Р е ш е н и е. Воспользовавшись формулой (9), получаем:

$$x(x-2)+y(y-4)+z(z-3)=0$$

или

$$x^2+y^2+z^2-2x-4y-3z=0.$$

5. Касательная плоскость к сферической поверхности в данной точке. Из курса элементарной геометрии известно, что плоскость, проходящая через точку M сферы и перпендикулярная к радиусу CM, является касательной плоскостью к сфере в точке M. Рассмотрим следующую задачу.

Задача 3. Пусть в некоторой прямоугольной декартовой системе координат задана сферическая поверхность уравнением (4). Написать уравнение касательной плоскости к этой поверхности в точке $M_1(x_1, y_1, z_1)$, лежащей на данной поверхности.

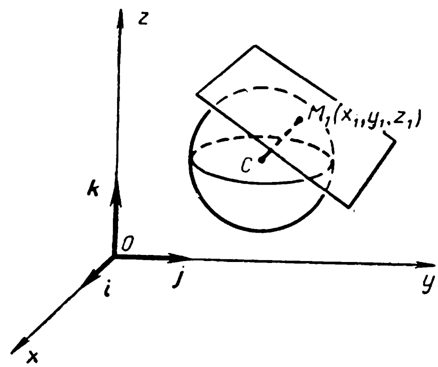


Рис. 80

Решение. Из теоремы [21.2] следует, что центр C этой поверхности имеет координаты $\left(-\frac{A}{2},\ -\frac{B}{2},\ -\frac{C}{2}\right)$. Таким образом, вектор $\overline{CM}_1$ имеет координаты $\left\{x_1+\frac{A}{2},\ y_1+\frac{B}{2},\ z_1+\frac{C}{2}\right\}$.

Задача сводится к тому, чтобы написать уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и перпендикулярной к вектору $\overline{CM}_1$ (рис. 80). Согласно § 12, п. 2 имеем:

$$(x-x_1)\left(x_1+\frac{A}{2}\right)+(y-y_1)\left(y_1+\frac{B}{2}\right)+(z-z_1)\left(z_1+\frac{C}{2}\right)=0.$$

Учитывая, что точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ лежит на сфере, после элементарных преобразований получаем уравнение касательной плоскости в окончательном виде:

$$x_1x+y_1y+z_1z+\frac{A}{2}(x+x_1)+\frac{B}{2}(y+y_1)+\frac{C}{2}(z+z_1)+D=0. \quad (10)$$

Пример 5. Дана сферическая поверхность: $x^2+y^2+z^2-x+3y+2z-3=0$. Написать уравнение касательной плоскости в точке $(1, 1, -1)$. Система координат прямоугольная декартова.

Решение. Подставив координаты точки и значения коэффициентов уравнения поверхности в предыдущее уравнение, получаем: $x+5y-6=0$.

Предыдущее уравнение (10) значительно упрощается, если сферическая поверхность имеет центр в начале координат. В самом деле, в этом случае уравнение сферической поверхности имеет вид (3), поэтому уравнение касательной плоскости в точке (x_1, y_1, z_1) принимает следующий вид: $xx_1+yy_1+zz_1-r^2=0$.

Замечание. При решении разнообразных задач полезно пользоваться также следующими соображениями: если C — центр сферы, а r — ее радиус, то всякая касательная плоскость к этой поверхности отстоит от точки C на расстоянии r (см. рис. 80).

Рассмотрим следующий пример.

Пример 6. В прямоугольной декартовой системе координат даны сферическая поверхность уравнением $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$ и прямая l общими уравнениями $\begin{cases} x + y = 6, \\ x - 2z = 3. \end{cases}$ Написать уравнение касательной плоскости к данной сферической поверхности, проходящей через прямую l.

Решение. Запишем уравнение пучка плоскостей, определяемого прямой l:

$$\lambda\,(x + y - 6) + \mu\,(x - 2z - 3) = 0.$$

Определим λ и μ так, чтобы эта плоскость отстояла от центра данной сферической поверхности, т. е. от начала координат, на расстоянии $r = 3$:

$$\frac{|6\lambda + 3\mu|}{\sqrt{(\lambda+\mu)^2 + \lambda^2 + 4\mu^2}} = 3.$$

Приводя к общему знаменателю и освободившись от радикала, будем иметь:

$$2\mu^2 - \lambda\mu - \lambda^2 = 0.$$

Из этого соотношения видно, что если $\lambda = 0$, то и $\mu = 0$. Так как λ и μ одновременно не равны нулю, то $\lambda \neq 0$, поэтому, разделив на λ^2, получаем квадратное уравнение $2\left(\frac{\mu}{\lambda}\right)^2 - \left(\frac{\mu}{\lambda}\right) - 1 = 0$, имеющее корни 1 и $-\frac{1}{2}$. Откуда $\lambda_1 = 1$, $\mu_1 = 1$ и $\lambda_2 = -2$, $\mu_2 = 1$.

Таким образом, мы получаем уравнения двух плоскостей, проходящих через данную прямую и касающихся сферической поверхности:

$$2x + y - 2z - 9 = 0,$$
$$x + 2y + 2z - 9 = 0.$$

6. Задачи на геометрические места, приводящие к сферической поверхности. В заключение рассмотрим несколько задач на определение геометрических мест точек в пространстве.

Задача 4. Найти геометрическое место точек пространства, отношение расстояний которых от двух данных точек постоянно[1].

Решение. Пусть A и B — данные точки. Возьмем прямоугольную декартову систему координат так, чтобы начало координат

---

[1] См. I, задачу 2, § 12.

динат было в точке B, а положительное направление оси абсцисс совпало с направлением луча BA. Если $AB = a$, то A $(a, 0, 0)$, а B $(0, 0, 0)$. Если M (x, y, z) — произвольная точка геометрического места, то $\frac{AM}{BM} = \lambda$, где AM и BM — расстояния от точки M до данных точек A и B, а λ — данное постоянное положительное число. Так как

$$AM = \sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2},\ BM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

то

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2 + z^2} = \lambda \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

Это соотношение является уравнением искомого геометрического места точек. Возведем обе части этого соотношения в квадрат:

$$(x - a)^2 + y^2 + z^2 = \lambda^2 (x^2 + y^2 + z^2);$$

при этом полученное уравнение будет эквивалентно прежнему. Преобразуя последнее соотношение, получаем:

$$x^2 (1 - \lambda^2) + y^2 (1 - \lambda^2) + z^2 (1 - \lambda^2) - 2ax + a^2 = 0. \quad (11)$$

Возможны два случая:

а) $\lambda = 1$. Уравнение (11) принимает вид: $-2ax + a^2 = 0$ или $2x - a = 0$. Как мы видим, в данном случае искомое геометрическое место точек представляет собой плоскость, перпендикулярную к прямой AB и проходящую через середину отрезка AB.

Мы пришли к известной из курса элементарной геометрии теореме о том, что геометрическое место точек пространства, равноудаленных от двух данных точек, есть плоскость, перпедикулярная к отрезку, соединяющему эти точки, и проходящая через его середину.

б) $\lambda \neq 1$. Разделив соотношение (11) на $1 - \lambda^2$, получаем:

$$x^2 + y^2 + z^2 - \frac{2a}{1-\lambda^2} x + \frac{a^2}{1-\lambda^2} = 0.$$

Так как для данного уравнения

$$A^2 + B^2 + C^2 - 4D = \frac{4a^2}{(1-\lambda^2)^2} - \frac{4a^2}{1-\lambda^2} = \frac{4\lambda^2 a^2}{(1-\lambda^2)^2} > 0,$$

то согласно теореме [21.2] искомое геометрическое место представляет собой сферическую поверхность с центром в точке $\left(\frac{a}{1-\lambda^2}, 0, 0\right)$. Легко видеть, что эта точка лежит на прямой AB. Задача решена.

Задача 5. Дан куб, сторона которого равна $2a$. Найти геометрическое место точек пространства, сумма квадратов расстояний которых от шести граней данного куба есть величина постоянная.

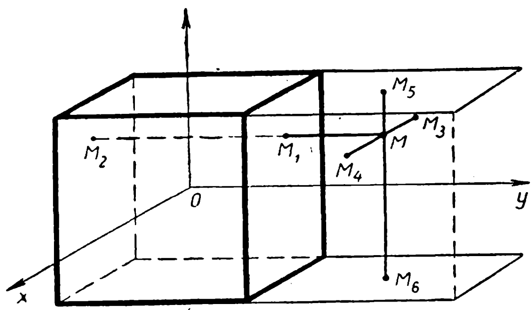


Рис. 81

Решение. Возьмем прямоугольную декартову систему координат в пространстве так, чтобы начало координат совпало с центром куба, а координатные плоскости были параллельны соответствующим граням (рис. 81). При выбранной системе координат грани куба будут иметь следующие уравнения: $x = a$, $x = -a$, $y = a$, $y = -a$, $z = a$, $z = -a$. Пусть M (X, Y, Z) — произвольная точка геометрического места. Запишем, что сумма квадратов расстояний от этой точки до всех шести граней есть величина постоянная и равная k^2:

$$(X-a)^2 + (X+a)^2 + (Y-a)^2 + (Y+a)^2 + (Z-a)^2 + (Z+a)^2 = k^2,$$

или

$$2(X^2 + Y^2 + Z^2 + 3a^2) = k^2.$$

Отсюда получаем окончательное выражение для уравнения геометрического места точек:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \frac{k^2}{2} - 3a^2.$$

Геометрическое место точек, определяемое этим уравнением, нами было исследовано выше. В соответствии с теоремой [21.2] рассмотрим три случая:

а) $\frac{k^2}{2} - 3a^2 > 0$. В этом случае уравнение геометрического места можно записать в следующем виде:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = \left(\sqrt{\frac{k^2 - 6a^2}{2}}\right)^2.$$

Отсюда следует, что искомое геометрическое место точек есть сфера с центром в начале координат радиуса

$$r = \sqrt{\frac{k^2 - 6a^2}{2}}.$$

б) $\frac{k^2}{2} - 3a^2 = 0$ или $k^2 = 6a^2$. В этом случае рассматриваемое геометрическое место точек согласно теореме [21.2] представляет собой единственную точку — начало координат, т. е. центр куба.

в) $\frac{k^2}{2} - 3a^2 < 0$. В пространстве нет ни одной точки, удовлетворяющей условиям задачи.

Задачи и упражнения

284. Составить уравнение сферической поверхности радиуса 5, центр которой находится в точке:

а) $O_1(-1, 0, 5)$; б) $O_2(-5, 0, 0)$; в) $O_3(3, 0, -4)$; г) $O_4(0, 0, 0)$.

285. Определить центры и радиусы следующих сфер:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 8y - 10z + 1 = 0$;
б) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z + 5 = 0$;
в) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2x + 4y + 2z + 3 = 0$.

286. Определить, какие поверхности заданы следующими уравнениями:

а) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 6y - 10z + 34 = 0$;
б) $x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2z + 7 = 0$;
в) $4x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 8x + 4y - 32z + 60 = 0$;
г) $9x^2 + 9y^2 + 9z^2 + 6x - 54y + 73 = 0$;
д) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 6y - 2z + 18 = 0$.

287. Написать уравнение сферической поверхности, проходящей через две диаметрально противоположные точки:

а) $A(2, -3, 4)$, $B(-5, 6, -7)$;
б) $A(1, -3, 5)$, $B(4, 1, 0)$;
в) $A(3, 1, 0)$, $B(2, 2, -1)$.

288. Написать уравнение сферы, проходящей через точки:

а) $(0, 0, 0)$, $(0, -1, 0)$, $(2, 1, 3)$, $(-2, 1, 1)$;
б) $(0, 0, 0)$, $(-a, b, c)$, $(a, -b, c)$, $(a, b, -c)$.

289. Написать уравнение касательной плоскости к сфере $(x-2)^2 + y^2 + z^2 = 4$ в точках:

а) $(0, 0, 0)$; б) $(3, \sqrt{2}, 1)$; в) $(4, 0, 0)$; г) $(0, \sqrt{2}, \sqrt{2})$.

290. Написать уравнение сферы, центр которой лежит на прямой $5y + 2z = 0$, $2x - 3y = 0$ и которая проходит через две точки $(0, -2, -4)$ и $(2, -1, -1)$.

291. Найти уравнение сферы, центр которой лежит на плоскости $2x + 3y + 4z - 6 = 0$ и которая проходит через точки $(3, 0, 2)$, $(-1, 1, 1)$, $(2, -5, 4)$.

292. Найти уравнение плоскостей, касающихся сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 2y - 6z + 5 = 0$ и параллельных плоскости $2x + 2y - z = 0$.

293. Написать уравнения плоскостей, проходящих через прямую $x + y - 6 = 0$, $x - 2z - 3 = 0$ и касающихся сферы $x^2 + y^2 + z^2 - 9 = 0$.

294. Написать уравнения плоскостей, касающихся сферы $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 2z + 1 = 0$ и проходящих через прямую

$$\frac{x-16}{-2} = \frac{z}{2} = \frac{y+15}{3}.$$

295. Найти уравнение сферы с центром в начале координат, которая касается прямой $\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+3}{2}$.

296. Найти геометрическое место точек пространства, сумма квадратов расстояний которых от двух данных точек A и B есть величина постоянная.

297. Найти геометрическое место точек пространства, из которых данный отрезок виден под прямым углом.

298. Дана сфера с центром в точке O, радиуса r и на ней точка A. Найти геометрическое место точек, делящих всевозможные хорды, проведенные через A в одном и том же отношении λ.

299. Найти геометрическое место середин всех хорд сферы, имеющих данную длину.

300. Дана связка прямых с центром в точке A и точка B. Найти геометрическое место проекций точки B на прямые связки.

§ 22. ЦИЛИНДРИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ

1. Уравнение цилиндрической поверхности. *Поверхность, обладающая тем свойством, что вместе с каждой точкой M она содержит всю прямую, проходящую через M и параллельную данному фиксированному вектору p, называется* *ц и л и н д р и ч е с к о й п о в е р х н о с т ь ю* *или* *ц и л и н д р о м.*

Прямые, параллельные вектору p и принадлежащие цилиндрической поверхности, называются о б р а з у ю щ и м и этой поверхности. Таким образом, цилиндрическая поверхность образована прямыми линиями, параллельными данному вектору p и удовлетворяющими еще одному условию, например проходящими через все точки кривой L. В этом случае кривая L называется н а п р а в л я ю щ е й цилиндрической поверхности (рис. 82).

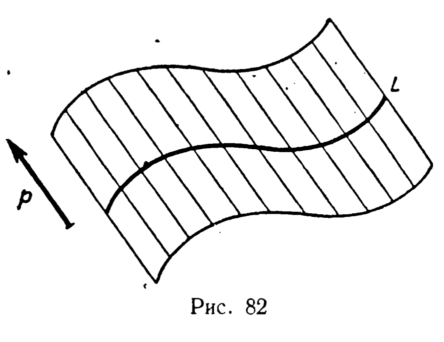


Рис. 82

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Пусть $Oe_1e_2e_3$ — аффинная система координат в пространстве. Даны кривая L, расположенная в плоскости Oe_1e_2 и имеющая в этой плоскости уравнение

$$F(x, y) = 0, \qquad (1),$$

и вектор $p\{\alpha, \beta, \gamma\}$, не параллельный плоскости Oe_1e_2. Написать уравнение цилиндрической поверхности, для которой образующие параллельны вектору p, а кривая L является направляющей.

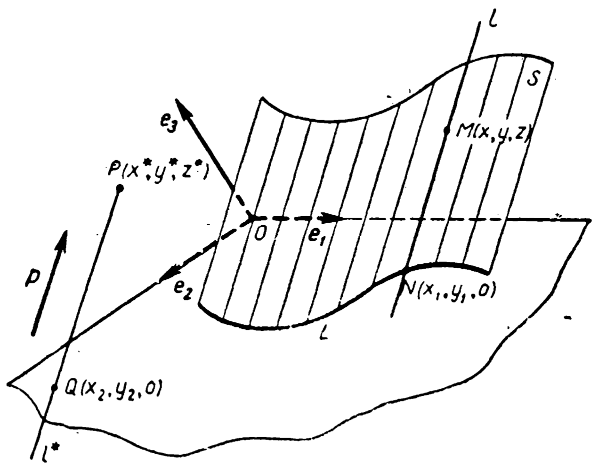


Рис. 83

Решение. Пусть S — рассматриваемая цилиндрическая поверхность, а $M(x, y, z)$ — произвольная точка этой поверхности (рис. 83). Обозначим через N точку пересечения образующей l, проходящей через точку M, с плоскостью Oxy. Очевидно, точка N лежит на кривой L. По определению цилиндрической поверхности векторы $\overline{MN}$ и p коллинеарны. Если $(x_1, y_1, 0)$ — координаты точки N в пространстве, то согласно теореме [2.1], вектор $\overline{MN}$ имеет координаты $(x_1 - x, y_1 - y, 0 - z)$. Условие коллинеарности векторов $\overline{MN}$ и p запишется следующим образом:

$$x_1 - x = \lambda\alpha, \quad y_1 - y = \lambda\beta, \quad 0 - z = \lambda\gamma.$$

Вектор p не параллелен плоскости Oe_1e_2, поэтому $\gamma \neq 0$; из последнего соотношения получаем: $\lambda = -\frac{z}{\gamma}$. Из первых двух соотношений следует, что

$$x_1 = x - z\frac{\alpha}{\gamma}, \quad y_1 = y - z\frac{\beta}{\gamma}.$$

Точка N принадлежит кривой L, поэтому $F(x_1, y_1) = 0$. Подставив сюда полученные выше значения x_1, y_1, будем иметь:

$$F\left(x - z\frac{\alpha}{\gamma},\ y - z\frac{\beta}{\gamma}\right) = 0. \qquad (2)$$

Таким образом, координаты точки M цилиндрической поверхности удовлетворяют уравнению (2). Теперь покажем, что если точка $P(x^*, y^*, z^*)$ не лежит на поверхности S, то ее координаты не удовлетворяют уравнению (2). Проведем через точку P прямую l^*, параллельную вектору $\boldsymbol{p}$, и обозначим через $Q(x_2, y_2, 0)$ точку пересечения прямой l^* с плоскостью $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ (рис. 83). Очевидно, точка Q не лежит на кривой L, и поэтому ее координаты $(x_2, y_2, 0)$ не удовлетворяют уравнению кривой L:

$$F(x_2, y_2) \neq 0. \qquad (3)$$

С другой стороны, из условия коллинеарности векторов $\boldsymbol{p}$ и $\overline{PQ}$ аналогично предыдущему получаем:

$$x_2 = x^* - z^*\frac{\alpha}{\gamma},\quad y_2 = y^* - z^*\frac{\beta}{\gamma}.$$

Подставляя эти значения в соотношение (3), будем иметь:

$$F\left(x^* - z^*\frac{\alpha}{\gamma},\quad y^* - z^*\frac{\beta}{\gamma}\right) \neq 0.$$

т. е. координаты точки P не удовлетворяют уравнению (2). Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема [22.1]. *Если в аффинной системе координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2\boldsymbol{e}_3$ направляющая L цилиндрической поверхности лежит в плоскости $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ и в этой плоскости имеет уравнение* (1), *а образующие параллельны вектору $\boldsymbol{p}\{\alpha, \beta, \gamma\}$, причем $\gamma \neq 0$, то поверхность S определяется уравнением* (2).

Пример 1. Пусть в плоскости Oxy прямоугольной декартовой системы $Oxyz$ дана кривая L уравнением $x^2 + y^2 = r^2$. Написать уравнение цилиндрической поверхности S, для которой кривая L является направляющей, а образующие параллельны вектору $\boldsymbol{p}\{1, 0, 1\}$.

Решение. Направляющая L рассматриваемой цилиндрической поверхности S есть окружность, определяемая в плоскости Oxy уравнением $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Для решения задачи воспользуемся уравнением (2). Соотношение (1) в данном случае имеет вид: $x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Так как $\alpha = 1$, $\beta = 0$ и $\gamma = 1$, то соотношение (2) принимает следующий вид:

$$(x - z)^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Поверхность S изображена на рисунке 84.

2. Цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны оси Oz. Рассмотрим частный случай, когда образующие цилиндрической поверхности параллельны оси Oz, т. е. когда вектор p имеет координаты $\{0, 0, \gamma\}$, где $\gamma \neq 0$. Подставив значения координат вектора p в соотношение (2), получим уравнение этой поверхности: $F(x, y) = 0$.

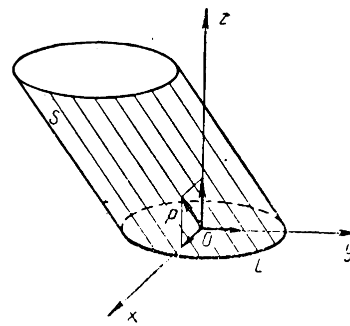


Рис. 84

Мы пришли к весьма интересному выводу: уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны оси Oz, по внешнему виду совпадает с уравнением направляющей L в плоскости Oxy. Этот вывод на первый взгляд кажется противоречивым, однако по существу здесь никакого противоречия нет. В самом деле, уравнение (1), как уравнение геометрического места точек плоскости, определяет кривую L, в то время как то же самое уравнение (1), как уравнение геометрического места точек всего трехмерного пространства, определяет цилиндрическую поверхность S.

Имеет место обратное предложение: геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой аффинной системе координат удовлетворяют уравнению (1), есть цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны оси Oz. В самом деле, если L—кривая плоскости Oxy, определяемая уравнением (1), то цилиндрическая поверхность, для которой L является направляющей, а образующие параллельны оси Oz, как раз определяется уравнением (1), поэтому она совпадает с рассматриваемым геометрическим местом точек.

Полученный вывод может быть сформулирован в виде следующей теоремы.

Теорема [22.2]. *Если в аффинной системе координат $Oe_1e_2e_3$ направляющая L цилиндрической поверхности S лежит в плоскости Oe_1e_2 и в этой плоскости имеет уравнение* (1), *а образующие этой поверхности параллельны вектору e_3, то цилиндрическая поверхность S определяется в пространстве тем же уравнением* (1).

Обратно, *геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой аффинной системе $Oe_1e_2e_3$ удовлетворяют уравнению* (1), *есть цилиндрическая поверхность, образующие которой параллельны вектору e_3.*

Пример 2. Написать уравнение цилиндрической поверхности, направляющая которой является окружностью, лежащей в плоскости Oxy и имеющей в ней уравнение $x^2 + y^2 = r^2$, а образующие параллельны оси Oz. Система координат прямоугольная декартова.

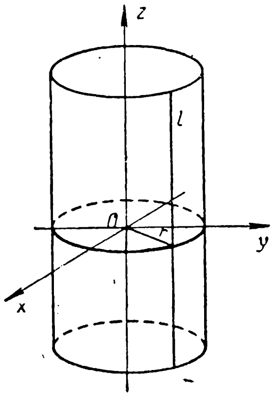


Рис. 85

Решение. Пользуясь теоремой [22.2], мы приходим к выводу, что соотношение $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ есть искомое уравнение рассматриваемой цилиндрической поверхности S. Эта поверхность, очевидно, может быть образована вращением вокруг оси Oz прямой l, параллельной ей и отстоящей от нее на расстоянии r (рис. 85).

3. Цилиндрические поверхности второго порядка. Пользуясь теоремой [22.1], можно доказать следующую теорему.

Теорема [22.3]. *Если направляющая цилиндрической поверхности является кривой второго порядка, то соответствующая цилиндрическая поверхность есть поверхность второго порядка.*

Доказательство. Пусть S — цилиндрическая поверхность, направляющая L которой является кривой второго порядка. Выберем в пространстве аффинную систему координат так, чтобы кривая L лежала в плоскости Oxy, а ось Oz была параллельна образующим поверхности S. Если L — кривая второго порядка, то ее уравнение в плоскости Oxy имеет вид:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Согласно теореме [22.2] это же уравнение определяет поверхность S. Мы видим, что S является поверхностью второго порядка.

Теперь рассмотрим критерий для определения цилиндрических поверхностей второго порядка.

Теорема [22.4]. *Для того чтобы поверхность второго порядка, определяемая в аффинной системе координат уравнением*

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j + 2\sum a_{i4}x_i + a_{44} = 0, \tag{4}$$

была цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными вектору $p\ \{p_1, p_2, p_3\}$, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 &= 0, \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 &= 0, \\ a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3 &= 0, \\ a_{41}p_1 + a_{42}p_2 + a_{43}p_3 &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Доказательство. Пусть S — данная цилиндрическая поверхность второго порядка, образующие которой параллельны вектору $p\{p_1, p_2, p_3\}$. Покажем, что координаты вектора p удовлетворяют условиям (5).

Пусть (y_1, y_2, y_3) — произвольная точка пространства, а l — прямая, проходящая через эту точку и параллельная вектору p. Тогда прямая l является либо прямолинейной образующей поверхности S, либо не имеет с ней ни одной общей точки. Согласно теореме [20.2] $Q = 0$, т. е.

$$y_1 (a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3) + y_2 (a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3) + \\ + y_3(a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3) + (a_{41}p_1 + a_{42}p_2 + a_{43}p_3) = 0.$$

Так как это соотношение имеет место для любой точки (y_1, y_2, y_3) пространства, то справедливы соотношения (5).

Обратно, пусть для поверхности второго порядка S, заданной уравнением (4), существует вектор p, координаты которого удовлетворяют соотношениям (5). Возьмем произвольную точку (y_1, y_2, y_3) этой поверхности и покажем, что прямая l, проходящая через эту точку и параллельная вектору p, является прямолинейной образующей. В самом деле, прямая l определяется параметрическими соотношениями:

$$x_1 = p_1t + y_1, \quad x_2 = p_2t + y_2, \quad x_3 = p_3t + y_3.$$

Из соотношений (5) следует, что для этой прямой $P = Q = 0$ (см. формулы (7) и (8) из § 20). Так как точка (y_1, y_2, y_3) принадлежит поверхности S, то и $R = 0$. Мы пришли к выводу, что l — прямолинейная образующая поверхности.

Пример 3. Доказать, что поверхность, заданная в аффинной системе координат уравнением

$$4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 8x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0,$$

является цилиндрической. Найти направление образующих.

Решение. Составим систему (5) для данной поверхности и покажем, что существует ненулевой вектор, удовлетворяющий этой системе уравнений:

$$\begin{aligned} 4p_1 + 0\cdot p_2 + 2p_3 &= 0, \\ 0\cdot p_1 + 2p_2 - 2p_3 &= 0, \\ 2p_1 - 2p_2 + 3p_3 &= 0, \\ 4p_1 - 2p_2 + 4p_3 &= 0. \end{aligned}$$

Возьмем первые два из этих уравнений и определим p_1, p_2 и p_3, удовлетворяющие им:

$$2p_1 + p_3 = 0, \qquad p_2 - p_3 = 0.$$

Отсюда следует, что $p_3 \neq 0$. Если положить $p_3 = 2$, то $p_2 = 2$ и $p_1 = -1$. Мы получили вектор $p \{-1, 2, 2\}$, координаты которого удовлетворяют первым двум уравнениям. Но координаты того же вектора удовлетворяют и остальным двум уравнениям, в чем легко убедиться непосредственной подстановкой. Итак, данная поверхность является цилиндрической, образующие которой параллельны вектору $p \{-1, 2, 2\}$.

Теорема [22.4] позволяет установить критерий для определения цилиндрических поверхностей второго порядка. В самом деле, рассмотрим матрицу:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix} \tag{6}$$

и обозначим через R ранг этой матрицы. Возможны следующие случаи:

а) $R = 3$. В этом случае система (5) имеет только нулевое решение, поэтому поверхность S не является цилиндрической.

б) $R = 2$. Имеется одно направление, удовлетворяющее системе (5). Поверхность является цилиндрической с определенным направлением образующих.

в) $R = 1$. Имеется бесчисленное множество направлений, удовлетворяющих системе (5). Все они параллельны некоторой плоскости. В этом случае можно доказать, что поверхность распадается, на пару плоскостей, т. е. мы имеем цилиндрическую поверхность, направляющей которой является пара прямых.

Ранг матрицы (6) не может быть равен нулю, так как по определению поверхности второго порядка хотя бы один из коэффициентов a_{ij} при $i, j \leqslant 3$ не равен нулю.

Мы пришли к следующей теореме.

Теорема [22.5]. *Пусть поверхность второго порядка задана в аффинной системе уравнением* (4) *и R — ранг матрицы* (6),

Для того чтобы поверхность была цилиндрической, необходимо и достаточно, чтобы $R \leqslant 2$. При этом если $R = 2$, то цилиндрическая поверхность имеет образующие определенного направления, а при $R = 1$ она распадается на пару плоскостей.

4. Принцип классификации цилиндрических поверхностей второго порядка. Имеет место следующая важная теорема, пользуясь которой можно классифицировать цилиндрические поверхности второго порядка.

Теорема [22.6]. *Любое сечение цилиндрической поверхности второго порядка плоскостью, не параллельной образующим, является кривой второго порядка, причем для одной и той же поверхности все эти сечения принадлежат одному и тому же аффинному классу кривых второго порядка.*

Доказательство. Пусть S — данная цилиндрическая поверхность второго порядка, образующие которой параллельны вектору $\boldsymbol{p}$. Возьмем произвольную плоскость, не параллельную вектору $\boldsymbol{p}$, и докажем, что она пересекает поверхность S по кривой второго порядка. Для этой цели выберем новую аффинную систему координат $O'\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'\boldsymbol{e}_3'$ так, чтобы точка O' лежала в плоскости π, векторы $\boldsymbol{e}_1'$, $\boldsymbol{e}_2'$ были параллельны этой плоскости, а вектор $\boldsymbol{e}_3'$ был равен вектору $\boldsymbol{p}$. Обозначим через L линию пересечения поверхности S с плоскостью π и выведем уравнение этой линии в системе $O'\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'$. Сначала запишем уравнение поверхности S в системе $O'\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'\boldsymbol{e}_3'$. Так как S — поверхность второго порядка, то в этой системе она определяется уравнением второй степени. Однако образующие нашей поверхности параллельны вектору $\boldsymbol{e}_3'$, поэтому согласно теореме [22.2] в уравнении поверхности отсутствует переменная z'. Таким образом, поверхность S в новой системе $O'\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'\boldsymbol{e}_3'$ имеет уравнение:

$$a_{11}'x'^2 + 2a_{12}'x'y' + a_{22}'y'^2 + 2a_{13}'x' + 2a_{23}'y' + a_{33}' = 0.$$

Согласно определению поверхности второго порядка хотя бы один из коэффициентов a_{11}', a_{12}', a_{22}' не равен нулю. По теореме [22.2] этим же уравнением в системе $O'\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'$ определяется кривая L. Таким образом, L есть кривая второго порядка.

Теперь покажем, что для цилиндрической поверхности S все сечения, не параллельные вектору $\boldsymbol{p}$, принадлежат одному и тому же аффинному классу кривых второго порядка.

В самом деле, пусть π_1 и π_2 — две произвольные плоскости, не параллельные образующим и пересекающие поверхность S по кривым второго порядка L_1 и L_2. Заметим, что по определению цилиндрической поверхности кривая L_2 является проекцией кривой L_1 на плоскость π_2 по направлению вектора $\boldsymbol{p}$. Возьмем в плоскости π_1 произвольную систему координат $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ и спроектируем эту систему на плоскость π_2 по направлению вектора $\boldsymbol{p}$. Пусть $O'\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'$ — проекция этой системы на плоскость π_2. Если произвольная точка M плоскости π_1 в системе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ имеет координаты x, y, то ее проекция M' на плоскость π_2 по направлению $\boldsymbol{p}$ в системе $O'\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'$ имеет те же координаты x, y (см. задачу 274, § 19). Отсюда немедленно следует, что кривая L в системе $O\boldsymbol{e}_1\boldsymbol{e}_2$ имеет то же уравнение, что и кривая L_2 в системе $O'\boldsymbol{e}_1'\boldsymbol{e}_2'$. Но это означает, что L_1 и L_2 принадлежат одному и тому же аффинному классу кривых. Теорема доказана полностью.

Доказанная теорема позволяет классифицировать цилиндрические поверхности по виду сечений, не параллельных образующим. Так как все сечения, не параллельные образующим, принадлежат одному и тому же аффинному классу, то цилиндрические поверхности классифицируют в соответствии с принадлежностью этих сечений тому или иному классу кривых. Например, если все сечения являются эллипсами, то поверхность называется *эллиптической цилиндрической поверхностью*. Уравнение этой поверхности при надлежащем выборе прямоугольной декартовой системы координат может быть записано следующим образом:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

В самом деле, пусть π — плоскость, перпендикулярная к образующим. Она пересекает данную эллиптическую цилиндрическую поверхность по эллипсу. В плоскости π возьмем прямоугольную

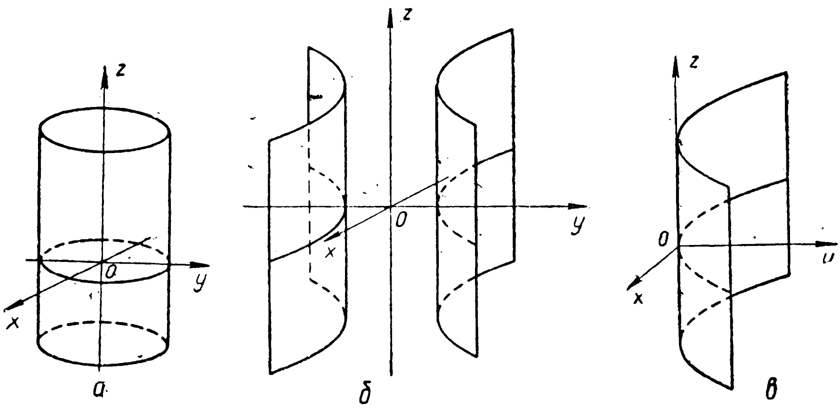


Рис. 86

декартову систему координат Oij так, чтобы этот эллипс имел каноническое уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Если k — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости π, то согласно теореме [22.2] рассматриваемая цилиндрическая поверхность в выбранной системе координат имеет то же уравнение

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Если все сечения, не параллельные образующим, являются гиперболами, то такая поверхность называется гиперболической цилиндрической поверхностью. По аналогии с предыдущим убеждаемся в том, что уравнение гиперболического цилиндра в специально выбранной системе координат имеет вид:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1.$$

Аналогично определяется параболическая цилиндрическая поверхность, простейшее уравнение которой имеет вид:

$$y^2=2px.$$

На рисунке 86 изображены эти поверхности. Полная классификация цилиндрических поверхностей второго порядка будет дана в следующей главе.

Задачи и упражнения

301. Составить уравнение цилиндрической поверхности в каждом из следующих случаев:

а) Направляющая лежит в плоскости Oxy и является окружностью с центром в начале координат и с радиусом, равным 3, а образующие параллельны вектору $\{-4, 2, 1\}$.

б) Направляющая лежит в плоскости Oyz и имеет в этой плоскости уравнение $2y^2 - z^2 + yz - 5 = 0$, а образующие параллельны оси Ox.

в) Направляющая лежит в плоскости Oxy и имеет в этой плоскости уравнение $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$, а образующие параллельны вектору $\{1, 2, 1\}$.

302. Нижеследующие поверхности заданы своими уравнениями в аффинной системе координат. Указать среди них цилиндрические поверхности и для каждой цилиндрической поверхности найти координаты направляющего вектора прямолинейных образующих:

а) $x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 4z = 0$;
б) $x^2 + 2xy + y^2 - z - 1 = 0$;
в) $4x^2 + 6y^2 + 4z^2 + 4xz - 8y - 4z + 3 = 0$;
г) $x^2 + 5y^2 + z^2 + 2xy + 6xz + 2yz - 2x + 6y - 10z = 0$;
д) $x^2 + y^2 + 4z^2 + 2xy + 4xz + 4yz - 6z + 1 = 0$;
е) $4xy + 2x + 4y - 6z - 3 = 0$;
ж) $4x^2 - y^2 - 4x - 4y + 15 = 0$.

303. Доказать, что нижеследующие поверхности являются цилиндрическими. Пользуясь теоремой [22.6], определить тип каждой из этих поверхностей. Система координат аффинная.

а) $x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xz + 4y = 0$;
б) $x^2 + 2y^2 + 6z^2 - 4xz + 4yz + 4x - 4y - 12z = 0$;
в) $4x^2 + 16z^2 + 16xz + 4x + 14z + 2y - 1 = 0$;
г) $4x^2 - y^2 - 8xz - 4yz - 8x - 6y - 4z - 4 = 0$.

304. Написать уравнение цилиндрической поверхности, образующие которой параллельны вектору $p\ \{\alpha, \beta, \gamma\}$ и являются касательными к сфере $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$. Система координат прямоугольная декартова.

§ 23. КОНИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ. ПОВЕРХНОСТИ ВРАЩЕНИЯ

1. Уравнение конической поверхности. *Поверхность, на которой имеется точка M_0, обладающая тем свойством, что вместе с каждой точкой M, отличной от M_0, поверхность содержит всю прямую*

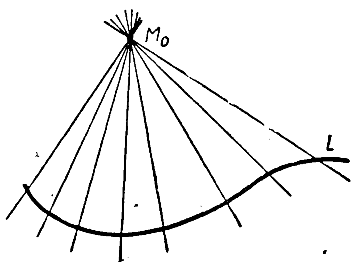


Рис. 87

M_0M, *называется* *конической поверхностью или конусом*[1]. Точка M_0 называется вершиной, а прямые, проходящие через эту точку и принадлежащие поверхности, — образующими. Таким образом, коническая поверхность образована прямыми линиями, проходящими через фиксированную точку M_0 и удовлетворяющими еще одному условию, например каждая из этих прямых имеет одну и только одну общую точку с данной кривой L. В этом случае L называется направляющей конической поверхности (рис. 87). Очевидно, для данной поверхности S, вообще говоря, существует бесчисленное множество направляющих.

Рассмотрим следующую задачу.

Задача 1. Пусть $Oe_1e_2e_3$ —аффинная система координат в пространстве. Даны кривая L, расположенная в плоскости Oe_1e_2 и имеющая в этой плоскости уравнение

$$F(x, y) = 0, \qquad (1)$$

и точка $M_0(x_0, y_0, z_0)$, не лежащая в этой плоскости. Написать уравнение конической поверхности с вершиной в точке M_0, для которой L является направляющей кривой.

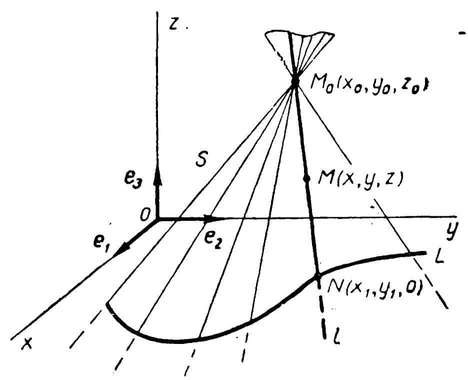


Рис. 88

Решение. Пусть S — рассматриваемая коническая поверхность, а $M(x, y, z)$ — произвольная точка этой поверхности (рис. 88). Обозначим через N точку пересечения образующей l, проходящей через точку M, с плоскостью Oxy. Очевидно, точка $N(x_1, y_1, 0)$ лежит на кривой L. По определению конической поверхности точки M_0, M и N лежат на одной прямой, поэтому из теоремы [2.3] следует, что имеют место следующие соотношения:

$$x_1 = x_0 + (x - x_0)\lambda, \quad y_1 = y_0 + (y - y_0)\lambda, \quad 0 = z_0 + (z - z_0)\lambda.$$

---

[1] Мы, вообще говоря, не предполагаем, что точка M_0 единственная.

Из последнего соотношения получаем: $\lambda = \frac{z_0}{z_0 - z}$. Подставив значение λ в предыдущие два соотношения, получаем:

$$x_1 = x_0 + \frac{x - x_0}{z_0 - z} z_0, \quad y_1 = y_0 + \frac{y - y_0}{z_0 - z} z_0.$$

Точка N принадлежит кривой L, поэтому координаты этой точки удовлетворяют уравнению (1). Подставив в уравнение (1) значения для x_1 и y_1, получаем:

$$F\left(x_0 + \frac{x - x_0}{z_0 - z} z_0, \quad y_0 + \frac{y - y_0}{z_0 - z} z_0\right) = 0. \tag{2}$$

Итак, координаты x, y, z любой точки M конической поверхности, отличной от вершины, удовлетворяют уравнению (2)[1]. Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что если точка P не лежит на конической поверхности, то ее координаты не удовлетворяют уравнению (2). Доказательство проводится аналогично доказательству соответствующего предложения при решении задачи 1 предыдущего параграфа (см. стр. 243). Таким образом, нами доказана следующая теорема.

Теорема [23.1]. *Если в аффинной системе координат $Oe_1e_2e_3$ направляющая L конической поверхности S лежит в плоскости Oxy и имеет в системе Oe_1e_2 уравнение* (1), *а точка M_0 (x_0, y_0, z_0) является вершиной, то коническая поверхность S определяется уравнением* (2).

Пример 1. Написать уравнение конической поверхности с вершиной в точке M_0 (0, 0, 5) и направляющей L, заданной в плоскости Oxy уравнением $x^2 + y^2 - 25 = 0$.

Решение. В данном случае уравнение (2) принимает вид:

$$\left(x_0 + \frac{x - x_0}{z_0 - z} z_0\right)^2 + \left(y_0 + \frac{y - y_0}{z_0 - z} z_0\right)^2 - 25 = 0.$$

Подставив сюда значения координат точки M_0, получим:

$$\left(\frac{x}{5 - z}\right)^2 + \left(\frac{y}{5 - z}\right)^2 - 1 = 0.$$

---

[1] Уравнению (2), очевидно, не удовлетворяют координаты вершины M_0 конуса, так как $\lambda = \frac{z}{z_0 - z}$ при $z = z_0$ не существует. Поэтому, строго говоря, уравнением (2) определяется вся коническая поверхность, за исключением вершины. Однако в ряде случаев уравнение (2) можно преобразовать таким образом, чтобы новое уравнение определяло всю коническую поверхность. Как мы увидим ниже, это всегда можно сделать в случае, если коническая поверхность является алгебраической.

Этому уравнению удовлетворяют координаты всех точек конической поверхности, за исключением точки M_0. Однако, преобразуя полученное уравнение, мы придем к уравнению $x^2 + y^2 - (5 - z)^2 = 0$, которому будут удовлетворять координаты всех точек конуса (см. сноску на стр. 253).

2. Конические поверхности второго порядка. В дальнейшем изложении мы ограничиваемся рассмотрением только таких конических поверхностей, которые в аффинной системе координат определяются уравнением второй степени, т. е. конических поверхностей второго порядка.

Прежде всего покажем, что если направляющая конической поверхности S является кривой второго порядка, то S есть поверхность второго порядка. Пусть S — коническая поверхность, направляющая L которой является кривой второго порядка. Выберем в пространстве аффинную систему координат так, чтобы кривая L лежала в плоскости Oxy, а вершина M_0 совпадала с точкой $(0, 0, 1)$. Пусть кривая L в плоскости Oxy имеет уравнение:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Тогда уравнение (2) для кривой L и точки M_0 $(0, 0, 1)$ будет иметь следующий вид:

$$a_{11}\frac{x^2}{(1-z)^2} + 2a_{12}\frac{xy}{(1-z)^2} + a_{22}\frac{y^2}{(1-z)^2} + 2a_{13}\frac{x}{1-z} + 2a_{23}\frac{y}{1-z} + a_{33} = 0,$$

или

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x(1-z) + 2a_{23}y(1-z) + a_{33}(1-z)^2 = 0.$$

Заметим, что если первому уравнению не удовлетворяют координаты точки $M_0(0,0,1)$, то последнему уравнению удовлетворяют координаты всех точек конической поверхности S, в том числе и точки M_0.

Итак, доказана

Теорема [23.2]. *Если направляющая конической поверхности S является кривой второго порядка, то S — поверхность второго порядка.*

Теперь установим критерий для определения конических поверхностей второго порядка.

Теорема [23.3]. *Для того чтобы поверхность второго порядка, определяемая в аффинной системе координат уравнением*

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j + 2\sum_i a_{i4}x_i + a_{44} = 0, \qquad (3)$$

была конической поверхностью с вершиной в точке (y_1, y_2, y_3), необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$\left.\begin{aligned}
a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14} &= 0, \\
a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24} &= 0, \\
a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + a_{34} &= 0, \\
a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44} &= 0.
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Доказательство. Пусть S — коническая поверхность второго порядка с вершиной в точке $M_0(y_1, y_2, y_3)$. Возьмем произвольный вектор $p\{p_1, p_2, p_3\}$ неасимптотического направления и проведем через M_0 прямую l, параллельную вектору p. Пусть согласно § 14, п. 7

$$x_1 = p_1t + y_1, \quad x_2 = p_2t + y_2, \quad x_3 = p_3t + y_3 \tag{5}$$

— параметрическое задание прямой l. Тогда, как следует из п. 3, § 20, параметры точек пересечения поверхности (3) и прямой (5) являются корнями квадратного уравнения $Pt^2 + 2Qt + R = 0$. Так как начальная точка $M_0(y_1, y_2, y_3)$ принадлежит поверхности, то $R = 0$, поэтому предыдущее уравнение принимает вид: $Pt^2 + 2Qt = 0$. По определению конической поверхности прямая l либо целиком лежит на S, либо, кроме точки M_0, не имеет других общих точек. Это означает, что предыдущее уравнение либо имеет бесчисленное множество решений, либо только одно: $t = 0$. Очевидно, эти условия выполняются только в том случае, когда $Q = 0$, или в развернутом виде:

$$(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14})p_1 + (a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24})p_2 + \\ + (a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + a_{34})p_3 = 0. \tag{6}$$

Так как равенство (6) должно быть справедливо для любого вектора $p\{p_1, p_2, p_3\}$ неасимптотического направления, то имеют место первые три из четырех соотношений (4). Точка $M_0(y_1, y_2, y_3)$ лежит на поверхности S, поэтому $\sum\limits_{i,j} a_{ij}y_iy_j + 2\sum a_{i4}y_i + a_{44} = 0$, или

$$y_1(a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 + a_{14}) + y_2(a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 + a_{24}) + \\ + y_3(a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 + a_{34}) + a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44} = 0. \tag{7}$$

Отсюда, учитывая первые три из соотношений (4), получаем:

$$a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44} = 0.$$

Обратно, пусть выполнены соотношения (4), покажем, что S — цилиндрическая поверхность с вершиной в точке $M_0(y_1, y_2, y_3)$. Прежде всего заметим, что координаты точки M_0 согласно соотношениям (4) удовлетворяют уравнению (7) поверхности S, поэтому M_0 лежит на этой поверхности. Проведем произвольную прямую (5) через M_0 и найдем точки пересечения этой прямой с поверхностью S. В данном случае в силу соотношений (6) и (7) получаем следующее уравнение для определения параметров точек пересечений: $Pt^2 = 0$. Отсюда следует, что прямая (5) либо целиком принадлежит поверхности S, либо пересекает ее только в точке M_0. Мы видим, что S — коническая поверхность.

Доказанная теорема позволяет установить критерий для определения конических поверхностей. Рассмотрим матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \tag{8}$$

Система (4) совместна тогда и только тогда[1], когда ранги этих матриц равны между собой, поэтому имеет место теорема.

Теорема [23.4]. *Для того чтобы поверхность* (3) *была конической, необходимо и достаточно, чтобы ранги матриц* (8) *совпадали.*

Следствие. *Если* (3) — *коническая поверхность, то*

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

В самом деле, если (3) — коническая поверхность, то ранги матриц (8) совпадают, поэтому ранг второй из этих матриц меньше четырех. Отсюда следует, что определитель этой матрицы равен нулю.

Пример 2. В аффинной системе координат дана поверхность второго порядка:

$$2x_1^2 - 3x_2^2 + 2x_3^2 - 8x_1x_3 + 4x_1 - 6x_2 + 8x_3 - \frac{35}{3} = 0.$$

Показать, что эта поверхность является конической, и найти координаты вершины.

Решение. В данном случае соотношения (4) имеют вид:

$$\begin{aligned} 2y_1 + 0 \cdot y_2 - 4y_3 + 2 &= 0, \\ 0 \cdot y_1 - 3y_2 + 0 \cdot y_3 - 3 &= 0, \\ -4y_1 + 0 \cdot y_2 + 2y_3 + 4 &= 0, \\ 2y_1 - 3y_2 + 4y_3 - \frac{35}{3} &= 0. \end{aligned}$$

Легко показать, что эта система имеет единственное решение: $y_1 = \frac{5}{3}$, $y_2 = -1$, $y_3 = \frac{4}{3}$.

Из теоремы [23.3] следует, что поверхность коническая с вершиной в точке $M_0\left(\frac{5}{3}, -1, \frac{4}{3}\right)$.

---

[1] См приложение, § 4, теорему 3.

3. Коническая поверхность с вершиной в начале координат.

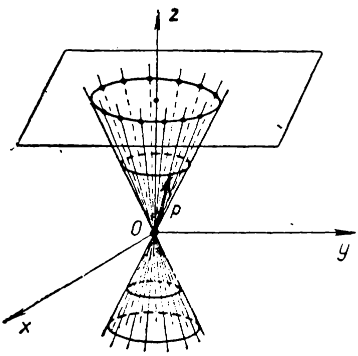


Рис. 89

При выводе уравнения (2) мы предполагали, что вершина конической поверхности не лежит в плоскости Oxy и, следовательно, не совпадает с началом координат. Теперь рассмотрим тот частный случай, когда вершина совпадает с началом координат.

Функция $F(x, y, z)$ называется *однородной*, если для любого t имеет место соотношение: $F(tx, ty, tz) = \varphi(t)\, F(x, y, z)$.

Например, функция $x^4 - y^4 + z^4$ является однородной, так как $(tx)^4 - (ty)^4 + (tz)^4 = t^4 (x^4 - y^4 + z^4)$.

Докажем следующую теорему.

Теорема [23.5]. *Если $F(x, y, z)$ — однородная функция, то поверхность, определяемая в аффинной системе координат уравнением*

$$F(x, y, z) = 0, \tag{9}$$

является конической поверхностью с вершиной в начале координат.

Доказательство. Пусть S — поверхность, определяемая уравнением (9), $M_1(x_1, y_1, z_1)$ — некоторая точка поверхности S, а $O(0, 0, 0)$ — начало координат. Покажем, что вместе с точкой M_1 поверхности S принадлежит любая точка $M(x, y, z)$ прямой OM_1. Если M лежит на прямой OM_1, то векторы $\overline{OM}$ и $\overline{OM}_1$ коллинеарны, поэтому координаты точки M могут быть представлены в виде:

$$x = tx_1, \quad y = ty_1, \quad z = tz_1.$$

Так как M_1 — точка поверхности S, то $F(x_1, y_1, z_1) = 0$. Подставим, далее, координаты точки M в уравнение (9), получим:

$$F(x, y, z) = F(tx_1, ty_1, tz_1) = \varphi(t)\, F(x_1, y_1, z_1) = 0,$$

т. е. точка M принадлежит поверхности S. Таким образом, поверхность S образована прямыми, проходящими через точку O, значит, S — коническая поверхность с вершиной в точке O.

Пример 3. В прямоугольной декартовой системе координат дана поверхность S уравнением: $x^2 + y^2 - a^2z^2 = 0$. Показать, что S является конической поверхностью. Найти вершину и одну из направляющих этой поверхности.

Решение. Функция $x^2 + y^2 - z^2$ является однородной, так как

$$(tx)^2 + (ty)^2 - (atz)^2 = t^2 (x^2 + y^2 - a^2z^2),$$

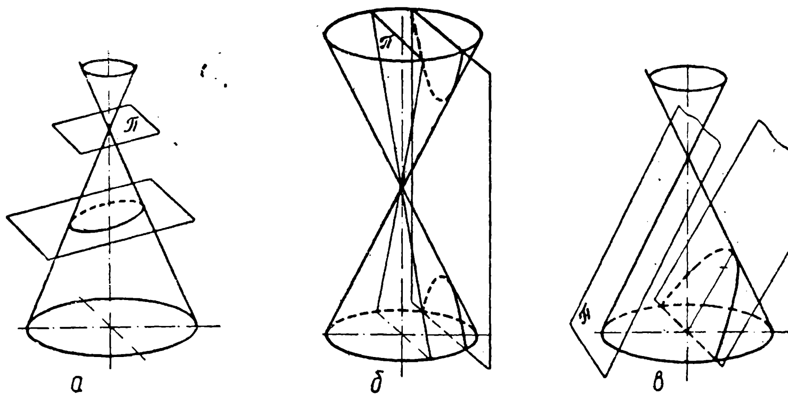


Рис. 90

поэтому согласно теореме [23.5] поверхность S есть коническая поверхность с вершиной в начале координат.

Возьмем сечение данной поверхности с плоскостью $z = h$, где $h \neq 0$. Легко показать, что все образующие конической поверхности пересекают плоскость $z = h$. В самом деле, если вектор $p\{\alpha, \beta, \gamma\}$ параллелен образующей, то он имеет асимптотическое направление (теорема [20.2]), поэтому $\alpha^2 + \beta^2 - \gamma^2 = 0$. Отсюда следует, что $\gamma \neq 0$, т. е. p не параллелен плоскости $z = h$. Таким образом, линия пересечения данной поверхности с плоскостью $z = h$ есть направляющая поверхности S. Согласно теореме [20.4] проекция линии пересечения плоскости $z=h$ и поверхности S на плоскость Oxy имеет уравнение $x^2 + y^2 = a^2h^2$. Этим уравнением определяется окружность. Итак, S образована прямыми, проходящими через начало координат и через все точки окружности $x^2 + y^2 = a^2h^2$, $z = h$ (рис. 89).

Поверхность S называется *круговой конической поверхностью*.

Из теоремы [23.3] следует

Теорема [23.6]. *Для того чтобы поверхность второго порядка* (3) *была конической поверхностью с вершиной в начале координат, необходимо и достаточно, чтобы* $a_{14} = a_{24} = a_{34} = a_{44} = 0$, *т. е. чтобы уравнение* (3) *имело вид*:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 = 0.$$

Так, например, поверхность $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0$ есть коническая поверхность второго порядка с вершиной в начале координат.

4. Конические сечения. При изучении цилиндрических поверхностей второго порядка мы показали, что в сечении этих поверхностей с плоскостями, не параллельными образующим, получается кривая второго порядка одного и того же аффинного класса. Ниже мы покажем, что если коническую поверхность второго порядка рассекать различными плоскостями, то в сечении можно получить все основные виды кривых второго порядка: эллипс, параболу и гиперболу.

Для простоты изложения рассмотрим сечения круговой конической поверхности. Предварительно поставим следующую задачу.

З а д а ч а 2. Пусть в прямоугольной декартовой системе координат дана круговая коническая поверхность S:

$$x^2 + y^2 - a^2z^2 = 0 \tag{10}$$

и плоскость π, проходящая через ось Ox. Найти сечения данной поверхности плоскостями, параллельными плоскости π.

Р е ш е н и е. Возьмем новую прямоугольную декартову систему координат так, чтобы новое начало O' совпало с точкой O, вектор $\boldsymbol{i}'$ совпал с вектором $\boldsymbol{i}$, а вектор $\boldsymbol{j}'$ был параллелен плоскости π. Если $\angle(\boldsymbol{j}, \boldsymbol{j}') = \alpha$, то, очевидно:

$$\boldsymbol{j}' = \boldsymbol{j}\cos\alpha + \boldsymbol{k}\sin\alpha, \text{ а } \boldsymbol{k}' = -\boldsymbol{j}\sin\alpha + \boldsymbol{k}\cos\alpha.$$

Тогда согласно теореме [19.3] формулы преобразования координат имеют вид:

$$\begin{aligned} x &= x', \\ y &= y' \cos\alpha - z' \sin\alpha, \\ z &= y' \sin\alpha + z' \cos\alpha. \end{aligned}$$

Уравнение конической поверхности в новой системе координат имеет вид:

$$x'^2 + (y' \cos\alpha - z' \sin\alpha)^2 - a^2 (y' \sin\alpha + z' \cos\alpha)^2 = 0$$

или

$$x'^2 + (\cos^2\alpha - a^2 \sin^2\alpha)\, y'^2 - (2 \sin\alpha\cos\alpha + 2a^2 \sin\alpha \cos\alpha) y'z' + \\ + (\sin^2\alpha - a^2 \cos^2\alpha)\, z^2 = 0.$$

Рассмотрим сечение этой поверхности плоскостью $z' = h$.

Согласно теореме [20.4] проекция рассматриваемого сечения на плоскость $O'x'y'$, т. е. на плоскость π, в системе $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'$ имеет уравнение:

$$x'^2 + (\cos^2\alpha - a^2 \sin\alpha)\, y'^2 - (2\sin\alpha\cos\alpha + 2a^2 \sin\alpha\cos\alpha)\, hy' + \\ + (\sin^2\alpha - a^2 \cos^2\alpha)\, h^2 = 0. \tag{11}$$

Исследуем полученное уравнение.

При $h = 0$ уравнение (11) принимает вид: $x'^2 + (\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha)\, y'^2 = 0$. Этим уравнением определяется линия пересечения π с поверхностью S. Возможны три случая:

а) $\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha > 0$. Кривая представляет собой пару комплексных прямых, пересекающихся в действительной точке (0, 0). В этом случае плоскость π не содержит образующих конуса и пересекает конус в одной точке — вершине конуса (рис. 90,*а*).

б) $\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha < 0$. Кривая представляет собой пару пересекающихся прямых. В этом случае плоскость π пересекает конус по двум образующим (рис. 90, *б*).

в) $\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha = 0$. Кривая представляет собой пару слившихся прямых. В этом случае плоскость π касается конической поверхности вдоль образующей (рис. 90, *в*).

При $h \neq 0$ уравнением (11) определяется проекция сечения, параллельного плоскости π на эту плоскость. Для определения вида кривой (11) вычислим ее инварианты I_1, I_2 и I_3 (см. I, § 32):

$$I_1 = 1 + \cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha, \quad I_2 = \cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha,$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha(1+a^2)h \\ 0 & -\sin\alpha\cos\alpha(1+a^2)h & (\sin^2\alpha - a^2\cos^2\alpha)h^2 \end{vmatrix} = -a^2h^2.$$

Прежде всего отметим, что при $h \neq 0$ имеем $I_3 < 0$.

Определим сечения, параллельные плоскости π, в каждом из рассмотренных выше трех случаев расположения плоскости π.

а) Плоскость π не содержит образующих поверхности S. В этом случае, как было показано выше, $\cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha > 0$, поэтому для кривой (11) $I_1 > 0$, $I_2 > 0$. Согласно таблице, приведенной в I, стр. 285, сечение, параллельное плоскости π, представляет собой эллипс (рис. 90, *а*).

б) Плоскость π пересекает поверхность S по двум образующим. В этом случае для кривой (11) $I_2 = \cos^2\alpha - a^2\sin^2\alpha < 0$, поэтому сечение, параллельное плоскости π, представляет собой гиперболу ($I_2 < 0$, $I_3 \neq 0$) (рис. 90, *б*).

в) Плоскость π касается конической поверхности вдоль образующей. В этом случае для кривой (11) $I_2 = 0$, значит, сечение, параллельное плоскости π, представляет собой параболу (рис. 90, *в*).

Приведенное исследование можно резюмировать в виде следующей теоремы.

Теорема [23.7]. *Пусть π' — произвольная плоскость, не проходящая через вершину круговой конической поверхности, а π — плоскость, параллельная π' и проходящая через вершину. Сечение данной поверхности с плоскостью π' представляет собой:*

а) *эллипс, если плоскость π не содержит прямолинейных образующих;*

б) *гиперболу, если плоскость π содержит две прямолинейные образующие;*

в) *параболу, если плоскость π касается поверхности по одной образующей.*

Таким образом, из девяти типов кривых второго порядка шесть типов, в том числе эллипс, гипербола и парабола, являются плоскими сечениями круговой конической поверхности. Поэтому они и называются **коническими сечениями**.

5. Поверхность вращения. Поверхность, которая вместе с каждой *своей точкой содержит всю окружность, полученную вращением этой точки вокруг некоторой фиксированной прямой l, называется* п о в е р х н о с т ь ю   в р а щ е н и я (рис. 91). Прямая l, вокруг которой производится вращение, называется о с ь ю   в р а щ е н и я. Вращение точки вокруг оси происходит в плоскости, перпендикулярной к оси. В сечении поверхности вращения плоскостями, перпендикулярными к оси вращения, получаются окружности,

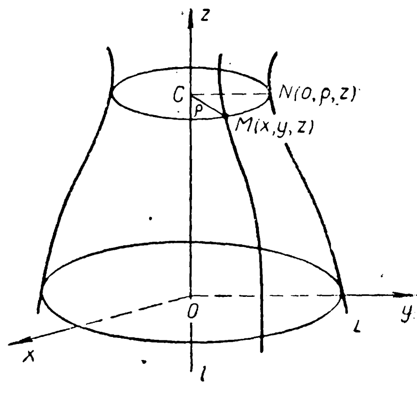


Рис. 91

которые называются п а р а л л е л я м и. Полуплоскости, определяемые осью вращения, пересекают поверхность вращения по кривым, называемым м е р и д и а н а м и. Если взять произвольный меридиан и вращать его вокруг оси вращения l, то получим рассматриваемую поверхность. Следовательно, все меридианы конгруэнтны между собой. Очевидно, всякую поверхность вращения можно получить вращением некоторой линии вокруг заданной прямой — оси вращения.

Рассмотрим следующую задачу.

З а д а ч а 3. Пусть $Oxyz$ — прямоугольная декартова система координат в пространстве. Вывести уравнение поверхности, образованной вращением вокруг оси Oz линии, лежащей в плоскости Oyz и заданной в ней уравнением

$$F(y,\ z) = 0. \tag{12}$$

Р е ш е н и е. Пусть L — кривая, определяемая в плоскости Oyz уравнением (12). Сначала рассмотрим случай, когда кривая L или симметрична относительно оси Oz, или ординаты всех точек кривой не отрицательны. Пусть $M\ (x,\ y,\ z)$ — произвольная точка поверхности S, образованной вращением кривой L вокруг оси Oz (рис. 91). Проведем через эту точку параллель и обозначим через N точку, в которой данная параллель пересекает кривую L. Не нарушая общности, можно предположить, что ордината ее не отрицательна, поэтому точка N будет иметь координаты $0,\ \rho,\ z$, где $\rho = CN = CM$.

Так как точка N лежит на кривой L, то $F\ (\rho,\ z) = 0$. С другой стороны, $\rho = CM = \sqrt{x^2 + y^2}$. Подставив значение ρ в предыдущее соотношение, получаем:

$$F(\sqrt{x^2 + y^2},\ z) = 0. \tag{13}$$

Итак, если точка принадлежит поверхности вращения, то координаты этой точки удовлетворяют уравнению (13).

Обратно, пусть $P(x^*, y^*, z^*)$ — произвольная точка пространства, координаты которой удовлетворяют уравнению (13). Покажем, что точка P принадлежит поверхности S. Рассмотрим окружность с центром в точке K, которую опишет точка P, вращаясь вокруг оси Oz. Очевидно, радиус этой окружности равен $PK = \sqrt{x^{*2} + y^{*2}}$. Пусть Q — точка пересечения этой окружности с плоскостью Oyz, имеющая положительную ординату. Эта точка будет иметь координаты $(0, \sqrt{x^{*2} + y^{*2}}, z^*)$. Из соотношения (13) следует, что координаты этой точки удовлетворяют уравнению (12), поэтому точка Q принадлежит кривой L. Отсюда вытекает, что точка P принадлежит поверхности S.

Теперь рассмотрим общий случай, когда кривая, заданная уравнением (12), является произвольной. Рассмотрим кривую L_1, симметричную заданной кривой L относительно оси Oz (рис. 92). Обозначим через L^* геометрическое место точек плоскости Oyz, принадлежащих как кривой L, так и кривой L_1. Легко видеть, что кривая L^* определяется уравнением $F(\pm y, z) = 0$. Это уравнение следует понимать следующим образом: точка $M(\beta, \gamma)$ принадлежит кривой L^* тогда и только тогда, когда координаты точки M удовлетворяют уравнению $F(\beta, \gamma) = 0$, или $F(-\beta, \gamma) = 0$. Так как кривая L^* симметрична относительно оси Oz, то, применяя результат, полученный выше, мы приходим к уравнению поверхности, образованной вращением кривой L^* вокруг оси Oz:

$$F(\pm\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0. \tag{14}$$

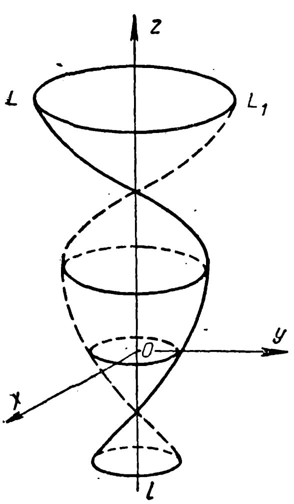


Рис. 92

Поверхности, образованные вращением кривых L и L^* вокруг оси Oz, совпадают, поэтому уравнение поверхности S имеет вид (14). Мы пришли к следующей теореме.

Т е о р е м а [23.8]. *Если в прямоугольной декартовой системе координат $Oxyz$ дана кривая L, расположенная в плоскости Oyz и имеющая в этой плоскости уравнение* (12), *то поверхность, образованная вращением кривой L вокруг оси Oz, определяется уравнением* (14).

Если кривая симметрична относительно оси Oz или если она не содержит точек, для которых $y < 0$, то уравнение поверхности вращения имеет вид (13).

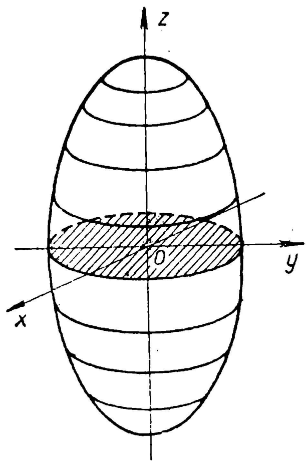


Рис. 93

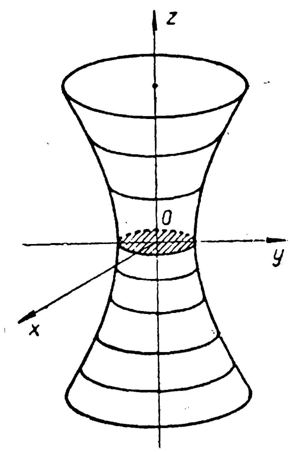


Рис. 94

Докажем, что всякое уравнение вида (13) или (14) определяет поверхность вращения.

Теорема [23.9]. *Пусть $\varphi(\xi, \eta)$ — некоторая функция от двух переменных. Геометрическое место точек пространства, координаты которых в прямоугольной декартовой системе координат удовлетворяют уравнению $\varphi(x^2+y^2, z)=0$, есть поверхность вращения, для которой осью вращения является ось Oz.*

Доказательство. Возьмем в плоскости Oyz кривую, определяемую уравнением $\varphi(y^2, z)=0$, и запишем уравнение поверхности, образованной вращением этой кривой вокруг оси Oz. Пользуясь теоремой [23.8], получаем

$$\varphi([\pm\sqrt{x^2+y^2}]^2, z)=0 \text{ или } \varphi(x^2+y^2, z)=0.$$

Таким образом, полученное нами уравнение совпадает с заданным уравнением; значит, уравнением $\varphi(x^2+y^2, z)=0$ определяется поверхность вращения.

6. Поверхности, образованные вращением некоторых кривых второго порядка. Применим предыдущие результаты для определения уравнений поверхностей, образованных вращением кривых второго порядка.

Пример 4. Написать уравнения поверхностей, образованных вращением вокруг оси Oz следующих кривых, расположенных в плоскости Oyz:

1) эллипса $\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$;

2) гиперболы $\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$;

3) гиперболы $-\frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$;

4) параболы $y^2 - 2pz = 0$.

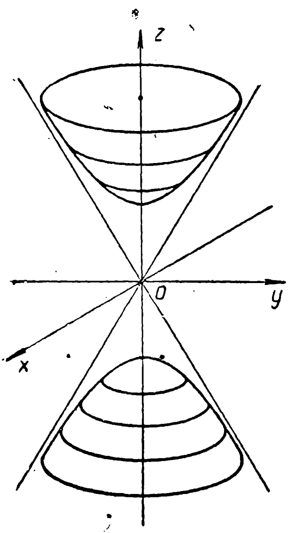


Рис. 95

Решение. Так как в данных уравнениях переменная y входит только в четных степенях, то заданные кривые, расположенные в плоскости Oyz, симметричны относительно оси Oz, поэтому, воспользовавшись формулой (13), получаем уравнения соответствующих поверхностей вращения;

1) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Эта поверхность называется эллипсоидом вращения (рис. 93);

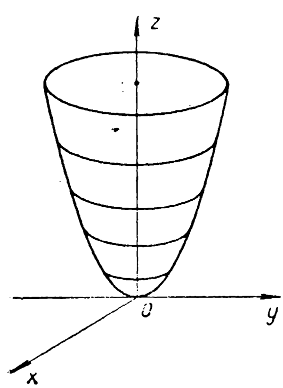


Рис. 96

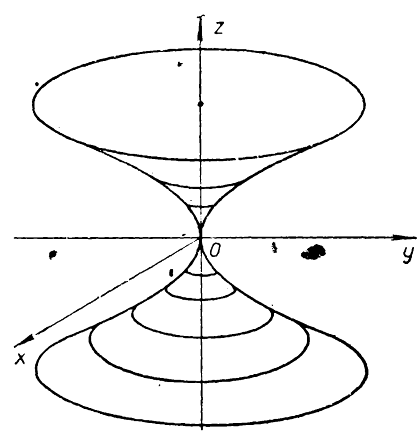


Рис. 97

2) $\frac{x^2 + y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$. Поверхность называется однополостным гиперболоидом вращения (рис. 94);

3) $-\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$. Поверхность называется двуполостным гиперболоидом вращения (рис. 95).

4) $x^2 + y^2 - 2pz = 0$. Поверхность называется параболоидом вращения (рис. 96).

Все поверхности, полученные выше, являются поверхностями второго порядка. Однако далеко не всякая поверхность, полученная вращением кривой второго порядка, является поверхностью второго порядка. Приведем пример.

Пример 5. Написать уравнение поверхности, образованной вращением параболы $z^2 - 2py = 0$, $x = 0$ вокруг оси Oz (рис. 97).

Решение. В данном случае кривая не симметрична относительно оси вращения Oz, однако ординаты всех точек этой кривой неотрицательны, поэтому уравнение поверхности вращения имеет вид (13):

$$z^2 - 2p\sqrt{x^2 + y^2} = 0, \text{ или } z^2 = 2p\sqrt{x^2 + y^2}.$$

Если возвести обе части в квадрат, то получим уравнение поверхности в следующем виде: $z^4 = 4p^2(x^2 + y^2)$. Легко видеть, что это уравнение эквивалентно предыдущему, поэтому в данном случае поверхность вращения является поверхностью четвертого порядка.

Задачи и упражнения

305. Написать уравнение конической поверхности в каждом из следующих случаев.

а) Направляющей является окружность плоскости Oxy с центром в начале координат и радиусом $r = 5$, а вершина находится в точке $M_0(1, 1, 1)$.

б) Направляющей является гипербола плоскости Oxy, заданная в ней уравнением $x^2 - 2y^2 = 1$, а вершина находится в точке $(-1, 2, 1)$.

в) Направляющей является кривая плоскости Oyz, заданная уравнением $z^2 + y^2 - y = 0$, а вершина имеет координаты $(1, 0, 1)$.

306. Доказать, что поверхность

$$x^2 - 2y^2 + z^2 + 4xy - 8xz - 4yz - 14x - 4y + 14z + 16 = 0$$

является конической. Определить координаты вершины. Система координат аффинная.

307. Доказать, что поверхность, заданная в аффинной системе координат уравнением

$$x^2 - 5z^2 + 3xy + 2yz - 7x - 6y - 2z + 10 = 0,$$

является конической. Определить координаты вершины.

308.[1] Написать уравнение конической поверхности с вершиной в точке $M_0(1, 2, 4)$, образующие которой составляют с плоскостью $2x + 2y + z = 0$ угол $\varphi = 45°$.

309. Написать уравнение цилиндрической поверхности вращения, если ось вращения совпадает с Oz, а радиус $r = 5$.

---

[1] В задачах 308—316 предполагается, что система координат прямоугольная декартова.

310. Написать уравнение цилиндрической поверхности вращения, если ось вращения проходит через начало координат и параллельна вектору $\{0, -1, 1\}$, а $r = 3$.

311. Окружность радиуса r расположена на плоскости Oxy так, что она касается оси Ox в начале координат. Написать уравнение поверхности, образованной вращением окружности вокруг оси Ox.

312. Составить уравнение поверхности, образованной вращением параболы $z^2 = 3y$, $x = 0$, вокруг оси Oz.

313. Написать уравнения поверхностей, образованных вращением вокруг оси Oy каждой из следующих кривых, расположенных в плоскости Oxy:

$$\text{а) } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1; \quad \text{б) } \frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{9} = 1;$$

$$\text{в) } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = -1; \quad \text{г) } x^2 = 4y.$$

314. Написать уравнение поверхности, образованной вращением синусоиды $z = \sin y$, $x = 0$ вокруг оси Oz.

315. Доказать, что поверхности, заданные каждым из следующих уравнений, являются поверхностями вращения

$$\text{а) } x^4 + 2x^2y^2 + y^4 + 2(x^2 + y^2) - z = 0;$$

$$\text{б) } x^2 + y^2 + z^2 = 3 \pm \sqrt{x^2 + y^2};$$

$$\text{в) } \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1.$$

316. Даны две скрещивающиеся прямые l_1 и l_2. Определить поверхность, образованную вращением прямой l_2 вокруг прямой l_1.

ГЛАВА VI

КЛАССИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ИЗУЧЕНИЕ ОСНОВНЫХ ВИДОВ ПОВЕРХНОСТЕЙ ПО КАНОНИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ

§ 24. СОПРЯЖЕННЫЕ И ГЛАВНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

1. Сопряженные направления. В I, § 31, п. 1 было введено понятие сопряженных направлений относительно кривой второго порядка. Здесь мы рассмотрим аналогичное понятие для поверхностей второго порядка.

Пусть в аффинной системе координат дана поверхность второго порядка уравнением

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j + 2\sum a_{i4}x_i + a_{44} = 0. \tag{1}$$

Если координаты двух ненулевых векторов $\boldsymbol{p}\{p_1, p_2, p_3\}$ и $\boldsymbol{q}\{q_1, q_2, q_3\}$ удовлетворяют соотношению:

$$\begin{gathered} a_{11}p_1q_1 + a_{22}p_2q_2 + a_{33}p_3q_3 + a_{12}p_1q_2 + a_{21}p_2q_1 + \\ + a_{13}p_1q_3 + a_{31}p_3q_1 + a_{23}p_2q_3 + a_{32}p_3q_2 = 0, \end{gathered} \tag{2}$$

то векторы называются *сопряженными* относительно поверхности второго порядка (1). Условие сопряженности (2) в сокращенной записи имеет вид:

$$\sum_{i,j} a_{ij}\,p_iq_j = 0. \tag{2'}$$

Очевидно, понятие сопряженности есть взаимное понятие, так как если в соотношении (2) p_1, p_2, p_3 поменять соответственно местами с q_1, q_2, q_3, то это соотношение не изменится.

Понятие сопряженности в некотором смысле является обобщением понятия асимптотичности. В самом деле, если сопряженные векторы $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$ коллинеарны, то

$$\boldsymbol{p} = \lambda\boldsymbol{q}, \text{ или } p_1 = \lambda q_1,\ p_2 = \lambda q_2,\ p_3 = \lambda q_3.$$

Подставив эти соотношения в уравнение (2), получаем условие асимптотичности:

$$\sum_{i,j} a_{ij}\,q_i\,q_j = 0. \tag{3}$$

Прежде всего покажем, что введенное понятие сопряженности не зависит от выбора системы координат. В самом деле, пусть $Oe_1e_2e_3$ и $O'e_1'e_2'e_3'$ — две системы координат. Предположим, что для векторов p и q выполнено условие (2) в системе $Oe_1e_2e_3$, и покажем, что для тех же векторов выполнено аналогичное условие в системе $O'e_1'e_2'e_3'$. Пусть $\{p_1, p_2, p_3\}$, $\{q_1, q_2, q_3\}$ и $\{p_1', p_2', p_3'\}$, $\{q_1', q_2', q_3'\}$ — координаты векторов p и q соответственно в системах $Oe_1e_2e_3$ и $O'e_1'e_2'e_3'$. Согласно предположению числа p_1, p_2, p_3 и q_1, q_2, q_3 удовлетворяют условию (2).

Пусть в системе $O'e_1'e_2'e_3'$ данная поверхность имеет уравнение

$$\sum_{i,j} a'_{ij} x'_i x'_j + 2 \sum a'_{i4} x'_i + a'_{44} = 0. \qquad (4)$$

Пользуясь формулами (17), § 19, установим связь между коэффициентами a_{ij} и a'_{ij}. Для этого достаточно подставить в соотношения (1) значения x_i из формул (17), § 19 и в полученном уравнении вычислить коэффициенты при произведениях $x_i x_j$. В результате получаем:

$$a'_{ij} = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} c_{i\alpha} c_{j\beta}. \qquad (5)$$

Согласно формулам (4), § 19 имеем:

$$p_i = \sum_{\alpha} c_{i\alpha} p'_\alpha \text{ и } q_i = \sum_{\beta} c_{j\beta} q'_\beta.$$

Подставив эти значения в (2'), получаем:

$$\sum_{i,j,\alpha,\beta} a_{ij} c_{i\alpha} p'_\alpha c_{j\beta} q'_\beta = 0$$

или, учитывая соотношение (5), будем иметь:

$$\sum_{\alpha\beta} a'_{\alpha\beta} p'_\alpha q'_\beta = 0.$$

Таким образом, понятие сопряженности двух векторов не зависит от выбора системы координат.

Основные свойства понятия сопряженности относительно поверхности второго порядка в точности совпадают с аналогичными свойствами сопряженности относительно кривой второго порядка. Рассмотрим эти свойства.

1) *Если векторы p и q сопряжены относительно поверхности (1), то λp и μq, где $\lambda \neq 0$ и $\mu \neq 0$, также сопряжены относительно той же поверхности.*

Это свойство легко проверить, если в соотношение (2) вместо координат векторов p и q подставить координаты векторов λp и μq.

Из этого свойства следует, что понятие сопряженности по существу относится не к векторам p и q, а к их направлениям.

2) *Если вектор p сопряжен с тремя векторами q, r и s, то он сопряжен с любой линейной комбинацией этих векторов.*

В самом деле, пусть

$$\sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j = 0, \quad \sum_{i,j} a_{ij} p_i r_j = 0, \quad \sum_{i,j} a_{ij} p_i s_j = 0.$$

Если $x_j = \alpha q_j + \beta r_j + \gamma s_j$, то

$$\sum_{i,j} a_{ij} p_i x_j = \sum_{i,j} a_{ij} p_i (\alpha q_j + \beta r_j + \gamma s_j) =$$

$$= \alpha \sum_{i,j} a_{ij} p_i q_j + \beta \sum_{i,j} a_{ij} p_i r_j + \gamma \sum_{i,j} a_{ij} p_i s_j = 0.$$

Отсюда, в частности, следует, что если вектор p сопряжен с тремя некомпланарными векторами $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$, то он сопряжен с любым вектором пространства, так как любой вектор пространства линейно выражается через $\boldsymbol{q}$, $\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{s}$.

3) *Для того чтобы координатные векторы $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_2$, и $\boldsymbol{e}_3$ были взаимно сопряжены относительно данной поверхности второго порядка* (1), *необходимо и достаточно, чтобы* $a_{12} = a_{13} = a_{23} = 0$.

В самом деле, условие сопряженности (2) для векторов $\boldsymbol{e}_1 \{1, 0, 0\}$ и $\boldsymbol{e}_2 \{0, 1, 0\}$, как легко видеть, сводится к соотношению $a_{12} = 0$. Точно так же, записывая условие сопряженности для векторов $\boldsymbol{e}_1$, $\boldsymbol{e}_3$ и $\boldsymbol{e}_2$, $\boldsymbol{e}_3$, получаем соответственно: $a_{13} = 0$ и $a_{23} = 0$.

4) *Для любой плоскости π пространства существуют два взаимно перпендикулярных вектора $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$, которые параллельны плоскости π и сопряжены относительно поверхности* (1).

Пусть $O'\boldsymbol{i}'\boldsymbol{j}'\boldsymbol{k}'$ — новая прямоугольная декартова система координат, выбранная так, что O' лежит в π, а $\boldsymbol{i}'$ и $\boldsymbol{j}'$ параллельны этой плоскости. Предположим, что уравнение поверхности в этой системе имеет вид (4). Если $\boldsymbol{p} \{p_1, p_2, 0\}$ и $\boldsymbol{q} \{q_1, q_2, 0\}$ — два произвольных вектора, заданные в новой системе координат своими координатами и параллельные плоскости π, то условие их сопряженности относительно поверхности (4) имеет вид:

$$a'_{11} p_1 q_1 + a'_{22} p_2 q_2 + a'_{12} p_1 q_2 + a'_{21} p_2 q_1 = 0. \tag{6}$$

Возможны два случая: а) $a'_{11} = a'_{22} = a'_{12} = 0$. В этом случае, как следует из соотношения (6), любые два вектора, параллельные плоскости π, сопряжены относительно поверхности второго порядка, поэтому наше утверждение справедливо; б) хотя бы один из коэффициентов a'_{11}, a'_{22}, a'_{12} не равен нулю. Тогда согласно теореме [20.5] плоскость π пересекает поверхность второго порядка по кривой второго порядка, уравнение которой имеет вид:

$$a'_{11} x'^2 + 2a'_{12} x' y' + a'_{22} y'^2 + 2a'_{13} x' + 2a'_{23} y' + a'_{33} = 0.$$

Согласно теореме I, [31.3] для этой кривой существуют два взаимно перпендикулярных сопряженных направления. Другими словами, в плоскости π существуют два взаимно перпендикулярных вектора

$p\,\{p_1, p_2\}$, и $q\,\{q_1, q_2\}$, для которых выполнено условие (6). Эти же векторы в пространстве имеют координаты $p\,\{p_1, p_2, 0\}$ и $q\,\{q_1, q_2, 0\}$, поэтому из соотношения (6) следует также, что они сопряжены относительно поверхности (4).

Пример 1. Показать, что векторы $p\,\{1, 3, -2\}$ и $q\,\{1, 1, 7\}$ сопряжены относительно поверхности второго порядка

$$5x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_2x_3 + 3x_1 - 5x_2 - 6 = 0.$$

Решение. В данном случае условие сопряженности двух векторов записывается так:

$$5p_1q_1 + 3p_2q_2 - 2p_3q_3 - p_1q_2 - p_2q_1 - 2p_2q_3 - 2p_3q_2 = 0.$$

Непосредственной подстановкой легко убедиться в том, что векторы p и q сопряжены относительно данной поверхности.

2. Главные направления. *Направление ненулевого вектора p называется главным относительно поверхности второго порядка, если любой вектор, перпендикулярный к p, сопряжен с ним.*

Найдем условия, при которых данный вектор имеет главное направление. Имеет место следующая важная теорема.

Теорема [24.1]. *Если поверхность второго порядка задана в прямоугольной декартовой системе координат уравнением* (1), *то, для того чтобы ненулевой вектор $p\,\{p_1, p_2, p_3\}$ имел главное направление относительно этой поверхности, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число k, при котором координаты вектора p удовлетворяют условиям:*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 &= kp_1,\\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 &= kp_2,\\ a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3 &= kp_3.\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Доказательство. Пусть $p\,\{p_1, p_2, p_3\}$ имеет главное направление относительно поверхности (1). Это означает, что если x — произвольный вектор, перпендикулярный к вектору p, то x сопряжен с p, т. е. для любых трех чисел x_1, x_2, x_3, удовлетворяющих условию

$$x_1p_1 + x_2p_2 + x_3p_3 = 0, \tag{8}$$

имеет место условие

$$x_1(a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3) + x_2(a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3) + \\ + x_3(a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3) = 0. \tag{9}$$

Это возможно тогда и только тогда, когда числа p_1, p_2, p_3 пропорциональны числам $(a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3)$, $(a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3)$, $(a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3)$. Таким образом, существует действительное число k, удовлетворяющее условиям (7).

Обратно, если существует действительное число k, удовлетворяющее соотношениям (7), то для всякого вектора x, удовлетворяющего условию (8), выполняется также условие (9), т. е. вектор p имеет главное направление. Теорема доказана.

Доказанная теорема дает возможность решить задачу об определении главных направлений данной поверхности второго порядка. Очевидно, для отыскания главных направлений необходимо найти такие числа p_1, p_2, p_3 и k, которые удовлетворяют системе (7), причем важно заметить, что действительные числа p_1, p_2 и p_3 одновременно не равны нулю. Мы сейчас укажем способ, позволяющий найти решение системы (7) трех уравнений с четырьмя неизвестными. Запишем систему (7) в следующем виде:

$$\left.\begin{aligned}(a_{11}-k)p_1+a_{12}p_2+a_{13}p_3=0,\\ a_{21}p_1+(a_{22}-k)p_2+a_{23}p_3=0,\\ a_{31}p_1+a_{32}p_2+(a_{33}-k)p_3=0.\end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Рассмотрим эту систему как систему однородных линейных уравнений относительно p_1, p_2, p_3. Система будет иметь ненулевые решения тогда и только тогда, когда определитель системы равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-k & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22}-k & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}-k \end{vmatrix} = 0. \tag{11}$$

Мы получили кубическое уравнение относительно k. Решив это уравнение, найдем значение k и, подставив найденное значение в уравнение (10), определим координаты вектора, имеющего главные направления. Таким образом, каждому значению k соответствует по крайней мере один вектор главного направления. Может случиться и так, что данному значению k соответствует несколько попарно неколлинеарных векторов главного направления, даже бесчисленное множество таких векторов. Уравнение (11) называется **характеристическим уравнением** поверхности второго порядка, а корни этого уравнения — **характеристическими числами** поверхности.

Пример 2. Определить векторы главных направлений относительно поверхности второго порядка:

$$7x_1^2+6x_2^2+5x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3-x_1+2x_2-30=0.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение данной поверхности:

$$\begin{vmatrix} 7-k & -2 & 0 \\ -2 & 6-k & -2 \\ 0 & -2 & 5-k \end{vmatrix} = 0.$$

Отсюда получаем:

$$k^3-18k^2+99k-162=0.$$

Определим корни этого уравнения[1]. Найдя корень $k = 3$, разложим левую часть уравнения по теореме Безу на линейные множители:

$$(k - 3)(k^2 - 15k + 54) = 0.$$

Отсюда получаем характеристические числа данной поверхности: $k_1 = 3$, $k_2 = 9$, $k_3 = 6$.

Теперь определим главные направления, соответствующие каждому из корней характеристического уравнения. Если k — корень характеристического уравнения, то координаты вектора главного направления, соответствующего корню k, определяются из соотношений (10). Для данной поверхности при $k_1 = 3$ система (10) принимает вид:

$$4p_1 - 2p_2 = 0, \quad -2p_1 + 3p_2 - 2p_3 = 0, \quad -2p_2 + 2p_3 = 0.$$

Рассмотрим первые два уравнения. Учитывая, что определитель, составленный из коэффициентов при p_1 и p_2, в этих уравнениях не равен нулю, мы приходим к выводу, что третье уравнение есть следствие первых двух. Из первых двух уравнений получаем:

$$p_1 = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} t = 4t, \quad p_2 = \begin{vmatrix} 0 & 4 \\ -2 & -2 \end{vmatrix} t = 8t, \quad p_3 = \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} t = 8t.$$

Очевидно, t может принимать любое значение, отличное от нуля. В частности, при $t = 1$ получаем вектор $\boldsymbol{p}\ \{4, 8, 8\}$, который является вектором главного направления, соответствующего характеристическому числу 3. Совершенно аналогично получаем векторы главных направлений, соответствующих другим характеристическим числам: $\boldsymbol{q}\ \{2, -2, 1\}$ и $\boldsymbol{r}\ \{2, 1, -2\}$. Заметим, что векторы $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$ взаимно перпендикулярны. Несколько позже мы увидим, что это обстоятельство не является случайным.

3. Некоторые свойства главных направлений. Прежде всего докажем следующую фундаментальную теорему.

Теорема [24.2]. *Каждая поверхность второго порядка имеет по крайней мере три взаимно перпендикулярных главных направления.*

Доказательство. Сначала покажем, что каждая поверхность второго порядка имеет по крайней мере один вектор главного направления. В самом деле, характеристическое уравнение (11) относительно k является алгебраическим уравнением третьей степени. Из курса алгебры известно, что всякое алгебраическое уравнение третьей степени с действительными коэффициентами имеет по

---

[1] Решение кубического уравнения представляет для студента первого курса определенную трудность. Обычно корни определяют разложением левой части уравнения на линейные множители. Иногда полезно воспользоваться следующей теоремой: уравнение $\lambda^3 + a_1\lambda^2 + a_2\lambda + a_3 = 0$ с целыми коэффициентами может иметь рациональными корнями только целые числа, которые являются делителями свободного члена a_3.

крайней мере один действительный корень. Таким образом, характеристическое уравнение (11) имеет один действительный корень. Обозначим его через k_1. Подставив значения этого корня в соотношения (10), мы получаем систему однородных линейных уравнений, определитель которой равен нулю. Но тогда эта система имеет по крайней мере одно ненулевое решение p_1, p_2, p_3. Следовательно, вектор $\boldsymbol{p}\{p_1, p_2, p_3\}$ будет вектором главного направления.

Пусть π — плоскость, перпендикулярная к вектору $\boldsymbol{p}$ главного направления. Согласно свойству 4) сопряженных направлений (см. п. 1 настоящего параграфа) существуют два взаимно перпендикулярных вектора $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$, которые параллельны плоскости π и сопряжены относительно заданной поверхности. Так как вектор $\boldsymbol{p}$ имеет главное направление, то любой вектор, параллельный плоскости π, сопряжен с вектором $\boldsymbol{p}$, отсюда следует, что векторы $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{r}$ и $\boldsymbol{s}$ попарно сопряжены. Покажем, что вектор $\boldsymbol{r}$ имеет главное направление. Очевидно, любой вектор $\boldsymbol{q}$, перпендикулярный к вектору $\boldsymbol{r}$, будет компланарен с векторами $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{s}$, поэтому $\boldsymbol{q} = \lambda \boldsymbol{p} + \mu \boldsymbol{s}$. В силу свойства 2) сопряженных направлений вектор $\boldsymbol{q}$ сопряжен с вектором $\boldsymbol{r}$. Этим доказано, что ненулевой вектор $\boldsymbol{r}$ имеет главное направление. Точно так же можно доказать, что вектор $\boldsymbol{s}$ имеет главное направление. Теорема доказана.

В заключение рассмотрим еще одно свойство главных направлений, полезное для практических целей.

Теорема [24.3]. *Если дана поверхность второго порядка в прямоугольной декартовой системе координат уравнением* (1), *то для того, чтобы ненулевой вектор* $\boldsymbol{p}$ $\{p_1, p_2, p_3\}$ *имел как главное, так и асимптотическое направление относительно данной поверхности, необходимо и достаточно, чтобы координаты вектора* $\boldsymbol{p}$ *удовлетворяли следующим условиям:*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 = 0, \\ a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 = 0, \\ a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Доказательство. Пусть вектор $\boldsymbol{p}$ имеет как главное, так и асимптотическое направления; тогда координаты вектора $\boldsymbol{p}$ удовлетворяют соотношениям (7). Умножив первое из соотношений (7) на p_1, второе на p_2, третье на p_3 и сложив, получаем:

$$(a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3)\, p_1 + (a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3)\, p_2 + \\ + (a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3)\, p_3 = k(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2);$$

так как вектор $\boldsymbol{p}$ $\{p_1, p_2, p_3\}$ есть вектор асимптотического направления, то левая часть последнего соотношения равна нулю, поэтому $k\,(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2) = 0$. Так как вектор $\boldsymbol{p}$ ненулевой, то $k = 0$. Подставив найденное значение k в соотношения (7), приходим к соотношениям (12).

Обратно, пусть координаты вектора p удовлетворяют соотношениям (12). Покажем, что вектор p имеет как главное, так и асимптотическое направления. Из теоремы [24.1] немедленно следует, что вектор p имеет главное направление. В самом деле, в силу соотношений (12) координаты вектора p удовлетворяют уравнениям (7) при $k = 0$.

Покажем, что этот же вектор имеет асимптотическое направление. Для этой цели умножим первое из соотношений (12) на p_1, второе на p_2, третье на p_3 и сложим:

$$(a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3)\,p_1 + (a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3)\,p_2 + \\ + (a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3)p_3 = 0,$$

или $\sum\limits_{i,j} a_{ij}\, p_i\, p_j = 0.$

Пример 3. В прямоугольной декартовой системе координат дана поверхность второго порядка: $x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_2 - 12x_3 + 10 = 0$. Найти векторы, имеющие как главные, так и асимптотические направления относительно данной поверхности.

Решение. Соотношения (12) для данной поверхности имеют вид:

$$0\cdot p_1 + 0\cdot p_2 + 0\cdot p_3 = 0,$$
$$0\cdot p_1 + p_2 + 0\cdot p_3 = 0,$$
$$0\cdot p_1 + 0\cdot p_2 + p_3 = 0.$$

Отсюда $p_2 = 0$ и $p_3 = 0$. Таким образом, ось Ox имеет как главное, так и асимптотическое направления. Других векторов, удовлетворяющих этим условиям, нет.

Задачи и упражнения

317. Дана поверхность второго порядка $x_1^2 - 3x_1x_2 + x_1x_3 + x_2^2 - 4x_1 - 2x_2 + 5 = 0$. Выяснить, какие из векторов $\boldsymbol{a}\,\{1, 0, 0\}$, $\boldsymbol{b}\,\{2, 2, 2\}$, $\boldsymbol{c}\left\{\frac{1}{2}, 1, 0\right\}$, $\boldsymbol{d}\,\{0, 0, -15\}$ имеют асимптотические направления относительно данной поверхности?

318. Дана поверхность второго порядка: $2x_1^2 + 5x_2^2 + 8x_3^2 + 12x_1x_3 + 6x_3x_1 + 2x_1x_2 + 8x_1 + 14x_2 + x_3 = 0$.

В каждом из следующих случаев найти вектор, сопряженный с данными:

а) $\left\{\frac{1}{7}, -\frac{1}{17}, 0\right\}$, $\left\{0, \frac{1}{17}, -\frac{1}{19}\right\}$;

б) $\{-1, 2, 0\}$, $\{1, -5, 1\}$; в) $\{6, 0, -1\}$, $\{1, 1, -1\}$.

319. Записать в общем виде[1] условие сопряженности вектора $p\,\{p_1, p_2, p_3\}$:

а) с осью Ox_1; б) с осью Ox_2; в) с осью Ox_3; г) с плоскостью Ox_1x_2.

[1] Мы будем говорить, что вектор сопряжен плоскости, если он сопряжен с любым вектором, параллельным этой плоскости.

320. Найти главные направления следующих поверхностей второго порядка:

а) $3x_1^2+5x_2^2+3x_3^2-2x_2x_3+2x_3x_1-2x_1x_2+2x_1+15=0$;
б) $6x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-2x_2x_3+4x_3x_1-4x_1x_2+15x_1-3x_2+$
$+x_3-5=0$;
в) $x_1^2+x_2^2-3=0$;
г) $8x_1^2+7x_2^2+3x_3^2-8x_2x_3+4x_3x_1-12x_1x_2+2x_1-8x_2+1=0$;
д) $3x_1^2-x_2^2-x_3^2+6x_2x_3-6x_1+x_2+5=0$.

Система координат прямоугольная декартова.

321. Найти векторы, имеющие как главные, так и асимптотические направления относительно следующих поверхностей второго порядка:

а) $4x_1^2-x_2^2-x_3^2+2x_2x_3-8x_1-4x_2-8x_3=0$;
б) $x_1^2+2x_2x_3-4x_1+6x_2+2x_3=0$;
в) $4x_2^2-4x_2x_3+4x_3x_1-4x_1x_2-2x_1+2x_2-1=0$.

Система координат прямоугольная декартова.

322. Для того чтобы вектор главного направления имел одновременно и асимптотическое направление, необходимо и достаточно, чтобы характеристическое число, соответствующее этому вектору, равнялось нулю. Доказать.

323. Пусть поверхность задана общим уравнением. Ответьте на следующие вопросы.

а) При каком условии для данной поверхности второго порядка всякое направление является главным?

б) При каком условии координатная ось Ox имеет главное направление?

в) При каком условии любой вектор, параллельный плоскости Ox_1x_2, имеет главное направление?

§ 25. ДИАМЕТРАЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ И ЦЕНТР

1. Диаметральные плоскости. Пусть в аффинной системе координат дана поверхность второго порядка уравнением:

$$\sum_{i,j}a_{ij}x_ix_j+2\sum a_{i4}x_i+a_{44}=0. \qquad (1)$$

Если $p\,\{p_1, p_2, p_3\}$ — вектор, не имеющий асимптотического направления относительно этой поверхности, то из теоремы [20.2] следует, что все прямые, параллельные вектору p, пересека-

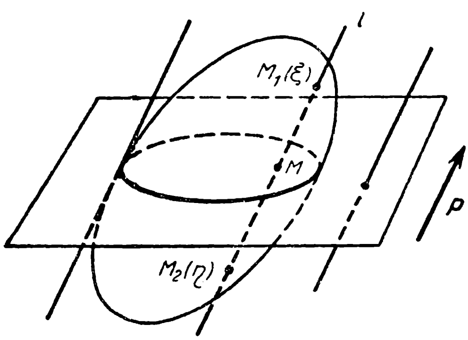


Рис. 98

ют поверхность в двух точках — действительных или комплексно сопряженных. Если M_1 и M_2 — комплексно сопряженные точки, а M — середина отрезка M_1M_2, то точка M имеет действительные координаты. В самом деле, пусть

$$M_1(\alpha_1+i\beta_1,\ \alpha_2+i\beta_2,\ \alpha_3+i\beta_3),$$

$$M_2(\alpha_1-i\beta_1,\ \alpha_2-i\beta_2,\ \alpha_3-i\beta_3),$$

тогда согласно теореме [2.2] имеем $M(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$.

Таким образом, *середина любой хорды неасимптотического направления есть действительная точка.*

По аналогии с теорией кривых рассмотрим геометрическое место середин всех хорд, параллельных вектору p (см. I, § 30). Обозначим через $M(x_1, x_2, x_3)$ координаты произвольной точки искомого геометрического места (рис. 98). Напишем параметрические уравнения прямой l, проходящей через точку M и параллельной вектору p:

$$z_1 = p_1t + x_1, \quad z_2 = p_2t + x_2, \quad z_3 = p_3t + x_3.$$

Пусть (X_1, X_2, X_3) и (Y_1, Y_2, Y_3) — координаты точек пересечения прямой l с поверхностью (1), а ξ и η — параметры этих точек. Тогда

$$X_1 = p_1\xi + x_1,\ X_2 = p_2\xi + x_2,\ X_3 = p_3\xi + x_3;$$
$$Y_1 = p_1\eta + x_1,\ Y_2 = p_2\eta + x_2,\ Y_3 = p_3\eta + x_3.$$

Так как $M(x_1, x_2, x_3)$ — середина отрезка, соединяющего точки (X_1, X_2, X_3) и (Y_1, Y_2, Y_3), то $X_1 + Y_1 = 2x_1$, $X_2 + Y_2 = 2x_2$, $X_3 + Y_3 = 2x_3$.

Из предыдущих соотношений получаем:

$$p_1(\xi + \eta) = 0, \quad p_2(\xi + \eta) = 0, \quad p_3(\xi + \eta) = 0.$$

Но p_1, p_2 и p_3 одновременно не равны нулю, поэтому $\xi + \eta = 0$.

С другой стороны, ξ и η являются корнями квадратного уравнения (6), из § 20, где $P \neq 0$. Сумма корней квадратного уравнения равна нулю в том и только в том случае, когда коэффициент при неизвестном в первой степени равен нулю. В данном случае в силу формулы (8), § 20 имеем:

$$Q = p_1(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}) + p_2(a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}) + p_3(a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}) = 0. \quad (2)$$

Мы показали, что если x_1, x_2, x_3 — координаты середины произвольной хорды, параллельной вектору $p\{p_1, p_2, p_3\}$, то они удовлетворяют уравнению (2). Предлагаем студенту самостоятельно доказать, что имеет место и обратное предложение, т. е. если координаты x_1, x_2, x_3 точки M удовлетворяют уравнению (2), то M принадлежит рассматриваемому геометрическому месту точек[1].

Легко показать, что уравнением (2) определяется плоскость. В самом деле, покажем, что не все коэффициенты при x_1, x_2, x_3 равны нулю. Доказательство проведем, рассуждая от противного. Пусть

$$a_{11}p_1 + a_{12}p_2 + a_{13}p_3 = 0,$$
$$a_{21}p_1 + a_{22}p_2 + a_{23}p_3 = 0 \text{ и } a_{31}p_1 + a_{32}p_2 + a_{33}p_3 = 0.$$

Умножив первое соотношение на p_1, второе на p_2, третье на p_3 и сложив, получаем: $\sum\limits_{i,j} a_{ij}p_i p_j = 0$, т. е. вектор $p\{p_1, p_2, p_3\}$ имеет асимптотическое направление, что противоречит условию выбора вектора p. Итак, мы доказали следующую теорему.

Теорема [25.1]. *Геометрическое место середин всех хорд поверхности* (1), *параллельных вектору $p\{p_1, p_2, p_3\}$ неасимптотического направления, есть плоскость, заданная уравнением* (2).

Эта плоскость называется диаметральной плоскостью поверхности второго порядка, соответствующей (или сопряженной) вектору p.

Мы видим, что каждому вектору p неасимптотического направления соответствует своя диаметральная плоскость.

Доказанная теорема позволяет выяснить геометрический смысл понятия сопряженности. В самом деле, условие сопряженности (2) из § 24 может быть записано в следующем виде:

$$p_1(a_{11}q_1 + a_{12}q_2 + a_{13}q_3) + p_2(a_{21}q_1 + a_{22}q_2 + a_{23}q_3) + \\ + p_3(a_{31}q_1 + a_{32}q_2 + a_{33}q_3) = 0.$$

Сравнивая это соотношение с соотношением (2), мы видим, что здесь записано необходимое и достаточное условие параллельности вектора q плоскости (2). Итак, *если p не имеет асимптотического направления, то для того, чтобы вектор q был сопряжен с вектором p, необходимо и достаточно, чтобы q был параллелен диаметральной плоскости, соответствующей вектору p.*

Пример 1. Найти уравнение диаметральной плоскости поверхности

$$x_1^2 - x_2^2 - 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 - 2x_1 + 4x_2 - 5 = 0,$$

сопряженной направлению прямой

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 + 1 = 0, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 + 3 = 0. \end{cases}$$

[1] Доказательство по существу не отличается от доказательства соответствующего предложения для теории кривых, см. I, стр. 259—260.

Р е ш е н и е. Пользуясь теоремой [14.1], определим координаты направляющего вектора прямой $p\ \{3, 3, 3\}$. Подставив значения коэффициентов уравнения поверхности (1) и координаты вектора p в соотношение (2), после элементарных преобразований получаем: $3x_2 + 2x_3 = 0$.

П р и м е р 2. Найти уравнение той диаметральной плоскости поверхности

$$6x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2 - 3 = 0,$$

которая параллельна плоскости $x_1 + 3x_2 - x_3 + 5 = 0$.

Р е ш е н и е. Найдем координаты вектора $p\ \{p_1, p_2, p_3\}$, сопряженного искомой диаметральной плоскости. Для этой цели запишем условие параллельности плоскости (2) и данной плоскости:

$$\frac{6p_1 + 3p_2 - 2p_3}{1} = \frac{3p_1 + 9p_2}{3} = \frac{-2p_1 + p_3}{-1}.$$

Отсюда, положив $p_1 = 2$, получаем: $p\ \{2, -1, 5\}$. Уравнение диаметральной плоскости, сопряженной найденному вектору, имеет вид: $x_1 + 3x_2 - x_3 - 1 = 0$.

2. Главные диаметральные плоскости. Каждая диаметральная плоскость поверхности второго порядка есть в некотором смысле плоскость симметрии. В самом деле, если диаметральная плоскость π соответствует вектору p, то данная поверхность симметрична относительно π п о н а п р а в л е н и ю вектора p, т. е. если M принадлежит поверхности, то точка M', симметричная точке M относительно π по направлению p, также принадлежит поверхности. Выясним, существуют ли такие диаметральные плоскости, которые являются плоскостями симметрии в обычном смысле слова. Легко показать, что всякая диаметральная плоскость, ортогональная соответствующим хордам, является плоскостью симметрии. В самом деле, пусть диаметральная плоскость π ортогональна соответствующим хордам. Направляющий вектор p этих хорд по определению не имеет асимптотического направления, поэтому все прямые, перпендикулярные к плоскости π, пересекают эту плоскость в двух и только в двух точках. Середины этих хорд, очевидно, лежат в плоскости π, поэтому π — плоскость симметрии.

Диаметральная плоскость, являющаяся плоскостью симметрии поверхности, называется г л а в н о й.

Из предыдущих рассуждений следует, что диаметральная плоскость будет главной тогда и только тогда, когда она ортогональна вектору, которому она соответствует.

Таким образом, *для того чтобы диаметральная плоскость была главной, необходимо и достаточно, чтобы соответствующий ей вектор имел главное, но не асимптотическое направление.*

Это предложение позволяет практически определять все главные диаметральные плоскости.

3. Центр поверхности второго порядка. *Точка C пространства называется* ц е н т р о м *поверхности второго порядка* (1), *если поверхность симметрична относительно C.* Это означает, что для всякой точки M, принадлежащей поверхности, точка M', симметричная M относительно C, также принадлежит поверхности.

Выясним, всякая ли поверхность второго порядка имеет центр, сколько может существовать центров и как определить координаты центра поверхности второго порядка. На все поставленные вопросы по существу отвечает следующая теорема.

Т е о р е м а [25.2]. *Для того чтобы точка $C(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ была центром поверхности второго порядка* (1), *необходимо и достаточно, чтобы координаты этой точки удовлетворяли системе уравнений:*

$$\left.\begin{aligned} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 + a_{14} = 0,\\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 + a_{24} = 0,\\ a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3 + a_{34} = 0.\end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $C(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ — центр поверхности второго порядка (1). Возьмем три некомпланарных вектора $\boldsymbol{p}\{p_1, p_2, p_3\}$, $\boldsymbol{q}\{q_1, q_2, q_3\}$, $\boldsymbol{r}\{r_1, r_2, r_3\}$, не имеющих асимптотических направлений относительно данной поверхности. Если через точку $C(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ провести три прямые, параллельные векторам $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$, то каждая из этих прямых пересекается с поверхностью соответственно в двух точках M_1, M_2; N_1, N_2 и P_1, P_2. Точка C как центр поверхности является серединой отрезков M_1M_2, N_1N_2 и P_1P_2. Отсюда следует, что C принадлежит диаметральным плоскостям, соответствующим векторам $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$, но тогда координаты точки C удовлетворяют их уравнениям:

$$\begin{aligned} p_1A_1 + p_2A_2 + p_3A_3 = 0,\\ q_1A_1 + q_2A_2 + q_3A_3 = 0,\\ r_1A_1 + r_2A_2 + r_3A_3 = 0,\end{aligned}$$

где $A_i = a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + a_{i3}\xi_3 + a_{i4}$.

Так как векторы $\boldsymbol{p}$, $\boldsymbol{q}$ и $\boldsymbol{r}$ не компланарны, то

$$\begin{vmatrix} p_1 & p_2 & p_3\\ q_1 & q_2 & q_3\\ r_1 & r_2 & r_3\end{vmatrix} \neq 0,$$

поэтому $A_1 = A_2 = A_3 = 0$, т. е. имеют место соотношения (3).

Обратно, пусть координаты точки $C(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ удовлетворяют соотношениям (3). Возьмем произвольную (вещественную или невещественную!) точку $M_1(x_1, x_2, x_3)$ поверхности (1) и докажем, что точка $M_2(y_1, y_2, y_3)$, симметричная точке M_1 относительно C, также принадлежит поверхности (1). В самом деле, $x_1 + y_1 = 2\xi_1$, $x_2 + y_2 = 2\xi_2$, $x_3 + y_3 = 2\xi_3$; отсюда получаем:

$$y_1 = 2\xi_1 - x_1,\quad y_2 = 2\xi_2 - x_2,\quad y_3 = 2\xi_3 - x_3.$$

Подставив эти значения в левую часть уравнения поверхности (1), получим:

$$\sum_{i,j} a_{ij}(2\xi_i - x_i)(2\xi_j - x_j) + 2\sum a_{i4}(2\xi_i - x_i) + a_{44} =$$
$$= 4\sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j - 4\sum_{i,j} a_{ij}\xi_i x_j + \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j + 4\sum a_{i4}\xi_i - 2\sum a_{i4}x_i + a_{44} =$$
$$= 4\Big(\sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j - \sum a_{ij}\xi_i x_j +$$
$$+ \sum a_{i4}\xi_i - \sum a_{i4}x_i\Big) + \sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j + 2\sum a_{i4}x_i + a_{44}.$$

Нетрудно видеть, что полученное выражение равно нулю, так как:

$$\sum_{i,j} a_{ij}\xi_i\xi_j + \sum a_{i4}\xi_i = \sum \xi_i (a_{i1}\xi_1 + a_{i2}\xi_2 + a_{i3}\xi_3 + a_{i4}) = 0,$$
$$\sum_{i,j} a_{ij}\xi_i x_j + \sum a_{i4}x_i = \sum_{i,j} a_{ji}\xi_i x_j + \sum a_{j4}x_j =$$
$$= \sum x_j (a_{j1}\xi_1 + a_{j2}\xi_2 + a_{j3}\xi_3 + a_{j4}) = 0,$$
$$\sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j + 2\sum a_{i4}x_i + a_{44} = 0.$$

Здесь первые два равенства следуют из соотношений (3), а последнее — из того обстоятельства, что точка M_1 принадлежит поверхности (1).

Мы доказали, что точка M_2, симметричная любой точке M_1 поверхности (1) относительно точки C, принадлежит этой поверхности. Это означает, что C — центр поверхности. Теорема доказана.

Доказанная теорема позволяет исследовать вопрос о существовании центров поверхностей второго порядка. Задача сводится к исследованию системы уравнений (3).

Рассмотрим матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} \qquad (4)$$

и обозначим соответственно через r и R их ранги. Очевидно, $r \leqslant R$. Возможны следующие случаи:

1) $r = R = 3$. В этом случае система (3) имеет единственное решение и соответственно этому *поверхность имеет один и только один центр*. Поверхности, обладающие таким свойством, называются **центральными** поверхностями второго порядка.

2) $R = r = 2$. В данном случае система совместна и имеет бесчисленное множество решений. Так как $R = 2$, то система содер-

жит два линейно независимых уравнения, через которые линейно выражается третье уравнение. Точки, координатами которых являются решения системы (3), в данном случае лежат на одной прямой. Итак, *при* $r = R = 2$ *поверхность имеет прямую центров, определяемую системой* (3).

3) $R = r = 1$. Система (3) имеет бесчисленное множество решений. В этом случае два уравнения являются следствиями одного, поэтому *поверхность имеет плоскость центров.*

4) $r < R$. Система (3) не имеет ни одного решения, в соответствии с этим *поверхность не имеет ни одного центра.*

Поверхности, не имеющие ни одного центра или имеющие бесчисленное множество центров, называются нецентральными поверхностями второго порядка.

Из предыдущих рассуждений следует, что поверхность будет центральной, т. е. будет иметь единственный центр, в том и только в том случае, когда

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пример 3. Найти центр поверхности второго порядка $2x_1^2 + 12x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 12x_2x_3 - 10x_1 + 14x_3 + 7 = 0$.

Решение. Для данной поверхности составим систему уравнений (3):

$$\begin{aligned} 2\xi_1 + 4\xi_2 - 2\xi_3 - 5 &= 0, \\ 4\xi_1 + 12\xi_2 + 6\xi_3 \quad &= 0, \\ -2\xi_1 + 6\xi_2 + 4\xi_3 + 7 &= 0. \end{aligned}$$

Так как определитель этой системы не равен нулю, то она имеет единственное решение: $\xi_1 = \frac{3}{2}$, $\xi_2 = 0$, $\xi_3 = -1$.

Задача 1. Поверхность второго порядка задана уравнением (1). При каком условии плоскость Ox_1x_2 является плоскостью центров данной поверхности?

Решение. Пусть для данной поверхности плоскость $x_3 = 0$ является плоскостью центров. Это означает, что всякое решение уравнения $x_3 = 0$ является решением системы (3) и наоборот. Возьмем точки O (0, 0, 0), A (1, 0, 0) и B (0, 1, 0), координаты которых удовлетворяют уравнению $x_3 = 0$. Подставив координаты этих точек в систему (3), получим: $a_{11} = a_{21} = a_{31} = a_{12} = a_{22} = a_{32} = a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$, отсюда следует, что $a_{13} = a_{23} = 0$. Таким образом, если плоскость Ox_1x_2 является плоскостью центров поверхности, то уравнение поверхности имеет вид:

$$a_{33}x_3^2 + a_{44} = 0.$$

Обратное утверждение очевидно.

4. Некоторые теоремы о центрах. В заключение рассмотрим несколько теорем, весьма полезных для практических приложений.

Т е о р е м а [25.3]. *Пусть в аффинной системе координат поверхность второго порядка задана уравнением* (1). *Для того чтобы начало координат совпадало с центром поверхности, необходимо и достаточно, чтобы в уравнении поверхности коэффициенты* a_{14}, a_{24}, a_{34} *обращались в нуль.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Из соотношений (3) непосредственно следует, что при $\xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = 0$ имеем: $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$.

Обратно, пусть в уравнении поверхности $a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$. Покажем, что начало координат является центром поверхности второго порядка. В самом деле, в данном случае соотношения (3) принимают вид:

$$
\begin{aligned}
a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + a_{13}\xi_3 &= 0,\\
a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + a_{23}\xi_3 &= 0,\\
a_{31}\xi_1 + a_{32}\xi_2 + a_{33}\xi_3 &= 0.
\end{aligned}
$$

Этой системе удовлетворяют координаты начала, следовательно, точка O (0, 0, 0) является центром симметрии поверхности.

Из теоремы [22.5] и предыдущего исследования вытекает следующая интересная теорема.

Т е о р е м а [25.4]. *Всякая поверхность второго порядка, имеющая бесчисленное множество центров, является цилиндрической поверхностью.*

Если цилиндрическая поверхность второго порядка имеет хотя бы один центр, то она имеет бесчисленное множество центров.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, если поверхность имеет бесчисленное множество центров, то согласно выводам п. 3 настоящего параграфа $R < 3$, а из теоремы [22.5] следует, что поверхность является цилиндрической.

Для доказательства второй части теоремы заметим, что для всякой цилиндрической поверхности второго порядка $R \leqslant 2$, поэтому если эта поверхность имеет хотя бы один центр, то из предыдущих рассуждений следует, что она имеет бесчисленное множество центров.

Т е о р е м а [25.5]. *Для того чтобы поверхность второго порядка была конической, необходимо и достаточно, чтобы она имела по крайней мере один центр, принадлежащий самой поверхности. Этот центр будет вершиной конической поверхности.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, пусть поверхность является конической поверхностью второго порядка. Тогда согласно теореме [23.3] координаты вершины M_0 (y_1, y_2, y_3) удовлетворяют системе уравнений (4) из § 23. Из первых трех соотношений этой системы и теоремы [25.2] следует, что точка M_0 является центром поверхности второго порядка. Таким образом, поверхность имеет хотя бы один центр M_0, принадлежащий конической поверхности.

Обратно, пусть дана поверхность второго порядка, имеющая хотя бы один центр M_0 (y_1, y_2, y_3), принадлежащий самой поверхности. Докажем, что эта поверхность является конической поверхностью с вершиной в точке M_0. В самом деле, так как точка M_0 является центром поверхности, то выполняются соотношения (3), т. е. первые три из соотношений (4), § 23. Точка M_0 принадлежит поверхности, поэтому выполняется также соотношение (7), § 23. Отсюда следует, что $a_{41}y_1 + a_{42}y_2 + a_{43}y_3 + a_{44} = 0$. Итак, согласно теореме [23.3] данная поверхность является конической поверхностью с вершиной в точке M_0.

Задачи и упражнения

324. Найти уравнение диаметральной плоскости поверхности

$$x_1^2 - x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3 - 2x_1 + 4x_2 - 5 = 0,$$

сопряженной направлению прямой

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 2 = 0, \\ 3x_1 - 3x_3 + 4 = 0. \end{cases}$$

325. Найти уравнение той диаметральной плоскости поверхности $6x_1^2 + 9x_2^2 + x_3^2 + 6x_1x_2 - 4x_1x_3 - 2x_2 - 3 = 0$, которая параллельна плоскости $x_1 + 3x_2 - x_3 + 5 = 0$.

326. Найти уравнение той диаметральной плоскости поверхности $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_2x_3 - 6x_1x_3 + 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 0$, которая проходит через прямую $x_1 = 3 - t$, $x_2 = 2 + 3t$, $x_3 = -1 + t$.

327. Найти уравнение той диаметральной плоскости поверхности $2x_1^2 + 10x_2^2 - 2x_3^2 + 12x_1x_2 + 8x_2x_3 + 12x_1 + 4x_2 + 8x_3 - 1 = 0$, которая проходит через прямую $x_1 = 1 + t, x_2 = -1 - t$, $x_3 = t$.

328. Найти уравнение той диаметральной плоскости поверхности $x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3 + 8x_1 - 2x_3 + 3 = 0$, которая проходит через точки M_1 (0, —3, 3) и M_2 (5, —1, 4).

329. Найти общую диаметральную плоскость следующих трех поверхностей второго порядка:

$$x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_3 + 6x_2x_3 - 8x_1 + 10x_2 = 0,$$
$$3x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 - 4x_1 - 8x_3 - 8 = 0,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 0.$$

330. Найти общую диаметральную плоскость поверхностей:

$$4x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 8x_1 - 4x_2 + 8x_3 = 0,$$
$$x_1^2 + 9x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 2x_2x_3 + 8x_1 - 16x_2 + 1 = 0.$$

331. Составить уравнение той диаметральной плоскости поверхности $x_1^2 - x_1x_2 + 2x_2x_3 + x_1 - x_3 = 0$, которая проходит через точку (1, 1, 1) и сопряжена вектору $\boldsymbol{a}$, параллельному плоскости Ox_1x_2.

332. При каком условии плоскость Ox_1x_2 является одной из диаметральных плоскостей поверхности второго порядка.

333. Ответьте на следующие вопросы.

а) Существует ли такая поверхность второго порядка, для которой все диаметральные плоскости совпадают?

б) Как расположены диаметральные плоскости пары пересекающихся плоскостей?

334. Найти центры следующих поверхностей второго порядка:

а) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 - 2x_2x_3 + 2x_1 - 6x_2 - 2x_3 = 0$;

б) $3x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3 - 4x_1 - 8x_3 - 8 = 0$;

в) $2x_1^2 + 12x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 - 4x_1x_3 + 12x_2x_3 - 10x_1 + 14x_3 + 7 = 0$.

335. Найти геометрическое место центров следующих поверхностей второго порядка:

а) $9x_1^2 + 5x_2^2 + 9x_3^2 - 12x_1x_2 - 6x_2x_3 + 12x_2 - 36x_3 = 0$;

б) $2x_1^2 + 10x_2^2 - 2x_3^2 + 12x_1x_2 + 8x_2x_3 + 12x_1 + 4x_2 - 8x_3 - 1 = 0$;

в) $x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3 = 0$;

г) $2x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 4x_2x_3 + 5x_1 + 5x_2 - 5x_3 + 2 = 0$.

336. Поверхность задана общим уравнением. При каком условии плоскость Ox_1x_2 является плоскостью центров этой поверхности.

337. Найти уравнения главных диаметральных плоскостей следующих поверхностей второго порядка:

а) $x_1^2 + x_2^2 + 5x_3^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 - 8 = 0$;

б) $5x_1^2 - x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_1 + 8x_2 + 6x_3 - 10 = 0$;

в) $5x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3 - 6x_1 + 6x_2 - 7 = 0$;

г) $x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3 - 4x_1 + 4x_2 - 2x_3 - 12 = 0$;

д) $2x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1 + 6x_2 + 2x_3 = 0$.

§ 26. КЛАССИФИКАЦИЯ ПОВЕРХНОСТЕЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

1. Упрощение уравнения поверхности второго порядка путем преобразования системы координат. В данном параграфе мы будем предполагать, что поверхность второго порядка задана уравнением

$$\sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j + 2\sum_i a_{i4}x_i + a_{44} = 0 \qquad (1)$$

в прямоугольной декартовой системе координат.

Из теоремы [24.2] немедленно следует

Теорема [26.1]. *Какова бы ни была поверхность второго порядка, всегда существует такая прямоугольная декартова система координат, в которой уравнение поверхности имеет следующий вид:*

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + 2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44} = 0. \quad (2)$$

Доказательство. Пусть поверхность второго порядка задана уравнением (1). Согласно теореме [24.2] эта поверхность имеет по крайней мере три взаимно перпендикулярных главных направления. Возьмем новую систему координат так, чтобы новые координатные оси имели главные направления. Если $\boldsymbol{i}'$, $\boldsymbol{j}'$, $\boldsymbol{k}'$ — новые координатные векторы, то каждый из них имеет главное направление, поэтому все три вектора взаимно сопряжены. Из свойства (3) сопряженности немедленно следует, что в уравнении поверхности в новой системе координат отсутствуют члены с произведениями переменных, т. е. поверхность имеет уравнение вида (2). Теорема доказана.

Из этой теоремы видно, что путем поворота системы координат всегда можно упростить уравнение поверхности второго порядка, приведя его к виду, не содержащему произведений переменных.

Из теоремы [25.3] следует, что если поверхность имеет хотя бы один центр, то, приняв его за начало координат, мы можем добиться того, чтобы уравнение поверхности не содержало членов первой степени. Таким образом, принимая во внимание теорему [26.1], мы приходим к следующему выводу.

Теорема [26.2]. *Если поверхность второго порядка имеет хотя бы один центр, то всегда существует такая прямоугольная декартова система координат, в которой уравнение поверхности имеет вид:*

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 + a_{44} = 0. \quad (3)$$

Из теоремы [25.3] следует также, что если поверхность не имеет ни одного центра, то в любой системе координат уравнение поверхности содержит хотя бы один член первой степени. Имеет место следующая теорема.

Теорема [26.3]. *Если поверхность второго порядка не имеет ни одного центра, то всегда существует такая прямоугольная декартова система координат, в которой уравнение поверхности имеет вид:*

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 = x_3. \quad (4)$$

Доказательство. Возьмем систему координат, в которой уравнение поверхности имеет вид (2). Так как поверхность не имеет ни одного центра, то хотя бы один из коэффициентов a_{11}, a_{22}, a_{33} равен нулю. В самом деле, если все указанные коэффициенты не равны нулю, то ранг r первой из матриц (4), § 25 равен трем, а это означает, что поверхность имеет центр. Не нарушая общности, можно предположить, что $a_{33} = 0$ Возможны два случая: а) $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$; б) $a_{11} \neq 0$, $a_{22} = 0$. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

а) $a_{11} \neq 0$, $a_{22} \neq 0$. Для данного случая уравнение (2) принимает вид:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + 2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44} = 0. \tag{5}$$

Матрицы (4), § 25 для данного уравнения имеют вид:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \end{pmatrix}.$$

Так как первая матрица имеет ранг 2, то вторая матрица должна иметь ранг 3 в силу того, что поверхность не имеет ни одного центра. Отсюда следует, что $a_{34} \neq 0$. Разделив уравнение (5) на $-2a_{34}$ и вводя новые обозначения для коэффициентов, получаем:

$$Ax_1^2 + Bx_2^2 + 2Cx_1 + 2Dx_2 + E = x_3,$$

где $A \neq 0$, $B \neq 0$.

Выделив в левой части предыдущего уравнения два полных квадрата, будем иметь:

$$A\left(x_1^2 + 2\frac{C}{A}x_1 + \frac{C^2}{A^2}\right) + B\left(x_2^2 + 2\frac{D}{B}x_2 + \frac{D^2}{B^2}\right) + E - \frac{C^2}{A} - \frac{D^2}{B} = x_3$$

или

$$A\left(x_1 + \frac{C}{A}\right)^2 + B\left(x_2 + \frac{D}{B}\right)^2 = x_3 - E + \frac{C^2}{A} + \frac{D^2}{B}.$$

Введем в рассмотрение новую прямоугольную декартову систему координат так, чтобы

$$x_1' = x_1 + \frac{C}{A}, \quad x_2' = x_2 + \frac{D}{B}, \quad x_3' = x_3 - E + \frac{C^2}{A} + \frac{D^2}{B}.$$

Согласно теореме [19.5] такая система координат существует. Из формул (19), § 19 видно, что рассматриваемое преобразование координат является переносом начала координат. Очевидно, в этой системе координат уравнение поверхности имеет вид (4).

б) $a_{11} \neq 0$, $a_{22} = a_{33} = 0$. В данном случае уравнение (2) принимает вид:

$$a_{11}x_1^2 + 2a_{14}x_1 + 2a_{24}x_2 + 2a_{34}x_3 + a_{44} = 0. \tag{6}$$

Так как эта поверхность не имеет ни одного центра, то, так же как и в предыдущем случае, можно показать, что хотя бы один из коэффициентов a_{24} или a_{34} не равен нулю.

Сначала рассмотрим случай, когда один из этих коэффициентов равен нулю. Не нарушая общности, положим, что $a_{24}=0$, а $a_{34}\neq 0$. (Если $a_{24}\neq 0$, $a_{34}=0$, то поменяем между собой оси Ox_2 и Ox_3.) Разделив уравнение (6) на $-2a_{34}$ и вводя новые обозначения для коэффициентов уравнения, получаем:

$$Ax_1^2+2Bx_1+C=x_3, \quad A\neq 0. \tag{7}$$

Выделяя в левой части уравнения полный квадрат, будем иметь:

$$A\left(x_1^2+2\frac{B}{A}x_1+\frac{B^2}{A^2}\right)=x_3-C+\frac{B^2}{A}$$

или

$$A\left(x_1+\frac{B}{A}\right)^2=x_3-C+\frac{B^2}{A}.$$

Введем в рассмотрение новую прямоугольную декартову систему координат так, чтобы

$$x_1'=x_1+\frac{B}{A}, \quad x_2'=x_2, \quad x_3'=x_3-C+\frac{B^2}{A}.$$

В этой системе координат уравнение поверхности имеет вид (4).

Остается рассмотреть случай, когда $a_{24}\neq 0$, $a_{34}\neq 0$. Выберем новую прямоугольную декартову систему координат так, чтобы формулы преобразования имели следующий вид:

$$x_1'=x_1, \quad x_2'=\frac{a_{34}x_2-a_{24}x_3}{\sqrt{a_{24}^2+a_{34}^2}}, \quad x_3'=\frac{a_{24}x_2+a_{34}x_3}{\sqrt{a_{24}^2+a_{34}^2}}.$$

Согласно теореме [19.5] такая система координат существует. В новой системе уравнение (6) принимает следующий вид:

$$a_{11}x_1'^2+2a_{14}x_1'+2\sqrt{a_{24}^2+a_{34}^2}\,x_3'+a_{44}=0.$$

Разделив это соотношение на $-2\sqrt{a_{24}^2+a_{34}^2}$, мы приводим его к виду (7). Уравнение (7), как было показано выше, легко приводится к виду (4). Теорема доказана полностью. Мы пришли к следующему выводу.

Теорема [26.4]. *Если поверхность второго порядка в прямоугольной декартовой системе координат дана уравнением* (1), *то путем надлежащего выбора новой прямоугольной декартовой системы координат уравнение этой поверхности можно привести к одному из следующих видов*:

$$Ax_1^2+Bx_2^2+Cx_3^2+D=0, \text{ где } A\neq 0,\ B\neq 0,\ C\neq 0; \tag{8}$$

$$Ax_1^2+Bx_2^2=C, \tag{9}$$

где хотя бы один из коэффициентов A или B не равен нулю;

$$Ax_1^2+Bx_2^2=x_3, \quad \text{где } A\neq 0,\ B\neq 0; \tag{10}$$

$$Ax_1^2=x_3, \quad \text{где } A\neq 0. \tag{11}$$

Очевидно, уравнением (8) определяется центральная поверхность второго порядка. В случаях (9), (10) и (11) поверхность не является центральной. Из теоремы [22.5] следует, что уравнения (9) и (11) определяют цилиндрические поверхности, а уравнение (10) — нецилиндрическую поверхность. При этом цилиндрическая поверхность (9) имеет линию центров, а поверхности (10) и (11) не имеют ни одного центра.

Доказанная выше теорема позволяет дать полную классификацию поверхностей второго порядка.

2. Классификация центральных поверхностей второго порядка. Из теоремы [26.2] следует, что уравнение любой центральной поверхности второго порядка можно привести к виду (8), где $A \neq 0$, $B \neq 0$, $C \neq 0$, а D — произвольный коэффициент.

Рассмотрим два случая:

I. $D \neq 0$. Разделив уравнение (8) на $(-D)$, получаем:

$$-\frac{A}{D}x_1^2 - \frac{B}{D}x_2^2 - \frac{C}{D}x_3^2 = 1$$

или

$$A'x_1^2 + B'x_2^2 + C'x_3^2 = 1, \quad \text{где } A' \neq 0,\ B' \neq 0,\ C' \neq 0. \qquad (12)$$

Возможны следующие случаи.

а) Коэффициенты A', B', C' положительны. Если ввести обозначения $A' = \frac{1}{a^2}$, $B' = \frac{1}{b^2}$, $C' = \frac{1}{c^2}$, то уравнение (12) принимает следующий вид:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} + \frac{x_3^2}{c^2} = 1. \qquad (13)$$

Поверхность, определяемая уравнением (13), называется э л л и п с о и д о м.

б) Два из коэффициентов уравнения (12) положительны, а третий — отрицателен. Не нарушая общности, можно предположить, что $A' > 0$, $B' > 0$, $C' < 0$. Если ввести обозначения $A' = \frac{1}{a^2}$, $B' = \frac{1}{b^2}$, $C' = -\frac{1}{c^2}$, то уравнение (12) приводится к виду:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1. \qquad (14)$$

Поверхность, определяемая этим уравнением, называется о д н о п о л о с т н ы м г и п е р б о л о и д о м.

в) Два из коэффициентов A', B', C' отрицательны, а один положителен. Не нарушая общности, можно предположить, что в уравнении (12) $A' < 0$, $B' < 0$, $C' > 0$. Если ввести обозначения

$$A' = -\frac{1}{a^2}, \quad B' = -\frac{1}{b^2}, \quad C' = \frac{1}{c^2},$$

то уравнение (12) приводится к следующему виду:

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=-1. \tag{15}$$

Поверхность, определяемая уравнением (15), называется **двуполостным гиперболоидом.**

г) Все коэффициенты A', B', C' отрицательны. Если ввести обозначения

$$A'=-\frac{1}{a^2},\quad B'=-\frac{1}{b^2},\quad C'=-\frac{1}{c^2},$$

то уравнение (12) принимает вид:

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=-1. \tag{16}$$

На этой поверхности нет ни одной действительной точки, так как сумма квадратов трех действительных чисел не может равняться -1. Поверхность называется **мнимым эллипсоидом.**

II. $D=0$. В этом случае уравнение (8) принимает вид:

$$Ax_1^2+Bx_2^2+Cx_3^2=0. \tag{17}$$

Из теоремы [23.6] следует, что этим уравнением определяется коническая поверхность второго порядка. Возможны два случая: а) все коэффициенты A, B, C имеют один и тот же знак, б) коэффициенты A, B, C имеют разные знаки. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

а) Не нарушая общности, можно предположить, что $A>0$, $B>0$, $C>0$. В этом случае поверхность, определяемая уравнением (17), имеет одну действительную точку O (0, 0, 0), так как если сумма трех неотрицательных чисел равна нулю, то каждое слагаемое равно нулю. Такая коническая поверхность называется **мнимой конической поверхностью.** Ее уравнение может быть приведено к виду

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=0. \tag{17'}$$

б) Не нарушая общности, можно предположить, что $A>0$, $B>0$, $C<0$. Если ввести новые обозначения для коэффициентов, то уравнение (17) в данном случае приводится к следующему виду:

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=0. \tag{17''}$$

Поверхность, определяемая этим уравнением, называется вещественной **конической поверхностью** второго порядка.

Уравнения (13) — (16), (17′), (17″) называются *канонически ми* уравнениями соответствующих поверхностей, а система координат, в которой уравнение поверхности имеет такой вид, — *канонической* системой координат.

Резюмируя все сказанное выше, мы приходим к следующей теореме.

Теорема [26.5]. *Существует шесть и только шесть типов центральных поверхностей второго порядка:* 1) *эллипсоид,* 2) *однополостный гиперболоид,* 3) *двуполостный гиперболоид,* 4) *мнимый эллипсоид,* 5) *мнимая коническая поверхность второго порядка,* 6) *вещественная коническая поверхность второго порядка.*

3. Классификация поверхностей второго порядка, имеющих бесчисленное множество центров. Из теоремы [25.4] следует, что всякая поверхность, имеющая бесчисленное множество центров, является цилиндрической поверхностью. Уравнение таких поверхностей в силу теоремы [26.4] можно привести к виду (9). Согласно теореме [22.2] этим уравнением определяется цилиндрическая поверхность с прямолинейными образующими, параллельными оси Ox_3.

В § 22 было показано, что цилиндрические поверхности можно классифицировать по виду сечений, не параллельных образующим. В данном случае направляющая цилиндрической поверхности в плоскости Ox_1x_2 имеет уравнение $Ax_1^2 + Bx_2^2 = C$. Возможны два подслучая:

1) A и B отличны от нуля; 2) один из коэффициентов A или B равен нулю. Рассмотрим каждый из этих подслучаев в отдельности.

1) $A \neq 0$, $B \neq 0$. В данном случае уравнением (9) на плоскости Ox_1x_2 определяется центральная кривая второго порядка. Согласно теоремам I, [27.4] и [22.6] получаем следующие виды цилиндрических поверхностей.

а) *Эллиптическая цилиндрическая поверхность:*

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1. \tag{18}$$

б) *Гиперболическая цилиндрическая поверхность:*

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 1. \tag{19}$$

в) *Мнимая эллиптическая цилиндрическая поверхность:*

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = -1. \tag{20}$$

г) Пара вещественных пересекающихся плоскостей:

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0. \tag{21}$$

д) Пара мнимых плоскостей, пересекающихся по вещественной прямой (оси Ox_3):

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 0. \tag{22}$$

Уравнения (18) — (22) называются каноническими уравнениями соответствующих поверхностей второго порядка, а системы координат, в которых поверхности имеют канонические уравнения, — каноническими системами координат.

2) $A \neq 0$, $B = 0$. В соответствии с теоремами I, [27.6] и [22.6] мы приходим к следующим видам цилиндрических поверхностей второго порядка.

а) Пара вещественных параллельных плоскостей:

$$x_1{}^2 - a^2 = 0. \tag{23}$$

б) Пара мнимых параллельных плоскостей:

$$x_1^2 + a^2 = 0. \tag{24}$$

в) Пара слившихся плоскостей:

$$x_1^2 = 0. \tag{25}$$

Резюмируя приведенное выше исследование, мы приходим к следующей теореме.

Теорема [26.6]. *Всякая поверхность второго порядка, имеющая бесчисленное множество центров, является цилиндрической поверхностью второго порядка. Существует восемь и только восемь видов поверхностей второго порядка, имеющих бесчисленное множество центров*: 1) *эллиптическая цилиндрическая поверхность*, 2) *гиперболическая цилиндрическая поверхность*, 3) *мнимая эллиптическая цилиндрическая поверхность*, 4) *пара вещественных пересекающихся плоскостей*, 5) *пара мнимых плоскостей, пересекающихся по вещественной прямой*, 6) *пара вещественных параллельных плоскостей*, 7) *пара мнимых параллельных плоскостей*, 8) *пара слившихся плоскостей*.

4. Классификация поверхностей второго порядка, не имеющих центров. Сначала рассмотрим классификацию поверхностей, уравнения которых можно привести к виду (10). Так как коэффициенты A и B не равны нулю, то возможны следующие два случая: а) оба коэффициента имеют один и тот же знак, б) коэффициенты A и B имеют разные знаки.

а) $A>0$, $B>0$. Если ввести обозначения:

$$A=\frac{1}{2a^2},\quad B=\frac{1}{2b^2},$$

то уравнение (10) приводится к следующему виду:

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=2x_3. \tag{26}$$

Поверхность, определяемая этим уравнением, называется э л л и п т и ч е с к и м п а р а б о л о и д о м.

б) $A>0$, $B<0$. Если ввести обозначения:

$$A=\frac{1}{2a^2},\quad B=\frac{-1}{2b^2},$$

то уравнение (10) приводится к следующему виду:

$$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=2x_3. \tag{27}$$

Поверхность, определяемая этим уравнением, называется г и п е р б о л и ч е с к и м п а р а б о л о и д о м.

Уравнения (26) и (27) называются к а н о н и ч е с к и м и уравнениями соответствующих параболоидов, а системы координат, в которых параболоиды имеют такие уравнения, — к а н о н и ч е с к и м и системами.

Рассмотрим, наконец, поверхность, определяемую уравнением (11). Если ввести обозначения $A=\frac{1}{2p}$, то уравнение (11) принимает вид:

$$x_1^2=2px_3. \tag{28}$$

Из теоремы [22.2] следует, что этим уравнением определяется цилиндрическая поверхность, направляющая которой является параболой, поэтому она называется п а р а б о л и ч е с к о й ц и л и н д р и ч е с к о й п о в е р х н о с т ь ю второго порядка. Итак, мы приходим к следующему выводу.

Т е о р е м а [26.7]. *Всякая поверхность второго порядка, не имеющая ни одного центра, принадлежит одному из следующих трех видов*: 1) *эллиптический параболоид*, 2) *гиперболический параболоид*, 3) *параболическая цилиндрическая поверхность второго порядка.*

Резюмируя все приведенные выше выводы, мы можем сформулировать следующую фундаментальную теорему.

Т е о р е м а [26.8]. *Существуют семнадцать и только семнадцать видов поверхностей второго порядка, приведенных в следующей таблице.*

В этой таблице символ ∞^1 означает, что поверхность имеет прямую центров, а ∞^2 — плоскость центров.

Название поверхности	Каноническое уравнение	Число центров
1. Эллипсоид	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1$	1
2. Однополостный гиперболоид	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1$	1
3. Двуполостный гиперболоид	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=-1$	1
4. Мнимый эллипсоид	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=-1$	1
5. Вещественная коническая поверхность	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=0$	1
6. Мнимая коническая поверхность	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=0$	1
7. Эллиптический параболоид	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=2x_3$	0
8. Гиперболический параболоид	$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=2x_3$	0
9. Эллиптическая цилиндрическая поверхность	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1$	∞^1
10. Гиперболическая цилиндрическая поверхность	$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=1$	∞^1
11. Мнимая эллиптическая цилиндрическая поверхность	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=-1$	∞^1
12. Параболическая цилиндрическая поверхность	$x_1^2=2px_3$	0
13. Пара вещественных пересекающихся плоскостей	$\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_2^2}{b^2}=0$	∞^1
14. Пара мнимых плоскостей, пересекающихся по вещественной прямой	$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=0$	∞^1
15. Пара вещественных параллельных плоскостей	$x_1^2-a^2=0$	∞^2
16. Пара мнимых параллельных плоскостей	$x_1^2+a^2=0$	∞^2
17. Пара слившихся плоскостей	$x_1^2=0$	∞^2

5. Приведение общего уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду. Выше по существу был дан способ приведения уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду. Идея состоит в следующем: сначала путем поворота системы координат приводят уравнение к виду (2), не содержащему произведений переменных, далее переносом начала координат добиваются дальнейшего упрощения уравнения поверхности (см. теоремы [26.2] и [26.3]).

Важно подчеркнуть, что при этом не является обязательным предварительное отыскание координат центра поверхности. Применяя метод группировки членов, рассмотренный выше, можно непосредственно найти те формулы преобразования переноса начала координат, после применения которых уравнение поверхности приводится к одному из видов (8) — (11).

Рассмотрим несколько примеров приведения уравнения поверхности второго порядка к каноническому виду.

Пример 1. В прямоугольной декартовой системе координат дана поверхность:

$$x_1^2 - 6x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 9 = 0. \qquad (29)$$

Привести уравнение этой поверхности к каноническому виду.

Решение. Данное уравнение поверхности имеет вид (2), поэтому, применяя метод группировки членов, приведем уравнение к одному из видов (8) — (11). Сгруппируем члены левой части уравнения (29) следующим образом:

$$(x_1^2 - 2x_1 + 1) - 6(x_2^2 - 2x_2 + 1) + 2(x_3^2 + 2x_3 + 1) + \\ + 9 - 1 + 6 - 2 = 0,$$

или

$$(x_1 - 1)^2 - 6(x_2 - 1)^2 + 2(x_3 + 1)^2 + 12 = 0.$$

Если ввести в рассмотрение новую систему координат $O'x_1'x_2'x_3'$ так, что

$$x_1' = x_1 - 1,\ x_2' = x_2 - 1,\ x_3' = x_3 + 1,$$

то уравнение поверхности (29) в новой системе координат примет вид:

$$x_1'^2 - 6x_2'^2 + 2x_3'^2 + 12 = 0,$$

или

$$\frac{x_1'^2}{12} - \frac{x_2'^2}{2} + \frac{x_3'^2}{6} = -1.$$

Рассмотрим еще одно преобразование системы координат:

$$\tilde{x}_1 = x_1',\ \tilde{x}_2 = x_3',\ \tilde{x}_3 = x_2'.$$

Здесь мы поменяли местами вторую и третью координатные оси.

В новой системе координат поверхность имеет уравнение:

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{12}+\frac{\tilde{x}_2^2}{6}-\frac{\tilde{x}_3^2}{2}=-1. \qquad (30)$$

Мы получили каноническое уравнение двуполостного гиперболоида.

Формулы преобразования координат при переходе от уравнения (29) к уравнению (30) имеют вид: $\tilde{x}_1 = x_1 - 1$, $\tilde{x}_2 = x_3 + 1$, $\tilde{x}_3 = x_2 - 1$.

Пример 2. С помощью преобразования поворота системы координат вокруг начала и параллельного переноса привести к каноническому виду следующее уравнение поверхности второго порядка:

$$5x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 4x_1 + 8x_2 + 12x_3 - 4 = 0. \qquad (31)$$

Решение. С помощью преобразования поворота системы координат вокруг начала добиваемся того, чтобы в новой системе $Ox_1'x_2'x_3'$ в уравнении поверхности отсутствовали члены с произведениями переменных. При этом, очевидно, новые оси координат будут иметь главные направления. Далее, при помощи преобразования параллельного переноса приводим уравнение поверхности к каноническому виду.

Осуществим этот план для данной поверхности (31).

Составим характеристическое уравнение и найдем его корни:

$$\begin{vmatrix} 5-k & -1 & 1 \\ -1 & 3-k & -1 \\ 1 & -1 & 3-k \end{vmatrix} = 0;$$

$$-k^3 + 11k^2 - 36k + 36 = 0,$$

или

$$(k-2)(-k^2+9k-18) = 0^1.$$

Отсюда получаем:

$$k_1 = 2, \quad k_2 = 6, \quad k_3 = 3.$$

Найдем главные направления, соответствующие полученным характеристическим числам. Для этой цели воспользуемся формулами (10), § 24. Подставив туда $k_1 = 2$, получаем:

$$3p_1 - p_2 + p_3 = 0, \quad -p_1 + p_2 - p_3 = 0, \quad p_1 - p_2 + p_3 = 0.$$

Из первых двух соотношений будем иметь:

$$p_1 = 0, \; p_2 = 2t, \; p_3 = 2t.$$

Подберем t так, чтобы вектор p был единичным.

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = 8t^2, \; 8t^2 = 1, \; t = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

[1] См. сноску на стр. 272.

Из предыдущих соотношений получаем:

$$i'\left\{0,\ \frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

Точно так же определяем единичные векторы, соответствующие другим характеристическим числам:

$$j'\left\{\frac{2}{\sqrt{6}},\ -\frac{1}{\sqrt{6}},\ \frac{1}{\sqrt{6}}\right\},\quad k'\left\{\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right\}.$$

Если мы примем эти векторы за новые координатные векторы, то формулы преобразования будут иметь вид:

$$x_1 = 0\cdot x_1' + \frac{2}{\sqrt{6}}x_2' + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3',$$

$$x_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1' - \frac{1}{\sqrt{6}}x_2' + \frac{1}{\sqrt{3}}x_3',$$

$$x_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}x_1' + \frac{1}{\sqrt{6}}x_2' - \frac{1}{\sqrt{3}}x_3'.$$

Подставив эти значения в уравнение (31), после преобразований получаем:

$$2x_1'^2 + 6x_2'^2 + 3x_3'^2 + 10\sqrt{2}\,x_1' + 2\sqrt{6}\,x_2' - 4 = 0.$$

Пользуясь методом группировки членов, легко приводим это уравнение к следующему виду:

$$2\left(x_1' + \frac{5}{\sqrt{2}}\right)^2 + 6\left(x_2' + \frac{1}{\sqrt{6}}\right)^2 + 3x_3'^2 - 30 = 0.$$

Если ввести в рассмотрение новую систему координат $\tilde{O}\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$ так, чтобы $\tilde{x}_1 = x_1' + \frac{5}{\sqrt{2}}$, $\tilde{x}_2 = x_2' + \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\tilde{x}_3 = x_3'$, то в этой системе координат уравнение поверхности принимает вид:

$$\frac{\tilde{x}_1^2}{15} + \frac{\tilde{x}_2^2}{5} + \frac{\tilde{x}_3^2}{10} = 1.$$

Мы получили каноническое уравнение эллипсоида. Предлагаем читателю самостоятельно написать формулы преобразования координат при переходе от системы $Ox_1x_2x_3$ к системе $\tilde{O}\tilde{x}_1\tilde{x}_2\tilde{x}_3$.

П р и м е р 3. В прямоугольной декартовой системе координат дана поверхность

$$3x_1^2 + 2x_2 - 4x_3 = 0. \qquad (32)$$

Привести уравнение этой поверхности к каноническому виду.

Р е ш е н и е. Уравнение (32) имеет вид (6), поэтому для его упрощения применим метод, рассмотренный при доказательстве теоремы [26.3]. Выберем новую прямоугольную декартову систему так, чтобы формулы преобразования имели вид, приведенный на стр. 287. Для поверхности (32) получаем:

$$x_1' = x_1, \qquad x_2' = \frac{2x_2 - 4x_3}{\sqrt{20}}, \qquad x_3' = \frac{4x_2 + 2x_3}{\sqrt{20}}.$$

Уравнение (32) в новой системе координат будет иметь вид:

$$3x_1'^2 + \sqrt{20}\ x_2' = 0.$$

Отсюда следует, что данная поверхность является параболической цилиндрической поверхностью второго порядка.

Из таблицы, приведенной на стр. 293, видно, что из семнадцати видов поверхностей второго порядка два являются коническими поверхностями, а девять — цилиндрическими. Геометрические свойства этих поверхностей нами подробно изучены в § 22 и 23. Таким образом, остается исследовать геометрические свойства первых пяти типов поверхностей, приведенных в таблице. Следующие два параграфа книги посвящены этому вопросу.

Задачи и упражнения

С помощью преобразования вращения прямоугольной декартовой системы координат привести к каноническому виду следующие уравнения поверхностей второго порядка и написать формулы преобразования координат.

338. $2x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 15 = 0$.

339. $3x_1^2 + 2x_2 - 4x_3 = 0$.

340. $x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 - 12 = 0$.

341. $x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 24 = 0$.

342. $x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 10x_1x_3 + 4x_2x_3 - 6 = 0$.

343. $5x_1^2 + 5x_2^2 - 3x_3^2 + 8x_1x_2 - 9 = 0$.

С помощью переноса начала прямоугольной декартовой системы координат привести к каноническому виду следующие уравнения поверхностей второго порядка.

344. $x_1^2 - 6x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1 + 12x_2 + 4x_3 + 9 = 0$.

345. $3x_1^2 - 2x_2^2 + 12x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 6 = 0$.

346. $x_2^2 + 2x_3^2 - 4x_2 + 12x_3 + 10 = 0$.

347. $2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1 + 6x_2 + 16x_3 - 1 = 0$.

348. $x_1^2 + 2x_3^2 - 6x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 13 = 0$.

349. $x_1^2 + 14x_1 + 144 = 0$.

С помощью преобразования вращения системы координат и переноса начала координат привести к каноническому виду уравнения следующих поверхностей второго порядка.

350. $5x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3 + 4x_1 + 8x_2 + 12x_3 - 4 = 0$.

351. $x_1^2+x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3+8x_1+4x_2-5=0.$

352. $2x_1x_3+4x_1-6x_2+8x_3-2=0.$

353. $5x_1^2+5x_2^2+8x_1x_2-4x_1x_3+4x_2x_3-36x_1+36x_2-18x_3-$
$-18=0.$

354. $4x_1^2+2x_2^2+3x_3^2+4x_1x_3-4x_2x_3+8x_1-4x_2+8x_3=0.$

§ 27. ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ ЭЛЛИПСОИДА И ГИПЕРБОЛОИДОВ ПО ИХ КАНОНИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ

1. Эллипсоид. Как было отмечено выше, *эллипсоидом называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой прямоугольной декартовой системе координат удовлетворяют уравнению:*

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1. \tag{1}$$

Система координат, в которой эллипсоид задан таким уравнением, называется канонической системой, а само уравнение — каноническим уравнением. Изучим геометрические свойства эллипсоида.

а) *Эллипсоид не проходит через начала канонической системы координат,* так как координаты точки $O\ (0,\ 0,\ 0)$ не удовлетворяют уравнению (1).

б) Найдем точки пересечения эллипсоида (1) с осями координат. Для определения координат точек пересечения с осью Ox_1 следует совместно решить уравнения эллипсоида и оси Ox_1:

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}+\frac{x_3^2}{c^2}=1,\ x_2=0,\ x_3=0.$$

Решив эту систему, получаем точки пересечения: $A_1\ (a,\ 0,\ 0)$, $A_2\ (-a,\ 0,\ 0)$. Аналогично получаем точки пересечения с осью Ox_2: $B_1\ (0,\ b,\ 0)$, $B_2\ (0,\ -b,\ 0)$ и с осью Ox_3 : $C_1\ (0,\ 0,\ c)$, $C_2\ (0,\ 0,\ -c)$.

Таким образом, *эллипсоид с каждой осью координат пересекается в двух точках, симметричных относительно начала координат.* Точки A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2 называются вершинами, а отрезки A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 — осями эллипсоида. Числа a, b, и c называются полуосями эллипсоида. Если все эти числа попарно различны, то эллипсоид называется трехосным. Если две полуоси равны друг другу, то мы получаем эллипсоид вращения (см. § 23, п. 6). Если, наконец, $a=b=c$, то поверхность согласно теореме [21.2] представляет собой сферу с центром в начале координат.

в) Так как переменные x_1, x_2, x_3 содержатся в уравнении эллипсоида только в четных степенях, то *эллипсоид симметричен относительно всех координатных плоскостей, всех координатных осей и начала координат.*

Доказательство этих предложений предлагаем провести читателю самостоятельно по аналогии с теорией кривых на плоскости (см. I, § 19, п. 2).

г) Исследуем вопрос о пересечении эллипсоида с прямой линией. Заметим, что согласно формуле (7), § 20, если вектор $p\{p_1, p_2, p_3\}$ имеет асимптотическое направление относительно эллипсоида, заданного уравнением (1), то $\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}+\frac{p_3^2}{c^2}=0$, поэтому $p_1 = p_2 = p_3 = 0$. Таким образом, *эллипсоид не имеет вещественных асимптотических направлений*. Отсюда следует, что любая прямая пересекает эллипсоид в двух и только в двух точках, которые могут быть вещественными, комплексно сопряженными или слившимися. В частности, легко показать, что любая прямая, проходящая через начало координат, пересекает эллипсоид в двух и только двух вещественных точках.

Отсюда можно сделать вывод, что *эллипсоид не имеет прямолинейных образующих, поэтому не является ни конической, ни цилиндрической поверхностью*.

д) Рассмотрим совокупность диаметральных плоскостей эллипсоида, заданного уравнением (1). Так как эллипсоид не имеет ни одного вектора асимптотического направления, то для любого вектора $p\{p_1, p_2, p_3\}$ существует диаметральная плоскость, соответствующая этому вектору. Из теоремы [25.1] вытекает, что эта диаметральная плоскость определяется уравнением:

$$\frac{p_1x_1}{a^2}+\frac{p_2x_2}{b^2}+\frac{p_3x_3}{c^2}=0.$$

Мы видим, что все диаметральные плоскости проходят через начало канонической системы координат и образуют собственную связку плоскостей с центром в этой точке (см. § 11, п. 6).

е) Определим центры симметрии эллипсоида. Согласно теореме [25.2] центры симметрии для поверхности, заданной уравнением (1), определяются из соотношений: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$.

Таким образом, *эллипсоид имеет единственный центр симметрии — начало канонической системы координат*.

ж) Определим область изменения координат точек эллипсоида (см. I, § 19, п. 2). Из уравнения (1) следует, что

$$\frac{x_1^2}{a^2}\leqslant 1,\quad \frac{x_2^2}{b^2}\leqslant 1,\quad \frac{x_3^2}{c^2}\leqslant 1,$$

поэтому

$$x_1^2\leqslant a^2,\ x_2^2\leqslant b^2,\ x_3^2\leqslant c^2$$

и

$$-a\leqslant x_1\leqslant a,\quad -b\leqslant x_2\leqslant b,\quad -c\leqslant x_3\leqslant c.$$

Отсюда вытекает, что *точки эллипсоида расположены внутри параллелепипеда* $M_1M_2M_3M_4M_1'M_2'M_3'M_4'$, *изображенного на рисунке* 99.

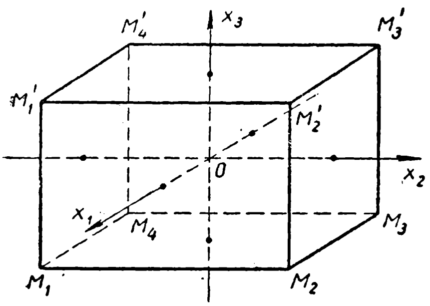


Рис. 99

з) В заключение изучим форму эллипсоида методом сечений (см. п. 4, § 20). Построим карту поверхности в горизонталях, пользуясь теоремой [20.4]. Если эллипсоид (1) пересечь плоскостью $x_3 = h$, параллельной плоскости Ox_1x_2, то проекция сечения на плоскость Ox_1x_2 имеет уравнение:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1 - \frac{h^2}{c^2}.$$ [1]

Возможны три случая:

а) $-c < h < c$. В этом случае *в сечениях мы получаем эллипсы, центры которых лежат на оси* Ox_3. В самом деле, проекции этих линий на плоскости Ox_1x_2 имеют уравнения

$$\frac{x_1^2}{a^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} + \frac{x_2^2}{b^2\left(1 - \frac{h^2}{c^2}\right)} = 1.$$

Так как $1 - \frac{h^2}{c^2} > 0$, то этим уравнением определяется эллипс с полуосями

$$a^* = a\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}, \qquad b^* = b\sqrt{1 - \frac{h^2}{c^2}}.$$

При уменьшении $|h|$ полуоси возрастают, и при $|h| = 0$ имеем $a^* = a$, $b^* = b$. Таким образом, пересечение плоскости Ox_1x_2 с эллипсоидом (1) будет эллипсом:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

б) $h = c$, $h = -c$. В данном случае уравнение проекции сечения на плоскость Ox_1x_2 принимает вид: $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 0$. Кривая представляет собой две мнимые прямые, пересекающиеся в вещественной точке $(0, 0)$. Таким образом, плоскости $x = c$ и $x = -c$ касаются эллипсоида в точках

$$C_1(0, 0, c) \text{ и } C_2(0, 0, -c).$$

[1] Здесь проекция сечения рассматривается как кривая плоскости Ox_1x_2 и определяется в системе O/J о д н и м уравнением. Всюду в дальнейшем кривые, лежащие в координатных плоскостях Ox_1x_2, Ox_2x_3, Ox_3x_1, будут заданы аналогичным образом о д н и м у р а в н е н и е м.

в) $h > c$ или $h < -c$. В этом случае в сечениях получаем мнимые эллипсы, так как плоскость $x_3 = h$ при $|h| > c$ не имеет с эллипсоидом общих вещественных точек.

Легко показать, что сечения, параллельные другим координатным плоскостям, дают аналогичную картину.

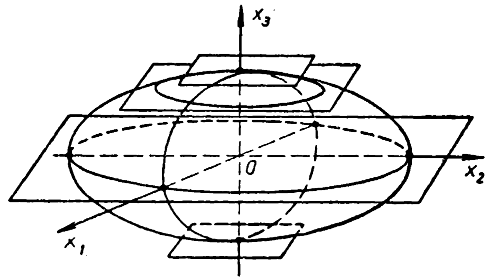


Рис. 100

Все выводы, сделанные выше, дают полное представление о геометрической форме эллипсоида. Поверхность изображена на рисунке 100.

2. Однополостный гиперболоид. *Однополостным гиперболоидом называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой прямоугольной декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1. \tag{2}$$

Система координат, относительно которой однополостный гиперболоид имеет уравнение (2), называется канонической системой, а само уравнение каноническим уравнением.

Изучение геометрических свойств однополостного гиперболоида проведем по той же схеме, которая была выработана нами при изучении свойств эллипсоида. Многие свойства однополостного гиперболоида аналогичны соответствующим свойствам эллипсоида, поэтому доказательства этих свойств мы опустим.

а) *Однополостный гиперболоид не проходит через начало канонической системы координат*, так как координаты точки O (0, 0, 0) не удовлетворяют уравнению (2).

б) Точки пересечения однополостного гиперболоида с осями Ox_1 и Ox_2 определяются точно так же, как и в случае эллипсоида. *С осью Ox_1 однополостный гиперболоид пересекается в точках A_1 $(a, 0, 0)$ и A_2 $(-a, 0, 0)$, а с осью Ox_2 — в точках B_1 $(0, b, 0)$ и B_2 $(0, -b, 0)$.* С осью Ox_3, однополостный гиперболоид пересекается в двух комплексно сопряженных точках. Таким образом, *ось Ox_3 не имеет с однополостным гиперболоидом общих вещественных точек.* Точки A_1, A_2, B_1, B_2 называются вершинами, а отрезки A_1A_2, B_1B_2 — вещественными осями однополостного гиперболоида. Числа a, b, c называются полуосями однополостного гиперболоида.

в) Так же как и в случае эллипсоида, переменные x_1, x_2, x_3 содержатся в уравнении поверхности в четных степенях, поэтому *однополостный гиперболоид симметричен относительно всех координатных плоскостей, всех координатных осей и начала координат.*

г) Исследуем вопрос о пересечении однополостного гиперболоида с прямой, проходящей через начало координат. Пусть l — прямая, определяемая параметрическими уравнениями (см. § 14, п. 7):

$$x_1 = p_1 t,\ x_2 = p_2 t,\ x_3 = p_3 t. \tag{3}$$

Найдем параметры точек пересечения этой прямой с однополостным гиперболоидом (2). Для этой цели, очевидно, необходимо значения x_1, x_2, x_3 подставить в уравнение (2). После элементарных выкладок получаем: $\left(\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}-\frac{p_3^2}{c^2}\right)t^2-1=0$ или $Pt^2-1=0$.

Возможны три случая.

1) $P=\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}-\frac{p_3^2}{c^2}>0$. В этом случае квадратное уравнение относительно t имеет два вещественных решения

$$t_1=\frac{1}{\sqrt{P}},\quad t_2=-\frac{1}{\sqrt{P}};$$

поэтому при $P>0$ прямая пересекает однополостный гиперболоид в двух точках, симметричных относительно начала координат.

2) $P=0$. В этом случае согласно теореме [20.2] прямая l не пересекает однополостный гиперболоид и является асимптотой этой поверхности.

3) $P<0$. Очевидно, в данном случае прямая пересекает поверхность (2) в двух комплексно сопряженных точках. Вещественных точек пересечения с однополостным гиперболоидом прямая l не имеет.

Выясним геометрическую картину полученных результатов. Прежде всего определим геометрическое место точек, принадлежащих всем асимптотам, проходящим через начало координат. Для того чтобы вектор $\boldsymbol{p}\,\{p_1, p_2, p_3\}$ имел асимптотическое направление относительно поверхности (2), необходимо и достаточно, чтобы его координаты удовлетворяли уравнению

$$\frac{p_1^2}{a^2}+\frac{p_2^2}{b^2}-\frac{p_3^2}{c^2}=0. \tag{4}$$

Из приведенного исследования вытекает, что точка $M\,(x_1, x_2, x_3)$ лежит на асимптоте, проходящей через начало координат, тогда и только тогда, когда вектор $\overline{OM}\,\{x_1, x_2, x_3\}$ имеет асимптотическое направление. Таким образом, искомое уравнение рассматриваемого геометрического места точек согласно соотношению (4), имеет вид:

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0. \qquad (5)$$

Этим уравнением согласно теореме [23.5] определяется коническая поверхность, которая называется **асимптотическим конусом с вершиной в начале координат.**

Если прямая, проходящая через начало координат, проходит внутри этого конуса, то можно показать, что для этой прямой $P < 0$, поэтому согласно предыдущему выводу она не имеет с поверхностью общих точек. Если же прямая проходит вне конуса, то $P > 0$; она пересекает поверхность в двух и только в двух точках, симметричных относительно начала координат (рис. 101).

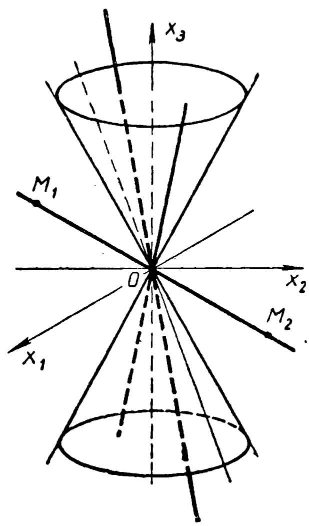


Рис. 101

Мы приходим к интересному выводу: *все прямые, проходящие через начало канонической системы координат и лежащие внутри асимптотического конуса, пересекают однополостный гиперболоид в двух комплексно сопряженных точках; прямолинейные образующие асимптотического конуса вовсе не пересекают однополостный гиперболоид, а прямые, расположенные вне асимптотического конуса пересекают его в двух вещественных точках.*

д) Рассмотрим совокупность диаметральных плоскостей однополостного гиперболоида, заданного уравнением (2). Если вектор $p\ \{p_1,\ p_2,\ p_3\}$ не имеет асимптотического направления, то диаметральная плоскость, соответствующая этому вектору, согласно теореме [25.1)] имеет уравнение:

$$p_1 \frac{x_1}{a^2} + p_2 \frac{x_2}{b^2} - p_3 \frac{x_3}{c^2} = 0.$$

Мы видим, что все диаметральные плоскости проходят через начало координат, однако в отличие от случая эллипсоида не всякая плоскость, проходящая через начало координат, является диаметральной плоскостью. В самом деле, если координаты вектора p удовлетворяют соотношению (4), то плоскость, заданная предыдущим уравнением, не является диаметральной плоскостью.

е) Так же как и в случае эллипсоида, можно показать, что *однополостный гиперболоид является центральной поверхностью, имеющей единственный центр, совпадающий с началом канонической системы координат.*

ж) Определим область расположения точек однополостного гиперболоида по отношению к канонической системе координат. Вы-

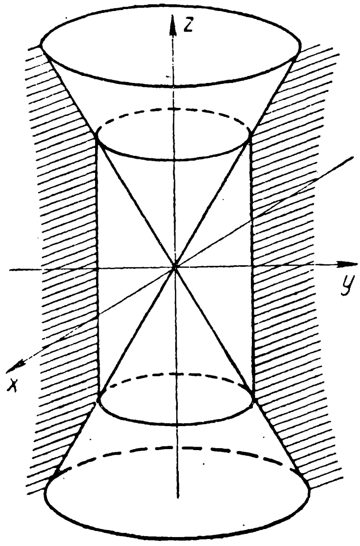


Рис. 102

ше было отмечено, что все точки однополостного гиперболоида расположены вне асимптотического конуса. Из уравнения (2) следует, что если точка $M(x_1, x_2, x_3)$ лежит на однополостном гиперболоиде, то $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2} \geqslant 1$. Отсюда следует, что точки однополостного гиперболоида расположены также вне цилиндрической поверхности, заданной в канонической системе координат уравнением $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1$. На рисунке 102 заштрихована та область, которой принадлежат точки однополостного гиперболоида.

з) В заключение изучим форму однополостного гиперболоида методом сечений. Прежде всего определим линии пересечения поверхности с координатными плоскостями. Из теоремы [20.4] следует, что плоскость Ox_1x_2 пересекает однополостный гиперболоид (2) по линии, имеющей в этой плоскости уравнение $\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1$[1]. Это — уравнение эллипса, который называется горловым эллипсом однополостного гиперболоида. Далее, плоскость Ox_1x_3 пересекает гиперболоид по линии, имеющей в этой плоскости уравнение $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1$, а плоскость Ox_2x_3 — по линии, имеющей в этой плоскости уравнение $\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=1$. Эти линии называются главными гиперболами однополостного гиперболоида.

Если поверхность пересечь плоскостью $x_3 = h$, параллельной плоскости Ox_1x_2, то проекция сечения на плоскость Ox_1x_2 имеет уравнение

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=1+\frac{h^2}{c^2}.$$

При любом значении h этим уравнением определяется эллипс с полуосями

[1] См. сноску на стр. 300.

$$a' = \frac{a}{c}\sqrt{c^2+h^2} \text{ и}$$

$$b' = \frac{b}{c}\sqrt{c^2+h^2},$$

в чем легко убедиться, разделив обе части последнего уравнения на $1+\frac{h^2}{c^2}$.

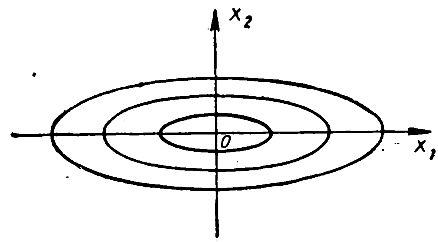


Рис. 103

Таким образом, *карта поверхности в горизонталях представляет собой систему эллипсов, имеющих общие главные оси*, при этом наименьшим из этих эллипсов является горловой эллипс (рис. 103). Чем больше абсолютное значение h, тем больше полуоси эллипса.

Если поверхность пересечь плоскостью $x_1 = h$, параллельной плоскости Ox_2x_3, то проекция сечения на плоскость Ox_2x_3 имеет уравнение

$$\frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 1 - \frac{h^2}{a^2}.$$

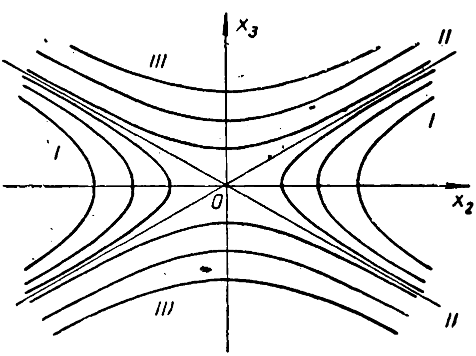


Рис. 104

Возможны три случая:

а) $-a < h < a$. В этом случае $1 - \frac{h^2}{a^2} > 0$, поэтому проекции сечений на плоскость Ox_2x_3 являются гиперболами с мнимой осью Ox_3. На рисунке 104 эти гиперболы обозначены римской цифрой (I).

б) $h = a$ и $h = -a$. В этом случае проекции сечений совпадают и имеют уравнение $\frac{x_2^2}{b^2} - \frac{x_3^2}{c^2} = 0$. Этим уравнением определяются две прямые, пересекающиеся в начале координат (рис. 104, прямые II). Таким образом, плоскости, параллельные плоскости Ox_2x_3 и отстоящие от нее на расстоянии a, пересекают поверхность по двум прямолинейным образующим.

в) $h > a$ или $h < -a$. В этом случае $1 - \frac{h^2}{a^2} < 0$, поэтому в сечении получаем гиперболу, для которой ось Ox_2 является мнимой осью. На рисунке 104 эти гиперболы обозначены цифрой III.

Таким образом, карта поверхности на плоскость Ox_2x_3 имеет вид, изображенный на рисунке 104. Легко показать, что карта

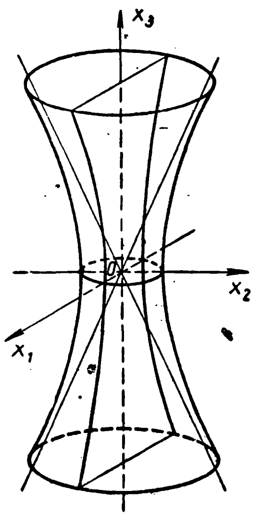


Рис. 105

поверхности на плоскость Ox_1x_3 имеет аналогичный вид.

Изученные выше геометрические свойства поверхности, а также построенные карты дают полное представление об однополостном гиперболоиде. Поверхность изображена на рисунке 105.

3. Прямолинейные образующие однополостного гиперболоида. При исследовании формы однополостного гиперболоида методом сечений мы обнаружили, что в отличие от эллипсоида на однополостном гиперболоиде существуют прямолинейные образующие. Исследуем более подробно этот вопрос. Докажем прежде всего следующую теорему.

Теорема [27.1]. *Через каждую точку однополостного гиперболоида проходят две и только две прямолинейные образующие.*

Доказательство. Пусть $M_0(y_1, y_2, y_3)$— произвольная точка однополостного гиперболоида (2). Рассмотрим прямую l, проходящую через эту точку (см. § 14, п. 7):

$$x_1 = p_1t + y_1, \quad x_2 = p_2t + y_2, \quad x_3 = p_3t + y_3, \tag{6}$$

и выясним, можно ли направляющий вектор $p\{p_1, p_2, p_3\}$ подобрать так, чтобы прямая (6) целиком лежала на поверхности (2). Для этой цели, очевидно, необходимо и достаточно, чтобы соотношение

$$\frac{(p_1t + y_1)^2}{a^2} + \frac{(p_2t + y_2)^2}{b^2} - \frac{(p_3t + y_3)^2}{c^2} = 1$$

было тождеством относительно t.

Переписав это соотношение в виде

$$\left(\frac{p_1^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{b^2} - \frac{p_3^2}{c^2}\right)t^2 + 2\left(\frac{p_1y_1}{a^2} + \frac{p_2y_2}{b^2} - \frac{p_3y_3}{c^2}\right)t + \left(\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2} - \frac{y_3^2}{c^2} - 1\right) = 0$$

и заметив, что свободный член в нем обращается в нуль, поскольку точка $M_0(y_1, y_2, y_3)$ принадлежит однополостному гиперболоиду (2), мы приходим к выводу, что последнее соотношение будет тождеством тогда и только тогда, когда в нем коэффициенты при t^2 и t обращаются в нуль:

$$\frac{p_1^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{b^2} - \frac{p_3^2}{c^2} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{y_1p_1}{a^2} + \frac{y_2p_2}{b^2} - \frac{y_3p_3}{c^2} = 0. \tag{8}$$

В этой системе уравнений p_1, p_2, p_3 — неизвестные величины, а остальные нам известны. Выясним, имеет ли система ненулевые решения и сколько их. Из соотношения (7) следует, что $p_3 \neq 0$. В самом деле, если $p_3 = 0$, то из (7) следует, что $\frac{p_1^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{b^2} = 0$, поэтому $p_1 = p_2 = 0$. Итак, $p_1 = p_2 = p_3 = 0$. Мы пришли к противоречию, так как направляющий вектор прямой l — ненулевой. Так как нас интересует только направление вектора $\boldsymbol{p}$, то, не нарушая общности, можно положить $p_3 = c$. Если ввести в рассмотрение новые неизвестные $X = \frac{p_1}{a}$, $Y = \frac{p_2}{b}$, то систему (7), (8) можно записать так:

$$X^2 + Y^2 = 1, \tag{7'}$$

$$\frac{y_1}{a} X + \frac{y_2}{b} Y - \frac{y_3}{c} = 0. \tag{8'}$$

Теперь применим следующий искусственный способ исследования этой системы. Пусть X, Y — прямоугольные декартовы координаты точки на плоскости. Тогда уравнение (7′) интерпретируется как уравнение окружности радиуса единица, а уравнение (8′) — как уравнение прямой. В самом деле, y_1 и y_2 одновременно не равны нулю, так как $y_1, y_2; y_3$ — координаты точки на поверхности (2), а эта поверхность не пересекает ось Ox_3. Поэтому согласно теореме I, [15.1] уравнением (8′) определяется прямая. Вычислим расстояние от начала координат до прямой (8′). Согласно формуле (8), I, § 16 получаем:

$$d = \frac{\left|\frac{y_3}{c}\right|}{\sqrt{\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2}}} = \frac{\left|\frac{y_3}{c}\right|}{\sqrt{1 + \frac{y_3^2}{c^2}}} < 1.$$

Отсюда вытекает, что прямая (8′) пересекает окружность (7′) в двух и только двух различных точках. Это означает, что существует два и только два различных решения системы (7′) и (8′). Пусть (X_1, Y_1) и (X_2, Y_2) — эти решения. Тогда координаты векторов $\boldsymbol{p}\{aX_1, bY_1, c\}$ и $\boldsymbol{q}\ \{aX_2, bY_2, c\}$ удовлетворяют соотношениям (7) и (8). Эти векторы не коллинеарны. В самом деле, если, например, $X_1 \neq X_2$, то $\begin{vmatrix} aX_1 & c \\ aX_2 & c \end{vmatrix} \neq 0$. Очевидно, все другие решения системы (7) и (8) определяют векторы, коллинеарные $\boldsymbol{p}$ и $\boldsymbol{q}$. Теорема доказана.

Для того чтобы написать уравнения прямолинейных образующих, проходящих через данную точку поверхности, запишем уравнение (2) однополостного гиперболоида в следующем виде:

$$\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_3}{c}\right)\left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_3}{c}\right) = \left(1 + \frac{x_2}{b}\right)\left(1 - \frac{x_2}{b}\right). \tag{9}$$

Рассмотрим две системы уравнений:

$$\lambda_1\left(\frac{x_1}{a}+\frac{x_3}{c}\right)=\lambda_2\left(1+\frac{x_2}{b}\right),\quad \lambda_2\left(\frac{x_1}{a}-\frac{x_3}{c}\right)=\lambda_1\left(1-\frac{x_2}{b}\right), \tag{10}$$

$$\mu_1\left(\frac{x_1}{a}+\frac{x_3}{c}\right)=\mu_2\left(1-\frac{x_2}{b}\right),\quad \mu_2\left(\frac{x_1}{a}-\frac{x_3}{c}\right)=\mu_1\left(1+\frac{x_2}{b}\right). \tag{11}$$

В этих уравнениях λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 — произвольные параметры, причём как λ_1, λ_2, так и μ_1, μ_2 одновременно не равны нулю. Для удобства дальнейшего изложения введем следующее соглашение: будем говорить, что параметры λ_1, λ_2 (или μ_1, μ_2) принимают д о п у с т и м ы е значения, если они одновременно не равны нулю.

Покажем, что уравнениями (10) при любых допустимых значениях λ_1 и λ_2 определяется прямая в пространстве. В самом деле, матрица коэффициентов при x_1, x_2 и x_3 уравнений (10) имеет следующий вид:

$$\begin{pmatrix} \frac{\lambda_1}{a} & -\frac{\lambda_2}{b} & \frac{\lambda_1}{c} \\ \frac{\lambda_2}{a} & \frac{\lambda_1}{b} & -\frac{\lambda_2}{c} \end{pmatrix}$$

Легко видеть, что ранг этой матрицы при любых допустимых значениях λ_1 и λ_2 равен двум, так как, например, определитель, образованный из элементов первых двух столбцов, равен:

$$\frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2}{ab}\neq 0.$$

Из теоремы [14.1] следует, что система (10) определяет в пространстве прямую. Так же можно показать, что при любых допустимых значениях μ_1 и μ_2 уравнениями (11) определяется прямая.

Покажем, что прямая (10) при любых допустимых значениях λ_1 и λ_2 является прямолинейной образующей однополостного гиперболоида. В самом деле, если точка $M^*(x_1^*, x_2^*, x_3^*)$ принадлежит прямой (10), то

$$\lambda_1\left(\frac{x_1^*}{a}+\frac{x_3^*}{c}\right)=\lambda_2\left(1+\frac{x_2^*}{b}\right) \text{ и } \lambda_2\left(\frac{x_1^*}{a}-\frac{x_3^*}{c}\right)=\lambda_1\left(1-\frac{x_2^*}{b}\right). \tag{12}$$

Если $\lambda_1=0$, $\lambda_2\neq 0$, то из соотношений (12) получаем:

$$1+\frac{x_2^*}{b}=0,\qquad \frac{x_1^*}{a}-\frac{x_3^*}{c}=0.$$

Отсюда вытекает, что координаты точки M^* удовлетворяют уравнению однополостного гиперболоида, записанного в виде (9). Точно так же легко показать, что точка прямой (10) принадлежит однополостному гиперболоиду в случае, если $\lambda_1\neq 0$, а $\lambda_2=0$. Если, наконец, $\lambda_1\neq 0$ и $\lambda_2\neq 0$, то, перемножив соответственно левые и правые части соотношений (12) и сократив на $\lambda_1\lambda_2$, получим:

$$\left(\frac{x_1^*}{a}+\frac{x_3^*}{c}\right)\left(\frac{x_1^*}{a}-\frac{x_3^*}{c}\right)=\left(1+\frac{x_2^*}{b}\right)\left(1-\frac{x_2^*}{b}\right).$$

Мы снова приходим к выводу, что точка M^* принадлежит однополостному гиперболоиду.

Точно так же можно показать, что при любых допустимых значениях μ_1 и μ_2 прямая, определяемая уравнениями (11), принадлежит однополостному гиперболоиду.

Таким образом, при всевозможных допустимых значениях λ_1, λ_2 и μ_1, μ_2 уравнениями (10) определяется одно семейство прямолинейных образующих, а уравнениями (11) другое.

Покажем, что ни одна из прямых первого семейства не совпадает ни с одной из прямых второго семейства. Возьмем произвольную прямую l_1 первого семейства и произвольную прямую l_2 второго семейства. Пусть λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 — параметры этих прямых. Тогда из теоремы [14.1] следует, что направляющие векторы прямых (10) и (11) имеют координаты:

$$p\left\{\frac{\lambda_2^2-\lambda_1^2}{bc},\ \frac{2\lambda_1\lambda_2}{ac},\ \frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2}{ab}\right\},\quad q\left\{\frac{\mu_1^2-\mu_2^2}{bc},\ \frac{2\mu_1\mu_2}{ac},\ \frac{-\mu_1^2-\mu_2^2}{ab}\right\}.$$

Приравнивая нулю определители второго порядка, составленные из координат этих векторов, мы убеждаемся в том, что эти векторы коллинеарны тогда и только тогда, когда $\lambda_2\mu_1+\lambda_1\mu_2=0$. Таким образом, если $\lambda_2\mu_1+\lambda_1\mu_2\neq 0$, то прямые не совпадают. Если $\lambda_2\mu_1+\lambda_1\mu_2=0$, то, не нарушая общности, можно положить $\mu_1=\lambda_1$, $\mu_2=-\lambda_2$, тогда уравнения прямых (10) и (11) запишутся так:

$$\lambda_1\left(\frac{x_1}{a}+\frac{x_3}{c}\right)=\lambda_2\left(1+\frac{x_2}{b}\right),\quad \lambda_2\left(\frac{x_1}{a}-\frac{x_3}{c}\right)=\lambda_1\left(1-\frac{x_2}{b}\right),\tag{13}$$

$$\lambda_1\left(\frac{x_1}{a}+\frac{x_3}{c}\right)=-\lambda_2\left(1-\frac{x_2}{b}\right),\quad \lambda_2\left(\frac{x_1}{a}-\frac{x_3}{c}\right)=\lambda_1\left(-1-\frac{x_2}{b}\right).\tag{14}$$

Этими уравнениями определяются две параллельные прямые, так как направляющие векторы этих прямых коллинеарны, а точка $M_1\left(\frac{2\lambda_1\lambda_2 a}{\lambda_1^2+\lambda_2^2},\ \frac{\lambda_1^2-\lambda_2^2}{\lambda_1^2+\lambda_2^2},\ 0\right)$ принадлежит прямой (13) и не принадлежит прямой (14). В последнем утверждении легко убедиться, если подставить координаты этой точки в уравнения (13) и (14).

В заключение сформулируем основные свойства семейств (10) и (11) прямолинейных образующих однополостного гиперболоида.

а) Через произвольную точку поверхности (2) проходит одна и только одна прямолинейная образующая, принадлежащая каждому из семейств (10) и (11).

б) Две различные прямолинейные образующие, принадлежащие одному и тому же семейству, не пересекаются.

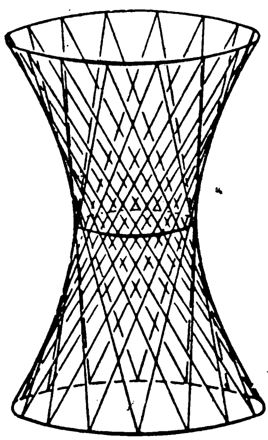


Рис. 106

в) Две прямолинейные образующие различных семейств всегда лежат в одной плоскости и параллельны тогда и только тогда, когда проходят через диаметрально противоположные точки горлового эллипса.

г) Если l_1 и l_2 — прямолинейные образующие, проходящие через данную точку M_0, то плоскость, определяемая прямыми l_1 и l_2, является касательной плоскостью к однополостному гиперболоиду.

Доказательство всех этих свойств предоставляем читателю.

Мы видим, что однополостный гиперболоид является дважды линейчатой поверхностью. Однополостный гиперболоид с двумя семействами прямолинейных образующих изображен на рисунке 106. Линейчатый характер однополостного гиперболоида используется в строительной технике. Знаменитый русский инженер В. Г. Шухов предложил конструкции башен, сконструированных из прямолинейных балок, расположенных так, как расположены прямолинейные образующие однополостного гиперболоида вращения. Эти конструкции оказались очень прочными и легкими. Они часто используются при строительстве водонапорных башен, высотных радиомачт, телевизионных башен и т. д.

4. Двуполостный гиперболоид. *Двуполостным гиперболоидом называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой прямоугольной декартовой системе координат удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}-\frac{x_3^2}{c^2}=-1. \tag{15}$$

Система координат, в которой уравнение поверхности имеет вид (15), называется канонической, а само уравнение — каноническим уравнением. Метод исследования геометрических свойств двуполостного гиперболоида по существу ничем не отличается от метода исследования свойств однополостного гиперболоида, хотя в отдельных случаях мы приходим к другим выводам. Проведем обзор этих свойств.

а) *Двуполостный гиперболоид не проходит через начало канонической системы координат.*

б) *Двуполостный гиперболоид пересекает ось Ox_3 в двух точках C_1 $(0, 0, c)$ и C_2 $(0, 0, -c)$. Оси Ox_1 и Ox_2 не пересекают поверхность в вещественных точках.* Точки C_1 и C_2 называются вершинами поверхности, а отрезок C_1C_2 — действительной осью. Числа a, b и c называются полуосями двуполостного гиперболоида. Если $a = b$, то согласно п. 6, § 23 поверхность представляет собой двуполостный гиперболоид вращения.

в) *Двуполостный гиперболоид симметричен относительно всех координатных плоскостей, координатных осей и начала координат.*

г) Исследование вопроса о пересечении поверхности с прямыми, проходящими через начало координат, в точности совпадает с исследованием однополостного гиперболоида. Так же как и в предыдущем случае, геометрическое место точек, лежащих на асимптотах, проходящих через начало координат, является конусом, определяемым уравнением (5). Этот конус называется асимптотическим конусом с вершиной в начале координат. Но в отличие от предыдущего случая *прямые, проходящие через O и расположенные внутри конуса, пересекают поверхность в двух точках, симметричных относительно начала координат, а прямые, расположенные вне конуса, не имеют действительных точек с поверхностью.*

д) Выясним вопрос о наличии прямолинейных образующих на двуполостном гиперболоиде. Докажем, что *двуполостный гиперболоид, в отличие от однополостного гиперболоида, не имеет прямолинейных образующих.* Доказательство проведем от противного. Пусть прямая (6) является прямолинейной образующей, проходящей через точку $M_0(y_1, y_2, y_3)$ поверхности (15). Это означает, что координаты направляющего вектора $p\{p_1, p_2, p_3\}$ удовлетворяют системе (7) и (8)[1]. Очевидно, $p_3 \neq 0$, поэтому существует число $t \neq 0$ такое, что $p_3 = ct$. Если ввести обозначения: $X = \frac{p_1}{at}$, $Y = \frac{p_2}{bt}$, то координаты вектора p можно записать так:

$$p_1 = Xat, \quad p_2 = Ybt, \quad p_3 = ct.$$

Подставив эти значения в соотношения (7) и (8), получаем (7′) и (8′). Отметим, что хотя бы один из коэффициентов при X и Y в уравнении (8′) отличен от нуля. В самом деле, если $y_1 = y_2 = 0$, то $y_3 \neq 0$, так как $M_0(y_1, y_2, y_3)$ — точка поверхности (15). Но в этом случае соотношение (8′) принимает вид: $0 \cdot X + 0 \cdot Y - \frac{y_3}{c} = 0$, что противоречиво.

Теперь покажем, что в отличие от случая однополостного гиперболоида система (7′) и (8′) не может иметь вещественных решений. В самом деле, интерпретируя (7′) как уравнение окружности, а (8′) как уравнение прямой, мы видим, что они не пересекаются в вещественных точках, так как расстояние d от прямой (8′) до нача-

[1] Легко видеть, что хотя уравнения (2) и (15) различны, но соответствующие уравнения (7) и (8) для этих поверхностей тождественны.

ла координат в данном случае больше радиуса окружности. В самом деле,

$$d = \frac{\left|\frac{y_3}{c}\right|}{\sqrt{\frac{y_1^2}{a^2} + \frac{y_2^2}{b^2}}} = \frac{\left|\frac{y_3}{c}\right|}{\sqrt{-1 + \frac{y_3^2}{c^2}}} > 1.$$

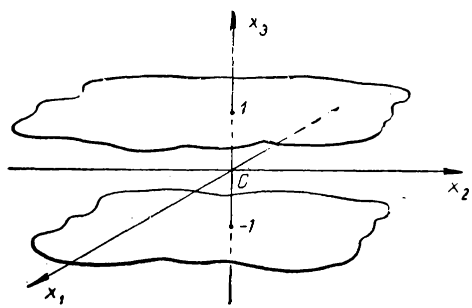


Рис. 107

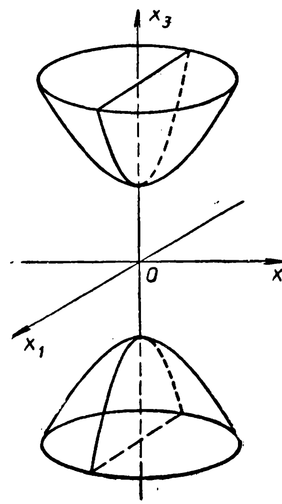


Рис. 108

е) Если вектор $p\{p_1, p_2, p_3\}$ не имеет асимптотического направления, то диаметральная плоскость, соответствующая этому вектору, имеет уравнение

$$\frac{p_1}{a^2}x_1 + \frac{p_2}{b^2}x_2 - \frac{p_3}{c^2}x_3 = 0,$$

поэтому все диаметральные плоскости поверхности принадлежат собственной связке плоскостей с центром в начале координат. Однако, так же как и в случае однополостного гиперболоида, не всякая плоскость этой связки является диаметральной.

ж) Двуполостный гиперболоид, так же как и эллипсоид и однополостный гиперболоид, является центральной поверхностью с центром в начале канонической системы координат.

з) Определим область расположения точек двуполостного гиперболоида относительно канонической системы координат. Выше было отмечено, что все точки поверхности расположены внутри асимптотического конуса. Из уравнения (15) следует, что $\frac{x_3^2}{c^2} \geqslant 1$, поэтому $x_3 \geqslant c$ и $x_3 \leqslant -c$. Таким образом, все точки двуполостного гиперболоида лежат вне полосы, заключенной между двумя параллельными плоскостями $x_3 = c$ и $x_3 = -c$ (рис. 107).

и) Предлагаем читателю самостоятельно исследовать поверхность методом сечений и убедиться в том, что сечения плоскостями

$x_3 = h$, где $h > c$, представляют собой эллипсы, а сечения плоскостями, параллельными координатным плоскостям Ox_1x_3 и Ox_2x_3,— гиперболы. Двуполостный гиперболоид имеет вид, изображенный на рисунке 108.

Задачи и упражнения

355. Написать уравнение эллипсоида, оси которого совпадают с осями координат и который:

а) проходит через точку M (2, 0, 1) и пересекает плоскость Ox_1x_2 по эллипсу $\frac{x_1^2}{8} + \frac{x_2^2}{1} = 1$[1];

б) проходит через точку N $(1, \sqrt{3}, \sqrt{3})$ и пересекает плоскость Ox_1x_2 по эллипсу $\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{5} = 1$;

в) пересекает плоскость Ox_2x_3 по эллипсу $\frac{x_2^2}{25} + \frac{x_3^2}{2} = 1$, а плоскость Ox_1x_2 по окружности $x_1^2 + x_2^2 = 25$.

356. Написать каноническое уравнение однополостного гиперболоида, который:

а) проходит через точку $(\sqrt{5}, 3, 2)$ и пересекает плоскость Ox_1x_3 по гиперболе $\frac{x_1^2}{5} - \frac{x_3^2}{4} = 1$;

б) пересекает плоскость Ox_1x_2 по окружности $x_1^2 + x_2^2 = 9$, а плоскость Ox_1x_3 по гиперболе $\frac{x_1^2}{9} - \frac{x_3^2}{10} = 1$.

357. Найти сечения эллипсоида $\frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{1} + \frac{x_3^2}{9} = 1$ координатными плоскостями.

358. Определить сечение однополостного гиперболоида $\frac{x_1^2}{9} + \frac{x_2^2}{4} - \frac{x_3^2}{1} = 1$ плоскостью, проходящей через точку (0, 2, 0) и параллельной плоскости Ox_1x_3.

359. Найти проекцию на плоскость Ox_1x_2 линии пересечения однополостного гиперболоида $\frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{16} - \frac{x_3^2}{4} = 1$ с плоскостью $x_1 - 2x_3 = 0$.

360. Найти те прямолинейные образующие поверхности $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 1$, которые проходят через точку (1, 1, 1).

361. Написать уравнение той диаметральной плоскости эллип-

---

[1] См. сноску на стр. 300.

соида $\frac{x_1^2}{3}+\frac{x_2^2}{1}+\frac{x_3^2}{2}=1$, которая проходит через прямую x_1-x_2+ $+x_3+5=0,\ x_1+2x_2+1=0.$

362. Составить уравнение диаметральной плоскости однополостного гиперболоида $\frac{x_1^2}{9}+\frac{x_2^2}{16}-\frac{x_3^2}{4}=1$, делящей пополам хорды, параллельные вектору $p\ \{1,\ 1,\ 1\}$.

363. Написать уравнения двух систем прямолинейных образующих однополостного гиперболоида

$$x_1^2+9x_2^2-x_3^2=9$$

и определить те прямолинейные образующие, которые проходят через точку $(3,\ \frac{1}{3},\ -1)$.

§ 28. ИЗУЧЕНИЕ СВОЙСТВ ПАРАБОЛОИДОВ ПО ИХ КАНОНИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ

В предыдущем параграфе мы рассмотрели геометрические свойства эллипсоида, однополостного и двуполостного гиперболоидов. В настоящем параграфе изучим геометрические свойства параболоидов по их каноническим уравнениям.

1. Эллиптический параболоид. *Эллиптическим параболоидом называется геометрическое место точек пространства, координаты которых в некоторой прямоугольной декартовой системе удовлетворяют уравнению*

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=2x_3. \tag{1}$$

Система координат, относительно которой эллиптический параболоид имеет уравнение (1), называется канонической, а само уравнение — каноническим. Изучение геометрических свойств эллиптического параболоида проведем по той же схеме, по которой были изучены поверхности в предыдущем параграфе.

а) *Эллиптический параболоид проходит через начало канонической системы координат*, так как координаты точки O (0, 0, 0) удовлетворяют уравнению (1).

б) Найдем точки пересечения поверхности (1) с осями координат. Для определения точек пересечения эллиптического параболоида с осью Ox_1 следует совместно решить уравнение (1) и уравнение оси Ox_1:

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{x_2^2}{b^2}=2x_3,\ x_2=0,\ x_3=0.$$

Очевидно, эта система имеет единственное решение: $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$. Таким образом, эллиптический параболоид имеет с осью Ox_1 *только одну точку — начало координат*. Точно так же можно показать, что начало координат является единственной точкой пересечения поверхности (1) с осями Ox_2 и Ox_3. Точка O называется вершиной эллиптического параболоида.

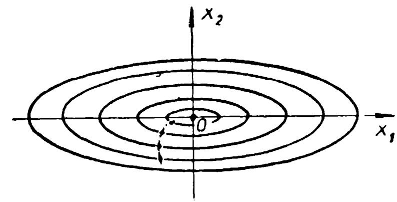


Рис. 109

в) Так как переменные x_1 и x_2 содержатся в уравнении (1) в четных степенях, то *эллиптический параболоид симметричен относительно координатных плоскостей* Ox_1x_3 и Ox_2x_3. Важно подчеркнуть, что *поверхность не симметрична относительно плоскости* Ox_1x_2. Отсюда следует, что эллиптический параболоид симметричен относительно координатной оси Ox_3 и не симметричен относительно осей Ox_1 и Ox_2 и начала координат.

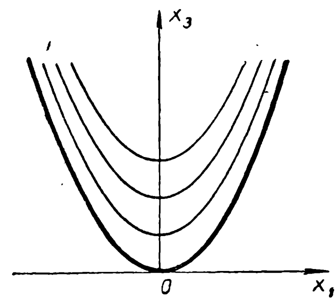


Рис. 110

г) Исследуем вопрос о пересечении эллиптического параболоида с прямыми, проходящими через начало координат. Пусть

$x_1 = p_1t,\ x_2 = p_2t,\ x_3 = p_3t$ (2)

— уравнение произвольной прямой, проходящей через начало координат. Определим параметры точек пересечения этой прямой с поверхностью (1). Для этой цели подставим значения x_1, x_2, x_3 в уравнение (1):

$$\left(\frac{p_1^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{b^2}\right) t^2 - 2p_3t = 0. \quad (3)$$

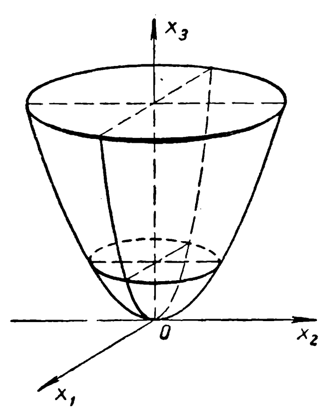


Рис. 111

Отсюда видно, что коэффициент при t^2 равен нулю тогда и только тогда, когда $p_1 = p_2 = 0$. В этом случае прямая (2) совпадает с осью Ox_3. Исключив этот случай из рассмотрения, мы получаем два корня:

$$t_1 = 0,\ t_2 = \frac{2p_3}{\frac{p_1^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{b^2}}.$$

Таким образом, *если прямая не лежит в плоскости Ox_1x_2 и не совпадает с осью Ox_3, то она пересекает параболоид в двух различных точках, одна из которых совпадает с началом координат*. Если прямая лежит в плоскости Ox_1x_2, то $p_3 = 0$, и, следовательно, $t_2 = 0$; в этом случае оба корня t_1 и t_2 уравнения (3) совпадают, следовательно, прямая *касается поверхности*. Наконец, если прямая совпадает с осью Ox_3, то для этой прямой коэффициент при t^2 обращается в нуль. Следовательно, ось Ox_3 будет иметь асимптотическое направление и пересечет поверхность в одной точке — начале координат.

д) Выясним вопрос о наличии прямолинейных образующих на эллиптическом параболоиде. Докажем, что *эллиптический параболоид не имеет прямолинейных образующих*. Пусть $M_0(y_1, y_2, y_3)$ — произвольная точка поверхности, а

$$x_1 = y_1 + p_1t, \; x_2 = y_2 + p_2t, \; x_3 = y_3 + p_3t \qquad (2')$$

— произвольная прямая, проходящая через точку M_0. Прямая (2′) будет прямолинейной образующей поверхности (1) тогда и только тогда, когда

$$P = \frac{p_1^2}{a^2} + \frac{p_2^2}{b^2} = 0 \quad \text{и} \quad Q = \frac{p_1y_1}{a^2} + \frac{p_2y_2}{b^2} - p_3 = 0.$$

Но эта система имеет только нулевые решения, так как из первого уравнения следует, что $p_1 = p_2 = 0$; подставив эти значения во второе уравнение, получаем, что $p_3 = 0$.

е) Рассмотрим совокупность диаметральных плоскостей эллиптического параболоида, заданного уравнением (1). Если $\boldsymbol{p}\{p_1, p_2, p_3\}$ не имеет асимптотического направления, т. е. если p_1 и p_2 одновременно не равны нулю, то диаметральная плоскость, соответствующая вектору $\boldsymbol{p}$, в силу теоремы [25.1] имеет уравнение:

$$p_1\frac{x_1}{a^2} + p_2\frac{x_2}{b^2} - p_3 = 0.$$

Из теоремы [11.11] следует, что *совокупность всех диаметральных плоскостей эллиптического параболоида представляет собой несобственную связку, определяемую вектором* $\boldsymbol{k}\{0, 0, 1\}$. В самом деле, уравнение (17), § 11 для вектора $\boldsymbol{k}\{0, 0, 1\}$ имеет вид: $\alpha x_1 + \gamma x_2 - \beta = 0$[1]. Дополнительное условие, сформулированное в § 11, сводится к тому, что α и γ одновременно не равны нулю, в остальном они совершенно произвольны. Мы видим, что совокупность плоскостей, определяемых этим уравнением, совпадает с совокупностью всех диаметральных плоскостей эллиптического параболоида.

ж) Из теоремы [25.2] следует, что эллиптический параболоид

[1] Здесь введены новые обозначения для координат точек: $x = x_1$, $y = x_2$.

не имеет ни одного центра. В самом деле, запишем систему (3), § 25 для уравнения (1):

$$\frac{\xi_1}{a^2} = 0, \quad \frac{\xi_2}{b^2} = 0, \quad 0 \cdot \xi_1 + 0 \cdot \xi_2 - 1 = 0.$$

Мы видим, что эта система не совместна.

з) Определим область расположения точек эллиптического параболоида относительно системы координат. Из уравнения поверхности (1) следует, что для всех точек поверхности $x_3 \geqslant 0$, причем $x_3 = 0$ тогда и только тогда, когда точка совпадает с началом координат. Отсюда следует, что *все точки эллиптического параболоида за исключением начала координат расположены по одну и ту же сторону от плоскости* Ox_1x_2.

и) В заключение изучим форму эллиптического параболоида методом сечений. Построим карту поверхности в горизонталях. Если эллиптический параболоид пересечь плоскостью $x_3 = h$ параллельно плоскости Ox_1x_2, то проекция сечения на плоскость Ox_1x_2 будет иметь уравнение

$$\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 2h.$$

Из предыдущего исследования следует, что имеет смысл рассматривать только те сечения, для которых $h > 0$. При $h > 0$ получаем:

$$\frac{x_1^2}{2ha^2} + \frac{x_2^2}{2hb^2} = 1.$$

Таким образом, все плоскости, параллельные плоскости Ox_1x_2 и отсекающие от оси Ox_3 отрезки $h > 0$, пересекают эллиптический параболоид по эллипсам. Карта поверхности в горизонталях имеет вид, изображенный на рисунке 109.

Плоскости, параллельные другим координатным плоскостям, как легко видеть, пересекают эллиптический параболоид по параболам. В самом деле, если в уравнении эллиптического параболоида положить $x_2 = h$, то в сечении получим параболу, проекция которой на плоскость Ox_1x_3 имеет уравнение

$$\frac{x_1^2}{a^2} = 2x_3 - \frac{h^2}{b^2}.$$ [1]

На рисунке 110 изображена карта поверхности на плоскость Ox_1x_3.

Если в уравнение эллиптического параболоида положить $x_1 = h$, то получим аналогичную карту на плоскости Ox_2x_3.

Все выводы, сделанные выше, дают полное представление о геометрической форме эллиптического параболоида. Поверхность изображена на рисунке 111.

2. Гиперболический параболоид. Нам остается изучить еще одну поверхность — *г и п е р б о л и ч е с к и й   п а р а б о л о и д*. Так

---

[1] См. сноску на стр. 300.

называется геометрическое место точек, координаты которых в некоторой прямоугольной декартовой системе координат удовлетворяют уравнению

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 2x_3. \tag{4}$$

Система координат, относительно которой поверхность имеет уравнение (4), называется канонической, а само уравнение — каноническим. Рассмотрим основные свойства этой поверхности.

а) *Гиперболический параболоид проходит через начало канонической системы координат.*

б) *Гиперболический параболоид пересекается с осями канонической системы координат в единственной точке — в начале координат.*

в) *Гиперболический параболоид симметричен относительно координатных плоскостей Ox_1x_3 и Ox_2x_3 и не симметричен относительно плоскости Ox_1x_2.* Отсюда следует, что поверхность симметрична относительно координатной оси Ox_3 и не симметрична относительно осей Ox_1 и Ox_2 и начала координат.

Все эти свойства доказываются точно так же, как и для эллиптического параболоида, поэтому доказательства мы опускаем.

г) Исследуем вопрос о пересечении гиперболического параболоида с прямыми (2), проходящими через начало канонической системы координат. Подставив значения x_1, x_2, x_3 из соотношений (2) в уравнение (4), получаем:

$$\left(\frac{p_1^2}{a^2} - \frac{p_2^2}{b^2}\right) t^2 - 2p_3 t = 0. \tag{5}$$

Возможны четыре случая:

1) $\frac{p_1^2}{a^2} - \frac{p_2^2}{b^2} \neq 0$, $p_3 \neq 0$. В этом случае уравнение (5) имеет два различных корня, один из которых равен нулю, поэтому прямая пересекает гиперболический параболоид в двух различных точках, одна из которых совпадает с началом координат.

2) $\frac{p_1^2}{a^2} - \frac{p_2^2}{b^2} \neq 0$, $p_3 = 0$. Уравнение (5) имеет два совпадающих корня, поэтому прямая (2) касается поверхности.

3) $\frac{p_1^2}{a^2} - \frac{p_2^2}{b^2} = 0$, $p_3 \neq 0$. Уравнение (5) имеет единственный корень $t = 0$. В этом случае прямая (2) имеет асимптотическое направление и единственную общую точку с поверхностью. Однако в отличие от предыдущего случая она не касается поверхности.

4) $\frac{p_1^2}{a^2} - \frac{p_2^2}{b^2} = 0$, $p_3 = 0$. Как видно из уравнения (5), прямая является прямолинейной образующей.

Выясним геометрическую картину полученных результатов. Сначала определим геометрическое место точек, принадлежащих всем прямым асимптотического направления, проходящим через начало координат. Уравнение этого геометрического места точек можно вывести точно так же, как и уравнение (5), § 27; оно имеет вид:

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0. \qquad (6)$$

Этим уравнением определяется пара плоскостей, пересекающихся по оси Ox_3:

$$\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} = 0, \qquad (6')$$

$$\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = 0. \qquad (6'')$$

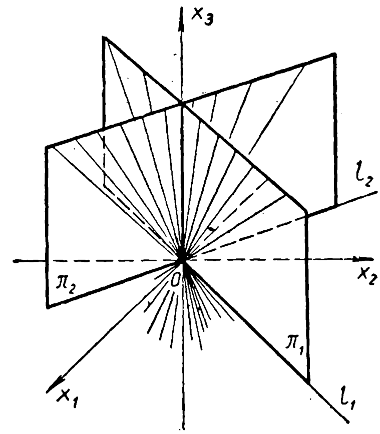


Рис. 112

Обозначим плоскость (6′) через π_1, (6″) через π_2, а Ox_1x_2 через π. Кроме того, через l_1 обозначим линию пересечения плоскостей π_1 и π, а через l_2 — плоскостей π_2 и π (рис. 112). Из полученных выше выводов следует, что *все прямые связки с центром в точке O, не лежащие в плоскостях π_1, π_2 и π, пересекают поверхность в точке O и еще в одной точке, отличной от O. Все прямые плоскости π, отличные от l_1 и l_2, касаются поверхности, а сами прямые l_1 и l_2 являются прямолинейными образующими. Прямые плоскостей π_1 и π_2, не лежащие в плоскости π, пересекают поверхность в единственной точке O и не являются касательными. Отсюда следует, что плоскость Ox_1x_2 является касательной к поверхности в точке O*[1].

д) Рассмотрим совокупность диаметральных плоскостей гиперболического параболоида, заданного уравнением (4). Если вектор $\boldsymbol{p}\,\{p_1, p_2, p_3\}$ не имеет асимптотического направления, то диаметральная плоскость, соответствующая вектору $\boldsymbol{p}$, в силу теоремы [25.1] имеет уравнение:

$$\frac{p_1}{a^2}x_1 - \frac{p_2}{b^2}x_2 - 2p_3 = 0.$$

Из теоремы [11.11] следует, что *совокупность всех диаметральных плоскостей гиперболического параболоида принадлежит несобственной связке, определяемой вектором $\boldsymbol{k}\,\{0, 0, 1\}$*[2]. Не всякая плос-

---

[1] Можно доказать, что в общем случае, если M — точка поверхности, то касательные ко всем кривым, лежащим на поверхности и проходящим через эту точку, лежат в одной плоскости. Она называется **касательной плоскостью** к поверхности в данной точке M.

[2] См. стр. 316.

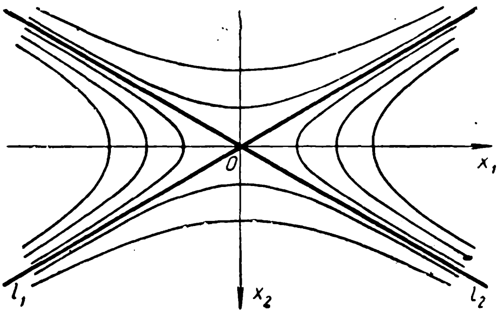


Рис. 113

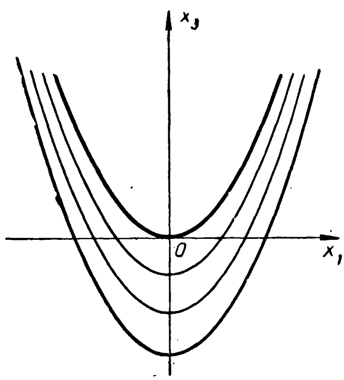


Рис. 114

кость этой связки является диаметральной. Если вектор p имеет асимптотическое направление, то плоскость, определяемая уравнением, приведенным выше, не является диаметральной.

е) Уравнение (4) не позволяет делать каких-либо существенных выводов относительно области расположения точек поверхности. Для изучения формы поверхности применим метод сечений. Гиперболический параболоид пересекает координатные плоскости соответственно по линиям[1]:

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 0;$$

$$x_1^2 = 2a^2 x_3;$$

$$x_2^2 = -2b^2 x_3.$$

Первая кривая является парой прямых l_1 и l_2, рассмотренных выше, а две другие — параболы. Они называются **главными параболами** гиперболического параболоида. На рисунках 113, 114 и 115 эти кривые выделены жирными линиями.

Если поверхность пересечь плоскостью $z_3 = h$, то проекция сечения на плоскости Ox_1x_2 имеет уравнение

$$\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{x_2^2}{b^2} = 2h.$$

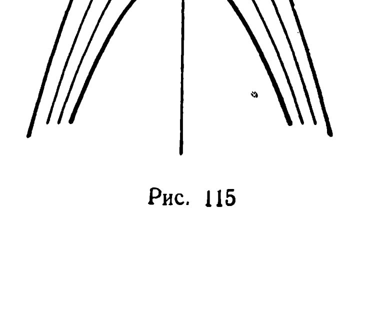


Рис. 115

[1] См. сноску на стр. 300.

При всевозможных $h \neq 0$ этими уравнениями определяются гиперболы, изображенные на рисунке 113. Причем значениям $h > 0$ соответствуют гиперболы, заключенные в паре вертикальных углов между l_1 и l_2, содержащей ось Ox_1, а значениям $h < 0$ соответствуют гиперболы, расположенные в другой паре вертикальных углов. Мы видим, что карта поверхности в горизонталях имеет вид, изображенный на рисунке 113.

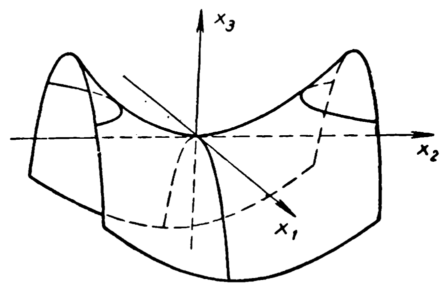


Рис. 116

Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в том, что карты поверхности на другие координатные плоскости имеют вид, изображенный на рисунках 114 и 115. Гиперболический параболоид изображен на рисунке 116.

3. Прямолинейные образующие гиперболического параболоида. Докажем следующую теорему.

Теорема [28.1]. *Через каждую точку гиперболического параболоида проходят две и только две прямолинейные образующие.*

Доказательство. Пусть $M_0(y_1, y_2, y_3)$ — произвольная точка гиперболического параболоида (4). Рассмотрим прямую l, проходящую через эту точку и определяемую параметрическими уравнениями (6), § 27. Выясним, можно ли направляющий вектор $p\{p_1, p_2, p_3\}$ подобрать так, чтобы эта прямая целиком лежала на поверхности (4). Для этого необходимо и достаточно, чтобы соотношение

$$\frac{(p_1 t + y_1)^2}{a^2} - \frac{(p_2 t + y_2)^2}{b^2} = 2(p_3 t + y_3)$$

было тождеством относительно t. Так же, как и в п. 3, § 27, получаем:

$$\frac{p_1^2}{a^2} - \frac{p_2^2}{b^2} = 0, \tag{7}$$

$$\frac{p_1 y_1}{a^2} - \frac{p_2 y_2}{b^2} = p_3. \tag{8}$$

В этой системе уравнений p_1, p_2, p_3 — неизвестные величины, а остальные величины нам известны. Выясним, имеет ли эта система ненулевые решения и сколько их. Из соотношений (7) и (8) следует, что $p_1 \neq 0$. Так как нас интересует только направление вектора p, то, не нарушая общности, можно положить $p_1 = a$. Если ввести в рассмотрение новые неизвестные $X = \frac{p_2}{b}$, $Y = p_3$, то система (7), (8) принимает вид:

$$X^2 = 1, \quad \frac{y_1}{a} - X\frac{y_2}{b} = Y.$$

Отсюда следует, что система имеет два и только два решения:

$$X_1 = 1, \; Y_1 = \frac{y_1}{a} - \frac{y_2}{b}; \; X_2 = -1, \; Y_2 = \frac{y_1}{a} + \frac{y_2}{b}.$$

Таким образом, координаты векторов

$$\boldsymbol{p}\left\{a, \, b, \, \frac{y_1}{a} - \frac{y_2}{b}\right\} \text{ и } \boldsymbol{q}\left\{-a, \, b, \, \frac{y_1}{a} + \frac{y_2}{b}\right\}$$

удовлетворяют соотношениям (7), (8). Очевидно, эти векторы не коллинеарны, и все другие решения системы (7) и (8) определяют векторы, соответственно коллинеарные им. Теорема доказана.

Для того чтобы написать уравнения прямолинейных образующих, проходящих через данную точку, поступим точно так же, как и в п. 3, § 27. Напишем уравнение поверхности (4) в виде:

$$\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b}\right)\left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b}\right) = 2x_3. \tag{9}$$

Рассмотрим две системы уравнений:

$$\lambda\left(\frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b}\right) = 2x_3, \quad \frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b} = \lambda, \tag{10}$$

$$\mu\left(\frac{x_1}{a} - \frac{x_2}{b}\right) = 2x_3, \quad \frac{x_1}{a} + \frac{x_2}{b} = \mu. \tag{11}$$

Здесь λ и μ — произвольные параметры.

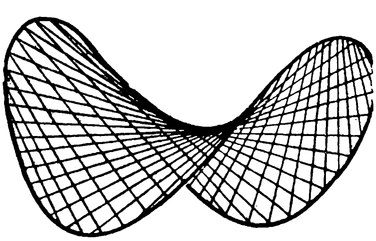


Рис. 117

Точно так же, как в п. 3,§ 27 можно показать, что при всевозможных значениях параметров λ и μ уравнениями (10) определяется одно семейство прямолинейных образующих, а уравнениями (11) — другое. Легко показать, что ни одна прямая первого семейства не совпадает ни с одной прямой второго семейства. В самом деле, направляющие векторы прямых (10) и (11) согласно теореме [14.1] имеют координаты:

$$\boldsymbol{p}\left\{-\frac{2}{b}, \, -\frac{2}{a}, \, \frac{-2\lambda}{ab}\right\}, \quad \boldsymbol{q}\left\{\frac{2}{b}, \, -\frac{2}{a}, \, \frac{2\mu}{ab}\right\}.$$

Эти векторы при л ю б ы х значениях λ и μ не коллинеарны, поэтому прямые (10) и (11) не могут совпасть.

Отметим еще одно интересное свойство прямолинейных образующих гиперболического параболоида. Легко видеть, что вектор p при любом λ параллелен плоскости (6′), а вектор q при любом μ параллелен плоскости (6″). Таким образом, *все прямолинейные образующие семейства* (10) *параллельны плоскости* (6′), *а прямолинейные образующие семейства* (11) — *плоскости* (6″).

Гиперболический параболоид с двумя семействами прямолинейных образующих изображен на рисунке 117.

Задачи и упражнения

364. Написать каноническое уравнение эллиптического параболоида, который:

а) проходит через точку M (2, 3, 1) и пересекает плоскость Ox_1x_3 по параболе $x_1^2 = 8x_3$;

б) пересекает плоскость Ox_1x_3 по параболе $x_1^2 = 22x_3$, а плоскость Ox_2x_3 по параболе $x_2^2 = 24x_3$.

365. Написать каноническое уравнение гиперболического параболоида, если поверхность:

а) проходит через точку M $(2, \sqrt{3}, 0)$ и пересекает плоскость Ox_1x_2 по прямым $\sqrt{3}x_1 - 2x_2 = 0$, $\sqrt{3}x_1 + 2x_2 = 0$;

б) пересекает плоскость Ox_1x_2 по прямым $x_1^2 - x_2^2 = 0$, а плоскость Ox_1x_3 по гиперболе $x_1^2 = 4x_3$.

366. Найти сечения следующих поверхностей координатными плоскостями:

$$\text{а) } \frac{x_1^2}{4} - \frac{x_2^2}{1} = 2x_3; \quad \text{б) } \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{4} = 2x_3.$$

367. На гиперболическом параболоиде $\frac{x_1^2}{8} - \frac{x_2^2}{2} = 2x_3$ найти прямолинейные образующие, параллельные плоскости $6x_1 + 4x_2 - 8x_3 + 1 = 0$.

ПРИЛОЖЕНИЕ

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ И ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

§ 1. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ВТОРОГО ПОРЯДКА И СИСТЕМЫ ДВУХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

1. Определители второго порядка. Рассмотрим таблицу, состоящую из четырех чисел:

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Такие таблицы называются квадратными матрицами второго порядка. Матрица (1) имеет две строки и два столбца. Числа a_1, b_1, a_2, b_2 называются элементами этой матрицы.

Выражение $a_1b_2 - b_1a_2$, составленное из элементов данной матрицы, называется определителем второго порядка *матрицы* (1) *и обозначается символом* $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ *или* Δ. Итак,

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2. \tag{2}$$

Для матриц и их определителей применяются также и другие обозначения. В тех случаях когда несущественно знать элементы матрицы, ее обозначают одной заглавной буквой латинского алфавита:

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} c_1 & d_1 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix},$$

а определители этих матриц обозначаются так: $|A|, |B|$ или $\det A$, $\det B$.

Числа a_1, b_1, a_2, b_2 называются также элементами определителя (2). Диагональ матрицы (1), содержащая числа a_1, b_2, называется главной диагональю, а вторая диагональ — побочной. Из определения следует, что определитель второго порядка равен разности произведений элементов, находящихся на главной и на побочной диагоналях. Например, определитель матрицы $\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ равен $(-1) \cdot 5 - 4 \cdot 3 = -17$, т. е.

$$\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -17.$$

Или другой пример:

$$\begin{vmatrix} \sqrt{2} & 4 \\ 2 & 4\sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} \cdot 4\sqrt{2} - 4 \cdot 2 = 0.$$

Подчеркнем еще раз, что определитель и матрица — это существенно разные понятия. Матрица — это таблица (1), а определитель — число, вычисляемое по правилу (2).

2. Свойства определителей второго порядка. Рассмотрим основные свойства определителей второго порядка.

1°. *Определитель не меняет своего значения, если его строки заменить соответствующими столбцами*:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

В самом деле, пусть

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ и } \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}.$$

Вычислим эти определители:

$$\Delta_1 = a_1b_2 - b_1a_2, \quad \Delta_2 = a_1b_2 - b_1a_2,$$

поэтому $\Delta_1 = \Delta_2$.

Это свойство может быть сформулировано несколько иначе, если ввести понятие транспонирования матрицы. Матрица $\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$ называется т р а н с п о н и р о в а н н о й по отношению к матрице (1). Очевидно, она получена из матрицы (1) заменой строк на столбцы с теми же номерами. Легко показать, что если матрица A^* является транспонированной по отношению к матрице A, то A, в свою очередь, является транспонированной по отношению к A^*. Таким образом, *если матрица A^* является транспонированной по отношению к A, то $|A^*| = |A|$*.

Свойство 1° утверждает равноправие строк и столбцов определителя, поэтому дальнейшие свойства определителей будем доказывать только для столбцов.

2°. *Если в определителе элементы некоторого столбца (строки) равны нулю, то определитель равен нулю.* В самом деле,

$$\begin{vmatrix} 0 & b_1 \\ 0 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \cdot b_2 - 0 \cdot b_1 = 0.$$

3° (с в о й с т в о а н т и с и м м е т р и и). *При перестановке* *столбцов (строк) определитель умножается на* —1. *Действительно,*

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - b_1a_2, \quad \begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix} = b_1a_2 - a_1b_2$$

отсюда следует, что $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} b_1 & a_1 \\ b_2 & a_2 \end{vmatrix}$.

Из свойства 3° непосредственно следует.

4°. *Определитель с одинаковыми столбцами (строками) равен нулю.* Имеет место более общее свойство.

5°. *Если элементы двух столбцов (строк) определителя пропорциональны, то определитель равен нулю.* В самом деле, пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \text{ и } b_1 = \lambda a_1, \; b_2 = \lambda a_2.$$

Тогда

$$\Delta = a_1b_2 - a_2b_1 = \lambda\,(a_1a_2 - a_2a_1) = 0.$$

6°. *Если определитель равен нулю, то столбцы (строки) определителя пропорциональны.* Это свойство является обратным по отношению к предыдущему. Пусть $\Delta = a_2b_1 - a_2b_1 = 0$.

Возможны два случая:

а) $a_1 = a_2 = 0$. В этом случае свойство справедливо, так как можно считать, что числа a_1, a_2 пропорциональны числам b_1, b_2.

б) По крайней мере одно из чисел a_1 и a_2 не равно нулю, скажем, $a_1 \neq 0$. Разделив соотношение $a_1b_2 - b_1a_2 = 0$ на a_1, получим: $b_2 - \frac{b_1}{a_1}\,a_2 = 0$. Если положить $\frac{b_1}{a_1} = \lambda$, то отсюда следует, что

$$b_1 = \lambda a_1 \text{ и } b_2 = \lambda a_2.$$

Объединяя последние два свойства, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Для того чтобы определитель второго порядка был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы столбцы (строки) определителя были пропорциональны.*

3. Система двух линейных уравнений с двумя неизвестными. Рассмотрим систему двух линейных уравнений с двумя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y = c_1, \\ a_2x + b_2y = c_2. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Решением системы (3) называются такие два числа x_0, y_0, которые при подстановке их в уравнения обращают последние в правильные числовые равенства. Например, для системы $x - 2y = 5$, $-2x + 4y = -10$ числа $(-1, -3)$, $(7, 1)$, $(1, -2)$ являются решениями. Два решения (x_1, y_1) и (x_2, y_2) совпадают тогда и только тогда, когда $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

Система (3) называется совместной, если она имеет по крайней мере одно решение. При этом если она имеет единственное решение, то называется о п р е д е л е н н о й. Система, не имеющая ни одного решения, называется н е с о в м е с т н о й.

Теория систем линейных уравнений по существу сводится к решению следующих задач: а) найти условия совместности данной системы; б) найти условия определенности системы; в) указать способ отыскания всех решений системы.

Для системы (3) введем в рассмотрение следующие определители

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

Δ называется о п р е д е л и т е л е м с и с т е м ы. Его элементами являются коэффициенты при неизвестных. Определители Δ_x и Δ_y получены из Δ заменой в нем одного из столбцов столбцом свободных членов.

Прежде чем перейти к решению и исследованию системы (3), докажем следующее вспомогательное предложение.

Л е м м а. *Если* x_0, y_0 — *решение системы* (3), *то* $x_0\Delta = \Delta_x$ и $y_0\Delta = \Delta_y$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Так как x_0, y_0—решение системы (3), то $a_1x_0 + b_1y_0 = c_1$ и $a_2x_0 + b_2y_0 = c_2$. Умножим, далее, первое равенство на b_2, а второе — на b_1 и вычтем из первого соотношения второе[1]

$$a_1b_2x_0 - a_2b_1x_0 = c_1b_2 - c_2b_1,$$

или

$$x_0 \Delta = \Delta_x. \tag{4}$$

Аналогично, умножая первое равенство на a_2 и второе на a_1 и вычитая из первого равенства второе, получим:

$$y_0 \Delta = \Delta_y. \tag{5}$$

Лемма доказана.

4. Решение и исследование системы (3) при $\Delta \neq 0$. Так как $\Delta \neq 0$, то из соотношений (4) и (5), разделив их на Δ, получаем:

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} \text{ и } y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}. \tag{6}$$

Таким образом, если $\Delta \neq 0$ и (x_0, y_0) — решение системы (3), то числа x_0 и y_0 удовлетворяют соотношениям (6). Отсюда следует, что система (3) при $\Delta \neq 0$ может иметь не более одного решения.

Теперь покажем, что при $\Delta \neq 0$ система (3) всегда совместна. В самом деле, числа $x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}$, $y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}$ удовлетворяют этой системе, в чем легко убедиться непосредственной подстановкой:

$$a_1\frac{\Delta_x}{\Delta} + b_1\frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{a_1(c_1b_2 - c_2b_1) + b_1(a_1c_2 - a_2c_1)}{a_1b_2 - b_1a_2} = c_1,$$

[1] Этот прием обычно применяется для исключения неизвестных.

$$a_2 \frac{\Delta_x}{\Delta} + b_2 \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{a_2 (c_1 b_2 - c_2 b_1) + b_2 (a_1 c_2 - a_2 c_1)}{a_1 b_2 - b_1 a_2} = c_2.$$

Мы пришли к следующей теореме.

Теорема 2. *Если определитель системы* (3) *двух линейных уравнений с двумя неизвестными отличен от нуля, то система совместна и имеет единственное решение, которое определяется по формулам* (6).

Пример 1. Найти решения следующей системы линейных уравнений:

$$2x - 5y = 19, \quad x + 3y = -7.$$

Решение. Вычислим определитель системы: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 11$. Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам (6):

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 19 & -5 \\ -7 & 3 \end{vmatrix}}{11} = \frac{22}{11} = 2, \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 19 \\ 1 & -7 \end{vmatrix}}{11} = -3.$$

5. Решение и исследование системы (3) при $\Delta = 0$. Из доказанной в п. 3 леммы непосредственно следует, что если при $\Delta = 0$ система (3) совместна, то $\Delta_x = \Delta_y = 0$. В самом деле, пусть x_0, y_0 — решение системы (3), тогда $x_0\Delta = \Delta_x$, $y_0\Delta = \Delta_y$, поэтому $\Delta_x = \Delta_y = 0$. Таким образом, при $\Delta = 0$ система (3) совместна тогда и только тогда, когда $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$. Рассмотрим этот случай более подробно.

а) Пусть хотя бы один из коэффициентов a_1, b_1, a_2, b_2 отличен от нуля. Если, например, $a_1 \neq 0$, то из условий $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ следует, что существует такое число λ, что $a_2 = \lambda a_1$, $b_2 = \lambda b_1$, $c_2 = \lambda c_1$. В этом случае каждое решение первого уравнения является решением второго. Так как первое уравнение имеет бесчисленное множество решений, то *система* (3) *также имеет бесчисленное множество решений.*

б) $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$. Если $c_1 \neq 0$ или $c_2 \neq 0$, то, очевидно, система не совместна; если $c_1 = c_2 = 0$, то любая пара чисел x, y является решением системы (3). Таким образом, мы пришли к следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть определитель Δ системы* (3) *равен нулю.* а) *Система не совместна, если хотя бы один из определителей Δ_x или Δ_y отличен от нуля.* б) *Система не совместна, если $\Delta_x = \Delta_y = 0$, $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$ и хотя бы один из коэффициентов c_1 и c_2 отличен от нуля.* в) *Система имеет бесчисленное множество решений, если $\Delta_x = \Delta_y = 0$ и хотя бы один из коэффициентов a_1, b_1, a_2, b_2 отличен от нуля.* г) *Всякая пара чисел является решением системы, если $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = c_1 = c_2 = 0$.*

Имеет место и обратное предложение. Отсюда, в частности, получаем.

Теорема 4. *Если в системе* (3) $\Delta = 0$ *и хотя бы один из коэффициентов при x, y не равен нулю, то для того, чтобы одно из уравнений было следствием второго, необходимо и достаточно, чтобы* $\Delta_x = \Delta_y = 0$. *В этом случае система имеет бесчисленное множество решений.*

Пример 2. Исследовать системы уравнений:

а) $2x - y = 5, \quad 4x - 2y = 10;$
б) $2x - y = 5, \quad 4x - 2y = 3;$
в) $0 \cdot x + 0 \cdot y = 3, \quad 0 \cdot x + 0 \cdot y = -2.$

Решение. а) Данная система совместна и имеет бесчисленное множество решений, так как $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$ и коэффициенты при x и y отличны от нуля.

б) Данная система не совместна. Для этой системы $\Delta = 0$, а Δ_x и Δ_y отличны от нуля.

в) Система не совместна. Имеет место случай б) теоремы 3.

6. Система линейных однородных уравнений. Система (3) называется однородной, если $c_1 = 0$ и $c_2 = 0$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} a_1x + b_1y = 0,\\ a_2x + b_2y = 0.\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

Очевидно, однородная система линейных уравнений совместна, так как числа 0, 0 являются решением этой системы; это решение называется тривиальным.

Для системы (7) имеем: $\Delta_x = 0$ и $\Delta_y = 0$, поэтому возможны только два случая:

а) $\Delta \neq 0$, $\Delta_x = 0$, $\Delta_y = 0$. В данном случае согласно теореме 2 система совместна и имеет единственное решение, которое будет нулевым (тривиальным);

б) $\Delta = \Delta_x = \Delta_y = 0$. В этом случае согласно теореме 3 система также совместна, но имеет бесчисленное множество решений.

Таким образом, получаем теорему.

Теорема 5. *Система двух линейных однородных уравнений с двумя неизвестными всегда совместна и имеет одно решение при* $\Delta \neq 0$ *и бесчисленное множество решений при* $\Delta = 0$. *Здесь* Δ — *определитель, составленный из коэффициентов при неизвестных.*

Пример 3. Исследовать системы уравнений:

а) $x - y = 0, \quad 2x + 3y = 0;$
б) $2x - y = 0, \quad 4x - 2y = 0.$

Решение. а) Так как для этой системы $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$, то система имеет только одно решение 0, 0.

б) Данная система имеет бесчисленное множество решений, так как в этом случае $\Delta = 0$.

§ 2. ОПРЕДЕЛИТЕЛИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА. ПОНЯТИЕ ОБ ОПРЕДЕЛИТЕЛЯХ n-го ПОРЯДКА

1. Определители третьего порядка. Рассмотрим таблицу, состоящую из девяти чисел:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Такие таблицы называются квадратными матрицами третьего порядка. Матрица (1) имеет три строки и три столбца. Элементы a_{ij} данной матрицы обозначены одной буквой с двумя индексами, где первый индекс указывает номер строки, в которой находится данный элемент, а второй — номер столбца. *Выражение*

$$\begin{aligned} \Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} \end{aligned} \tag{2}$$

называется определителем третьего порядка матрицы (1).

По аналогии с теорией определителей второго порядка определители третьего порядка матрицы (1) обозначаются так:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \text{ или } |A|. \tag{3}$$

Числа a_{11}, a_{12}, ... называются элементами определителя, а произведения из трех элементов, входящие в выражение (2), — его членами. Таким образом, определитель третьего порядка имеет девять элементов и шесть членов.

Чтобы запомнить выражение (2), воспользуемся одной из следующих схем:

$$\begin{array}{c} \\ \\ - \\ - \\ - \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ + \\ + \\ + \end{array}$$

или

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}.$$

В первой таблице под матрицей (1) выписаны первая и вторая строки той же матрицы, а во второй таблице справа от матрицы (1) приписаны первый и второй столбцы данной матрицы. С помощью каждой из этих таблиц можно получить все шесть членов определителя (3), если произведения элементов таблиц, соединенных точками, взять со знаком плюс, а штрихами — со знаком минус.

Пользуясь формулой (2), вычислим следующий определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 6 + 0\cdot 4\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot(-1) - 2\cdot 1\cdot 3 - \\ - 2\cdot 4\cdot(-1) - 0\cdot 2\cdot 6 = 10.$$

Подсчитаем его значение, пользуясь правилом, описанным выше. Воспользуемся первой таблицей:

$$\begin{array}{c} \\ \\ - \\ - \\ - \end{array} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{c} \\ \\ + \\ + \\ + \end{array} = 2\cdot 1\cdot 6 + 0\cdot 4\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot(-1) - \\ - 2\cdot 1\cdot 3 - 2\cdot 4\cdot(-1) - 0\cdot 2\cdot 6 = 10.$$

2. Миноры и алгебраические дополнения определителя третьего порядка. М и н о р о м M_{ij} элемента a_{ij} определителя Δ называется определитель матрицы, которая получится из матрицы (1), если в ней вычеркнуть строку и столбец, на пересечении которых находится элемент a_{ij}.

Например, минор M_{13} определителя (3) равен: $\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$. Этот минор получен из определителя Δ вычеркиванием первой строки и третьего столбца.

Точно так же получаем: $M_{22} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$. $M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$ и т. д.

А л г е б р а и ч е с к и м д о п о л н е н и е м A_{ij} элемента a_{ij} называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

Например, $A_{12} = -M_{12}$, $A_{22} = M_{22}$, $A_{23} = -M_{23}$.

Докажем следующую теорему.

Т е о р е м а 1. *Определитель* Δ *равен сумме произведений всех элементов любого столбца (строки) на их алгебраические дополнения, т. е.*

$$\left.\begin{aligned}\Delta &= a_{1i}A_{1i} + a_{2i}A_{2i} + a_{3i}A_{3i},\\ \Delta &= a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + a_{i3}A_{i3}.\end{aligned}\right\} \quad i = 1,\ 2,\ 3. \qquad (4)$$

Доказательство этой теоремы сводится к преобразованию выражения (2). В самом деле, рассмотрим доказательство теоремы для элементов первого столбца. Вынесем в выражении (2) элементы первого столбца за скобки, получим:

$$\Delta = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{21}(-a_{12}a_{33} + a_{32}a_{13}) + \\ + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}).$$

Нетрудно видеть, что выражения в скобках суть алгебраические дополнения элементов первого столбца. В самом деле,

$$a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = M_{11} = A_{11},$$

$$-a_{12}a_{33} + a_{32}a_{13} = -\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = -M_{21} = A_{21},$$

$$a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = M_{31} = A_{31}.$$

Итак, $\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$.

Предлагаем читателю самостоятельно убедиться в справедливости теоремы для остальных столбцов и строк.

Формулы (4) применяются для практического вычисления определителей третьего порядка. Выражения (4) называются р а з л о ж е н и е м (или р а с к р ы т и е м) определителя по элементам соответствующей строки или столбца.

3. Свойства определителей третьего порядка. Рассмотрим основные свойства определителей третьего порядка.

1°. *Определитель не меняет своего значения, если его строки заменить соответствующими столбцами.* Если ввести понятие т р а н с п о н и р о в а н и я матрицы третьего порядка по аналогии с теорией матриц второго порядка[1], то свойство 1° можно сформулировать несколько иначе: *значение определителя третьего порядка при транспонировании матрицы не меняется.* Для доказательства, применив одну из схем стр. 330 и 331, подсчитаем определители Δ и Δ^*, где:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta^* = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix};$$

[1] См. стр. 325.

$$\Delta = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - \\ - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32},$$

$$\Delta^* = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - \\ - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Отсюда следует, что $\Delta = \Delta^*$.

В силу свойства 1° и теоремы 1 свойства определителей третьего порядка, доказанные для столбцов, будут иметь место и для строк. Поэтому последующие свойства определителей будем доказывать только для столбцов.

2°. *Если в определителе Δ элементы некоторого столбца (строки) равны нулю, то определитель равен нулю.* В самом деле, пусть, например, в определителе (3) все элементы первого столбца равны нулю: $a_{11} = a_{21} = a_{31} = 0$. Раскрывая определитель по элементам этого столбца, получим:

$$\Delta = 0 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} = 0.$$

3° (свойство антисимметрии). *При перестановке двух любых столбцов (строк) в матрице* (1) *значение определителя этой матрицы умножается на* —1. Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad \Delta' = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{12} \\ a_{21} & a_{23} & a_{22} \\ a_{31} & a_{33} & a_{32} \end{vmatrix},$$

где Δ' получен из Δ перестановкой второго и третьего столбцов. Разложив каждый из определителей по элементам первого столбца, получаем:

$$\Delta = a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31},$$

$$\Delta' = a_{11}A'_{11} + a_{21}A'_{21} + a_{31}A'_{31}.$$

В силу свойства 3°, п. 2, § 1 имеем: $A_{11} = -A'_{11}$, $A_{21} = -A'_{21}$, $A_{31} = -A'_{31}$, откуда $\Delta = -\Delta'$.

4°. *Если у определителя соответствующие элементы двух столбцов (строк) равны, то определитель равен нулю.* В самом деле, пусть, например, соответствующие элементы двух первых столбцов определителя (3) равны. По свойству 3° имеем:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Учитывая, что $a_{11} = a_{12}$, $a_{21} = a_{22}$ и $a_{31} = a_{32}$, получим: $\Delta = -\Delta$, откуда $\Delta = 0$.

Пользуясь этим свойством, сформулируем следующее предложение.

5°. *Если элементы некоторого столбца (строки) умножить на алгебраические дополнения соответствующих элементов другого столбца (строки), то полученная сумма будет равна нулю.*

Возьмем определитель (3) и докажем, например, что сумма произведений элементов первого столбца на соответствующие алгебраические дополнения элементов второго столбца равна нулю. В самом деле,

$$S = a_{11}A_{12} + a_{21}A_{22} + a_{31}A_{32} =$$

$$= -a_{11}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{21}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{31}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Полученный определитель, очевидно, равен нулю, так как у него элементы первого столбца равны соответствующим элементам второго столбца. Другие случаи могут быть рассмотрены совершенно аналогично.

Прежде чем перейти к следующему свойству, введем следующие сокращенные обозначения для столбцов матрицы (1):

$$a_{*1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}, \quad a_{*2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{pmatrix}, \quad a_{*3} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях определитель (3) может быть записан так: $\Delta = |a_{*1}\ a_{*2}\ a_{*3}|$.

Введем следующие соглашения.

а) Произведением столбца a_{*i} на число λ будем называть столбец

$$\lambda a_{*i} = \begin{pmatrix} \lambda a_{1i} \\ \lambda a_{2i} \\ \lambda a_{3i} \end{pmatrix}.$$

б) Суммой двух столбцов a_{*i} и a_{*k} будем называть столбец

$$a_{*i} + a_{*k} = \begin{pmatrix} a_{1i} + a_{1k} \\ a_{2i} + a_{2k} \\ a_{3i} + a_{3k} \end{pmatrix}.$$

Аналогично определяется сумма нескольких столбцов.

в) Линейной комбинацией столбцов $a_{*1}, a_{*2}, a_{*3}, \ldots, a_{*k}$ называется столбец

$$b_* = \lambda_1 a_{*1} + \lambda_2 a_{*2} + \ldots + \lambda_k a_{*k}.$$

Например, если

$$a_{*1}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix},\quad a_{*2}=\begin{pmatrix}0\\1\\-5\end{pmatrix},\text{ то } 2a_{*1}+3a_{*2}=\begin{pmatrix}2+0\\4+3\\6-15\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\7\\-9\end{pmatrix}.$$

Линейное свойство определителей третьего порядка формулируется следующим образом.

6°. *Если j-й столбец a_{*j} определителя* (3) *есть линейная комбинация некоторых столбцов*

$$a_{*j}=\lambda_1 b_{*1}+\lambda_2 b_{*2}+\ldots+\lambda_k b_{*k},$$

то

$$\Delta=\lambda_1\Delta_1+\lambda_2\Delta_2+\ldots+\lambda_k\Delta_k,$$

где определители $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_k$ получены из исходного определителя заменой j-го столбца соответствующими столбцами линейной комбинации.

Для доказательства этого свойства предположим, например, что первый столбец определителя (3) есть линейная комбинация произвольных столбцов:

$$a_{*1}=\lambda_1 b_{*1}+\lambda_2 b_{*2}+\ldots+\lambda_k b_{*k}.$$

Тогда выражение определителя Δ, пользуясь теоремой 1, можно преобразовать следующим образом:

$$\begin{aligned}\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}&=a_{11}A_{11}+a_{21}A_{21}+a_{31}A_{31}=\\&=(\lambda_1b_{11}+\lambda_2b_{12}+\ldots+\lambda_kb_{1k})A_{11}+\\&+(\lambda_1b_{21}+\lambda_2b_{22}+\ldots+\lambda_kb_{2k})A_{21}+\\&+(\lambda_1b_{31}+\lambda_2b_{32}+\ldots+\lambda_kb_{3k})A_{31}=\\&=\lambda_1(b_{11}A_{11}+b_{21}A_{21}+b_{31}A_{31})+\\&+\lambda_2(b_{12}A_{11}+b_{22}A_{21}+b_{32}A_{31})+\ldots\\&\ldots+\lambda_k(b_{1k}A_{11}+b_{2k}A_{2k}+b_{3k}A_{3k})=\\&=\lambda_1\Delta_1+\lambda_2\Delta_2+\ldots+\lambda_k\Delta_k.\end{aligned}$$

Точно так же можно ввести понятие линейной комбинации строк и доказать аналогичное свойство относительно строк определителя.

Из этого свойства, полагая $k=1$, получаем.

7°. *Общий множитель всех элементов некоторого столбца (строки) можно вынести за знак определителя.*

Из свойств 4°, 6° и 7° получаем:

8°. *Определитель равен нулю, если какой-либо столбец (строка) есть линейная комбинация других столбцов (строк).*

9°. *Если к элементам некоторого столбца (строки) прибавить одну и ту же линейную комбинацию соответствующих элементов других столбцов (строк) определителя, то его значение не изменится.* В частности, определитель не меняет своего значения, если к элементам некоторого столбца (строки) прибавить элементы другого столбца (строки), умноженные на одно и то же число.

10°. *Если определитель равен нулю, то один из его столбцов (строк) является линейной комбинацией остальных столбцов (строк).* В самом деле, пусть $\Delta = 0$, где Δ — определитель (3). Докажем, что элементы некоторой строки являются линейными комбинациями остальных строк. Рассмотрим миноры M_{31}, M_{32} и M_{33} элементов третьей строки. Возможны два случая: а) все эти миноры равны нулю; б) хотя бы один из указанных миноров отличен от нуля. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

а) $M_{31} = M_{32} = M_{33} = 0$ или

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

Если $a_{12} = a_{13} = a_{11} = 0$, то утверждение справедливо, так как мы можем считать, что первая строка нашего определителя есть линейная комбинация остальных строк с нулевыми коэффициентами. Предположим, что $a_{12} \neq 0$. Тогда из соотношений $a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} = 0$ и $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$ получаем

$$a_{23} = \frac{a_{22}}{a_{12}} a_{13}, \quad a_{21} = \frac{a_{22}}{a_{12}} a_{11}.$$

Если ввести обозначение $\frac{a_{22}}{a_{12}} = \lambda$, то предыдущие соотношения можно записать так:

$$a_{23} = \lambda a_{13}, \quad a_{21} = \lambda a_{11}, \quad a_{22} = \lambda a_{12}.$$

Мы приходим к выводу, что элементы второй строки пропорциональны элементам первой строки.

б) Пусть, например, $M_{33} \neq 0$. Тогда система уравнений

$$\left.\begin{aligned} a_{31} &= a_{11}x + a_{21}y, \\ a_{32} &= a_{12}x + a_{22}y \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

согласно теореме 2 предыдущего параграфа имеет единственное решение x_0, y_0. К элементам третьей строки определителя Δ прибавим элементы первой строки, умноженные на число $-x_0$, и элементы второй строки, умноженные на число $-y_0$. При этом, как следует из свойства 9°, определитель Δ не меняет своего значения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} - a_{11}x_0 - a_{21}y_0 & a_{32} - a_{12}x_0 - a_{22}y_0 & a_{33} - a_{13}x_0 - a_{23}y_0 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как x_0, y_0 являются решением системы (5), то первые два элемента третьей строки равны нулю, поэтому, раскрывая определитель Δ по элементам третьей строки, получаем:

$$(a_{33} - a_{13}x_0 - a_{23}y_0)\,M_{33} = 0.$$

Так как $M_{33} \neq 0$, то $a_{33} = a_{13}x_0 + a_{23}y_0$.

Итак, если $M_{33} \neq 0$, то элементы третьей строки определителя являются линейной комбинацией соответствующих элементов первых двух строк. Свойство полностью доказано.

Объединяя свойства 8° и 10°, приходим к важной теореме.

Теорема 2. *Для того чтобы определитель третьего порядка был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы некоторый столбец (строка) этого определителя был линейной комбинацией остальных столбцов (строк).*

4. Практическое вычисление определителей третьего порядка. Для того чтобы вычислить определитель третьего порядка, можно пользоваться исходным определением, данным в формуле (2), или правилом, указанным на стр. 330—331. Однако вычисление определителей значительно упрощается, если воспользоваться доказанной выше теоремой 1 о разложении определителя по элементам некоторого столбца или строки. При этом вычисление определителя третьего порядка сводится к вычислению определителей второго порядка. Формула (4) показывает, что если все элементы данного i-го столбца равны нулю, за исключением одного, например a_{ij}, то

$$\Delta = a_{ij}\,A_{ij} = (-1)^{i+j}\,a_{ij}\,M_{ij}.$$

Таким образом, в данном случае вычисление определителя третьего порядка сводится к вычислению одного определителя второго порядка. Поэтому, пользуясь свойствами определителей, целесообразно сперва преобразовать определитель третьего порядка так, чтобы все элементы некоторого столбца или строки, за исключением, быть может, одного, обратились в нуль.

Рассмотрим несколько примеров вычисления определителей третьего порядка.

Пример 1. Вычислить определитель:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 7 & -2 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Первый способ. Разложим этот определитель по элементам первого столбца:

$$\Delta = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 6 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 0\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 7\cdot\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= (-1)\cdot 16 + 7(-2) = -30.$$

Второй способ. В определителе Δ элемент $a_{21} = 0$. Преобразуем этот определитель, не меняя его значения, так, чтобы еще один элемент первого столбца был равен нулю. Для этого умножим первую строку на 7 и прибавим к последней строке, получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 3 & 5 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 19 & 36 \end{vmatrix}.$$

Разложив этот определитель по элементам первого столбца, получаем:

$$\Delta = -1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 19 & 36 \end{vmatrix} = -30.$$

Пример 2. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 6 & 17 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}.$$

Решение. Преобразуем данный определитель, не меняя его значения, таким образом, чтобы все элементы третьего столбца, кроме элемента a_{33}, обратились в нуль. Для этой цели сначала умножим последнюю строку на 2 и прибавим ко второй строке, а затем умножим эту же строку на —5 и прибавим к первой строке. В результате получим:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 6 & 17 & -2 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 18 & 0 \\ 10 & 9 & 0 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & 18 \\ 10 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= -63 - 180 = -243.$$

5. Понятие об определителях n-го порядка. Понятие определителей второго и третьего порядков может быть естественным образом обобщено на случай определителей n-го порядка, где n — произвольное натуральное число.

Предварительно рассмотрим следующее вспомогательное понятие. Пусть

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \tag{6}$$

— некоторая перестановка чисел 1, 2, ..., n. Рассмотрим два числа α_i и α_j этой последовательности. Говорят, что числа α_i и α_j образуют инверсию или беспорядок, если большее из них расположено левее меньшего, т. е. если $i < j$, а $\alpha_i > \alpha_j$. В противном случае говорят, что числа α_i и α_j не образуют инверсии. Обозначим через $I(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ число всех беспорядков перестановки (6). Перестановка (6) называется четной, если $I(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ четное число, в противном случае она называется нечетной. Например, в перестановке 3, 2, 1, 4 имеется три инверсии (3, 2), (3, 1) и (2, 1), поэтому $I(3, 2, 1, 4) = 3$; перестановка является нечетной.

Пусть дана таблица, состоящая из n строк и n столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Такая таблица называется **квадратной матрицей** n-го **порядка**. Числа a_{ij} называются **элементами** этой матрицы; индекс i указывает на номер строки, а индекс j — на номер столбца, на пересечении которых расположен данный элемент.

Выберем из n^2 элементов матрицы (7) какие-либо n элементов так, чтобы они находились в разных строках и одновременно в разных столбцах. Это означает, что они берутся по одному из каждой строки и по одному из каждого столбца. Пусть $a_{\alpha_1 1}, a_{\alpha_2 2}, \dots, a_{\alpha_n n}$ — выбранные элементы. Составим произведения этих элементов:

$$a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \dots a_{\alpha_n n}. \tag{8}$$

Припишем этому произведению знак плюс, если перестановка $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ четная, и знак минус, если она нечетная. Другими словами, берется произведение вида

$$(-1)^{I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \dots a_{\alpha_n n}. \tag{9}$$

Введем следующее основное определение. *Определителем* Δ *матрицы* (7) *называется алгебраическая сумма, состоящая из* $n!$ *всевозможных произведений вида* (9)

$$\Delta = \sum_{1}^{n!} (-1)^{I(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} \dots a_{\alpha_n n}.$$

Произведения вида (9) называются **членами** определителя, а числа a_{ij} — элементами определителя. Определитель матрицы (7) обозначается следующим образом:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \text{или} \quad \Delta = \det a = \det(a_{ij}).$$

Из данного определения, например, следует, что определитель четвертого порядка содержит $4! = 24$ членов вида $(-1)^{I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} a_{\alpha_3 3} a_{\alpha_4 4}$, а определитель пятого порядка содержит $5! = 120$ членов вида

$$(-1)^{I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5)} a_{\alpha_1 1} a_{\alpha_2 2} a_{\alpha_3 3} a_{\alpha_4 4} a_{\alpha_5 5}.$$

Мы не будем останавливаться на формулировке и доказательстве свойств определителей n-го порядка, отметим лишь, что эти свойства в большинстве случаев являются прямым обобщением соответствующих свойств определителей второго и третьего порядков. В частности, имеет место теорема о разложении определителя по элементам некоторой строки или столбца, т. е. обобщение теоремы 1. Пользуясь этой теоремой, вычисление определителей n-го порядка можно свести к вычислению нескольких определителей $(n-1)$-го порядка.

Приведем пример вычисления определителя четвертого порядка.

Пример 3. Вычислить определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 65 & 114 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$$

Решение. Разложив этот определитель по элементам первого столбца, получаем:

$$\Delta = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 65 & 114 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} = -65 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 114 & 0 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= -65 \cdot 19 + 114 \cdot 5 = -665.$$

§ 3. СИСТЕМА ТРЕХ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ТРЕМЯ НЕИЗВЕСТНЫМИ

1. Система неоднородных линейных уравнений. Пусть даны три линейных уравнения с тремя неизвестными:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3. \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

Решить эту систему — это означает найти такие значения x_0, y_0 и z_0, при которых каждое из уравнений обращается в верное числовое равенство. Эти числа x_0, y_0, z_0 называются *решением системы*. Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение. При этом, если она имеет единственное решение, то называется *определенной*. Система, не имеющая ни одного решения, называется *несовместной*.

Так же как и в случае двух уравнений с двумя неизвестными, теория системы линейных уравнений с тремя неизвестными сводится к решению вопросов о совместности, определенности и к способам отыскания решений системы.

Введем следующие обозначения:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Этот определитель называется **определителем системы**.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_z = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Эти определители получены из определителя системы заменой в нем соответствующего столбца столбцом свободных членов.

Прежде чем перейти к решению и исследованию системы (1), докажем следующее вспомогательное предложение.

Лемма. *Если* x_0, y_0, z_0 — *решение системы* (1), *то*

$$x_0\Delta = \Delta_x, \quad y_0\Delta = \Delta_y, \quad z_0\Delta = \Delta_z. \tag{2}$$

Доказательство. Подставим x_0, y_0, z_0 в систему (1) и из полученных соотношений будем исключать члены, содержащие y_0 и z_0:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0 &= b_1, \\ a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 &= b_2, \\ a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0 &= b_3. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Умножив первое соотношение на A_{11}, второе — на A_{21} и третье — на A_{31} определителя Δ, получим:

$$\begin{aligned} a_{11}A_{11}x_0 + a_{12}A_{11}y_0 + a_{13}A_{11}z_0 &= b_1A_{11}, \\ a_{21}A_{21}x_0 + a_{22}A_{21}y_0 + a_{23}A_{21}z_0 &= b_2A_{21}, \\ a_{31}A_{31}x_0 + a_{32}A_{31}y_0 + a_{33}A_{31}z_0 &= b_3A_{31}. \end{aligned}$$

Сложим полученные соотношения:

$$(a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31})x_0 + (a_{12}A_{11} + a_{22}A_{21} + a_{32}A_{31})y_0 + \\ + (a_{13}A_{11} + a_{23}A_{21} + a_{33}A_{31})z_0 = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}.$$

Рассмотрим выражения, стоящие в скобках. Первая скобка получена умножением элементов первого столбца определителя системы на алгебраические дополнения этого же столбца. Эта сумма, как известно из теоремы 1, § 2, равна определителю системы. Вторая скобка есть сумма произведений элементов второго столбца на алгебраические дополнения соответствующих элементов первого столбца. Такая сумма в силу свойства 5°, § 2, равна нулю. В силу тех же причин третья скобка также равна нулю.

Выражение, находящееся в правой части последнего соотношения, равно Δ_x. В самом деле, раскрыв определитель Δ_x по элементам первого столбца, получаем:

$$\Delta_x = b_1\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - b_2\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + b_3\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} = \\ = b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}.$$

Таким образом получаем:

$$x_0\Delta = \Delta_x.$$

Умножая, далее, соотношения (3) на алгебраические дополнения сперва второго, а затем третьего столбцов, аналогично получаем:

$$y_0\Delta = \Delta_y \text{ и } \Delta_{z_0} = \Delta_z.$$

Лемма доказана.

Доказанная лемма в дальнейшем будет использована для исследования системы трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

2. Решение и исследование системы (1) при $\Delta \neq 0$. Так как $\Delta \neq 0$, то из (2) получаем:

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta}. \tag{2'}$$

Таким образом, если $\Delta \neq 0$ и x_0, y_0, z_0 — решение системы (1), то числа x_0, y_0, z_0 удовлетворяют соотношениям (2'). Отсюда следует, что система (1) при $\Delta \neq 0$ может иметь не более одного решения.

Теперь покажем, что при $\Delta \neq 0$ система (1) всегда совместна. В самом деле, числа

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta}$$

удовлетворяют этой системе, в чем легко убедиться непосредственной подстановкой. Покажем, например, что числа x_0, y_0, z_0 удовлетворяют первому уравнению системы. Подставив эти числа в левую часть первого уравнения системы (1), получаем:

$$a_{11}\frac{\Delta_x}{\Delta} + a_{12}\frac{\Delta_y}{\Delta} + a_{13}\frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}a_{11}(b_1A_{11} + b_2A_{21} + b_3A_{31}) +$$

$$+ \frac{1}{\Delta}a_{12}(b_1A_{12} + b_2A_{22} + b_3A_{32}) + \frac{1}{\Delta}a_{13}(b_1A_{13} + b_2A_{23} + b_3A_{33}) =$$

$$= \frac{b_1}{\Delta}(a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13}) + \frac{b_2}{\Delta}(a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23}) +$$

$$+ \frac{b_3}{\Delta}(a_{11}A_{31} + a_{12}A_{32} + a_{13}A_{33}) = b_1.$$

Здесь мы разложили определители Δ_x, Δ_y, и Δ_z по элементам тех столбцов, куда входят b_1, b_2 и b_3.

Точно так же можно показать, что числа x_0, y_0, z_0 удовлетворяют остальным уравнениям.

Мы пришли к следующей теореме.

Т е о р е м а 1. *Если определитель системы* (1) *отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое определяется по формулам* (2′).

Правило для отыскания решения системы (1), сформулированное в этой теореме, называется п р а в и л о м К р а м е р а.

П р и м е р 1. Найти решение следующей системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 2x + y - 3z = -9, \\ x - 4y - 2z = 3, \\ x + 6y - z = -14. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Вычислим определитель системы. Так как $\Delta = -1 \neq 0$, то система имеет единственное решение, которое находится по формулам (2′):

$$x_0 = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{1}{1} = 1, \quad y_0 = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-2}{1} = -2, \quad z_0 = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3.$$

3. Решение и исследование системы (1) при $\Delta = 0$. Из доказанной в п. 1 леммы непосредственно следует.

Т е о р е м а 2. *Если $\Delta = 0$, а хотя бы один из определителей Δ_x, Δ_y, Δ_z системы* (1) *отличен от нуля, то система не имеет ни одного решения.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. В самом деле, если $\Delta = 0$ и система (1) совместна, то, как следует из соотношений (2), $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0$. Теорема доказана.

Если $\Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = \Delta = 0$, то можно доказать, что в этом случае система (1) либо не имеет ни одного решения, либо имеет бесчисленное множество решений. Доказательство этого утверждения будет дано в следующем параграфе.

Рассмотрим примеры.

П р и м е р 2. Исследовать систему:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 3z = 1, \\ 4x + 8y - 6z = 2, \\ 6x - y = 0. \end{cases}$$

Р е ш е н и е. Легко видеть, что для данного примера

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0.$$

В данном случае система имеет бесчисленное множество решений. В самом деле, второе из уравнений системы, как легко заметить, есть следствие первого, поэтому данная система эквивалентна следующей системе:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 3z = 1, \\ 6x - y = 0. \end{cases}$$

Положив $z = t$, где t — произвольный параметр, мы получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} 2x + 4y = 1 + 3t, \\ 6x - y = 0. \end{cases}$$

Полученная система для каждого значения t имеет определенное решение, так как определитель системы отличен от нуля. Таким образом, исходная система имеет бесчисленное множество решений.

Пример 3. Исследовать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 4y - 3z = 1, \\ 4x + 8y - 6z = 1, \\ 3x + 6y - 9z = 2. \end{cases}$$

Решение. Непосредственным вычислением легко убедиться в том, что для данного примера мы имеем тот же случай:

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y = \Delta_z = 0.$$

Однако в отличие от предыдущего случая система не совместна, так как первые два уравнения этой системы не имеют ни одного решения.

Пример 4. Исследовать следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 1, \\ 2x + y - 12z = 0, \\ 3x - 2y - 11z = 0. \end{cases}$$

Решение. В данном случае $\Delta = 0$, а $\Delta_x = -35$, поэтому согласно теореме 2 система не совместна.

4. Решение и исследование системы трех однородных уравнений. Система (1) называется **однородной**, если $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, т. е. система линейных однородных уравнений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Предыдущая теория полностью применима для данного частного случая, однако в силу того, что $b_1 = b_2 = b_3 = 0$, некоторые теоремы будут формулироваться несколько иначе.

Прежде всего заметим, что система линейных однородных уравнений всегда совместна. В самом деле, числа 0, 0, 0 являются решением системы, независимо от значения коэффициентов системы (4). Это решение называется тривиальным. Таким образом, задача исследования системы однородных уравнений заключается в выяснении вопроса о том, когда система, кроме тривиального решения, имеет еще ненулевые решения.

Возможны два случая: $\Delta \neq 0$, $\Delta = 0$. Рассмотрим каждый из этих случаев в отдельности.

а) Если $\Delta \neq 0$, то к системе (4) применима теорема 1, поэтому имеет место следующая теорема.

Теорема 3. *Если определитель системы трех линейных однородных уравнений с тремя неизвестными не равен нулю, то система имеет только одно тривиальное решение.*

б) $\Delta = 0$. Докажем следующую теорему.

Теорема 4. *Если определитель системы трех линейных однородных уравнений с тремя неизвестными равен нулю, то система имеет бесчисленное множество решений.*

Доказательство. Пусть

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0.$$

Согласно теореме 2 предыдущего параграфа элементы некоторой строки определителя Δ являются линейными комбинациями соответствующих элементов остальных строк. Пусть, например,

$$a_{31} = \lambda a_{21} + \mu a_{11}, \quad a_{32} = \lambda a_{22} + \mu a_{12}, \quad a_{33} = \lambda a_{23} + \mu a_{13}.$$

Отсюда немедленно следует, что третье уравнение системы (4) является следствием первых двух уравнений. Поэтому система (4) эквивалентна следующей системе двух линейных уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0. \end{cases} \tag{5}$$

Исследуем полученную систему. Возможны два случая.

1) Числа a_{11}, a_{12}, a_{13} пропорциональны числам a_{21}, a_{22}, a_{23}. В этом случае, очевидно, одно из уравнений этой системы есть следствие другого уравнения, поэтому система (5) эквивалентна одному уравнению, которое имеет бесчисленное множество решений.

2) Числа a_{11}, a_{12}, a_{13} и a_{21}, a_{22}, a_{23} не пропорциональны. Например, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$. В этом случае предыдущую систему запишем в следующем виде:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = -a_{13}z, \\ a_{21}x + a_{22}y = -a_{23}z. \end{cases}$$

Придавая z произвольные значения, получаем вполне определенные значения для x и y, поэтому система (4) также имеет бесчисленное множество решений.

Пример 5. Исследовать следующую систему уравнений:

$$2x - 3y + 4z = 0,\ x + y - z = 0,\ 4x + y + z = 0.$$

Решение. Определитель этой системы равен 7, поэтому система имеет единственное тривиальное решение 0, 0, 0.

Пример 6. Исследовать систему уравнений:

$$3x + 4y - 7z = 0,\ x + y + 2z = 0,\ 5x + 6y - 3z = 0.$$

Решение. Определитель этой системы равен нулю. В силу доказанной выше теоремы эта система имеет бесчисленное множество решений. В самом деле, последнее уравнение есть следствие первых двух, так как, умножив второе уравнение на 2 и сложив с первым, получаем третье уравнение. Таким образом, задача сводится к исследованию системы двух уравнений:

$$\begin{cases} 3x + 4y - 7z = 0, \\ x + y + 2z = 0 \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} 3x + 4y = 7z, \\ x + y = -2z. \end{cases}$$

Положив $z = t$, получаем: $x = -15t$, $y = 13t$. Для каждого значения t получаем решение исходной системы. Таким образом, система имеет бесчисленное множество решений.

§ 4. РАНГ МАТРИЦЫ; ТЕОРЕМА О СОВМЕСТНОСТИ СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1. Прямоугольные и квадратные матрицы. В предыдущих параграфах было введено понятие матрицы второго и третьего порядков. Здесь мы обобщаем это понятие.

Пусть дана таблица вещественных чисел, состоящая из m строк и n столбцов:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Такие таблицы называются *прямоугольными матрицами* типа $m \times n$. Здесь m — число строк, а n — число столбцов. Числа a_{ij} называются *элементами* матрицы. Если $m = n$, то матрица называется *квадратной матрицей* n-го *порядка*.

2. Ранг матрицы. Для дальнейшего изложения необходимо ввести понятие ранга матрицы. Пусть дана матрица A типа $n \times k$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Если зафиксировать некоторое число p строк этой матрицы и столько же столбцов, то элементы, находящиеся на пересечении этих столбцов и строк, образуют квадратную матрицу p-го порядка. Определитель этой матрицы называется **минором** p-го **порядка матрицы** A. Очевидно, $p \leqslant \min(n, k)$[1]. Минорами первого порядка будут элементы матрицы. Например, для матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 0 & 5 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \\ 4 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

минорами второго порядка будут следующие определители:

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 0 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{и т. д.}$$

Первый из этих определителей составлен из элементов, находящихся на пересечении первой и второй строк с первым и третьим столбцами, второй определитель — вторым и третьим столбцами и третий определитель получен из элементов, находящихся на пересечении второй и четвертой строк с первым и четвертым столбцами. Для той же матрицы определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

является минором третьего порядка. Он образован из элементов, находящихся на пересечении первой, второй и четвертой строк и первого, третьего и четвертого столбцов.

Введем следующее важное определение. *Число r называется* ***рангом матрицы*** *A, если выполнены следующие условия.*

1. Матрица A имеет по крайней мере один минор r-го порядка, отличный от нуля.

2. Всякий минор матрицы A, имеющий порядок $r+1$ и выше (если вообще такие существуют), равен нулю.

Если все элементы матрицы равны нулю, то ранг матрицы считается равным нулю.

---

[1] Т. е. наименьшее из чисел n и k.

Всякий минор наивысшего порядка, отличный от нуля, называется б а з и с н ы м минором данной матрицы; столбцы и строки, из элементов которых составлен базисный минор, называются б а з и с н ы м и. Очевидно, у матрицы может быть несколько базисных миноров.

Если все миноры $(r+1)$-го порядка равны нулю, то, очевидно, будут равны нулю также все миноры более высокого порядка. В самом деле, возьмем произвольный минор $(r+2)$-го порядка и разложим его по элементам некоторого столбца. Очевидно, все коэффициенты при элементах этого столбца будут равны нулю, так как они являются алгебраическими дополнениями этих элементов, а алгебраические дополнения элементов минора $(r+2)$-го порядка являются минорами $(r+1)$-го порядка или отличаются от них знаком. Это замечание позволяет вычислить ранг матрицы, не вычисляя всех ее миноров. В самом деле, если удастся показать, что какой-то минор r-го порядка отличен от нуля, а все миноры $(r+1)$-го порядка равны нулю, то ранг матрицы равен r.

Однако такой путь определения ранга матрицы в ряде случаев также связан с вычислительными трудностями. Существует более эффективный способ вычисления ранга матрицы, основанный на элементарных преобразованиях матрицы.

Э л е м е н т а р н ы м и п р е о б р а з о в а н и я м и матрицы A называются следующие преобразования:

а) перестановка двух строк или столбцов;

б) умножение строки (или столбца) на произвольное, отличное от нуля число;

в) прибавление к одной строке (или столбцу) другой строки (столбца), умноженной на некоторое число;

г) вычеркивание строки (или столбца), целиком состоящей из нулей.

Можно показать, что *элементарные преобразования не меняют ранга матрицы*. Пользуясь этим замечанием, путем элементарных преобразований, упрощая матрицу, приводят ее к специальному виду, который позволяет непосредственно определить ранг матрицы без дополнительных вычислений.

П р и м е р 1. Определить ранг матрицы

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & 5 & 9\\ 0 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}.$$

Р е ш е н и е. Выполним некоторые элементарные преобразования этой матрицы, которые приводят матрицу к более простому виду. Для удобства дальнейшего изложения будем применять сокращенные обозначения для элементарных преобразований матриц. Смысл этих обозначений будет ясен из последующего:

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 4 & 5 & 9\\ 0 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\overset{\text{II}-2\cdot\text{I}}{\sim}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 7 & 7\\ 0 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}\overset{\text{IV}-\text{I}}{\sim}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & 7 & 7\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\sim$$

$$\overset{\text{II}\leftrightarrow\text{III}}{\sim}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 7 & 7\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\overset{\text{III}+7\cdot\text{II}}{\sim}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 2 & 2\end{pmatrix}\overset{\text{III}+2\cdot\text{II}}{\sim}\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}.$$

Знак волнистой линии означает, что матрица, записанная справа от этого знака, получена из предыдущей матрицы путем элементарных преобразований, причем над знаком указаны преобразования, которые выполнены. Например, II — 2·I означает, что из второй строки вычли первую строку, умноженную на 2, а II↔III означает перестановку соответствующих строк.

Итак, мы получили матрицу $\begin{pmatrix}2 & -1 & 1\\ 0 & -1 & -1\end{pmatrix}$, ранг которой равен рангу исходной матрицы. Легко видеть, что ранг этой матрицы равен двум, так как, например, $\begin{vmatrix}2 & -1\\ 0 & -1\end{vmatrix}\neq 0$. Итак, ранг исходной матрицы равен двум.

3. Теорема о базисном миноре. Для дальнейшего изложения нам необходимо доказать следующую теорему.

Теорема 1 (теорема о базисном миноре). *Любой столбец матрицы* (1) *является линейной комбинацией ее базисных столбцов*[1].

Доказательство. Для конкретности предположим, что базисный минор расположен в первых r строках и первых r столбцах этой матрицы. Таким образом, мы предполагаем, что

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr}\end{vmatrix}=M\neq 0.$$

[1] В § 2, п. 3 Приложения введено понятие линейной комбинации столбцов определителя третьего порядка (см. стр. 334). Понятие линейной комбинации столбцов матрицы (1) вводится совершенно аналогично.

Введем в рассмотрение следующий определитель $(r+1)$-го порядка:

$$D_{ks}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} & a_{1s} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} & a_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} & a_{rs} \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kr} & a_{ks} \end{vmatrix} \tag{2}$$

Здесь k принимает значения от 1 до m, а s — значения от 1 до n. Легко видеть, что для любых значений k и s имеем: $D_{ks}=0$. В самом деле, если $k\leqslant r$, то, очевидно, в определителе D_{ks} две строки совпадают, поэтому определитель равен нулю. Если $s\leqslant r$, то в определителе два столбца совпадают, поэтому определитель также равен нулю. Если, наконец, $k>r$ и $s>r$, то определитель D_{ks} является минором $(r+1)$-го порядка матрицы (1), поэтому он равен нулю. Итак, $D_{ks}=0$ при любых значениях k и s.

Разложив этот определитель по элементам последней строки, получаем:

$$D_{ks}=a_{k1}A_{k1}+a_{k2}A_{k2}+\ \dots+a_{kr}A_{kr}+a_{ks}M=0, \tag{3}$$

где A_{kj} являются алгебраическими дополнениями последней строки определителя D_{ks}, а M является базисным минором. Важно заметить, что алгебраические дополнения A_{kj} не зависят от числа k, так как они образованы из элементов первых r базисных строк определителя D_{ks}. Так как $M\neq 0$, то соотношение (3) можно разделить на M. Вводя новые обозначения для коэффициентов

$$C_1=-\frac{A_{k1}}{M},\quad C_2=-\frac{A_{k2}}{M},\quad \dots,\quad C_r=-\frac{A_{kr}}{M},$$

соотношение (3) приведем к следующему виду:

$$C_1a_{k1}+C_2a_{k2}+\dots+C_ra_{kr}=a_{ks}. \tag{4}$$

Полагая $k=1, 2, \dots, n$, получаем следующую систему соотношений:

$$\left.\begin{array}{l} C_1a_{11}+C_2a_{12}+\dots+C_ra_{1r}=a_{1s}, \\ C_1a_{21}+C_2a_{22}+\dots+C_ra_{2r}=a_{2s}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ C_1a_{n1}+C_2a_{n2}+\dots+C_ra_{nr}=a_{ns}. \end{array}\right\} \tag{5}$$

Эти равенства показывают, что s-й столбец матрицы (1) является линейной комбинацией первых r столбцов этой же матрицы с коэффициентами $C_1, C_2, \dots, C_r$. Поскольку s может быть любым столбцом от 1 до m, то теорема доказана полностью.

Точно так же может быть доказана аналогичная теорема для строк.

Теорема 2. *Любая строка матрицы* (1) *является линейной комбинацией ее базисных строк.*

П р и м е р 2. Рассмотрим матрицу:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \\ 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Выше (см. пример 1 на стр. 348) было показано, что ранг этой матрицы равен двум. В качестве базисного минора можно взять минор, образованный из элементов, стоящих на пересечении первых двух строк и первых двух столбцов. Согласно нашей теореме третий столбец является линейной комбинацией первых двух столбцов. Для того чтобы получить коэффициенты этой комбинации, рассмотрим вспомогательную матрицу, образованную из первых двух строк нашей матрицы

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 9 \end{pmatrix},$$

содержащих базисный минор исходной матрицы. Выразим элементы последнего столбца этой матрицы через первые два столбца. Для этого достаточно решить следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x - y = 1, \\ 4x + 5y = 9. \end{cases}$$

Это уравнение имеет единственное решение: $x = 1$, $y = 1$.

Таким образом, мы приходим к выводу, что последний столбец матрицы A является суммой первых двух столбцов этой матрицы. Непосредственной проверкой легко убедиться в том, что вывод соответствует действительности.

Т е о р е м а 3. *Пусть*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ и } A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} b_m \end{pmatrix}$$

— две матрицы соответственно рангов r и R, причем первые n столбцов этих матриц совпадают. Если последний столбец матрицы A' линейно выражается через остальные столбцы, то $r = R$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть M_r — базисный минор матрицы A. Так как этот же определитель является минором матрицы A', то $r \leqslant R$. Покажем, что все миноры $(r+1)$-го порядка матрицы A' равны нулю. В самом деле, пусть M_{r+1} — произвольный минор $(r+1)$-го порядка матрицы A'. Если в этот минор не входят элементы последнего столбца этой матрицы, то $M_{r+1} = 0$, так как ранг матрицы A равен r. Если в этот минор входят элементы последнего столбца матрицы A', то в силу линейного свойства определителей M_{r+1} можно представить как сумму n определителей

$(r+1)$-го порядка, каждый из которых, как нетрудно видеть, равен нулю. В самом деле, полученные определители либо имеют два пропорциональных столбца, либо отличаются от некоторого минора $(r+1)$-го порядка матрицы A числовым множителем. Отсюда следует, что все эти определители равны нулю, поэтому $M_{r+1}=0$. Мы приходим к выводу, что $k=r$. Теорема доказана.

4. Условие совместности общей системы линейных уравнений. В предыдущих параграфах мы подробно изучили вопрос о решении системы двух и трех линейных уравнений соответственно с двумя и тремя неизвестными. Здесь мы рассмотрим критерий совместности общей системы линейных уравнений с произвольным числом уравнений и неизвестных.

Пусть дана система, содержащая m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\left.\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m. \end{array}\right\} \tag{6}$$

Решить систему — это означает найти такие числовые значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$, при которых каждое из уравнений системы обращается в правильное числовое равенство. Система называется с о в м е с т н о й, если она имеет хотя бы одно решение, в противном случае она называется н е с о в м е с т н о й.

Для того чтобы сформулировать теорему о совместности системы уравнений (6), введем в рассмотрение следующие две матрицы:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \tag{7}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}. \tag{8}$$

Матрица (7) называется о с н о в н о й м а т р и ц е й или м а т р и ц е й с и с т е м ы, а матрица (8) — р а с ш и р е н н о й м а т р и ц е й с и с т е м ы (6). Теорема о совместности системы уравнений (6) формулируется следующим образом.

Т е о р е м а 4. *Система* (6) *совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы этой системы равен рангу основной матрицы.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Сначала допустим, что система (6) совместна, т. е. имеется хотя бы одно решение: $x_1=c_1$, $x_2=c_2, \ldots$

..., $x_n = c_n$. Подставив эти значения в каждое из уравнений системы (6), получаем правильные числовые равенства:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1n}c_n &= b_1, \\ a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2n}c_n &= b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ a_{m1}c_1 + a_{m2}c_2 + \cdots + a_{mn}c_n &= b_m. \end{aligned}\right\} \qquad (9)$$

Согласно теореме 3 матрицы (7) и (8) имеют один и тот же ранг.

Теперь допустим, что матрицы (7) и (8) имеют один и тот же ранг, докажем, что система (6) совместна. Пусть r — ранг матриц (7) и (8). Рассмотрим r базисных столбцов матрицы (7), они будут также базисными столбцами и матрицы (8). Таким образом, в матрице (8) существуют базисные столбцы, не содержащие последнего столбца. По теореме 1 последний столбец матрицы (8) является линейной комбинацией базисных столбцов, а следовательно, может быть представлен как линейная комбинация столбцов матрицы (7). Обозначив коэффициенты этой линейной комбинации через $c_1, c_2, \ldots, c_n$, мы приходим к выводу, что выполняются равенства (9). Таким образом, система совместна.

Доказанная теорема называется теоремой Кронекера — Капелли.

Применим доказанную теорему к исследованию систем двух и трех линейных уравнений с тремя неизвестными.

1. Система двух линейных уравнений с тремя неизвестными. Пусть дана система линейных уравнений:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= b_2, \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

причем хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля.

В данном случае матрицы (7) и (8) имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \text{ и } A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \end{pmatrix}.$$

Обозначим ранги этих матриц соответственно через r и R. Возможны следующие случаи:

а) $r = 2$. Так как матрица A включается в матрицу A', то $R = r$, поэтому система (10) совместна. Если, например, $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0$, то, положив $x_3 = t$, где t — произвольное вещественное число, мы получаем систему двух уравнений с двумя неизвестными, которая согласно теореме 2, § 1 Приложения имеет единственное решение.

Итак, для любого $x_3 = t$ система (10) имеет единственное решение. Это означает, что система (10) как система двух уравнений с тремя неизвестными имеет бесчисленное множество решений;

б) $r = R = 1$. Согласно только что доказанной теореме система (10) совместна. Так как $R = 1$, то в матрице A' согласно теореме 2 строки линейно зависимы. Это означает, что существует такое число λ, что

$$a_{11} = \lambda a_{21},\ a_{12} = \lambda a_{22},\ a_{13} = \lambda a_{23},\ b_1 = \lambda b_2.$$

Отсюда следует, что в системе (10) одно уравнение независимо, а второе является следствием первого. В таком случае система имеет бесчисленное множество решений, причем два неизвестных могут быть взяты произвольно, а третье определяется однозначно;

в) $r < R$. Согласно доказанной теореме система не совместна.

2. Система трех линейных уравнений с тремя неизвестными. Пусть дана система линейных уравнений (1), § 3 Приложения, причем хотя бы один из коэффициентов при неизвестных отличен от нуля.

В данном случае матрицы (7) и (8) имеют вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ и } A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3 \end{pmatrix}.$$

Обозначим через r ранг матрицы A, а через R ранг матрицы A'. Возможны следующие случаи:

а) $r = 3$. Тогда $|A| \neq 0$, поэтому $R = 3$, и система совместна. Согласно теореме 1, § 3 она имеет единственное решение.

б) $r = R = 2$. Согласно только что доказанной теореме система совместна. Так как $R = 2$, то в матрице A' две строки линейно независимы и согласно теореме 2 одна из строк линейно зависит от двух других. Это означает, что в системе (1), § 3 Приложения два уравнения независимы, а третье уравнение является следствием этих двух. Так как система двух совместных уравнений с тремя неизвестными, как было показано выше, имеет бесчисленное множество решений, то рассматриваемая система также имеет бесчисленное множество решений. В этом случае два уравнения из трех являются линейно независимыми, а третье уравнение является их следствием.

в) $r = R = 1$. Не вдаваясь в подробности, отметим, что и в этом случае система также совместна и имеет бесчисленное множество решений. Однако в отличие от случая б) одно уравнение является независимым, а два других зависят от него;

г) $r < R$. Согласно доказанной теореме система несовместна.

Пример 3. Исследовать систему:

$$x_1 + 2x_2 = 1,\ -x_1 + x_2 = 4,\ x_1 + 5x_2 = 3.$$

Решение. Матрицы (7) и (8) в данном случае имеют вид:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 5 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 4 \\ 1 & 5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Ранг первой матрицы равен двум, а расширенной матрицы — трем, поэтому система не совместна.

ОТВЕТЫ И УКАЗАНИЯ

2. Да. 4. а) $\{y, x, z\}$; б) $\{z, y, x\}$; в) $\{-x, z, y\}$. 5. $\{1, 0, 1\}$; $\{-1, 0, -1\}$, $\{1, 0, -1\}$; $\{-1, 0, 1\}$. 6. а) $\overline{OM}$, где M — середина отрезка AB; б) $\overline{ON}$, где N — середина отрезка BC; в) $\overline{AP}$, где P — середина отрезка OC. 7. а) Всегда; б) вектор $\boldsymbol{c}$ существует тогда, когда $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ не коллинеарны. 8. $\overline{AB}\ \{-1, 1, 0\}$, $\overline{BC}\ \{0, -1, 1\}$, $\overline{AC}\ \{-1, 0, 1\}$, $\overline{OK}\ \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right\}$, $\overline{OL}\left\{\frac{1}{2}, 0, 0\right\}$. 9. $\overline{CS}\ \{-2, 0, 2\}$, $\overline{AC}\ \{4, 2, 0\}$, $\overline{CA'}\ \{-3, -1, 1\}$, $\overline{O'A}\{-2, -2, -1\}$, $\overline{AS}\ \{2, 2, 2\}$, $\overline{AC'}\ \{3, 2, 1\}$, $\overline{BE'}\left\{0, -\frac{5}{2}, 1\right\}$, $\overline{AE'}\ \left\{2, \frac{3}{2}, 1\right\}$. 10. $\overline{CS}\ \{2, -4, -2\}$, $\overline{AC}\ \{-4, 4, 0\}$, $\overline{CA'}\{3, -4, -1\}$, $\overline{O'A}\ \{2, 0, 1\}$, $\overline{AS}\{-2, 0, -2\}$, $\overline{AC'}\{-3, 2, -1\}$, $\overline{BE'}\{0, 5, -1\}$, $\overline{AE'}\{-2, 1, -1\}$. 11. $\overline{AD_1}\{1, 1, 0\}$, $\overline{AC_1}\ \{1, 1, 1\}$, $\overline{DD_1}\ \{1, 0, 0\}$, $\overline{DE}\ \left\{\frac{1}{2}, 0, 1\right\}$, $\overline{DF}\ \left\{\frac{1}{2}, -1, 1\right\}$. 12. а) $\overline{FD}$; б) $\overline{CA_1}$; в) $\overline{CA}$; г) $\overline{BF}$; д) $\overline{AE}$. 13. $\begin{vmatrix}\beta_1 & \gamma_1\\ \beta_2 & \gamma_2\end{vmatrix}=0$. 14. а) $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_9$; б) $\boldsymbol{a}_4$; в) $\boldsymbol{a}_8$; г) $\boldsymbol{a}_6$; д) $\boldsymbol{a}_7$; е) $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_6$, $\boldsymbol{a}_9$; ж) $\boldsymbol{a}_3$, $\boldsymbol{a}_5$, $\boldsymbol{a}_8$, $\boldsymbol{a}_9$; з) $\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_4$, $\boldsymbol{a}_8$. 15. $\boldsymbol{p}_1\ \{2, 5, 0\}$, $\boldsymbol{p}_2\ \{-1, 2, 4\}$, $\boldsymbol{p}_3\ \{5, 5, -2\}$, $\boldsymbol{p}_4\ \{1, 2, -2\}$, $\boldsymbol{p}_5\ \left\{1, 2, \frac{3}{2}\right\}$, $\boldsymbol{p}_6\left\{1, \frac{1}{3}, -4\right\}$. 16. а) $\overline{B_1C_1} - 2\overline{EC_1} + \overline{CA} + \overline{AB_1} = \boldsymbol{0}$; б) $2\overline{FD} + \overline{AA_1} - 2\,\overline{AD} + 2\,\overline{AB} = \boldsymbol{0}$; в) $\overline{FE} - \overline{CE} + \overline{CD} - \overline{FD} = \boldsymbol{0}$. 17. б) $\boldsymbol{b}_1$ и $\boldsymbol{b}_2$; в) $\boldsymbol{c}_1$ и $\boldsymbol{c}_2$. 18. $\overline{OA_1}\ \{2, 3, -3\}$, $\overline{OA_2}\ \{-2, 3, 3\}$, $\overline{AA_1}\ \{0, 0, -6\}$, $\overline{AA_2}\ \{-4, 0, 0\}$. $\overline{A_1A_2} = \overline{A_1A} + \overline{AA_2}$; $\overline{A_1A_2}\ \{-4, 0, 6\}$. 19. Каждое из соотношений (6) следует из остальных двух в том и только в том случае, когда хотя бы одна из координат векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, не входящая в данное соотношение, отлична от нуля. Например, третье из соотношений (6) следует из первых двух в том и только в том случае, когда α_1 и α_2 одновременно не равны нулю. 22. A_1 лежит в плоскости Oxy, A_2 принадлежит оси Ox, A_3 — оси Oy, A_8 — оси Oz; A_4, A_5, A_6 и A_7 принадлежат соответственно четвертому, седьмому, третьему и восьмому октантам. 23. $E\ (0, 0, 1)$, $K\left(1, \frac{1}{2}, 1\right)$, $A\ (0, 0, 0)$, $B\ (1, 0, 0)$, $C\ (1, 1, 0)$, $D\ (0, 1, 0)$, $A_1\ (0, 0, 2)$, $B_1\ (1, 0, 2)$, $C_1\ (1, 1, 2)$, $D_1\ (0, 1, 2)$. 24. $D_1\ (8, 3, 0)$, $C_1\ (7, 7, 3)$, $B_1\ (3, 6, 3)$, $C\ (5, 4, 4)$. 26. $D\ (6, 5, 7)$. 27. Нет, так как точки $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(-3, -3, -3)$ коллинеарны, а вершины треугольника не коллинеарны. 28. Указание. Если точка имеет координаты x, y, z, то симметричная ей точка относительно оси Oz имеет координаты

$-x$, $-y$, z. **29.** Введем следующие обозначения: точку, симметричную точке A относительно начала координат, обозначим через A', точки, симметричные относительно осей Ox, Oy и Oz, — через A_1, A_2, A_3 и относительно координатных плоскостей Oxy, Oyz и Oxz — через A_{12}, A_{23}, A_{13}. Аналогичные обозначения введем для остальных точек. Тогда: $A'(-5, 1, -4)$, $B'(-7, 0, -5)$, $C'(1, 1, 1)$; $A_{12}(5, -1, -4)$, $B_{12}(7, 0, -5)$, $C_{12}(-1, -1, 1)$, $A_{13}(5, 1, 4)$, $B_{13}(7, 0, 5)$, $C_{13}(-1, 1, -1)$, $A_{23}(-5, -1, 4)$, $B_{23}(-7, 0, 5)$, $C_{23}(1, -1, -1)$; $A_1(5, 1, -4)$, $B_1(7, 0, -5)$, $C_1(-1, 1, 1)$, $A_2(-5, -1, -4)$, $B_2(-7, 0, -5)$, $C_2(1, -1, 1)$, $A_3(-5, 1, 4)$, $B_3(-7, 0, 5)$, $C_3(1, 1, -1)$. **30.** $x = \dfrac{m_1x_1 + m_2x_2}{m_1 + m_2}$, $y = \dfrac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2}$, $z = \dfrac{m_1z_1 + m_2z_2}{m_1 + m_2}$. **32.** $B_1(2, 1, -1)$, $B_2(1, 3, -5)$, $B_3(1, \sqrt{2}, -4)$. **33.** $M_1\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, 1\right)$, $M_2\left(\frac{5}{2}, \frac{13}{2}, \frac{9}{2}\right)$, $M_3\left(\frac{9}{5}, 3, \frac{12}{5}\right)$.

34. Если M_1, M_2, M_3 — середины данных отрезков, то $M_1\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right)$, $M_2\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}, 0, -2\right)$, $M_3\left(2, 2, -\frac{9}{2}\right)$. **35.** Середины трех данных отрезков лежат на оси Ox. **36.** а); в). **40.** Систему координат выбрать так, чтобы начало совпало с точкой A и $\overline{AB} = e_1$, $\overline{AC} = e_2$, $\overline{AD} = e_3$. Если в этой системе $S(\lambda, 0, 0)$, то середины отрезков AD, BC, SD и SC будут иметь соответственно координаты $M_1\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$, $M_2\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$, $M_3\left(\frac{\lambda}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, $M_4\left(\frac{\lambda}{2}, \frac{1}{2}, 0\right)$. Далее показать, что векторы $\overline{M_1M_2}$, $\overline{M_1M_3}$ и $\overline{M_1M_4}$ линейно зависимы. **41.** Систему координат выбрать так, как в задаче 4 из § 3, и учесть, что в этой системе точки пересечения диагоналей имеют координаты: $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. **42.** См. решение задачи 5 из § 3. **43.** Доказать, что четырехугольник, образованный из середин сторон пространственного четырехугольника, является составным. **44.** Эта задача является обобщением задачи 43 и задачи 6 на стр. 38. См. решение задачи 6. **45.** Если систему координат выбрать так, как в задаче 7 на стр. 39, то вершины шестиугольника будут иметь координаты: $A_1(1, 0, 0)$, $A_2(0, 1, 0)$, $A_3(0, 0, 1)$, $A_4(-1, 0, 1)$, $A_5(0, -1, 1)$, $A_6(0, 0, 0)$. Далее, обозначив через λ отношение, в котором точки P, Q и R делят диагонали, вычислить координаты этих точек и показать, что векторы $\overline{PQ}$ и $\overline{PR}$ не коллинеарны. **47.** Ввести в рассмотрение радиус-векторы или координаты рассматриваемых точек и, пользуясь ими, доказать, что точка M, делящая отрезок A_1C_1 в отношении μ, совпадает с точкой N, делящей отрезок D_1B_1 в отношении λ. **48.** См. решение задачи 7 на стр. 39. Для плоского шестиугольника указанное свойство, вообще говоря, не справедливо. См. рис. 20. **49.** $\text{Пр}_u \overline{AD'} = 0$, $\text{Пр}_u \overline{C'A'} = -2$, $\text{Пр}_u \overline{C'B} = 0$, $\text{Пр}_u \overline{DC'} = 2$, $\text{Пр}_u \overline{CA'} = -2$. **50.** $\text{Пр}_u \boldsymbol{a} = -\text{Пр}_{-u} \boldsymbol{a}$. Проекции вектора на данные оси равны тогда и только тогда, когда вектор $\boldsymbol{a}$ перпендикулярен к прямой l. **51.** Если $\{l, \boldsymbol{u}\}$ — данная ось, то $\text{Пр}_u \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}| \cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}})$; $|\text{Пр}_u \boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{a}| |\cos(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{u}})| \leqslant |\boldsymbol{a}|$. Но $|\boldsymbol{a}| \leqslant 2r$, поэтому $|\text{Пр}_u \boldsymbol{a}| \leqslant 2r$. **52.** 1. **53.** $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. **55.** Воспользоваться теоремой [4. 4]. Углы $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}})$ и $(\widehat{\boldsymbol{d}, \boldsymbol{e}})$ — прямые, $(\widehat{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{d}})$ и $(\widehat{\boldsymbol{c}\ \boldsymbol{d}})$ — тупые, остальные — острые. **56.** $\boldsymbol{ab} = 2 - \sqrt{2}$, $\boldsymbol{ac} = 0$, $\boldsymbol{ad} = 2$, $\boldsymbol{bc} = -24 + 2\sqrt{2}$, $\boldsymbol{bd} = -9$, $\boldsymbol{cd} = 11$. **57.** а) -12; б) 2; в) 6; г) -49; д) 89. **58.** $\boldsymbol{x}\{-4, -6, 4\}$. **61.** Докажем от противного. Пусть $\Delta = 0$. Тогда какая-либо строка есть линейная комбинация остальных. Пусть, например, $\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_1 = \lambda\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_1 + \mu\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_2 = \lambda\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_2 + \mu\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2$, $\boldsymbol{a}_3\boldsymbol{a}_3 = \lambda\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{a}_3 + \mu\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_3$. Если положить $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{a}_3 - \lambda\boldsymbol{a}_2 - \mu\boldsymbol{a}_1$, то предыдущие соотношения запишутся так: $pa_1 = 0$, $pa_2 = 0$, $pa_3 = 0$. Отсюда следует, что $p = 0$, т. е. векторы a_1, a_2, a_3 компланарны (см. задачу 60). **62.** Пусть $a = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$. Тогда данные в условиях задачи соотношения запишутся так: $x_1e_1e_1 + x_2e_1e_2 + x_3e_1e_3 = \alpha_1$, $x_1e_2e_1 + x_2e_2e_2 + x_3e_2e_3 = \alpha_2$, $x_1e_3e_1 + x_2e_3e_2 + x_3e_3e_3 = \alpha_3$. Далее следует использовать результат предыдущей задачи. **63.** Если $e_ie_j = g_{ij}$, α_1, α_2, α_3 — ковариантные координаты, а x_1, x_2, x_3 — обычные, то $\alpha_1 = x_1g_{11} + x_2g_{21} + x_3g_{31}$, $\alpha_2 = x_1g_{12} + x_2g_{22} + x_3g_{32}$, $\alpha_3 = x_1g_{13} + x_2g_{23} + x_3g_{33}$. Соответствующие координаты для любого вектора совпадают тогда и только тогда, когда $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$; $g_{ij} = 0$, если $i \neq j$, т. е. когда базис прямоугольный декартовый. **65.** а) $\frac{15}{2\sqrt{91}}$; б) 0. **66.** 30°, 60°, 90°. **67.** $\cos\varphi = \frac{4}{5}$. **68.** $\overline{BH}\{-3, -3, 1\}$, $\sqrt{19}$. **69.** $\overline{OH}\left\{\frac{1}{3}, -\frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right\}$. **70.** Доказательство. Пусть вектор $p = a + b$ направлен вдоль биссектрисы угла $(\widehat{a, b})$. Тогда $\angle(a, a+b) = \angle(a+b, b)$ или $\cos[\widehat{a, (a+b)}] = \cos[\widehat{(a+b), b}]$, откуда $\frac{a(a+b)}{|a||a+b|} = \frac{(a+b)b}{|b||a+b|}$, $|b|a(a+b) = |a|(a+b)b$, $|b|(a^2 + ab) = |a|(ab + b^2)$, $|b||a|^2 - |a||b|^2 = ab(|a| - |b|)$, $|a||b|(|a| - |b|) = (ab)(|a| - |b|)$. Окончательно получаем: $(|a| - |b|) \times [(ab) - |a||b|] = 0$. Так как векторы a и b не коллинеарны, то $ab - |a||b| \neq 0$, поэтому из предыдущего соотношения получаем: $|a| = |b|$.

Докажем обратное предложение. Пусть $|a| = |b| = \alpha$, $\angle(a, a+b) = \varphi_1$ и $\angle(b, a+b) = \varphi_2$. Докажем, что $\varphi_1 = \varphi_2$. Из определения скалярного произведения, имеем: $a(a+b) = |a||a+b|\cos\varphi_1$; $b(a+b) = |b||a+b|\cos\varphi_2$. Таким образом, в силу условия $|a| = |b|$ получаем: $a(a+b) = a^2 + ab$, $b(a+b) = ba + b^2$; $a(a+b) = b(a+b)$. Из предыдущих соотношений следует, что $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$. Так как $\varphi_1 < \pi$ и $\varphi_2 < \pi$, то $\varphi_1 = \varphi_2$. **71.** $\left\{\frac{19}{15}, \frac{22}{15}, \frac{1}{3}\right\}$. **72.** 60°. **73.** а) Геометрическое место концов векторов x, приложенных к началу координат, есть сфера с центром в точке $(0, -2, 0)$ и радиуса $R = \sqrt{3}$; б) нет решений. **76.** а) Если a и b не коллинеарны, то задача не имеет решений. Если a и b коллинеарны, то, положив $a = \lambda b$, получаем: $\lambda bx^2 + (bb)b = 0$, $b(\lambda x^2 + bb) = 0$. Так как $b \neq 0$, то $\lambda x^2 + bb = 0$ или $x^2 + \frac{bb}{\lambda} = 0$. Мы получили векторное квадратное уравнение; б) $x = |a|^{-\frac{2}{3}} a$. Решение. Пусть a_0 — единичный вектор направления a, а x_0 — единичный вектор искомого направления. Тогда данное уравнение приводится к следующему: $x_0|x|^3 = a_0|a|$. Отсюда следует, что $|x|^3 = |a|$, $x_0 = a_0$; $|x| = \sqrt[3]{|a|}$, $x = x_0|x| = a_0\sqrt[3]{|a|} = a|a|^{-\frac{2}{3}}$. **77.** а) Левую, левую, правую, левую, правую; б) правую, правую, левую; в) левую, правую, правую. **78.** а) Правая; б) правая; в) правая; г) левая; д) левая. **79.** а) Левая; б) правая; в) левая; г) левая; д) левая. **80.** а) $-\frac{3}{2}$; б) -3; в) -3; г) $\frac{9}{4}$, д) 3; е) -33. **81.** 1) $-\frac{2}{3}\sqrt{3}\,\overline{SO}$; 2) $\frac{4}{3}\sqrt{3}\,\overline{SO}$; 3) $-\frac{2}{3}\sqrt{3}\,\overline{SO}$; 4) $-\frac{4}{3}\sqrt{3}\,\overline{SO}$; 5) $2\sqrt{3}\,\overline{SO}$. **82.** а) $\{-4, 11, -1\}$; б) $\{-4, -7, 5\}$; в) $\{-8, 16, 0\}$; г) $\{4, 7, -5\}$; д) $\{4, -3, 1\}$; е) $\{4, 13, 1\}$. **83.** а) $\sqrt{754}$;

б) $\sqrt{437}$; в) $\sqrt{58}$. **84.** а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3758}}{2}$; в) $\sqrt{54}$. **85.** Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$ компланарны. **87.** а) $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ коллинеарны; б) $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ коллинеарны. **88.** а) $\{-3, 21, -15\}$; б) $\{-7, -6, 10\}$; в) $\{10, 11, 17\}$. **93.** а) $\{15, -3, -14\}$; б) $\{0, 0, 0\}$; в) $\{-3, 11, 9\}$. **95.** $\boldsymbol{x} = \frac{\alpha\boldsymbol{a} + [\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]}{\boldsymbol{a}^2}$. Решение. Второе уравнение разрешимо только в том случае, когда $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} \neq 0$. Возьмем вспомогательный единичный вектор $\boldsymbol{c}$, перпендикулярный к плоскости векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ так, чтобы $\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c} > 0$. Разложим искомый вектор $\boldsymbol{x}$ по реперу $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$, векторы которого взаимно перпендикулярны: $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a} + x_2\boldsymbol{b} + x_3\boldsymbol{c}$. Подставив значение $\boldsymbol{x}$ в данное уравнение, получаем: $x_1(\boldsymbol{a}\boldsymbol{a}) = \alpha$; $x_2[\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}] + x_3[\boldsymbol{c}\boldsymbol{a}] = \boldsymbol{b}$. Отсюда получаем: $x_1 = \frac{\alpha}{\boldsymbol{a}^2}$. Умножив второе уравнение скалярно на $\boldsymbol{c}$, получаем: $x_2(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}) + x_3(\boldsymbol{c}\boldsymbol{a}\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{b}\boldsymbol{c}$, отсюда $x_2 = 0$. Для определения x_3 умножим второе соотношение скалярно на $\boldsymbol{b}$. Получим: $x_2(\boldsymbol{b}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) + x_3(\boldsymbol{c}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}^2$ или $x_3(\boldsymbol{c}\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{b}^2$. Так как $(\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}\boldsymbol{c}) = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$, то $x_3 = \frac{|\boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}|}$. Учитывая, что $\boldsymbol{c} = \frac{[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]}{|[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]|} = \frac{[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]}{|\boldsymbol{a}|\cdot|\boldsymbol{b}|}$, окончательно получаем решение: $\boldsymbol{x} = x_1\boldsymbol{a} + x_2\boldsymbol{b} + x_3\boldsymbol{c} = \frac{\alpha}{\boldsymbol{a}^2}\boldsymbol{a} + \frac{[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]}{|\boldsymbol{a}|^2} = \frac{\alpha\boldsymbol{a} + [\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}]}{\boldsymbol{a}^2}$. Непосредственной подстановкой убеждаемся в том, что найденный вектор $\boldsymbol{x}$ является решением исходной системы. Таким образом, при $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{a} \neq 0$ система имеет единственное решение. Если хотя бы одно из условий $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ или $\boldsymbol{a} \neq 0$ не выполняется, то система не имеет решений. **96.** а) $S = \sqrt{51}$; б) $\cos A = \frac{7}{10}$, $\cos B = -\frac{3}{2\sqrt{15}}$, $\cos C = \frac{18}{5\sqrt{15}}$; в) $BH = \frac{\sqrt{102}}{5}$, $\overline{BH}\left\{-\frac{29}{25}, \frac{7}{5}, \frac{22}{25}\right\}$; г) $\boldsymbol{a}\{8, 5, -9\}$; д) $M\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}, 0\right)$. **97.** а) $S = \frac{75}{2}$; б) $\cos A = 0$, $\cos B = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos C = \frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos D = 0$; в) $\boldsymbol{a}\{-3, 4, 5\}$; г) $\overline{BH}\left\{\frac{3}{5}, -\frac{4}{5}, 2\right\}$; д) $M\left(-\frac{1}{4}, 0, \frac{7}{2}\right)$. **98.** $S = 2\sqrt{2}$, $\boldsymbol{h}\{t, t, 0\}$, где t — произвольный числовой параметр. **99.** Векторы $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{c}$ компланарны. **102.** Если положить $[\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}] = \boldsymbol{p}$, то данное уравнение сводится к следующему: $\boldsymbol{p}\boldsymbol{x} = \alpha$. Решение этого уравнения (см. п. 6, § 5). **104.** а) $\frac{3}{2}$; б) $\frac{45}{2}$. **105.** а) $V = 12$; б) $S_{ABCD} = 2\sqrt{26}$, $S_{ABB'A'} = \sqrt{626}$, $S_{ADD'A'} = \sqrt{338}$; в) $h = \frac{6}{\sqrt{26}}$; г) $\cos\varphi_1 = \frac{4}{5\sqrt{10}}$; д) $\cos\varphi_2 = \frac{46}{13\sqrt{13}}$. **106.** а) $V = \frac{17}{2}$; б) $S_{ABC} = \frac{\sqrt{17}}{2}$, $S_{ABB'A'} = \sqrt{34}$, $S_{ACC'A'} = \sqrt{357}$, $S_{BCC'B'} = \sqrt{561}$; в) $h = \sqrt{17}$; г) $\cos\varphi = 0$. **107.** а) $V = \frac{8}{3}$; б) $S_{ABC} = 4$, $S_{ACD} = 5$, $S_{ABD} = 2\sqrt{5}$, $S_{BCD} = \sqrt{17}$; в) $h = 2$; г) $\cos\varphi_1 = \frac{\sqrt{17}}{17}$; д) $\varphi_2 = \frac{\pi}{2}$. **112.** Середину нижнего основания принять за начало прямоугольной декартовой системы координат; одну из осей системы направить по нижнему основанию. Найти в данной системе координаты векторов, направленных по диагоналям трапеции, и вычислить угол между ними. **115.** Положить $\overline{OA} = \boldsymbol{a}$, $\overline{OB} = \boldsymbol{b}$, $\overline{OC} = \boldsymbol{c}$. **116.** Взять единичные векторы вдоль прямых l, AB, AC и BC и рассмотреть их

скалярные произведения. **118.** Если M и M' — середины двух противоположных ребер, длины которых равны a и a', а b, c, b', c' — длины остальных четырех ребер, то $MM'^2 = \frac{1}{4}(b^2 + c^2 + b'^2 + c'^2 - a^2 - a'^2)$. **119.** $\frac{1}{3}$.
122. A_2, A_4, A_5. **123.** $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$; $x - 1 = 0$, $y + 3 = 0$, $z - 2 = 0$. **124.** а) $x - y + 2z - 8 = 0$; б) $x + 4y + 2 = 0$; в) $4x + 7y - 4z - 19 = 0$; г) $5x - 4y + 3z - 2 = 0$. **125.** а) $3y - 2z = 0$; б) $y = 0$; в) $4x + 3z = 0$. **126.** $9y - 2z - 17 = 0$, $9x + z + 4 = 0$, $2x + y - 1 = 0$. **127.** а) $2x - 3y - z + 6 = 0$, $x - 12y - 4z + 17 = 0$, $4x - 6y + 5z + 5 = 0$, $3x - y + 2z - 5 = 0$; б) $x + 2y + 3z - 11 = 0$, $5x + 3y + z + 1 = 0$, $10x - 15y + 2z + 2 = 0$, $10x - 15y + 2z + 23 = 0$, $5x + 3y + z - 20 = 0$, $x + 2y + 3z - 4 = 0$; в) $2x - 3y - z - 1 = 0$, $x - 12y - 4z + 38 = 0$, $4x - 6y + 5z - 16 = 0$, $3x - y + 2z + 2 = 0$. **128.** $\frac{x}{-5} + \frac{y}{\frac{5}{3}} + \frac{z}{-\frac{5}{4}} = 1$. **129.** $\frac{x}{-3} + \frac{y}{2} + \frac{z}{\frac{1}{4}} = 1$. **130.** $x + y + z - 5 = 0$, $x - y - z + 7 = 0$, $x - y + z - 1 = 0$, $x + y - z + 3 = 0$. **131.** $2x - 3y - 6z - 6 = 0$, $6x + 3y - 2z - 18 = 0$. **132.** $x = 1 + 2\lambda - 3\mu$, $y = -3 + 2\mu$, $z = 5 + 4\lambda + \mu$. **134.** Плоскости принадлежат точки M_1, M_3 и M_5. **135.** а) $(2, 10, 0)$; б) $M_1(-3, 0, 0)$, $M_2(0, 6, 0)$, $M_3(0, 0, -2)$. **136.** a_2, a_3, a_4, a_6. **138.** а) $M_1(4, 0, 0)$, $M_2(0, -8, 0)$, $M_3\left(0, 0, \frac{8}{5}\right)$; б) $M_1(-4, 0, 0)$, $M_2(0, -4, 0)$, $M_3\left(0, 0, \frac{2}{3}\right)$; в) $M_1\left(\frac{8}{3}, 0, 0\right)$, $M_2(0, 8, 0)$, точки M_3 не существует, так как плоскость параллельна оси Oz; г) $M_1(5, 0, 0)$, $M_2\left(0, -\frac{5}{2}, 0\right)$, $M_3(0, 0, 5)$; д) $M_1(-4, 0, 0)$, точки M_2 не существует, так как плоскость параллельна оси Oy, $M_3\left(0, 0, \frac{4}{3}\right)$; е) $M_1(0, 0, 0)$, точки M_2 не существует, так как плоскость проходит через ось Oy; $M_3(0, 0, 0)$; ж) $M_1(0, 0, 0)$, $M_2(0, 0, 0)$, $M_3(0, 0, 0)$; з) $M_1\left(\frac{8}{3}, 0, 0\right)$, точек M_2 и M_3 не существует. **139.** а) Параллельна оси Ox; б) параллельна координатной плоскости Oxy; в) содержит ось Oy; г) параллельна оси Oz; д) параллельна оси Oy; е) содержит ось Oz; ж) параллельна координатной плоскости Oyz; з) совпадает с плоскостью Oxz; к) параллельна координатной плоскости Oxz. **141.** Совпадают пары плоскостей а) и в). **142.** а) Плоскости пересекаются; б) плоскости параллельны; в) плоскости пересекаются; г) плоскости параллельны; д) плоскости пересекаются. **143.** Две плоскости параллельны, третья их пересекает. **144.** $(2, -1, 1)$. **147.** а) Плоскости пересекаются в точке $M(1, 1, 1)$; б) плоскости принадлежат одному пучку; в) плоскости пересекаются по параллельным прямым; г) две плоскости параллельны, третья их пересекает. **148.** $(1, 0, 1)$. **149.** Плоскости будут пересекаться в одной точке, лежащей в плоскости Oxy в том и только в том случае, когда

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} \neq 0 \text{ и } \begin{vmatrix} A_1 & B_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & D_3 \end{vmatrix} = 0.$$

150. а) Либо $C_1 = C_2 = D_1 = D_2 = 0$, либо один из коэффициентов C_1 и C_2 отличен от нуля и

$$\begin{vmatrix} C_1 & D_1 \\ C_2 & D_2 \end{vmatrix} = 0; \text{ б) } \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix} = 0, \begin{vmatrix} B_1 & D_1 \\ B_2 & D_2 \end{vmatrix} = 0.$$

151. а) $7x - 5y + z = 0$; б) $2x + y + 3z = 0$; в) $z = 0$; г) $3x + 4z = 0$. **152.** а) $x + y + z - 2 = 0$; б) $3x - y + 3z - 2 = 0$; в) $2x - z - 8 = 0$; г) $y - 1 = 0$. **153.** а) $5x + y + 4z = 0$; б) $5x - 2y + 7z - 10 = 0$; в) $3x + 3y + 8 = 0$; г) $3y - 3z + 10 = 0$. **154.** $x + 2y - 5z + 2 = 0$.

155. $A(x+1)+B(y-5)+C(z-2)=0$. 157. $2x+y+z-4=0$. 158. $x+2y-4z+7=0$. 159. $\alpha(8x+5z+1)+\beta(x+5y-8)+\gamma(8y-z+5)=0$. 160. а) $x-4z=0$; б) $3x+y-2z=0$; в) $2x+y=0$; г) $3x+5y+z=0$. 161. а) $x+3y-4z+20=0$; б) $2x+y+7z-30=0$; в) $2x-3y+z+4=0$; г) $3x-z+14=0$. 162. $x-2y+3z-9=0$. 163. а) $n\{3,-1,1\}$; б) $n\{1,1,-1\}$; в) $n\{1,0,-3\}$. 164. а); в). 165. $2x-5y+3z-7=0$, $5x+2y-8=0$. 166. $10x+5y-7z-8=0$, $5x+2y-4z+6=0$, $y+z-20=0$. 167. $5x+12y+25z+3=0$. 168. $x+4y+z=0$. 169. $5x-4y-15z+75=0$. 170. $x+y+1=0$, $x-2z+7=0$, $y+2z-6=0$. 171. а) $-\frac{1}{3}x-\frac{2}{3}y+\frac{2}{3}z-3=0$; б) $-\frac{3}{7}x+\frac{6}{7}y-\frac{2}{7}z-6=0$; в) $-x-\frac{3}{2}=0$; г) $\frac{1}{\sqrt{11}}x-\frac{3}{\sqrt{11}}y+\frac{1}{\sqrt{11}}z=0$; д) $\frac{6}{\sqrt{61}}x-\frac{5}{\sqrt{61}}y-\frac{7}{\sqrt{61}}=0$; е) $\frac{1}{\sqrt{10}}x+\frac{3}{\sqrt{10}}z-\frac{1}{\sqrt{10}}=0$.
172. а) $\frac{8}{\sqrt{35}}$; б) $\frac{18}{\sqrt{361}}$. 173. а) $\frac{23}{\sqrt{62}}$; б) $\frac{8}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{2}{\sqrt{5}}$. 174. а) 10; б) 11; в) $3\sqrt{3}$; г) $5\sqrt{3}$. 175. $P_1\left(\frac{6+3\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right)$, $P_2\left(\frac{6-3\sqrt{3}}{2}, 0, 0\right)$.
176. $M_1(0,0,0)$, $M_2(0,6,0)$. 177. $3x-2y+6z=0$, $3x-2y+6z-70=0$. 178. $3x+7=0$, $3x+25=0$. 179. а) $2x-y+3z-7=0$; б) $x-4y+5z-6=0$; б) $x+y-z+12=0$. 180. $5x+7y-17z+22=0$; $x-y-z+2=0$. 181. а) $x+4y-2z+1=0$; б) $6x-y+z+3=0$. 182. $6x+3y+2z+28=0$, $6x+3y+2z-14=0$. 183. а) $\alpha=\arccos\frac{1}{3}$; б) $\alpha=90°$. 184. а) P_1, P_2, P_4, P_6; б) P_1, P_2, P_4; в) P_1, P_3, P_4, P_5, P_6; г) P_2, P_3, P_5, P_6. 185. а) $\lambda_1=\frac{7}{5}$. Точки A_1 и A_2 лежат по разные стороны от плоскости; б) $\lambda_2=-\frac{7}{8}$. Точки B_1 и B_2 лежат по одну сторону от плоскости; в) $\lambda_3=\frac{6-3\sqrt{2}}{10}$. Точки C_1 и C_2 лежат по разные стороны от плоскости; г) $\lambda_4=-\frac{7}{5}$. Точки D_1 и D_2 лежат по одну сторону от плоскости. 186. Сторона AC пересекается всеми координатными плоскостями. 187. $x-10y+4z-17<0$, $7x+18y+6z-31<0$, $x+y+4z-6>0$, $3x+3y+z-7>0$. 188. $5x-y+2z-3>0$ и $x+2y-5z+1<0$. 189. $67x-162y+67z+44=0$. 190. M_1, M_4 принадлежат области ω, M_2, M_5, M_6 — области ω_1 и M_3 — области ω_2, где ω — область, заключенная между параллельными плоскостями, ω_1 — область, примыкающая к плоскости π_1, и ω_2 — область, примыкающая к плоскости π_2. 191. ω: $5x-3y+z-2<0$, $5x-3y+z+8>0$; ω_1: $5x-3y+z-2>0$, $5x-3y+z+8>0$; ω_2: $5x-3y+z-2<0$, $5x-3y+z+8<0$. 192. Точки M_1, M_3 и M_5 принадлежат внутренней области острых двугранных углов. 193. а) Тетраэдр, гранями которого служат координатные плоскости и плоскость $x-y-2z-4=0$. Вершины тетраэдра имеют координаты: (0, 0, 0), (4, 0, 0), (0, —4, 0), (0, 0, —2); б) область, заключенная между координатной плоскостью Oxz и плоскостью, параллельной Oxz, отсекающей от оси Oy отрезок, равный трем; в) область, ограниченная тремя плоскостями, параллельными оси Ox, попарно пересекающимися по трем различным прямым, параллельным оси Ox. 195. а) (—3, —7, 11); б) (0, 2, —4). 196. M_2, M_3, M_4. 197. а) $\frac{x+3}{-1}=\frac{y-8}{2}=\frac{z-1}{3}$; $x=-3-t$, $y=8+2t$, $z=1+3t$;

б) $\begin{vmatrix} x+1 & y-3 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} y-3 & z-5 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} x+1 & z-5 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $x = -1 - 2t$, $y = 3$, $z = 5 + t$; в) $\begin{vmatrix} x-8 & z-7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} y-3 & z-7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 0$, $x = 8$, $y = 3$, $z = 7 + t$; г) $\begin{vmatrix} x+2 & y-1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} y-1 & z-5 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $\begin{vmatrix} x+2 & z-5 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 0$, $x = -2 + 3t$, $y = 1$, $z = 5 - 2t$; д) $\frac{x}{-3} = \frac{y}{1} = \frac{z}{5}$, $x = -3t$, $y = t$, $z = 5t$. **198.** а) $\begin{cases} 3x - y + z - 6 = 0, \\ x + y - 3 = 0; \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + y - 3z - 5 = 0, \\ z = 0; \end{cases}$ в) $\begin{cases} x - y + 2z = 0, \\ 7x - 16y - 28z + 37 = 0. \end{cases}$ **199.** (AB): $x = -3 + 3t$, $y = 4$, $z = 1 + t$; (AC): $x = -3 - 2t$, $y = 4 - 3t$, $z = 1 + 2t$; (AD): $x = -3 + 6t$, $y = 4 + t$, $z = 1$; (BC): $x = -5t$, $y = 4 - 3t$, $z = 2 + t$; (BD): $x = 3t$, $y = 4 + t$, $z = 2 - t$; (CD): $x = -5 + 8t$, $y = 1 + 4t$, $z = 3 - 2t$. **200.** а) $\{-8, 11, 6\}$, б) $\{0, -1, 1\}$; в) $\{-1, -2, -1\}$; г) $\{0, 0, 1\}$. **201.** $\frac{x+3}{1} = \frac{y-1}{-4} = \frac{z-2}{-7}$. **202.** а) $x = -1 + 6t$, $y = 5 - 15t$, $z = 1 - 3t$; б) $x = 7 + 2t$, $y = 2 + 3t$, $z = 1 - 2t$; в) $x = 0$, $y = 2t$, $z = 3 + t$; г) $x = 2$, $y = t$, $z = -5 + t$. **203.** а); в); г). **204.** а) Совпадают; б) скрещиваются; в) параллельны; г) пересекаются; д) параллельны. **205.** (5, —7,6). **206.** (3, 1, —2). **207.** $(x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$. **208.** а) Прямая параллельна плоскости; б) прямая пересекает плоскость; в) прямая лежит в плоскости. **209.** $\left(0, -\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}\right)$. **210.** а) $(1, 0, 0)$; б) $(-2, -1, 0)$, $\left(-\frac{4}{3}, 0, \frac{1}{3}\right)$, $(0, 2, 1)$. **211.** $(-1, 2, 3)$. **212.** $\frac{x-1}{2} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z+4}{9}$. **213.** $x = -5$, $y = 3t$, $z = 2t$. **214.** а) $\cos\alpha_1 = \frac{5\sqrt{6}}{18}$; б) $\cos\alpha_2 = 0$; в) $\cos\alpha_3 = -\frac{23}{30}$. **217.** а) $\cos\varphi_1 = \frac{5}{\sqrt{35}}$, $\cos\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{35}}$, $\cos\varphi_3 = \frac{3}{\sqrt{35}}$; б) $\cos\varphi_1 = -\frac{2}{\sqrt{14}}$, $\cos\varphi_2 = \frac{3}{\sqrt{14}}$, $\cos\varphi_3 = -\frac{1}{\sqrt{14}}$; в) $\cos\varphi_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\varphi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\cos\varphi_3 = \frac{1}{\sqrt{3}}$; г) $\cos\varphi_1 = -\frac{2}{\sqrt{29}}$, $\cos\varphi_2 = 0$, $\cos\varphi_3 = \frac{5}{\sqrt{29}}$. **218.** $\sin\varphi = \frac{5\sqrt{21}}{42}$. **219.** $\sin\varphi_1 = \frac{\sqrt{14}}{7}$, $\sin\varphi_2 = \frac{-3\sqrt{14}}{14}$, $\sin\varphi_3 = \frac{\sqrt{14}}{14}$. **220.** а) и г). **221.** $d = \sqrt{\frac{833}{13}}$. **222.** а) $d = 0$; б) $d = \sqrt{\frac{994}{41}}$; в) $d = \sqrt{35}$; г) $d = \frac{13\sqrt{75}}{75}$; д) $d = 0$. **223.** $h = 3$.

224. а) $5x - 2y + z = 0$; б) $3x - 4z = 0$; в) $13x - 3y - z = 0$. **225.** $3y - 5z = 0$, $3x + z = 0$, $5x + y = 0$. **226.** $3x + 19y - 9z + 55 = 0$. **227.** $6x - 5y - z = 0$. **228.** $21x - 19y + 22z - 125 = 0$. **229.** а) $x + 2y - 1 = 0$; б) $x + 2y + z + 4 = 0$. **230.** $2x - y + z + 12 = 0$. **231.** $x - 4y + 7z + 24 = 0$. **232.** $9x - 29y + 8z = 0$. **233.** $\frac{x}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$. **234.** $\begin{cases} x + y - 3z + 2 = 0, \\ x + 2z - 4 = 0. \end{cases}$ **235.** $\begin{cases} x + y + z - 6 = 0, \\ 17x + 13y + 5z + 26 = 0. \end{cases}$ **236.** $\begin{cases} 4x + 7y - 6z - 3 = 0, \\ 2x - 7y + 4z + 7 = 0. \end{cases}$ **237.** $\frac{x}{-4} = \frac{y+7}{11} = \frac{z+5}{3}$. **238.** $x = t$, $y = -3t$, $z = 5t$. **239.** $x = 1 + t$, $y = -2$,

$z=5$; $x=1$, $y=-2+t$, $z=5$; $x=1$, $y=-2$, $z=5+t$.
240. (1, 2, 1). **241.** а) $5x-y+3z-19=0$; б) $4x-3y+z-22=0$.
242. $\begin{cases}3x+4y+3z-15=0,\\7x-6y+z+5=0.\end{cases}$ **243.** $(-5,\ 8,\ -2)$. **244.** $8x-17y+11z+13=0$.
245. $\begin{cases}x+3y-10=0,\\3x-y+z-1=0.\end{cases}$ **246.** $\begin{cases}x+y-3z+4=0,\\2x+y-z-6=0.\end{cases}$ **247.** $\begin{cases}4x+y+4=0,\\z=0,\end{cases}$ $\begin{cases}6x-z+8=0,\\y=0;\end{cases}$ $\begin{cases}3y+2z-4=0,\\x=0.\end{cases}$ **248.** $\dfrac{x}{1}=\dfrac{y}{-7}=\dfrac{z}{-17}$.
249. $\begin{cases}32x+34y+13z-108=0,\\12x+33y+15z-81=0.\end{cases}$ **250.** $x=y=z$. **251.** $\begin{cases}17x+20y-19z-39=0,\\8x+5y-31z+67=0.\end{cases}$
254. Прямоугольную декартову систему координат выбрать так, чтобы плоскость α совпала с плоскостью Oxy. **255.** Вершину трехгранного угла принять за начало координат, а одну из граней — за плоскость Oxy. **256.** Прямая, перпендикулярная к плоскости треугольника и проходящая через центр описанной окружности. **257.** Плоскость, перпендикулярная к прямой, определяемой двумя данными точками. **259.** Систему координат выбрать так, чтобы данная плоскость совпала с плоскостью Oxy, а концы диагонали, лежащей в этой плоскости, имели координаты (0, 0, 0) и (1, 0, 0). Ввести в рассмотрение координаты концов другой диагонали и вычислить расстояния от этих концов до плоскости Oxy. **260.** $\cos\varphi=\dfrac{6h^2-2a^2}{\sqrt{3h^2+4a^2}\sqrt{12h^2+a^2}}$.
262. Пусть O — точка пересечения ребер A_1A_1', A_2A_2' и A_3A_3'. Принять точку O за начало аффинной системы координат, а векторы $e_1=\overline{OA}_1$, $e_2=\overline{OA}_2$, $e_3=\overline{OA}_3$ — за координатные векторы. **264.** См. решение задачи 2, § 18. **266.** Задача решается аналогично задаче 2, § 18. **267.** $\{10,\ 1,\ 29\}$. **268.** а) $x_1=-3x_1'+x_2'+x_3'+3$, $x_2=5x_2'+7x_3'-4$, $x_3=-2x_2'-x_3'+5$; б) $x_1=-x_1'+2x_2'+5$, $x_2=x_1'+3x_2'+2x_3'-3$, $x_3=5x_2'+5x_3'$; в) $x_1=x_1'-3$, $x_2=x_2'+1$, $x_3=x_3'+2$. **269.** а) $e_1'\{1,\ 1,\ 1\}$, $e_2'\{-3,\ 1,\ 0\}$, $e_3'\{1,\ 0,\ 0\}$, $O'(0,\ 0,\ 1)$; б) $e_1'\{1,\ -4,\ 3\}$, $e_2'\{-2,\ 1,\ -4\}$, $e_3'\{0,\ -2,\ 1\}$, $O'(5,\ -1,\ 0)$; в) $e_1'\{1,\ 3,\ 0\}$, $e_2'\{-1,\ 0,\ 0\}$, $e_3'\{3,\ -1,\ 1\}$, $O'(-1,\ 2,\ -1)$; г) $e_1'\{0,\ 1,\ 1\}$, $e_2'\{1,\ 0,\ 1\}$, $e_3'\{0,\ 0,\ 1\}$, $O'(0,\ 0,\ 1)$. **270.** Не являются, так как определитель системы равен нулю. **271.** а); в); г). **272.** Да. **273.** $x_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_1'-\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2'$, $x_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_1'+\dfrac{\sqrt{2}}{2}x_2'$, $x_3=x_3'$. **274.** а) $x_1=x_1'$, $x_2=x_2'$, $x_3=\alpha x_1'+\beta x_2'+x_3'+a_3$; б) пусть точка M в системе $Oe_1e_2e_3$ имеет координаты x_1, x_2, x_3, а в системе $O'e_1'e_2'e_3'$ — координаты x_1', x_2', x_3'. Очевидно, числа x_1, x_2 являются координатами той же точки на плоскости π_1 в системе Oe_1e_2. Так как $\overline{MM'}\parallel e_3$, то точка M' в системе $O'e_1'e_2'$ имеет координаты x_1', x_2', 0. Очевидно, числа x_1', x_2' являются координатами точки M' в системе $O'e_1'e_2'$ на плоскости π_2. Из формул преобразования, полученных выше, имеем $x_1=x_1'$, $x_2=x_2'$. **275.** (3, 2, 1), (—4, —1, 2). **276.** Прямая касается поверхности в точке (0, —3, 0). **277.** а) Ось Oy целиком принадлежит поверхности; б) прямая целиком лежит на поверхности. **278.** а); в); г). **279.** Пара пересекающихся прямых: $x-y=0$ и $x+y=0$. **280.** Эллипс $\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{2}=1$.
285. а) (3, —4, 5), 7; б) (—1, 2, 3), 3; в) $\left(\dfrac{1}{2},\ -1,\ -\dfrac{1}{2}\right)$, 0. **286.** а) Сферическая поверхность, $r=2$, $O(2,\ -3,\ 5)$; б) нулевая поверхность (мнимая сферическая поверхность); в) точка $\left(1,\ -\dfrac{1}{2},\ 4\right)$; г) сферическая поверхность, $r=1$, $O\left(-\dfrac{1}{3},\ 3,\ 0\right)$; д) нулевая поверхность. **287.** а) $x^2+y^2+z^2+3x-3y-$

$-3z-56=0$; б) $x^2+y^2+z^2-5x+2y-5z+1=0$; в) $x^2+y^2+z^2+6x+3y+z+8=0$. **288**. а) $2x^2+2y^2+2z^2+x-10z=0$; б) $\frac{x^2+y^2+z^2}{a^2+b^2+c^2}-\frac{x}{a}-\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=0$. **289**. а) $x=0$; б) $x+\sqrt{2}y+z-6=0$; в) $x=4$; г) $2x-\sqrt{2}y-\sqrt{2}z+4=0$. **290**. $x^2+y^2+z^2-6x-4y+10z+12=0$. **291**. $x^2+y^2+z^2+4y-6z-1=0$. **292**. $2x+2y-z+10=0$, $2x+2y-z-8=0$. **293**. $2x+y-2z-9=0$, $x+2y+2z-9=0$. **294**. $2x+2y-z-2=0$, $x+2y-2z+14=0$. **295**. $x^2+y^2+z^2=\frac{5}{9}$. **296**. Сферическая поверхность с центром в середине заданного отрезка. **297**. Сферическая поверхность. **298**. Сферическая поверхность, для которой отрезок OA является диаметром. **299**. Сферическая поверхность, концентрическая с данной. **300**. Сферическая поверхность, для которой отрезок AB является диаметром. **301**. а) $x^2+y^2+20z^2+8xz-4yz-9=0$; б) $2y^2-z^2+yz-5=0$; в) $4x^2-5y^2-16z^2-8xz+20yz-20=0$. **302**. а) $\{1, -1, 0\}$; б) $\{1, -1, 0\}$; д) $\{1, -1, 0\}$; ж) $\{0, 0, 1\}$. **303**. а) Эллиптический цилиндр, $\boldsymbol{p}\{1, 0, -1\}$; б) эллиптический цилиндр, $\boldsymbol{p}\{2, -1, 1\}$; в) параболический цилиндр, $\boldsymbol{p}\{2, 3, -1\}$; г) гиперболический цилиндр, $\boldsymbol{p}\{1, -2, 1\}$. **304**. $(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2=(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2)(x^2+y^2+z^2-a^2)$. Если $M(x, y, z)$ — произвольная точка цилиндрической поверхности, то прямая $X=x+\alpha t$, $Y=y+\beta t$, $Z=z+\gamma t$ является касательной к сферической поверхности, т. е. пересекается с ней в двух слившихся точках. **305**. а) $x^2+y^2-3z^2-2xz-2yz+10z-5=0$; б) $x^2-2y^2-8z^2+2xz+8yz+2z-1=0$; в) $x^2+y^2+z^2+yx-2zx-y=0$. **306**. Вершина находится в точке $(1, 1, -1)$. **307**. Вершина находится в точке $(2, 1, 0)$. **308**. $x^2+y^2+7z^2-16xy-8xz-8yz+62x+44y-32z-11=0$. Для того чтобы точка $M(x, y, z)$ лежала на конической поверхности с вершиной S, необходимо и достаточно, чтобы вектор $\overline{SM}$ составил с нормальным вектором данной плоскости угол 45°. Записывая это условие в координатах, получаем уравнение искомой конической поверхности. **309**. $x^2+y^2=25$. **310**. $2x^2+(y+z)^2-18=0$. **311**. $(x^2+y^2+z^2)^2=4r^2(y^2+z^2)$. **312**. $z^4=9(x^2+y^2)$. **313**. а) $\frac{x^2+z^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$; б) $\frac{x^2+z^2}{1}-\frac{y^2}{9}=1$; в) $\frac{x^2+z^2}{4}-y^2=1$; г) $x^2+z^2=4y$. **314**. $z^2=\sin^2\sqrt{x^2+y^2}$. **316**. Однополостный гиперболоид. **317**. $\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{d}$. **318**. а) $\{3, 2, -5\}$; б) $\{1, 0, 0\}$; в) $\{0, 1, 0\}$. **320**. Главные направления определяются следующими векторами: а) $\{1, 0, -1\}$, $\{1, 1, 1\}$, $\{1, -2, 1\}$; б) $\{2, -1, 1\}$, $\{-1, -1, 1\}$, $\{0, 1, 1\}$; в) $\{0, 0, 1\}$, $\{p_1, p_2, 0\}$; г) $\{1, 2, 2\}$, $\{2, 1, -2\}$, $\{2, -2, 1\}$; д) $\{0, 1, 1\}$, $\{1, 0, 0\}$, $\{0, 1, -1\}$. **321**. а) $\{0, \lambda, \lambda\}$; б) нет; в) $\{\lambda, \lambda, \lambda\}$. **323**. а) $a_{11}=a_{22}=a_{33}$, $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$; б) $a_{13}=a_{12}=0$; в) $a_{11}=a_{22}$, $a_{12}=a_{13}=a_{23}=0$. **324**. $6x_2-1=0$. **325**. $x_1+3x_2-x_3-1=0$. **326**. $2x_1-x_2+5x_3+1=0$. **327**. $3x_1+5x_2+2x_3+2=0$. **328**. $x_2-2x_3+9=0$. **329**. $10x_1-7x_2+17x_3-20=0$. **330**. $38x_1+39x_2-20x_3-1=0$. **331**. $4x_1-x_2-4x_3+1=0$. **332**. Для того чтобы плоскость Ox_1x_2 была одной из диаметральных плоскостей, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое число $\lambda\neq 0$, при котором ранги матриц
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{14} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33}-\lambda \end{pmatrix}$$
совпадают. **333**. а) Существует, например, пара параллельных плоскостей; б) все диаметральные плоскости проходят через линию пересечения данных плоскостей. **334**. а) $(1, 1, -1)$; б) $(0, 2, -2)$; в) $\left(\frac{3}{2}, 0, -1\right)$. **335**. а) Прямая центров: $3x_1-$

$-2x_2 = 0$, $x_2 - 3x_3 + 6 = 0$; б) нет центров; в) единственный центр $(0, 0, 0)$, принадлежащий поверхности; г) плоскость центров: $4x_1 + 4x_2 - 4x_3 + 5 = 0$. **336.** $a_{11} = a_{21} = a_{31} = a_{22} = a_{32} = a_{14} = a_{24} = a_{34} = 0$. Уравнение поверхности имеет вид: $a_{33}x_3^2 + a_{44} = 0$. **337.** а) $2x_1 + 2x_2 - 1 = 0$, $3x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 4 = 0$, $6x_1 - 6x_2 + 12x_3 - 7 = 0$; б) $4x_1 + x_2 + 2x_3 + 7 = 0$, $x_1 - 2x_2 - x_3 + 5 = 0$; в) $x_1 - x_3 - 1 = 0$, $x_1 - x_2 + x_3 = 0$; г) $x_1 + x_2 = 0$, $3x_1 - 3x_2 - 6x_3 - 1 = 0$, $3x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 5 = 0$; д) $x_1 + x_2 + x_3 + 1 = 0$, $2x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 1 = 0$. **338.** $\frac{x_1'^2}{15} + \frac{x_2'^2}{5} - \frac{x_3'^2}{3} = 1$, $x_1 = \frac{\sqrt{2}x_1' + \sqrt{2}x_2'}{2}$, $x_2 = \frac{\sqrt{2}x_2' - \sqrt{2}x_1'}{2}$, $x_3 = x_3'$. **339.** $x_1'^2 = -\frac{2\sqrt{5}}{3}x_2'$, $x_1 = x_1'$, $x_2 = \frac{x_2' - 2x_3'}{\sqrt{5}}$, $x_3 = \frac{-2x_2' - x_3'}{\sqrt{5}}$. **340.** $\frac{x_1'^2}{4} + \frac{x_2'^2}{2} - \frac{x_3'^2}{6} = 1$, $x_1 = \frac{x_1'}{\sqrt{3}} + \frac{x_2'}{\sqrt{6}} + \frac{x_3'}{\sqrt{2}}$, $x_2 = -\frac{x_1'}{\sqrt{3}} + \frac{2x_2'}{\sqrt{6}}$, $x_3 = \frac{x_1'}{\sqrt{3}} + \frac{x_2'}{\sqrt{6}} - \frac{x_3'}{\sqrt{2}}$. **341.** $x_3'^2 - 4 = 0$, $x_1 = \frac{x_1'}{\sqrt{2}} + \frac{x_2'}{\sqrt{3}} + \frac{x_3'}{\sqrt{6}}$, $x_2 = -\frac{x_1'}{\sqrt{2}} + \frac{x_2'}{\sqrt{3}} + \frac{x_3'}{\sqrt{6}}$, $x_3 = -\frac{x_2'}{\sqrt{3}} + \frac{2x_3'}{\sqrt{6}}$. **342.** $x_2'^2 - x_3'^2 = 1$, $x_1 = \frac{x_1'}{\sqrt{6}} + \frac{x_2'}{\sqrt{2}} + \frac{x_3'}{\sqrt{3}}$, $x_2 = \frac{2x_1'}{\sqrt{6}} - \frac{x_3'}{\sqrt{3}}$, $x_3 = \frac{x_1'}{\sqrt{6}} - \frac{x_2'}{\sqrt{2}} + \frac{x_3'}{\sqrt{3}}$. **343.** $\frac{x_1'^2}{1} + \frac{x_2'^2}{9} - \frac{x_3'^2}{3} = 1$, $x_1 = \frac{x_1'}{\sqrt{2}} - \frac{x_2'}{\sqrt{2}}$, $x_2 = \frac{x_1'}{\sqrt{2}} + \frac{x_2'}{\sqrt{2}}$, $x_3 = x_3'$. **344.** $-\frac{x_1'^2}{12} + \frac{x_2'^2}{2} - \frac{x_3'^2}{6} = 1$.
345. $3x_1'^2 - 2x_3'^2 = 2x_2'$. **346.** $\frac{x_2'^2}{12} + \frac{x_3'^2}{6} = 1$. **347.** $\frac{x_1'^2}{14} + \frac{x_2'^2}{28} + \frac{x_3'^2}{7} = 1$.
348. $\frac{x_1'^2}{2} + \frac{x_3'^2}{1} = -2x_2'$. **349.** $x_1'^2 - 5 = 0$. **350.** $\frac{x_1'^2}{15} + \frac{x_2'^2}{5} + \frac{x_3'^2}{10} = 1$.
351. $x_1'^2 = -\frac{\sqrt{5}}{3}x_2'$. **352.** $\frac{x_1'^2}{3} - \frac{x_3'^2}{3} = 2x_2'$. **353.** $x_1'^2 + x_3'^2 = 2x_2'$.
354. $\frac{x_1'^2}{1} + \frac{x_2'^2}{2} = 1$. **355.** а) $\frac{x_1^2}{8} + \frac{x_2^2}{1} + \frac{x_3^2}{2} = 1$; б) $\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{5} + \frac{x_3^2}{20} = 1$; в) $\frac{x_1^2 + x_2^2}{25} + \frac{x_3^2}{2} = 1$. **356.** а) $\frac{x_1^2}{5} + \frac{x_2^2}{9} - \frac{x_3^2}{4} = 1$; б) $\frac{x_1^2 + x_2^2}{9} - \frac{x_3^2}{10} = 1$. **357.** (Ox_1x_2) : $\frac{x_1^2}{16} + \frac{x_2^2}{1} = 1$, (Ox_2x_3) : $\frac{x_2^2}{1} + \frac{x_3^2}{9} = 1$, (Ox_1x_3) : $\frac{x_1^2}{16} + \frac{x_3^2}{9} = 1$. **358.** Две пересекающиеся прямые: $x_2 = 2$, $x_1 - 3x_3 = 0$ и $x_2 = 2$, $x_1 + 3x_3 = 0$. **359.** Две параллельные прямые: $x_2 - 4 = 0$, $x_3 = 0$; $x_2 + 4 = 0$, $x_3 = 0$. **360.** $x_1 = 1$, $x_2 = 1 + t$, $x_3 = 1 + t$ и $x_1 = 1 + t$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1 + t$. **361.** $-4x_1 - 11x_2 + x_3 = 0$. **362.** $\frac{x_1}{9} + \frac{x_2}{16} - \frac{x_3}{4} = 0$. **363.** Уравнения систем прямолинейных образующих: $\begin{cases} x_1 + 3\lambda x_2 - x_3 = 3\lambda, \\ \lambda x_1 - 3x_2 + \lambda x_3 = 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x_1 - 3\mu x_2 - x_3 = 3\mu, \\ \mu x_1 + 3x_2 + \mu x_3 = 3. \end{cases}$
364. а) $\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} = 2x_3$; б) $\frac{x_1^2}{11} + \frac{x_2^2}{12} = 2x_3$. **365.** а) $\frac{x_1^2}{4} - \frac{x_2^2}{3} = 2x_3$; б) $x_1^2 - x_2^2 = 4x_3$. **367.** $\frac{x_1 - 2}{2} = \frac{x_2 - 1}{-1} = \frac{x_3}{1}$ и $\frac{x_1 - 4}{2} = \frac{x_2 + 2}{1} = \frac{x_3}{2}$.

ЛИТЕРАТУРА

I. Учебники и учебные пособия

1. Бахвалов С. В., Бабушкин Л. И., Иваницкая В. П. Аналитическая геометрия, изд. 3, М., Просвещение, 1965.

2. Выгодский М. Я. Аналитическая геометрия. М., Физматгиз, 1963.

3. Делоне Б. Н. и Райков Д. А. Аналитическая геометрия, т. II. М., Гостехиздат, 1949.

4. Дзиобек О. Курс аналитической геометрии, ч. II. Одесса, 1912.

5. Ефимов Н. В. Краткий курс аналитической геометрии, изд. 10, М., Наука, 1969.

6. Лопшиц А. М. Аналитическая геометрия. М., Учпедгиз, 1948.

7. Моденов П. С. Аналитическая геометрия, Изд-во МГУ, 1955.

8. Мусхелишвили Н. И. Курс аналитической геометрии, М., Гостехиздат, 1947.

9. Болтянский В. Г., Яглом И. М. Векторы в курсе геометрии средней школы. М., Учпедгиз, 1962.

10. Выгодский М. Я. Справочник по высшей математике, изд. 9. М., Наука, 1969.

11. Гольдфайн И. А. Элементы векторного исчисления. М., Гостехиздат, 1948.

12. Дубнов Я. С. Основы векторного исчисления. М., Гостехиздат, 1948.

13. Минорский В. П. и Улановский В. П. Векторная алгебра. М., Гостехиздат, 1951.

II. Задачники и методические пособия для заочников

14. Адамов А. А. Сборник задач по аналитической геометрии. М., ОГИЗ, 1924.

15. Атанасян Л. С., Атанасян В. А. Задачник по аналитической геометрии. М., Просвещение, 1968.

16. Атанасян Л. С. Задачник-практикум по аналитической геометрии, изд. 2, М., Учпедгиз, 1963.

17. Атанасян Л. С., Васильева М. В., Гуревич Г. Б., Ильин А. С., Козьмина Т. Л., Редозубова О. С. Сборник задач по элементарной геометрии, изд. 2, М., Просвещение, 1964.

18. Бахвалов С. В., Моденов П. С., Пархоменко А. С. Сборник задач по аналитической геометрии. изд. 3, М., Наука, 1964.

19. Гюнтер Н. М. и Кузьмин Р. О. Сборник задач по высшей математике. М., Гостехиздат, 1957.

20. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии, изд. 10, М., Наука, 1969.

21. Майоров В. М., Скопец З. А. Задачник-практикум по векторной алгебре. М., Учпедгиз, 1963.

22. Скопец З. А., Исаров В. А. Задачи и теоремы по элементарной геометрии, М., Учпедгиз, 1962.

23. Цубербиллер О. Н. Задачи и упражнения по аналитической геометрии, изд. 29, М., Наука, 1968.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Атанасян Левон Сергеевич

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРИЯ

Редакторы: *А. З. Рывкин* и *Н. И. Никитина*. Художественный редактор *В. С. Эрденко*. Технический редактор *О. Н. Семина*. Корректор *Л. П. Михеева*.

Сдано в набор 7/X 1968 г. Подписано к печати 3/XII 1969 г. 60×90¹/₁₆. Типографская № 2. Печ. л. 23,0. Уч.-изд. л. 21,15. Тираж 25 тыс. экз. (Тем. пл. 1969 г.) А11450

Издательство «Просвещение» Комитета по печати при Совете Министров РСФСР. Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Отпечатано с готовых матриц в типографии им. Смирнова Смолоблуправления по печати, г. Смоленск, пр. им. Ю. Гагарина, 2. Заказ № 5429.

Цена без переплета 59 к., переплет 10 к.