

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ

Б.М.БУДАК, С.В.ФОМИН



КУРС ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Под редакцией

А. Н. ТИХОНОВА, В. А. ИЛЬИНА, А. Г. СВЕШНИКОВА

ВЫПУСК 2
КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ
И РЯДЫ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

Б. М. БУДАК, С. В. ФОМИН

КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ И РЯДЫ

ИЗДАНИЕ ВТОРОЕ,
СТЕРЕОТИПНОЕ

*Допущено Министерством
высшего и среднего специального образования СССР
в качестве учебника
для физических и физико-математических
факультетов университетов*

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

ОГЛАВЛЕНИЕ

От редакторов серии	14
Предисловие	14
Г л а в а 1. Двойные интегралы	15
§ 1. Некоторые вспомогательные понятия. Площадь плоской фигуры	16
1. Граничные и внутренние точки. Область (16). 2. Расстояние между множествами (18). 3. Площадь плоской фигуры (19). 4. Основные свойства площади (22). 5. О понятии меры множества (23).	
§ 2. Определение и основные свойства двойного интеграла	24
1. Определение двойного интеграла (24). 2. Условия существования двойного интеграла. Верхние и нижние суммы (26). 3. Важнейшие классы интегрируемых функций (32). 4. Свойства двойного интеграла (33).	
§ 3. Аддитивные функции области. Производная по площади	35
1. Функции точки и функции области (35). 2. Двойной интеграл как аддитивная функция области (36). 3. Производная функции области по площади (36). 4. Производная по площади от двойного интеграла (37). 5. Восстановление аддитивной функции области по ее производной (38). 6. Определенный интеграл как функция области (40). 7. Продолжение функций области по аддитивности (41).	
§ 4. Некоторые физические и геометрические применения двойных интегралов	41
1. Вычисление объемов (41). 2. Вычисление площадей (42). 3. Масса пластинки (42). 4. Координаты центра масс пластинки (43). 5. Моменты инерции пластинки (44). 6. Световой поток, падающий на пластинку (45). 7. Поток жидкости через поперечное сечение канала (45).	
§ 5. Сведение двойного интеграла к повторному	46
1. Наводящие соображения (46). 2. Случай прямоугольной области (48). 3. Случай криволинейной области (50).	
§ 6. Замена переменных в двойном интеграле	54
1. Отображение областей (54). 2. Криволинейные координаты (56). 3. Полярные координаты (57). 4. Постановка задачи о замене переменных в двойном интеграле (58). 5. Пло-	

щадь в криволинейных координатах (59). 6. Замена переменных в двойном интеграле (66). 7. Сравнение с одномерным случаем. Интеграл по ориентированной области (69).

Глава 2. Тройные и многократные интегралы	71
§ 1. Определение и основные свойства тройного интеграла	71
1. Предварительные замечания. Объем пространственной фигуры (71). 2. Определение тройного интеграла (73). 3. Условия существования тройного интеграла. Интегрируемость непрерывных функций (74). 4. Свойства тройных интегралов (75). 5. Тройной интеграл как аддитивная функция области (76).	
§ 2. Некоторые применения тройных интегралов в физике и геометрии	77
1. Вычисление объемов (77). 2. Нахождение массы тела по плотности (77). 3. Момент инерции (78). 4. Вычисление координат центра масс (78). 5. Притяжение материальной точки телом (79).	
§ 3. Вычисление тройного интеграла	80
1. Сведение тройного интеграла по параллелепипеду к повторному (80). 2. Сведение тройного интеграла по криволинейной области к повторному (82).	
§ 4. Замена переменных в тройном интеграле	85
1. Отображение пространственных областей (85). 2. Криволинейные координаты в пространстве (86). 3. Цилиндрические и сферические координаты (86). 4. Элемент объема в криволинейных координатах (88). 5. Замена переменных в тройном интеграле. Геометрический смысл якобиана (89).	
§ 5. Понятие о многомерных интегралах	93
1. Общие сведения (93). 2. Примеры (94).	
Глава 3. Элементы дифференциальной геометрии	97
§ 1. Вектор-функции скалярного аргумента	97
1. Определение вектор-функции. Предел. Непрерывность (97). 2. Дифференцирование вектор-функции (98). 3. Годограф. Особые точки (100). 4. Формула Тейлора (101). 5. Интеграл от векторной функции по скалярному аргументу (101). 6. Векторные функции нескольких скалярных аргументов (102).	
§ 2. Пространственные кривые	102
1. Векторное уравнение кривой (102). 2. Основной трехгранник (105). 3. Формулы Френе (106). 4. Вычисление кривизны и кручения (107). 5. Система координат, связанная с основным трехгранником (109). 6. Вид кривой вблизи произвольной ее точки (110). 7. Ориентированная кривизна плоской кривой (113). 8. Понятие о натуральных уравнениях кривой (113). 9. Некоторые приложения к механике (115).	
§ 3. Параметрическое уравнение поверхности	117
1. Понятие поверхности (117). 2. Параметризация поверхности (118). 3. Параметрическое уравнение поверхности (119).	

4. Кривые на поверхности (120). 5. Касательная плоскость (121). 6. Нормаль к поверхности (122). 7. Системы координат в касательных плоскостях (123).	
§ 4. Измерение на кривой поверхности длин, углов и площадей. Первая квадратичная форма поверхности	124
1. Аффинная система координат на плоскости (125). 2. Длина дуги на поверхности. Первая квадратичная форма (126). 3. Угол между двумя кривыми (128). 4. Определение площади поверхности. Пример Шварца (129). 5. Вычисление площади гладкой поверхности (131).	
§ 5. Кривизна линий на поверхности. Вторая квадратичная форма	135
1. Нормальные сечения поверхности и их кривизна (136). 2. Вторая квадратичная форма поверхности (138). 3. Индикатриса кривизны (139). 4. Главные направления и главные кривизны поверхности. Формула Эйлера (140). 5. Вычисление главных кривизн (142). 6. Полная кривизна и средняя кривизна (143). 7. Классификация точек на поверхности (143). 8. Первая и вторая квадратичные формы как полная система инвариантов поверхности (145).	
§ 6. Понятие о внутренней геометрии поверхности	146
1. Наложимость поверхностей. Необходимое и достаточное условие наложимости (146). 2. Внутренняя геометрия поверхности (147). 3. Поверхности постоянной кривизны (148).	
Глава 4. Криволинейные интегралы	150
§ 1. Криволинейные интегралы первого рода	150
1. Определение криволинейного интеграла первого рода (150). 2. Свойства криволинейных интегралов (154). 3. Некоторые применения криволинейных интегралов первого рода (155). 4. Криволинейные интегралы первого рода в пространстве (157).	
§ 2. Криволинейные интегралы второго рода	158
1. Постановка задачи. Работа силового поля (158). 2. Определение криволинейного интеграла второго рода (159). 3. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода (160). 4. Вычисление криволинейного интеграла второго рода от ориентации кривой (165). 6. Криволинейные интегралы вдоль самопересекающихся и замкнутых путей (165). 7. Криволинейные интегралы второго рода вдоль пространственных кривых (166).	
§ 3. Формула Грина	168
1. Вывод формулы Грина (168). 2. Вычисление площади с помощью формулы Грина (173).	
§ 4. Условия независимости криволинейного интеграла от пути. Интегрирование полных дифференциалов	174
1. Постановка вопроса (174). 2. Случай односвязной области (174). 3. Нахождение функции по ее полному дифференциалу (178). 4. Криволинейные интегралы в многосвязной области (179).	

Глава 5. Поверхностные интегралы	183
§ 1. Поверхностные интегралы первого рода	183
1. Определение поверхностного интеграла от скалярной функции (183). 2. Сведение поверхностного интеграла к двойному (184). 3. Некоторые применения поверхностных интегралов к механике (188). 4. Поверхностные интегралы от векторных функций. Общее понятие поверхностного интеграла первого рода (189).	
§ 2. Поверхностные интегралы второго рода	191
1. Сторона поверхности (191). 2. Определение поверхностного интеграла второго рода (195). 3. Сведение поверхностного интеграла второго рода к двойному интегралу (199).	
§ 3. Формула Остроградского	201
1. Вывод формулы Остроградского (201). 2. Вычисление поверхностных интегралов с помощью формулы Остроградского. Представление объема пространственной области в виде поверхностного интеграла (205).	
§ 4. Формула Стокса	207
1. Вывод формулы Стокса (207). 2. Применение формулы Стокса к исследованию пространственных криволинейных интегралов (210).	
Глава 6. Теория поля	213
§ 1. Скалярные поля	213
1. Определение и примеры скалярных полей (213). 2. Поверхности и линии уровня (214). 3. Различные типы симметрии полей (215). 4. Производная по направлению (216). 5. Градиент скалярного поля (217).	
§ 2. Векторные поля	219
1. Определение и примеры векторных полей (219). 2. Векторные линии и векторные трубки (220). 3. Различные виды симметрии векторных полей (220). 4. Поле градиента. Потенциальное поле (221).	
§ 3. Поток векторного поля. Дивергенция	223
1. Поток векторного поля через поверхность (223). 2. Дивергенция (224). 3. Физический смысл дивергенции для различных полей. Примеры (226). 4. Соленоидальное поле (229). 5. Уравнение неразрывности (230). 6. Плоское течение жидкости. Формула Остроградского на плоскости (231).	
§ 4. Циркуляция. Ротор	233
1. Циркуляция векторного поля (233). 2. Ротор векторного поля. Запись формулы Стокса в векторных обозначениях (233). 3. Символическая запись ротора (235). 4. Физический смысл ротора (235). 5. Еще раз о потенциальных и соленоидальных полях (238).	
§ 5. Оператор Гамильтона	239
1. Символический вектор ∇ (239). 2. Действия с вектором ∇ (240).	

§ 6. Дифференциальные операции второго порядка. Оператор Лапласа	243
1. Дифференциальные операции второго порядка (243). 2. Уравнение теплопроводности (245). 3. Стационарное распределение температур. Гармонические поля (246).	
§ 7. Запись основных дифференциальных операций теории поля в ортогональных криволинейных координатах	248
1. Постановка задачи (248). 2. Криволинейные ортогональные координаты в пространстве (249). 3. Цилиндрические и сферические координаты (251). 4. Градиент (252). 5. Дивергенция (252). 6. Ротор (253). 7. Оператор Лапласа (254). 8. Запись основных формул в цилиндрических и сферических координатах (255).	
§ 8. Переменные поля в сплошных средах	256
1. Локальная и материальная производные (256). 2. Уравнение Эйлера (258). 3. Производная по времени от интеграла по жидкому объему (259). 4. Другой вывод уравнения неразрывности (262).	
Глава 7. Тензоры	263
§ 1. Понятие аффинного ортогонального тензора	264
1. Преобразования ортогональных нормированных базисов (264). 2. Определение аффинного ортогонального тензора (266).	
§ 2. Связь между тензорами второго ранга и линейными операторами	268
1. Линейный оператор как тензор второго ранга (268). 2. Тензор второго ранга как линейный оператор (269).	
§ 3. Связь между тензорами и инвариантными полилинейными формами	271
1. Тензоры первого ранга и инвариантные линейные формы (271). 2. Тензоры второго ранга и инвариантные билинейные формы (272). 3. Тензоры произвольного ранга p и инвариантные полилинейные формы (274).	
§ 4. Тензор деформаций	275
§ 5. Тензор напряжений	276
1. Определение тензора напряжений (276). 2. Тензор напряжений как линейный оператор (278).	
§ 6. Алгебраические операции над тензорами	279
1. Сложение, вычитание и умножение тензоров (279). 2. Умножение тензора на вектор (280). 3. Свертка (281). 4. Перестановка индексов (281). 5. Разложение тензора второго ранга на симметричный и антисимметричный (281).	
§ 7. Тензор относительных смещений	282
§ 8. Поле тензора	284
1. Поле тензора. Дивергенция тензора (284). 2. Формула Остроградского для поля тензора (286). 3. Уравнения движения сплошной среды (287).	

§ 9. Приведение симметричного тензора второго ранга к главным осям	288
§ 10. Общее определение тензора	289
1. Взаимные базисы векторов (289). 2. Ковариантные и контравариантные координаты векторов (290). 3. Операция суммирования в тензорной символике (290). 4. Преобразование базисных векторов (291). 5. Преобразование ковариантных и контравариантных координат вектора (291). 6. Общее определение тензора (292). 7. Операции над тензорами (294). 8. Дальнейшие обобщения (294).	
Дополнение к гл. 7. Об умножении матриц	294
Глава 8. Функциональные последовательности и ряды	297
§ 1. Понятие равномерной сходимости; признаки равномерной сходимости	297
1. Сходимость и равномерная сходимость (297). 2. Признаки равномерной сходимости (303).	
§ 2. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов	308
1. Непрерывность и равномерная сходимость (308). 2. Предельный переход под знаком интеграла и почленное интегрирование ряда (311). 3. Предельный переход под знаком производной и почленное дифференцирование ряда (314). 4. Почленный предельный переход в функциональных последовательностях и рядах (316).	
§ 3. Степенные ряды	318
1. Интервал сходимости степенного ряда; радиус сходимости (318). 2. О равномерной сходимости степенного ряда и непрерывности его суммы (324). 3. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов (327). 4. Арифметические операции над степенными рядами (329).	
§ 4. Разложение функций в степенные ряды	330
1. Основные теоремы о разложениях функций в степенные ряды; разложения элементарных функций (330). 2. Некоторые применения степенных рядов (336).	
§ 5. Степенные ряды в комплексной области	338
§ 6. Сходимость в среднем	342
1. Квадратичное уклонение и сходимость в среднем (342). 2. Неравенство Коши — Буняковского (343). 3. Интегрирование сходящихся в среднем последовательностей и рядов (344). 4. О связи между сходимостью в среднем и возможностью почленного дифференцирования последовательностей и рядов (347). 5. Связь между сходимостью в среднем и другими видами сходимости (348).	
Дополнение 1 к гл. 8. Критерий компактности семейства функций . .	350
Дополнение 2 к гл. 8. Слабая сходимость и дельта-функция	353

Глава 9. Несобственные интегралы	358
§ 1. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования	358
1. Определения; примеры (358). 2. Сведение несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ к числовой последовательности и числовому ряду (362). 3. Критерий Коши для несобственных интегралов (364). 4. Абсолютная сходимость. Признаки абсолютной сходимости (366). 5. Условная сходимость (372). 6. Распространение методов вычисления интегралов на случай несобственных интегралов (374).	
§ 2. Интегралы от неограниченных функций с конечными и бесконечными пределами интегрирования	375
§ 3. Главное значение расходящегося интеграла	383
§ 4. Несобственные кратные интегралы	387
1. Интеграл от неограниченной функции по ограниченной области (387). 2. Интегралы от неотрицательных функций (389). 3. Абсолютная сходимость (393). 4. Признаки абсолютной сходимости (394). 5. Эквивалентность сходимости и абсолютной сходимости (397). 6. Несобственные интегралы с неограниченной областью интегрирования (399). 7. Методы вычисления несобственных кратных интегралов (400).	
Глава 10. Интегралы, зависящие от параметра	402
§ 1. Собственные и простейшие несобственные интегралы, зависящие от параметра	402
1. Собственные интегралы, зависящие от параметра (402). 2. Простейшие несобственные интегралы, зависящие от параметра (407).	
§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра	410
1. Понятие равномерной сходимости (411). 2. Сведение несобственного интеграла, зависящего от параметра, к последовательности функций (413). 3. Свойства равномерно сходящихся интегралов, зависящих от параметра (416). 4. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра (423). 5. Примеры вычисления несобственных интегралов с помощью дифференцирования и интегрирования по параметру (428).	
§ 3. Эйлеровы интегралы	434
1. Свойства гамма-функции (435). 2. Свойства бета-функции (438).	
§ 4. Кратные собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметров	442
Глава 11. Ряды Фурье и интеграл Фурье	449
§ 1. Предварительные сведения о периодических функциях и постановке основной задачи	449
1. Периоды периодической функции (449). 2. Периодическое продолжение непериодической функции (450). 3. Интеграл от	

периодической функции (451). 4. Арифметические действия над периодическими функциями (451). 5. Суперпозиция гармоник с кратными частотами (452). 6. Постановка основной задачи (453). 7. Ортогональность тригонометрической системы; коэффициенты Фурье и ряд Фурье (453). 8. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций (456). 9. Разложение функций на отрезке $[-\pi, \pi]$ (458).	
§ 2. Основная теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье	459
1. Класс кусочно-гладких функций (459). 2. Формулировка основной теоремы о сходимости тригонометрического ряда Фурье (461). 3. Основная лемма (461). 4. Доказательство основной теоремы сходимости (463). 5. Примеры (467). 6. Разложение функций, заданных на отрезке $[0, 1]$, только по синусам или только по косинусам (472).	
§ 3. Ряды Фурье по ортогональным системам. Неравенство Бесселя	474
1. Ортогональные системы функций (474). 2. Коэффициенты Фурье и ряд Фурье функции $f(x)$ по ортогональной системе (476). 3. Задача о наименьшем квадратичном отклонении. Тождество Бесселя. Неравенство Бесселя (477).	
§ 4. Связь между степенью гладкости функции и скоростью сходимости ее тригонометрического ряда Фурье. Понятие улучшения сходимости	481
1. Условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье (481). 2. Связь между степенью гладкости функции и скоростью сходимости ее тригонометрического ряда Фурье (484). 3. Понятие улучшения сходимости тригонометрического ряда Фурье (489).	
§ 5. Равномерная аппроксимация непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими многочленами; теоремы Вейерштрасса	491
§ 6. О полноте и замкнутости ортогональных систем	495
1. Понятие полноты ортогональной системы (496). 2. Критерий полноты — равенство Парсеваля (496). 3. Свойства полных систем (497). 4. Полнота основной тригонометрической системы (499). 5. Полнота других классических ортогональных систем (502).	
§ 7. Ряды Фурье по ортогональным системам комплексных функций и комплексная запись тригонометрического ряда Фурье	503
§ 8. Тригонометрические ряды Фурье для функций нескольких независимых переменных	507
§ 9. Интеграл Фурье	510
1. Неограниченное растяжение интервала разложения функции в ряд Фурье и интегральная формула Фурье (510). 2. Обоснование интегральной формулы Фурье (511). 3. Интеграл Фурье как разложение в сумму гармоник (516). 4. Комплексная форма интеграла Фурье (517). 5. Преобразование Фурье (518). 6. Интеграл Фурье для функций нескольких независимых переменных (521).	

Дополнение 1 к гл. 11. О полиномах Лежандра	527
Дополнение 2 к гл. 11. Ортогональность с весом и ортогонализация	529
Дополнение 3 к гл. 11. Функциональное пространство и геометрические аналогии	535
Дополнение 4 к гл. 11. О некоторых применениях преобразования Фурье	539
Дополнение 5 к гл. 11. Разложение δ -функции в ряд Фурье и интеграл Фурье	544
Дополнение 6 к гл. 11. Равномерная аппроксимация функций многочленами	546
Дополнение 7 к гл. 11. Об устойчивом суммировании рядов Фурье с возмущенными коэффициентами	551
Д о б а в л е н и е 1. Об асимптотических разложениях	556
§ 1. Примеры асимптотических разложений	556
1. Асимптотические разложения в окрестности нуля (556).	
2. Асимптотические разложения в окрестности бесконечности (557).	
§ 2. Некоторые общие определения и теоремы	560
1. Соотношения порядка. Асимптотическая эквивалентность (560).	
2. Асимптотические разложения функций (562).	
§ 3. Метод Лапласа для асимптотического разложения некоторых интегралов	568
Д о б а в л е н и е 2. Некоторые сведения об универсальных вычислительных машинах	573
§ 1. Общие сведения о вычислительных машинах	573
1. Введение (573). 2. Основные типы вычислительных машин (574).	
3. Основные узлы УЦВМ и их назначение (575). Системы счисления, используемые в УЦВМ (578). 5. Представление чисел в вычислительной машине (579).	
§ 2. Основные операции, выполняемые УЦВМ. Команды	580
1. Типы операций (580). 2. Основные арифметические операции (581). 3. Дополнительные операции вычислительного назначения (582). 4. Поразрядные (логические) операции (582). 5. Операции обращения к внешним устройствам (583). 6. Операции передачи управления (584). 7. Осуществление операций в машине (585).	
§ 3. Элементы программирования	586
1. Общие сведения (586). 2. Программирование по формулам (587). 3. Циклические процессы (589). 4. Блок-схемное программирование. Подпрограммы (592). 5. Коды команд. Операции над командами (593). 6. Об автоматизации программирования (595).	
§ 4. Некоторые вопросы организации работы на УЦВМ	596
1. Условия, определяющие эффективность применения на УЦВМ (596). 2. Основные этапы решения задачи с применением УЦВМ (596). 3. Методы предупреждения и обнаружения ошибок счета (597).	
Литература	599
Предметный указатель	600

ОТ РЕДАКТОРОВ СЕРИИ

Кратные, криволинейные и несобственные интегралы, теория поля, степенные и тригонометрические ряды — это те разделы математики, с которыми каждому физику приходится встречаться достаточно часто. Им и посвящена эта книга. Такие важные для читателя-физика вопросы, как, например, теория поля, ряды и интегралы Фурье, изложены здесь несколько шире, чем это делается обычно в общих курсах анализа. Кроме того, в книге излагаются элементы дифференциальной геометрии, а также сведения о тензорах, об асимптотических разложениях и о вычислительных машинах, что обычно не входит в традиционные руководства по анализу.

Эта книга представляет собой второй выпуск серии «Курс высшей математики и математической физики». Вместе с первым выпуском она соответствует программе курса анализа для физических и физико-математических факультетов.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Этот выпуск, как и остальные выпуски, входящие в серию, написан на основе опыта чтения лекций на физическом факультете МГУ. В нашем изложении мы старались показать связи между различными математическими понятиями, их применения и, если это возможно, их физический смысл, уделяя также должное внимание алгоритмической, вычислительной стороне дела. Главы 1—6 и добавление о вычислительных машинах написаны С. В. Фоминым, главы 7—11 и добавление об асимптотических разложениях — Б. М. Будаком, однако общий план и детали изложения неоднократно обсуждались совместно.

При работе над книгой нам оказали помощь своими советами наши товарищи по кафедре В. А. Ильин, Э. Г. Позняк, А. Г. Свешников и др. Особенно большую и ценную помощь мы получили от А. Н. Тихонова. Ряд важных замечаний сделали Н. В. Ефимов и Л. Д. Кудрявцев, прочитавшие книгу в рукописи. Всем этим лицам авторы выражают глубокую благодарность.

Авторы

ГЛАВА 1

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Понятие определенного интеграла

$$\int_a^b f(x) dx$$

связано с такими задачами, как вычисление пройденного пути по заданной скорости, нахождение площади криволинейной трапеции и т. д. Существует много задач, аналогичных названным, но относящихся к функциям не одной, а несколько x , скажем двух, независимых переменных. Типичная задача такого рода — нахождение объема криволинейного цилиндра (трехмерный аналог криволинейной трапеции).

Под криволинейным цилиндром с основанием F , лежащим в плоскости xu , понимается тело T , ограниченное этим основанием, некоторой поверхностью $z = f(x, y)$ и боковой цилиндрической поверхностью (рис. 1.1). Объем такого тела естественно искать следующим образом. Разобьем основание F сетью кривых на ячейки F_i ; тогда весь цилиндр T разобьется на цилиндрические столбики T_i , основаниями которых служат ячейки F_i . Ясно, что объем цилиндра T следует считать равным сумме объемов составляющих его столбиков T_i .

Чтобы вычислить объем столбика T_i , выберем в F_i некоторую точку (ξ_i, η_i) и заменим цилиндрический столбик T_i с «кривым» верхним основанием «настоящим» цилиндром с постоянной высотой, равной $f(\xi_i, \eta_i)$, и тем же основанием F_i . Иначе говоря, объем столбика T_i примем (приближенно) равным

$$f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i,$$

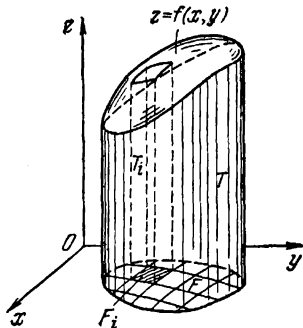


Рис. 1.1.

где ΔS_i — площадь ячейки F_i . За приближенное значение объема всего цилиндра T примем сумму

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i, \quad (1.1)$$

взятую по всем ячейкам, на которые разбито основание F . Интуитивно ясно, что сумма (1.1) будет представлять объем цилиндра T с точностью тем большей, чем меньше размеры ячеек F_i . Для получения точного значения этого объема нужно в выражении (1.1) перейти к пределу, неограниченно уменьшая размеры ячеек F_i .

Этот предельный переход и приведет нас к понятию интеграла от функции $f(x, y)$ двух независимых переменных — так называемому *двойному интегралу*. Изучение двойных интегралов составит содержание настоящей главы.

Очевидна аналогия между изложенными (пока лишь наводящими) рассуждениями и построением определенного интеграла на отрезке. Отличие их состоит лишь в том, что здесь рассматриваются функции не одной, а двух переменных, а вместо длин отрезков Δx_i берутся площади тех ячеек F_i , на которые разбивается фигура F , служащая основанием цилиндра.

Помимо задачи о вычислении объема криволинейного цилиндра, существует много других задач, также связанных с понятием двойного интеграла. Некоторые из них будут рассмотрены в § 4 этой главы.

Ряд физических и геометрических задач приводит к понятию интеграла от функций трех и большего числа переменных. Изучению таких интегралов будет посвящена следующая глава.

Уже рассмотренная выше задача о вычислении объема криволинейного цилиндра показывает, что понятие двойного интеграла существенно опирается на понятие площади криволинейной плоской фигуры, поскольку в выражение (1.1) входят площади ΔS_i криволинейных ячеек F_i , на которые мы разбили основание цилиндра. Поэтому, хотя с понятием площади читателю приходилось встречаться и раньше*), мы начнем эту главу с краткого изложения основных сведений о площадях.

§ 1. Некоторые вспомогательные понятия. Площадь плоской фигуры

1. Граничные и внутренние точки. Область. Напомним некоторые необходимые для дальнейшего понятия. Пусть a — некоторая точка на плоскости. Открытый круг радиуса ε с центром

*) См. вып. 1, гл. 11, § 2.

в точке a *) называется ε -окрестностью или просто *окрестностью* этой точки. Точка a , принадлежащая данному множеству A , называется его *внутренней точкой*, если некоторая «достаточно малая» ε -окрестность точки a целиком состоит из точек множества A . Множество, все точки которого внутренние, называется *открытым множеством*. Говорят, что открытое множество G *связно*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей G . Связное открытое множество короче называется *областью*.

Например, совокупность точек, координаты которых удовлетворяют условию $x^2 + y^2 < 1$, есть область (рис. 1.2, а). Множество, состоящее из двух кругов $x^2 + y^2 < 1$ и $(x - 2)^2 + y^2 < 1$, не область: оно открыто, но не связно (рис. 1.2, б).

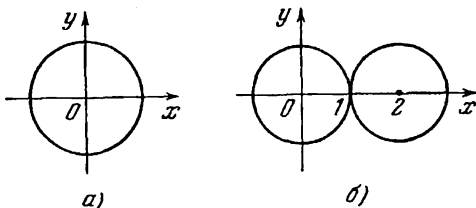


Рис. 1.2.

Точка a называется *границей* для множества A , если любая ее окрестность содержит точки, как принадлежащие, так и не принадлежащие A . Сама граничная точка при этом может принадлежать A , а может ему и не принадлежать. В частности, открытое множество не содержит ни одной своей граничной точки. Совокупность всех граничных точек множества называется его *границей*. Множество, содержащее все свои граничные точки, называется *замкнутым*. Каждое множество может быть превращено в замкнутое присоединением к нему всех его граничных точек. В частности, присоединив к некоторой области G все ее граничные точки, мы получим множество, называемое *замкнутой областью*.

Точка a называется *предельной* для множества A , если в A существует последовательность попарно различных точек $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, сходящаяся к a . Предельная точка множества A может принадлежать, а может и не принадлежать A . Замкнутые множества, и только они, содержат все свои предельные точки. (Докажите это!)

Множество называется *ограниченным*, если его можно поместить внутри некоторого достаточно большого круга. Пусть A — ограниченное множество. Обозначим $\rho(a_1, a_2)$ расстояние между двумя его произвольными точками. Пусть теперь a_1 и a_2 пробегают (независимо друг от друга) все множество A . Ясно, что множество чисел $\rho(a_1, a_2)$ ограничено сверху ($\rho(a_1, a_2)$ не может превысить диаметр круга,

*) То есть совокупность всех точек плоскости, расстояние которых от a строго меньше ε .

в котором помещается A). Точная верхняя грань чисел $\rho(a_1, a_2)$ называется *диаметром* $d(A)$ множества A (рис. 1.3).

Если множество A есть часть множества B (или совпадает с ним), то мы будем обозначать это, как обычно, символом $A \subset B$. Принадлежность точки a множеству A записывается так: $a \in A$.



Рис. 1.3.

Объединение двух множеств A и B , т. е. совокупность точек, принадлежащих хотя бы одному из них, мы обозначим $A + B$, а *общую часть* множеств A и B , т. е. совокупность точек, принадлежащих и A и B одновременно, обозначим AB .

2. Расстояние между множествами. Введем еще одно понятие, которое нам понадобится при доказательстве теоремы существования двойного интеграла.

Пусть A и B — два произвольных множества на плоскости. Назовем *расстоянием между множествами* A и B число

$$\rho(A, B) = \inf \rho(a, b), \quad (1.2)$$

где точная нижняя грань берется по всем парам $a \in A$, $b \in B$. Ясно, что если A и B имеют хотя бы одну общую точку, то $\rho(A, B) = 0$. Обратное, вообще говоря, не верно; например, расстояние между гиперболой $y = \frac{1}{x}$ и осью x равно нулю, хотя эти две линии не имеют общих точек. Справедлива, однако, следующая теорема, которая нам понадобится в § 2.

Теорема 1.1 (отделимость замкнутых множеств). Если P и Q — ограниченные замкнутые множества без общих точек, то $\rho(P, Q) > 0$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть $\rho(P, Q) = 0$. Тогда, по определению расстояния между множествами, для каждого $n = 1, 2, \dots$ найдутся такие точки $p_n \in P$ и $q_n \in Q$, что

$$\rho(p_n, q_n) < \frac{1}{n}. \quad (1.3)$$

Так как $\{p_n\}$ — ограниченная бесконечная последовательность, то по теореме Больцано — Вейерштрасса (см. вып. 1, гл. 14, § 2) из нее можно выбрать подпоследовательность

$$p_{n_1}, p_{n_2}, \dots, p_{n_k}, \dots$$

сходящуюся к некоторой точке p_0 . Но тогда соответствующие точки

$$q_{n_1}, q_{n_2}, \dots, q_{n_k}, \dots$$

из последовательности $\{q_n\}$ образуют подпоследовательность, сходящуюся, в силу (1.3), к той же самой точке p_0 .

Точка p_0 обязательно принадлежит множеству P . В самом деле, здесь возможны два случая. Либо подпоследовательность $\{p_{n_k}\}$ содержит бесконечно много различных точек, тогда p_0 будет предельной для P и, в силу замкнутости P , $p_0 \in P$; либо же подпоследовательность $\{p_{n_k}\}$ стабилизируется, т. е. все ее точки, начиная с некоторого места, совпадают. Тогда, очевидно, они совпадают с p_0 и $p_0 \in P$. По тем же причинам $p_0 \in Q$. Но тогда P и Q имеют общую точку, что противоречит условию теоремы.

У п р а ж н е н и е. Убедиться, что теорема верна, когда из двух замкнутых множеств P и Q ограничено хотя бы одно.

3. Площадь плоской фигуры. Из элементарной геометрии известно понятие площади многоугольной фигуры. (Под многоугольной фигурой мы понимаем множество, составленное из конечного числа ограниченных многоугольников (рис. 1.4.)

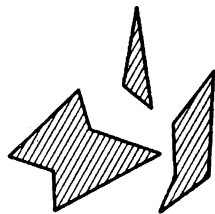


Рис. 1.4.

Площадь многоугольной фигуры — это число, обязательно неотрицательное*), обладающее следующими свойствами:

1 (монотонность). Если P и Q — две многоугольные фигуры и P целиком лежит внутри Q , то

$$\text{пл } P \leq \text{пл } Q.$$

2 (аддитивность). Если P_1 и P_2 — две многоугольные фигуры без общих внутренних точек и $P_1 + P_2$ означает объединение этих фигур, то

$$\text{пл}(P_1 + P_2) = \text{пл } P_1 + \text{пл } P_2 **).$$

3 (инвариантность). Если многоугольные фигуры P_1 и P_2 конгруэнтны между собой, то

$$\text{пл}(P_1) = \text{пл}(P_2).$$

Распространим теперь понятие площади, сохранив все три свойства, с многоугольных фигур на некоторый более широкий класс фигур. Эта задача решается следующим способом.

*) Нулем оно будет, разумеется, лишь тогда, когда многоугольная фигура вырождается в конечное число точек или отрезков.

**) Легко убедиться в том, что требования 1 и 2 не независимы: монотонность площади вытекает из ее неотрицательности и условия аддитивности. Действительно, если многоугольная фигура P лежит внутри многоугольной фигуры Q , то Q можно представить как объединение P и многоугольной фигуры, которую естественно назвать разностью между Q и P и обозначить $Q - P$. Тогда (по аддитивности) $\text{пл } Q = \text{пл } P + \text{пл}(Q - P)$, но так как $\text{пл}(Q - P) \geq 0$, то $\text{пл } Q \geq \text{пл } P$.

Пусть F — некоторая плоская фигура*). Будем рассматривать всевозможные многоугольные фигуры P , целиком лежащие внутри F , и многоугольные фигуры Q , целиком содержащие F . Фигуры P будем называть вложенными, а фигуры Q — объемлющими. Площади вложенных фигур ограничены в совокупности сверху (например, площадью любой объемлющей фигуры), а площади объемлющих фигур ограничены снизу (например, нулем). Поэтому существуют точная верхняя грань**)

$$S_* = S_*(F) = \sup_{P \subset F} (\text{пл } P)$$

площадей всех многоугольных фигур, вложенных в фигуру F , и точная нижняя грань

$$S^* = S^*(F) = \inf_{Q \supset F} (\text{пл } Q)$$

площадей всех многоугольных фигур, объемлющих F .

Величина S_* называется *внутренней площадью* фигуры F , а S^* — ее *внешней площадью*. Из того, что площадь любой вложенной фигуры не больше, чем площадь любой объемлющей, следует:

$$S_* \leq S^*.$$

Если $S_* = S^*$, то их общее значение S называется просто *площадью фигуры F* . Сама фигура F при этом называется *имеющей площадь* или *квадрируемой*.

Итак, мы распространили понятие площади с многоугольников на некоторый, более широкий класс фигур***). Сохранение основных свойств площади (аддитивность, монотонность и инвариантность) будет доказано в п. 4.

Установим следующее, полезное для дальнейшего условие квадрируемости фигуры.

Теорема 1.2. *Фигура F квадрируема в том и только том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся две такие многоугольные фигуры $P \subset F$ и $Q \supset F$, что*

$$\text{пл } Q - \text{пл } P < \varepsilon. \quad (1.4)$$

Доказательство. Действительно, если такие фигуры существуют, то из

$$\text{пл } P \leq S_* \leq S^* \leq \text{пл } Q$$

*) То есть некоторое *ограниченное* множество точек на плоскости.

**) Если в фигуру F нельзя вписать ни одного многоугольника, то мы полагаем по определению, что $S_* = 0$.

***) Ясно, что всякая многоугольная фигура представляет собой квадрируемую (в указанном выше смысле) фигуру и для нее новое определение площади (с помощью S_* и S^*) дает исходную величину этой площади.

получаем, что

$$0 \leq S^* - S_* < \varepsilon,$$

а так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $S^* = S_*$.

Обратно, если $S^* = S_*$, то, по определению точных граней, для заданного $\varepsilon > 0$ найдутся вложенная фигура P и объемлющая фигура Q такие, что

$$S_* - \frac{\varepsilon}{2} < \text{пл } P \leq S_*, \quad S^* \leq \text{пл } Q < S^* + \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$\text{пл } Q - \text{пл } P < \varepsilon.$$

Совокупность точек, принадлежащих Q , но не принадлежащих P , представляет собой многоугольную фигуру площади $\text{пл } Q - \text{пл } P$, содержащую границу фигуры F . Поэтому условие теоремы 1.2 означает, что фигура F квадратуема в том и только том случае, если ее граница может быть погружена в многоугольную фигуру сколь угодно малой площади (рис. 1.5).

С помощью этой теоремы легко установить квадратуемость ряда фигур, отличных от многоугольных, например квадратуемость круга. В качестве P и Q для круга можно взять правильный вписанный и правильный описанный многоугольники с достаточно большим числом сторон.

Собственно говоря, тот вывод формулы площади круга, который обычно приводится в школьном курсе геометрии, основан на тех же самых рассуждениях, которые здесь излагаются в общем виде.

Введем следующую терминологию. Будем говорить, что некоторое множество, в частности кривая, имеет *площадь нуль*, если его можно заключить в многоугольную фигуру сколь угодно малой площади. Мы можем теперь сформулировать теорему 1.2 иначе.

Теорема 1.2'. Для того чтобы фигура F была квадратуемой, необходимо и достаточно, чтобы ее граница имела площадь нуль.

Опираясь на эту теорему, мы опишем сейчас некоторый класс заведомо квадратуемых фигур, достаточно широкий для того, чтобы ограничиться им во всех дальнейших рассмотрениях.

Лемма. Всякая спрямляемая *) кривая имеет площадь нуль.

*) Спрямляемой называется кривая, имеющая конечную длину. Как известно (см. вып. 1, гл. II, § 1), если кривая задана уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные функции, имеющие непрерывные (или кусочно-непрерывные) производные, то она спрямляема.

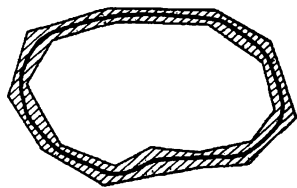


Рис. 1.5.

Доказательство. Пусть L — спрямляемая кривая и l — ее длина. Разобьем эту кривую с помощью $n+1$ точек на части, длина каждой из которых меньше чем $\frac{l}{n}$ (это, разумеется, всегда возможно), и примем каждую из этих точек за центр квадрата со стороной $\frac{2l}{n}$ (рис. 1.6). Сумма этих квадратов представляет собой многоугольную

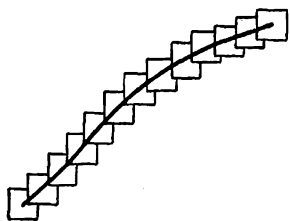


Рис. 1.6.

фигуру, объемлющую кривую L , а площадь этой многоугольной фигуры не превосходит суммы площадей составляющих ее квадратов, т. е. $\frac{4l^2}{n^2}(n+1)$. Так как l фиксировано, а n можно взять произвольно большим, то кривую L действительно можно погрузить внутрь фигуры сколь угодно малой площади. Лемма доказана.

Из этой леммы и теоремы 1.2' получаем:

Всякая плоская фигура (т. е. ограниченное плоское множество), граница которой состоит из одной или нескольких спрямляемых кривых, квадратуема.

Именно этот класс фигур мы и будем, как правило, рассматривать в дальнейшем.

Замечание. Укажем еще один класс плоских квадратуемых фигур. Всякая кривая, определяемая уравнением

$$y = f(x), \quad a \leq x \leq b,$$

где $f(x)$ — непрерывная функция, или уравнением $x = g(y)$, $c \leq y \leq d$, где $g(y)$ тоже непрерывна, имеет площадь нуль. (Доказательство этого было дано в гл. II вып. 1.) Отсюда, в силу теоремы 1.2', следует, что всякая фигура, граница которой представима в виде конечного числа непрерывных кривых, задаваемых уравнениями вида $y = f(x)$ или $x = g(y)$, квадратуема.

4. Основные свойства площади. Покажем теперь, что введенное нами определение площади плоской фигуры действительно обладает свойствами монотонности, аддитивности и инвариантности.

Монотонность почти непосредственно вытекает из определения площади, и ее проверка может быть предоставлена читателю. Установим аддитивность, т. е. докажем следующее предложение:

1) Пусть F_1 и F_2 — две квадратуемые фигуры без общих внутренних точек и F — их объединение (рис. 1.7); тогда F тоже квадратуема и

$$\text{пл } F = \text{пл } F_1 + \text{пл } F_2. \quad (1.5)$$

Квадрируемость фигуры F следует из теоремы 1.2' и того, что ее граница составлена из множеств площади нуль, ограничивающих фигуры F_1 и F_2 (она является частью объединения границ фигур F_1 и F_2)*). Остается доказать равенство (1.5).

Для этого рассмотрим многоугольные фигуры P_1 и P_2 , вложенные в F_1 и F_2 соответственно, и многоугольные фигуры Q_1 и Q_2 , объемлющие соответственно F_1 и F_2 . Фигуры P_1 и P_2 не пересекаются, поэтому площадь многоугольной фигуры, составленной из P_1 и P_2 , равна $\text{пл } P_1 + \text{пл } P_2$. Фигуры Q_1 и Q_2 (возможно, пересекающиеся) составляют в сумме фигуру Q , площадь которой не превосходит $\text{пл } Q_1 + \text{пл } Q_2$. Таким образом, имеем

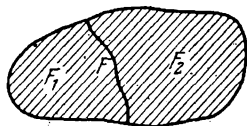


Рис. 1.7.

$$\text{пл } P = \text{пл } P_1 + \text{пл } P_2 \leq \text{пл } F \leq \text{пл } Q \leq \text{пл } Q_1 + \text{пл } Q_2$$

и

$$\text{пл } P_1 + \text{пл } P_2 \leq \text{пл } F_1 + \text{пл } F_2 \leq \text{пл } Q_1 + \text{пл } Q_2.$$

Так как разности $\text{пл } Q_1 - \text{пл } P_1$ и $\text{пл } Q_2 - \text{пл } P_2$ могут быть сделаны сколь угодно малыми, то отсюда следует равенство (1.5). Аддитивность доказана.

Наконец, свойство инвариантности площади непосредственно вытекает из инвариантности площади для многоугольных фигур и самого способа определения площади квадрируемых фигур через площади многоугольников. Укажем еще одно свойство квадрируемых фигур.

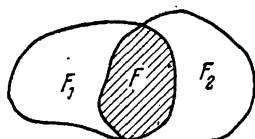


Рис. 1.8.

2) *Общая часть двух квадрируемых фигур есть квадрируемая фигура.*

Действительно, если F_1 и F_2 — какие-либо две фигуры и F — их общая часть (рис. 1.8), то каждая точка, граничная для F , является граничной либо для F_1 , либо для F_2 . Поэтому наше утверждение следует из теоремы 1.2' и того факта, что объединение множеств площади нуль само имеет площадь нуль.

5. О понятии меры множества. Введенное в этом параграфе понятие площади называют понятием площади по Жордану**), или *мерой Жордана*. Это понятие имеет, однако, некоторые недостатки. Действительно, выше было показано, что объединение двух квадрируемых фигур есть квадрируемая фигура. Отсюда, конечно, немедленно следует, что и объединение любого конечного числа квадрируемых фигур есть квадрируемая фигура. Однако если мы рассмотрим некоторую последовательность квадрируемых фигур

$$F_1, F_2, \dots, F_n, \dots$$

*) Очевидно, что всякая часть множества площади нуль сама является множеством площади нуль.

**) Камилл Жордан (1838—1922) — французский математик.

то их объединение может быть уже и не квадратируемой фигурой. Вот простой пример. Рассмотрим на плоскости квадрат

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1,$$

и отметим в нем точки с рациональными координатами. Нетрудно показать, что все эти точки образуют счетное множество, т. е. что их можно расположить в виде последовательности

$$p_1 = (x_1, y_1), p_2 = (x_2, y_2), \dots, p_n = (x_n, y_n), \dots$$

Возьмем теперь некоторое число $\varepsilon > 0$ и построим круг радиуса $r_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ с центром в точке p_1 . Далее, возьмем первую из точек p_2, p_3, \dots , не попавшую в этот круг, и построим с центром в этой точке круг радиуса $r_2 < \frac{\varepsilon}{2^2}$, не пересекающийся с первым кругом. После этого возьмем первую из оставшихся точек, не попавшую в построенные круги, и примем ее за центр круга радиуса $r_3 < \frac{\varepsilon}{2^3}$, не пересекающегося с двумя уже построенными кругами.

Будем продолжать такое построение до бесконечности. Мы получили последовательность помещенных внутри квадрата кругов (без общих точек), расположенных в этом квадрате «всюду плотно^{*)}». Нетрудно показать (сделайте это), что *объединение этих кругов представляет собой фигуру F , не квадратируемую в смысле Жордана*. Вместе с тем этой фигуре естественно приписать площадь, равную сумме площадей составляющих ее кругов. Эта сумма, очевидно, равна

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi r_i^2 < \sum_{i=1}^{\infty} \pi \frac{\varepsilon^2}{2^{2i}} = \frac{1}{3} \pi \varepsilon^2.$$

Подобные затруднения отпадают, если вместо понятия меры Жордана пользоваться более гибким и совершенным понятием *меры Лебега^{**)}*, которое мы, к сожалению, не можем здесь излагать.

§ 2. Определение и основные свойства двойного интеграла

1. Определение двойного интеграла. Перейдем к основной теме этой главы — понятию двойного интеграла. Пусть G — некоторая квадратируемая фигура, и пусть в G определена ограниченная функция $f(x, y)$. Разобьем G на конечное число непересекающихся квадратируемых частей G_i и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i, \quad (1.6)$$

где ΔS_i — площадь G_i , а (ξ_i, η_i) — произвольная точка, принадлежащая G_i . Суммы вида (1.6) будем называть *интегральными суммами*

^{*)} Это означает, что объединение этих кругов представляет собой множество, замыкание которого есть весь квадрат.

^{**) Анри Лебег (1875—1941) — французский математик, один из создателей современной теории функций.}

(отвечающими функции $f(x, y)$ и фигуре G). Введем понятие предела интегральных сумм (1.6) следующим образом.

Определение 1. Пусть D — наибольший из диаметров $d(G_i)$ фигур G_i . Мы скажем, что число J есть предел интегральных сумм (1.6) при $D \rightarrow 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|\sigma - J| < \varepsilon \quad (1.7)$$

как только

$$D < \delta. \quad (1.8)$$

Иными словами, неравенство (1.7) должно выполняться для всех интегральных сумм σ , соответствующих разбиениям $G = G_1 + G_2 + \dots + G_n$, которые удовлетворяют условию (1.8) независимо от вида разбиения фигуры G на части G_i и независимо от выбора точки (ξ_i, η_i) в каждом из элементов разбиения.

Определение 2. Если предел

$$\lim_{D \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$$

интегральных сумм (1.6) существует, то он называется двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по области G и обозначается символом $\iint_G f(x, y) ds$ или $\iint_G f(x, y) dx dy$. Сама функция $f(x, y)$ при этом называется интегрируемой по фигуре G .

Иногда понятие двойного интеграла вводят несколько иначе. Фигуру G , взятую из того или иного класса фигур, разбивают прямыми, параллельными осям координат на прямоугольные ячейки (рис. 1.9). В каждой из ячеек G_i выбирают по точке (ξ_i, η_i) и составляют сумму $\sigma = \sum f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$. Сумму берут, скажем, по всем ячейкам, лежащим внутри G , игнорируя ячейки, прилегающие к границе G (их суммарная площадь мала). Затем переходят к пределу, когда максимальный диаметр ячейки стремится к нулю. Неудобство этого определения состоит в том, что оно по форме привязано к определенной системе координат на плоскости, в то время как интуитивно ясно, что интеграл

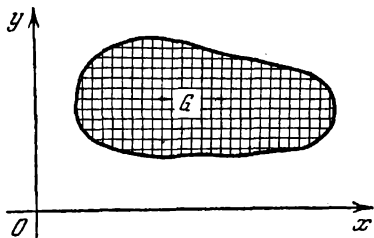


Рис. 1.9.

$\iint_G f(x, y) ds$, т. е. объем цилиндрического тела, не должен зависеть от выбора системы декартовых координат на плоскости. Определение с прямоугольными ячейками потребовало бы специального доказательства этого факта. При нашем определении это получается автоматически. Изложенное выше определение обладает и другими преимуществами. Пусть, скажем, функция $f(x, y)$ принимает на G только два значения: a_1 и a_2 (рис. 1.10).

Если части G_1 и G_2 , на которых $f(x, y)$ равна a_1 и a_2 соответственно, квадратуемы, то наше определение позволяет получить интеграл $\iint_G f(x, y) ds$,

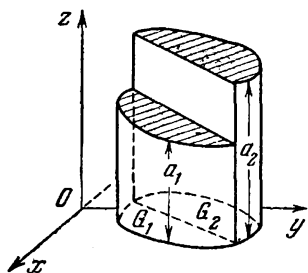


Рис. 1.10.

по существу, без предельного перехода. Интуитивно очевидно, что

$$\iint_G f(x, y) ds = \text{пл } G_1 \cdot a_1 + \text{пл } G_2 \cdot a_2$$

(доказать!). Определение с прямоугольными ячейками потребовало бы даже в этом очевидном случае кропотливого предельного перехода.

Вместе с тем следует подчеркнуть, что оба указанных пути приводят к одному и тому же понятию двойного интеграла.

2. Условия существования двойного интеграла. Верхние и нижние суммы.

Выясним, какие условия нужно наложить на функцию $f(x, y)$, определенную на некоторой квадратуемой фигуре G , для того, чтобы можно было гарантировать существование двойного интеграла

$$\iint_G f(x, y) ds.$$

Вводя определение двойного интеграла, мы предполагали, что соответствующая функция $f(x, y)$ ограничена *). Однако, как легко показать на примерах, не всякая ограниченная функция интегрируема **).

*) В гл. 10 вып. 1 применительно к функциям одной переменной на отрезке было доказано, что всякая интегрируемая функция ограничена. Однако проведенные там рассуждения мы не можем полностью перенести на случай двух переменных. Действительно, рассматривая различные разбиения квадратуемой фигуры G на квадратуемую часть G_i , мы, вообще говоря, не сможем избежать случая, когда некоторые из этих элементов разбиения имеют площадь нуль. Но тогда из неограниченности функции не следует неограниченность ее интегральных сумм $\sum f(x_i, y_i) \Delta S_i$ при каждом разбиении (поскольку функция может оказаться неограниченной только на том элементе разбиения, который имеет площадь нуль). В случае одной переменной при разбиении промежутка интегрирования на непересекающиеся полуотрезки такое положение не возникает. В случае двух (или нескольких) переменных мы могли бы исключить появление элементов нулевой площади, сузив как класс рассматриваемых фигур, так и класс рассматриваемых разбиений. Другой возможный путь (который мы здесь и выбрали) состоит в том, чтобы заранее исключить из рассмотрения неограниченные функции.

**) Примером ограниченной, но не интегрируемой функции двух переменных может служить функция, определенная на квадрате $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ следующим образом: $f(x, y) = 1$, если x и y рациональны, и $f(x, y) = 0$ в противном случае. Доказательство неинтегрируемости такой функции представляется читателю.

Для нахождения условий интегрируемости удобно, как и в случае одной переменной, воспользоваться так называемыми нижними и верхними суммами Дарбу *).

Пусть $f(x, y)$ — ограниченная функция, определенная на квадратируемой фигуре G , и $\{G_i\}$ — некоторое разбиение этой фигуры. Обозначим M_i и m_i соответственно точную верхнюю и точную нижнюю грани значений $f(x, y)$ на элементе G_i . Суммы

$$\Omega = \sum_{i=1}^n M_i \Delta S_i \quad \text{и} \quad \omega = \sum_{i=1}^n m_i \Delta S_i$$

назовем соответственно *верхней и нижней суммами Дарбу* функции $f(x, y)$ (отвечающими данному разбиению $\{G_i\}$ фигуры G). Очевидно, что $\Omega \geq \omega$ для любого разбиения $\{G_i\}$.

Укажем основные свойства верхних и нижних сумм.

1) Для данного разбиения $\{G_i\}$ фигуры G верхняя и нижняя суммы представляют собой соответственно точную верхнюю и точную нижнюю грани интегральных сумм

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i,$$

отвечающих данному разбиению $\{G_i\}$ (и всевозможным выборам точек (ξ_i, η_i)). В частности, всегда

$$\omega = \sum_{i=1}^n m_i \Delta S_i \leq \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta S_i = \Omega.$$

Неравенство

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \leq \sum_{i=1}^n M_i \Delta S_i = \Omega$$

очевидно при любом выборе точки (ξ_i, η_i) на G_i .

С другой стороны, по определению точной верхней грани, для каждого $\varepsilon > 0$ можно в каждом из элементов данного разбиения $\{G_i\}$ выбрать точку (ξ_i, η_i) так, что $M_i - f(\xi_i, \eta_i) < \frac{\varepsilon}{S}$ (S — площадь области G). Но тогда

$$\Omega - \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^n (M_i - f(\xi_i, \eta_i)) \Delta S_i < \frac{\varepsilon}{S} \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \varepsilon.$$

Для нижней суммы рассуждения аналогичны.

*) Гастон Дарбу — французский математик (1842—1917).

Назовем разбиение $\{G'_j\}$ *измельчением* разбиения $\{G_i\}$, если каждый элемент G_i второго разбиения либо служит элементом первого разбиения, либо представляет собой объединение нескольких элементов этого первого разбиения. Справедливо следующее утверждение:

2) Если Ω и ω — верхняя и нижняя суммы, отвечающие разбиению $\{G_i\}$, а Ω' и ω' — верхняя и нижняя суммы, отвечающие некоторому его измельчению $\{G'_j\}$, то

$$\omega \leq \omega' \leq \Omega' \leq \Omega,$$

т. е. при измельчении разбиения верхняя интегральная сумма не увеличивается, а нижняя не уменьшается.

Действительно, пусть $\{G_i\}$ — некоторое разбиение фигуры G и $\{G'_j\}$ — его измельчение. Это означает, что каждый элемент G_i разбиения $\{G_i\}$ представляет собой сумму элементов $G'_{i\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \dots, k_i$, второго разбиения. При этом

$$\Delta S_i = \sum_{\alpha=1}^{k_i} \Delta S'_{i\alpha}, \quad (1.9)$$

$$M_i \geq M_{i\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \dots, k_i, \quad (1.10)$$

и каждый элемент G'_j входит в состав одного из G_i . Отсюда следует

$$\Omega = \sum_{i=1}^n M_i \Delta S_i \geq \sum_{i=1}^n \sum_{\alpha=1}^{k_i} M_{i\alpha} \Delta S'_{i\alpha} = \Omega'.$$

Аналогично доказывается неравенство $\omega \leq \omega'$.

3) Пусть $\{G'_i\}$ и $\{G''_j\}$ — два произвольных разбиения фигуры G , а Ω' , ω' и Ω'' , ω'' — отвечающие им верхние и нижние суммы. Тогда

$$\Omega' \geq \omega'', \quad \Omega'' \geq \omega',$$

т. е. любая верхняя сумма (отвечающая данной функции $f(x, y)$) не меньше, чем любая нижняя сумма (отвечающая той же функции). Для доказательства этого утверждения заметим прежде всего, что для любых двух разбиений $\{G'_i\}$ и $\{G''_j\}$ фигуры G найдется их «общее продолжение», т. е. такое разбиение, которое служит измельчением каждого из двух данных. В качестве элементов этого «общего продолжения» можно взять, например, пересечения произвольного элемента G'_i одного разбиения с произвольным элементом G''_j второго разбиения (нужно брать, конечно, только такие G'_i и G''_j , которые имеют общие точки).

Рассмотрим теперь верхние и нижние суммы, отвечающие разбиениям $\{G'_i\}$, $\{G''_j\}$ и их общему продолжению $\{\hat{G}_k\}$. Обозначим эти

суммы соответственно Ω' , ω' ; Ω'' , ω'' ; $\hat{\Omega}$, $\hat{\omega}$. Тогда по свойству 2)

$$\Omega' \geq \hat{\Omega}, \quad \Omega'' \geq \hat{\Omega}$$

и

$$\omega' \leq \hat{\omega}, \quad \omega'' \leq \hat{\omega}.$$

Кроме того, очевидно, имеет место неравенство

$$\hat{\omega} \leq \hat{\Omega}.$$

Таким образом,

$$\Omega' \geq \hat{\Omega} \geq \hat{\omega} \geq \omega''$$

и аналогично

$$\Omega'' \geq \hat{\Omega} \geq \hat{\omega} \geq \omega'.$$

Утверждение доказано.

Совокупность всех верхних сумм, отвечающих данной функции $f(x, y)$, ограничена снизу (например, любой нижней суммой), а совокупность всех нижних сумм ограничена сверху (например, любой верхней суммой). Обозначим \bar{J} точную нижнюю грань верхних сумм, а \underline{J} — точную верхнюю грань нижних сумм. Числа \bar{J} и \underline{J} называются *верхним* и *нижним интегралами функции* $f(x, y)$ (по области G). Имеет место неравенство

$$\underline{J} \leq \bar{J}.$$

Действительно, если бы имело место обратное неравенство, то нашлось бы число ε такое, что

$$\underline{J} - \bar{J} > \varepsilon > 0. \quad (1.11)$$

Далее, по определению точных граней, нашлись бы верхняя сумма Ω_1 и нижняя сумма ω_2 такие, что

$$\Omega_1 - \bar{J} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \underline{J} - \omega_2 < \frac{\varepsilon}{2},$$

т. е.

$$\Omega_1 - \omega_2 + (\underline{J} - \bar{J}) < \varepsilon,$$

откуда, в силу (1.11),

$$\Omega_1 - \omega_2 < 0,$$

что противоречит свойству 3).

Свойства 1) — 3) верхних и нижних сумм позволяют установить следующее необходимое и достаточное условие интегрируемости функции $f(x, y)$, вполне аналогичное необходимому и достаточному условию существования определенного интеграла (см. вып. 1, гл. 10, теорема 10.1).

Теорема 1.3. *Ограниченная на квадратуемой фигуре G функция $f(x, y)$ интегрируема на G в том и только том случае,*

если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение фигуры G , что отвечающие этому разбиению суммы Дарбу удовлетворяют условию $\Omega - \omega < \varepsilon$.

Доказательство этой теоремы опирается на следующую лемму Дарбу.

Лемма Дарбу. Верхний и нижний интегралы \bar{J} и \underline{J} служат соответственно пределами верхних и нижних интегральных сумм Дарбу при $D \rightarrow 0$. (D — максимум диаметров $d(G_i)$ элементов разбиения $\{G_i\}$ фигуры G .)

Для удобства введем понятие *границы разбиения*. Если дано разбиение $\{G_i\}$ фигуры G на квадратируемые элементы G_i , то под границей L разбиения $\{G_i\}$ мы будем понимать объединение границ L_i всех элементов G_i :

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_n.$$

Для всякого разбиения фигуры G на квадратируемые G_i границы L_i имеют площадь нуль, поэтому граница L разбиения $\{G_i\}$ также имеет площадь нуль.

Граница L как объединение конечного числа замкнутых множеств L_i является замкнутым множеством. (Это общее утверждение о замкнутых множествах читателю предлагается доказать!)

Перейдем теперь к доказательству леммы Дарбу.

Доказательство леммы Дарбу. По определению верхнего интеграла \bar{J} для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение $\{G_i^*\}$ фигуры G , что отвечающая ему верхняя сумма Ω^* удовлетворяет условию

$$0 \leq \Omega^* - \bar{J} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Заклучим границу L^* этого разбиения строго внутри некоторой многоугольной фигуры Q , площадь которой меньше чем $\frac{\varepsilon}{2M}$, где $M = \sup_{(x, y) \in G} |f(x, y)|$.

Граница L^* и граница многоугольной области Q — это два ограниченных замкнутых множества без общих точек (рис. 1.11). Следовательно, по теореме 1.1 расстояние между ними есть некоторая положительная величина α .

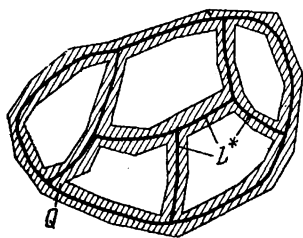


Рис. 1.11.

Рассмотрим теперь произвольное разбиение $\{G_k\}$ фигуры G , для которого $D < \alpha$. Элементы G_k этого разбиения обладают, очевидно, следующим свойством: если G_k имеет хотя бы одну общую точку с L^* , то G_k целиком лежит внутри области Q . Такие элементы G_k мы назовем *граничными*, а все остальные — *внутренними*. Покажем теперь, что всякому разбиению $\{G_k\}$, для которого $D < \alpha$, отвечает верхняя сумма Ω , отличающаяся от \bar{J} меньше чем на ε . Разобьем сумму Ω на два слагаемых:

$$\Omega = \sum_{k=1}^n M_k \Delta S_k = \sum' M'_k \Delta S'_k + \sum'' M''_k \Delta S''_k,$$

где первая сумма \sum' берется по всем внутренним, а вторая \sum'' по всем граничным элементам разбиения $\{G_k\}$. Оценим каждую из этих сумм в отдельности. Каждый внутренний элемент разбиения $\{G_k\}$ целиком лежит внутри некоторого элемента разбиения $\{G_i^*\}$. При этом соответствующая точная верхняя грань M'_k не превосходит, очевидно, точной верхней грани значений

функции $f(x, y)$ на этом элементе разбиения $\{G_i^*\}$. Отсюда следует, что

$$\sum' M'_k \Delta S'_k \leq \Omega^*.$$

Далее, очевидны неравенства

$$|M''_k| \leq M = \sup_{(x, y) \in G} |f(x, y)| \quad \text{при всех } k$$

и

$$\sum'' \Delta S''_k < \text{пл } Q < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Следовательно,

$$|\sum'' M_k \Delta S''_k| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и, значит,

$$\Omega = \sum' M'_k \Delta S'_k + \sum'' M''_k \Delta S''_k \leq \Omega^* + \frac{\varepsilon}{2} < J + \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. Для нижних сумм доказательство аналогично.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1.3.

Необходимость. Пусть $f(x, y)$ интегрируема и пусть задано $\varepsilon > 0$. Обозначим интеграл от $f(x, y)$ символом J . По определению предела интегральных сумм, для данного ε найдется такое $\delta > 0$, что для всякого разбиения $\{G_i\}$, для которого $D < \delta$, выполняется, независимо от выбора точек (ξ_i, η_i) , условие

$$\left| J - \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (1.12)$$

Далее, верхняя и нижняя суммы, отвечающие разбиению $\{G_i\}$, представляют собой соответственно точную верхнюю и точную нижнюю грани интегральных сумм, отвечающих этому разбиению. Поэтому, зафиксировав разбиение, можно выбрать точки (ξ'_i, η'_i) и (ξ''_i, η''_i) в элементах G_i этого разбиения так, чтобы выполнялись неравенства

$$\Omega - \sum_{i=1}^n f(\xi'_i, \eta'_i) \Delta S_i < \frac{\varepsilon}{4}; \quad \sum_{i=1}^n f(\xi''_i, \eta''_i) \Delta S_i - \omega < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (1.13)$$

Так как каждая из этих двух интегральных сумм удовлетворяет неравенству (1.12), то из (1.13) следует:

$$\Omega - \omega < \varepsilon.$$

Достаточность. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение, что

$$\Omega - \omega < \varepsilon,$$

то, очевидно,

$$\underline{J} = J.$$

Обозначим общее значение этих величин через J и покажем, что J представляет собой предел интегральных сумм, т. е. двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по G . В силу леммы Дарбу, J есть общий предел верхних и нижних сумм при $D \rightarrow 0$. Но так как любая интегральная сумма, отвечающая

некоторому разбиению, заключена между соответствующими суммами Ω и ω , то J есть предел интегральных сумм при $D \rightarrow 0$. Теорема доказана.

3. Важнейшие классы интегрируемых функций. С помощью теоремы 1.3 мы установим сейчас интегрируемость некоторых важных классов функций, в первую очередь непрерывных функций. Ниже мы будем считать, что каждая из рассматриваемых функций задана в некоторой замкнутой ограниченной квадратуемой области.

Теорема 1.4. *Всякая функция $f(x, y)$, непрерывная в замкнутой ограниченной*) области G , интегрируема на G .*

Доказательство. Поскольку $f(x, y)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве, она ограничена и равномерно непрерывна на этом множестве**). В силу равномерной непрерывности функции $f(x, y)$, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что как только фигура G разбита на части G_i , диаметр каждой из которых меньше δ , колебание функции $f(x, y)$ в каждой из этих частей, т. е. разность $M_i - m_i$, будет меньше чем ε . Но тогда

$$\Omega - \omega = \sum_{i=1}^n M_i \Delta S_i - \sum_{i=1}^n m_i \Delta S_i < \varepsilon \sum_{i=1}^n \Delta S_i = \varepsilon S,$$

следовательно, функция $f(x, y)$ интегрируема.

Требование непрерывности подынтегральной функции слишком стеснительно. Поэтому для приложений важна следующая теорема, гарантирующая существование двойного интеграла для некоторого класса разрывных функций.

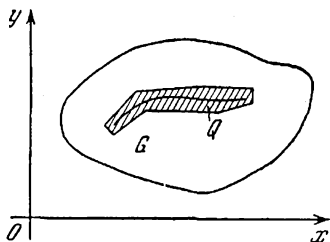


Рис. 1.12.

Теорема 1.4'. *Если функция $f(x, y)$ ограничена в замкнутой ограниченной области G и непрерывна на G всюду, кроме некоторого множества площади нуль, то $f(x, y)$ интегрируема в G .*

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию $f(x, y)$ ограничена, т. е. существует такое

K , что $|f(x, y)| < K$. Заклучим множество, на котором функция $f(x, y)$ может быть разрывной, внутрь многоугольной фигуры Q , площадь которой меньше чем $\frac{\varepsilon}{4K}$ (рис. 1.12). Часть области G , не входящую в Q , обозначим \tilde{G} . Граничные точки много-

*) И, конечно, к в а д р и р у е м о й; в дальнейшем мы всегда будем предполагать выполненным условие квадратуемости, не оговаривая этого особо.

**) См. вып. 1, гл. 14, теоремы 14.6 и 14.8.

угольной фигуры Q , принадлежащие G , мы причисляем к \tilde{G} , поэтому \tilde{G} замкнута. На замкнутом множестве \tilde{G} функция $f(x, y)$ непрерывна, а следовательно, и равномерно непрерывна. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы в любой части фигуры \tilde{G} , имеющей диаметр меньше чем δ , колебание функции $f(x, y)$ было бы меньше чем $\frac{\varepsilon}{2S}$ (где S — площадь G). Рассмотрим теперь такое разбиение $\{G_i\}$ области G : первым его элементом G_1 служит Q , а все остальные имеют диаметр, меньший чем δ . Оценим разность $\Omega - \omega$ для этого разбиения. Имеем

$$\begin{aligned}\Omega - \omega &= M_1 \Delta S_1 - m_1 \Delta S_1 + \sum_{i=2}^n (M_i - m_i) \Delta S_i < \\ &< (M_1 - m_1) \frac{\varepsilon}{4K} + \sum_{i=2}^n \frac{\varepsilon}{2S} \Delta S_i.\end{aligned}$$

Но $M_1 - m_1 \leq 2K$, а $\sum_{i=2}^n \Delta S_i < S$, следовательно,

$$\Omega - \omega < 2K \frac{\varepsilon}{4K} + \frac{\varepsilon}{2S} S = \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то, в силу теоремы 1.3, функция $f(x, y)$ интегрируема.

4. Свойства двойного интеграла. Основные свойства двойного интеграла вполне аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла для функции одной переменной, поэтому мы только перечислим эти свойства, не останавливаясь на доказательствах.

1. Если функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ интегрируемы в области G , то их сумма (разность) тоже интегрируема в G и

$$\int_G [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)] ds = \int_G f_1(x, y) ds \pm \int_G f_2(x, y) ds.$$

2. Если k — постоянное число и функция $f(x, y)$ интегрируема в G , то функция $kf(x, y)$ тоже интегрируема в G и

$$\int_G kf(x, y) ds = k \int_G f(x, y) ds.$$

Совокупность этих двух свойств называется линейностью интеграла.

3. Если область G представляет собой объединение двух областей G_1 и G_2 , в каждой из которых функция $f(x, y)$ интегрируема, то в G эта функция также интегрируема. Если,

кроме того, G_1 и G_2 не имеют общих внутренних точек, то

$$\int_G \int f(x, y) ds = \int_{G_1} \int f(x, y) ds + \int_{G_2} \int f(x, y) ds.$$

Это свойство называется аддитивностью интеграла.

4. Если $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ интегрируемы в G и $f_1(x, y) \leq f_2(x, y)$, то

$$\int_G \int f_1(x, y) ds \leq \int_G \int f_2(x, y) ds.$$

Это свойство называется монотонностью интеграла; из него вытекают свойства 5 и 6.

5 (оценка интеграла по модулю). Если $f(x, y)$ интегрируема в G , то функция $|f(x, y)|$ также интегрируема в G и

$$\left| \int_G \int f(x, y) ds \right| \leq \int_G \int |f(x, y)| ds.$$

6 (теорема о среднем). Если функция $f(x, y)$ интегрируема в G и удовлетворяет неравенствам

$$m \leq f(x, y) \leq M,$$

то

$$mS \leq \int_G \int f(x, y) ds \leq MS, \quad (1.14)$$

где S — площадь фигуры G .

Это утверждение непосредственно вытекает из свойства 4 и того очевидного факта, что

$$\int_G \int c ds = cS, \quad c = \text{const.}$$

Если функция $f(x, y)$ непрерывна, то теорема о среднем может быть сформулирована в таком виде:

6'. В области G найдется такая точка (ξ, η) , что

$$\int_G \int f(x, y) ds = f(\xi, \eta) S. \quad (1.15)$$

Действительно, примем за m и M соответственно точную нижнюю и точную верхнюю грани значений функции $f(x, y)$ в G . Тогда, согласно (1.14),

$$m \leq \frac{1}{S} \int_G \int f(x, y) ds \leq M.$$

Но (см. вып. 1, гл. 14, § 3) функция, непрерывная в замкнутой области, принимает значения m , M . Предположим для простоты, что функция $f(x, y)$ принимает значения M и m в точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , лежащих внутри области G . (Рассуждение несколько усложняется, если какая-либо из этих точек, или обе они, попадают на границу области G .) Любые две точки области мы можем соединить ломаной, лежащей в области. Соединим ломаной точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2) , в которых функция равна соответственно M и m . Вдоль такой ломаной функция $f(x, y)$ непрерывна и, следовательно, вместе со значениями M и m принимает и все промежуточные. В частности, найдется точка, обозначим ее (ξ, η) , в которой

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{S} \int_G f(x, y) ds,$$

тем самым формула (1.15) доказана.

§ 3. Аддитивные функции области. Производная по площади

1. Функции точки и функции области. Одно из самых основных понятий анализа — понятие функции. Мы встречались с функциями, зависящими от одной, двух или нескольких независимых переменных. Пользуясь геометрической терминологией, можно сказать, что эти функции представляют собой переменные величины, зависящие от точки на прямой (в случае одной переменной), от точки на плоскости (при двух переменных) или от точки в пространстве некоторого числа измерений. Однако в анализе и его физических приложениях часто встречаются функции другого рода, в которых роль значений аргумента играют уже не отдельные точки, а множества — например плоские или пространственные фигуры; такие функции называются *функциями множества* или *функциями области* *).

Примером функции области может служить площадь $S(G)$ области G , определенная для всех квадратируемых плоских областей так, как это было описано в § 1. Рассмотрим еще один пример. Пусть по плоскости xu распределена некоторая масса. Тогда каждой области G , лежащей в этой плоскости, отвечает определенное число — масса $\mu(G)$, сосредоточенная на G . Здесь опять-таки мы имеем дело

*) Термин «область» употребляется здесь просто как синоним термина «множество», а не как термин, означающий открытое связное множество. Запас областей (т. е. запас множеств), на которых определена данная функция области (т. е. множества), различен в различных ситуациях. У нас таким запасом будет, как правило, совокупность всех квадратируемых фигур.

с переменной величиной, зависящей от области, т. е. с некоторой функцией области.

Введем следующее важное определение.

Определение. Функция области $F(G)$ называется аддитивной, если выполнены следующие условия:

- 1) если $F(G)$ определена для областей G_1 и G_2 , то она определена и для их объединения $G_1 + G_2$;
- 2) если G_1 и G_2 не имеют общих внутренних точек, то

$$F(G_1 + G_2) = F(G_1) + F(G_2) *).$$

Обе указанные выше функции — площадь и масса — обладают этим свойством аддитивности. Можно привести и много других примеров аддитивных функций области: поверхностный заряд, количество световой энергии, падающей на освещенную поверхность, давление жидкости на дно сосуда и т. п.

Можно, конечно, указать примеры и не аддитивных функций области. Например, если каждой квадратируемой области поставить в соответствие квадрат ее площади, то мы получим функцию области, но не аддитивную.

С аддитивными функциями, в которых роль аргумента играет не плоская, а пространственная область, мы встретимся в следующей главе, посвященной тройным интегралам.

2. Двойной интеграл как аддитивная функция области. Рассмотрим двойной интеграл

$$\iint_G f(x, y) ds,$$

считая в нем подынтегральную функцию $f(x, y)$ фиксированной, а область интегрирования G переменной. Тогда этот интеграл будет представлять собой некоторую функцию $\Phi(G)$ области G . В силу свойства 2 двойных интегралов, сформулированного в предыдущем параграфе, эта функция области аддитивна. Запас областей, на которых она определена, составляют все квадратируемые фигуры, содержащиеся в квадратируемой фигуре G_0 , на которой задана $f(x, y)$.

3. Производная функции области по площади. Рассмотрим снова функцию $\mu(G)$, т. е. некоторое распределение масс по плоскости. Если G — квадратируемая область и $S(G)$ — ее площадь, то отношение

$$\frac{\mu(G)}{S(G)} \quad (1.16)$$

*) Отсюда, в частности, следует, что если G имеет площадь нуль, то $F(G) = 0$. Это означает, что мы рассматриваем лишь массы, распределенные с некоторой двумерной плотностью (а не сосредоточенные в отдельных точках или на отдельных линиях).

представляет собой среднюю плотность распределения массы в данной области G . Будем теперь уменьшать размеры области G , стягивая ее к некоторой фиксированной точке p_0 . Если при этом отношение (1.16) стремится к некоторому пределу $\rho(p_0)$, то этот предел называется *плотностью распределения масс* в данной точке p_0 . Таким образом, распределение масс по плоскости можно задавать непосредственно с помощью аддитивной функции области $\mu(G)$, а можно его характеризовать и соответствующей плотностью.

Перейдем теперь от нашего конкретного примера (распределения масс) к произвольной функции области. В отличие от рассмотренного выше примера — массы, произвольная функция области может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Пусть $F(G)$ — некоторая аддитивная функция области, определенная для всех квадратуемых областей *). Мы скажем, что число A есть *предел* отношения

$$\frac{F(G)}{S(G)}$$

($S(G)$ — как обычно, площадь области G) при стягивании области G к точке p_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$\left| \frac{F(G)}{S(G)} - A \right| < \varepsilon$$

для всякой области G , целиком помещающейся в круге радиуса δ с центром в точке p_0 .

Этот предел мы будем обозначать символом

$$\lim_{G \rightarrow p_0} \frac{F(G)}{S(G)} \quad \text{или} \quad \frac{dF}{ds}$$

и называть *производной аддитивной функции $F(G)$ по площади*. Эта производная представляет собой, очевидно, уже функцию в обычном смысле, т. е. переменную величину, зависящую от точки.

Возвращаясь к нашему примеру, можно сказать, что плотность $\rho(p_0)$ распределения масс по плоскости есть производная по площади от массы.

4. Производная по площади от двойного интеграла. Из теоремы о среднем для двойных интегралов (см. § 2, п. 4, свойство б) вытекает следующий результат. Пусть

$$F(G) = \iint_G f(x, y) ds, \quad (1.17)$$

*) Или для всех квадратуемых областей, содержащихся в некоторой фиксированной области.

где $f(x, y)$ — некоторая фиксированная функция, которую мы предположим непрерывной во всей рассматриваемой части плоскости. Покажем, что аддитивная функция области $F(G)$, определенная равенством (1.17), имеет производную по площади и эта производная совпадает с подынтегральной функцией $f(x, y)$.

Действительно, пусть p_0 — некоторая фиксированная точка, G — область, лежащая в некотором круге с центром в p_0 , и m , M — соответственно точная нижняя и точная верхняя грани значений функции $f(x, y)$ в области G . По теореме о среднем

$$m \leq \frac{1}{S(G)} \int \int_G f(x, y) ds \leq M.$$

При стягивании области G к точке p_0 , т. е. при стремлении радиуса круга к нулю, числа m и M стремятся (в силу непрерывности $f(x, y)$ в точке p_0) к одной и той же величине, а именно к значению функции $f(x, y)$ в этой точке. Следовательно, к этому пределу стремится и заключенное между ними отношение. Итак, действительно,

$$\frac{dF}{ds} = f(x, y).$$

5. Восстановление аддитивной функции области по ее производной. Выше мы говорили о нахождении производной от функции области. Сейчас мы рассмотрим обратную задачу: дана функция точки $f(x, y)$; найти такую функцию области $F(G)$, производная которой совпадала бы с $f(x, y)$. Считая $f(x, y)$ непрерывной, мы сразу можем указать одну такую функцию области, а именно двойной интеграл

$$\int \int_G f(x, y) ds \quad (1.18)$$

(рассматриваемый как функция от G). Естественнo поставить вопрос: существуют ли какие-либо другие аддитивные функции области, имеющие ту же самую производную. Покажем, что если $f(x, y)$ непрерывна, то существует лишь одна аддитивная функция области, имеющая $f(x, y)$ своей производной (и представляемая, следовательно, двойным интегралом (1.18)).

Если $F_1(G)$ и $F_2(G)$ — две аддитивные функции области, имеющие одну и ту же производную по площади, то

$$\frac{d}{ds}(F_1 - F_2) \equiv 0.$$

Поэтому нам достаточно показать следующее:

Если $\frac{dF}{ds} \equiv 0$, то $F \equiv 0$. Это в свою очередь вытекает из следующей леммы:

Лемма. Если в ограниченной замкнутой области D производная $\frac{dF}{ds}$ аддитивной функции области $F(D)$ существует и неотрицательна, то $F(D) \geq 0$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть $F(D) < 0$. Тогда найдется такое $l < 0$, что

$$\frac{F(D)}{S(D)} \leq l < 0,$$

т. е.

$$F(D) \leq lS(D). \quad (1.19)$$

Далее, выберем последовательность положительных чисел $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots$, сходящуюся к нулю, и разобьем область D на конечное число частей D_i , диаметр каждой из которых меньше ε_1 . По крайней мере для одной из этих частей, обозначим ее $D^{(1)}$, должно выполняться условие

$$F(D^{(1)}) \leq lS(D^{(1)}),$$

так как если бы для всех D_i выполнялось противоположное неравенство

$$F(D_i) > lS(D_i),$$

то, просуммировав эти неравенства по всем D_i , мы пришли бы к противоречию с неравенством (1.19).

Далее, разобьем $D^{(1)}$ на части, диаметр каждой из которых меньше чем ε_2 . Среди них найдется хотя бы одна, обозначим ее $D^{(2)}$, для которой выполнено неравенство

$$F(D^{(2)}) \leq lS(D^{(2)}).$$

Продолжив этот процесс, мы получим последовательность $\{\bar{D}^{(n)}\}$ вложенных друг в друга замкнутых ограниченных областей, диаметры которых стремятся к нулю ($\bar{D}^{(n)}$ означает замыкание $D^{(n)}$, при этом $F(\bar{D}^{(n)}) = F(D^{(n)})$). Но тогда существует точка, обозначим ее p_0 , принадлежащая всем $\bar{D}^{(n)}$ *). Так как, по предположению, производная $\frac{dF}{ds}$ существует всюду, в частности и в точке p_0 , то ее значение в этой точке может быть представлено как

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F(D^{(n)})}{S(D^{(n)})}. \quad (1.20)$$

*) Это — двумерный аналог леммы о вложенных сегментах, см. вып. 1, гл. 3, § 3.

Но по построению последовательности $D^{(n)}$ отношение $\frac{F(D^{(n)})}{S(D^{(n)})}$ при всех n не превосходит фиксированного отрицательного числа l , поэтому предел (1.20) не может быть неотрицателен. Лемма доказана.

Заменив $F(G)$ на $-F(G)$ и воспользовавшись доказанной леммой, получим, что если $\frac{dF}{ds}$ существует и неположительна, то $F(D) \leq 0$. Наконец, если

$$\frac{dF}{ds} = 0,$$

т. е. если одновременно

$$\frac{dF}{ds} \geq 0 \quad \text{и} \quad \frac{dF}{ds} \leq 0,$$

то $F(D) = 0$ для всякой замкнутой ограниченной области.

6. Определенный интеграл как функция области. Сравним изложенные сейчас факты с тем положением, которое существует для функций одного независимого переменного. Определенный интеграл

$$\int_a^b f(\xi) d\xi$$

можно рассматривать (при фиксированной функции f) как функцию от сегмента $[a, b]$, т. е. как функцию области на прямой, причем, в силу известных свойств определенного интеграла, это будет аддитивная функция. Но сегмент определяется двумя точками — своими концами. Если же один его конец, скажем левый, считать фиксированным, то функция сегмента сводится к обычной функции точки. Именно так и поступают, рассматривая интеграл

$$\int_a^x f(\xi) d\xi \tag{1.21}$$

(при фиксированном a) как функцию верхнего предела. При этом, выбрав вместо нижнего предела a какую-либо иную точку a' , мы изменим функцию (1.21) на постоянное (т. е. не зависящее от x) слагаемое, а именно на величину

$$\int_a^{a'} f(\xi) d\xi.$$

Таким образом, интеграл от функции одного переменного представляет собой однозначно определенную функцию области на прямой. Эту функцию, рассматриваемую на сегментах, можно свести к функции одной переменной, определенной с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Изложенные в этом параграфе теоремы о производной двойного интеграла по площади и о восстановлении функции области по ее производной представляют собой двумерные аналоги теорем о производной определенного интеграла от непрерывной функции по верхнему пределу и о том, что первообразная определяется по функции однозначно, с точностью до постоянного слагаемого.

7. Продолжение функций области по аддитивности. Если некоторая функция задана не всюду, где она может быть определена, то ее обычно можно продолжить, если известны те или иные ее свойства. Например, если известно, что функция $f(x)$ линейна, т. е. имеет вид

$$f(x) = ax + b,$$

то достаточно знать ее значения в двух точках для того, чтобы определить ее значение всюду. Если же функция $f(x)$ периодическая, т. е. обладает тем свойством, что при некотором T

$$f(x + T) = f(x)$$

для всех x , то достаточно знать значения этой функции на отрезке $[0, T]$ для того, чтобы определить ее значения всюду (например, зная $\sin x$ для всех x от 0 до 2π , мы можем найти синус любого угла). Аналогично обстоит дело и с функциями области. Если известно, что функция области $F(G)$ аддитивна, то, зная ее значения на некотором классе областей, мы можем во многих случаях однозначно продолжить ее (с сохранением свойства аддитивности) на некоторый более широкий класс областей. Например, пусть $F(G)$ — аддитивная функция области, определенная на всех треугольниках. Тогда ее можно продолжить «по аддитивности» на все многоугольники (а затем и на более широкий класс областей).

Фактически именно с такой задачей о продолжении функции области по аддитивности мы имели дело в § 1, где рассматривалось понятие площади. Площадь представляет собой аддитивную функцию области, которую мы считали определенной на многоугольниках (или на многоугольных фигурах) и затем продолжали, с сохранением аддитивности, на более широкий класс фигур, которые мы называли квадрируемыми. Общая задача о продолжении аддитивных функций «по аддитивности», о нахождении того возможно более широкого класса фигур, на который такое продолжение возможно, и т. д. играет важную роль во многих вопросах математики.

К сожалению, мы не имеем возможности излагать здесь эти вопросы: это потребовало бы от нас введения и систематического использования идей и понятий общей теории меры.

§ 4. Некоторые физические и геометрические применения двойных интегралов

1. Вычисление объемов. В самом начале этой главы мы уже рассматривали одну геометрическую задачу, лежащую в основе понятия двойного интеграла, а именно задачу о вычислении объема криволинейного цилиндра. Мы видели, что для цилиндра, ограниченного снизу замкнутой областью G , а сверху поверхностью $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ — неотрицательная непрерывная функция, приближенное значение объема дается интегральной суммой

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i. \quad (1.22)$$

(Сумма берется по всем элементам G_i разбиения фигуры G на квадрируемые части; ΔS_i — площадь элемента G_i ; $(\xi_i, \eta_i) \in G_i$.) Как уже говорилось во введении к этой главе, точное значение объема — это

предел, к которому стремятся интегральные суммы (1.22) при неограниченном измельчении разбиения фигуры G . Но предел сумм (1.22)—это двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по G . Его существование (при указанных выше предположениях об $f(x, y)$ и G) было доказано (теорема 1.3). Итак, объем V криволинейного цилиндра, ограниченного снизу замкнутой областью G , а сверху поверхностью $z = f(x, y)$ (f непрерывна), представляется двойным интегралом

$$\iint_G f(x, y) ds.$$

На самом деле объем криволинейного цилиндра следует *определить* как значение этого интеграла. Ведь само понятие объема, хотя и ясное геометрически, заранее не определено. Строго говоря, приведенные рассуждения показывают лишь, что такое определение естественно и хорошо согласуется с нашей геометрической интуицией.

Рассмотрим еще некоторые задачи, в которых находит применение понятие двойного интеграла.

2. Вычисление площадей. Полагая в двойном интеграле подынтегральную функцию $f(x, y)$ тождественно равной 1, мы получим интеграл

$$\iint_G ds, \quad (1.23)$$

равный, очевидно, площади фигуры G (поскольку этой площади будет равна каждая из интегральных сумм, отвечающих интегралу (1.23)).
Формула

$$S = \iint_G ds \quad (1.24)$$

для вычисления площади часто бывает удобнее, чем формула

$$S = \int_a^b f(x) dx,$$

выражающая площадь криволинейной трапеции, поскольку формула (1.24) применима не только к криволинейным трапециям, но и к любым квадратуемым фигурам, расположенным произвольным образом по отношению к координатным осям.

3. Масса пластинок. Рассмотрим на плоскости xy материальную пластинку, т. е. некоторую область G , по которой распределена масса с плотностью $\rho(x, y)$. Вычислим по заданной плотности $\rho(x, y)$ массу этой пластинки, считая, что $\rho(x, y)$ — непрерывная функция от x и y . Разобьем G каким-либо образом на части G_i и в каждой из этих частей выберем некоторую точку (ξ_i, η_i) . Массу каждого такого

элемента G_i можно считать равной приближенно $\rho(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$ (где ΔS_i — площадь G_i), а масса всей пластинки приближенно равна сумме

$$\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i, \quad (1.25)$$

взятой по всем элементам разбиения. Для получения точного значения массы пластинки нужно перейти в этой сумме к пределу, неограниченно измельчая разбиение $\{G_i\}$ области G . При этом сумма (1.25) переходит в двойной интеграл

$$\iint_G f(x, y) ds, \quad (1.26)$$

который и представляет собой массу пластинки.

Ясно, что нахождение массы пластинки по плотности есть частный случай задачи о восстановлении функции области по ее производной по площади, которую мы рассматривали в предыдущем параграфе.

4. Координаты центра масс пластинки. Найдем координаты центра масс пластинки, занимающей в плоскости xu некоторую область G . Пусть $\rho(x, y)$ — плотность этой пластинки в точке (x, y) . Разбив область G на части G_i , выберем в каждой из этих частей некоторую точку (ξ_i, η_i) и будем приближенно считать массу каждой из частей пластинки равной $\rho(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$, где ΔS_i — площадь частичной области G_i . Если считать, что каждая из этих масс сосредоточена в одной точке, а именно в точке (ξ_i, η_i) , то для координат x_c и y_c центра масс такой системы материальных точек получаются следующие выражения:

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i}; \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i}{\sum_{i=1}^n \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i}, \quad (1.27)$$

которые представляют собой приближенные значения координат центра масс пластинки. Чтобы получить точные значения этих координат, нужно в формулах (1.27) перейти к пределу, неограниченно измельчая разбиение области G . При этом стоящие в формулах (1.27) суммы перейдут в соответствующие интегралы и мы получим, что координаты центра масс пластинки определяются формулами:

$$x_c = \frac{\iint_G x \rho(x, y) ds}{\iint_G \rho(x, y) ds}; \quad y_c = \frac{\iint_G y \rho(x, y) ds}{\iint_G \rho(x, y) ds}. \quad (1.28)$$

Если пластинка однородна, т. е. $\rho = \text{const}$, то формулы для координат центра масс имеют более простой вид:

$$x_c = \frac{\int_G \int x \, ds}{\int_G \int ds}; \quad y_c = \frac{\int_G \int y \, ds}{\int_G \int ds}, \quad (1.29)$$

Б. Моменты инерции пластинки. Как известно, момент инерции материальной точки относительно некоторой оси равен произведению массы точки на квадрат ее расстояния от этой оси, а момент инерции системы материальных точек (относительно одной и той же оси) равен сумме моментов инерций, составляющих эту систему масс. Пусть область G плоскости xu занята пластинкой, имеющей плотность $\rho(x, y)$. Разбив область G на части G_i , площади которых равны ΔS_i , и выбрав в каждой из этих частей некоторую точку (ξ_i, η_i) , заменим нашу пластинку системой масс $\rho(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$, лежащих в точках (ξ_i, η_i) . Момент инерции такой системы точечных масс относительно оси y равен

$$\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \rho(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i.$$

Это выражение мы принимаем за приближенное значение момента инерции пластинки, тем более точное, чем мельче взятое разбиение. Переходя здесь к пределу при неограниченном измельчении разбиения области G , получим для момента инерции пластинки относительно оси y следующую формулу:

$$I_y = \int_G \int x^2 \rho(x, y) \, ds. \quad (1.30)$$

Аналогично момент инерции пластинки относительно оси x равен

$$I_x = \int_G \int y^2 \rho(x, y) \, ds. \quad (1.31)$$

Найдем еще момент инерции I_0 пластинки относительно начала координат. Приняв во внимание, что момент инерции материальной точки с массой m относительно начала координат равен

$$m(x^2 + y^2)$$

и воспользовавшись рассуждениями, аналогичными проведенным выше, получим, что

$$I_0 = \int_G \int (x^2 + y^2) \rho(x, y) \, ds,$$

т. е.

$$I_0 = I_x + I_y.$$

6. Световой поток, падающий на пластинку. Пусть пластинка, лежащая в плоскости xu , освещена точечным источником света, находящимся в точке с координатами $(0, 0, z_0)$. Его силу света (одинаковую по всем направлениям) обозначим I . Вычислим световой поток, падающий на пластинку. Световой поток dF , падающий на элементарную площадку ds , равен $I d\omega$, где $d\omega$ — телесный угол, под которым видна площадка ds из точки $(0, 0, z_0)$. В свою очередь $d\omega$ равняется площади площадки ds , деленной на квадрат расстояния до источника и умноженной на косинус угла между нормалью к площадке и направлением на источник. Освещенностью $A(x, y)$ пластинки в точке (x, y) называется величина $\frac{dF}{ds}$. Из сказанного выше следует, что

$$A(x, y) = \frac{dF}{ds} = \frac{I d\omega}{ds} = \frac{I z_0}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Полный световой поток, падающий на пластинку, равен двойному интегралу от $A(x, y)$ по области G , занимаемой пластинкой, т. е. равен

$$I z_0 \iint_G \frac{ds}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

7. Поток жидкости через поперечное сечение канала. Рассмотрим канал, по которому течет жидкость, и выделим некоторое сечение этого канала, перпендикулярное направлению течения. Приняв плоскость этого сечения за плоскость xu , мы можем сказать, что скорость V жидкости в каждой точке рассматриваемого сечения есть функция от x и y , т. е. $V = V(x, y)$. Вычислим количество жидкости, протекающее через это сечение в единицу времени. Рассмотрим бесконечно малый элемент площади ds этого сечения. Количество жидкости, протекающей через этот элемент в единицу времени, равно, очевидно, массе столбика с основанием ds и высотой $V(x, y)$, т. е. равно

$$\rho V(x, y) ds, \quad (1.32)$$

где ρ — плотность жидкости. Для получения количества жидкости, протекающего через все сечения, надо просуммировать бесконечно малые элементы (1.32), т. е. взять двойной интеграл

$$\iint_G \rho V(x, y) ds$$

по рассматриваемому сечению.

Замечание. Выше, в частности при рассмотрении последней задачи, мы пользовались такими выражениями, как «бесконечно малый элемент площади», «элемент массы» и т. п. Такой язык широко

применяется, особенно в физической литературе. Например, обычно говорят, что для пластинки с плотностью $\rho(x, y)$ величина

$$\rho(x, y) ds$$

есть «элемент массы» (сосредоточенный на «элементе площади ds »), а масса этой пластинки, т. е. интеграл

$$\int_G \int \rho(x, y) ds,$$

есть «сумма этих элементов массы».

Смысл подобных выражений состоит в том, что в них каждый раз подразумевается тот процесс предельного перехода (от конечных сумм к интегралам), который нам встречался в каждой из рассмотренных выше задач. В дальнейшем мы тоже будем пользоваться иногда этим «физическим» языком (отдавая, однако, себе ясный отчет в точном смысле того предельного перехода, который за ним скрывается).

§ 5. Сведение двойного интеграла к повторному

Мы познакомились уже с определением и основными свойствами двойного интеграла, условиями его существования и некоторыми физическими и геометрическими задачами, связанными с этим понятием.

Но мы еще совсем не затрагивали вопроса о способах фактического вычисления двойных интегралов. В решении этой задачи основную роль играет теорема о том, что вычисление двойного интеграла сводится, при достаточно широких условиях, к последовательному интегрированию по каждой из переменных в отдельности. Доказательство этой теоремы и составляет содержание настоящего параграфа.

1. Наводящие соображения. Основная идея излагаемых ниже теорем состоит в следующем. Будем рассматривать двойной интеграл

$$\int_G \int f(x, y) dx dy$$

как объем криволинейного цилиндра T , ограниченного снизу областью G , сверху поверхностью $z = f(x, y)$, и сбоку цилиндрической

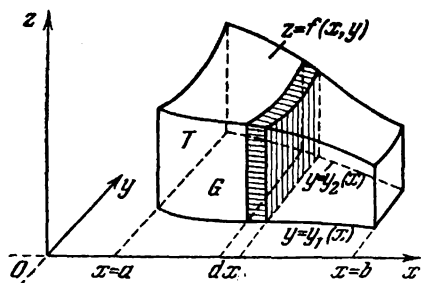


Рис. 1.13.

поверхностью, проходящей через границу области G (рис. 1.13). Тело T можно представлять себе как составленное из бесконечно тонких слоев, параллельных плоскости yz . Объем каждого такого слоя равен

$$J(x) dx,$$

т. е. произведению площади $J(x)$ соответствующего сечения тела T на толщину слоя dx . Объем всего тела T при этом равен

$$\int_a^b J(x) dx. \quad (1.33)$$

В свою очередь величина $J(x)$ (площадь криволинейной трапеции) представляется интегралом

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy, \quad (1.34)$$

где x рассматривается как фиксированная величина, а $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — концы того отрезка, который служит проекцией рассматриваемого сечения на плоскость xu (рис. 1.13). Комбинируя (1.33) и (1.34), получаем, что объем тела T может быть представлен в виде

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy,$$

т. е. что имеет место равенство

$$\int_G \int f(x, y) ds = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (1.35)$$

Эта формула означает, что, представляя себе двойной интеграл как сумму элементов $f(x, y) dx dy$, мы можем при вычислении этой суммы сначала произвести суммирование по слоям, параллельным одной координатной оси, а потом просуммировать результаты, относящиеся к каждому слою. Алгебраическим аналогом равенства (1.35) служит формула

$$\sum_{i, k} a_{ik} = \sum_i \left(\sum_k a_{ik} \right).$$

Ясно, что, если бы мы, снова взяв некоторый криволинейный цилиндр, стали бы рассматривать его сечения, параллельные не плоскости yz ,

а плоскости xz , это привело бы к равенству

$$\iint_G f(x, y) ds = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$$

(рис. 1.14). Перейдем теперь от картинок к точному изложению.

2. Случай прямоугольной области. Рассмотрим сначала двойной интеграл по некоторому прямоугольнику со сторонами, параллельными осям координат.

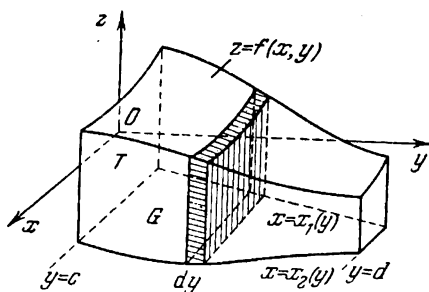


Рис. 1.14.

Теорема 1.5. Если для функции $f(x, y)$, определенной в прямоугольнике

$$P = \{a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}, \quad (1.36)$$

существует двойной интеграл

$$\iint_P f(x, y) dx dy, \quad (1.37)$$

а при каждом фиксированном значении x , $a \leq x \leq b$, существует однократный интеграл

$$J(x) = \int_c^d f(x, y) dy, \quad (1.38)$$

то существует повторный интеграл

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_a^b J(x) dx \quad (1.39)$$

и выполняется равенство

$$\iint_P f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (1.40)$$

Доказательство. Разобьем прямоугольник P на частичные прямоугольники P_{ij} , подразделив его стороны точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_k = b$ и соответственно $c = y_0 < y_1 < y_2 < \dots < y_l = d$; таким образом, $P_{ij} = \{x_{i-1} \leq x \leq x_i, y_{j-1} \leq y \leq y_j\}$ (рис. 1.15). Пусть m_{ij} — точная нижняя грань, а M_{ij} — точная верхняя грань значений функции $f(x, y)$ в прямоугольнике P_{ij} . Выберем

в каждом из промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную точку ξ_i . Так как $m_{ij} \leq f(\xi_i, y) \leq M_{ij}$ при $y_{j-1} \leq y \leq y_j$, то

$$m_{ij} \Delta y_j \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y) dy \leq M_{ij} \Delta y_j \quad (\Delta y_j = y_j - y_{j-1}), \quad (1.41)$$

причем стоящий здесь интеграл существует, так как по предположению существует интеграл (1.38), взятый по всему отрезку $[c, d]$ при произвольном x . Суммируя неравенства (1.41) по j от 1 до l , получим

$$\sum_{j=1}^l m_{ij} \Delta y_j \leq J(\xi_i) = \int_c^d f(\xi_i, y) dy \leq \sum_{j=1}^l M_{ij} \Delta y_j.$$

Умножив каждое из этих неравенств на $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и просуммировав по i от 1 до k , получим

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k \Delta x_i \sum_{j=1}^l m_{ij} \Delta y_j &\leq \\ &\leq \sum_{i=1}^k J(\xi_i) \Delta x_i \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^k \Delta x_i \sum_{j=1}^l M_{ij} \Delta y_j. \end{aligned}$$

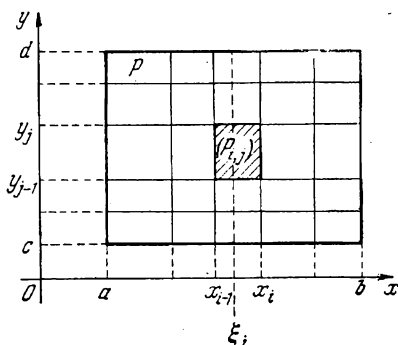


Рис. 1.15.

Посредине здесь стоит интегральная сумма, отвечающая функции $J(x)$, а слева и справа — нижняя и верхняя суммы, отвечающие двойному интегралу (1.37). Таким образом,

$$\omega \leq \sum_{i=1}^k J(\xi_i) \Delta x_i \leq \Omega.$$

Если теперь все Δx_i и Δy_k устремить к нулю, то, поскольку мы предположили существование двойного интеграла (1.37) *), как

*) Так как двойной интеграл (1.37) по предположению существует, то при любом способе разбиения прямоугольника P на части, таком, что максимум диаметров элементов разбиения стремится к нулю, верхняя и нижняя суммы Дарбу стремятся к общему пределу, а именно, к соответствующему двойному интегралу. Мы выбрали тот способ разбиения, который для нас наиболее удобен, а именно, с помощью систем вертикальных и горизонтальных прямых.

нижние, так и верхние интегральные суммы будут стремиться к этому двойному интегралу. Следовательно, и интегральные суммы $\sum_{i=1}^k J(\xi_i) \Delta x_i$ стремятся к тому же самому пределу. Таким образом,

$$\int_P \int f(x, y) dx dy = \int_a^b J(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Меняя роли переменных x и y (и предполагая существование интеграла $J_1(y) = \int_a^b f(x, y) dx$), получаем аналогичное равенство

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_P \int f(x, y) dx dy.$$

Наконец, если наряду с двойным интегралом (1.37) существуют оба интеграла, $J(x) = \int_c^d f(x, y) dy$ и $J_1(y) = \int_a^b f(x, y) dx$, то

$$\int_P \int f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

3. Случай криволинейной области. Рассмотрим теперь вопрос о сведении двойного интеграла к повторному для случая криволинейной области. Пусть область G ограничена двумя непрерывными кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ и вертикальными отрезками $x = a$ и $x = b$ (рис. 1.16). Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 1.6. Если для функции $f(x, y)$, определенной в области G , существует двойной интеграл

$$\int_G \int f(x, y) dx dy,$$

а при каждом фиксированном значении x из $[a, b]$ существует интеграл

$$J(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy,$$

то существует повторный интеграл

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$$

и выполняется равенство

$$\int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (1.42)$$

Доказательство. Положив $c = \min y_1(x)$, $d = \max y_2(x)$, заключим область G в прямоугольник P , определяемый неравенствами $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$ (рис. 1.16), и рассмотрим в этом прямоугольнике вспомогательную функцию

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{внутри } G, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

Функция $f^*(x, y)$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы. Действительно, она интегрируема в области G (так как совпадает в ней с $f(x, y)$) и интегрируема в остальной части прямоугольника P , которую мы обозначим $P - G$ (там она равна нулю). Следовательно (по свойству аддитивности интеграла, см. стр. 33—34), она интегрируема и по всему прямоугольнику P . При этом

$$\int_a^b \int_c^d f^*(x, y) dy dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx$$

и

$$\int_{P-G} \int f^*(x, y) dy dx = 0,$$

откуда

$$\int_P \int f^*(x, y) dy dx = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx. \quad (1.43)$$

Далее, при каждом значении x , лежащем между a и b , существует интеграл

$$\int_c^d f^*(x, y) dy = \int_c^{y_1(x)} f^*(x, y) dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x, y) dy + \int_{y_2(x)}^d f^*(x, y) dy, \quad (1.44)$$

так как существует каждый из трех интегралов, стоящих справа. Действительно, отрезки $[c, y_1(x)]$ и $[y_2(x), d]$ лежат вне области G и на них $f^*(x, y)$ равна нулю, а интеграл $\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x, y) dy$ совпадает

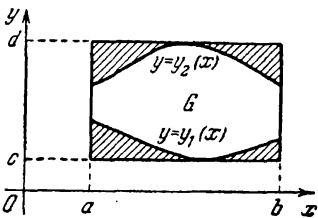


Рис. 1.16.

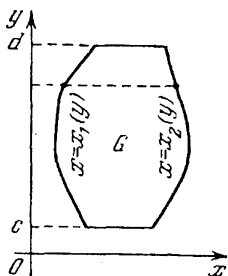
с интегралом

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy,$$

существующим по условию. Первый и третий интегралы в правой части равенства (1.44) равны нулю, поэтому окончательно получаем

$$\int_c^d f^*(x, y) dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (1.45)$$

Мы видим, что функция $f^*(x, y)$, определенная в прямоугольнике P , удовлетворяет условиям теоремы 1.5 и, следовательно, двойной интеграл от этой функции по P может быть сведен к повторному:



$$\iint_P f^*(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f^*(x, y) dy.$$

Отсюда и из равенств (1.43) и (1.45) получаем

$$\iint_G f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy,$$

что и требовалось доказать.

В теореме 1.6 мы рассматривали такую область G , что каждая вертикальная прямая $x = \text{const}$ пересекает ее границу не больше чем в двух точках $y_1(x)$ и $y_2(x)$, и предполагала существование интеграла

$$J(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy \quad (a \leq x \leq b).$$

Предположив, что каждая прямая $y = \text{const}$ пересекает границу области G не более чем в двух точках $x_1(y)$ и $x_2(y)$ (рис. 1.17),

и потребовав существования интеграла $\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$ при каждом

фиксированном y , мы можем доказать существование повторного интеграла

$$\int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$$

и его совпадение с двойным интегралом.

Как мы уже видели в самом начале этого параграфа, геометрический смысл формул, сводящих двойной интеграл к повторному, состоит в том, что объем тела равен интегралу от площади его поперечного сечения (представляющей собой функцию той переменной, которая определяет положение секущей плоскости).

Замечание 1. Если область G такова, что некоторые прямые (вертикальные или горизонтальные) пересекают ее границу более чем в двух точках, то для представления двойного интеграла, взятого по этой области, в виде повторного область G следует

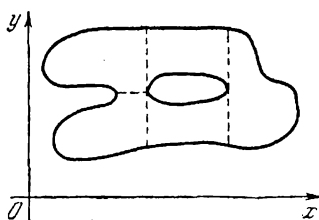


Рис. 1.18.

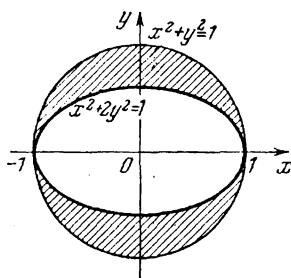


Рис. 1.19.

разбить на части, каждая из которых удовлетворяет условиям теоремы 1.6, и сводить к повторному каждый из соответствующих двойных интегралов отдельно (рис. 1.18).

Например, пусть область интегрирования G — единичный круг $x^2 + y^2 \leq 1$, из которого вырезан эллипс $x^2 + 2y^2 \leq 1$ (рис. 1.19). Тогда двойной интеграл по G можно представить, например, так:

$$\begin{aligned} \int_G \int f(x, y) dx dy &= \int_{-1}^1 dx \int_{\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy + \\ &+ \int_{-1}^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}} f(x, y) dy, \end{aligned}$$

т. е. в виде суммы двух повторных интегралов.

Замечание 2. Если двойной интеграл может быть сведен как к повторному интегралу вида $\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy$, так и к инте-

граву вида $\int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx$, то для вычисления двойного интеграла можно воспользоваться любым из этих представлений. Однако

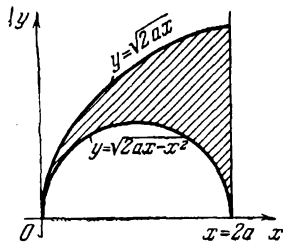


Рис. 1.20.

может оказаться, что одно из них значительно удобнее, чем другое, поэтому в конкретных задачах выбор того или иного порядка интегрирования (т. е. сначала по x , а потом по y , или наоборот) может быть не безразличен.

Пример. Записать двойной интеграл

$$\int_G f(x, y) dx dy,$$

где G — область, ограниченная кривыми $y = \sqrt{2ax - x^2}$ и $y = \sqrt{2ax}$ и прямой $x = 2a$ (рис. 1.20), в виде повторного (двумя способами).

Ответ. 1) $\int_0^{2a} dx \int_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y) dy;$

$$2) \int_a^{2a} dy \int_{y^2/2a}^{2a} f(x, y) dx + \int_0^a dy \int_{y^2/2a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y) dx + \\ + \int_0^a dy \int_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y) dx.$$

Во втором случае нам пришлось разбить интеграл на три слагаемых, а в первом мы обошлись одним.

§ 6. Замена переменных в двойном интеграле

К замене переменных часто приходится прибегать при интегрировании функций одной переменной. Не менее важную роль играет замена переменных и при вычислении двойных интегралов. Прежде чем заняться вопросом о замене переменных в двойном интеграле, мы должны будем изложить некоторые сведения об отображении областей.

1. Отображение областей. Рассмотрим две плоскости с декартовыми координатами x, y и ξ, η соответственно и предположим, что в плоскости xu выделена некоторая замкнутая ограниченная область G с границей L , а в плоскости $\xi\eta$ — замкнутая ограниченная

область *) Γ (рис. 1.21, а и б). Предположим, что в области Γ определены функции

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta) \quad (1.46)$$

такие, что, когда точка (ξ, η) пробегает область Γ , соответствующая точка (x, y) пробегает всю область G . Таким образом, функции (1.46) определяют отображение области Γ на область G .

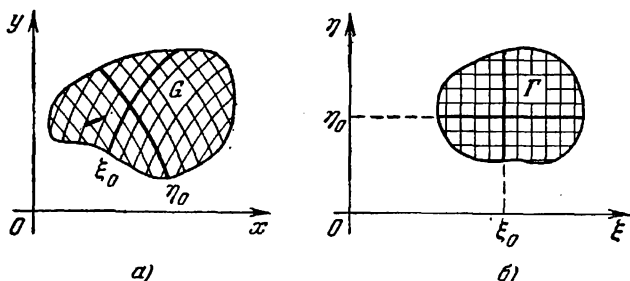


Рис. 1.21.

Мы предположим, что это отображение удовлетворяет следующим условиям:

1) Отображение *взаимно однозначно*, т. е. различным точкам области Γ отвечают обязательно различные точки области G . Иными словами, мы предположим, что существуют решения

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \quad (1.47)$$

уравнений (1.46) относительно ξ и η , однозначные во всей области G .

2) Функции (1.46) и (1.47) *непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка*.

3) *Функциональный определитель (якобиан)*

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \quad (1.48)$$

всюду в области Γ отличен от нуля, а следовательно, поскольку входящие в этот якобиан производные предполагаются непрерывными, *сохраняет в Γ постоянный знак*.

Якобиан $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}$ обратного отображения (1.47) связан с якобианом (1.48) соотношением

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = 1,$$

*) Области G и Γ предполагаются, конечно, квадратуемыми.

непосредственно вытекающим из определения произведения определителей и правила дифференцирования сложной функции, поэтому $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}$ также нигде не обращается в нуль.

Если в области Γ дана некоторая гладкая или кусочно-гладкая кривая

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta,$$

то отображение (1.46) переводит ее в кривую

$$x = x(\xi(t), \eta(t)), \quad y = y(\xi(t), \eta(t)),$$

опять-таки гладкую или кусочно-гладкую, так как если производные $\frac{d\xi}{dt}$ и $\frac{d\eta}{dt}$ существуют и непрерывны, то существуют и непрерывные производные

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \frac{d\eta}{dt},$$

причем они не обращаются в нуль одновременно, если хотя бы одна из производных $\frac{d\xi}{dt}$ и $\frac{d\eta}{dt}$ отлична от нуля (последнее вытекает из того, что $\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \neq 0$).

В частности, граница Λ области Γ переводится в границу L области G .

Это вытекает из теоремы о неявных функциях (см. вып. 1, гл. 15, § 2). Если бы точка (x_0, y_0) , принадлежащей L , отвечала какая-то внутренняя точка (ξ_0, η_0) области Γ , то из равенств

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

величины ξ и η определялись бы в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) как функции от x и y . Но всякая окрестность граничной точки (x_0, y_0) содержит точки, не принадлежащие G , следовательно, у точки (ξ_0, η_0) (внутренней для Γ) нашлась бы окрестность, содержащаяся в Γ и не отображающаяся в область G , что противоречит условию.

2. Криволинейные координаты. Рассмотрим в области Γ прямую $\xi = \xi_0$ (см. рис. 1.21). В области G ей отвечает гладкая линия, определяемая параметрическими уравнениями

$$x = x(\xi_0, \eta), \quad y = y(\xi_0, \eta) \quad (1.49)$$

(параметром служит η). Аналогично каждой прямой $\eta = \eta_0$ отвечает в области G линия, определяемая уравнениями

$$x = x(\xi, \eta_0), \quad y = y(\xi, \eta_0). \quad (1.50)$$

Линии (1.49) и (1.50) области G , в которые отображение (1.46) переводит прямые из Γ , параллельные координатным осям, называются *координатными линиями* η и ξ в области G .

Из взаимной однозначности отображения

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

следует, что через каждую точку (x, y) области G проходит единственная линия вида (1.49), отвечающая постоянному значению ξ , и единственная линия вида (1.50), отвечающая постоянному значению η . Следовательно, величины ξ и η можно рассматривать как координаты (отличные, конечно, от декартовых) точек области G . Так как координатные линии (1.49) и (1.50), отвечающие этим координатам, будут, вообще говоря, кривыми (а не прямыми, как в случае декартовой координатной сетки), то величины ξ и η называются *криволинейными координатами* точек области G .

Таким образом, переменные ξ и η имеют двойкий геометрический смысл: во-первых, это — декартовы координаты точек области Γ , а во-вторых, это — криволинейные координаты точек области G . В соответствии с этим каждое соотношение вида $\Phi(\xi, \eta) = 0$ можно рассматривать как уравнение (в декартовых координатах) некоторой кривой λ , лежащей в области Γ , и как уравнение (в криволинейных координатах) кривой l , лежащей в G и являющейся образом кривой λ при отображении (1.46).

3. Полярные координаты. Наиболее употребительная система криволинейных координат на плоскости — это *полярные координаты*. Они связаны с декартовыми координатами x и y соотношениями

$$\begin{aligned} x &= r \cos \varphi, & y &= r \sin \varphi \\ (r &\geq 0; & 0 &\leq \varphi < 2\pi). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Координатными линиями для полярных координат служат concentric окружности с центром в начале координат ($r = \text{const}$) и лучи, выходящие из этого центра ($\varphi = \text{const}$). Отображение (1.51) переводит полуполосу $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ в целую плоскость xu . Оно взаимно однозначно всюду, кроме точки $x = 0$, $y = 0$, которой на плоскости $r\varphi$ отвечает полусегмент $r = 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Исключив точку $x = 0$, $y = 0$, мы можем рассмотреть отображение плоскости xu на полуполосу $r > 0$, обратное (1.51). Это обратное отображение непрерывно всюду, кроме положительной полуоси x , так как, хотя лежащим на ней точкам отвечает значение φ , равное нулю, но если точка M приближается к этой полуоси снизу, то соответствующее значение φ стремится не к нулю, а к 2π . Таким образом, формулы (1.51) устанавливают отображение полуполосы $r \geq 0$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ на плоскость xu , взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное всюду, кроме тех точек, в которых $r = 0$ или $\varphi = 0$.

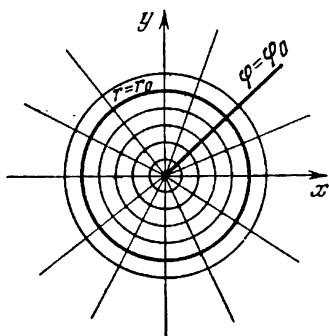


Рис. 1.22.

Наглядно можно представлять себе переход от полуполосы на плоскости $r\varphi$ к плоскости xu как «раскрывание веера». Мы берем полуполосу $0 \leq r < \infty$, $0 \leq \varphi < 2\pi$ и как веер развертываем ее на плоскость xu (рис. 1.23). Рис. *a* — первый кадр фильма, рис. *б* — второй кадр, рис. *в* — уже почти конец фильма, рис. *г* — это последний кадр.

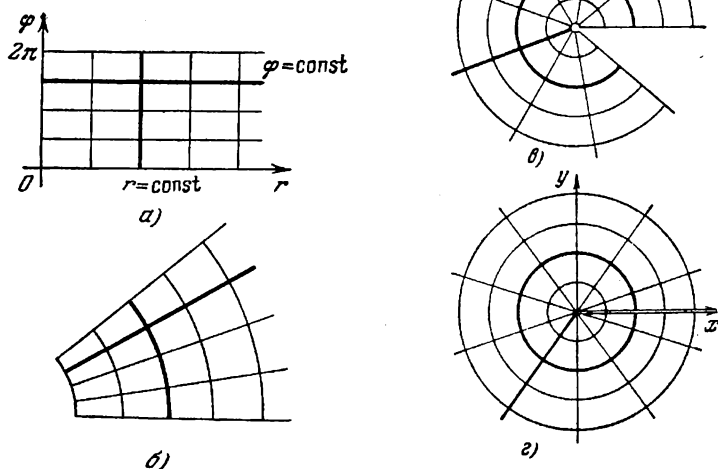


Рис. 1.23.

Например, пусть на плоскости $r\varphi$ задана прямоугольная область $0 < a \leq r \leq b$, $0 \leq \alpha \leq \varphi \leq \beta < 2\pi$. Наше «раскрывание веера» превращает ее в сектор кругового кольца на плоскости xu (рис. 1.24).

Вычислим якобиан перехода от декартовых координат к полярным, т. е. якобиан преобразования (1.51). Получим

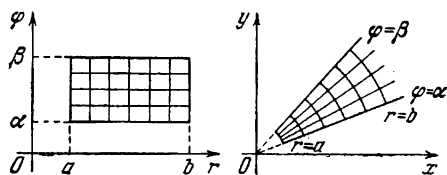


Рис. 1.24.

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Он отличен от нуля всюду, кроме точки $x=0$, $y=0$.

4. Постановка задачи о замене переменных в двойном интеграле. Сформулируем теперь задачу о замене переменных в двойном интеграле, о которой уже говорилось выше. Пусть G — замкнутая область, ограниченная кусочно-гладкой кривой L , и $f(x, y)$ — заданная в G функция, непрерывная или имеющая разрывы, лежащие

на множестве площади нуль, и ограниченная. Пусть, далее функции

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

определяют отображение на область G некоторой области Γ , удовлетворяющее условиям 1) — 3), перечисленным в п. 1. Задача состоит в том, чтобы интеграл

$$\iint_G f(x, y) dx dy,$$

взятый по области G , представить, преобразовав в нем подынтегральное выражение к новым переменным ξ и η , в виде интеграла по области Γ .

5. Площадь в криволинейных координатах. При выводе формулы замены переменных в двойном интеграле основной шаг состоит в том, чтобы выразить через криволинейные координаты площадь области. Здесь имеет место следующая теорема:

Теорема 1.7. Пусть $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ — взаимно однозначное, непрерывное и непрерывно дифференцируемое отображение области Γ на область G , якобиан которого отличен от нуля. Тогда

$$\text{пл } G = \iint_G dx dy = \iint_\Gamma \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta. \quad (1.52)$$

Доказательству этой теоремы мы предположим наглядные рассуждения, проводимые «на физическом уровне строгости». (При желании читатель может ими и ограничиться.)

Рассмотрим в области G две пары бесконечно близких координатных линий. Пусть первая из этих пар отвечает значениям

$$\xi_0 \text{ и } \xi_0 + d\xi$$

координаты ξ , а вторая пара — значениям

$$\eta_0 \text{ и } \eta_0 + d\eta$$

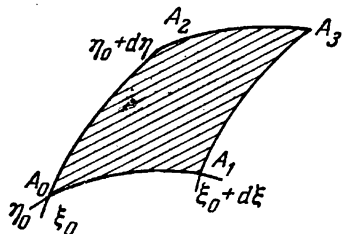


Рис. 1.25.

координаты η . Эти координатные линии вырезают в области G бесконечно малый элемент площади $A_0A_1A_3A_2$, который с точностью до малых выше первого порядка можно считать параллелограммом (рис. 1.25). Сторонами этого параллелограмма служат, очевидно,

векторы

$$\overline{A_0 A_1} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi, \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \right),$$

$$\overline{A_0 A_2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \right).$$

Площадь ds параллелограмма $A_0 A_1 A_3 A_2$ равна абсолютной величине детерминанта, составленного из компонент векторов $\overline{A_0 A_1}$ и $\overline{A_0 A_2}$, т. е.

$$ds = \text{абс. вел.} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta \end{vmatrix} = \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta. \quad (1.53)$$

А площадь S всей области G получается суммированием всех таких элементов, т. е. действительно представляется в виде двойного интеграла

$$\int_{\Gamma} \int \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta.$$

взятого по области Γ изменения переменных ξ и η .

Оформим теперь эти наглядные рассуждения в виде доказательства. При этом мы позволим себе опускать некоторые детали, которые читатель при желании легко восстановит. Кроме того, для упрощения рассуждений мы будем предполагать, что рассматриваемое отображение определено и удовлетворяет указанным в теореме условиям не только в области Γ , но и в некоторой большей области, содержащей внутри себя область Γ (вместе с границей).

Доказательство теоремы 1.7. Рассмотрим сперва тот элементарный, но, по существу, основной случай, когда рассматриваемая в плоскости $\xi\eta$ область представляет собой прямоугольник Π со сторонами, параллельными осям координат, а ее отображение на плоскость xu есть линейное отображение, определяемое формулами

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a\xi + b\eta, \\ y &= y_0 + a_1\xi + b_1\eta, \end{aligned} \quad (1.54)$$

где x_0, y_0, a, b, a_1 и b_1 — постоянные и $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$. Как известно из аналитической геометрии, образ прямоугольника Π при таком отображении будет параллелограммом (обозначим его P), площадь которого связана с площадью прямоугольника Π соотношением

$$\text{пл } P = \text{абс. вел.} \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \text{ пл } \Pi \quad (1.55)$$

(докажите это!). Отсюда следует, что любая квадратуемая фигура $\overline{\Phi}$, лежащая в плоскости $\xi\eta$, переводится линейным отображением (1.54) в

квадрируемую фигуру F , площадь которой выражается так:

$$\text{пл } F = \text{абс. вел. } \left| \begin{array}{cc} a & b \\ a_1 & b_1 \end{array} \right| \text{ пл } \Phi. \quad (1.56)$$

Впрочем, для дальнейшего нам понадобится лишь равенство (1.55).

Рассмотрим теперь некоторое произвольное (нелинейное) отображение $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, удовлетворяющее условиям теоремы. Возьмем в области Γ , где это отображение определено, некоторую точку (ξ_0, η_0) и рассмотрим прямоугольник

$$\xi_0 \leq \xi \leq \xi_0 + h_1, \quad \eta_0 \leq \eta \leq \eta_0 + h_2,$$

который мы снова обозначим Π (рис. 1.26).

С помощью формулы конечных приращений запишем отображение этого прямоугольника на плоскость xu в виде

$$x = x_0 + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta + \alpha_1, \quad (1.57)$$

$$y = y_0 + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta + \alpha_2,$$

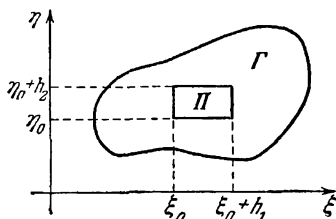


Рис. 1.26.

где $x_0 = x(\xi_0, \eta_0)$, $y_0 = y(\xi_0, \eta_0)$, значения производных берутся в точке (ξ_0, η_0) и

$$\alpha_1 = (x'_\xi(\xi^*, \eta^*) - x'_\xi(\xi_0, \eta_0)) d\xi + (x'_\eta(\xi^*, \eta^*) - x'_\eta(\xi_0, \eta_0)) d\eta,$$

$$\alpha_2 = (y'_\xi(\xi^{**}, \eta^{**}) - y'_\xi(\xi_0, \eta_0)) d\xi + (y'_\eta(\xi^{**}, \eta^{**}) - y'_\eta(\xi_0, \eta_0)) d\eta.$$

(Здесь $\xi_0 \leq \xi^* \leq \xi$; $\xi_0 \leq \xi^{**} \leq \xi$; $\eta_0 \leq \eta^* \leq \eta$; $\eta_0 \leq \eta^{**} \leq \eta$.)

Первые производные от x и y по ξ и η по условию непрерывны, а значит, и равномерно непрерывны в замкнутой ограниченной области Γ . Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать число h настолько малым, что, как только $h_1 + h_2 < h$, для всех точек (ξ, η) , принадлежащих прямоугольнику Π , выполняются неравенства

$$|x'_\xi(\xi, \eta) - x'_\xi(\xi_0, \eta_0)| < \varepsilon, \quad |x'_\eta(\xi, \eta) - x'_\eta(\xi_0, \eta_0)| < \varepsilon$$

и аналогично для y'_ξ и y'_η , причем ε не зависит от выбора точки (ξ_0, η_0) .

С помощью этих оценок получаем, что

$$|\alpha_1| < \varepsilon h, \quad |\alpha_2| < \varepsilon h. \quad (1.58)$$

Сравним теперь нелинейное отображение (1.57) с линейным отображением

$$\hat{x} = x_0 + \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, \quad \hat{y} = y_0 + \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta, \quad (1.59)$$

которое получается, если в формулах (1.57) отбросить α_1 и α_2 . Как мы уже знаем, такое линейное отображение переводит прямоугольник Π в

параллелограмм, который мы снова обозначим P , причем, согласно (1.55),

$$\text{пл } P = \text{абс. вел.} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \text{пл } \Pi. \quad (1.60)$$

Нелинейное отображение (1.57) переводит Π в некоторую криволинейную фигуру \mathcal{F} . Посмотрим, насколько ее площадь отличается от площади параллелограмма P .

В силу (1.58), для любой точки $(\xi, \eta) \in \Pi$

$$|x - \hat{x}| = |\alpha_1| < \epsilon h, \quad |y - \hat{y}| = |\alpha_2| < \epsilon h,$$

т. е.

$$\sqrt{(x - \hat{x})^2 + (y - \hat{y})^2} < \sqrt{2} \epsilon h.$$

Иначе говоря, расстояние между образами одной и той же точки $(\xi, \eta) \in \Pi$ при линейном (1.59) и нелинейном (1.57) отображениях не превышает $\sqrt{2} \epsilon h$. Поэтому если мы заключим границу параллелограмма P в полосу ширины $\sqrt{2} \epsilon h$, то граница криволинейной фигуры \mathcal{F} будет целиком лежать внутри этой полосы (рис. 1.27). Ясно, что пл \mathcal{F} отличается от пл P не больше чем на площадь этой полосы. Элементарный подсчет показывает, что площадь такой полосы не превосходит ее ширины, умноженной на периметр параллелограмма P . Этот периметр легко оценить. Пусть M выбрано так, что во всей рассматриваемой области Γ

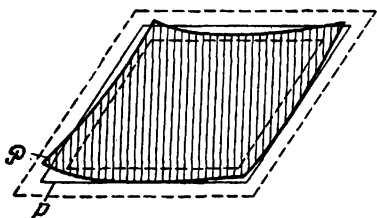


Рис. 1.27.

каждая из производных $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\frac{\partial x}{\partial \eta}$, $\frac{\partial y}{\partial \xi}$, $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ не превосходит по модулю M (эти

производные непрерывны, а значит, и ограничены в замкнутой ограниченной области Γ). Тогда из (1.59) сразу следует, что стороны параллелограмма P не превосходят Mh . Таким образом, периметр P не больше, чем $4Mh$, а площадь полосы, в которую мы заключили границу P , не превосходит $4\sqrt{2} \epsilon Mh^2$, т. е. не превосходит

$$\sqrt{2} \epsilon M \text{ пл } \Pi.$$

Следовательно,

$$\text{пл } \mathcal{F} = \text{пл } P \pm \gamma,$$

или, в силу (1.60),

$$\text{пл } \mathcal{F} = \text{абс. вел.} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \text{пл } \Pi \pm \gamma, \quad (1.61)$$

где

$$|\gamma| < \sqrt{2} \epsilon M \text{ пл } \Pi. \quad (1.62)$$

Пусть теперь Φ — многоугольная фигура, лежащая внутри Γ и составленная из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, а \mathcal{F} — фигура, в которую она переводится отображением $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$. Разобьем Φ на прямоугольники Π_i , полупериметр каждого из которых меньше h . Образы \mathcal{F}_i этих прямоугольников в сумме составляют фигуру \mathcal{F} , а площадь каждого \mathcal{F}_i можно представить в виде

$$\text{пл } \mathcal{F}_i = \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right|_{\substack{\xi = \xi_i \\ \eta = \eta_i}} \text{пл } \Pi_i + \gamma_i, \quad (1.63)$$

где точка (ξ_i, η_i) принадлежит прямоугольнику Π_i и

$$|\gamma_i| < \sqrt{2} \varepsilon M \text{пл } \Pi_i.$$

Просуммировав равенства (1.63) по всем прямоугольникам Π_i , получаем

$$\sum_{i=1}^n \text{пл } \mathcal{F}_i = \text{пл } \mathcal{F} = \sum_{i=1}^n \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right|_{\substack{\xi = \xi_i \\ \eta = \eta_i}} \text{пл } \Pi_i + \sum_{i=1}^n \gamma_i. \quad (1.64)$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства представляет собой, очевидно, интегральную сумму, отвечающую интегралу

$$\int_{\Phi} \int \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta, \quad (1.65)$$

а второе не превосходит

$$\sqrt{2} M \varepsilon \sum_{i=1}^n \text{пл } \Pi_i = \sqrt{2} M \varepsilon \text{пл } \Phi,$$

где ε может быть сделано (за счет выбора достаточно мелкого разбиения фигуры Φ) сколь угодно малым. Интеграл (1.65) заведомо существует, так как подынтегральная функция непрерывна. Следовательно, мы можем в равенстве (1.64) перейти к пределу, неограниченно измельчая разбиение фигуры Φ . Получим

$$\text{пл } \mathcal{F} = \int_{\Phi} \int \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta.$$

Для завершения доказательства теоремы остается сделать переход от многоугольной фигуры Φ , погруженной в область Γ , к самой области Γ . Этот переход уже не составляет труда. Так как Γ квадрируема, то можно найти две такие фигуры Φ_1 и Φ_2 , составленные из прямоугольников*), первая из которых вложена в Γ , а вторая объемлет Γ , что разность их площадей меньше заданного положительного числа δ . Отображение $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ переводит их в две квадрируемые фигуры \mathcal{F}_1 и \mathcal{F}_2 , одна из которых вложена в G , а другая объемлет G . Нетрудно показать, что

$$|\text{пл } \mathcal{F}_1 - \text{пл } \mathcal{F}_2| < (2M^2 + \sqrt{2} M \varepsilon) \delta$$

*) При этом объемлющая фигура Φ_2 должна лежать в той области, большей чем Γ , в которой, как мы условились, рассматриваемое отображение определено и удовлетворяет условиям теоремы.

(проделайте это, воспользовавшись равенством (1.64) и тем, что $\max \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| < 2M^2$). Тогда тем более

$$|\text{пл } G - \text{пл } \mathcal{F}_1| < (2M^2 + \sqrt{2} M\epsilon) \delta. \quad (1.66)$$

Но \mathcal{F}_1 — образ многоугольной фигуры Φ_1 , следовательно, по доказанному ранее

$$\text{пл } \mathcal{F}_1 = \int_{\Phi_1} \int \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta. \quad (1.67)$$

Кроме того, по теореме о среднем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} \int \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta - \int_{\Phi_1} \int \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta \right| = \\ = \int_{\Gamma - \Phi_1} \int \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta < 2M^2 \delta. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Из (1.66) и (1.68), учитывая (1.67), получаем

$$\left| \text{пл } G - \int_{\Gamma} \int \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta \right| < (4M^2 + \sqrt{2} M\epsilon) \delta.$$

Так как δ произвольно мало, то отсюда вытекает утверждение теоремы.

Замечание 1. Основная идея, на которую опирались как изложенное доказательство, так и приведенные выше наглядные рассуждения, состоит в том, что нелинейное отображение $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ в малой области можно аппроксимировать линейным, притом тем точнее, чем меньше область. Собственно говоря, рассмотрение нелинейного функционального соотношения как линейного в бесконечно малом — это основа всего анализа.

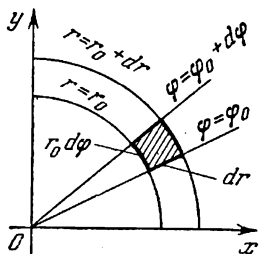


Рис. 1.28.

Пример. Рассмотрим снова полярные координаты. Линии $r = r_0$, $r = r_0 + dr$, $\phi = \phi_0$, $\phi = \phi_0 + d\phi$ вырезают на плоскости x, y бесконечно малый прямоугольник со сторонами dr и $r_0 d\phi$ (рис. 1.28). Поэтому элемент площади в полярных координатах равен $r_0 d\phi dr$. (Этот же результат вытекает, конечно, и из общей формулы (1.52), поскольку $\frac{D(x, y)}{D(r, \phi)} = r$.) Следовательно, площадь в полярных координатах выражается формулой

$$S = \int_{\Gamma} \int r dr d\phi, \quad (1.69)$$

где Γ — область изменения переменных r и φ . В частности, если область G ограничена двумя лучами $\varphi = \varphi_1$ и $\varphi = \varphi_2$ и кривой $r = r(\varphi)$, т. е. имеет вид, изображенный на рис. 1.29 (изобразите эту область на плоскости $r\varphi$), то, преобразовав двойной интеграл (1.69) в повторный, получим

$$S = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} r dr.$$

Выполнив здесь интегрирование по r , находим

$$S = \frac{1}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi) d\varphi.$$

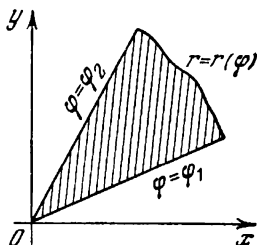


Рис. 1.29.

Это — известная формула площади в полярных координатах (см. вып. 1, гл. 11, § 2).

Замечание 2. Из формулы (1.53) ясен геометрический смысл абсолютной величины якобиана $\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}$. Обозначим этот якобиан,

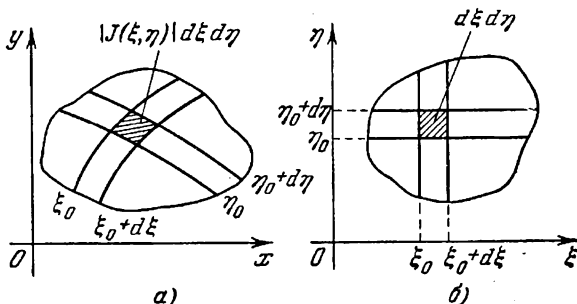


Рис. 1.30.

для сокращения записи, $J(\xi, \eta)$ и рассмотрим отображение области Γ на область G , определяемое формулами

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta).$$

Это отображение переводит лежащий в Γ бесконечно малый прямоугольник (рис. 1.30), ограниченный прямыми

$$\xi = \xi_0, \quad \xi = \xi_0 + d\xi, \quad \eta = \eta_0, \quad \eta = \eta_0 + d\eta$$

и имеющий площадь $d\xi d\eta$, в параллелограмм, площадь которого равна

$$|J(\xi, \eta)| d\xi d\eta.$$

Следовательно, $|J(\xi, \eta)|$ представляет собой коэффициент растяжения площади (в точке (ξ, η)) при отображении области Γ на G .

Замечание 3. В теореме 1.7 мы предполагали, что отображение

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

области Γ на область G взаимно однозначно. Однако выражение (1.52) для площади в криволинейных координатах сохраняет силу и в том случае, если это условие нарушается в отдельных точках или вдоль отдельных линий. Рассмотрим в качестве типичного примера отображение прямоугольника $0 \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ на круг, отвечающее введению полярных координат по формулам

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi. \quad (1.70)$$

Это отображение удовлетворяет условиям теоремы 1.7 всюду, кроме точек, лежащих на отрезке $y=0$, $0 \leq x \leq a$. Возьмем в плоскости $r\varphi$ прямоугольник $\rho \leq r \leq a$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi - \varepsilon$, а в плоскости xu —

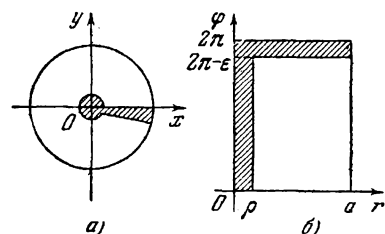


Рис. 1.31.

область, отвечающую этому прямоугольнику при отображении (1.70) (рис. 1.31). Для этих областей формула (1.52) верна (так как там условия 1) — 3) выполнены). Если теперь перейти к пределу при $\rho \rightarrow 0$ и $\varepsilon \rightarrow 0$, то получим, что формула (1.52) остается справедливой и для всего рассматриваемого круга $r \leq a$.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены и в общем случае произвольного отображения, взаимно однозначного всюду, кроме отдельных точек или линий.

6. Замена переменных в двойном интеграле. Полученное нами выражение (1.52) площади в криволинейных координатах позволяет легко найти и общую формулу замены переменных в двойном интеграле. Рассмотрим интеграл

$$\iint_G f(x, y) dx dy, \quad (1.71)$$

где область G ограничена кусочно-гладким контуром L , а функция $f(x, y)$ или непрерывна в этой области (включая границу) всюду, или же ограничена в ней и непрерывна всюду, кроме некоторого множества площади нуль.

Пусть функции $x = x(\xi, \eta)$ и $y = y(\xi, \eta)$ определяют соответствие между точками области G и точками некоторой области Γ , удовлетворяющее всем тем предположениям, при которых была установлена формула (1.52), выражающая площадь области G в криво-

линейных координатах. Разобьем область Γ на части Γ_i некоторой системой кусочно-гладких кривых. Соответствующие им кусочно-гладкие кривые разобьют область G на части G_i площади ΔS_i . Выбрав в каждой из этих частей G_i произвольную точку (x_i, y_i) , составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i, \quad (1.72)$$

отвечающую интегралу (1.71).

Применив к каждой из частичных областей G_i формулу (1.52), получим

$$\Delta S_i = \int_{\Gamma_i} \int \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| d\xi d\eta.$$

Обозначив якобиан символом $J(\xi, \eta)$ вместо $\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}$ и воспользовавшись теоремой о среднем, будем иметь

$$\Delta S_i = |J(\xi_i^*, \eta_i^*)| \Delta \sigma_i,$$

где $\Delta \sigma_i$ — площадь области Γ_i . Заменяв в интегральной сумме (1.72) каждую из величин ΔS_i найденным выражением, получим

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) |J(\xi_i^*, \eta_i^*)| \Delta \sigma_i.$$

Точка (ξ_i^*, η_i^*) получается в результате применения теоремы о среднем, и выбор ее в каждой из частичных областей Γ_i от нас не зависит. Напротив, точка (x_i, y_i) выбирается в каждой из частичных областей G_i совершенно произвольно. Поэтому мы можем положить

$$x_i = x(\xi_i^*, \eta_i^*), \quad y_i = y(\xi_i^*, \eta_i^*),$$

т. е. выбрать ту точку области G_i , которая соответствует точке (ξ_i^*, η_i^*) области Γ_i . Тогда рассматриваемая интегральная сумма примет вид

$$\sum_{i=1}^n f(x(\xi_i^*, \eta_i^*), y(\xi_i^*, \eta_i^*)) |J(\xi_i^*, \eta_i^*)| \Delta \sigma_i,$$

а это не что иное, как интегральная сумма для интеграла

$$\int_{\Gamma} \int f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \quad (1.73)$$

Этот интеграл существует, так как подынтегральная функция в области Γ либо непрерывна, либо ограничена и непрерывна в Γ всюду.

кроме точек некоторого множества, имеющего площадь нуль. Если теперь неограниченно измельчать разбиение области Γ на части Γ_i , то, в силу непрерывности соответствия, диаметры областей G_i также будут стремиться к нулю. При этом рассматриваемая интегральная сумма должна стремиться, с одной стороны, к двойному интегралу (1.71), а с другой — к интегралу (1.73). Следовательно, эти интегралы равны

$$\int_G \int f(x, y) dx dy = \int_{\Gamma} \int f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta. \quad (1.74)$$

Это и есть формула замены переменных в двойном интеграле.

Итак, если G — замкнутая ограниченная область с кусочно-гладкой границей и $f(x, y)$ — заданная в этой области функция, непрерывная всюду или же ограниченная и непрерывная всюду, кроме некоторого множества площади нуль, и если формулы

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

устанавливают соответствие между точками области G и точками некоторой области Γ в плоскости $\xi\eta$, удовлетворяющее условиям 1) — 3) п. 1, то имеет место формула замены переменных (1.74).

Равенство (1.74) справедливо и в тех случаях, когда условия взаимной однозначности, непрерывности и непрерывной дифференцируемости соответствия между областями G и Γ нарушаются в отдельных точках или вдоль конечного числа кривых площади нуль.

В двойном интеграле, как и в однократном, замена переменных — важнейший способ приведения интеграла к виду, более удобному для его вычисления. Необходимо, однако, подчеркнуть, что в случае двух переменных возникает одно новое обстоятельство. В то время как для однократного интеграла замена переменных делается лишь с целью упрощения подынтегрального выражения, при вычислении двойных интегралов стремятся упростить не только интегрируемую функцию, но и ту область, по которой берется интеграл. Последнее обстоятельство настолько важно, что иногда имеет смысл пойти даже на некоторое усложнение подынтегральной функции, но зато получить простую область интегрирования.

Пример. Вычислить $\int_G \int dx dy$, где G — область, ограниченная эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Здесь подынтегральная функция тождественно равна 1, т. е. является простейшей из всех возможных. Однако для вычисления этого интеграла все же имеет смысл сделать замену

переменных, положив

$$x = a\rho \cos \varphi, \quad y = b\rho \sin \varphi. \quad (1.75)$$

Якобиан такого преобразования равен $ab\rho$. Область интегрирования при этом переходит в прямоугольник

$$0 \leq \varphi < 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 1.$$

Переходя к новым переменным и записывая двойной интеграл в виде повторного, получаем

$$\int_a \int dx dy = ab \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 \rho d\rho = \pi ab.$$

Упражнения. 1. Вычислить площадь области, ограниченной кривыми $xy=1$, $xy=2$, $y=x^2$, $y=2x^2$.

Указание. Принять за новые переменные

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{y}{x^2}. \quad (1.76)$$

2. Нарисовать сети координатных линий, отвечающие заменам (1.75) и (1.76).

7. Сравнение с одномерным случаем. Интеграл по ориентированной области. Формула (1.74) аналогична формуле замены переменной в определенном интеграле

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\beta} f(x(t)) x'(t) dt \quad (1.77)$$

с той только разницей, что в случае одной переменной берется не модуль производной $x'(t)$ (играющей здесь роль якобиана), а сама эта производная. Причина этого различия состоит в том, что определенный интеграл

$\int_a^b f(x) dx$ берется по ориентированному отрезку $[a, b]$ и при перестановке пределов меняет знак, а двойной интеграл берется по неориентированной области. Если бы мы условились в определенном интеграле пределы интегрирования всегда ставить так, чтобы нижний предел был не больше верхнего, то формула (1.77) (где $x = x(t)$ — монотонная функция) приняла бы вид

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^{\beta} f(x(t)) |x'(t)| dt. \quad (1.78)$$

(Проверьте это!)

С другой стороны, можно было бы в случае двойных интегралов ввести понятие ориентации области и приписывать площади такой области знак плюс или минус.

За ориентацию области принимается выбор определенной ориентации (направления обхода) ее границы. Именно, область называется ориентиро-

ванной положительно, если при движении по ее границе область остается слева от наблюдателя (рис. 1.32). В противоположном случае область назы-

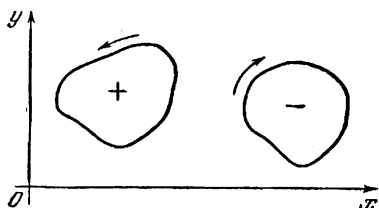


Рис. 1.32.

вается ориентированной отрицательно. Если площадь области G (неориентированной) равна S , то площадь этой области, взятой с положительной ориентацией, положим равной опять-таки S , а площадь отрицательно ориентированной области G будем считать равной $-S$. Можно показать, что отображение $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ области Γ на G сохраняет ориентацию, если его якобиан положителен, и меняет ориентацию,

если $\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} < 0$. Поэтому формула,

представляющая в криволинейных координатах *площадь ориентированной области G* , имеет вид

$$S = \int_{\Gamma} \int \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} d\xi d\eta \quad (\text{без знака модуля});$$

аналогично меняется и формула (1.74).

ГЛАВА 2

ТРОЙНЫЕ И МНОГОКРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В предыдущей главе мы ввели понятие двойного интеграла. Сейчас мы определим интеграл от функции трех переменных, так называемый *тройной интеграл*. Тройные интегралы, подобно двойным, находят широкое применение в различных физических и геометрических задачах. Некоторые из этих задач будут рассмотрены в § 3.

Между тройными интегралами и двойными существует почти полная аналогия. Те доказательства, которые не отличаются сколь-нибудь существенно от доказательств соответствующих утверждений для двойных интегралов, мы будем, как правило, опускать.

В § 5 этой главы будет дано понятие о многократных интегралах, т. е. об интегрировании функций произвольного числа независимых переменных.

§ 1. Определение и основные свойства тройного интеграла

1. Предварительные замечания. Объем пространственной фигуры. Понятия внутренней точки области, границы, замкнутой области, диаметра и т. д., определенные в § 1 гл. 1 для плоскости, переносятся без всяких изменений на случай трехмерного пространства.

Вводя двойной интеграл, мы пользовались понятием площади. Аналогично определение тройного интеграла опирается на понятие объема пространственной фигуры.

Определение объема многогранника мы считаем известным из элементарной геометрии. Распространить это понятие на более широкий класс фигур можно так же, как в § 1 гл. 1 мы распространили понятие площади с многоугольных фигур на криволинейные квадрируемые фигуры. Изложим вкратце соответствующие рассуждения.

Объем $V(P)$ многогранного тела (т. е. тела, составленного из конечного числа многогранников) представляет собой неотрицательную величину, обладающую следующими свойствами:

1 (монотонность). Если P и Q — два многогранных тела и P содержится в Q , то

$$V(P) \leq V(Q).$$

2 (аддитивность). Если P и Q — два многогранных тела без общих внутренних точек, то

$$V(P + Q) = V(P) + V(Q).$$

3 (инвариантность). Если многогранные тела P и Q конгруэнтны между собой, то их объемы равны.

Эти три свойства должны быть сохранены при распространении понятия объема с многогранных тел на более общий класс кубируемых тел.

Возьмем произвольное пространственное тело*) Φ и рассмотрим всевозможные вложенные в него многогранные тела; точную верхнюю грань их объемов назовем *внутренним объемом* тела Φ (если тело Φ таково, что внутрь него вообще нельзя поместить ни одного невырожденного многогранного тела, то его внутренний объем мы положим по определению равным нулю). Точную нижнюю грань объемов многогранных тел, объемлющих тело Φ , мы назовем его *внешним объемом*. Если внешний объем тела Φ равен его внутреннему объему, то это общее их значение называется просто *объемом тела* Φ , а само это тело называется *кубируемым*. Аналогично теореме 1.2 доказывается следующая теорема:

Теорема 2.1. Тело Φ кубируемо в том и только том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся два таких многогранных тела $P \subset \Phi$ и $Q \supset \Phi$, что

$$V(Q) - V(P) < \varepsilon.$$

Мы скажем, что некоторое множество имеет объем нуль, если его можно поместить внутрь многогранного тела сколь угодно малого объема. Пользуясь этим понятием, мы можем теорему 2.1 сформулировать так:

Чтобы тело Φ было кубируемо, необходимо и достаточно, чтобы его граница имела объем нуль.

Этот критерий позволяет установить кубируемость достаточно широких классов тел. Например, кубируемо всякое тело, составленное из конечного числа криволинейных цилиндров, каждый из которых имеет quadriруемое основание, а сверху ограничен поверхностью, задаваемой уравнением $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ — непрерывная функ-

*) То есть некоторое ограниченное множество точек в пространстве.

ция. Объем каждого такого цилиндра представляется двойным интегралом

$$\int_G \int f(x, y) dx dy,$$

взятым по основанию этого цилиндра.

Другой важный класс кубируемых тел — это пространственные области, ограниченные конечным числом гладких *) поверхностей. Доказательство того, что область, ограниченная гладкими поверхностями, кубируема, по существу, аналогично доказательству того, что гладкая кривая имеет площадь нуль, но несколько более громоздко. Мы не будем приводить его.

Повторив рассуждения, проведенные в п. 4 § 1, можно установить справедливость следующих утверждений:

1) Если Φ_1 и Φ_2 — два кубируемых тела, то их объединение Φ — кубируемое тело, и если тела Φ_1 и Φ_2 не имеют общих внутренних точек, то объем Φ равен сумме объемов Φ_1 и Φ_2 .

2) Пересечение (общая часть) двух кубируемых тел есть кубируемое тело.

Замечание. Обратим внимание на то, что к понятию объема у нас имеются два различных по форме подхода.

С одной стороны, мы определили объем криволинейного цилиндра с квадратуемым основанием G , ограниченного сверху поверхностью $z = f(x, y)$, как двойной интеграл

$$\int_G \int f(x, y) dx dy.$$

С другой стороны, мы ввели понятие объема кубируемого тела с помощью аппроксимации такого тела (изнутри и снаружи) многогранными телами. Можно, однако, показать, что для достаточно широкого класса тел (во всяком случае, для тел, ограниченных кусочно-гладкими поверхностями) оба эти подхода равносильны.

2. Определение тройного интеграла. Пусть на кубируемом теле V задана ограниченная функция $f(x, y, z)$. Разобьем V на части V_i и, произвольно выбрав в каждой из V_i некоторую точку (ξ_i, η_i, ζ_i) , составим сумму

$$T = \sum_{i=1}^n f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \Delta v_i, \quad (2.1)$$

где Δv_i — объем элемента V_i , а сумма берется по всем элементам разбиения. Введем следующие определения.

*) Поверхность называется *гладкой*, если в каждой ее точке существует касательная плоскость и при переходе от точки к точке положение этой касательной плоскости меняется непрерывно.

Определение 1. Пусть D — наибольший из диаметров $d(V_i)$ элементов V_i , на которые разбито тело V . Число J называется пределом интегральных сумм (2.1) при $D \rightarrow 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$|T - J| < \varepsilon,$$

как только $D < \delta$.

Иначе говоря, неравенство $|T - J| < \varepsilon$ должно выполняться для каждой интегральной суммы T , отвечающей любому разбиению $\{V_i\}$, для которого $D < \delta$, и любому выбору точек (ξ_i, η_i, ζ_i) в каждом из V_i .

Определение 2. Если предел интегральных сумм (2.1) при $D \rightarrow 0$ существует, то он называется тройным интегралом от функции $f(x, y, z)$ по V и обозначается символом

$$\iiint_V f(x, y, z) dv \quad \text{или} \quad \iiint_V f(x, y, z) dx dy dz.$$

Функция $f(x, y, z)$ при этом называется интегрируемой по V .

3. Условия существования тройного интеграла. Интегрируемость непрерывных функций. Как и в случае одной или двух переменных, не всякая ограниченная функция $f(x, y, z)$ интегрируема. Для нахождения достаточных условий существования тройного интеграла используют обычно, как и в случае двойных или однократных интегралов, верхние и нижние суммы Дарбу.

Пусть $f(x, y, z)$ — ограниченная функция, заданная на кубируемом теле V . $\{V_i\}$ — некоторое разбиение этого тела и M_i, m_i — соответственно точная верхняя и точная нижняя грани значений функции $f(x, y, z)$ на V_i . Тогда

$$\sum_{i=1}^n M_i \Delta v_i \quad \text{и} \quad \sum_{i=1}^n m_i \Delta v_i$$

(здесь Δv_i — объем элемента V_i) называются соответственно *верхней и нижней суммами Дарбу* для функции $f(x, y, z)$ и данного разбиения $\{V_i\}$ тела V . Свойства верхних и нижних сумм Дарбу, сформулированные в § 2 гл. 1, дословно переносятся на случай трех переменных.

С помощью рассуждений, в точности повторяющих доказательство теоремы 1.3, доказывается следующее необходимое и достаточное условие существования тройного интеграла:

Теорема 2.2. Ограниченная на кубируемом теле V функция $f(x, y, z)$ интегрируема по V в том и только том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение тела V , что разность между верхней и нижней суммами Дарбу для функции $f(x, y, z)$, отвечающими этому разбиению, меньше ε .

С помощью этого критерия устанавливаются следующие теоремы, аналогичные теоремам 1.4 и 1.4' для двойных интегралов.

Теорема 2.3. *Всякая функция $f(x, y, z)$, непрерывная в замкнутой ограниченной*) области V , интегрируема в этой области.*

Теорема 2.4. *Если функция $f(x, y, z)$ ограничена в замкнутой ограниченной*) области и непрерывна в этой области всюду, кроме, быть может, точек, принадлежащих некоторому множеству объема нуль, то $f(x, y, z)$ интегрируема по этой области.*

4. Свойства тройных интегралов. Основные свойства тройных интегралов вполне аналогичны свойствам двойных интегралов. Перечислим их.

1—2 (линейность). Если $f_1(x, y, z)$ и $f_2(x, y, z)$ интегрируемы по области V , а k_1 и k_2 — постоянные, то $k_1 f_1 + k_2 f_2$ интегрируема по V и

$$\begin{aligned} \int_V \int \int [k_1 f_1(x, y, z) + k_2 f_2(x, y, z)] dv = \\ = k_1 \int_V \int \int f_1(x, y, z) dv + k_2 \int_V \int \int f_2(x, y, z) dv. \end{aligned}$$

3 (аддитивность). Если V — объединение двух тел V_1 и V_2 без общих внутренних точек и $f(x, y, z)$ интегрируема по V_1 и по V_2 , то $f(x, y, z)$ интегрируема по V и

$$\int_V \int \int f(x, y, z) dv = \int_{V_1} \int \int f(x, y, z) dv + \int_{V_2} \int \int f(x, y, z) dv.$$

4 (монотонность). Если $f_1(x, y, z) \geq f_2(x, y, z)$ и обе эти функции интегрируемы по V , то

$$\int_V \int \int f_1(x, y, z) dv \geq \int_V \int \int f_2(x, y, z) dv.$$

5 (оценка интеграла по модулю). Если $f(x, y, z)$ интегрируема по V , то $|f(x, y, z)|$ также интегрируема и

$$\left| \int_V \int \int f(x, y, z) dv \right| \leq \int_V \int \int |f(x, y, z)| dv.$$

*) И кубируемой. Условие кубируемости мы в дальнейшем всегда будем предполагать, не оговаривая этого каждый раз особо.

6 (теорема о среднем). Если функция $f(x, y, z)$ интегрируема по V и удовлетворяет неравенствам $m \leq f(x, y, z) \leq M$, то

$$mv \leq \int \int \int_V f(x, y, z) dv \leq Mv,$$

где v — объем тела V .

Для непрерывных функций теорема о среднем может быть сформулирована так:

6'. Если функция $f(x, y, z)$ непрерывна, а V — связная замкнутая ограниченная область, то в области V найдется такая точка (ξ, η, ζ) , что

$$\int \int \int_V f(x, y, z) dv = f(\xi, \eta, \zeta) v.$$

5. Тройной интеграл как аддитивная функция области. Аналогично функциям области на плоскости можно ввести понятие *функции пространственной области* *). Примером такой функции (определяемой на всех кубируемых телах) может служить объем области. Далее, если пространство (или некоторая его часть) заполнено материей, то, ставя в соответствие каждой области ту массу, которая находится внутри этой области, мы опять-таки получим некоторую функцию области в пространстве. Объем и масса обладают уже знакомым нам свойством аддитивности, которое формулируется здесь точно так же, как и для плоского случая: функция области $F(V)$ называется *аддитивной*, если для любых двух областей V_1 и V_2 , для которых $F(V)$ определена и которые не имеют общих внутренних точек, $F(V_1 + V_2)$ определена и

$$F(V_1 + V_2) = F(V_1) + F(V_2).$$

Если $f(x, y, z)$ — интегрируемая функция, то тройной интеграл

$$\int \int \int_V f(x, y, z) dv,$$

рассматриваемый как функция области интегрирования, представляет собой аддитивную функцию области (свойство 3 п. 4).

Аналогично двумерному случаю вводится понятие *производной аддитивной функции области в пространстве по объему*, а именно: число A мы назовем пределом отношения

$$\frac{F(V)}{v}$$

*) Термин «область» мы здесь употребляем как синоним термина «кубируемое тело».

(где v — объем области V) при стягивании V к точке M_0 , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$\left| \frac{F(V)}{v} - A \right| < \varepsilon$$

для всякой области V , целиком помещающейся в шаре радиуса δ , с центром в точке M_0 . Этот предел называется *производной функции $F(V)$ по объему* в точке M_0 и обозначается

$$\lim_{V \rightarrow M_0} \frac{F(V)}{v}, \quad \text{или} \quad \frac{dF}{dv}.$$

Если $F(V)$ — масса, содержащаяся в области V , то ее производная по объему (если она существует) представляет собой плотность $\rho(x, y, z)$ пространственного распределения масс.

Из теоремы о среднем для тройного интеграла и из непрерывности подынтегральной функции сразу вытекает, что производная интеграла от непрерывной функции по объему существует и совпадает с подынтегральной функцией

$$\frac{d}{dv} \int \int \int_V f(x, y, z) dv = f(x, y, z),$$

причем этот интеграл представляет собой единственную аддитивную функцию области в пространстве, производная которой по объему есть заданная непрерывная функция $f(x, y, z)$.

§ 2. Некоторые применения тройных интегралов в физике и геометрии

Рассмотрим некоторые типичные задачи, связанные с вычислением тройных интегралов.

1. Вычисление объемов. Если V — кубируемое тело, то тройной интеграл

$$\int \int \int_V dx dy dz \quad (2.2)$$

равен объему этого тела. Действительно, этому объему равна каждая из интегральных сумм, отвечающих интегралу (2.2). Тройные интегралы в некоторых случаях бывают удобнее для вычисления объемов, чем двойные, так как с их помощью можно записать сразу объем не только криволинейного цилиндра, но и любого кубируемого тела.

2. Нахождение массы тела по плотности. Если дано некоторое тело с объемной плотностью $\rho(x, y, z)$, представляющей собой непрерывную функцию, то тройной интеграл

$$\int \int \int_V \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

взятый по всему объему, занимаемому этим телом, представляет собой массу данного тела. Вывод здесь вполне аналогичен выводу формулы для нахождения массы пластинки по ее плотности.

3. Момент инерции. Проводя обычный предельный переход от системы материальных точек к непрерывно распределенной массе, легко получить следующие выражения для моментов инерции относительно координатных осей тела с объемной плотностью $\rho(x, y, z)$:

$$I_z = \iiint_V (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_y = \iiint_V (x^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz,$$

$$I_x = \iiint_V (y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

Момент инерции относительно начала координат выражается формулой

$$I_0 = \iiint_V (x^2 + y^2 + z^2) \rho(x, y, z) dx dy dz.$$

4. Вычисление координат центра масс. Координаты центра масс некоторого тела, имеющего объемную плотность $\rho(x, y, z)$, выражаются формулами:

$$x_c = \frac{\iiint_V x \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz}; \quad y_c = \frac{\iiint_V y \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz};$$

$$z_c = \frac{\iiint_V z \rho(x, y, z) dx dy dz}{\iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz},$$

которые получаются с помощью тех же рассуждений, что и в случае двух измерений. В частности, если рассматриваемое тело однородно, т. е. $\rho(x, y, z) = \text{const}$, то выражения для координат центра масс принимают более простой вид:

$$x_c = \frac{\iiint_V x dv}{\iiint_V dv}; \quad y_c = \frac{\iiint_V y dv}{\iiint_V dv}; \quad z_c = \frac{\iiint_V z dv}{\iiint_V dv}.$$

5. Притяжение материальной точки телом. Пусть даны тело, заполняющее область V и имеющее плотность $\rho(x, y, z)$, и материальная точка (лежащая вне V) с координатами (x_0, y_0, z_0) и массой m . Найдем силу, с которой материальная точка притягивается телом. Рассмотрим элемент объема тела dv . Масса этого элемента равна $\rho(x, y, z) dv$, а сила, с которой он притягивает материальную точку, равна по величине

$$\gamma \frac{m\rho(x, y, z) dv}{r^2},$$

где γ — постоянная тяготения (зависящая от выбора единиц) и

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},$$

а направление ее совпадает с направлением вектора \mathbf{r} , соединяющего точки (x_0, y_0, z_0) и (x, y, z) . Рассмотрим компоненту этой силы вдоль оси x . Эта компонента равна

$$\gamma \frac{(x - x_0) m\rho(x, y, z) dv}{r^3} \quad (2.3)$$

(поскольку косинус угла между осью x и вектором \mathbf{r} равен $\frac{x - x_0}{r}$). Для того чтобы получить проекцию F_x на ось x силы, с которой притягивает материальную точку все тело, нужно просуммировать элементы (2.3), т. е. взять тройной интеграл.

Итак,

$$F_x = \int_V \int \int \frac{\gamma m\rho(x, y, z)(x - x_0)}{r^3} dv.$$

Аналогично получаются и две другие компоненты:

$$F_y = \int_V \int \int \frac{\gamma m\rho(x, y, z)(y - y_0)}{r^3} dv;$$

$$F_z = \int_V \int \int \frac{\gamma m\rho(x, y, z)(z - z_0)}{r^3} dv.$$

З а м е ч а н и е. Следует подчеркнуть, что в рассматриваемых здесь задачах о нахождении координат центра масс, моментов инерции и т. д., равно как и в аналогичных задачах, о которых шла речь в § 4 предыдущей главы, полученные нами формулы представляют собой, собственно говоря, определения соответствующих понятий (центра масс, моментов инерции и пр.) для случая непрерывного распределения масс. Оправданием этих определений служат, в конечном счете, не логические рассуждения, а совпадение результатов экспериментов с расчетами, основанными на этих определениях.

§ 3. Вычисление тройного интеграла

Как и в случае двойных интегралов, основной прием, на котором базируется вычисление тройных интегралов, состоит в сведении интеграла к повторному, т. е. к замене интегрирования по объему интегрированием по каждой из переменных в отдельности *).

Задачу о сведении тройного интеграла к повторному мы рассмотрим сначала для случая, когда интеграл берется по некоторому параллелепипеду со сторонами, параллельными осям координат.

1. Сведение тройного интеграла по параллелепипеду к повторному. Рассмотрим тройной интеграл

$$\iiint_Q f(x, y, z) dx dy dz,$$

в котором область интегрирования Q представляет собой прямоугольный параллелепипед:

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d, \quad k \leq z \leq l$$

(рис. 2.1), проектирующийся на плоскость xy в прямоугольник P , определяемый неравенствами

$$a \leq x \leq b, \quad c \leq y \leq d.$$

Имеет место следующая

Теорема 2.5. Если для функции $f(x, y, z)$ существует тройной интеграл

$$\iiint_Q f(x, y, z) dv$$

и если для каждой фиксированной точки (x, y) из P существует интеграл

$$I(x, y) = \int_k^l f(x, y, z) dz,$$

то повторный интеграл

$$\iint_P dx dy \int_k^l f(x, y, z) dz$$

*) Здесь мы имеем в виду точное вычисление интеграла. Для приближенного вычисления кратных интегралов сведение их к повторным, как правило, не применяется.

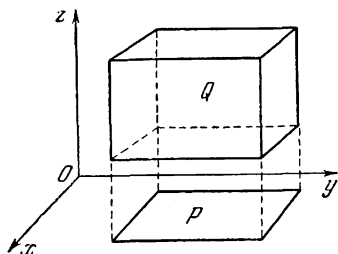


Рис. 2.1.

существует и имеет место равенство

$$\iiint_Q f(x, y, z) dv = \iint_P dx dy \int_k^l f(x, y, z) dz. \quad (2.4)$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы о сведении двойного интеграла к повторному (см. теорему 1.5). Оно сводится к установлению того факта, что любая интегральная сумма, отвечающая при некотором разбиении интегралу $\iint_P I(x, y) dx dy$, заключена между нижней и верхней суммами Дарбу,

отвечающими тройному интегралу $\iiint_Q f(x, y, z) dv$.

Предположив, что интеграл

$$J(x) = \int_c^d I(x, y) dy$$

(при любом фиксированном x , $a \leq x \leq b$) также существует, мы можем в формуле (2.4) интегрирование по прямоугольнику P заменить повторным интегрированием, сначала по y , а потом по x . Сделав это, мы можем переписать равенство (2.4) в следующем виде:

$$\iiint_Q f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_k^l f(x, y, z) dz. \quad (2.5)$$

Это и есть формула, сводящая вычисление тройного интеграла по параллелепипеду Q к последовательному интегрированию по каждой из трех переменных в отдельности. В формуле (2.5) интеграл справа берется сначала по z , потом по y и, наконец, по x . Мы могли бы, предположив существование интегралов

$$I_1(y, z) = \int_a^b f(x, y, z) dx \quad \text{и} \quad J_1(z) = \int_c^d I_1(y, z) dy,$$

получить аналогичную формулу

$$\iiint_Q f(x, y, z) dv = \int_k^l dz \int_c^d dy \int_a^b f(x, y, z) dx,$$

а также (опять-таки при условии существования соответствующих однократных и двойных интегралов) и другие аналогичные формулы, сводящие тройной интеграл к повторному, взятому по x , y и z в той или иной последовательности. В частности, если $f(x, y, z)$ непрерывна, то как тройной, так и все возможные двойные и однократные интегралы от этой функции существуют, поэтому при

вычислении тройного интеграла от непрерывной функции можно интегрировать по переменным x , y и z в любой последовательности.

2. Сведение тройного интеграла по криволинейной области к повторному. Рассмотрим теперь криволинейную область V , которая снизу и сверху ограничена поверхностями

$$z = z_1(x, y) \text{ и } z = z_2(x, y),$$

а сбоку — некоторой цилиндрической поверхностью, и пусть G — проекция области V на плоскость xy (рис. 2.2). Будем такую область кратко называть «цилиндрической по z ». Пусть в области V задана функция $f(x, y, z)$, интегрируемая в этой области и такая, что для любой фиксированной точки (x, y) из G существует однократный интеграл

$$\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Заключим область V в некоторый параллелепипед Q :

$a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, $k \leq z \leq l$,
и определим на Q вспомогательную функцию $f^*(x, y, z)$, положив

$$f^*(x, y, z) = \begin{cases} f(x, y, z) & \text{в } V, \\ 0 & \text{вне } V. \end{cases}$$

Ясно, что $f^*(x, y, z)$ интегрируема по Q и что

$$\iiint_Q f^*(x, y, z) dv = \iiint_V f(x, y, z) dv. \quad (2.6)$$

Применив к $f^*(x, y, z)$ формулу (2.4), получим

$$\iiint_Q f^*(x, y, z) dv = \iint_P dx dy \int_k^l f^*(x, y, z) dz, \quad (2.7)$$

где P — проекция Q на плоскость xy .

В силу того, что $f^*(x, y, z)$ равна нулю вне V , имеем

$$\int_k^l f^*(x, y, z) dz = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (2.8)$$

Этот интеграл представляет собой функцию от x и y , равную, очевидно, нулю вне области G . Поэтому двойной интеграл от нее, взя-

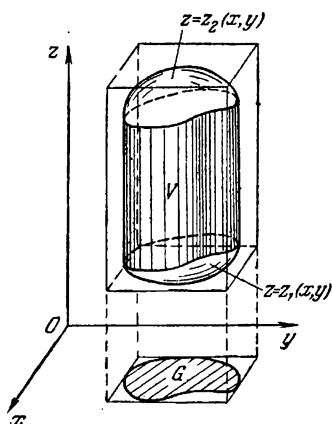


Рис. 2.2.

тый по P — проекции параллелепипеда Q на плоскость xu , — совпадает с интегралом от нее же, взятым по G . Таким образом, учитывая (2.6) и (2.8), равенство (2.7) можно переписать в следующем виде:

$$\int_V \int \int f(x, y, z) dx dy dz = \int_G \int dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (2.9)$$

Итак, мы получили следующий результат:

Теорема 2.6. Если для функции $f(x, y, z)$, заданной в области V , цилиндрической по z , существует тройной интеграл

$$\int_V \int \int f(x, y, z) dv,$$

а для каждой фиксированной точки (x, y) , принадлежащей проекции G области V на плоскость xu , существует интеграл

$$I(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz,$$

то повторный интеграл

$$\int_G \int dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

существует и имеет место равенство (2.9).

Выражение

$$I(x, y) = \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz$$

представляет собой функцию двух переменных. Если для этой функции и той области G , по которой она интегрируется, выполнены условия теоремы 1.6, то двойной интеграл

$$\int_G \int I(x, y) dx dy$$

можно в свою очередь представить в виде повторного, взятого, скажем, сначала по y , а потом по x . В результате получаем равенство

$$\int_V \int \int f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz. \quad (2.10)$$

Это и есть окончательная формула, сводящая тройной интеграл к повторному. Ясно, что мы могли бы поменять ролями переменные x ,

у и z и свести тройной интеграл к повторному, взятому в каком-нибудь ином порядке, например, сначала по x , потом по y и, наконец, по z . При этом всегда пределы интегрирования по какому-либо переменному зависят от тех координат, по которым мы еще не интегрировали.

При выводе формулы (2.9) мы пользовались тем, что каждая прямая, параллельная оси z , встречается границу области V не более чем в двух точках. Если область имеет более сложный вид, то для сведения взятого по ней тройного интеграла к повторному нужно эту область предварительно разбить на такие части, к каждой из которых формула (2.9) применима. С аналогичным положением дел мы уже встречались в случае двойных интегралов.

Подводя итог сказанному выше, сформулируем кратко «рецепт» сведения тройного интеграла к повторному (для определенности будем считать, что повторный интеграл берется сначала по z , а потом по остальным переменным).

1. Область, по которой берется тройной интеграл, следует разбить на такие части, чтобы граница каждой из этих частей пересекалась любой вертикальной прямой не более чем дважды. Ниже будем рассматривать только одну такую часть.

2. Зафиксируем x и y , т. е. рассмотрим некоторую прямую, параллельную оси z . Пусть $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ — точки пересечения этой прямой с границей области интегрирования; $z_1(x, y)$ и $z_2(x, y)$ являются пределами для интегрирования по z .

3. После интегрирования по z мы получаем функцию двух переменных x и y ; ее область определения — это проекция пространственной области V на плоскость xy . Двойной интеграл от этой функции двух переменных заменяется повторным так, как это было описано в § 5 гл. 1.

По существу, формула сведения тройного интеграла к повторному основана на той же самой «группировке слагаемых», с которой мы уже имели дело. Вместо того чтобы суммировать элементы $f(x, y, z) dx dy dz$ в ка-

ком-то произвольном порядке $\left(\text{т. е. брать } \int \int \int_V f(x, y, z) dx dy dz \right)$, мы сначала собираем все слагаемые, отвечающие одному столбику над точкой

(x, y) $\left(\text{т. е. берем } \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right)$, затем собираем вместе все стол-

бики, лежащие в сечении области V плоскостью $x = \text{const}$ $\left(\text{т. е. вычисляем}$

$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz \right)$, и, наконец, собираем вместе все такие сечения

(т. е. получаем формулу

$$\iiint_V f(x, y, z) dv = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Пример. Тройной интеграл, взятый по шару

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2,$$

записать в виде повторного.

Ответ.

$$\iiint_{x^2+y^2+z^2 \leq a^2} f(x, y, z) dv = \int_{-a}^a dx \int_{-\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dy \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} f(x, y, z) dz.$$

§ 4. Замена переменных в тройном интеграле

Мы уже встречались с заменой переменных в двойном интеграле (§ 6 гл. 1) и в однократном (вып. 1, гл. 6, § 2). Здесь мы рассмотрим вопрос о замене переменных в тройном интеграле. Содержание этого параграфа во многом аналогично § 6 гл. 1.

1. Отображение пространственных областей.

Рассмотрим два экземпляра трехмерного пространства. Пусть в одном из них введены координаты x, y, z , а в другом — координаты ξ, η, ζ . Пусть, далее, V и Ω — две области в этих пространствах, ограниченные

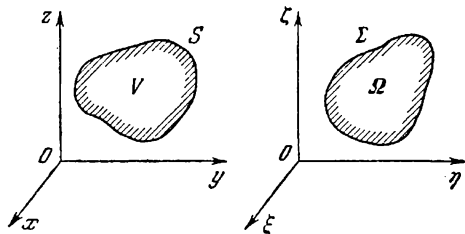


Рис. 2.3.

кусочно-гладкими поверхностями S и Σ соответственно (рис. 2.3). Предположим, что между точками этих областей установлено взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное соответствие. Это соответствие может быть записано с помощью трех функций

$$x = x(\xi, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi, \eta, \zeta) \quad (2.11)$$

или с помощью обратных функций

$$\xi = \xi(x, y, z), \quad \eta = \eta(x, y, z), \quad \zeta = \zeta(x, y, z). \quad (2.12)$$

Предположим, что функции (2.11) и (2.12) не только непрерывны, но и имеют непрерывные частные производные первого порядка. Тогда якобианы

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \quad \text{и} \quad \frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(x, y, z)}$$

существуют и непрерывны. Мы будем предполагать, что каждый из этих якобианов отличен от нуля. При этих условиях выполняется соотношение

$$\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)} \cdot \frac{D(\xi, \eta, \zeta)}{D(x, y, z)} = 1. \quad (2.13)$$

Как и в двумерном случае, можно показать, что соответствие, определяемое формулами (2.11) и (2.12), переводит внутренние точки одной области во внутренние точки другой, а граничные точки — опята-таки в граничные.

2. Криволинейные координаты в пространстве. Отображение (2.11) переводит область Ω в V . Следовательно, задание точки (ξ, η, ζ) из Ω вполне определяет соответствующую точку (x, y, z) из V . Иначе говоря, величины ξ, η, ζ можно рассматривать как координаты (отличные, конечно, от декартовых) точек области V . Они называются *криволинейными координатами*.

Рассмотрим в Ω плоскость, определенную условием $\xi = \xi_0$, т. е. параллельную координатной плоскости $\eta\zeta$. Отображение (2.11) переводит ее в некоторую поверхность. Декартовы координаты точек этой поверхности суть *)

$$x = x(\xi_0, \eta, \zeta), \quad y = y(\xi_0, \eta, \zeta), \quad z = z(\xi_0, \eta, \zeta). \quad (2.14)$$

Придавая ξ_0 различные значения, мы получим некоторое семейство поверхностей, зависящее от ξ как от параметра. Плоскости $\eta = \text{const}$ и $\zeta = \text{const}$ переходят при отображении (2.11) в два аналогичных семейства поверхностей в области V . Эти три семейства поверхностей называются *координатными*. Через каждую точку области V проходит по одной поверхности каждого из трех семейств (при условии взаимной однозначности отображения (2.11)).

3. Цилиндрические и сферические координаты. Рассмотрим две наиболее употребительные системы криволинейных координат в пространстве — *цилиндрические* и *сферические* координаты.

а) *Цилиндрические координаты.* Определим положение точки M в пространстве ее декартовой координатой z и полярными координатами r, φ ее проекции M_1 на плоскость xu (рис. 2.4). Величины r, φ, z называются *цилиндрическими координатами* точки M . Непосредственно из чертежа видно, что они связаны с декартовыми координатами точки M следующими соотношениями:

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z. \quad (2.15)$$

*) Выражения (2.14) представляют собой так называемые параметрические уравнения поверхности. Подробнее о параметрических уравнениях поверхности будет сказано в гл. 3.

Цилиндрическим координатам отвечают следующие три семейства координатных поверхностей:

- а) цилиндры $r = \text{const}$ ($0 \leq r < \infty$),
- б) вертикальные полуплоскости $\varphi = \text{const}$ ($0 \leq \varphi < 2\pi$),
- γ) горизонтальные плоскости $z = \text{const}$ ($-\infty < z < \infty$).

Якобиан, соответствующий переходу от декартовых координат к цилиндрическим, равен

$$\frac{D(x, y, z)}{D(r, \varphi, z)} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -r \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r. \quad (2.16)$$

Формулы (2.15), устанавливающие связь между декартовыми и цилиндрическими координатами, определяют отображение области

$$0 \leq r < \infty, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad -\infty < z < \infty \quad (2.17)$$

пространства переменных (r, φ, z) на все пространство (x, y, z) . При этом каждой точке $(0, 0, z_0)$ отвечает в области, определенной неравенствами (2.17), целый полусегмент

$$r = 0, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi, \quad z = z_0.$$

Таким образом, в точках, лежащих на оси z , наше отображение не является взаимно однозначным. Во всех остальных точках пространства (x, y, z) рассматриваемое соответствие будет, очевидно, взаимно однозначным.

б) *Сферические координаты*. Определим положение точки M в пространстве следующими тремя величинами:

а) расстояние ρ от начала координат O до M ,

б) угол θ между отрезком OM и положительным направлением оси z ,

γ) угол φ между проекцией OM_1 отрезка OM на плоскость xu и положительным направлением оси x (рис. 2.5). Величины ρ , θ и φ называются *сферическими координатами* точки M . Из чертежа видно, что декартовы координаты точки M связаны с ее сферическими координатами следующими соотношениями:

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi, \quad y = \rho \sin \theta \sin \varphi, \quad z = \rho \cos \theta. \quad (2.18)$$

Сферическим координатам отвечают следующие три семейства координатных поверхностей:

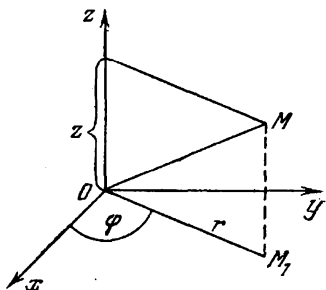


Рис. 2.4.

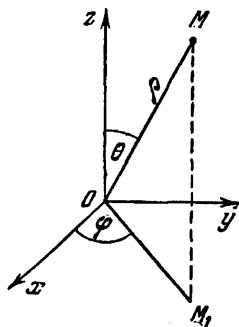


Рис. 2.5.

- а) сферы $\rho = \text{const}$ ($0 \leq \rho < \infty$),
 б) полуконусы $\theta = \text{const}$ ($0 \leq \theta \leq \pi$),
 в) вертикальные полуплоскости $\varphi = \text{const}$ ($0 \leq \varphi < 2\pi$).

Якобиан, соответствующий переходу от декартовых координат к сферическим, равен

$$\begin{vmatrix} \sin \theta \cos \varphi & \sin \theta \sin \varphi & \cos \theta \\ \rho \cos \theta \cos \varphi & \rho \cos \theta \sin \varphi & -\rho \sin \theta \\ -\rho \sin \theta \sin \varphi & \rho \sin \theta \cos \varphi & 0 \end{vmatrix} = \rho^2 \sin \theta. \quad (2.19)$$

Формулы (2.18) определяют отображение области (полубесконечный брус)

$$0 \leq \rho < \infty, \quad 0 \leq \theta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

пространства (ρ, θ, φ) на все пространство (x, y, z) . Это отображение, как и отображение, отвечающее цилиндрическим координатам, взаимно однозначно во всех точках пространства (x, y, z) , кроме точек, лежащих на оси z . Каждой точке $(0, 0, z_0)$ отвечает полу-сегмент $\rho = z_0$, $\theta = 0$ (или $\theta = \pi$, если $z_0 < 0$), $0 \leq \varphi < 2\pi$, а точке $(0, 0, 0)$ отвечает прямоугольник $\rho = 0$, $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi < 2\pi$.

4. Элемент объема в криволинейных координатах. Найдем теперь выражение элемента объема в криволинейных координатах. Рассмотрим снова некоторую пространственную область V , в которой введены криволинейные координаты ξ, η, ζ , связанные с декартовыми координатами x, y, z формулами

$$\begin{aligned} x &= x(\xi, \eta, \zeta), & y &= y(\xi, \eta, \zeta), \\ z &= z(\xi, \eta, \zeta). \end{aligned} \quad (2.20)$$

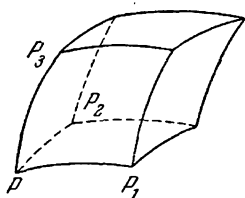


Рис. 2.6.

Функции $x(\xi, \eta, \zeta)$, $y(\xi, \eta, \zeta)$ и $z(\xi, \eta, \zeta)$ мы предполагаем непрерывными и имеющими непрерывные производные, а якобиан $\frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$ считаем отличным от нуля.

Рассмотрим три пары бесконечно близких между собой координатных поверхностей. Пусть первая из этих пар задается фиксированными значениями первой координаты, равными соответственно ξ и $\xi + d\xi$, вторая — значениями η и $\eta + d\eta$ второй координаты и третья — значениями ζ и $\zeta + d\zeta$ третьей координаты. Эти три пары поверхностей вырезают в пространстве бесконечно малый криволинейный параллелепипед. Найдем его объем dv , пренебрегая величинами выше первого порядка малости по сравнению с этим объемом. С точностью до бесконечно малых высшего порядка этот параллелепипед совпадает с прямолинейным параллелепипедом, ребрами которого служат векторы $\overline{PP_1}$, $\overline{PP_2}$ и $\overline{PP_3}$ (рис. 2.6). Легко про-

верить, что эти векторы имеют следующие координаты (мы опять здесь ограничиваемся главными членами)

$$\begin{aligned}\overline{PP}_1 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi, \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi, \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi \right), \\ \overline{PP}_2 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta, \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta, \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta \right), \\ \overline{PP}_3 &= \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta, \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta, \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta \right).\end{aligned}$$

Как известно, объем параллелепипеда, построенного на трех векторах, равен абсолютной величине детерминанта, составленного из координат этих векторов. Следовательно,

$$dv = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial y}{\partial \xi} d\xi & \frac{\partial z}{\partial \xi} d\xi \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial y}{\partial \eta} d\eta & \frac{\partial z}{\partial \eta} d\eta \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} d\zeta & \frac{\partial y}{\partial \zeta} d\zeta & \frac{\partial z}{\partial \zeta} d\zeta \end{vmatrix} = \pm \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{vmatrix} d\xi d\eta d\zeta,$$

где знак плюс или минус берется так, чтобы все выражение было положительно. Итак, мы получим, что

$$dv = |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta, \quad (2.21)$$

где $J(\xi, \eta, \zeta) = \frac{D(x, y, z)}{D(\xi, \eta, \zeta)}$ — якобиан преобразования (2.20).

5. Замена переменных в тройном интеграле. Геометрический смысл якобиана. Мы показали, что объем бесконечно малого элемента выражается в криволинейных координатах формулой (2.21). Из нее сразу следует, что объем конечной области V записывается в виде тройного интеграла *)

$$\int \int \int_{\Omega} |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta, \quad (2.22)$$

взятого по той области Ω изменения переменных ξ, η, ζ , которая переводится в область V отображением (2.20).

Из этого выражения для объема формула замены переменных получается с помощью следующих рассуждений, аналогичных изложенным в п. 6 § 6 гл. 1.

*) Мы опустили здесь те оценки, которые в § 6 гл. 1 были проведены для двух переменных.

Читатель, разобравший доказательство теоремы 1.7, легко воспроизведет аналогичное доказательство и для данного случая. Здесь, как и в случае двух переменных, основная идея состоит в аппроксимации нелинейного отображения малой области подходящим ее линейным отображением.

Пусть $f(x, y, z)$ — непрерывная функция, заданная в замкнутой ограниченной области V . При этих предположениях интеграл

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz \quad (2.23)$$

существует. Он представляет собой предел интегральных сумм вида

$$\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta v_i. \quad (2.24)$$

Пусть формулы (2.20) устанавливают соответствие между областью V и некоторой областью Ω изменения переменных ξ, η, ζ , причем это соответствие удовлетворяет условиям, указанным в п. 1. В силу этого соответствия, каждому разбиению $\{V_i\}$ области V на части отвечает определенное разбиение $\{\Omega_i\}$ области Ω , и наоборот. Согласно (2.22) можно объем Δv_i области V_i представить в виде

$$\Delta v_i = \iiint_{\Omega_i} |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta.$$

Применив к этому интегралу теорему о среднем, получим

$$\Delta v_i = |J(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*)| \Delta \omega_i,$$

где $\Delta \omega_i$ — объем частичной области Ω_i , а $(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*)$ — некоторая точка, принадлежащая Ω_i .

В сумме (2.24) каждая из точек (x_i, y_i, z_i) выбирается внутри соответствующей области V_i произвольно. В частности, можно в качестве (x_i, y_i, z_i) взять ту точку, которая имеет криволинейные координаты $\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*$. Следовательно, интегральную сумму (2.24) можно переписать в виде

$$\sum_{i=1}^n f(x(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*), y(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*), z(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*)) |J(\xi_i^*, \eta_i^*, \zeta_i^*)| \Delta \omega_i, \quad (2.25)$$

т. е. в виде интегральной суммы, отвечающей интегралу

$$\iiint_{\Omega} f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta. \quad (2.26)$$

Этот интеграл заведомо существует, так как подынтегральная функция в нем непрерывна. Рассмотрим некоторую последовательность неограниченно измельчающихся разбиений $\{V_i\}$ области V . Ей отвечает, в силу отображения (2.20), определенная последовательность разбиений $\{\Omega_i\}$ области Ω , причем если максимум диаметров областей V_i стремится к нулю, то максимум диаметров областей Ω_i тоже стре-

мится к нулю. Этой последовательности разбиений отвечает последовательность интегральных сумм, каждую из которых можно записать в виде (2.24) или в виде (2.25). Предел этой последовательности интегральных сумм (2.24) равен интегралу (2.23), а предел сумм (2.25) есть интеграл (2.26). Таким образом, интегралы (2.23) и (2.26) представляют собой пределы одних и тех же интегральных сумм. Следовательно, они равны, т. е.

$$\begin{aligned} \int \int \int_V f(x, y, z) dv &= \\ &= \int \int \int_{\Omega} f(x(\xi, \eta, \zeta), y(\xi, \eta, \zeta), z(\xi, \eta, \zeta)) |J(\xi, \eta, \zeta)| d\omega. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Итак, если задано взаимно однозначное отображение замкнутой ограниченной области V на область Ω , непрерывное, непрерывно дифференцируемое и имеющее отличный от нуля якобиан, и если $f(x, y, z)$ — непрерывная функция, определенная в этой области V , то имеет место формула (2.27) — формула замены переменных в тройном интеграле.

Нетрудно показать, что она справедлива не только для непрерывной функции f , но и для ограниченной функции, непрерывной в V всюду, кроме точек, образующих множество объема нуль.

Вернемся снова к формулам (2.20), устанавливающим соответствие между областью V изменения переменных x, y, z и областью Ω изменения переменных ξ, η, ζ . Это соответствие переводит лежащий в Ω бесконечно малый параллелепипед

$$\xi_0 \leq \xi \leq \xi_0 + d\xi, \quad \eta_0 \leq \eta \leq \eta_0 + d\eta, \quad \zeta_0 \leq \zeta \leq \zeta_0 + d\zeta,$$

объем которого равен $d\omega = d\xi d\eta d\zeta$, в криволинейный параллелепипед, определяемый теми же неравенствами, с объемом

$$dv = |J(\xi, \eta, \zeta)| d\xi d\eta d\zeta. \quad (2.28)$$

Следовательно, модуль якобиана $|J(\xi, \eta, \zeta)|$ — это отношение бесконечно малых объемов, отвечающих друг другу при отображении (2.20) (рис. 2.7).

В простейших случаях якобиан, отвечающий той или иной замене переменных, можно найти, пользуясь выражением (2.28) для элемента объема, из чисто геометрических соображений, не проводя вычислений. Покажем это на примерах цилиндрических и сферических координат.

Цилиндрические координаты. Рассмотрим элемент объема, заключенный между тремя парами бесконечно близких координатных поверхностей, а именно, двумя цилиндрами радиусов r и $r + dr$, двумя горизонтальными плоскостями, лежащими на уровнях z и $z + dz$.

и двумя полуплоскостями, проходящими через ось z и составляющими с осью x углы φ и $\varphi + d\varphi$. Ограниченный ими элемент объема представляет собой, с точностью до малых высшего порядка, прямо-

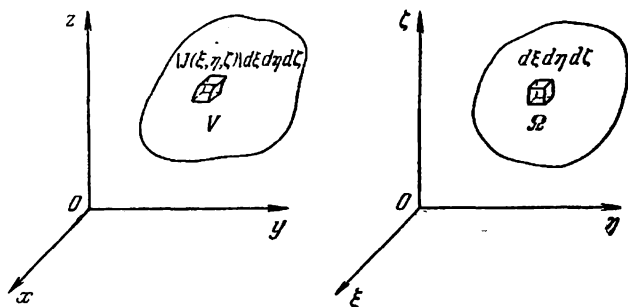


Рис. 2.7.

угольный параллелепипед с ребрами dr , dz и $r d\varphi$ (рис. 2.8). Его объем равен

$$r dr d\varphi dz,$$

откуда видно, что якобиан перехода от декартовых координат к цилиндрическим равен r .

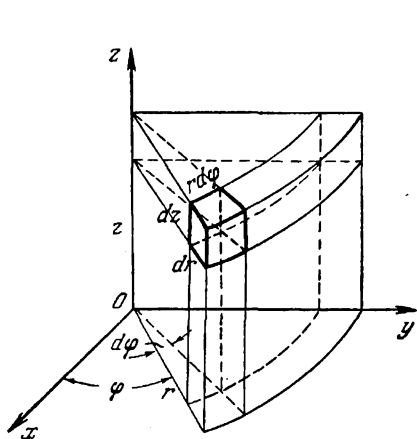


Рис. 2.8.

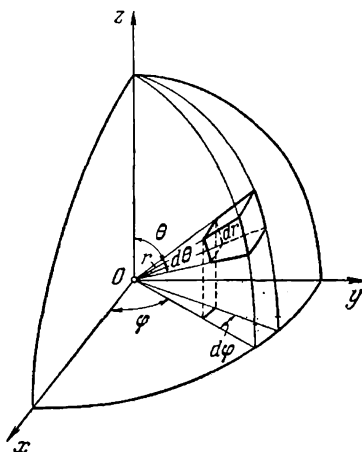


Рис. 2.9.

Сферические координаты. Рассмотрим область, ограниченную двумя сферами радиусов r и $r + dr$, двумя полукурусами, определяемыми углами θ и $\theta + d\theta$ (отсчитываемыми от оси z), и двумя полуплоскостями, составляющими углы φ и $\varphi + d\varphi$ с плоскостью xz .

Эту область можно считать прямоугольным параллелепипедом с ребрами $r d\theta$, dr и $r \sin \theta d\varphi$ (рис. 2.9). Следовательно, объем этого параллелепипеда равен

$$r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi,$$

откуда видно, что соответствующий якобиан равен

$$r^2 \sin \theta.$$

§ 5. Понятие о многомерных интегралах

1. Общие сведения. Те определения и факты, которые в первой главе были изложены для двух переменных, а в этой — для трех, могут быть перенесены на случай любого числа переменных. Именно, прежде всего определяется объем n -мерного параллелепипеда.

В соответствии с известными из аналитической геометрии формулами, представляющими площадь параллелограмма и объем параллелепипеда в виде детерминантов, за объем n -мерного параллелепипеда принимается абсолютная величина детерминанта, элементами строк (или столбцов) которого служат координаты векторов, образующих ребра этого параллелепипеда. Далее, отправляясь от объема параллелепипеда, нетрудно ввести объем для многогранных n -мерных тел, а затем определить объем и для некоторого класса областей в n -мерном пространстве. После этого интеграл от функции n переменных $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ вводится как предел соответствующих интегральных сумм; n -кратный интеграл от $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, взятый по некоторой n -мерной области G , обозначается символом

$$\int \int_G \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

При соответствующих условиях, налагаемых на область G и на подынтегральную функцию, n -кратный интеграл может быть записан с помощью n последовательных интегрирований по каждому переменному в отдельности, т. е. в виде

$$\begin{aligned} \int \int_G \dots \int f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ = \int_a^b dx_1 \int_{x_2^{(1)}(x_1)}^{x_2^{(2)}(x_1)} dx_2 \dots \int_{x_n^{(1)}(x_1, \dots, x_{n-1})}^{x_n^{(2)}(x_1, \dots, x_{n-1})} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_n. \end{aligned}$$

Формула замены переменных в n -кратном интеграле аналогична соответствующим формулам для двойных и тройных интегралов, а именно, если $x_i = x_i(y_1, y_2, \dots, y_n)$, $i = 1, 2, \dots, n$,

то

$$\begin{aligned} \int \dots \int_G f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n &= \\ &= \int_{\Gamma} \dots \int f(x_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n(y_1, \dots, y_n)) \times \\ &\quad \times \left| \frac{D(x_1, \dots, x_n)}{D(y_1, \dots, y_n)} \right| dy_1 \dots dy_n, \end{aligned}$$

где Γ — область изменения переменных y_1, \dots, y_n .

2. Примеры. Для n -кратных интегралов остаются в силе все основные факты, изложенные выше для двойных и тройных интегралов. Не останавливаясь на общих вопросах теории n -кратных интегралов, рассмотрим некоторые простейшие примеры.

1) *Взаимное притяжение двух материальных тел.* Хотя реальное физическое пространство, в котором мы живем, имеет только три измерения, существуют разнообразные конкретные задачи, в которых приходится рассматривать интегралы кратности большей трех. В качестве простейшего примера такого рода укажем формулу для силы взаимного притяжения двух материальных тел конечных размеров. Пусть одно из этих тел занимает некоторую область G и имеет объемную плотность $\rho(x, y, z)$, а другое занимает область G' и имеет объемную плотность $\rho'(x', y', z')$ (нам удобно обозначить декартовы координаты точек одного и другого тела разными символами). По закону Ньютона направленная по оси x компонента dF_x силы притяжения, действующей между двумя бесконечно малыми элементами

$$dv = dx dy dz \quad \text{и} \quad dv' = dx' dy' dz'$$

объемов этих двух тел, равна

$$\gamma \frac{\rho(x, y, z) \rho'(x', y', z')}{r^3} (x - x') dx dy dz dx' dy' dz', \quad (2.29)$$

где γ — постоянная и

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}.$$

Для того чтобы получить полную величину компоненты F_x силы взаимодействия между рассматриваемыми телами, нужно просуммировать выражения (2.29) по всем элементам объема обоих тел. Иначе говоря, компонента F_x силы взаимного притяжения тел, заполняющих области G и G' , равна

$$\gamma \int \int \int \int \int \int \frac{\rho(x, y, z) \rho'(x', y', z')}{r^3} (x - x') dx dy dz dx' dy' dz'. \quad (2.30)$$

Аналогично записываются и две остальные компоненты. При этом точка (x, y, z) пробегает всю область G , а точка (x', y', z') независимо пробегает всю область G' . Таким образом, интеграл (2.30) берется по области в шестимерном пространстве, которую естественно обозначить $G \times G'$ и называть «произведением» областей G и G' .

2) Рассмотрим интеграл

$$I_n = \int \int \dots \int_G dx_1 dx_2 \dots dx_n, \quad (2.31)$$

взятый по области G , определяемой неравенствами

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \quad \dots, \quad x_n \geq 0,$$

$$x_1 + x_2 + \dots + x_n \leq 1.$$

Сводя интеграл (2.31) к повторному, получаем

$$\begin{aligned} I_n &= \int \int \dots \int_G dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \dots \int_0^{1-x_1-x_2-\dots-x_{n-1}} dx_n. \end{aligned}$$

Выполнив интегрирование по x_n и подставив пределы, получим

$$I_n = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \dots \int_0^{1-x_1-\dots-x_{n-2}} (1-x_1-\dots-x_{n-1}) dx_{n-1}.$$

Далее, проинтегрировав по x_{n-1} и подставив пределы, будем иметь

$$I_n = \int_0^1 dx_1 \int_0^{1-x_1} dx_2 \dots \int_0^{1-x_1-\dots-x_{n-3}} \frac{(1-x_1-\dots-x_{n-2})^2}{2!} dx_{n-2}.$$

Продолжая последовательно интегрирование, окончательно получим

$$I_n = \int_0^1 \frac{(1-x_1)^{n-1}}{(n-1)!} dx_1 = \frac{1}{n!}.$$

3) *Объем n -мерного шара.* n -мерный шар радиуса a с центром в начале координат — это совокупность тех точек n -мерного пространства, координаты которых удовлетворяют условию

$$x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq a^2.$$

Объем V_n такого шара — это интеграл

$$\int \int \dots \int_{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq a^2} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

Вычислить этот интеграл можно следующим образом. Положив $x_i = au$, получим

$$V_n = a^n U_n,$$

где U_n — объем шара радиуса 1. Далее, так как

$$\begin{aligned} U_n &= \int \int \dots \int_{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2 \leq 1} dx_1 dx_2 \dots dx_n = \\ &= \int_{-1}^1 dx_n \int \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1 - x_n^2} dx_1 \dots dx_{n-1} = \\ &= \int_{-1}^1 (1 - x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_n \int \dots \int_{x_1^2 + \dots + x_{n-1}^2 \leq 1} dx_1 \dots dx_{n-1} = \\ &= U_{n-1} \int_{-1}^1 (1 - x_n^2)^{\frac{n-1}{2}} dx_n, \end{aligned}$$

то, положив $x_n = \cos \theta$, получим

$$U_n = 2U_{n-1} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \theta d\theta. \quad (2.32)$$

Приняв во внимание, что $U_1 = 2$ (одномерный шар радиуса 1 — это отрезок $[-1, 1]$, а одномерный объем — это длина), мы можем последовательно найти U_2 , U_3 и т. д. *).

*) С помощью эйлеровых интегралов (см. гл. 10, § 3, в частности пример 3) можно дать явное выражение для U_n .

ГЛАВА 3

ЭЛЕМЕНТЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

В этой главе мы применим дифференциальное и интегральное исчисления к изучению геометрических объектов — кривых и поверхностей. Исследование геометрических образов средствами анализа составляет содержание дифференциальной геометрии.

Рамки этого курса позволяют нам изложить лишь основы дифференциальной геометрии, которая представляет собой обширную науку, тесно связанную с механикой, теорией дифференциальных уравнений и другими дисциплинами.

§ 1. Вектор-функции скалярного аргумента

1. Определение вектор-функции. Предел. Непрерывность. Кривые и поверхности удобно задавать функциями, принимающими векторные значения (короче, вектор-функциями). Поэтому мы начнем главу с того, что кратко сформулируем основные понятия анализа применительно к вектор-функциям. Мы можем при этом не входить в подробности, так как нового (по сравнению со случаем скалярных функций) здесь будет немного.

Определение. Пусть каждому значению переменной t , принадлежащему отрезку $[a, b]$, поставлен в соответствие вектор

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}. \quad (3.1)$$

Такой вектор называется вектор-функцией скалярного аргумента t .

С вектор-функцией $\mathbf{r}(t)$ связываются следующие наглядные представления. Если откладывать от начала координат векторы $\mathbf{r}(t)$, отвечающие различным значениям аргумента t , то концы этих векторов составят некоторую кривую — график вектор-функции $\mathbf{r}(t)$, обычно называемую *годографом* функции $\mathbf{r}(t)$ (рис. 3.1).

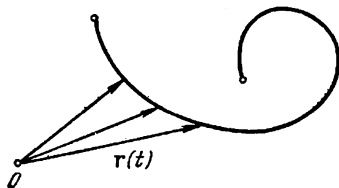


Рис. 3.1.

Если рассматривать аргумент t как время, то годограф функции $\mathbf{r}(t)$ — это траектория движения некоторой точки.

Постоянный вектор

$$\mathbf{R} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$$

называется *пределом* $\mathbf{r}(t)$ при $t \rightarrow t_0$, если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} |\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}| = 0, \quad (3.2)$$

где $|\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}|$ — длина вектора $\mathbf{r}(t) - \mathbf{R}$. Это условие равносильно трем скалярным условиям:

$$\lim_{t \rightarrow t_0} x(t) = a, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} y(t) = b, \quad \lim_{t \rightarrow t_0} z(t) = c. \quad (3.2')$$

Вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ называется *непрерывной* в точке t_0 , если

$$\lim_{t \rightarrow t_0} \mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(t_0).$$

Вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ непрерывна в точке t_0 тогда и только тогда, когда все три ее компоненты — скалярные функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ — непрерывны в точке t_0 . (Докажите это!) Сумма, разность, скалярное и векторное произведения непрерывных вектор-функций непрерывны. (Проверьте это!)

2. Дифференцирование вектор-функции. Вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ называется *дифференцируемой* в точке t , если существует предел

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \mathbf{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)}{\Delta t}.$$

Этот предел называется *производной* вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ и обозначается символами $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, $\mathbf{r}'(t)$ или $\dot{\mathbf{r}}(t)$. Легко проверить, что существование $\mathbf{r}'(t)$ равносильно существованию трех производных $x'(t)$, $y'(t)$ и $z'(t)$, причем

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}.$$

Вектор $\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t}$ направлен по секущей MM_1 годографа функции $\mathbf{r}(t)$

(рис. 3.2), а направление вектора $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ — это направление предельной прямой, к которой стремится эта секущая, когда точка M_1 приближается к M , т. е. направление касательной к годографу в точке M .

Кинематически $\mathbf{r}'(t)$ — это скорость точки, движущейся по закону $\mathbf{r}(t)$.

Для вектор-функции имеют место следующие правила дифференцирования:

- 1) если $\mathbf{r}(t) = \text{const}$, то $\mathbf{r}'(t) = 0$;
- 2) $(k\mathbf{r}(t))' = k\mathbf{r}'(t)$, $k = \text{const}$;

- 3) $(u(t) \mathbf{r}(t))' = u'(t) \mathbf{r}(t) + u(t) \mathbf{r}'(t)$, $u(t)$ — скалярная функция;
 4) $(\mathbf{r}_1(t) \pm \mathbf{r}_2(t))' = \mathbf{r}'_1(t) \pm \mathbf{r}'_2(t)$;
 5) $(\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t))' = (\mathbf{r}'_1(t), \mathbf{r}'_2(t)) + (\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}'_2(t))$;
 6) $[\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}_2(t)]' = [\mathbf{r}'_1(t), \mathbf{r}_2(t)] + [\mathbf{r}_1(t), \mathbf{r}'_2(t)]$ (здесь необходимо сохранять порядок сомножителей);
 7) если $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ и $t = t(\tau)$, то

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{d\tau}$$

— правило дифференцирования сложной вектор-функции.

Доказательство этих правил мы предоставим читателю.

Отметим следующие частные случаи дифференцирования вектор-функции:

а) *Производная вектора постоянного направления.* Пусть вектор $\mathbf{r}(t)$ имеет постоянное направление (т. е. от t зависит лишь его длина). Тогда векторы $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}'(t)$ коллинеарны. Действительно, в этом случае $\mathbf{r}(t)$ можно записать в виде:

$$\mathbf{r}(t) = u(t) \mathbf{e},$$

где $u(t)$ — скаляр, а \mathbf{e} — постоянный вектор, например единичный. Тогда

$$\mathbf{r}'(t) = u'(t) \mathbf{e}, \text{ т. е. } \mathbf{r}'(t) = \frac{u'(t)}{u(t)} \mathbf{r}(t).$$

б) *Производная вектора постоянной длины.* Если $|\mathbf{r}(t)| = \text{const}$, то векторы $\mathbf{r}(t)$ и $\mathbf{r}'(t)$ взаимно ортогональны. Действительно, в этом случае $(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t)) = \text{const}$; дифференцируя это равенство, получаем

$$2(\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t)) = 0, \text{ т. е. } (\mathbf{r}(t), \mathbf{r}'(t)) = 0,$$

что и требовалось.

Геометрический смысл этого соотношения очень прост. Если $|\mathbf{r}(t)| = R$, то годограф функции $\mathbf{r}(t)$ лежит целиком на сфере радиуса R с центром в начале координат. Касательная к такой кривой лежит в плоскости, касательной к сфере, и, следовательно, перпендикулярна радиусу-вектору $\mathbf{r}(t)$, идущему в точку касания.

Дифференциалом вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ называется вектор

$$d\mathbf{r} = dx \cdot \mathbf{i} + dy \cdot \mathbf{j} + dz \cdot \mathbf{k}.$$

Иначе говоря,

$$d\mathbf{r} = x'(t) dt \cdot \mathbf{i} + y'(t) dt \cdot \mathbf{j} + z'(t) dt \cdot \mathbf{k} = \mathbf{r}'(t) dt,$$

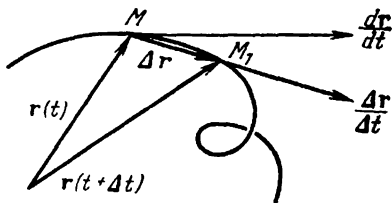


Рис. 3.2.

т. е. дифференциал вектор-функции равен произведению ее производной на дифференциал (т. е. приращение) независимой переменной. Как и в случае скалярной функции, дифференциал $d\mathbf{r}$ вектор-функции отличается от ее приращения $\Delta\mathbf{r}$ на величину выше первого порядка малости относительно Δt .

3. Годограф. Особые точки. Мы назвали годографом вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ ту кривую, которую описывает конец вектора $\mathbf{r}(t)$ при изменении t , если его начало все время находится в некоторой фиксированной точке.

Если $\mathbf{r}(t)$ — дифференцируемая вектор-функция, то вектор $\mathbf{r}'(t)$ там, где он не равен нулю, направлен, как мы видели, по касательной к годографу. Точки, в которых производная $\mathbf{r}'(t)$ не существует или существует и равна 0, называются *особыми*. Эти особые точки могут иметь различный характер. Приведем несколько примеров

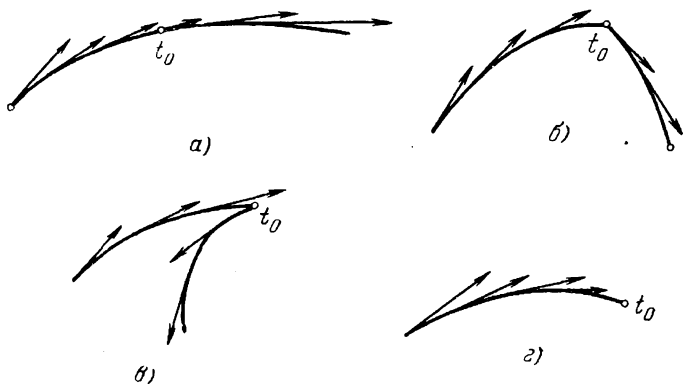


Рис. 3.3.

(рис. 3.3). При движении точки по закону $\mathbf{r}(t)$ путь может представлять собой «гладкую» кривую, однако скорость $\mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t)$ при $t \rightarrow t_0$ может стремиться к нулю. Материальная точка испытывает остановку в момент $t = t_0$. Это — *особенность самого движения*, но не той геометрической кривой, по которой движется точка (рис. 3.3, а). В других случаях такая остановка может сопровождаться изменением направления пути (излом; см. рис. 3.3, б). Это — особенность как самого движения, так и соответствующей геометрической кривой. Может оказаться, что на кривой имеется излом, но скорость $\mathbf{r}'(t)$ при приближении к этой точке не стремится к нулю (рис. 3.3, б). Здесь точка испытывает толчок, меняющий ее скорость скачком. Далее, кривая, по которой происходит движение, может иметь точку возврата (рис. 3.3, в), причем скорость материальной точки вблизи этой точки также может либо стремиться к нулю, либо меняться

скачком. Наконец, при $t \rightarrow t_0$ движение $\mathbf{r}(t)$ может просто «заморозиться» и не возобновляться при $t > t_0$. Это — «покой» в конце пути (рис. 3.3, 2). Эти и различные другие особенности движения представляют интерес при изучении конкретных случаев; вместе с тем они затрудняют применение общих методов. Мы будем в дальнейшем такие особенности исключать и рассматривать движения, для которых $\mathbf{r}'(t)$ всюду существует и не обращается в нуль.

4. Формула Тейлора. Для вектор-функции имеет место формула Тейлора

$$\mathbf{r}(t + \Delta t) = \mathbf{r}(t) + \mathbf{r}'(t) \Delta t + \frac{1}{2} \mathbf{r}''(t) \Delta t^2 + \dots + \frac{1}{n!} (\mathbf{r}^{(n)}(t) + \boldsymbol{\alpha}) \Delta t^n, \quad (3.3)$$

где $\boldsymbol{\alpha}$ — вектор, стремящийся к нулю при $\Delta t \rightarrow 0$. Действительно, применив формулу Тейлора к каждой из трех компонент *) $x(t)$, $y(t)$ и $z(t)$ вектора $\mathbf{r}(t)$, получим

$$x(t + \Delta t) = x(t) + x'(t) \Delta t + \frac{1}{2} x''(t) \Delta t^2 + \dots \\ \dots + \frac{1}{n!} (x^{(n)}(t) + \alpha_1) \Delta t^n$$

и еще два аналогичных равенства для y и z . Умножив эти равенства соответственно на \mathbf{i} , \mathbf{j} и \mathbf{k} и сложив, получим формулу (3.3).

Мы видим, таким образом, что основные понятия и правила дифференциального исчисления легко и без существенных изменений переносятся со скалярных функций на векторные. Следует, однако, иметь в виду, что такой перенос все же нельзя делать совершенно автоматически. Например, известная формула конечных приращений (вып. 1, гл. 8, § 9) для вектор-функций несправедлива. (Постройте пример!)

5. Интеграл от векторной функции по скалярному аргументу.

Для вектор-функции $\mathbf{r}(t)$, заданной на отрезке $a \leq t \leq b$, как и для обычных скалярных функций, можно составить интегральные суммы и рассмотреть их предел при стремлении к нулю максимальной длины отрезков, на которые разбит отрезок $[a, b]$. Этот предел называется *интегралом* от $\mathbf{r}(t)$ по отрезку $[a, b]$ и обозначается символом

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt.$$

*) Мы, разумеется, предполагаем, что компоненты $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ вектор-функции $\mathbf{r}(t)$ удовлетворяют тем условиям, при которых формула Тейлора для каждой из них имеет место.

Как и для скалярных функций, можно установить, что если $\mathbf{r}(t)$ непрерывна на $[a, b]$, то этот предел существует.

Легко видеть, что существование предела одной векторной интегральной суммы

$$\sum_{i=1}^n \mathbf{r}(\tau_i)(t_i - t_{i-1})$$

(здесь $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$) равносильно существованию пределов трех скалярных интегральных сумм для трех компонент $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ функции $\mathbf{r}(t)$. При этом

$$\int_a^b \mathbf{r}(t) dt = \mathbf{i} \cdot \int_a^b x(t) dt + \mathbf{j} \cdot \int_a^b y(t) dt + \mathbf{k} \cdot \int_a^b z(t) dt.$$

На интегралы от вектор-функций распространяются обычные свойства интегралов от скалярных функций. Например,

$$\int_a^b u'(t) \mathbf{r}(t) dt = u(b) \mathbf{r}(b) - u(a) \mathbf{r}(a) - \int_a^b u(t) \mathbf{r}'(t) dt$$

— формула интегрирования по частям; $u(t)$ — скалярная функция. Легко выводятся также формулы, связывающие интегрирование с основными операциями векторной алгебры. Например,

$$\int_a^b [\mathbf{c}, \mathbf{r}(t)] dt = \left[\mathbf{c}, \int_a^b \mathbf{r}(t) dt \right],$$

где \mathbf{c} — постоянный вектор.

6. Векторные функции нескольких скалярных аргументов.

Можно рассматривать векторные функции не одного, а нескольких скалярных аргументов (в частности, с вектор-функциями двух скалярных аргументов мы встретимся в этой главе при изучении поверхностей). На такие функции легко переносятся понятие частной производной и другие понятия анализа.

§ 2. Пространственные кривые

1. Векторное уравнение кривой. Вектор-функции скалярного аргумента представляют собой удобный способ задания кривых в пространстве. Действительно, если нам задана некоторая непрерывная вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ ($a \leq t \leq b$), то, построив ее годограф, мы получим некоторую кривую γ в пространстве.

Обратно, если задана тем или иным способом некоторая кривая *) γ , то можно попытаться задать ее с помощью вектор-функции. Для этого поступим следующим образом:

Мы скажем, что кривая γ *параметризована*, если каждой ее точке поставлено в соответствие определенное значение некоторого параметра t , пробегающего какой-то отрезок $[a, b]$, причем это соответствие взаимно однозначно **) и непрерывно в каждой точке отрезка $[a, b]$ (последнее условие означает, что если $t \rightarrow t_0$, то и расстояние между точками $\mathbf{r}(t_0)$ и $\mathbf{r}(t)$ кривой тоже стремится к нулю). Если кривая γ параметризована, то радиус-вектор каждой точки этой кривой определяется соответствующим этой точке значением параметра t , т. е.

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) \quad (\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}). \quad (3.4)$$

Это соотношение называют *параметрическим (векторным) уравнением* кривой γ . Ясно, что векторное уравнение (3.4) можно заменить тремя скалярными уравнениями:

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t).$$

Пользуясь термином, введенным в предыдущем параграфе, можно сказать, что, параметризуя кривую, мы представляем ее как годограф некоторой вектор-функции $\mathbf{r}(t)$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие кривые и такие их параметризации, для которых соответствующая вектор-функция $\mathbf{r}(t)$ трижды непрерывно дифференцируема.

Пример. Положим

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{i}a \cos t + \mathbf{j}a \sin t + \mathbf{k}bt. \quad (3.5)$$

Это параметрическое уравнение определяет кривую, называемую *винтовой линией* (рис. 3.4).

Рассматривая ту или иную кривую, мы можем выбрать для нее различные параметризации. Например, если кривая γ задана уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $a \leq t \leq b$, то, положив

$$t = t(\tau), \quad \alpha \leq \tau \leq \beta,$$

где $t(\tau)$ — монотонная функция такая, что $t'(\tau) > 0$, $t(\alpha) = a$, $t(\beta) = b$, мы можем принять τ за новый параметр и писать уравнение

*) Мы не уточняем здесь самого понятия кривой. Некоторые сведения по этому поводу содержатся в вып. 1, гл. 11, § 1.

**) Это условие означает, что мы рассматриваем кривые, не имеющие точек самопересечения.

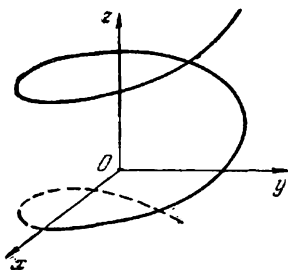


Рис. 3.4.

кривой γ в виде $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(\tau))$.

Во многих случаях удобна так называемая *натуральная параметризация* кривой, когда за параметр принимается длина дуги этой кривой, отсчитываемая от фиксированной точки. Переход от какого-либо параметра на кривой к натуральному параметру может быть осуществлен следующим образом: пусть γ — некоторая кривая и t — какой-либо параметр на ней. Выберем на γ некоторую точку M_0 , отвечающую значению параметра $t = t_0$, и назовем ее начальной точкой. Возьмем на γ произвольную точку M . Длина l дуги M_0M выражается, как известно, формулой

$$l = \int_{t_0}^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt, \quad \text{т. е.} \quad l = \int_{t_0}^t |\mathbf{r}'(t)| dt,$$

где t — значение параметра, отвечающее точке M . Эта формула определяет l как однозначную и непрерывную функцию от t : $l = l(t)$. Если функция $\mathbf{r}(t)$ такова, что $\mathbf{r}'(t)$ нигде не обращается в нуль, то всюду $l'(t) \neq 0$ и, следовательно (см. вып. 1, гл. 11, § 1), t можно представить как однозначную и непрерывную функцию от l : $t = t(l)$. Положив $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(l))$, мы представим \mathbf{r} как функцию дуги l , т. е. получим натуральную параметризацию кривой.

Пример. Рассмотрим снова винтовую линию (3.5). Для нее

$$dt = \sqrt{a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t + b^2} dt = \sqrt{a^2 + b^2} dt,$$

т. е. $l = \sqrt{a^2 + b^2} t$. Переходя к параметру l , мы можем переписать уравнение винтовой линии в виде

$$\mathbf{r}(l) = i a \cos \frac{l}{\sqrt{a^2 + b^2}} + j a \sin \frac{l}{\sqrt{a^2 + b^2}} + k b \frac{l}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Замечание. Если в уравнении

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

*) По существу, эта формула означает следующее: кривая $(x(t), y(t), z(t))$ рассматривается как «ломаная» с бесконечным числом бесконечно малых звеньев (dx, dy, dz) . Длина отдельного звена дается теоремой Пифагора и равняется $\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2} = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$.

«Сумма» длин этих «звеньев», т. е. интеграл $\int_{t_0}^t \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} dt$, и равна длине кривой.

параметр t представлять себе как время, то кривую, определяемую этим уравнением, можно рассматривать как траекторию точки, движущейся из начального положения со скоростью $\mathbf{r}'(t)$. Но по одной и той же кривой точка может двигаться разными способами: заданием кривой определяется лишь направление скорости в каждый момент, но не ее величина. Можно, в частности, рассмотреть случай, когда скорость движения \mathbf{r}' по модулю тождественно равна единице. Именно это и будет иметь место в случае натуральной параметризации кривой. Действительно, $d\mathbf{r} = i dx + j dy + k dz$, следовательно,

$$\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \frac{\sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}}{dt} = \frac{dl}{dt} = 1. \quad (3.6)$$

Таким образом, различные параметрические уравнения одной и той же кривой можно кинематически представлять себе как законы движения частиц, описывающих одну и ту же траекторию с разными скоростями. При этом уравнение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(l),$$

где l — длина дуги описывает движение частицы со скоростью, по модулю равной единице.

2. Основной трехгранник. Рассмотрим кривую, заданную уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(l). \quad (3.7)$$

В каждой ее точке M (отвечающей значению l) единичный вектор *)

$$\boldsymbol{\tau} = \dot{\mathbf{r}}(l)$$

определяет направление касательной к этой кривой. Вектор

$$\ddot{\mathbf{r}} = \ddot{\boldsymbol{\tau}}$$

ортогонален $\boldsymbol{\tau}$, как производная вектора постоянной длины (см. п. 2 § 1). Разделив его на $|\ddot{\mathbf{r}}|$, мы получим единичный вектор **)

$$\boldsymbol{\nu} = \frac{\ddot{\mathbf{r}}}{|\ddot{\mathbf{r}}|}, \quad (3.8)$$

ортогональный $\boldsymbol{\tau}$. Присоединим еще к $\boldsymbol{\tau}$ и $\boldsymbol{\nu}$ вектор

$$\boldsymbol{\beta} = [\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\nu}]. \quad (3.9)$$

*) Здесь и дальше мы будем обозначать производные от \mathbf{r} по натуральному параметру символами $\dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}}$ и т. д., сохранив обозначения \mathbf{r}' , \mathbf{r}'' и т. д. для производных по произвольному параметру.

**) В тех точках, где $\ddot{\mathbf{r}} = 0$, вектор $\boldsymbol{\nu}$ не определен. Такие точки (они называются точками спрямления) мы в дальнейшем будем исключать из рассмотрения.

Векторы τ , ν и β образуют тройку взаимно ортогональных единичных векторов, которая называется *основным репером* или *основным трехгранником кривой* (3.7) в данной точке (рис. 3.5). Этот трехгранник жестко связан в каждой точке с рассматриваемой кривой, поэтому вид самой кривой можно полностью охарактеризовать, описав движение основного трехгранника при перемещении его вершины по кривой.

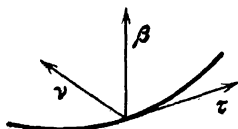


Рис. 3.5.

Отметим, что векторы τ , ν и β удовлетворяют, кроме соотношения (3.9), еще двум аналогичным соотношениям:

$$[\nu, \beta] = \tau, \quad [\beta, \tau] = \nu.$$

Векторы τ , ν , β называются соответственно единичными векторами *касательной*, *нормали* и *бинормали*.

3. Формулы Френе. Движение основного трехгранника задается скоростями изменения векторов τ , ν и β , т. е. их производными по l . Вычислим эти производные.

Производную вектора τ , т. е. вектор $\ddot{\tau}$, мы уже рассматривали. Введя обозначение

$$k = |\ddot{\tau}|,$$

мы запишем эту производную в виде

$$\ddot{\tau} = k\nu,$$

где k — неотрицательное число.

Рассмотрим теперь вектор β . Его производная $\dot{\beta}$, как и производная всякого единичного вектора, перпендикулярна ему. Кроме того, она перпендикулярна τ . В самом деле, $\dot{\beta} = [\tau, \nu]$ и, значит, $\dot{\beta} = [\dot{\tau}, \nu] + [\tau, \dot{\nu}] = [k\nu, \nu] + [\tau, \dot{\nu}] = [\tau, \dot{\nu}]$, а этот вектор перпендикулярен τ . Вектор $\dot{\beta}$ перпендикулярен β и τ , следовательно, он коллинеарен ν . Поэтому можно положить

$$\dot{\beta} = -\kappa\nu,$$

где κ — числовой коэффициент *).

Наконец, вычислим $\dot{\nu}$. Имеем

$$\dot{\nu} = [\beta, \tau] = [\dot{\beta}, \tau] + [\beta, \dot{\tau}] = [-\kappa\nu, \tau] + [\beta, k\nu] = -k\tau + \kappa\beta.$$

*) Этот коэффициент может быть как положительным, так и отрицательным. Обозначение $-\kappa$ (а не κ) удобно для дальнейшего.

Итак, мы получили для производных $\dot{\tau}$, $\dot{\nu}$ и $\dot{\beta}$ следующие формулы:

$$\dot{\tau} = k\nu, \quad (3.10)$$

$$\dot{\nu} = -k\tau + \kappa\beta, \quad (3.11)$$

$$\dot{\beta} = -\kappa\nu. \quad (3.12)$$

Они называются *формулами Френе**). Эти формулы содержат две скалярные величины: k и κ . Величина k называется *кривизной* кривой, а κ — *кручением*. Геометрический смысл кривизны и кручения мы рассмотрим несколько позже.

4. Вычисление кривизны и кручения. По определению

$$k = |\ddot{\mathbf{r}}|. \quad (3.13)$$

Таким образом, для вычисления кривизны кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(l)$ достаточно найти вектор $\ddot{\mathbf{r}}(l)$ и вычислить его длину.

Для вычисления кручения κ возьмем равенства

$$\dot{\mathbf{r}} = \tau, \quad \ddot{\mathbf{r}} = k\nu$$

и продифференцируем последнее из них еще раз по l . Воспользовавшись формулой (3.11) для $\dot{\nu}$, получим

$$\ddot{\mathbf{r}} = \dot{k}\nu - k^2\tau + k\kappa\beta.$$

Из трех последних равенств следует, что

$$(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}) = k^2\kappa, \quad (3.14)$$

откуда $\kappa = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})}{k^2}$, т. е.

$$\kappa = \frac{(\dot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}}, \ddot{\mathbf{r}})}{|\ddot{\mathbf{r}}|^2}. \quad (3.15)$$

Формулы (3.13) и (3.15) позволяют вычислить кривизну k и кручение κ при натуральной параметризации кривой. Если же кривая задана уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t),$$

где $\mathbf{r}(t)$ — трижды дифференцируемая функция какого-то произвольного параметра t , то, рассматривая t как функцию длины дуги l , получим

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{d\mathbf{r}}{dl} \cdot \frac{dl}{dt}, & \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} &= \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} \left(\frac{dl}{dt}\right)^2 + \frac{d\mathbf{r}}{dl} \frac{d^2t}{dt^2}, \\ \frac{d^3\mathbf{r}}{dt^3} &= \frac{d^3\mathbf{r}}{dl^3} \left(\frac{dl}{dt}\right)^3 + 3 \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} \frac{dt}{dt^2} \frac{d^2t}{dt^2} + \frac{d\mathbf{r}}{dl} \frac{d^3t}{dt^3}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

*) Жан Френе — французский математик (1801—1880).

Первое из этих равенств можно переписать так:

$$\tau = \mathbf{r}' \frac{dt}{dl},$$

откуда (поскольку $|\tau| = 1$)

$$\frac{dt}{dl} = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} \quad (3.17)$$

(мы считаем, что t и l возрастают в одном и том же направлении, т. е. что $\frac{dt}{dl} > 0$). Далее, взяв векторное произведение первых двух равенств (3.16), будем иметь

$$\left[\frac{d\mathbf{r}}{dl}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} \right] = \left[\frac{d\mathbf{r}}{dt}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right] \left(\frac{dt}{dl} \right)^3,$$

или, поскольку $\left[\frac{d\mathbf{r}}{dl}, \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} \right] = k\beta$,

$$k\beta = [\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)] \left(\frac{dt}{dl} \right)^3. \quad (3.18)$$

Так как $|\beta| = 1$, то из (3.17) и (3.18) получаем

$$k = \frac{|\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|^3}. \quad (3.19)$$

Наконец, подставляя выражения (3.16) в равенство (3.14), получим

$$(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t)) \left(\frac{dt}{dl} \right)^6 = k^2 \kappa. \quad (3.20)$$

Из двух последних равенств получаем окончательную формулу для кручения:

$$\kappa = \frac{(\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t), \mathbf{r}'''(t))}{|[\mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t)]|^2}. \quad (3.21)$$

Упражнение. Вычислить кривизну и кручение винтовой линии

$$\mathbf{r} = i a \cos t + j a \sin t + k b t.$$

Замечание. Вернемся еще раз к формулам (3.16). Они показывают, что векторы \mathbf{r}' и \mathbf{r}'' выражаются линейно через векторы $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$. Иначе говоря, векторы \mathbf{r}' и \mathbf{r}'' определяют ту же самую плоскость, что и векторы $\dot{\mathbf{r}}$, $\ddot{\mathbf{r}}$, а именно, *соприкасающуюся* плоскость. Таким образом, соприкасающаяся плоскость кривой (в данной точке) может быть определена как плоскость, в которой лежат векторы $\mathbf{r}'(t)$ и $\mathbf{r}''(t)$ (какой бы ни была параметризация кривой). Если представлять себе t как время, а уравнение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

как закон движения точки, то можно сказать, что *соприкасающаяся плоскость* — это та плоскость, в которой лежат векторы скорости и ускорения движущейся точки.

Б. Система координат, связанная с основным трехгранником. Три вектора τ , ν и β определяют в каждой точке кривой $\mathbf{r}(l)$ свою систему координат, в которой координатными осями служат:

- 1) *касательная* (ее направление определяется вектором τ),
- 2) *главная нормаль*; ее направление определяется вектором ν) и
- 3) *бинормаль* (ее направление определяется вектором β).

Координатными плоскостями в этой системе служат:

1) плоскость, проходящая через точку M и перпендикулярная τ (т. е. плоскость, в которой лежат главная нормаль и бинормаль); она называется *нормальной плоскостью* кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(l)$ в точке M ;

2) плоскость, проходящая через точку M и перпендикулярная ν ; она называется *спрямляющей плоскостью*;

3) плоскость, проходящая через точку M и перпендикулярная β (т. е. плоскость, в которой лежат $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$); она называется *соприкасающейся плоскостью*.

Эта система координат называется *сопровождающей системой координат*.

Расположение этих прямых и плоскостей показано на рис. 3.6.

Задача. Для кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(l)$ написать уравнения касательной, главной нормали и бинормали, а также нормальной, спрямляющей и соприкасающейся плоскостей в точке $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(l_0)$.

Решение. Векторное уравнение прямой, проходящей через точку с радиусом-вектором \mathbf{r}_0 в направлении вектора \mathbf{a} , имеет вид

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}_0 + \lambda \mathbf{a}, \quad -\infty < \lambda < \infty,$$

а уравнение плоскости, проходящей через точку с радиусом-вектором \mathbf{r}_0 и ортогональной вектору \mathbf{n} , пишется так:

$$(\mathbf{p} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0.$$

Отсюда сразу получаем следующие уравнения:

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}_0 + \lambda \dot{\mathbf{r}}_0 \quad (\text{касательная}),$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}_0 + \lambda \ddot{\mathbf{r}}_0 \quad (\text{главная нормаль}),$$

$$\mathbf{p} = \mathbf{r}_0 + \lambda [\dot{\mathbf{r}}_0, \ddot{\mathbf{r}}_0] \quad (\text{бинормаль}),$$

$$(\mathbf{p} - \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0) = 0 \quad (\text{нормальная плоскость}),$$

$$(\mathbf{p} - \mathbf{r}_0, \ddot{\mathbf{r}}_0) = 0 \quad (\text{спрямляющая плоскость}),$$

$$(\mathbf{p} - \mathbf{r}_0, [\dot{\mathbf{r}}_0, \ddot{\mathbf{r}}_0]) = 0 \quad (\text{соприкасающаяся плоскость})$$

(здесь $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(l_0)$, $\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(l_0)$, $\ddot{\mathbf{r}}_0 = \ddot{\mathbf{r}}(l_0)$).

Упражнения. 1. Написать уравнения касательной, главной нормали и бинормали для кривой

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

Указание. Заметим, что вектор $[\mathbf{r}', \mathbf{r}']$ направлен по бинормали, а вектор $[\mathbf{r}', [\mathbf{r}', \mathbf{r}']]$ — по главной нормали.

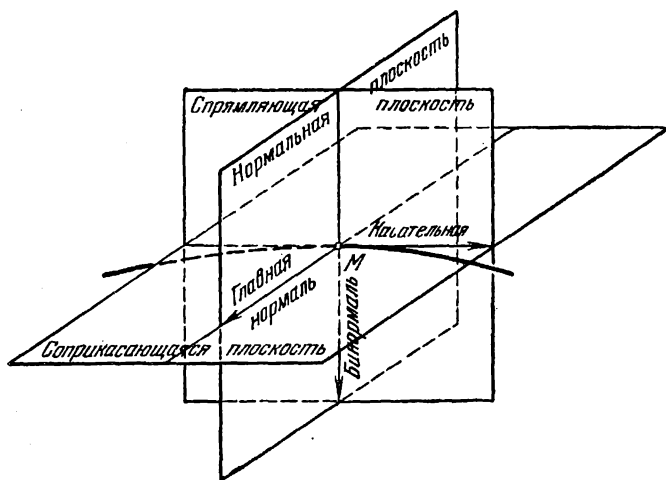


Рис. 3.6.

2. Написать уравнения нормальной, спрямяющей и соприкасающейся плоскостей для кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.

3. Написать уравнения касательной, главной нормали и бинормали, а также уравнения нормальной, соприкасающейся и спрямяющей плоскостей для винтовой линии

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt$$

в точке $t = 0$.

6. Вид кривой вблизи произвольной ее точки. Воспользуемся сопровождающей системой координат для выяснения вида кривой в окрестности какой-либо ее точки.

Предположим, что в точке $\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(l_0)$ производные

$$\dot{\mathbf{r}}_0 = \dot{\mathbf{r}}(l_0), \quad \ddot{\mathbf{r}}_0 = \ddot{\mathbf{r}}(l_0), \quad \dddot{\mathbf{r}}_0 = \dddot{\mathbf{r}}(l_0)$$

отличны от нуля, и разложим функцию $\mathbf{r}(l)$ в окрестности точки l_0

по формуле Тейлора *):

$$\mathbf{r}(l) = \mathbf{r}_0 + \dot{\mathbf{r}}_0 \Delta l + \frac{1}{2} \ddot{\mathbf{r}}_0 \Delta l^2 + \frac{1}{6} \dddot{\mathbf{r}}_0 \Delta l^3 + O(\Delta l^4); \quad (3.22)$$

$$\Delta l = l - l_0.$$

Воспользуемся теперь сопровождающей системой координат, т. е. примем точку \mathbf{r}_0 за начало координат, касательную за ось x , главную нормаль за ось y и бинормаль за ось z . Применив для вычисления производных $\dot{\mathbf{r}}$ и $\ddot{\mathbf{r}}$ формулы Френе, заменим равенство (3.22) следующими тремя скалярными равенствами:

$$x = \Delta l - \frac{k^2}{6} \Delta l^3 + O(\Delta l^4), \quad (3.23a)$$

$$y = \frac{1}{2} k \Delta l^2 + \frac{\dot{k}}{6} \Delta l^3 + O(\Delta l^4), \quad (3.23б)$$

$$z = \frac{1}{6} k\kappa \Delta l^3 + O(\Delta l^4). \quad (3.23в)$$

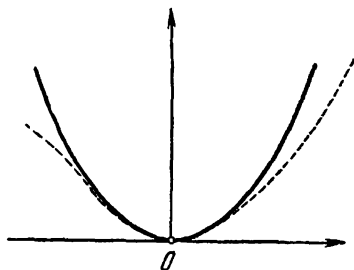


Рис. 3.7.

Найдем проекции этой кривой на соприкасающуюся и спрямляющую плоскости.

Возьмем равенства (3.23a) и (3.23б) и ограничимся в них главными членами; эти равенства примут вид

$$x = \Delta l, \quad y = \frac{1}{2} k \Delta l^2.$$

Исключив отсюда Δl , получим уравнение параболы (рис. 3.7)

$$y = \frac{1}{2} k x^2,$$

которая представляет собой, с точностью до величин порядка Δl^3 , проекцию кривой $\mathbf{r} = \mathbf{r}(l)$ на соприкасающуюся плоскость. Так как по определению $k > 0$, то ветви этой параболы отходят от касательной в ту же сторону, куда направлен и единичный вектор \mathbf{v} , причем тем быстрее, чем больше k .

Рассмотрим теперь проекцию кривой на спрямляющую плоскость. Из формул (3.23a) и (3.23в), ограничиваясь в них главными членами, получаем

$$x = \Delta l, \quad z = \frac{1}{6} k\kappa \Delta l^3.$$

Исключив отсюда Δl , получим уравнение кубической параболы

$$z = \frac{1}{6} k\kappa x^3. \quad (3.24)$$

*) $O(\Delta l^4)$ означает в соответствии с общепринятой символикой величину порядка Δl^4 .

Здесь знак коэффициента при x^3 совпадает со знаком кручения (так как кривизна всегда положительна). Соответствующие параболы изображены на рис. 3.8, *а* и *б*. Так как при малых Δl знаки координат x и y определяются знаками их главных членов, то из формулы 3.24 вытекает:

1. Вблизи точки, в которой кручение отлично от нуля, кривая расположена по обе стороны от соприкасающейся плоскости.

2. Кривая отходит от соприкасающейся плоскости тем быстрее, чем больше абсолютная величина кручения. При этом, если $\kappa > 0$,

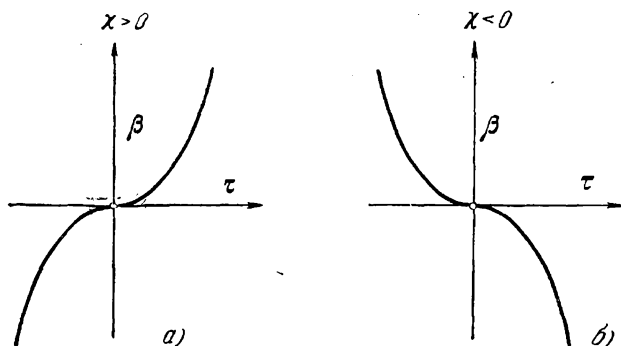


Рис. 3.8.

то при возрастании l кривая отходит от соприкасающейся плоскости в ту сторону, куда указывает вектор β , а при $\kappa < 0$ — в противоположную.

Задачи. 1. Показать, что кривая, кривизна которой тождественно равна нулю, есть прямая линия.

2. Показать, что кривая, кручение которой тождественно равно нулю, — плоская (т. е. она целиком лежит в некоторой фиксированной плоскости).

Решение. 1. Если $k \equiv 0$, то $\ddot{\mathbf{r}} \equiv 0$, т. е. $\dot{\mathbf{r}} = \mathbf{e} = \text{const}$, откуда $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + l\mathbf{e}_0$, а это — уравнение прямой.

2. Если $\kappa \equiv 0$, то, в силу третьей формулы Френе, $\dot{\beta} \equiv 0$, т. е. $\beta = \beta_0 = \text{const}$. Так как векторы $\dot{\mathbf{r}}$ и β_0 ортогональны, то

$$(\beta, \dot{\mathbf{r}}) = 0,$$

т. е., в силу постоянства $\beta = \beta_0$,

$$\frac{d}{dl}(\beta_0, \mathbf{r}) = 0.$$

Отсюда $(\beta_0, \mathbf{r}) = \text{const}$, а это есть уравнение плоскости.

7. Ориентированная кривизна плоской кривой. Рассмотрим кривую, лежащую в некоторой фиксированной плоскости. Приняв эту плоскость за плоскость xu , напомним уравнения нашей кривой в виде

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z \equiv 0. \quad (3.25)$$

Вычислив кривизну этой кривой по формуле (3.19), получим

$$k = \frac{|x'y'' - x''y'|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \quad (3.26)$$

Однако обычно (см., например, вып. 1, гл. 16, § 3) кривизной плоской кривой называют само выражение

$$\frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}, \quad (3.27)$$

а не его модуль. Дело в том, что на плоскости (в отличие от трехмерного пространства) можно определить не только абсолютную величину скорости вращения касательной, но и направление этого вращения (против или по часовой стрелке). Именно это направление вращения и указывается знаком величины (3.27). Если это выражение положительно, то кривая называется выпуклой (рис. 3.9, а), а если оно отрицательно, то кривая называется вогнутой (рис. 3.9, б). Величину (3.27) называют иногда ориентированной кривизной кривой (3.25).

8. Понятие о натуральных уравнениях кривой. Формулы (3.13) и (3.15) позволяют найти кривизну и кручение кривой, заданной уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(l)$, в виде функций от l :

$$k = k(l), \quad \kappa = \kappa(l). \quad (3.28)$$

Эти соотношения, связывающие кривизну и кручение кривой с длиной дуги, называются *натуральными уравнениями* данной кривой. Естественно поставить вопрос: в какой мере натуральные уравнения (3.28) определяют саму кривую. Нетрудно показать, что каждая кривая определяется своими натуральными уравнениями однозначно с точностью до ее положения в пространстве.

Действительно, пусть даны две кривые γ и γ_1 . Если на этих кривых можно ввести натуральные параметры l и l_1 так, чтобы в точках, отвечающих одинаковым значениям этих параметров, совпадали их кривизны k и k_1 и их кручения κ и κ_1 , т. е. чтобы при $l = l_1$ выполнялись равенства

$$k(l) = k_1(l_1), \quad \kappa(l) = \kappa_1(l_1),$$

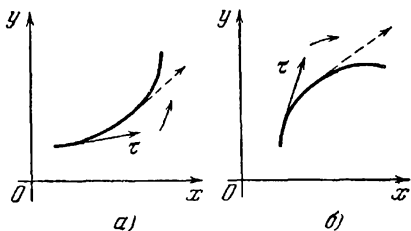


Рис. 3.9.

то мы скажем, что кривые γ и γ_1 имеют совпадающие натуральные уравнения. Покажем, что в этом случае можно, передвигая одну из кривых как твердое тело, полностью эти кривые совместить. Действительно, совместим некоторую точку A кривой γ , отвечающую фиксированному значению l^0 параметра l , с точкой кривой γ_1 , отвечающей тому же значению параметра l_1 . Далее, повернем кривую γ так, чтобы единичные векторы τ, ν, β основного трехгранника, отвечающего этой кривой в точке A , совпали бы соответственно с единичными векторами τ_1, ν_1, β_1 основного трехгранника, отвечающего точке A_1 кривой γ_1 . Этого, очевидно, всегда можно добиться. Мы имеем, таким образом,

$$\tau^0 = \tau_1^0, \quad \nu^0 = \nu_1^0, \quad \beta^0 = \beta_1^0, \quad (3.29)$$

где индекс «нуль» означает, что векторы берутся в точке, отвечающей значению параметра $l^0 = l_1^0$. Ставя в соответствие друг другу те точки M и M_1 кривых γ и γ_1 , в которых $l = l_1$, мы можем считать, что на γ и γ_1 введен один и тот же параметр, и рассматривать τ_1, ν_1 и β_1 как функции от l . Рассмотрим, далее, скалярную функцию

$$\sigma(l) = (\tau, \tau_1) + (\nu, \nu_1) + (\beta, \beta_1)$$

и вычислим ее производную по l . Пользуясь при этом формулами Френе, получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{dl} = k(\nu, \tau_1) + k(\nu_1, \tau) + (-k\tau + k\beta, \nu_1) + \\ + (\nu, -k\tau_1 + k\beta_1) - \kappa(\nu, \beta_1) - \kappa(\nu_1, \beta) = 0, \end{aligned}$$

т. е. на самом деле σ от l не зависит. Из равенств (3.29) вытекает, что при $l = l_0$ значение σ равняется трем; таким образом,

$$\sigma(l) \equiv 3.$$

Каждое из трех входящих в $\sigma(l)$ слагаемых представляет собой скалярное произведение двух единичных векторов и, следовательно, не может быть больше единицы. А так как вся сумма равна трем, то каждое из этих слагаемых должно быть в точности равно единице. Но скалярное произведение двух единичных векторов равно единице только тогда, когда эти векторы совпадают. Таким образом,

$$\tau \equiv \tau_1, \quad \nu \equiv \nu_1, \quad \beta \equiv \beta_1$$

при всех l , т. е. основные трехгранники кривых γ и γ_1 совпадают не только в начальной точке l_0 , но и при всех значениях параметра. Отсюда вытекает, что совпадают и сами кривые, потому что кривую всегда можно восстановить по вектору $\tau = \dot{\mathbf{r}}(l)$, именно

$$\mathbf{r}(l) = \mathbf{r}(l_0) + \int_{l_0}^l \tau(\lambda) d\lambda.$$

Счевидно, верно и обратное: если две кривые отличаются друг от друга только положением в пространстве, то они имеют одинаковые натуральные уравнения.

Естественно поставить следующий вопрос: возьмем произвольно две непрерывные функции

$$k(l) \text{ и } \kappa(l), \quad l_1 \leq l \leq l_2,$$

причем $k(l) > 0$. Существует ли кривая, для которой эти функции представляют собой соответственно кривизну и кручение? Ответ на этот вопрос положительный. Однако приводить здесь соответствующее доказательство мы не будем, так как оно потребовало бы ряда сведений из теории дифференциальных уравнений, которых мы здесь не приводим.

9. Некоторые приложения к механике. Рассмотрим материальную точку, движущуюся по некоторой траектории. Если $\mathbf{r}(t)$ — радиус-вектор точки в момент времени t , то уравнение ее траектории запишется в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t).$$

Производная

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}(t)$$

представляет собой скорость движения точки по траектории. Вводя натуральный параметр l , мы можем написать

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dl} \frac{dl}{dt} = \tau \frac{dl}{dt}.$$

Так как τ — единичный вектор, то

$$|\mathbf{v}| = \frac{dl}{dt},$$

т. е. производная $\frac{dl}{dt}$ представляет собой абсолютную величину скорости.

Вторая производная

$$\mathbf{w} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}$$

радиус-вектора по t — ускорение. Его можно записать в виде

$$\mathbf{w} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} \left(\frac{dl}{dt} \right)^2 + \tau \frac{d^2l}{dt^2}.$$

С помощью формул Френе получаем

$$\mathbf{w} = \tau \frac{d^2l}{dt^2} + \nu k \left(\frac{dl}{dt} \right)^2.$$

Таким образом, ускорение раскладывается в сумму двух составляющих, одна из которых $\tau \frac{d^2l}{dt^2}$ направлена по касательной и называется *тангенциальным ускорением*, а другая $\nu k \left(\frac{dl}{dt} \right)^2$ — по главной нормали и называется *нормальным ускорением*. Тангенциальное ускорение $\mathbf{w}_\tau = \tau \frac{d^2l}{dt^2}$ можно записать в виде $\mathbf{w}_\tau = \tau \frac{dv}{dt}$, где $v = \frac{dl}{dt}$ — абсолютная величина скорости, т. е. *тангенциальное ускорение* —

это скорость изменения абсолютной величины скорости v .

С формулой для нормального ускорения $w_v = vk \left(\frac{dl}{dt} \right)^2$ читатель знаком из элементарного курса физики. Именно, известно, что при движении точки по окружности радиуса R с постоянной скоростью v ускорение направлено к центру окружности и равно $\frac{1}{R} v^2$, но $\frac{1}{R}$ — это как раз кривизна k окружности. Таким образом, разложение $w = w_\tau + w_v = v \frac{d^2 l}{dt^2} + vk \left(\frac{dl}{dt} \right)^2$ можно наглядно представить себе так: движение в данный момент времени как бы разлагается на ускоренное движение по касательной (что дает в ускорении член w_τ) и на движение по окружности радиуса $R = 1/k$ с постоянной скоростью (что дает в ускорении член w_v). Точка участвует одновременно в двух этих движениях (рис. 3.10).

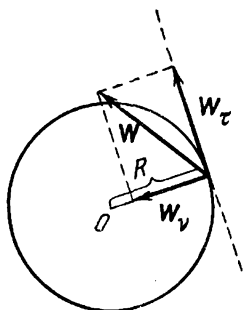


Рис. 3.10.

Задача. Материальная точка движется под действием некоторой центральной силы, т. е. силы, которая в каждый момент времени направлена по прямой, соединяющей эту материальную точку с некоторым неподвижным центром. Доказать, что траектория плоская.

Решение. Примем притягивающий центр за начало координат. Пусть

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$$

— уравнение траектории движения. Сила, действующая на движущуюся точку, направлена к притягивающему центру. Следовательно, согласно второму закону Ньютона, такое же направление имеет и ускорение, т. е. вектор $\mathbf{r}''(t)$; таким образом, векторы \mathbf{r} и \mathbf{r}'' коллинеарны. Но тогда в каждой точке траектории выполнено соотношение

$$(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') = 0.$$

Дифференцируя это смешанное произведение по t , получаем

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') = (\mathbf{r}', \mathbf{r}', \mathbf{r}'') + (\mathbf{r}, \mathbf{r}'', \mathbf{r}') + (\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}''') = 0.$$

Первые два слагаемых в средней части равенства равны нулю, следовательно, равно нулю и третье. Но если

$$(\mathbf{r}, \mathbf{r}', \mathbf{r}'') = 0$$

и векторы \mathbf{r} и \mathbf{r}'' коллинеарны, то

$$(\mathbf{r}', \mathbf{r}'', \mathbf{r}''') = 0$$

при всех t , но тогда $\kappa = 0$, а это и есть условие того, что наша кривая плоская (п. 6 § 2).

§ 3. Параметрическое уравнение поверхности

1. Понятие поверхности. В этом и следующих параграфах мы применим аппарат анализа к изучению поверхностей.

Понятие поверхности, интуитивно достаточно ясное, можно определять с различной степенью общности. В анализе чаще всего приходится рассматривать поверхности, задаваемые уравнениями вида

$$z = f(x, y),$$

где $f(x, y)$ — непрерывная функция, определенная в некоторой области G . Несколько более широкий класс поверхностей мы получим, рассматривая уравнения вида

$$F(x, y, z) = 0.$$

Чтобы такое уравнение действительно определяло поверхность (в смысле, соответствующем нашим наглядным представлениям), необходимо на функцию $F(x, y, z)$ наложить некоторые дополнительные условия.

Определение поверхности как совокупности точек, координаты которых удовлетворяют уравнениям вида $z = f(x, y)$ или $F(x, y, z) = 0$, не очень удобно, так как оно привязывает понятие поверхности к выбору той или иной системы координат. Сформулируем понятие поверхности, не прибегая к координатной системе. Введем прежде всего важное понятие односвязной области.

Пусть G — некоторая область на плоскости. Назовем область G *односвязной*, если она удовлетворяет следующему условию: каков бы ни был замкнутый контур L , лежащий внутри этой области, ограниченная этим контуром (конечная) часть плоскости целиком лежит в G .

Иными словами, односвязность области означает отсутствие в ней «дырок». Любой замкнутый контур, лежащий внутри такой области, можно стянуть в точку, не выходя за пределы этой области.

Если область не односвязна, то она называется *многосвязной*.

Примерами односвязных областей служат круг, треугольник, квадрат и т. д. Кольцо, т. е. часть плоскости, ограниченная двумя concentрическими окружностями, представляет собой простейший пример многосвязной области: действительно, область, ограниченная контуром L (рис. 3.11), вовсе не составляет части кольца, заключенного между окружностями C_1 и C_2 .

Назовем теперь простой поверхностью множество точек в трехмерном пространстве, представляющее собой взаимно

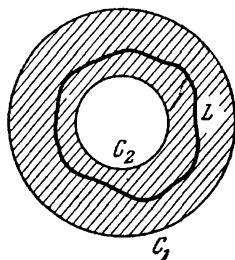


Рис. 3.11.

однозначный и в обе стороны непрерывный образ какой-либо замкнутой ограниченной односвязной области. Далее, просто поверхностью мы будем называть соединение любого конечного числа простых поверхностей. При этом мы, вообще говоря, допускаем и наличие у поверхности самопересечений, т. е. рассматриваем и такие геометрические образы, как, скажем, изображенный на рис. 3.12.

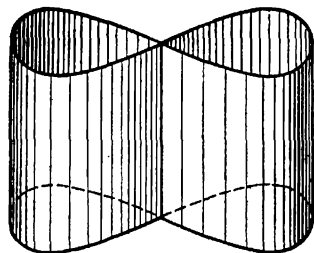


Рис. 3.12.

Если $f(x, y)$ — непрерывная функция, определенная в замкнутой односвязной ограниченной области G , то уравнение

$$z = f(x, y)$$

определяет простую поверхность. Действительно, отображение

$$(x, y) \leftrightarrow (x, y, f(x, y))$$

устанавливает взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное соответствие (проверьте это!) между точками области G и точками, координаты которых удовлетворяют уравнению $z = f(x, y)$.

Практически наши дальнейшие рассмотрения будут ограничиваться поверхностями, представленными как соединение конечного числа простых поверхностей, определяемых уравнениями вида $z = f(x, y)$. При этом от соответствующих функций f нам придется обычно, кроме непрерывности, требовать еще и некоторой гладкости (существования и непрерывности первых или вторых производных). Эти условия будут оговорены там, где они нам понадобятся.

2. Параметризация поверхности. Хотя задание поверхности с помощью уравнения вида $z = f(x, y)$ или $F(x, y, z) = 0$ в анализе встречается очень часто, во многих случаях удобнее задавать поверхность с помощью параметрических уравнений. Для того чтобы написать уравнение поверхности в параметрической форме, введем прежде всего понятие *координат на поверхности*.

Пусть на некоторой поверхности Σ задано однопараметрическое семейство линий *). Назовем это семейство *правильным*, если через каждую точку поверхности проходит одна и только одна линия из данного семейства. Если на поверхности даны два правильных семейства, такие, что каждая из линий первого семейства пересекается (без касания!) с каждой линией второго семейства не более чем в одной точке, то говорят, что на поверхности задана *координатная сеть*. Пусть линии первого из семейств, образующих координатную сеть, определяются значениями некоторого параметра u ,

*) Таким образом, каждая линия этого семейства характеризуется определенным значением некоторого параметра.

а линии второго семейства — значениями некоторого параметра v . Так как по условию через каждую точку поверхности проходит единственная кривая из первого семейства и единственная кривая второго семейства, то положение точки на поверхности однозначно определяется соответствующими этим линиям значениями u_0 и v_0 параметров u и v . Параметры u и v , значениями которых определяются линии, составляющие координатную сеть, называются *координатами на данной поверхности*.

Замечание. В § 6 гл. 1 мы вводили криволинейные координаты в плоской области. Здесь мы, собственно говоря, повторили то же самое построение, но только применительно к кривой поверхности. Введение координат на поверхности можно, очевидно, рассматривать как задание взаимно однозначного и взаимно непрерывного отображения поверхности на некоторую часть плоскости, в которой введены декартовы координаты u и v . При этом линии, образующие координатную сеть, — это образы лежащих в плоскости uv прямых, параллельных координатным осям.

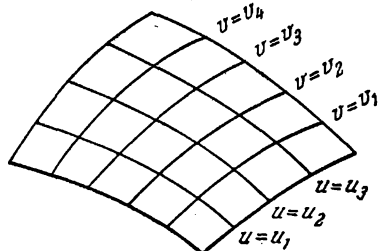


Рис. 3.13.

Примеры. 1. *Тором* называется поверхность, образованная вращением окружности вокруг не пересекающей ее прямой, лежащей в плоскости этой окружности. Положение точки на окружности можно задавать углом φ ($0 \leq \varphi < 2\pi$), отсчитываемым от некоторой начальной точки. Положение самой окружности можно задавать углом поворота ψ , который отсчитывается от начального положения. Таким образом, положение точки на торе определяется двумя углами φ и ψ , каждый из которых меняется от 0 до 2π . Линии $\varphi = 0$ и $\psi = 0$ соответствующей координатной сети изображены на рис. 3.14.

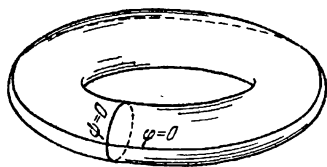


Рис. 3.14.

2. Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$; иначе говоря, она проектируется взаимно однозначно на некоторую часть плоскости xu . Линии, которые при этом проектируются в прямые $x = \text{const}$ и $y = \text{const}$, образуют на поверхности $z = f(x, y)$ координатную сеть (рис. 3.15).

Ясно, конечно, что на одной и той же поверхности можно задавать различные координатные сети.

3. Параметрическое уравнение поверхности. Если на поверхности Σ введены каким-либо образом координаты u , v , то говорят, что эта поверхность *параметризована* параметрами u и v . Каждая

точка такой поверхности может быть задана значениями параметров u и v . Но эта же точка может быть задана и своими декартовыми координатами. Следовательно, декартовы координаты точек параметризованной поверхности представляют собой функции координат на поверхности:

$$\begin{aligned}x &= x(u, v), & y &= y(u, v), \\z &= z(u, v).\end{aligned}\quad (3.30)$$

Эти три скалярных уравнения можно заменить одним векторным:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (3.30')$$

где $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. Уравнения вида (3.30) или (3.30') мы будем называть параметрическими уравнениями поверхности.

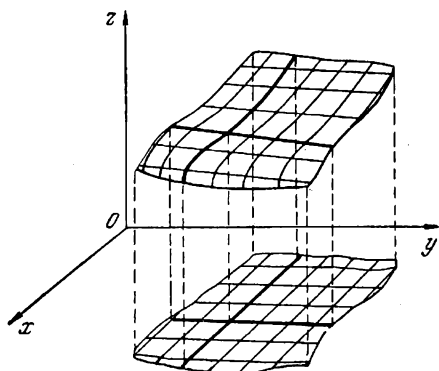


Рис. 3.15.

Замечание 1. В параметрическом уравнении кривой координаты x , y , z являются функциями одного параметра. В уравнении поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, представляющей собой геометрический образ двух измерений, естественно должны участвовать два независимых параметра.

Замечание 2. Уравнение $z = f(x, y)$ можно рассматривать как частный случай параметрического уравнения, если принять x и y за параметры и положить

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}.$$

У п р а ж н е н и е. Написать параметрическое уравнение тора в координатах φ и ψ (см. пример 1 п. 2).

В дальнейшем мы будем рассматривать поверхности, заданные именно параметрическими уравнениями, причем функцию $\mathbf{r}(u, v)$ будем предполагать непрерывной и имеющей непрерывные частные производные по u и v . Начиная с § 8, нам придется потребовать также существования и непрерывности ее частных производных второго порядка.

4. Кривые на поверхности. Рассмотрим на поверхности, заданной уравнением (3.30'), какую-нибудь кривую. Если на этой кривой введен некоторый параметр t , то каждому значению t будет отвечать некоторая точка поверхности, т. е. некоторые значения u и v . Таким образом, вдоль кривой координаты u и v являются функциями параметра t :

$$u = u(t), \quad v = v(t).$$

Эти уравнения называются уравнениями кривой на поверхности. Подставив их в уравнение поверхности, получаем параметрическое уравнение кривой на поверхности:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(t), v(t)). \quad (3.31)$$

И обратно, подставив в уравнение поверхности (3.30') вместо независимых переменных u и v какие-либо функции одного переменного t , мы получим уравнение некоторой кривой, лежащей на этой поверхности.

Рассмотрим касательную к кривой (3.31). Ее направление определяется вектором

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \frac{dv}{dt},$$

который представляет собой линейную комбинацию векторов $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$,

называемых *координатными векторами* и представляющих собой векторы, касательные к координатным линиям, проходящим через рассматриваемую точку. Для краткости обозначим их $\mathbf{r}_u = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\mathbf{r}_v = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$.

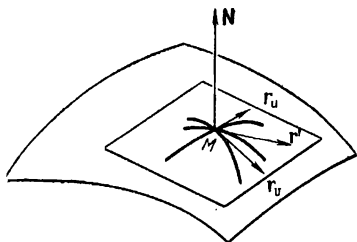


Рис. 3.16.

5. Касательная плоскость. Рассмотрим всевозможные кривые на поверхности, проходящие через данную точку M , и касательные векторы к ним в этой точке (рис. 3.16). Каждый из этих векторов представляет собой линейную комбинацию векторов \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v , т. е. лежит в определяемой этими векторами плоскости. Эта плоскость называется *касательной плоскостью* к данной поверхности в точке M . Напишем уравнение касательной плоскости. Поскольку векторы \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v лежат в касательной плоскости, вектор $\mathbf{N} = [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ нормален к ней и уравнение этой плоскости имеет вид *)

$$(\mathbf{p} - \mathbf{r}, \mathbf{N}) = 0 \quad (3.32)$$

(здесь \mathbf{r} — радиус-вектор точки касания, \mathbf{p} — радиус-вектор текущей точки касательной плоскости).

Пусть поверхность задана уравнением $z = f(x, y)$, т. е. в векторной форме

$$\mathbf{r} = ix + jy + kf(x, y).$$

Напишем уравнение касательной плоскости для такой поверхности.

*) Точки, в которых $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v] = 0$, мы исключаем из рассмотрения.

Имеем

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + k f'_x, \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + k f'_y$$

и, следовательно,

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}_x, \mathbf{r}_y] = -\mathbf{i} f'_x - \mathbf{j} f'_y + \mathbf{k}. \quad (3.33)$$

Подставив в уравнение касательной плоскости (3.32) вместо ρ — \mathbf{r} вектор $\mathbf{i}(x - x_0) + \mathbf{j}(y - y_0) + \mathbf{k}(z - z_0)$, а вместо нормального вектора \mathbf{N} его выражение (3.33), получим уравнение плоскости, касающейся поверхности $z = f(x, y)$ в точке (x_0, y_0, z_0) :

$$z - z_0 = f'_x(x - x_0) + f'_y(y - y_0), \quad (3.34)$$

где значения четных производных f'_x и f'_y берутся в точке касания (x_0, y_0) .

Если поверхность задана неявным уравнением $F(x, y, z) = 0$, которое определяет z как дифференцируемую функцию от x и y , то

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Подставив эти выражения вместо f'_x и f'_y в уравнение (3.33), получаем уравнение плоскости, касательной к поверхности $F(x, y, z) = 0$,

$$(x - x_0) F'_x + (y - y_0) F'_y + (z - z_0) F'_z = 0.$$

Здесь значения F'_x , F'_y и F'_z также берутся в точке касания (x_0, y_0, z_0) .

6. Нормаль к поверхности. Вычислим направляющие косинусы вектора

$$\mathbf{N} = [\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v],$$

нормального к поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. Так как

$$\mathbf{r}_u = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right) \quad \text{и} \quad \mathbf{r}_v = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right),$$

то вектор $[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]$ имеет компоненты

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad (3.35)$$

а его направляющие косинусы соответственно равны

$$\cos(\mathbf{N}, x) = \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos(\mathbf{N}, y) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

$$\cos(\mathbf{N}, z) = \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

В частности, если поверхность задана явным уравнением

$$z = f(x, y),$$

или в векторной форме уравнением

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k},$$

то

$$A = \begin{vmatrix} 0 & f'_x \\ 1 & f'_y \end{vmatrix} = -f'_x, \quad B = \begin{vmatrix} f'_x & 1 \\ f'_y & 0 \end{vmatrix} = -f'_y, \quad C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$$

т. е. в этом случае

$$\begin{aligned} \cos(N, x) &= \frac{-f'_x}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}, & \cos(N, y) &= \frac{-f'_y}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}, \\ \cos(N, z) &= \frac{1}{\sqrt{1+f'^2_x+f'^2_y}}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

7. Системы координат в касательных плоскостях. Рассмотрим поверхность Σ , в каждой точке M которой можно построить касательную плоскость. Полезно представлять себе поверхность, покрытую «чешуей» касательных плоскостей. Поверхность — это *кривое многообразие-носитель*, ее касательные плоскости — это *плоские несомые многообразия*. Этот наглядный образ будет полезен при изучении дальнейшего материала этой главы.

Выберем в каждой касательной плоскости пару неколлинеарных векторов (репер) \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 , которые определяют в ней систему координат. Этот репер, разумеется, можно выбирать в каждой точке произвольным образом. Однако задание параметризации u, v , естественно, порождает в каждой из касательных плоскостей некоторый

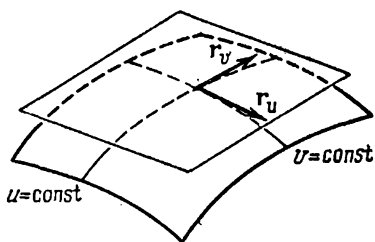


Рис. 3.17.

специальный репер, именно репер $\mathbf{e}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}$, $\mathbf{e}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$. Действительно, фиксируем значение параметра $v = v_0$ и будем менять параметр u ; тогда радиус-вектор $\mathbf{r}(u, v_0)$ опишет на поверхности координатную кривую $v = v_0 = \text{const}$ (рис. 3.17). Касательный вектор к этой кривой, т. е. $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}(u, v_0)$, будет лежать в касательной плоскости к поверхности (см. п. 4). Аналогично вектор $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}$ также лежит в касательной плоскости к поверхности. Мы предполагаем, что через

каждую точку поверхности проходит одна и только одна линия каждого из семейств $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$. Поэтому в каждой касательной плоскости возникает один и только один репер $(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)$; если эти векторы отличны от нуля, то они не коллинеарны, поскольку по условию кривые $u = \text{const}$ и $v = \text{const}$ ни в одной точке не касаются друг друга. Опасно лишь обращение какого-либо из этих векторов в нуль. Мы будем в дальнейшем считать, что параметризация на рассматриваемом куске поверхности такова, что $\mathbf{r}_u \neq 0$ и $\mathbf{r}_v \neq 0$.

Итак, задание параметризации u, v на поверхности порождает в каждой касательной плоскости невырожденный репер $\mathbf{e}_1 = \mathbf{r}_u, \mathbf{e}_2 = \mathbf{r}_v$, т. е. некоторую аффинную систему координат.

Выбор другой параметризации \tilde{u}, \tilde{v} порождает в несомых касательных плоскостях другой набор систем координат $\tilde{\mathbf{e}}_1 = \mathbf{r}_{\tilde{u}}, \tilde{\mathbf{e}}_2 = \mathbf{r}_{\tilde{v}}$, а в каждой из касательных плоскостей переход от одной параметризации к другой порождает аффинное преобразование системы координат.

Действительно, пусть

$$u = u(\tilde{u}, \tilde{v}), \quad v = v(\tilde{u}, \tilde{v})$$

— выражение старых параметров u, v через новые \tilde{u}, \tilde{v} . По правилу дифференцирования сложной вектор-функции имеем

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{r}_{\tilde{u}} &= \mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}}, \\ \mathbf{r}_{\tilde{v}} &= \mathbf{r}_u \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} + \mathbf{r}_v \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

Таким образом, новый репер $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2$ выражается через старый $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ по формулам

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\mathbf{e}}_1 &= \frac{\partial u}{\partial \tilde{u}} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial v}{\partial \tilde{u}} \mathbf{e}_2, \\ \tilde{\mathbf{e}}_2 &= \frac{\partial u}{\partial \tilde{v}} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial v}{\partial \tilde{v}} \mathbf{e}_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.37')$$

Аналогично выражается старый репер $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ через новый $\tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2$.

§ 4. Измерение на кривой поверхности длин, углов и площадей. Первая квадратичная форма поверхности

Для решения многих физических, технических и геометрических задач нужно уметь вычислять длины дуг, лежащих на поверхности, углы между такими дугами, площади тех или иных частей поверхности. Этот круг вопросов мы и рассмотрим сейчас. Основная идея

всех излагаемых в этом параграфе рассуждений состоит, по существу, в замене бесконечно малого элемента гладкой поверхности соответствующим элементом касательной плоскости. Поэтому нам полезно начать с некоторых формул и понятий, относящихся к вычислению длин, углов и площадей на плоскости.

1. Аффинная система координат на плоскости. Рассмотрим плоскость и некоторый невырожденный репер $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ на ней. Любой вектор \mathbf{r} , лежащий в плоскости, можно представить в виде

$$\mathbf{r} = \xi_1 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2.$$

Запишем квадрат длины вектора \mathbf{r} . Имеем

$$r^2 = (\mathbf{r}, \mathbf{r}) = \xi_1^2 (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1) + 2\xi_1 \xi_2 (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) + \xi_2^2 (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2).$$

Введя обозначения *)

$$g_{11} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1), \quad g_{12} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), \quad g_{22} = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2),$$

перепишем это равенство в виде

$$r^2 = g_{11} \xi_1^2 + 2g_{12} \xi_1 \xi_2 + g_{22} \xi_2^2. \quad (3.38)$$

Величины g_{11} , g_{12} и g_{22} определяются выбором репера $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$. Легко видеть, что через эти величины (и, конечно, координаты соответствующих векторов) выражаются длины векторов, углы между векторами и площади параллелограммов, натянутых на два вектора. Действительно, выражение для длины r вектора \mathbf{r} получается из (3.38). Далее, если

$$\mathbf{r} = \xi_1 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{p} = \eta_1 \mathbf{e}_1 + \eta_2 \mathbf{e}_2,$$

то

$$(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = g_{11} \xi_1 \eta_1 + g_{12} \xi_1 \eta_2 + g_{12} \xi_2 \eta_1 + g_{22} \xi_2 \eta_2.$$

Воспользовавшись формулой

$$\cos(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{(\mathbf{r}, \mathbf{p})}{|\mathbf{r}| |\mathbf{p}|},$$

мы можем выразить угол между векторами \mathbf{r} и \mathbf{p} через их координаты и коэффициенты g_{ik} .

*) Иногда также пользуются обозначениями

$$E = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1), \quad F = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2), \quad G = (\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_2).$$

Полагая еще $g_{21} = g_{12}$, совокупность величины g_{ik} ($i, k = 1, 2$) часто записывают в виде матрицы

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}.$$

Наконец, найдем площадь S параллелограмма, построенного на векторах \mathbf{r} и \mathbf{p} . Как известно

$$S = |[\mathbf{r}, \mathbf{p}]|,$$

поэтому

$$S = |[\xi_1 \mathbf{e}_1 + \xi_2 \mathbf{e}_2, \eta_1 \mathbf{e}_1 + \eta_2 \mathbf{e}_2]| = |\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1| |\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2|.$$

Но

$$\begin{aligned} |\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2| &= |\mathbf{e}_1| |\mathbf{e}_2| \sin(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = |\mathbf{e}_1| |\mathbf{e}_2| \sqrt{1 - \cos^2(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)} = \\ &= \sqrt{e_1^2 e_2^2 - (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)^2} = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$S = \sqrt{g_{11} g_{22} - g_{12}^2} |\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1|.$$

Итак, знание величин g_{11} , g_{12} , g_{22} действительно позволяет вычислять на плоскости длины, углы и площади, т. е. все метрические величины.

2. Длина дуги на поверхности. Первая квадратичная форма. Пусть задана поверхность

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v).$$

Вычислим длину линии, расположенной на этой поверхности. Выбрав на этой линии за параметр длину дуги, ее уравнение можно записать в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(l), v(l)).$$

Так как вектор $\frac{d\mathbf{r}}{dl}$ имеет длину единица, то

$$dl^2 = d\mathbf{r}^2.$$

Но

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv,$$

следовательно,

$$dl^2 = r_u^2 du^2 + 2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v) du dv + r_v^2 dv^2.$$

Воспользуемся обозначениями

$$g_{11} = r_u^2, \quad g_{12} = (\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v), \quad g_{22} = r_v^2,$$

тогда

$$dl^2 = g_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + g_{22} dv^2. \quad (3.39)$$

Это выражение представляет собой квадратичную форму (относительно переменных du и dv), при этом, очевидно, положительно определенную *). Она называется *первой квадратичной формой*

*) Квадратичная форма $\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k$ называется *положительно определенной*, если $\sum_{i,k=1}^n a_{ik} \xi_i \xi_k > 0$ для любых ξ_1, \dots, ξ_n , кроме $\xi_1 = \dots = \xi_n = 0$.

поверхности $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$. Коэффициенты g_{11} , g_{12} и g_{22} квадратичной формы (3.39) — это, очевидно, те самые коэффициенты g_{11} , g_{12} , g_{22} , которые отвечают реперу \mathbf{r}_u , \mathbf{r}_v , в плоскости, касательной к нашей поверхности в рассматриваемой точке. Эти коэффициенты зависят от точки поверхности. Кроме того, они зависят, конечно, и от выбора параметризации поверхности.

Первая квадратичная форма поверхности дает выражение для длины бесконечно малого элемента дуги. Длина некоторой конечной кривой, лежащей на поверхности, получается отсюда интегрированием. Точнее, если кривая на поверхности задана уравнениями

$$u = u(t), \quad v = v(t), \quad t_1 \leq t \leq t_2,$$

то ее длина равна

$$l = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{11} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2g_{12} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + g_{22} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt$$

(вдоль этой кривой g_{11} , g_{12} и g_{22} представляют собой, очевидно, функции параметра t).

Примеры. 1. На плоскости задана декартова система координат, определенная взаимно ортогональными единичными векторами \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 . Если \mathbf{r}_0 — радиус-вектор начала этой системы координат, то радиус-вектор произвольной точки плоскости равен

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{e}_1 u + \mathbf{e}_2 v.$$

Мы получили уравнение плоскости, параметризованной декартовыми координатами u и v на ней. Для этой параметризации

$$\mathbf{r}_u = \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{r}_v = \mathbf{e}_2, \quad g_{11} = 1, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = 1,$$

следовательно, для плоскости, параметризованной декартовыми координатами, первая квадратичная форма записывается так:

$$dl^2 = du^2 + dv^2.$$

Здесь несомое многообразие — касательная плоскость — совпадает в каждой точке с несущим многообразием (тоже плоскостью), а порождаемый в каждой из касательных плоскостей координатный репер совпадает (с точностью до параллельного переноса) с координатным репером \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 рассматриваемой плоскости.

2. Пусть на плоскости введены полярные координаты ρ и φ . Тогда радиус-вектор произвольной точки плоскости можно записать так:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \rho(\mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi)$$

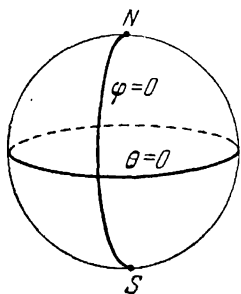
(\mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 — опять-таки единичные взаимно ортогональные векторы). Это — уравнение плоскости, параметризованной полярными координатами. Здесь

$$\mathbf{r}_\rho = \mathbf{e}_1 \cos \varphi + \mathbf{e}_2 \sin \varphi, \quad \mathbf{r}_\varphi = \rho(-\mathbf{e}_1 \sin \varphi + \mathbf{e}_2 \cos \varphi)$$

и, следовательно,

$$g_{11} = (\mathbf{r}_\rho, \mathbf{r}_\rho) = 1, \quad g_{12} = (\mathbf{r}_\rho, \mathbf{r}_\varphi) = 0, \quad g_{22} = (\mathbf{r}_\varphi, \mathbf{r}_\varphi) = \rho^2, \\ dl^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2.$$

3. Рассмотрим сферу радиуса a , приняв на ней за параметры долготу φ и широту θ^*) (рис. 3.18). Ее уравнение в координатах φ и θ имеет вид (проверьте это!)



$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + a \{(\mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi) \cos \theta + \mathbf{k} \sin \theta\}.$$

Из этого уравнения получаем

$$\mathbf{r}_\theta = -a(\mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi) \sin \theta + a\mathbf{k} \cos \theta,$$

$$\mathbf{r}_\varphi = a(-\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi) \cos \theta$$

и, следовательно, здесь

$$dl^2 = a^2(d\theta^2 + \cos^2 \theta d\varphi^2).$$

Рис. 3.18.

4. Если поверхность задана явным уравнением

$$z = f(x, y),$$

т. е.

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k},$$

то для нее

$$\mathbf{r}_x = \mathbf{i} + \mathbf{k}f'_x, \quad \mathbf{r}_y = \mathbf{j} + \mathbf{k}f'_y$$

и, следовательно,

$$dl^2 = (1 + f_x'^2) dx^2 + 2f_x'f_y' dx dy + (1 + f_y'^2) dy^2.$$

Упражнение. Написать первую квадратичную форму тора в координатах φ и ψ (см. упр. в п. 3 § 3).

3. Угол между двумя кривыми. Углом между двумя пересекающимися кривыми называется угол между их касательными в точке пересечения. Пусть через точку на поверхности проходят две кривые и пусть смещению по одной кривой соответствуют дифференциалы координат du и dv , а смещению по другой — дифференциалы δu , δv . Векторы смещений можно записать так:

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u du + \mathbf{r}_v dv, \quad \delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_u \delta u + \mathbf{r}_v \delta v.$$

*) Отсчитываемую от экватора.

Угол φ между ними определяется формулой

$$\cos \varphi = \frac{(d\mathbf{r}, \delta\mathbf{r})}{|d\mathbf{r}| |\delta\mathbf{r}|}.$$

В частности, угол ω между координатными линиями, т. е. между векторами \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v , определяется формулой

$$\cos \omega = \frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}.$$

Если $g_{12} = 0$, то координатные линии на поверхности пересекаются под прямым углом. Такая координатная сеть называется *ортогональной*. В ортогональных координатах первая квадратичная форма имеет вид

$$dl^2 = g_{11} du^2 + g_{22} dv^2.$$

4. Определение площади поверхности. Пример Шварца. Перейдем теперь к рассмотрению площади кривой поверхности. Прежде чем говорить о ее вычислении, нужно определить само понятие площади поверхности. Введем это понятие следующим образом. Пусть Σ — некоторая гладкая поверхность, ограниченная кусочно-гладким контуром L . Разобьем эту поверхность с помощью некоторого числа кусочно-гладких кривых на части — «элементы» Σ_i , $i = 1, \dots, N$, — и выберем в каждой из этих частей произвольную точку M_i . Проведем через точку M_i касательную плоскость к поверхности Σ и спроектируем элемент Σ_i на эту касательную плоскость; мы получим на этой касательной плоскости некоторую квадратуемую плоскую фигуру S_i (рис. 3.19).

Определение. *Площадь поверхности Σ мы назовем пределом (если он существует) сумм площадей этих проекций, взятых по всем элементам разбиения, при условии, что максимум диаметров этих элементов стремится к нулю.* Поверхность, для которой этот предел существует, называется *квадрируемой*.

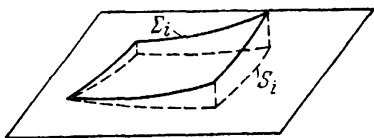


Рис. 3.19.

На первый взгляд кажется, что естественнее всего было бы определить площадь поверхности Σ как предел, к которому стремятся площади поверхностей вписанных в Σ многогранников, при условии, что максимум диаметров их граней стремится к нулю (так же как длина кривой есть предел длин вписанных в эту кривую ломаных). Однако еще в прошлом веке была обнаружена несостоятельность такого определения. Рассмотрим следующий пример, принадлежащий Шварцу.

В цилиндр радиуса R и высоты H впишем многогранник следующим образом: разделив цилиндр горизонтальными плоскостями на m равных

цилиндров высоты $\frac{H}{m}$ каждый, разобьем каждую из возникающих $m+1$ окружностей (включая сюда верхнее и нижнее основания исходного цилиндра) на равные части n точками так, чтобы точки деления на каждой окружности находились над серединами дуг соседних окружностей. Возьмем теперь две соседние точки, лежащие на какой-либо окружности, и точку, лежащую непосредственно над или под серединой дуги, соединяющей эти две точки, и построим на этих трех точках треугольник (рис. 3.20). Совокупность всех таких треугольников образует многогранную поверхность, вписанную в исходный цилиндр. На вид этот многогранник похож на голенище сапога, собранное в гармошку. Его называют поэтому *сапогом Шварца* (рис. 3.21).

Если теперь и n и m неограниченно растут, то размеры каждого из треугольников, составляющих вписанный в цилиндр многогранник, стремятся

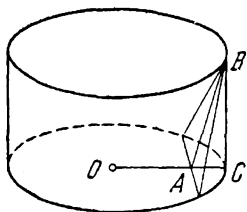


Рис. 3.20.

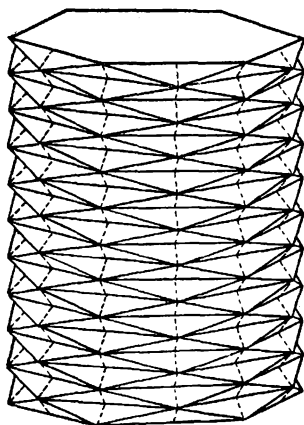


Рис. 3.21.

к нулю. При этом, однако, суммарная площадь этих треугольников вовсе не обязана стремиться к $2\pi RH$ (боковой поверхности цилиндра); в зависимости от того, как меняются n и m , она может неограниченно расти, стремиться к пределу, отличному от $2\pi RH$, или же вообще не иметь предела.

Действительно, элементарный подсчет показывает, что площадь одного треугольника (при заданных m и n) равна

$$R \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{\left(\frac{H}{m}\right)^2 + R^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}.$$

Число таких треугольников равно, очевидно, $2nm$, поэтому сумма их площадей есть

$$\sigma_{n,m} = 2Rn \sin \frac{\pi}{n} \sqrt{H^2 + R^2 m^2 \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right)^2}. \quad (3.40)$$

Если теперь n и m стремятся к бесконечности, причем так, что m растет быстрее, чем n^2 , то выражение (3.40) неограниченно растет. Если же n и m меняются так, что отношение $\frac{m}{n^2}$ стремится к некоторому конечному пределу q , то

$$\lim_{n,m \rightarrow \infty} m \left(1 - \cos \frac{\pi}{n}\right) = \lim_{n,m \rightarrow \infty} m 2 \sin^2 \frac{\pi}{2n} = \frac{\pi^2}{2} q,$$

и, следовательно,

$$\lim_{n, m \rightarrow \infty} \sigma_{n, m} = 2\pi R \sqrt{H^2 + \frac{\pi^4 R^2}{4} q^2}.$$

Подбирая q , мы можем получить в пределе любое число, большее или равное $2\pi RH$, т. е. любое число, большее «истинной» площади цилиндра. Истинное значение площади боковой поверхности цилиндра мы получим лишь при $q = 0$, т. е. если m растет медленнее, чем n^2 .

Итак, попытка определить площадь кривой поверхности с помощью вписанных многогранников оказалась неудачной даже для обыкновенного круглого цилиндра. Легко понять причину, по которой способ, пригодный для определения длины кривой, не годится для определения площади поверхности. При достаточно мелком разбиении кривой (будем считать кривую гладкой) направление хорды, соединяющей соседние точки деления, близко к направлению касательной, проведенной в любой точке соответствующей дуги. В случае поверхности это не так: многоугольная площадка сколь угодно малых размеров может опираться всеми своими вершинами на гладкую поверхность так, что угол между нормалью к площадке и поверхностью будет большим. При этом, очевидно, такой плоский элемент не может служить хорошей аппроксимацией соответствующего элемента поверхности. Это как раз и наблюдается в приведенном выше примере Шварца: если

$q \approx \frac{m}{n^2}$ велико, то треугольники, образующие вписанную поверхность, почти перпендикулярны боковой поверхности цилиндра. Образованный ими многогранник весь состоит из мелких складок. Это и служит причиной того, что площадь поверхности такого многогранника может быть много больше площади боковой поверхности цилиндра.

5. Вычисление площади гладкой поверхности. В предыдущем пункте мы ввели определение площади кривой поверхности. Установим теперь для гладкой поверхности существование площади и формулу, с помощью которой эта площадь может быть фактически вычислена.

Теорема 3.1. Пусть параметрическое уравнение

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$$

определяет гладкую поверхность, ограниченную кусочно-гладким контуром. Тогда эта поверхность квадратуема и ее площадь равна

$$\sigma = \iint_D \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du dv, \quad (3.41)$$

где g_{11} , g_{12} и g_{22} — коэффициенты первой квадратичной формы этой поверхности, а D — область изменения переменных u и v .

Доказательство. Разобьем поверхность Σ на части Σ_i . Выбрав в каждой из этих частей некоторую точку M_i , проведем в ней касательную плоскость. Введем местную систему декартовых координат, выбрав за начало точку M_i , нормаль в этой точке за направление оси z , а касательную плоскость за плоскость xy . Координаты x , y

и z произвольной точки поверхности Σ_i можно записать как функции от u и v :

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)^*).$$

Проекция поверхности Σ_i на касательную плоскость в точке M_i определяется уравнениями

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = 0.$$

Пользуясь выражением для площади плоской фигуры в криволинейных координатах (§ 6 гл. 1), мы можем записать площадь этой проекции в виде

$$\pm \int_{D_i} \int \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} du dv,$$

где D_i — та область, которую пробегает переменные u, v , когда точка (x, y, z) пробегает элемент Σ_i , а знак берется так, чтобы все выражение было положительным.

Выражение

$$\pm \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

можно переписать в виде, не связанном с выбором системы координат, а именно:

$$\pm \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = |[r_u, r_v]|.$$

Если области Σ_i (а следовательно, и D_i) достаточно малы, то

$$\int_{D_i} |[r_u, r_v]| du dv = \left\{ |[r_u, r_v]| \Big|_{u=u_i, v=v_i} + \varepsilon_i \right\} d_i,$$

где d_i — площадь области D_i , u_i, v_i — координаты точки M_i и так $\varepsilon_i \rightarrow 0$ при измельчении разбиения поверхности Σ . Таким образом, сумма площадей проекций всех частичных поверхностей Σ_i на соответствующие касательные плоскости равна

$$\sum_{i=1}^n \left\{ |[r_u, r_v]| \Big|_{u=u_i, v=v_i} \right\} d_i + \sum_{i=1}^n \varepsilon_i d_i. \quad (3.42)$$

*) Правильнее было бы писать $x = x_i(u, v)$, $y = y_i(u, v)$, $z = z_i(u, v)$, потому что эти уравнения соответствуют i -й системе координат, связанной с касательной плоскостью и нормалью в точке M_i .

Предел этого выражения при неограниченном измельчении разбиения поверхности мы и назвали площадью поверхности. Этот предел существует и равен интегралу

$$\int_D |[r_u, r_v]| du dv$$

(поскольку в (3.42) первое слагаемое есть интегральная сумма для этого интеграла, а предел второго равен нулю). Для завершения доказательства остается установить, что

$$|[r_u, r_v]| = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \quad (3.43)$$

Пусть ω — угол между векторами r_u и r_v . Тогда

$$\begin{aligned} |[r_u, r_v]| &= |r_u| |r_v| \sin \omega = |r_u| |r_v| \sqrt{1 - \cos^2 \omega} = \\ &= \sqrt{r_u^2 r_v^2 - r_u^2 r_v^2 \cos^2 \omega} = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

Замечание 1. С вектором $[r_u, r_v]$ мы уже встречались выше (п. 5 § 3). Там мы установили, что этот вектор имеет следующие компоненты:

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix},$$

следовательно, длина его равна

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Таким образом, формулу (3.41) площади поверхности можно переписать так:

$$\sigma = \int_D \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv. \quad (3.41')$$

Замечание 2. Геометрический смысл полученной нами формулы (3.41) состоит в том, что подынтегральное выражение $\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du dv$ (с точностью до бесконечно малых высших порядков) — площадь «бесконечно малого параллелограмма», вырезаемого из поверхности Σ двумя парами бесконечно близких координатных линий $u = u_0$, $u = u_0 + du$, $v = v_0$ и $v = v_0 + dv$ (рис. 3.22). Действительно, вершины P_0, P_1, P_2 этого параллелограмма имеют криволинейные координаты (u_0, v_0) , $(u_0 + du, v_0)$ и $(u_0, v_0 + dv)$ соответственно.

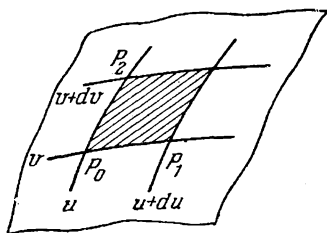


Рис. 3.22.

Поэтому с точностью до малых выше первого порядка имеем

$$\overline{P_0 P_1} = \mathbf{r}_u du, \quad \overline{P_0 P_2} = \mathbf{r}_v dv.$$

Площадь $d\sigma$ параллелограмма, построенного на векторах $\overline{P_0 P_1}$ и $\overline{P_0 P_2}$, равна модулю их векторного произведения

$$d\sigma = |[\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v]| du dv.$$

В силу (3.43) это выражение можно переписать так:

$$d\sigma = \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du dv.$$

Рассмотрим важнейшие частные случаи формулы (3.41). Если поверхность Σ задана явным уравнением

$$z = f(x, y),$$

то, как мы уже видели выше (см. п. 2, пример 4), в этом случае

$$g_{11} = 1 + f_x'^2, \quad g_{12} = f_x' f_y', \quad g_{22} = 1 + f_y'^2,$$

откуда

$$\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2}.$$

Следовательно, площадь поверхности $z = f(x, y)$ выражается формулой

$$\sigma = \iint_D \sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} dx dy, \quad (3.44)$$

причем в данном случае D — проекция поверхности Σ на плоскость xu .

Замечание 1. Так как

$$\sqrt{1 + f_x'^2 + f_y'^2} = \frac{1}{\cos(N, z)}$$

(см. п. 5 § 3), то формулу (3.44) можно переписать так:

$$\sigma = \iint_D \frac{dx dy}{\cos(N, z)}.$$

Смысл ее состоит в том, что элемент площади поверхности равен его проекции на плоскость xu , деленной на косинус угла между нормалью к этому элементу поверхности и к плоскости xu .

Замечание 2. Если поверхность Σ состоит из конечного числа кусков, каждый из которых представим уравнением вида $z = f(x, y)$, то ее площадь можно вычислить, применив формулу (3.44) к каждому такому куску в отдельности.

Пример. Найти площадь части параболоида $z = x^2 + y^2$, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

Решение. Искомая площадь равна

$$\sigma = \iint_{x^2+y^2 \leq a^2} \sqrt{1+4x^2+4y^2} \, dx \, dy.$$

Переходя к полярным координатам, получаем

$$\begin{aligned} \sigma &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^a \sqrt{4r^2+1} \, r \, dr = \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} [(4r^2+1)^{3/2}]_0^a d\varphi = \\ &= \frac{1}{12} \int_0^{2\pi} [(4a^2+1)^{3/2} - 1] d\varphi = \frac{\pi}{6} [(4a^2+1)^{3/2} - 1]. \end{aligned}$$

Предположим теперь, что поверхность задана неявным уравнением $F(x, y, z) = 0$. Если поверхность такова, что это уравнение можно однозначно разрешить относительно z (это равносильно тому, что наша поверхность пересекается любой вертикальной прямой не более чем в одной точке), то, воспользовавшись правилами дифференцирования неявных функций, получаем

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

Подставляя эти выражения вместо f'_x и f'_y в формулу (3.44), получаем

$$\sigma = \iint_D \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2}}{\left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|} \, dx \, dy. \quad (3.45)$$

Здесь опять-таки, как и в формуле (3.44), подынтегральная функция представляет собой не что иное, как обратную величину косинуса угла между нормалью к поверхности и осью z .

Упражнение. Найти площадь части поверхности конуса $x^2 + y^2 - z = 0$, лежащей внутри цилиндра $x^2 + y^2 = a^2$.

Ответ. $\sigma = 2\sqrt{2}\pi a^2$.

§ 5. Кривизна линий на поверхности. Вторая квадратичная форма

В предыдущих параграфах мы получили формулы для вычисления длин кривых на поверхности, углов между кривыми и площади поверхности. Однако эти величины еще не определяют форму поверхности. Например, цилиндр и плоскость — это разные поверхности,

хотя цилиндр можно развернуть на плоскость так, что при этом все углы, длины и площади сохраняются. Для изучения формы поверхности мы примем следующий метод: взяв в рассматриваемой точке нормаль к поверхности, будем проводить через эту нормаль всевозможные плоскости (нормальные плоскости) и изучать форму получаемых при этом сечений поверхности (*нормальных сечений*).

1. Нормальные сечения поверхности и их кривизна. Рассмотрим поверхность Σ , заданную уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v).$$

Вектор-функцию $\mathbf{r}(u, v)$ мы будем считать здесь и далее дважды непрерывно дифференцируемой. Возьмем на поверхности Σ некото-

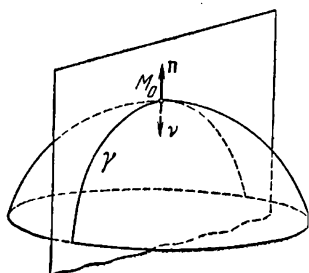


Рис. 3.23.

рую точку M_0 и выберем на нормали к Σ , проведенной в этой точке, определенное направление, т. е. определенный единичный вектор \mathbf{n} . Пусть γ — одно из проходящих через M_0 нормальных сечений. Таким образом, кривая γ лежит в плоскости, проходящей через единичный вектор \mathbf{n} , нормальный к Σ в точке M_0 (рис. 3.23). γ представляет собой плоскую кривую, и форма этой кривой в окрестности точки M_0 вполне определяется ее кривизной k в этой точке и направлением

вогнутости (по отношению к выбранному направлению нормали в точке M_0). Для вычисления кривизны кривой γ запишем уравнение этой кривой в виде

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u(l), v(l)) \quad (3.46)$$

(l — натуральный параметр) и воспользуемся 1-й формулой Френе

$$\frac{d\boldsymbol{\tau}}{dl} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} = k\boldsymbol{\nu},$$

откуда

$$k = \left(\frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial l^2}, \boldsymbol{\nu} \right). \quad (3.47)$$

Единичный вектор $\boldsymbol{\nu}$ направлен, очевидно, по нормали к поверхности Σ в точке M_0 , и следовательно, он или совпадает с \mathbf{n} (если направление вогнутости сечения γ совпадает с выбранным направлением нормали к Σ), или отличается от \mathbf{n} знаком (если эти направления противоположны). Для того чтобы учесть одновременно и величину кривизны и направление вогнутости сечения, введем величину

$$\tilde{k} = \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}, \mathbf{n} \right), \quad (3.48)$$

которую мы назовем *нормальной кривизной* поверхности Σ в точке M_0 в направлении сечения γ . Из сказанного ясно, что $k = |\tilde{k}|$. При вращении вокруг \mathbf{n} плоскости, в которой лежит сечение γ , будет меняться и нормальная кривизна $\tilde{k} = \tilde{k}(\gamma)$; она будет теперь «следить» не только за формой нормального сечения, но и за его направлением вогнутости. Так, например, если поверхность в точке M_0 имеет форму седла, как на рис. 3.24, то для сечения γ_1 нормальная кривизна \tilde{k}_1 будет положительна, поскольку вектор \mathbf{v}_1 главной нормали к γ_1 совпадает с \mathbf{n} , а для сечения γ_2 нормальная кривизна \tilde{k}_2 будет отрицательна, поскольку $\mathbf{v}_2 = -\mathbf{n}$.

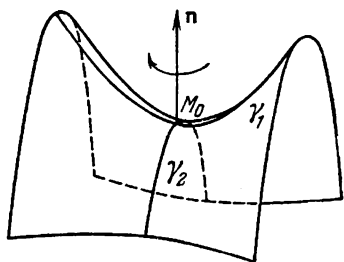


Рис. 3.24.

В дальнейшем, говоря о нормальных сечениях поверхности, мы будем рассматривать только соответствующую нормальную кривизну (3.48), а не кривизну, определяемую формулой (3.47). Эту нормальную кривизну мы будем дальше обозначать просто буквой k , опуская значок \sim над ней.

Величину

$$R = \frac{1}{k}$$

мы будем называть *радиусом нормальной кривизны* поверхности Σ (в данной точке и в данном направлении). Неотрицательная величина $|R|$ есть, очевидно, радиус кривизны соответствующего нормального сечения. Поскольку k может обращаться в нуль, для R мы должны допускать и бесконечные значения.

Выведем теперь формулу для вычисления нормальной кривизны k . Для этого воспользуемся уравнением (3.46) кривой γ и вычислим $\frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}$. Введем для сокращения записи обозначения

$$\mathbf{r}_{uu} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u^2}, \quad \mathbf{r}_{uv} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial u \partial v}, \quad \mathbf{r}_{vv} = \frac{\partial^2 \mathbf{r}}{\partial v^2}.$$

Из уравнения (3.46) кривой γ получим, что

$$\begin{aligned} \frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2} &= \frac{d}{dl} \left(\mathbf{r}_u \frac{du}{dl} + \mathbf{r}_v \frac{dv}{dl} \right) = \\ &= \mathbf{r}_{uu} \left(\frac{du}{dl} \right)^2 + 2\mathbf{r}_{uv} \frac{du}{dl} \frac{dv}{dl} + \mathbf{r}_{vv} \left(\frac{dv}{dl} \right)^2 + \mathbf{r}_u \frac{d^2u}{dl^2} + \mathbf{r}_v \frac{d^2v}{dl^2}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Векторы \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v лежат в касательной плоскости. Следовательно, они ортогональны \mathbf{n} , т. е.

$$(\mathbf{r}_u, \mathbf{n}) = (\mathbf{r}_v, \mathbf{n}) = 0.$$

Поэтому, подставив в формулу (3.48) выражение (3.49) для $\frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}$, получим

$$k = \frac{1}{R} = \left(\frac{d^2\mathbf{r}}{dl^2}, \mathbf{n} \right) = \\ = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n}) \left(\frac{du}{dl} \right)^2 + 2(\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}) \frac{du}{dl} \frac{dv}{dl} + (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}) \left(\frac{dv}{dl} \right)^2. \quad (3.50)$$

2. Вторая квадратичная форма поверхности. Запишем полученную нами формулу (3.50) нормальной кривизны поверхности в более удобном виде. Введя обозначения

$$b_{11} = (\mathbf{r}_{uu}, \mathbf{n}), \quad b_{12} = (\mathbf{r}_{uv}, \mathbf{n}), \quad b_{22} = (\mathbf{r}_{vv}, \mathbf{n}), \quad (3.51)$$

перепишем равенство (3.50) следующим образом:

$$k = \frac{1}{R} = \frac{b_{11} du^2 + 2b_{12} du dv + b_{22} dv^2}{dl^2}. \quad (3.52)$$

В знаменателе здесь стоит dl^2 , т. е. первая квадратичная форма поверхности. Числитель тоже представляет собой квадратичную форму (относительно du и dv). Она называется *второй квадратичной формой поверхности* и играет в теории поверхностей (наряду с первой квадратичной формой) фундаментальную роль. Вторую квадратичную форму поверхности мы будем в дальнейшем обозначать символом φ_2 . Таким образом,

$$\varphi_2 = b_{11} du^2 + 2b_{12} du dv + b_{22} dv^2,$$

где b_{11} , b_{12} и b_{22} определены равенствами (3.51).

Пример. Рассмотрим поверхность, заданную уравнением

$$z = f(x, y),$$

т. е. в векторной форме

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x, y)\mathbf{k}.$$

Здесь

$$\mathbf{r}_{xx} = f''_{xx}\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_{xy} = f''_{xy}\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}_{yy} = f''_{yy}\mathbf{k}.$$

Следовательно,

$$b_{11} = f''_{xx} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{z}), \quad b_{12} = f''_{xy} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{z}), \quad b_{22} = f''_{yy} \cos(\mathbf{n}, \mathbf{z}),$$

т. е.

$$\varphi_2 = (f''_{xx} dx^2 + 2f''_{xy} dx dy + f''_{yy} dy^2) \cos(\mathbf{n}, \mathbf{z}). \quad (3.53)$$

Таким образом, в этом случае вторая квадратичная форма представляет собой, с точностью до множителя $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{z})$, совокупность членов второго порядка в разложении функции $z = f(x, y)$ по формуле Тейлора.

Замечание. Мы уже видели, что первая квадратичная форма определяет «метрику» поверхности: с ее помощью на поверхности измеряются длины, углы и площади. Вычисление этих величин опиралось, по существу, на возможность заменять в первом приближении бесконечно малый элемент поверхности соответствующим элементом касательной плоскости. Вторая квадратичная форма — это мера того, насколько поверхность уклоняется в окрестности данной точки от касательной плоскости, проведенной через эту точку.

Чтобы убедиться в этом, вычислим расстояние между близкой к M_0 точкой M поверхности Σ и касательной плоскостью, проведенной в точке M_0 (рис. 3.25). Рассмотрим проходящее через точки M_0 и M нормальное сечение. Искомое расстояние равно, очевидно, расстоянию MP от M до касательной к кривой γ . Но это расстояние с точностью до малых высшего порядка (см. п. 6 § 2) равно

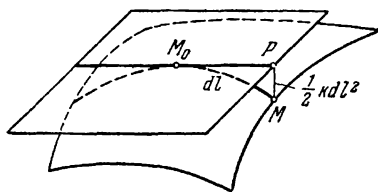


Рис. 3.25.

$$\frac{1}{2} k dl^2 = \frac{1}{2} (b_{11} du^2 + 2b_{12} du dv + b_{22} dv^2),$$

причем знак этого выражения указывает направление, в котором поверхность отходит от касательной плоскости.

Можно было бы само понятие второй квадратичной формы ввести, исходя из задачи о вычислении расстояния от точки поверхности до касательной плоскости, проведенной через близкую точку.

Упражнения. 1. Показать, что для плоскости (при любой ее параметризации) вторая квадратичная форма тождественно равна нулю.

2. Вычислить вторую квадратичную форму для тора в координатах φ и ψ (см. пример 1 п. 1 § 3).

3. Индикатриса кривизны. Радиус кривизны $R = \frac{1}{k}$ нормального сечения γ в точке M_0 зависит от направления, в котором проведено сечение γ . Чтобы изобразить эту зависимость наглядно, воспользуемся следующим приемом. Отложим от точки M_0 на касательной плоскости в каждом направлении вектор ρ , длина которого равна $\sqrt{|R|}$, где R — радиус нормальной кривизны поверхности в этом направлении. Этот вектор можно, очевидно, записать в виде

$$\rho = \sqrt{|R|} \tau,$$

где τ — единичный вектор, касательный к соответствующему нормальному сечению.

Геометрическое место концов этих векторов представляет собой некоторую кривую, лежащую в плоскости, касательной к Σ в точке M_0 (рис. 3.26). Эта кривая называется *индикатрисой кривизны* поверхности Σ в данной точке.

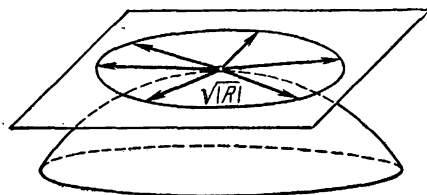


Рис. 3.26.

Найдем уравнение индикатрисы кривизны.

Примем за координатные векторы в касательной плоскости \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v . Так как

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{dl} = \mathbf{r}_u \frac{du}{dl} + \mathbf{r}_v \frac{dv}{dl},$$

то

$$\rho = \sqrt{|R|} \frac{du}{dl} \mathbf{r}_u + \sqrt{|R|} \frac{dv}{dl} \mathbf{r}_v,$$

т. е. каждая точка индикатрисы кривизны имеет, в выбранном базисе, координаты

$$\xi = \sqrt{|R|} \frac{du}{dl} \quad \text{и} \quad \eta = \sqrt{|R|} \frac{dv}{dl}.$$

Воспользуемся равенством

$$\frac{1}{R} = b_{11} \left(\frac{du}{dl} \right)^2 + 2b_{12} \frac{du}{dl} \frac{dv}{dl} + b_{22} \left(\frac{dv}{dl} \right)^2.$$

Умножив его на $|R|$, получаем, что

$$b_{11} \left(\sqrt{|R|} \frac{du}{dl} \right)^2 + 2b_{12} \left(\sqrt{|R|} \frac{du}{dl} \right) \left(\sqrt{|R|} \frac{dv}{dl} \right) + b_{22} \left(\sqrt{|R|} \frac{dv}{dl} \right)^2 = \pm 1,$$

т. е. что ξ и η удовлетворяют уравнению

$$b_{11}\xi^2 + 2b_{12}\xi\eta + b_{22}\eta^2 = \pm 1. \quad (3.54)$$

Это — уравнение некоторой центральной кривой второго порядка с центром в начале координат *).

Таким образом, индикатриса кривизны представляет собой центральную кривую второго порядка **) с центром, находящимся в рассматриваемой точке поверхности.

4. Главные направления и главные кривизны поверхности. Формула Эйлера. Уравнение индикатрисы кривизны, как и уравнение всякой центральной кривой второго порядка, можно привести

*) Последнее видно из того, что в уравнении отсутствуют члены первой степени.

**) Точнее, здесь имеются две такие кривые: $b_{11}\xi^2 + 2b_{12}\xi\eta + b_{22}\eta^2 = 1$ и $b_{11}\xi^2 + 2b_{12}\xi\eta + b_{22}\eta^2 = -1$, уравнения которых отличаются лишь свободным членом. Подробнее о виде индикатрисы кривизны см. п. 7.

к главным осям, т. е. вместо базисных векторов \mathbf{r}_u и \mathbf{r}_v можно выбрать в касательной плоскости два других базисных вектора так, чтобы они были взаимно ортогональными и единичными и чтобы в уравнении индикатрисы кривизны отсутствовал член с произведением координат. Для этого нужно, чтобы новые базисные векторы были направлены по главным осям индикатрисы кривизны. Эти два направления мы назовем *главными направлениями* нашей поверхности (в данной точке).

При таком выборе системы координат в касательной плоскости уравнение индикатрисы принимает вид

$$px^2 + qy^2 = \pm 1. \quad (3.55)$$

Пусть φ — угол между главным направлением, принятым за направление оси x , и произвольным нормальным сечением. Тогда, очевидно,

$$x = \sqrt{|R|} \cos \varphi, \quad y = \sqrt{|R|} \sin \varphi,$$

где R — радиус кривизны данного нормального сечения. Подставив эти выражения x и y в уравнение (3.55) и вспомнив, что правая часть этого уравнения представляет собой отношение $|R|$ к R , получим

$$p \cos^2 \varphi + q \sin^2 \varphi = \frac{1}{R} = k. \quad (3.56)$$

Назовем *главными кривизнами* $k_1 = \frac{1}{R_1}$ и $k_2 = \frac{1}{R_2}$ поверхности в данной точке нормальные кривизны, отвечающие главным направлениям индикатрисы кривизны в этой точке. В выбранной нами системе координат это — направления $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{\pi}{2}$, поэтому

$$k_1 = p, \quad k_2 = q.$$

Таким образом, равенство (3.60) принимает вид

$$k = k_1 \cos^2 \varphi + k_2 \sin^2 \varphi, \quad (3.57)$$

или

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} \cos^2 \varphi + \frac{1}{R_2} \sin^2 \varphi. \quad (3.57')$$

Это — так называемая формула Эйлера. Она дает выражение нормальной кривизны поверхности по любому направлению через главные кривизны.

Из формулы Эйлера сразу видно, что главные кривизны — это экстремальные значения нормальной кривизны. Действительно, если $k_1 = k_2$, то k не зависит от φ и здесь любое направление будет

экстремальным *). Пусть $k_1 \neq k_2$, например $k_1 > k_2$. Тогда $k_1 - k_2 > 0$ и, переписывая формулу Эйлера в виде

$$k = (k_1 - k_2) \cos^2 \varphi + k_2 (\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi) = (k_1 - k_2) \cos^2 \varphi + k_2,$$

получаем, что $k_1 \geq k \geq k_2$ при каждом φ .

Эти экстремальные свойства главных кривизн дают удобный способ для их фактического вычисления.

5. Вычисление главных кривизн. Из формулы Эйлера (3.57) легко усмотреть, как нормальная кривизна $k(\varphi)$ зависит от на-

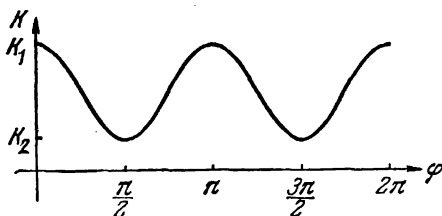


Рис. 3.27.

правления φ . График зависимости k от φ изображен на рис. 3.27. Из него видно, что при каждом заданном k_0 , $k_1 > k_0 > k_2$, существуют четыре значения угла φ , при которых $k(\varphi) = k_0$. Так как углы, отличающиеся на π , определяют одно и то же нормальное сечение, то каждому k_0 отвечают два нормальных се-

чения, для которых нормальная кривизна равна k_0 . Но если $k_0 = k_1$ или $k_0 = k_2$, то эти два нормальных сечения сливаются в одно. Иными словами, *главные кривизны — это те значения нормальной кривизны, каждому из которых отвечает одно и только одно нормальное сечение нашей поверхности*. Формулу (3.52) для определения нормальной кривизны как функции направления можно переписать так:

$$(b_{11} - kg_{11}) du^2 + 2(b_{12} - kg_{12}) du dv + (b_{22} - kg_{22}) dv^2 = 0,$$

или, деля на dv^2 и полагая $\frac{du}{dv} = t$ (где t определяет сечение),

$$(b_{11} - kg_{11}) t^2 + 2(b_{12} - kg_{12}) t + (b_{22} - kg_{22}) = 0. \quad (3.58)$$

В соответствии с изложенным выше это квадратное уравнение для t , отвечающих главным направлениям и только для них, имеет не два, а лишь один корень. Для этого в свою очередь необходимо и достаточно, чтобы дискриминант уравнения (3.58) обращался в нуль.

*) Точка, в которой $k_1 = k_2$, называется *точкой округления* или *омбилической точкой*. Можно показать, что единственная поверхность, целиком состоящая из точек округления, — это сфера.

Итак, для нахождения главных кривизн мы получаем уравнение

$$(b_{12} - kg_{12})^2 - (b_{11} - kg_{11})(b_{22} - kg_{22}) = 0, \quad (3.59)$$

или

$$\begin{vmatrix} b_{11} - kg_{11} & b_{12} - kg_{12} \\ b_{12} - kg_{12} & b_{22} - kg_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (3.59')$$

6. Полная кривизна и средняя кривизна. Во многих случаях вместо главных кривизн k_1 и k_2 удобнее рассматривать их произведение

$$K = k_1 k_2 \quad (3.60)$$

и полусумму

$$H = \frac{1}{2} (k_1 + k_2). \quad (3.61)$$

K называется *полной* или *гауссовой кривизной* поверхности, а H — ее *средней кривизной*.

Из квадратного уравнения (3.59') сразу получаем формулы

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2}, \quad H = \frac{g_{11}b_{22} - 2g_{12}b_{12} + g_{22}b_{11}}{2(g_{11}g_{22} - g_{12}^2)}. \quad (3.62)$$

Пример. Вычислить полную и среднюю кривизны для гиперболического параболоида $z = x^2 - y^2$.

Решение. $g_{11} = 1 + 4x^2$, $g_{12} = -4xy$, $g_{22} = 1 + 4y^2$; $b_{11} = 2$, $b_{12} = 0$, $b_{22} = -2$. Значит,

$$K = \frac{-4}{1 + 4x^2 + 4y^2}, \quad H = \frac{4(x^2 - y^2)}{1 + 4x^2 + 4y^2}.$$

В частности, в начале координат $K = -4$, $H = 0$.

7. Классификация точек на поверхности. Каждой точке M_0 дважды непрерывно дифференцируемой поверхности Σ мы сопоставили определенную кривую — индикатрису кривизны в этой точке. Уравнение индикатрисы можно, как мы знаем, привести к виду

$$k_1 x^2 + k_2 y^2 = \pm 1, \quad (3.63)$$

где k_1 и k_2 — главные кривизны нашей поверхности в точке M_0 . Тип кривой (3.63) зависит от знака произведения $k_1 k_2$. Рассмотрим возможные здесь три случая.

1) $k_1 k_2 > 0$. Можно считать, что $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, так как, изменив направление нормального вектора \mathbf{n} , мы можем изменить знаки у k_1 и k_2 на противоположные. При $k_1 > 0$ и $k_2 > 0$ уравнение (3.63) определяет эллипс, если в нем справа стоит $+1$, а уравнение, в котором справа стоит -1 , никакой кривой не соответствует.

Точки, в которых $k_1 k_2 > 0$ (т. е. индикатриса кривизны — эллипс), называются *эллиптическими точками*.

2) $k_1 k_2 < 0$. В этом случае уравнение (3.63) определяет гиперболу или, точнее говоря, две гиперболы с общими асимптотами. Одна из них отвечает правой части $+1$, а другая — правой части -1 . Точки, в которых $k_1 k_2 < 0$ (индикатриса кривизны — пара гипербол), называются *гиперболическими*.

3) $k_1 k_2 = 0$. Если при этом одна из главных кривизн отлична от нуля, то уравнение (3.63) определяет пару параллельных прямых.

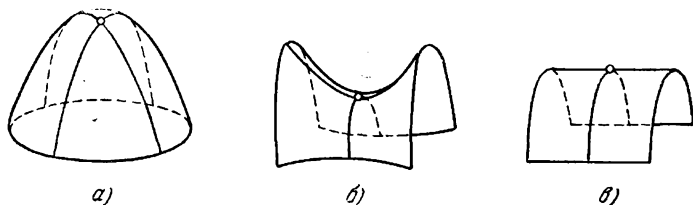


Рис. 3.28.

Точки, в которых $k_1 k_2 = 0$ (но одна из главных кривизн отлична от нуля), называются *параболическими*.

Если в данной точке $k_1 = k_2 = 0$, то в ней понятие индикатрисы кривизны теряет смысл. Точки, где $k_1 = k_2 = 0$, называются *точками уплощения* поверхности.

Итак, тип точки определяется знаком полной кривизны $K = k_1 k_2$ в этой точке. Поскольку

$$K = \frac{b_{11}b_{22} - b_{12}^2}{g_{11}g_{22} - g_{12}^2},$$

а величина $g_{11}g_{22} - g_{12}^2$ всегда положительна, то тип точки определяется знаком дискриминанта $b_{11}b_{22} - b_{12}^2$ второй квадратичной формы.

Легко представить себе строение поверхности в окрестности точки каждого из трех типов. Пусть точка M_0 — эллиптическая. Тогда k_1 и k_2 имеют одинаковые знаки, а следовательно, в силу формулы Эйлера, все нормальные кривизны в данной точке имеют одинаковые знаки. Геометрически это означает, что в рассматриваемой точке все нормальные сечения имеют одно и то же направление вогнутости. В окрестности эллиптической точки поверхность похожа на эллипсоид и имеет вид, изображенный на рис 3.28, а.

Рассмотрим теперь гиперболическую точку. В ней главные кривизны имеют разные знаки. Поэтому здесь существуют нормальные сечения с различными направлениями вогнутости. Поверхность в окрестности такой точки имеет седлообразный вид (см. рис. 3.28, б).

Несколько сложнее строение поверхности в окрестности параболической точки. Здесь имеется одно направление, по которому нормальная кривизна равна нулю. По всем остальным направлениям нормальная кривизна имеет один и тот же знак. Типичным примером

параболической точки является любая точка обыкновенно круглого цилиндра (см. рис. 3.28, в), однако возможны и другие случаи, на которых мы не будем останавливаться.

Рассмотрим следующий пример. Пусть поверхность задана уравнением

$$z = f(x, y)$$

и пусть в точке (x_0, y_0) выполнены необходимые условия экстремума, т. е. $\frac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 0$. Тогда нормаль к поверхности в этой точке совпадает с направлением оси z и, как показывает простое вычисление, коэффициенты второй квадратичной формы поверхности в этой точке равны

$$b_{11} = f''_{xx}, \quad b_{12} = b_{21} = f''_{xy}, \quad b_{22} = f''_{yy}$$

и, следовательно,

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = f''_{xx}f''_{yy} - f_{xy}^2. \quad (3.64)$$

Мы видим, что тип рассматриваемой точки определяется знаком выражения (3.64). Но, как известно, знаком этого же выражения определяется наличие или отсутствие экстремума в данной точке. Таким образом, мы получаем следующие связи между типом точки и наличием или отсутствием в этой точке экстремума:

эллиптическая точка — экстремум есть ($f''_{xx}f''_{yy} - f_{xy}^2 > 0$),
гиперболическая точка — экстремума нет ($f''_{xx}f''_{yy} - f_{xy}^2 < 0$),
параболическая точка — неопределенный случай

$$(f''_{xx}f''_{yy} - f_{xy}^2 = 0).$$

Упражнение. Каков тип точек, лежащих на: 1) эллипсоиде, 2) двуполостном гиперболоиде, 3) однополостном гиперболоиде, 4) эллиптическом параболоиде, 5) гиперболическом цилиндре.

8. Первая и вторая квадратичные формы как полная система инвариантов поверхности. Мы ввели для поверхностей первую квадратичную форму и показали, что эта форма определяет на поверхности длины, углы и площади. Далее, мы показали, что вторая квадратичная форма определяет нормальные кривизны поверхности, т. е. вид поверхности в окрестности каждой точки. Естественно поставить следующий вопрос: в какой мере поверхность определяется своими двумя квадратичными формами. Ответ на него дает следующая теорема.

Теорема 3.2. Если на поверхностях Σ и Σ^* можно ввести координаты u и v и, соответственно, u^* и v^* так, чтобы в тех точках, в которых $u = u^*$, $v = v^*$, совпадали бы и соответ-

ствующие квадратичные формы, т. е. чтобы в этих точках выполнялись равенства

$$\begin{aligned} g_{11} &= g_{11}^*, & g_{12} &= g_{12}^*, & g_{22} &= g_{22}^*; \\ b_{11} &= b_{11}^*, & b_{12} &= b_{12}^*, & b_{22} &= b_{22}^*, \end{aligned}$$

то такие две поверхности конгруэнтны, т. е. могут отличаться друг от друга только положением в пространстве.

Таким образом, первая и вторая квадратичные формы играют для поверхностей ту же роль, что и натуральные уравнения для кривой: они образуют полную систему инвариантов, определяющую поверхность с точностью до ее положения в пространстве.

Мы не будем проводить здесь доказательство сформулированной теоремы. Его можно найти почти во всех учебниках дифференциальной геометрии*).

§ 6. Понятие о внутренней геометрии поверхности

1. Наложимость поверхностей. Необходимое и достаточное условие наложимости. Выше мы рассматривали поверхности как твердые тела, считая, что они могут перемещаться в пространстве, но не меняют свою форму. В некоторых случаях естественнее, однако, другая точка зрения, состоящая в том, что поверхности рассматриваются как нерастяжимые, но абсолютно гибкие пленки. При этом изучаются те свойства поверхности, которые не меняются при ее изгибании, т. е. при деформациях, не связанных с растяжением.

Если одна поверхность может быть совмещена с другой при помощи изгибания, то эти поверхности называются *наложимыми* друг на друга. Иначе говоря, две поверхности называются наложимыми друг на друга, если между их точками можно установить взаимно однозначное соответствие так, чтобы линии, переходящие друг в друга при этом соответствии, имели одну и ту же длину.

Естественно возникает вопрос: каковы условия, необходимые и достаточные для того, чтобы две поверхности были наложимы друг на друга. Ответ на него дает следующая теорема.

Теорема 3.3. Для того чтобы две поверхности Σ и Σ^* были наложимы друг на друга, необходимо и достаточно, чтобы эти поверхности допускали такую параметризацию u, v , при которой в точках $M \in \Sigma$ и $M^* \in \Sigma^*$, имеющих одинаковые координаты u, v , соответствующие коэффициенты их первых квадратичных форм были бы равны.

Доказательство. Достаточность этого условия очевидна: если такая параметризация возможна, то, поставив в соответствие друг другу те точки поверхностей Σ и Σ^* , которые имеют одинаковые координаты u, v , мы получим в соответствующих точках одинаковые коэффициенты первых квадратичных форм

$$g_{11} = g_{11}^*, \quad g_{12} = g_{12}^*, \quad g_{22} = g_{22}^*.$$

Но тогда, параметризовав две соответствующие друг другу линии на этих поверхностях с помощью одного и того же параметра t (т. е. так, чтобы

*) См., например, А. П. Норден, Дифференциальная геометрия, Учпедгиз, 1948, стр. 188.

в соответствующих друг другу точках этих линий значение параметра было одно и то же), мы получим, что

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{11} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2g_{12} \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + g_{22} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt = \\ = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{g_{11}^* \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2g_{12}^* \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + g_{22}^* \left(\frac{dv}{dt} \right)^2} dt, \quad (3.65)$$

т. е. что длины этих дуг равны.

Обратно, если две поверхности Σ и Σ^* наложимы друг на друга, то на этих поверхностях можно ввести общую параметризацию, введя каким-либо образом координаты u, v на поверхности Σ и считая, что точка $M^* \in \Sigma^*$ имеет те же внутренние координаты u, v , что и отвечающая ей точка M . Рассмотрим теперь на поверхностях Σ и Σ^* две отвечающие друг другу линии и параметризуем их так, чтобы их точки, совпадающие при наложении, отвечали одному и тому же значению параметра t . Тогда равенство длин дуг этих кривых запишется в виде (3.65). Так как это равенство будет иметь место при всех t_1 и t_2 , то из него получим

$$g_{11} du^2 + 2g_{12} du dv + g_{22} dv^2 = g_{11}^* du^2 + 2g_{12}^* du dv + g_{22}^* dv^2.$$

Но это последнее равенство должно выполняться тождественно по du и dv , так как оно справедливо для любых соответствующих друг другу кривых, проходящих через любые точки и в любых направлениях. Тождественное равенство двух квадратичных форм влечет совпадение их коэффициентов. Таким образом,

$$g_{11} = g_{11}^*, \quad g_{12} = g_{12}^*, \quad g_{22} = g_{22}^*,$$

что и требовалось доказать.

2. Внутренняя геометрия поверхности. Совокупность тех свойств поверхности, которые не меняются при ее изгибании, называется внутренней геометрией поверхности. Мы сейчас показали, что две поверхности изгибаемы друг в друга в том и только том случае, если на них можно ввести одну и ту же первую квадратичную форму. Следовательно, к внутренней геометрии поверхности относятся те и только те ее свойства*), которые могут быть выражены через первую квадратичную форму. Таким образом, *внутренняя геометрия поверхности определяется ее первой квадратичной формой*. К внутренней геометрии поверхности относятся, следовательно, длины линий, лежащих на поверхности. Далее, поскольку угол между линиями на поверхности и площадь поверхности выражаются через коэффициенты первой квадратичной формы (см. п. 2 и 4 § 4), то эти величины также относятся к внутренней геометрии.

Замечательно то обстоятельство, что внутренним свойством поверхности является и ее полная кривизна K . Именно, Гауссом была получена для полной кривизны в ортогональных координатах следующая формула:

$$K = - \frac{1}{2\sqrt{g_{11}g_{22}}} \left\{ \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u} \right) + \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}} \frac{\partial g_{11}}{\partial v} \right) \right\},$$

в которую входят только коэффициенты первой квадратичной формы. В то же время ни средняя кривизна, ни главные кривизны при изгибании не сохраняются.

*) Речь идет, конечно, о тех свойствах, которые относятся к самой поверхности и не зависят от выбора ее параметризации.

Сам термин «внутренняя геометрия» применительно к свойствам, сохраняющимся при изгибании поверхности, означает, что они присущи именно самой поверхности и не связаны с ее вложением в пространство. Поясним это следующим «мысленным экспериментом». Представим себе, что поверхность населена некими двумерными существами, достаточно разумными, но не имеющими никаких выходов в окружающее эту поверхность пространство. Такие существа могли бы построить геометрию своего «мира», назвав «прямой», проходящей через две точки, кратчайшую из всех линий (лежащих целиком на поверхности), проходящих через эти точки (например, на сфере такой

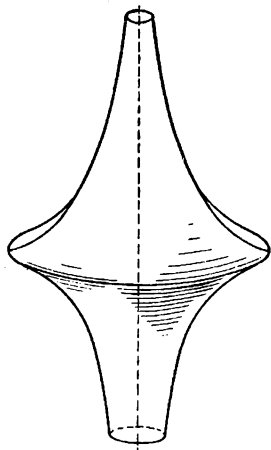


Рис. 3.29.

«прямой» будет дуга большого круга), и, далее, определить «треугольники», «многоугольники» и т. д. и изучать свойства этих фигур (не выходя в окружающее поверхность пространство). Та геометрия, которая при этом получилась бы, и является внутренней геометрией нашей поверхности. При этом наши гипотетические существа никоим образом не смогли бы отличить одну поверхность от любой другой, на нее наложимой*). Например, внутренняя геометрия плоскости — это обычная планиметрия, которую все изучают в школе. Однако все теоремы планиметрии останутся верны, если вместо плоскости рассматривать любую наложимую на нее поверхность, скажем параболический цилиндр. А вот внутренняя геометрия сферы существенно отличается от геометрии плоскости: например, на сфере сумма углов треугольника всегда больше, чем π .

3. Поверхности постоянной кривизны. Рассмотрим поверхность, полная кривизна K которой в каждой точке имеет одно и то же значение. Такие поверхности называются *поверх-*

ностями постоянной кривизны. Из инвариантности полной кривизны при изгибании следует, что две поверхности постоянной кривизны наложимы друг на друга только тогда, когда их кривизны равны. Можно показать, что верно и обратное: две поверхности одной и той же постоянной кривизны наложимы друг на друга. Таким образом, каждая из этих поверхностей полностью (с точки зрения внутренней геометрии) характеризуется одним числом — своей полной кривизной K .

Геометрические свойства поверхности постоянной кривизны существенно зависят от знака кривизны, поэтому следует отдельно рассматривать поверхности положительной, нулевой и отрицательной кривизны.

Поверхностью нулевой кривизны является плоскость. Ее внутренняя геометрия — это обычная планиметрия. Ту же самую внутреннюю геометрию имеет и любая другая поверхность нулевой кривизны.

«Канонической моделью» поверхности положительной кривизны K может служить сфера радиуса $R = \frac{1}{\sqrt{K}}$. Внутренняя геометрия этой поверхности

*) Соображения о том, когда возможно, а когда невозможно «внутренним образом» отличить прямое от кривого, имеют смысл не только применительно к двумерным объектам — поверхностям, но и для объектов большей размерности, в частности и для трехмерного пространства. Эти вопросы очень важны с точки зрения общих представлений о вселенной. К сожалению, мы не имеем возможности здесь их рассматривать.

отлична от привычной нам планиметрии: если под «прямыми» понимать кратчайшие линии (т. е. в случае сферы дуги больших кругов), то верны следующие утверждения: любые две «прямые» при неограниченном их продолжении пересекаются, сумма углов треугольника больше двух прямых и т. д.

Поверхностью постоянной отрицательной кривизны $K < 0$ является так называемая *псевдосфера*, которая изображена на рис. 3.29. Она представляет собой поверхность, образованную вращением трактрисы, т. е. кривой, определяемой уравнениями

$$x = a \left(\cos t + \ln \operatorname{tg} \frac{t}{2} \right), \quad y = a \sin t.$$

Изображенная на рис. 3.29 поверхность не гладкая: она имеет ребро. Это обстоятельство не случайно: можно показать, что в трехмерном пространстве не существует неограниченно продолжимой гладкой поверхности, имеющей постоянную отрицательную кривизну. Внутренняя геометрия псевдосферы отлична и от обычной планиметрии и от геометрии на сфере. Она совпадает с так называемой *геометрией Лобачевского*, в которой сумма углов треугольника меньше двух прямых, через данную точку проходит бесконечно много прямых, не пересекающих данную, и т. п. Не имея возможности останавливаться здесь на всех этих вопросах (имеющих, между прочим, глубокие связи с современными физическими представлениями, в частности с теорией относительности), мы отсылаем интересующегося ими читателя к соответствующей специальной литературе *).

*) См., например, Н. В. Ефимов, Высшая геометрия, Физматгиз, 1961.

ГЛАВА 4

КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Нахождение массы материальной кривой по ее плотности, вычисление работы силового поля вдоль некоторого пути и ряд других задач требуют введения так называемых криволинейных интегралов, т. е. интегралов от функций, заданных вдоль кривых. Этому понятию, важному как для самого анализа, так и для его физических приложений, посвящена настоящая глава.

Рассмотрение различных физических задач, связанных с интегрированием функций вдоль линий, приводит к необходимости введения двух типов криволинейных интегралов, называемых обычно криволинейными интегралами первого и второго рода. Впрочем, как мы увидим, эти два типа криволинейных интегралов легко преобразуются друг в друга.

§ 1. Криволинейные интегралы первого рода

1. Определение криволинейного интеграла первого рода. Пусть AB — некоторая кривая, гладкая или кусочно-гладкая*), и пусть $f(M)$ — функция, заданная на этой кривой. Рассмотрим некоторое разбиение этой кривой на части $A_{l-1}A_l$ точками

$$A = A_0, A_1, \dots, A_n = B, \quad (4.1)$$

выберем на каждой из дуг $A_{l-1}A_l$ произвольную точку M_l и составим сумму

$$\sum_{l=1}^n f(M_l) \Delta l, \quad (4.2)$$

*) Напомним, что кривая, заданная уравнениями $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, называется *гладкой*, если функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны и имеют непрерывные первые производные, не обращающиеся в нуль одновременно (иными словами, если кривая в каждой точке имеет касательную и направление этой касательной непрерывно зависит от точки касания). Непрерывная кривая, составленная из конечного числа гладких кусков, называется *кусочно-гладкой*.

где Δl_i — длина дуги $A_{i-1}A_i$ (рис. 4.1). Мы будем называть такие суммы *интегральными суммами*. Введем следующее определение:

Определение. Если при стремлении $\max \Delta l_i$ к нулю интегральные суммы (4.2) стремятся к некоторому конечному пределу *) J , то этот предел называется *криволинейным интегралом первого рода от функции $f(M)$ по кривой AB* и обозначается

$$\int_{AB} f(M) dl. \quad (4.3)$$

Поскольку точки кривой AB определяются своими координатами (x, y) , функцию $f(M)$, заданную на AB , мы будем обычно писать в виде $f(x, y)$, а сам интеграл

$\int_{AB} f(M) dl$ — в виде

$$\int_{AB} f(x, y) dl.$$

При этом, однако, следует иметь в виду, что переменные x и y здесь не независимы, а связаны условием: точка (x, y) лежит на кривой AB .

Нетрудно убедиться в том, что понятие криволинейного интеграла первого рода на самом деле почти не отличается от обычного понятия определенного интеграла функции одной переменной и легко к нему сводится. Действительно, приняв на кривой AB за параметр длину дуги l , отсчитываемую от начальной точки A , запишем эту кривую с помощью уравнений вида

$$x = x(l), \quad y = y(l) \quad (0 \leq l \leq L). \quad (4.4)$$

При этом функция $f(x, y)$, заданная на AB , сведется к функции $f(x(l), y(l))$ переменной l . Обозначив l_i^* значение параметра l , отвечающее точке M_i , перепишем интегральную сумму (4.2) в виде

$$\sum_{i=1}^n f(x(l_i^*), y(l_i^*)) \Delta l_i. \quad (4.5)$$

*) Как и в случае определенных интегралов (см. вып. 1, гл. 10, § 1), число J называется пределом интегральных сумм, если для любого $\epsilon > 0$ выполнено неравенство $\left| J - \sum_{i=1}^n f(M_i) \Delta l_i \right| < \epsilon$, как только $\max \Delta l_i$ достаточно мал.

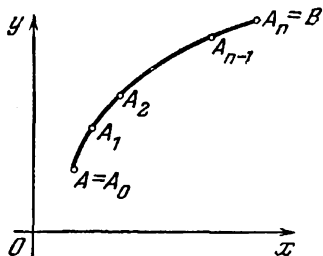


Рис. 4.1.

Это — интегральная сумма, отвечающая определенному интегралу

$$\int_0^L f(x(l), y(l)) dl.$$

Раз интегральные суммы (4.2) и (4.5) равны между собой, то равны и отвечающие им интегралы; таким образом,

$$\int_{AB} f(M) dl = \int_0^L f(x(l), y(l)) dl, \quad (4.6)$$

причем оба эти интеграла существуют или не существуют одновременно. Следовательно, если функция $f(M)$ непрерывна *) (или же кусочно-непрерывна и ограничена) вдоль кусочно-гладкой кривой AB , то криволинейный интеграл (4.3) заведомо существует, поскольку при этих условиях существует определенный интеграл, стоящий в равенстве (4.6) справа.

Замечание. Хотя, как это ясно из сказанного, криволинейный интеграл первого рода непосредственно сводится к определенному интегралу от функции одной переменной, между этими понятиями имеется следующее различие. В интегральных суммах (4.2) величины Δl_i (длины дуг $A_{i-1}A_i$) — обязательно положительные, независимо от того, какую точку кривой AB мы считаем начальной, а какую — конечной. Таким образом, выбор на кривой AB того или иного направления (ориентация этой кривой) на величину интеграла (4.3) никак не влияет, т. е.

$$\int_{AB} f(M) dl = \int_{BA} f(M) dl, \quad (4.7)$$

в то время как определенный интеграл $\int_a^b f(x) dx$ при перестановке пределов меняет знак.

Для сведения криволинейного интеграла первого рода к обыкновенному определенному интегралу нет необходимости пользоваться натуральным параметром (длиной дуги). Пусть кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t_0 \leq t \leq t_1), \quad (4.8)$$

причем $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ непрерывны, а $\varphi'(t)$ и $\psi'(t)$ кусочно-непрерывны и ограничены и $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) > 0$. Тогда на AB можно ввести

*) Мы говорим, что функция $f(M)$, определенная на спрямляемой кривой, непрерывна на этой кривой, если она непрерывна на ней как функция параметра l .

в качестве параметра длину дуги l , отсчитываемую от некоторой фиксированной точки. Выберем при этом направление отсчета для l так, чтобы возрастанию параметра t отвечало возрастание длины дуги l . Тогда l будет монотонно возрастающей функцией t и

$$dl = \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \quad (4.9)$$

Воспользовавшись равенством (4.6) и формулой замены переменной в определенном интеграле, получим

$$\int_{AB} f(M) dl = \int_0^L f(x(l), y(l)) dl = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt,$$

причем здесь $t_0 < t_1$. Итак, справедлива следующая

Теорема 4.1. Пусть AB — гладкая кривая, заданная уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t \in [t_0, t_1]),$$

и $f(x, y)$ — функция, заданная на этой кривой. Тогда имеет место равенство

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt, \quad (4.10)$$

причем стоящий слева криволинейный интеграл существует в том и только том случае, когда существует определенный интеграл, стоящий справа.

В частности, если кривая AB задана явным уравнением

$$y = y(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

то формула (4.10) сведения криволинейного интеграла к определенному принимает вид

$$\int_{AB} f(M) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2} dx. \quad (4.11)$$

Упражнение. Записать криволинейный интеграл от функции $f(x, y)$ по дуге AB , заданной полярным уравнением

$$r = r(\varphi) \quad (\varphi_1 \leq \varphi \leq \varphi_2)$$

в виде определенного интеграла по φ .

Ответ.
$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sqrt{r^2 + r'^2} d\varphi.$$

Замечание. Определенный интеграл

$$\int_a^b f(x) dx$$

от неотрицательной функции можно трактовать как площадь криволинейной трапеции (рис. 4.2, а). Подобным же образом криволинейный интеграл

$$\int_{AB} f(M) dl$$

можно при $f(M) \geq 0$ представлять себе как площадь куска цилиндрической поверхности, составленной из перпендикуляров к плоскости xOy , восстановленных в точках M кривой AB и имеющих переменную длину $f(M)$ (рис. 4.2, б).

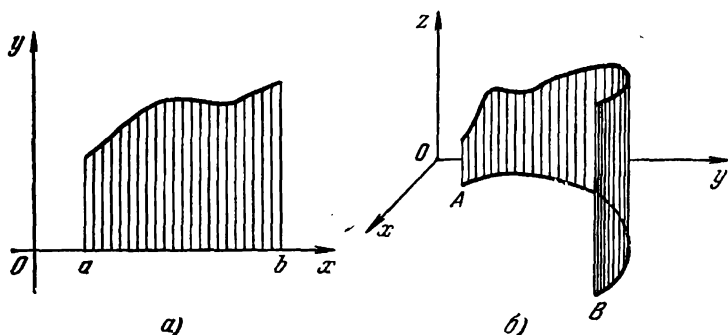


Рис. 4.2.

2. Свойства криволинейных интегралов. Свойства криволинейных интегралов вполне аналогичны свойствам определенных интегралов и сразу вытекают из формулы (4.6), сводящей криволинейный интеграл к определенному. Перечислим основные из них.

1 (линейность). Если $k = \text{const}$, а $f(M)$ интегрируема на AB , то

$$\int_{AB} kf(M) dl = k \int_{AB} f(M) dl$$

и интеграл слева заведомо существует.

2 (линейность). Если $f(M)$ и $g(M)$ интегрируемы на AB , то $f(M) \pm g(M)$ интегрируема и

$$\int_{AB} (f(M) \pm g(M)) dl = \int_{AB} f(M) dl \pm \int_{AB} g(M) dl.$$

3 (монотонность). Если $f(M)$ — неотрицательная интегрируемая функция, то всегда

$$\int_{AB} f(M) dl \geq 0.$$

4 (аддитивность). Если дуга AB составлена из двух дуг AC и CB , то

$$\int_{AB} f(M) dl = \int_{AC} f(M) dl + \int_{CB} f(M) dl,$$

причем интеграл слева существует тогда и только тогда, если существуют оба интеграла справа.

5 (оценка по модулю). Если $f(M)$ интегрируема на AB , то $|f(M)|$ тоже интегрируема и

$$\left| \int_{AB} f(M) dl \right| \leq \int_{AB} |f(M)| dl.$$

6 (теорема о среднем). Если $f(M)$ непрерывна на AB , то на этой дуге найдется такая точка M^* , что

$$\int_{AB} f(M) dl = f(M^*) L$$

(L — длина дуги AB).

7. Подчеркнем, наконец, еще раз, что

$$\int_{AB} f(M) dl = \int_{BA} f(M) dl,$$

т. е. что выбор направления на дуге AB не влияет на величину интеграла от скалярной функции $f(M)$ по этой дуге.

3. Некоторые применения криволинейных интегралов первого рода. Укажем некоторые типичные задачи, в которых удобно пользоваться криволинейными интегралами первого рода.

1) *Нахождение массы материальной кривой по ее плотности.* Материальной кривой будем называть кусочно-гладкую кривую, вдоль которой распределена некоторая масса. Линейной плотностью $\rho(M)$ материальной кривой в точке M называется предел, к которому стремится отношение массы $\Delta\mu$, находящейся на дуге MM' этой кривой, к длине дуги MM' , при условии, что длина этой дуги стремится к нулю. Иначе говоря, если l — длина дуги AM и $\mu(M)$ — масса этой дуги, то $\rho(M) = \frac{d\mu(l)}{dl}$. Отсюда ясно, что

масса μ_{AB} дуги AB выражается интегралом $\int_0^l \rho \, dl$, т. е. криволинейным интегралом

$$\int_{AB} \rho(M) \, dl$$

от плотности, взятым по кривой AB .

2) *Вычисление координат центра масс материальной кривой.* Пусть масса распределена вдоль кривой AB с плотностью $\rho(x, y)$ *). Разбив эту кривую на части длины Δl_i и выбрав на каждой из этих частей некоторую точку (x_i, y_i) , можно материальную кривую приближенно рассматривать как систему масс $\rho(x_i, y_i) \Delta l_i$, расположенных в точках (x_i, y_i) . Центр масс такой системы материальных точек имеет координаты

$$x_c = \frac{\sum_{i=1}^n x_i \rho(x_i, y_i) \Delta l_i}{\sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i) \Delta l_i}, \quad y_c = \frac{\sum_{i=1}^n y_i \rho(x_i, y_i) \Delta l_i}{\sum_{i=1}^n \rho(x_i, y_i) \Delta l_i}.$$

Эти выражения можно считать приближенными значениями координат x_c и y_c центра масс материальной кривой AB . Для получения точных значений этих координат следует перейти к пределу при $\max \Delta l_i \rightarrow 0$. В результате такого предельного перехода получаем

$$x_c = \frac{\int_{AB} x \rho(x, y) \, dl}{\int_{AB} \rho(x, y) \, dl}, \quad y_c = \frac{\int_{AB} y \rho(x, y) \, dl}{\int_{AB} \rho(x, y) \, dl}. \quad (4.12)$$

В частности, в случае однородной кривой $\rho = \text{const}$ имеем

$$x_c = \frac{\int_{AB} x \, dl}{\int_{AB} dl}, \quad y_c = \frac{\int_{AB} y \, dl}{\int_{AB} dl}. \quad (4.13)$$

3) *Вычисление моментов инерции материальной кривой.* Момент инерции системы точечных масс m_i относительно некоторой

*) Здесь и в последующих задачах нам естественно задавать точки кривой их декартовыми координатами x, y (см. п. 1).

прямой равен

$$\sum_{i=1}^n r_i^2 m_i,$$

где r_i — расстояние от i -й массы до этой прямой. В частности, моменты инерции такой системы масс, лежащих в плоскости xu , относительно осей x и u равны соответственно

$$I_x = \sum_{i=1}^n y_i^2 m_i \quad \text{и} \quad I_y = \sum_{i=1}^n x_i^2 m_i$$

(где (x_i, y_i) — координаты точечной массы m_i). Для получения моментов инерции относительно координатных осей материальной кривой AB , вдоль которой распределена масса с плотностью $\rho(x, y)$, нужно сделать такой же предельный переход, как и в предыдущей задаче. Тогда для моментов инерции кривой AB относительно координатных осей мы получим выражения

$$I_x = \int_{AB} y^2 \rho(x, y) dl, \quad I_y = \int_{AB} x^2 \rho(x, y) dl. \quad (4.14)$$

4) *Притяжение точечной массы материальной кривой.* Пусть снова AB — материальная кривая с плотностью $\rho(x, y)$ и m_0 — точечная масса, имеющая координаты (x_0, y_0) . Рассуждения, аналогичные проведенным выше, показывают, что кривая AB притягивает массу m_0 с силой, проекции которой на координатные оси равны соответственно

$$F_x = \gamma m_0 \int_{AB} \frac{\rho(x, y)(x - x_0)}{r^3} dl, \quad F_y = \gamma m_0 \int_{AB} \frac{\rho(x, y)(y - y_0)}{r^3} dl.$$

Здесь γ — постоянная тяготения и $r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$.

Если считать, что интегрирование вектора по некоторому параметру означает интегрирование каждой из его компонент (см. § 1 гл. 3), то эти две скалярные формулы можно заменить одной векторной: сила F , с которой материальная точка m_0 притягивается материальной кривой AB , равна

$$F = \gamma m_0 \int_{AB} \frac{\rho(x, y)}{r^3} \mathbf{r} dl, \quad (4.15)$$

где \mathbf{r} — вектор с компонентами $(x - x_0)$ и $(y - y_0)$.

4. Криволинейные интегралы первого рода в пространстве. Определение криволинейного интеграла первого рода, сформулированное выше для плоской кривой, дословно переносится на случай функции $f(M)$, заданной вдоль некоторой пространственной кривой,

Если эта кривая AB задана параметрическими уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t) \quad (t_0 \leq t \leq t_1),$$

то криволинейный интеграл первого рода, взятый вдоль этой кривой, сводится к определенному интегралу по формуле

$$\int_{AB} f(M) dl = \int_{t_0}^{t_1} f(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt.$$

Условия существования и основные свойства пространственных криволинейных интегралов вполне аналогичны тем, которые были сформулированы выше для плоского случая. Криволинейные интегралы первого рода в пространстве естественно возникают при рассмотрении таких задач, как вычисление массы пространственной кривой по заданной плотности, нахождение координат центра масс материальной пространственной кривой, ее моментов инерции и т. п. Соответствующие формулы читатель легко может получить с помощью рассуждений, аналогичных проведенным выше для плоского случая.

§ 2. Криволинейные интегралы второго рода

1. Постановка задачи. Работа силового поля. Введем теперь криволинейные интегралы другого типа — так называемые криволинейные интегралы второго рода.

Для того чтобы подойти к этому понятию, начнем с конкретной физической задачи. Рассмотрим плоское силовое поле, т. е. некоторую плоскую область, в каждой точке M которой задана сила $\mathbf{F}(M)$. Компоненты $F(M)$ по осям x и y обозначим $P(M)$ и $Q(M)$.

Определим работу этого силового поля при перемещении точки вдоль некоторой кривой AB .

Если сила \mathbf{F} постоянна (и по величине и по направлению), а путь AB прямолинеен, то соответствующая работа равна произведению величины этой силы на длину пути и на косинус угла между силой и перемещением, т. е. работа равна скалярному произведению

$$(\mathbf{F}, \overline{AB}).$$

Найдем теперь выражение для работы в общем случае, т. е. когда сила \mathbf{F} переменна, а путь криволинеен. Пусть AB — гладкая кривая, лежащая в той области, где задано силовое поле. Разобьем кривую AB на части точками

$$A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$$

и рассмотрим ломаную, вершинами которой служат точки M_i (рис. 4.3). Считая, что вдоль каждого звена $M_{i-1}M_i$ ломаной сила \mathbf{F} сохраняет постоянное значение, скажем, равное $\mathbf{F}(M_i)$, вычислим работу, отвечающую перемещению вдоль этой ломаной. Если (x_i, y_i) —

координаты точки M_i и

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1},$$

то работа, отвечающая перемещению вдоль отрезка $M_{i-1}M_i$, M_i , равна

$$(F(M_i), \overline{M_{i-1}M_i}) = P(M_i) \Delta x_i + Q(M_i) \Delta y_i,$$

а работа, отвечающая перемещению вдоль всей ломаной, равна

$$\sum_{i=1}^n (P(M_i) \Delta x_i + Q(M_i) \Delta y_i). \quad (4.16)$$

Эту сумму можно принять за приближенное значение работы, совершаемой силовым полем $F(M)$ вдоль кривой AB . Для получения точного выражения этой работы нужно в сумме (4.16) перейти к пределу, устремив максимум длин дуг $M_{i-1}M_i$ к нулю. Рассмотрим этот предельный переход в общем виде.

2. Определение криволинейного интеграла второго рода. Пусть AB — гладкая кривая и $F(M) = (P(M), Q(M))$ — вектор-функция, определенная на кривой AB . Разобьем эту кривую на части точками

$$A = M_0, M_1, \dots, M_n = B,$$

координаты которых обозначим соответственно $(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$. Рассмотрим сумму

$$T = \sum_{i=1}^n [P(M_i) \Delta x_i + Q(M_i) \Delta y_i], \quad (4.17)$$

где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_i = y_i - y_{i-1}$. Если при стремлении максимума длин дуг $M_{i-1}M_i$ к нулю эти суммы стремятся к некоторому конечному пределу, то этот предел называется *криволинейным интегралом второго рода от вектор-функции $F = (P, Q)$* и обозначается *) символом

$$\int_{AB} P(M) dx + Q(M) dy. \quad (4.18)$$

*) Вместо $P(M)$ и $Q(M)$ мы будем иногда писать $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, понимая под x и y декартовы координаты переменной точки M ; в тех случаях, когда это не может вызвать недоразумений, мы будем функции $P(M)$ и $Q(M)$ обозначать просто P и Q , а криволинейный интеграл (4.18) писать в виде $\int_{AB} P dx + Q dy$.

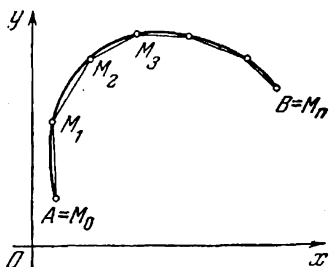


Рис. 4.3.

Этот интеграл представляет собой, очевидно, сумму двух интегралов

$$\int_{AB} P(M) dx \quad \text{и} \quad \int_{AB} Q(M) dy,$$

отвечающих векторам $(P, 0)$ и $(0, Q)$, на которые разлагается вектор (P, Q) .

Замечание. Понятие криволинейного интеграла второго рода не следует смешивать с тем «покомпонентным» интегрированием векторной величины по скалярному аргументу, с которым мы встречались выше (см. п. 5 § 1 гл. 3 и конец п. 5 § 1 этой главы), например при вычислении силы притяжения материальной точки материальной кривой.

3. Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода. Криволинейный интеграл второго рода легко сводится к интегралу первого рода, рассмотренному в § 1. Действительно, справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. Пусть AB — гладкая кривая, заданная уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad (4.19)$$

и $F = (P, Q)$ — векторная функция, определенная и ограниченная*) на этой кривой. Тогда имеет место равенство

$$\int_{AB} P dx + Q dy = \int_{AB} (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) dl, \quad (4.20)$$

где $\alpha = \alpha(M)$ — угол между касательной к кривой AB в точке M и положительным направлением оси x . При этом стоящий слева интеграл существует, если существует криволинейный интеграл первого рода, стоящий в равенстве (4.20) справа.

Доказательство. Докажем равенство

$$\int_{AB} P dx = \int_{AB} P \cos \alpha dl.$$

Равенство

$$\int_{AB} Q dx = \int_{AB} Q \sin \alpha dl$$

доказывается так же. Интеграл

$$\int_{AB} P dx$$

*) Вектор-функция (P, Q) называется ограниченной, если P и Q — ограниченные функции.

представляет собой по определению предел сумм вида

$$T = \sum_{i=1}^n P(M_i) \Delta x_i.$$

Сравним эту сумму с интегральной суммой

$$T^* = \sum_{i=1}^n P(M_i) \cos \alpha(M_i) \Delta l_i,$$

отвечающей (при том же самом разбиении кривой AB) интегралу

$$\int_{AB} P \cos \alpha \, dl.$$

Если $x = x(l)$, то в каждой точке M кривой AB

$$\frac{dx}{dl} = \cos \alpha(M) \quad (4.21)$$

и, следовательно,

$$\Delta x_i = \int_{l_{i-1}}^{l_i} \cos \alpha \, dl.$$

Воспользовавшись теоремой о среднем, получаем

$$\Delta x_i = \cos(M_i^*) \Delta l_i,$$

где M_i^* — некоторая точка дуги $M_{i-1}M_i$. Следовательно,

$$\begin{aligned} |T - T^*| &= \left| \sum_{i=1}^n P(M_i) [\cos \alpha(M_i) - \cos \alpha(M_i^*)] \Delta l_i \right| \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^n |P(M_i)| \cdot |\cos \alpha(M_i) - \cos \alpha(M_i^*)| \Delta l_i. \end{aligned}$$

Вдоль гладкой кривой функция $\cos \alpha(M)$ непрерывна, а значит (поскольку эта кривая представляет собой замкнутое ограниченное множество), и равномерно непрерывна. Следовательно, каково бы ни было $\varepsilon > 0$, для каждого достаточно мелкого разбиения кривой AB имеет место неравенство

$$|\cos \alpha(M_i) - \cos \alpha(M_i^*)| < \varepsilon.$$

Тогда

$$|T - T^*| \leq C\varepsilon \sum_{i=1}^n \Delta l_i = C\varepsilon L,$$

где $C = \sup |P|$, а L — длина кривой AB . Отсюда следует, что если

интегральные суммы T^* имеют предел, то суммы T стремятся к этому же пределу. Тем самым теорема доказана.

Замечание. Выражение $P \cos \alpha + Q \sin \alpha$ представляет собой скалярное произведение (F, τ) вектора $F = (P, Q)$ на единичный вектор $\tau = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, касательный к кривой AB , т. е. проекцию вектора $F = (P, Q)$ на касательную к AB . Обозначив эту проекцию символом F_τ и воспользовавшись равенством (4.20), мы можем записать криволинейный интеграл (4.18) в виде

$$\int_{AB} F_\tau dl. \quad (4.22)$$

Этой краткой записью мы будем часто пользоваться ниже, особенно в гл. 6. Иногда также, особенно в физической литературе, этот интеграл пишут в виде

$$\int_{AB} (F, dl), \quad (4.23)$$

понимая под dl бесконечно малый вектор с компонентами

$$dx = dl \cos \alpha \quad \text{и} \quad dy = dl \sin \alpha.$$

4. Вычисление криволинейного интеграла второго рода. Из сопоставления теорем 4.1 и 4.2 сразу вытекает следующая

Теорема 4.3. Пусть AB — гладкая кривая, заданная уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (4.24)$$

и пусть $F = (P, Q)$ — вектор-функция, заданная на этой кривой. Тогда

$$\int_{AB} P dx + Q dy = \int_{t_0}^{t_1} [P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)] dt, \quad (4.25)$$

и интеграл слева существует, если существует определенный интеграл, стоящий справа; при этом t_0 — значение параметра t , отвечающее точке A , а t_1 — значение, отвечающее точке B .

Теоремы 4.1 — 4.3 очевидным образом остаются справедливыми, если кривая AB не гладкая, а лишь кусочно-гладкая.

Рассмотрим важнейшие частные случаи формулы (4.25).

Если кривая AB задана явным уравнением

$$y = y(x), \quad (4.26)$$

где x пробегает отрезок $[a, b]$, то формула (4.25), сводящая криволинейный интеграл второго рода к определенному, принимает вид

$$\int_{AB} P dx + Q dy = \int_a^b [P(x, y(x)) + Q(x, y(x)) y'(x)] dx \quad (4.27)$$

(где $x = a$ отвечает начальной точке A кривой, а $x = b$ — ее конечной точке B). Если, в частности, кривая AB — отрезок горизонтальной прямой $y = y_0$, то вдоль него $y' \equiv 0$ и интеграл

$$\int_{AB} P dx + Q dy$$

вдоль такого отрезка сводится просто к интегралу

$$\int_a^b P(x, y_0) dx.$$

Аналогично для кривой, заданной уравнением

$$x = x(y), \quad (4.28)$$

где y пробегает некоторый отрезок $[c, d]$, имеем

$$\int_{AB} P dx + Q dy = \int_c^d [P(x(y), y) x' + Q(x(y), y)] dy \quad (4.29)$$

В частности, если AB — отрезок вертикальной прямой $x = x_0$, то $x' \equiv 0$ и интеграл (4.29) сводится к

$$\int_{AB} Q(x_0, y) dy. \quad (4.30)$$

Примеры. 1. Вычислить интеграл

$$\int_{AB} x^2 dx + xy dy \quad (4.31)$$

а) вдоль прямолинейного отрезка, идущего из точки $(1, 0)$ в точку $(0, 1)$,

б) вдоль четверти окружности $x = \cos t$, $y = \sin t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$), соединяющей те же точки (рис. 4.4).

Решение.

$$\begin{aligned} \text{а) } \int_{AB} x^2 dx + xy dy &= \int_1^0 (x^2 - x(1-x)) dx = \\ &= \int_1^0 (2x^2 - x) dx = -\frac{1}{6}; \end{aligned}$$

$$\text{б) } \int_{AB} x^2 dx + xy dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2 t \sin t + \cos^2 t \sin t) dt = 0.$$

2. Вычислить интеграл

$$\int_{AB} 3x^2y dx + (x^3 + 1) dy \quad (4.32)$$

а) вдоль прямолинейного отрезка, идущего из точки $(0, 0)$ в точку $(1, 1)$,

б) вдоль дуги параболы $y = x^2$, соединяющей те же точки,

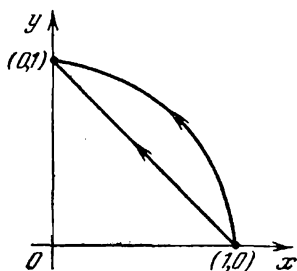


Рис. 4.4.

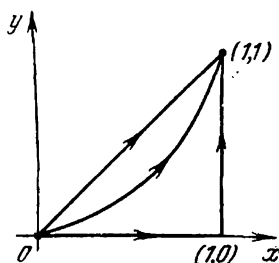


Рис. 4.5.

в) вдоль ломаной, проходящей через точки $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ (рис. 4.5).

Решение.

$$\text{а) } \int_{AB} 3x^2y dx + (x^3 + 1) dy = \int_0^1 (4x^3 + 1) dx = 2;$$

$$\text{б) } \int_{AB} 3x^2y dx + (x^3 + 1) dy = \int_0^1 (5x^4 + 2x) dx = 2;$$

$$\begin{aligned} \text{в) } \int_{AB} 3x^2y dx + (x^3 + 1) dy &= \\ &= \int_{(0,0)}^{(1,0)} 3x^2y dx + \int_{(1,0)}^{(1,1)} (x^3 + 1) dy = \int_0^1 2 dy = 2. \end{aligned}$$

Замечание. Читатель, видимо, обратил внимание на то, что во втором примере мы, взяв три различных пути (соединяющих одни и те же точки), получили три одинаковых результата. Это обстоятельство не случайно. Причину его мы разъясним в § 4.

5. Зависимость криволинейного интеграла второго рода от ориентации кривой. Из определения криволинейного интеграла

$$\int_{AB} P dx + Q dy \quad (4.33)$$

непосредственно следует, что в нем постоянный множитель можно выносить за знак интеграла, что интеграл от суммы двух векторных функций равен сумме интегралов от слагаемых и т. д. Подчеркнем следующее важное свойство интеграла (4.33): криволинейный интеграл второго рода в отличие от интеграла первого рода, определенного в § 1, зависит от ориентации кривой AB , по которой этот интеграл берется, а именно, при изменении ориентации этой кривой интеграл (4.33) меняет знак:

$$\int_{BA} P dx + Q dy = - \int_{AB} P dx + Q dy. \quad (4.34)$$

Действительно, изменив направление обхода кривой AB , мы заменим тем самым Δx_i и Δy_i в сумме (4.17) на $-\Delta x_i$ и $-\Delta y_i$ соответственно. При этом изменят знак интегральные суммы (4.17), а следовательно, и их предел.

Это свойство криволинейного интеграла второго рода вполне соответствует физической интерпретации такого интеграла, как работа силового поля вдоль некоторого пути: при изменении направления движения по кривой работа силового поля вдоль этой кривой меняет знак на противоположный.

6. Криволинейные интегралы вдоль самопересекающихся и замкнутых путей. С точки зрения возможных приложений теории криволинейных интегралов целесообразно не исключать из рассмотрения пути интегрирования, которые имеют самопересечения. Иначе говоря, если кривая задана уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b),$$

то мы не исключаем того, что существуют два различных значения t_1 и t_2 параметра t , для которых

$$x(t_1) = x(t_2) \quad \text{и} \quad y(t_1) = y(t_2).$$

При этом, однако, когда речь идет об интегралах второго рода, нужно учитывать, что задать путь интегрирования это значит не просто задать множество точек, но и определенное направление обхода. Для кривых с самопересечениями направление обхода не определяется

заданием начальной и конечной точек. Например, кривые, изображенные на рис. 4.6, *а* и *б*, нужно рассматривать как две различные кривые. Сказанное относится не только к плоским, но и к пространственным кривым.

Часто приходится рассматривать криволинейные интегралы, взятые по тому или иному замкнутому контуру. При этом под замкнутым контуром (на плоскости) мы понимаем такую кривую

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b),$$

что

$$x(a) = x(b) \quad \text{и} \quad y(a) = y(b).$$

Не исключается, что этот контур имеет еще и точки самопересечения, т. е. что, кроме $t = a$ и $t = b$, есть и другие различные между собой значения параметра, которым отвечают одинаковые значения x и y .

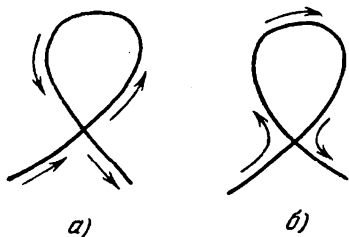


Рис. 4.6.

Если замкнутый контур не имеет точек самопересечения, то для него можно указать два и только два направления обхода (ориентаций): против часовой стрелки (положительная ориентация) и по часовой стрелке (отрицательная ориентация). Если рассматривается интеграл второго рода

$$\int_C P dx + Q dy$$

вдоль такого контура, то его значения, отвечающие двум различным ориентациям контура C , равны между собой по абсолютной величине и противоположны по знаку. Мы будем, как правило, рассматривая замкнутый контур, считать его ориентированным положительно, а криволинейный интеграл второго рода по отрицательно ориентированному контуру заменять интегралом, взятым в положительном направлении, но со знаком минус перед интегралом.

Криволинейный интеграл по замкнутому контуру C часто обозначают символом

$$\oint_C P dx + Q dy.$$

7. Криволинейные интегралы второго рода вдоль пространственных кривых. Выше мы рассматривали криволинейные интегралы от векторных функций вдоль плоских кривых. Все сказанное о них более или менее автоматически переносится на пространственный случай. Пусть AB — гладкая пространственная кривая и $F = (P, Q, R)$ — непрерывная вектор-функция, заданная вдоль этой

кривой. Разбив AB на части точками

$$A = M_0, M_1, \dots, M_n = B$$

с координатами (x_i, y_i, z_i) , $i = 1, 2, \dots, n$, рассмотрим сумму

$$\sum_{i=1}^n \{P(M_i) \Delta x_i + Q(M_i) \Delta y_i + R(M_i) \Delta z_i\},$$

где

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}, \quad \Delta y_i = y_i - y_{i-1}, \quad \Delta z_i = z_i - z_{i-1}.$$

Предел этих сумм мы назовем *криволинейным интегралом второго рода от вектор-функции $F = (P, Q, R)$ вдоль пространственной кривой AB* и обозначим

$$\int_{AB} P(M) dx + Q(M) dy + R(M) dz, \quad (4.35)$$

или *)

$$\int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

С помощью рассуждений, дословно повторяющих те, которые были проведены для плоского случая, устанавливается формула, сводящая интеграл (4.35) к криволинейному интегралу первого рода

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \int_{AB} [P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma] dl$$

(здесь α, β, γ — углы между касательной к AB и осями координат x, y и z).

Если гладкая кривая AB задана уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad z = \chi(t),$$

причем точке A отвечает $t = t_0$, а точке B отвечает $t = t_1$, то имеет место равенство

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = \int_{t_0}^{t_1} [P(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \psi'(t) + R(\varphi(t), \psi(t), \chi(t)) \chi'(t)] dt, \quad (4.36)$$

сводящее криволинейный интеграл второго рода к определенному интегралу.

Так как выражение $P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma$ — это проекция вектора $F = (P, Q, R)$ на направление касательной к AB , то,

*) Часто для краткости мы будем писать его просто в виде

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz.$$

обозначив эту проекцию F_τ , мы можем, как и в плоском случае, записать криволинейный интеграл (4.35) в виде

$$\int_{AB} F_\tau dl.$$

Все свойства плоских криволинейных интегралов, изложенные выше, автоматически переносятся на пространственный случай. В частности, криволинейный интеграл (4.35) меняет знак при изменении ориентации кривой, т. е.

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = - \int_{BA} P dx + Q dy + R dz.$$

В соответствии с этим в определенном интеграле, стоящем в формуле (4.36) справа, нижний предел t_0 — это значение параметра, отвечающее начальной точке A кривой AB , а верхний предел t_1 — значение параметра, отвечающее конечной точке B . (Независимо от того, какое из чисел t_0 , t_1 больше, а какое меньше.)

§ 3. Формула Грина

В этом параграфе мы выведем так называемую формулу Грина*), связывающую криволинейный интеграл

$$\oint_C P dx + Q dy,$$

взятый по границе некоторой области, с двойным интегралом по самой этой области. Эта формула широко применяется как в самом анализе, так и в его приложениях. Некоторые из этих применений будут рассмотрены ниже.

1. Вывод формулы Грина. Рассмотрим сначала область G , имеющую простой вид: снизу и сверху она ограничена кусочно-гладкими кривыми

$$y = y_1(x), \quad y = y_2(x), \quad (4.37)$$

а слева и справа — вертикальными отрезками

$$x = a, \quad x = b \quad (4.38)$$

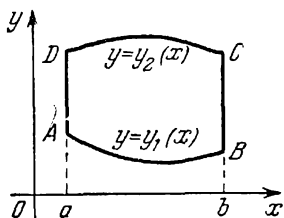


Рис. 4.7.

(рис. 4.7). Границу $ABCD A$ области мы будем считать ориентированной положительно, т. е. будем считать принятым на ней то направление обхода, при котором сама область G остается все время

*) Джордж Грин (1793—1841) — английский математик, автор ряда исследований по математической физике.

слева. Пусть функция $P(x, y)$ определена и непрерывна вместе со своей частной производной $\frac{\partial P}{\partial y}$ во всей области G , включая ее границу.

Рассмотрим двойной интеграл $\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$ и постараемся преобразовать его в криволинейный. Для этого сведем его к повторному интегралу и выполним интегрирование по y . Получим

$$\begin{aligned} \iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P}{\partial y} dy = \\ &= \int_a^b [P(x, y_2(x)) - P(x, y_1(x))] dx = \\ &= \int_a^b P(x, y_2(x)) dx - \int_a^b P(x, y_1(x)) dx. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Каждый из этих двух определенных интегралов можно рассматривать как криволинейный интеграл, взятый по соответствующей дуге (см. (4.27)), а именно:

$$\int_a^b P(x, y_2(x)) dx = \int_{DC} P(x, y) dx = - \int_{CD} P(x, y) dx$$

и

$$- \int_a^b P(x, y_1(x)) dx = - \int_{AB} P(x, y) dx.$$

Добавив к правой части равенства (4.39) еще два криволинейных интеграла:

$$- \int_{BC} P(x, y) dx \quad \text{и} \quad - \int_{DA} P(x, y) dx,$$

каждый из которых равен нулю (как интеграл по dx вдоль вертикального отрезка), получим равенство

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{AB} P dx - \int_{BC} P dx - \int_{CD} P dx - \int_{DA} P dx,$$

т. е.

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{ABCD A} P dx. \quad (4.40)$$

Мы доказали это равенство для области, ограниченной линиями (4.37) и (4.38). Но формулу (4.40) можно распространить и на

любую область, которую можно разбить на конечное число частей такого вида. Действительно, пусть область G с границей L разбита на части G_i , $i = 1, 2, \dots, n$, для каждой из которых имеет место равенство

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{L_i} P dx$$

(L_i — граница области G_i). Просуммировав эти равенства по i от 1 до n , мы слева получим двойной интеграл, взятый по всей области G ,

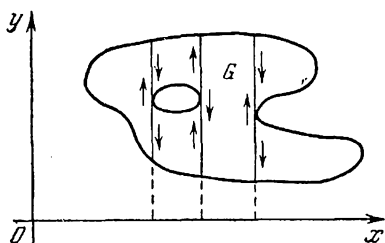


Рис. 4.8.

а справа получится сумма криволинейных интегралов, взятых по контурам L_i . Каждый из этих контуров состоит из линий, ограничивающих область G , и из вспомогательных линий, с помощью которых область G разбивается на части. Но каждая из этих вспомогательных линий входит в состав ровно двух контуров L_i , следовательно, по каждой из них криволинейный интеграл будет взят дважды,

причем в двух противоположных направлениях (рис. 4.8). Поэтому при суммировании интегралов вида

$$\int_{L_i} P dx$$

интегралы по всем вспомогательным линиям взаимно уничтожаются и останется лишь интеграл по границе области G , т. е. мы получим равенство

$$\iint_G \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_L P dx, \quad (4.41)$$

где L — положительно ориентированная *) граница области G .

Поменяем теперь x и y ролями и рассмотрим область, ограниченную горизонтальными отрезками

$$y = c, \quad y = d \quad (4.42)$$

и линиями

$$x = x_1(y), \quad x = x_2(y) \quad (4.43)$$

(рис. 4.9). Пусть функция $Q(x, y)$ и ее производная $\frac{\partial Q}{\partial x}$ опреде-

*) То есть на L выбрано то направление обхода, при котором область G остается слева.

лены и непрерывны в области G (включая границу). Записав двойной интеграл

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

в виде

$$\int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx$$

и проделав те же выкладки, что и при выводе формулы (4.40), получим равенство

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_{ABCD} Q dy,$$

аналогичное (4.40) (с той лишь разницей, что справа нет знака минуса). Рассуждения, ничем не отличающиеся от изложенных выше, показывают, что равенство

$$\iint_G \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_L Q dy \quad (4.44)$$

верно не только для областей, ограниченных линиями (4.42) и (4.43), но и для конечных объединений таких областей.

Будем, для краткости, называть область G *простой*, если она допускает разбиение как на части с границами вида (4.37), (4.38), так и на части с границами вида (4.42), (4.43). Для простой области справедливы, в силу доказанного, как равенство (4.41), так и равенство (4.44). Вычтя (4.41) из (4.44), получим формулу

$$\int_L P dx + Q dy = \iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \quad (4.45)$$

где криволинейный интеграл берется по границе L области G в положительном направлении. Это и есть *формула Грина*, которую мы хотели установить. Итак, мы получили следующий результат:

Теорема 4.4. Пусть G — простая область и пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой области G . Тогда имеет место формула Грина (4.45).

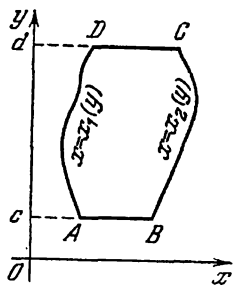


Рис. 4.9.

З а м е ч а н и е 1. Если граница L области G состоит из нескольких отдельных контуров, то $\int_L P dx + Q dy$ означает сумму интегралов, взятых по составляющим L контурам, причем по каждому из них берется то направление обхода, при котором сама область G остается слева (рис. 4.10).

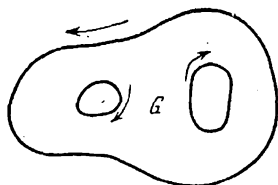


Рис. 4.10.

З а м е ч а н и е 2. При выводе формулы Грина мы предполагали, что P и Q и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны не только внутри области, но и на ее границе. Однако относительно производных $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ достаточно предположить, что они непрерывны и ограничены внутри области G . Действительно, рассмотрим снова область G , ограниченную кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ и вертикальными отрезками $x = a$, $x = b$ (рис. 4.7). Пусть $\delta > 0$ и пусть G_δ — область, ограниченная сверху и снизу кривыми $y = y_2(x) - \delta$ и $y = y_1(x) + \delta$ соответственно, а слева и справа вертикальными отрезками $x = a + \delta$ и $x = b - \delta$. Область G_δ при всяком $\delta > 0$ лежит вместе с границей внутри G , следовательно, для G_δ выполнены те условия, при которых равенство (4.41) было доказано. Таким образом,

$$\int_{G_\delta} \int \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{L_\delta} P dx \quad (4.46)$$

(L_δ — граница области G_δ). Так как площадь области G_δ отличается от площади области G не больше чем на $l\delta$, где l — длина границы L области G , то интеграл, стоящий в равенстве (4.46) слева, отличается от

$$\int_G \int \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

не более чем на $l\delta M$, где M — верхняя грань $\left| \frac{\partial P}{\partial y} \right|$ внутри G . Далее, функция $P(x, y)$ непрерывна, а следовательно, и равномерно непрерывна и ограничена в замкнутой области G . Отсюда сразу следует, что

$$\int_{L_\delta} P dx \rightarrow \int_L P dx \text{ при } \delta \rightarrow 0.$$

Таким образом, в равенстве (4.46) можно сделать предельный переход при $\delta \rightarrow 0$, и мы получаем, что равенство

$$\int_G \int \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_L P dx$$

верно для области, изображенной на рис. 4.7, а следовательно, и для любой простой области. Аналогично устанавливается и равенство

$$\int_a \int \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \int_L Q dy.$$

Воспользовавшись понятием несобственного двойного интеграла *), можно было бы требование ограниченности производных $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в области G заменить требованием существования интеграла $\int_G \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$ (хотя бы как несобственного интеграла).

Замечание 3. Мы доказали формулу Грина для областей, которые мы условились называть простыми. К ним заведомо относятся все многоугольные фигуры. С помощью аппроксимации криволинейных областей многоугольными нетрудно получить, что формула Грина верна и для любой области, ограниченной конечным числом кусочно-гладких линий.

2. Вычисление площади с помощью формулы Грина. Из формулы Грина вытекают некоторые полезные формулы для вычисления площади области.

Пусть G — некоторая простая область с границей L и S — площадь этой области. Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int_L x dy.$$

Применив к нему формулу Грина, получим

$$\int_L x dy = \int_G \int dx dy = S.$$

Аналогично получается формула

$$S = - \int_L y dx,$$

а также следующая, более симметричная, формула **) для

*) О несобственных интегралах см. гл. 9.

**) Можно, конечно, получить бесконечно много различных формул вида

$$S = \int_L P dx + Q dy.$$

Для этого достаточно в качестве P и Q брать любые функции, удовлетворяющие условию $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$.

площади:

$$S = \frac{1}{2} \int_L x dy - y dx. \quad (4.47)$$

Пример. Вычислить площадь области, ограниченной астрондой

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t.$$

Решение. Применяя формулу (4.47), получаем

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_L x dy - y dx = \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 t \cos^2 t [\cos^2 t + \sin^2 t] dt = \\ &= \frac{3}{8} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 2t dt = \frac{3}{8} \pi a^2. \end{aligned}$$

§ 4. Условия независимости криволинейного интеграла от пути. Интегрирование полных дифференциалов

1. Постановка вопроса. В § 2, рассматривая примеры криволинейных интегралов, мы обратили внимание на то, что в некоторых случаях криволинейный интеграл

$$\int_{AB} P dx + Q dy$$

зависит не от самой кривой AB , а только от начальной и конечной точек, т. е. принимает одинаковые значения для всех кривых, соединяющих фиксированные точки A и B . Сейчас мы установим условия, при которых такая независимость интеграла от выбора пути имеет место. С этим вопросом связана другая важная задача, которую мы здесь также рассмотрим: нахождение функции двух переменных по ее полному дифференциалу.

2. Случай односвязной области. Напомним (см. гл. 3), что плоская область G называется односвязной, если, каков бы ни был замкнутый контур L , лежащий внутри этой области, ограниченная этим контуром (конечная) часть плоскости целиком принадлежит G .

Теорема 4.5. Пусть функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ определены и непрерывны вместе со своими частными производными $\frac{\partial P}{\partial y}$

и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ в замкнутой ограниченной односвязной области G . Тогда следующие четыре условия равносильны между собой (т. е. выполнение любого одного из них влечет за собой выполнение остальных трех):

1. Интеграл

$$\oint P dx + Q dy,$$

взятый по любому замкнутому пути, лежащему в G , равен нулю.

2. Интеграл

$$\int_{AB} P dx + Q dy$$

не зависит от выбора пути интегрирования.

3. Выражение $P dx + Q dy$ представляет собой полный дифференциал некоторой однозначной функции, определенной в области G .

4. В области G всюду

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \quad (4.48)$$

Доказательство этой теоремы мы проведем по следующей логической схеме:

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1,$$

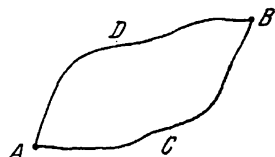


Рис. 4.11.

т. е. покажем, что из первого условия следует второе, из второго — третье, из третьего — четвертое, а из четвертого — снова первое. Тем самым будет доказана равносильность всех четырех условий.

а) $1 \rightarrow 2$. Рассмотрим в области G два произвольных пути, соединяющих точки A и B , скажем, ACB и ADB (рис. 4.11). В сумме они составляют замкнутый путь $ACBDA$. По условию интеграл, взятый по любому замкнутому пути, равен нулю, т. е.

$$\int_{ACBDA} P dx + Q dy = 0.$$

Но

$$\begin{aligned} \int_{ACBDA} P dx + Q dy &= \int_{ACB} P dx + Q dy + \int_{BDA} P dx + Q dy = \\ &= \int_{ACB} P dx + Q dy - \int_{ADB} P dx + Q dy. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\int_{ACB} P dx + Q dy = \int_{ADB} P dx + Q dy.$$

Утверждение «1 → 2» доказано *).

б) 2 → 3. Пусть интеграл $\int_{AB} P dx + Q dy$ не зависит от пути интегрирования; тогда, если точку A зафиксировать, то этот интеграл будет однозначной функцией координат x и y точки B :

$$\int_{AB} P dx + Q dy = U(x, y).$$

Покажем, что эта функция $U(x, y)$ дифференцируема и что

$$dU = P dx + Q dy.$$

Для этого достаточно показать, что производные $\frac{\partial U}{\partial x}$ и $\frac{\partial U}{\partial y}$ существуют и равны $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ соответственно **).

Вычислим

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \lim_{\Delta x} \frac{U(x + \Delta x, y) - U(x, y)}{\Delta x}.$$

Величина $\Delta U = U(x + \Delta x, y) - U(x, y)$ представляет собой интеграл от $P dx + Q dy$, взятый по пути, соединяющему точки (x, y) и $(x + \Delta x, y)$. Так как, по условию, этот интеграл не зависит от вида кривой, то можно считать, что путь совпадает с

*) Если кривые ACB и ADB имеют общие точки, отличные от A и B (рис. 4.12), то небольшое усложнение проведенных рассуждений приводит к тому же самому результату.

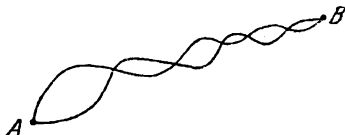


Рис. 4.12.

**) Как известно, функция, имеющая непрерывные частные производные, дифференцируема.

горизонтальным отрезком BB_1 (рис. 4.13). Таким образом,

$$\frac{\Delta U}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_{BB_1} P dx + Q dy = \frac{1}{\Delta x} \int_{x, y}^{x+\Delta x, y} P(x, y) dx = P(x + \theta \Delta x, y).$$

(В последнем равенстве мы использовали теорему о среднем для интегралов.) Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} P(x + \theta \Delta x, y) = \\ &= P(x, y), \end{aligned}$$

поскольку $P(x, y)$ непрерывна.

Аналогично доказывается, что $\frac{\partial U}{\partial y} = Q(x, y)$.

в) $3 \rightarrow 4$. Если

$$P dx + Q dy$$

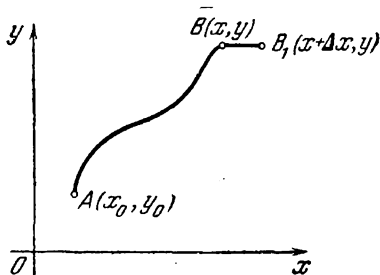


Рис. 4.13.

— полный дифференциал некоторой функции $U(x, y)$, то

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q.$$

Но тогда по теореме о смешанных производных

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}.$$

г) $4 \rightarrow 1$. Пусть равенство $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ выполнено и пусть L — произвольный контур, лежащий в области G . Так как эта область по условию односвязна, то ограниченная контуром L часть плоскости принадлежит области G , в которой определены функции P, Q и их производные. Поэтому криволинейный интеграл

$$\int_L P dx + Q dy$$

по формуле Грина можно преобразовать в двойной:

$$\int_L P dx + Q dy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

где D — область, ограниченная контуром L . В силу (4.48), интеграл справа равен нулю. Следовательно,

$$\int_L P dx + Q dy = 0$$

для всякого замкнутого контура L , лежащего внутри G . Доказательство теоремы закончено.

3. Нахождение функции по ее полному дифференциалу. В процессе доказательства теоремы 4.5 мы получили решение следующей задачи, с которой нам еще придется встречаться (см. п. 4 § 2 гл. 6): найти функцию, полный дифференциал которой есть заданное выражение

$$P dx + Q dy.$$

Ограничившись случаем, когда функции P и Q и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в некоторой односвязной области G , мы доказали (теорема 4.5), что $P dx + Q dy$ служит полным дифференциалом некоторой функции в том и только том случае, когда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Далее, мы показали (там же), что если это равенство выполнено, то условию

$$dU = P dx + Q dy \quad (4.49)$$

удовлетворяет функция

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy.$$

Наконец, из формулы конечных приращений (см. вып. 1, гл. 8, § 9) следует, что две функции, имеющие одинаковые полные дифференциалы, отличаются друг от друга лишь на постоянное слагаемое. Следовательно, формула

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy + C \quad (4.50)$$

(где (x_0, y_0) — фиксированная точка, а C — произвольная постоянная) содержит все функции, удовлетворяющие условию (4.49). Так как в равенстве (4.50) интеграл не зависит от пути, то мы можем выбрать линию, соединяющую точки (x_0, y_0) и (x, y) , по своему усмотрению. Удобно, например, за путь интегрирования взять ломаную, составленную из горизонтального и вертикального отрезков *) (рис. 4.14). При этом выборе пути равенство (4.50) принимает вид

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y_0)} P dx + \int_{(x, y_0)}^{(x, y)} Q dy + C.$$

*) Если эти отрезки принадлежат G .

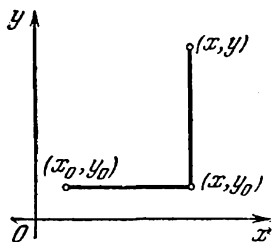


Рис. 4.14.

Начальную точку (x_0, y_0) можно выбрать произвольно (в пределах той области, в которой определены функции P и Q). Изменение этой точки равносильно, очевидно, изменению аддитивной постоянной C .

Практически при нахождении функции по ее полному дифференциалу удобно поступить следующим образом. Если

$$\frac{\partial U}{\partial x} = P, \quad \frac{\partial U}{\partial y} = Q, \quad (4.51)$$

то, интегрируя первое из этих равенств по x и рассматривая в нем y как параметр, получим

$$U(x, y) = \int P dx + f_1, \quad (4.52)$$

где f_1 не зависит от x (но, вообще говоря, зависит от y , т. е. $f_1 = f_1(y)$). Далее, интегрируя второе из равенств (4.51) по y и рассматривая в нем x как параметр, получим

$$U(x, y) = \int Q dy + f_2, \quad (4.53)$$

где $f_2 = f_2(x)$; если мы сможем подобрать функции $f_1(y)$ и $f_2(x)$ так, чтобы правые части равенств (4.52) и (4.53) совпали, то полученная таким образом функция переменных x и y и будет той функцией, полный дифференциал которой совпадает с $P dx + Q dy$.

Пример. Пусть

$$dU = (2xy + 1) dx + (x^2 + 3y^2) dy.$$

Интегрируя коэффициент при dx по x , имеем

$$\int (2xy + 1) dx = x^2 y + x + f_1(y), \quad (4.54)$$

а интегрирование коэффициента при dy по y дает

$$\int (x^2 + 3y^2) dy = x^2 y + y^3 + f_2(x). \quad (4.55)$$

Правые части равенств (4.54) и (4.55) совпадут, если мы положим

$$f_1(y) = y^3 + C, \quad f_2(x) = x + C.$$

Таким образом, получаем, что

$$U = x^2 y + x + y^3 + C.$$

4. Криволинейные интегралы в многосвязной области. На последнем шаге доказательства теоремы 4.5, т. е. там, где мы из условия

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (4.56)$$

вывели справедливость равенства

$$\oint_L P dx + Q dy = 0 \quad (4.57)$$

для любого замкнутого контура, была существенно использована односвязность области G .

Рассмотрим простой пример, показывающий, что в многосвязной области из условия (4.56) равенство (4.57), вообще говоря, не следует. Пусть

$$J = \int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy. \quad (4.58)$$

Подынтегральное выражение не имеет смысла в точке $(0, 0)$, поэтому мы исключим из рассмотрения некоторую окрестность начала координат. В оставшейся части плоскости (это будет уже многосвязная область) коэффициенты при dx и dy непрерывны, имеют непрерывные частные производные и

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{x^2 + y^2} \right).$$

Однако интеграл (4.58), взятый по некоторому замкнутому пути, не равен, вообще говоря, нулю: например, если C — окружность, заданная уравнениями

$$x = \cos t, \quad y = \sin t,$$

то

$$J = \int_C \frac{-y}{x^2 + y^2} dx + \frac{x}{x^2 + y^2} dy = \int_0^{2\pi} dt = 2\pi. \quad (4.59)$$

Выясним, какими свойствами обладает интеграл

$$\int P dx + Q dy,$$

если функции P и Q удовлетворяют условию *)

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

но область G , в которой они заданы, многосвязна. Рассмотрим для определенности область G , изображенную на рис. 4.15, т. е.

*) Мы по-прежнему предполагаем, что P , Q , $\frac{\partial P}{\partial y}$ и $\frac{\partial Q}{\partial x}$ непрерывны в замкнутой ограниченной области G .

имеющую три «лакуны». Рассмотрим сначала некоторый замкнутый контур L , который не охватывает ни одной из этих лакун. Тогда к интегралу, взятому по такому контуру, можно применить формулу Грина, и мы получим, что этот интеграл равен нулю.

Пусть теперь L_1 — контур, охватывающий одну из лакун. Здесь формула Грина уже неприменима и интеграл по такому контуру, вообще говоря, нулю не равен (см. приведенный выше пример). Покажем, что *величина этого интеграла не зависит от выбора контура, охватывающего данную лакуну*. Пусть L_1 и L'_1 — два таких контура. Соединив их вспомогательной линией (ab) , получим контур

$$(ab) + L_1 + (ba) - L'_1 \quad (4.60)$$

(знак минус перед L'_1 означает, что этот контур обходится в отрицательном направлении). Этот контур не охватывает ни одной из лакун, следовательно, интеграл по нему равен нулю. Но интегралы по (ab) и (ba) равны по величине и противоположны по знаку. Таким образом, получаем

$$\int_{L_1} P dx + Q dy + \int_{-L'_1} P dx + Q dy = 0,$$

т. е.

$$\int_{L_1} P dx + Q dy = \int_{L'_1} P dx + Q dy.$$

Таким образом, каждой из лакун в области G отвечает некоторое определенное число — значение криволинейного интеграла $\oint P dx + Q dy$, взятого по любому из замкнутых контуров, охватывающих эту лакуну. Оно называется *циклической постоянной* этой лакуны. Отсюда легко получается, что значение интеграла $\oint P dx + Q dy$ по произвольному замкнутому контуру записывается так. Пусть $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — циклические постоянные лакун, имеющих в области G , и пусть контур L_1 обходит первую лакуну k_1 раз, вторую k_2 раз, а третью k_3 раз (при этом под каждым из k_i понимается алгебраическая сумма ориентированных обходов, т. е.

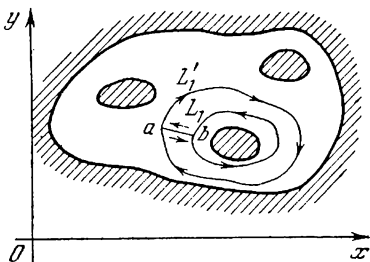


Рис. 4.15.

число обходов против часовой стрелки минус число обходов по часовой стрелке), тогда

$$\oint_L P dx + Q dy = k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 + k_3 \omega_3.$$

Если в многосвязной области G провести разрезы I, II, III , как это показано на рис. 4.16, то мы получим односвязную область, и в ней можно построить однозначную функцию

$$U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy, \quad (4.61)$$

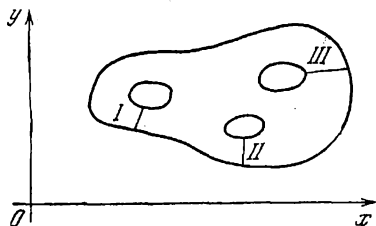


Рис. 4.16.

однако, в силу сказанного выше, ее значения на противоположных краях разреза I будут отличаться на ω_1 , на краях разреза II — на ω_2

и на краях разреза III — на ω_3 . Если же разрезов не делать, то выражение (4.61) будет опять-таки функцией, полный дифференциал которой равен $P dx + Q dy$, но уже функцией многозначной. Ее значения в фиксированной точке (отвечающие путям, делающим различное число обходов вокруг лагун) отличаются друг от друга слагаемым вида

$$k_1 \omega_1 + k_2 \omega_2 + k_3 \omega_3,$$

где k_1, k_2 и k_3 могут принимать любые целые значения*).

Ясно, что все сказанное здесь автоматически переносится на случай любого числа лагун.

*) Конечно, может оказаться случайно, что все циклические постоянные ω_i равны нулю. Тогда функция $U(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy$ окажется

однозначной и при отсутствии разрезов. В этом случае будут иметь место все утверждения теоремы 4.5 (независимо от связности области).

ГЛАВА 5

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

В разных физических вопросах часто встречаются функции, заданные на той или иной поверхности. Примерами таких функций могут служить плотность распределения зарядов на поверхности проводника, освещенность поверхности, скорость жидкости, протекающей через некоторую поверхность, и т. д. Эта глава посвящена изучению интегралов от функций на поверхности, так называемых поверхностных интегралов, и некоторым их применениям.

Теория поверхностных интегралов во многом аналогична теории криволинейных интегралов, изложенной в предыдущей главе. В частности, мы и здесь будем различать интегралы первого и второго рода.

Вводя определение поверхностного интеграла, мы будем опираться на некоторые сведения о поверхностях, изложенные в §§ 3 и 4 гл. 3, и в первую очередь на понятие площади кривой поверхности.

§ 1. Поверхностные интегралы первого рода

1. Определение поверхностного интеграла от скалярной функции. Пусть в точках кусочно-гладкой поверхности Σ с кусочно-гладкой границей*) L определена некоторая ограниченная функция $f(M)$. Разобьем поверхность Σ кусочно-гладкими кривыми на части $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ (рис. 5.1). Площадь каждой из них обозначим σ_i ($i=1, 2, \dots, n$). Выбрав в каждой из этих частей произвольную точку M_i , составим сумму

$$T = \sum_{i=1}^n f(M_i) \sigma_i, \quad (5.1)$$

которую мы будем называть *интегральной суммой*, отвечающей функции $f(M)$ (при данном разбиении поверхности Σ и данном выборе точек M_i).

*) Поверхность Σ может быть, в частности, замкнутой.

Введем следующее

Определение. Если при стремлении наибольшего из диаметров частей Σ_i поверхности Σ к нулю интегральные суммы T стремятся к некоторому конечному пределу, то этот предел называется *поверхностным интегралом первого рода* от функции $f(M)$ по поверхности Σ и обозначается символом

$$\iint_{\Sigma} f(M) d\sigma. \quad (5.2)$$

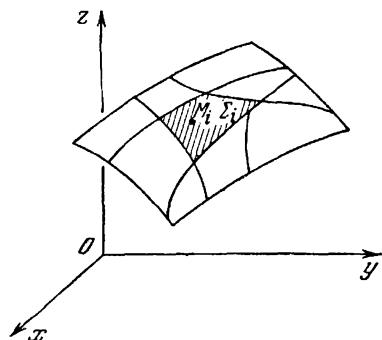


Рис. 5.1.

Точку M поверхности Σ можно задать декартовыми координатами x, y, z . Поэтому функцию $f(M)$, определенную на Σ , мы будем обозначать также $f(x, y, z)$, а соответствующий поверхностный интеграл — символом $\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma$.

При этом, однако, необходимо помнить, что переменные x, y и z не независимы, а связаны условием: точка (x, y, z) лежит на поверхности Σ .

2. Сведение поверхностного интеграла к двойному. Мы сформулировали определение поверхностного интеграла первого рода, теперь возникает вопрос об условиях его существования и о способах его фактического вычисления.

Оба эти вопроса решаются легко, путем сведения поверхностного интеграла к двойному.

Рассмотрим сначала простейший случай, когда поверхность задана уравнением в декартовых координатах.

Теорема 5.1. Пусть Σ — гладкая поверхность, заданная уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, где D — замкнутая ограниченная область, а $f(x, y, z)$ — некоторая ограниченная функция, определенная на поверхности Σ . Тогда справедливо равенство

$$\iint_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy. \quad (5.3)$$

При этом поверхностный интеграл, стоящий слева, существует, если существует двойной интеграл, стоящий в правой части равенства (5.3).

Доказательство. Разобьем поверхность Σ кусочно-гладкими кривыми на n частей Σ_i . Спроектировав это разбиение на пло-

скость xu , мы получим разбиение области D на квадратируемые части D_i (рис. 5.2). При этом диаметр каждого из элементов D_i будет не больше, чем диаметр соответствующего элемента Σ_i поверхности Σ .

Рассмотрим теперь интегральную сумму

$$T = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \sigma_i, \quad (5.4)$$

отвечающую поверхностному интегралу $\int \int_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma$. Площадь σ_i элемента Σ_i можно представить в виде

$$\sigma_i = \int \int_{D_i} \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy,$$

где $z = z(x, y)$, и затем, воспользовавшись теоремой о среднем для двойного интеграла от непрерывной функции *), в виде

$$\sigma_i = \sqrt{1 + z_x'^2(x_i^*, y_i^*) + z_y'^2(x_i^*, y_i^*)} S_i,$$

где (x_i^*, y_i^*) — некоторая точка, принадлежащая области D_i , а S_i — площадь этой области. Следовательно, интегральную сумму (5.4) можно переписать так:

$$T = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z(x_i, y_i)) \sqrt{1 + z_x'^2(x_i^*, y_i^*) + z_y'^2(x_i^*, y_i^*)} S_i. \quad (5.4')$$

Сравним ее с интегральной суммой

$$\tilde{T} = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z(x_i, y_i)) \sqrt{1 + z_x'^2(x_i, y_i) + z_y'^2(x_i, y_i)} S_i, \quad (5.5)$$

отвечающей двойному интегралу, стоящему в равенстве (5.3) справа (при том разбиении области D , которое отвечает данному разбиению поверхности Σ).

Суммы (5.4') и (5.5) отличаются друг от друга только тем, что в (5.5) значения как функции f , так и выражения $\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}$ берутся в одной и той же точке (x_i, y_i) , произвольно выбираемой внутри элемента D_i , а в (5.4') значения $\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}$ берутся

*) Поверхность $z = z(x, y)$ мы считаем гладкой, следовательно, $\sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)}$ — непрерывная функция.

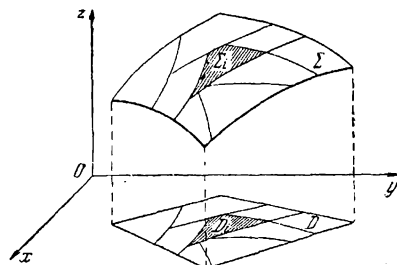


Рис. 5.2.

в точке (x_i^*, y_i^*) , диктуемой нам теоремой о среднем и, хотя и принадлежащей тому же элементу D_i , но, вообще говоря, не совпадающей с точкой (x_i, y_i) .

Функция $\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}$ непрерывна, а следовательно, и равномерно непрерывна в замкнутой ограниченной области D , поэтому для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_1 > 0$, что

$$\left| \sqrt{1 + z_x'^2(x_i, y_i) + z_y'^2(x_i, y_i)} - \sqrt{1 + z_x'^2(x_i^*, y_i^*) + z_y'^2(x_i^*, y_i^*)} \right| < \varepsilon, \quad (5.6)$$

как только максимум диаметров областей D_i станет меньше, чем δ_1 . Функция $f(x, y, z)$ по условию ограничена, т. е.

$$|f(x, y, z)| \leq K = \text{const},$$

поэтому из (5.6) следует оценка:

$$\left| T - \tilde{T} \right| = \left| \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z(x_i, y_i)) \left[\sqrt{1 + z_x'^2(x_i^*, y_i^*) + z_y'^2(x_i^*, y_i^*)} - \sqrt{1 + z_x'^2(x_i, y_i) + z_y'^2(x_i, y_i)} \right] S_i \right| \leq K\varepsilon \sum_{i=1}^n S_i = K\varepsilon S, \quad (5.7)$$

где S — площадь области D .

Теперь мы уже легко закончим доказательство теоремы. Если интеграл, стоящий в (5.3) справа, существует, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta_2 > 0$, что для всякой суммы \tilde{T} , отвечающей такому разбиению $\{D_i\}$ области D , диаметры элементов которого меньше δ_2 , выполнено неравенство

$$\left| \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} dx dy - \tilde{T} \right| < \varepsilon. \quad (5.8)$$

Пусть теперь $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$, а $\{\Sigma_i\}$ — такое разбиение поверхности Σ , что диаметры всех Σ_i меньше, чем δ , и пусть $\{D_i\}$ — отвечающее ему разбиение области D . Тогда диаметр каждого из D_i меньше, чем δ , и, следовательно, выполнены неравенства (5.7) и (5.8). Из этих неравенств получаем, что

$$\left| \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x'^2(x, y) + z_y'^2(x, y)} dx dy - T \right| < \varepsilon(1 + KS)$$

для всякого достаточно мелкого разбиения поверхности Σ . Но это и означает, что предел интегральных сумм T существует и равен интегралу, стоящему в (5.3) справа. Теорема доказана.

Следствие. Если поверхность Σ — гладкая, а функция $f(x, y, z)$ непрерывна на ней, то интеграл

$$\int_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma$$

существует.

Действительно, в этом случае в равенстве (5.3) справа стоит интеграл от непрерывной функции. Он существует, а следовательно, существует и стоящий слева поверхностный интеграл.

Замечание 1. Так как (см. п. 6 § 3 гл. 3)

$$\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} = \frac{1}{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{z})},$$

то равенство (5.3) можно переписать так:

$$\int_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \int_D f(x, y, z(x, y)) \frac{dx dy}{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{z})}. \quad (5.9)$$

Переменив роли координат x, y и z , можно в случае поверхности, заданной уравнением

$$x = x(y, z);$$

получить равенство

$$\int_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \int_{D_1} f(x(y, z), y, z) \frac{dy dz}{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{x})} \quad (5.9_1)$$

(где D_1 — проекция поверхности Σ на плоскость yz), а в случае поверхности

$$y = y(z, x)$$

— равенство

$$\int_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma = \int_{D_2} f(x, y(z, x), z) \frac{dz dx}{\cos(\mathbf{n}, \mathbf{y})} \quad (5.9_2)$$

(где D_2 — проекция Σ на плоскость zx).

Замечание 2. Если поверхность Σ состоит из нескольких частей, каждая из которых может быть представлена уравнением вида

$$x = x(y, z), \quad y = y(z, x) \quad \text{или} \quad z = z(x, y),$$

то для сведения поверхностного интеграла, взятого по такой поверхности, к двойному можно воспользоваться тем, что поверхностный интеграл по Σ равен сумме интегралов, взятых по составляющим эту поверхность частям, и затем применить формулы (5.9) к каждому из этих частичных интегралов в отдельности.

Если поверхность задана параметрическим уравнением, то рассуждения, не отличающиеся сколько-нибудь существенно от приведенных выше, приводят к следующей теореме.

Теорема 5.1'. Пусть Σ — гладкая поверхность, заданная уравнением

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v),$$

и $f(x, y, z)$ — ограниченная функция, определенная на этой поверхности. Тогда справедливо равенство

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma &= \\ &= \int_D \int f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du dv, \end{aligned} \quad (5.10)$$

причем поверхностный интеграл, стоящий слева, существует, если только существует двойной интеграл в правой части равенства.

Здесь D — область изменения параметров u и v , а g_{11} , g_{12} и g_{22} — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности (см. п. 1 § 4 гл. 3). Выражение $\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du dv$ представляет собой элемент площади поверхности, записанный в криволинейных координатах. Таким образом, формула (5.10) означает следующее: для того чтобы записать поверхностный интеграл $\int_{\Sigma} f(x, y, z) d\sigma$

в виде двойного, нужно подставить в него вместо декартовых координат x, y, z точек поверхности их выражения через криволинейные координаты u и v , а элемент площади $d\sigma$ тоже заменить его выражением через криволинейные координаты.

Формула (5.3) и формулы (5.9), (5.9₁) и (5.9₂) являются, очевидно, частными случаями общей формулы (5.10). Легко проверить, что все эти формулы остаются в силе, когда поверхность не гладкая, а кусочно-гладкая.

3. Некоторые применения поверхностных интегралов к механике. Поверхностные интегралы первого рода часто встречаются в физических задачах. С такими интегралами приходится иметь дело при изучении распределения масс по поверхности, например при нахождении координат центра масс, моментов инерции материальных поверхностей и т. п. Вывод соответствующих формул, по существу, ничем не отличается от вывода формул, относящихся к распределению масс в плоской области или вдоль кривой (см. пп. 3—5 § 4 гл. 1 и п. 3 § 1 гл. 4), поэтому мы приведем лишь окончательные результаты, предоставив все выкладки читателю.

Пусть по поверхности Σ (гладкой или кусочно-гладкой) распределена некоторая масса с поверхностной плотностью $\rho(x, y, z)$,

представляющей собой непрерывную функцию на Σ . Такую поверхность Σ будем кратко называть *материальной поверхностью*. Тогда имеют место следующие формулы:

1) Масса μ материальной поверхности Σ равна

$$\mu = \int_{\Sigma} \int \rho(x, y, z) d\sigma.$$

2) Координаты центра масс материальной поверхности определяются формулами:

$$x_c = \frac{\int_{\Sigma} \int x \rho(x, y, z) d\sigma}{\int_{\Sigma} \int \rho(x, y, z) d\sigma}, \quad y_c = \frac{\int_{\Sigma} \int y \rho(x, y, z) d\sigma}{\int_{\Sigma} \int \rho(x, y, z) d\sigma},$$

$$z_c = \frac{\int_{\Sigma} \int z \rho(x, y, z) d\sigma}{\int_{\Sigma} \int \rho(x, y, z) d\sigma}.$$

В частности, для однородной поверхности ($\rho = \text{const}$)

$$x_c = \frac{\int_{\Sigma} \int x d\sigma}{\int_{\Sigma} \int d\sigma}, \quad y_c = \frac{\int_{\Sigma} \int y d\sigma}{\int_{\Sigma} \int d\sigma}, \quad z_c = \frac{\int_{\Sigma} \int z d\sigma}{\int_{\Sigma} \int d\sigma}.$$

3) Момент инерции поверхности Σ относительно оси z равен

$$\int_{\Sigma} \int (x^2 + y^2) \rho(x, y, z) d\sigma.$$

Аналогично выражаются моменты инерции относительно других осей.

4. Поверхностные интегралы от векторных функций. Общее понятие поверхностного интеграла первого рода. Выше мы рассматривали поверхностные интегралы от скалярных функций. Это понятие легко переносится на векторные функции. Пусть

$$\mathbf{F}(M) = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$$

— некоторая векторная функция, заданная на поверхности Σ . Определим интеграл от этой функции по поверхности Σ , положив

$$\int_{\Sigma} \int \mathbf{F}(M) d\sigma = \mathbf{i} \int_{\Sigma} \int P(M) d\sigma + \mathbf{j} \int_{\Sigma} \int Q(M) d\sigma + \mathbf{k} \int_{\Sigma} \int R(M) d\sigma. \quad (5.11)$$

Мы назовем его *поверхностным интегралом первого рода от векторной функции F*. Значение такого интеграла представляет собой вектор. Вопросы об условиях существования

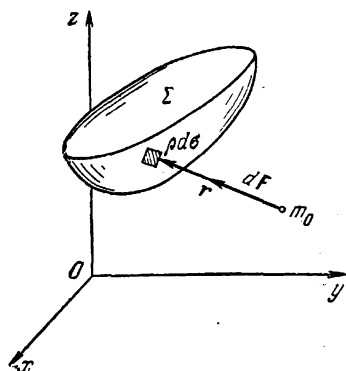


Рис. 5.3.

поверхностного интеграла первого рода от векторной функции, о сведении его к двойному, о его свойствах и т. д. непосредственно сводятся к соответствующим вопросам для интегралов от скалярных функций P , Q и R — компонент вектора F .

Для иллюстрации этого понятия вычислим силу, с которой материальная поверхность притягивает материальную точку.

Пусть $\rho(x, y, z)$ — плотность распределения масс на поверхности Σ и m — масса, сосредоточенная в некоторой точке (x_0, y_0, z_0) , не лежащей на этой поверхности. Элемент поверхности

$d\sigma$ несет на себе элемент массы $\rho(x, y, z)d\sigma$, а сила dF , с которой этот элемент притягивает точечную массу m_0 , равна по закону Ньютона

$$dF = \gamma m_0 \rho(x, y, z) \frac{r}{r^3} d\sigma, \quad (5.12)$$

где γ — постоянная, зависящая от выбора единиц, а r — вектор, соединяющий точки (x_0, y_0, z_0) и (x, y, z) (рис. 5.3). Полная сила F , с которой вся поверхность Σ притягивает массу m_0 , равна сумме элементарных сил (5.12), т. е. поверхностному интегралу

$$\gamma m_0 \int_{\Sigma} \int \rho(x, y, z) \frac{r}{r^3} d\sigma.$$

Таким образом (поскольку $r = (x - x_0)i + (y - y_0)j + (z - z_0)k$),

$$F = \gamma m_0 \left[i \int_{\Sigma} \int \rho(x, y, z) \frac{x - x_0}{r^3} d\sigma + j \int_{\Sigma} \int \rho(x, y, z) \frac{y - y_0}{r^3} d\sigma + k \int_{\Sigma} \int \rho(x, y, z) \frac{z - z_0}{r^3} d\sigma \right].$$

Этот интеграл обязательно существует, если поверхность Σ гладкая или кусочно-гладкая, а поверхностная плотность $\rho(x, y, z)$ непрерывна на Σ .

В том понятии поверхностного интеграла, которое мы рассмотрели, было существенно, что каждый «интегральный элемент»

$$f(M) d\sigma$$

зависел от величины элемента площади $d\sigma$ и значения функции $f(M)$ (скалярной или векторной) в данной точке, но *не зависел от ориентации поверхностного элемента $d\sigma$ в пространстве*. Именно так обстоит дело в тех физических задачах, которые мы рассматривали здесь: масса элемента материальной поверхности или сила, с которой этот элемент притягивает материальную точку, не будут меняться, если этот элемент поверхности мы каким-либо образом повернем.

Однако существуют задачи другого типа, в которых ориентация элемента $d\sigma$ играет существенную роль. К ним относится, например, задача (которую мы рассмотрим ниже) о вычислении количества жидкости, протекающей через поверхность за единицу времени, а также и ряд других. Этот второй круг задач приводит нас к другому понятию поверхностного интеграла, так называемому *поверхностному интегралу второго рода*. Ему будет посвящен следующий параграф. Как мы увидим ниже, поверхностные интегралы первого и второго рода связаны между собой простыми формулами.

§ 2. Поверхностные интегралы второго рода

1. Сторона поверхности. Для того чтобы определить поверхностный интеграл второго рода, нам нужно ввести сначала понятие стороны поверхности, аналогичное понятию ориентации кривой.

Пусть Σ — гладкая поверхность. Возьмем на Σ некоторую внутреннюю точку M_0 , проведем через нее нормаль к Σ и выберем на этой нормали одно из двух возможных направлений. Это можно сделать, фиксируя определенный единичный вектор \mathbf{n} , нормальный к Σ в точке M_0 . Проведем теперь на поверхности Σ через точку M_0 какой-либо замкнутый контур C , не имеющий общих точек с границей поверхности, и будем передвигать единичный вектор \mathbf{n} из точки M_0 вдоль C так, чтобы этот вектор все время оставался нормальным к Σ и чтобы его направление менялось при этом передвижении непрерывно. Поскольку вектор \mathbf{n} все время остается нормальным к Σ , то имеются две возможности: 1) при возвращении в точку M_0 вектор \mathbf{n} возвращается в первоначальное положение; 2) в результате обхода по контуру C вектор \mathbf{n} меняет свое направление на противоположное.

Введем следующее

Определение. Гладкая поверхность Σ называется *двусторонней*, если обход по любому замкнутому контуру, лежащему на поверхности Σ и не имеющему общих точек с ее границей, не меняет направления нормали к поверхности.

Если же на поверхности существует замкнутый контур, при обходе по которому направление нормали меняется на противоположное, то поверхность называется *односторонней*.

Если поверхность Σ двусторонняя, то в каждой ее точке M можно выбрать единичный вектор нормали $\mathbf{n}(M)$ так, чтобы вектор $\mathbf{n}(M)$ зависел от точки M непрерывно. Для построения такой вектор-функции $\mathbf{n}(M)$ возьмем на Σ некоторую начальную точку M_0 и выберем в этой точке один из двух возможных единичных нормальных векторов $\mathbf{n}(M_0)$. После этого возьмем на Σ произвольную точку M , соединим ее с M_0 какой-либо кривой L , лежащей на Σ , и перенесем вдоль L вектор \mathbf{n} из M_0 в M так, чтобы он все время оставался нормальным к поверхности и чтобы его направление при этом переносе менялось непрерывно. Вектор $\mathbf{n}(M)$, полученный таким образом в точке M , не зависит от выбора кривой L , соединяющей точки M_0 и M . Если бы две разные кривые L_1 и L_2 приводили к разным результатам, то, соединив эти кривые в одну, мы получили бы на Σ замкнутый путь C , при обходе по которому направление нормального вектора меняется на противоположное, т. е. эта поверхность не была бы двусторонней.

Из сказанного ясно, что на двусторонней поверхности существуют две и только две такие функции $\mathbf{n}(M)$, непрерывные на всей поверхности Σ . Действительно, каждая такая функция полностью определяется выбором одного из двух возможных направлений нормали в одной точке. Мы будем называть каждую из этих двух функций «*непрерывным полем нормалей*» на Σ . Ясно, что на односторонней поверхности нельзя построить ни одного непрерывного поля нормалей.

Выбор на Σ определенного непрерывного поля нормалей мы будем называть выбором стороны этой поверхности.

Примеры. 1. Простейший пример двусторонней поверхности —

плоскость. Двусторонней поверхностью будет и любая часть плоскости, например круг.

2. Любая гладкая поверхность, определенная уравнением $z = f(x, y)$, — двусторонняя. Действительно, мы получим одну ее сторону (верхнюю), выбрав в каждой ее точке нормальный вектор так, чтобы он составлял с положительным направлением оси z острый угол, а другую (нижнюю) сторону — при противоположной ориентации нормали (рис. 5.4).

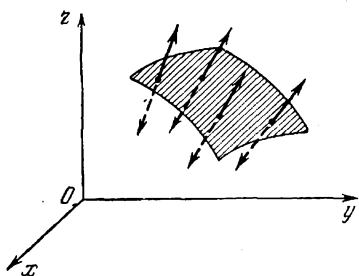


Рис. 5.4.

3. Всякая замкнутая поверхность, не имеющая самопересечений, — например сфера, эллипсоид и т. п., — двусторонняя. Направив в каждой точке замкнутой поверхности нормаль внутрь объема, ограниченного поверхностью, мы получим внутреннюю сторону поверхности, а направив нормаль наружу, получим внешнюю сторону.

4. Простейшим примером односторонней поверхности может служить так называемый лист Мёбиуса, изображенный на рис. 5.5. Его можно получить, взяв полоску бумаги $ABCD$ (рис. 5.6, а) и склеив ее так, чтобы точка A совпала с точкой C , а точка B — с точкой D , т. е. повернув перед склеиванием один ее край на 180° (рис. 5.6, б). Легко видеть, что при обходе листа Мёбиуса по его средней линии направление нормали к нему меняется на противоположное, т. е. эта поверхность действительно является односторонней.

Замечание 1. Двустороннюю поверхность называют также *ориентируемой*, а выбор определенной ее стороны — *ориентацией* поверхности. Односторонние поверхности называют *неориентируемыми*.

Читатель должен различать термины «ориентируемая» (сторону можно выбрать) и «ориентированная» (сторона уже выбрана).

Замечание 2. В отличие от таких свойств, как, например, гладкость поверхности, которые могут

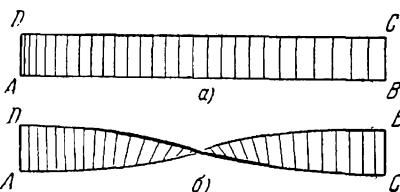


Рис. 5.6.

иметь или не иметь места в отдельных точках (локальные свойства), ориентируемость (или неориентируемость) — это свойство, характеризующее всю поверхность в целом (глобальное свойство). Действительно, на листе Мёбиуса или любой другой поверхности малая окрестность любой точки ориентируема. В каждой такой окрестности можно построить непрерывное поле нормалей, хотя на всем листе Мёбиуса такое поле построить нельзя.

С понятием стороны поверхности тесно связано понятие ориентации ее границы, которое нам понадобится ниже *).

Пусть Σ — ориентированная поверхность, ограниченная одним или несколькими контурами. Определим ориентацию каждого контура L , входящего в состав границы поверхности Σ , согласованную с ориентацией поверхности Σ , по следующему

*) Эта связь существенно зависит от того, к какой координатной системе, правой или левой, отнесено все трехмерное пространство. Мы будем иметь в виду правую систему.

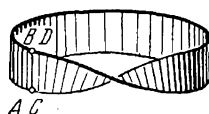


Рис. 5.5.

правилу: направление обхода контура L мы считаем положительным (согласованным с ориентацией Σ), если наблюдатель, расположенный на поверхности так, что направление вектора

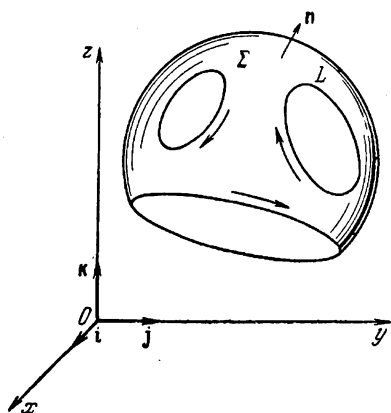


Рис. 5.7.

нормали совпадает с направлением от ног к голове, обходит контур L , оставляя поверхность Σ все время слева от себя (рис. 5.7). Противоположное направление мы считаем отрицательным. Если L — произвольный замкнутый контур, ограничивающий какую-либо часть ориентированной поверхности Σ , то направлением обхода этого контура, согласованным с ориентацией поверхности Σ , мы считаем опять-таки то, при котором ограниченная этим контуром часть поверхности Σ (на рис. 5.8 она заштрихована) остается слева *).

Если в качестве поверхности Σ взята ориентированная плоскость, то это определение согласованности ориентации контура и поверхности сводится к уже хорошо знакомому читателю правилу, по которому контур считается ориентированным положительно, если его

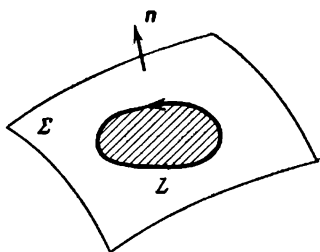


Рис. 5.8.

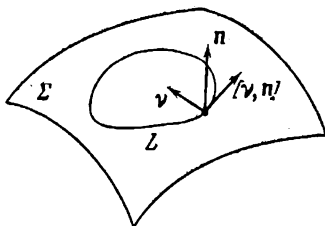


Рис. 5.9.

обход совершается против часовой стрелки, и ориентированным отрицательно в противоположном случае.

Замечание 3. Правило согласования ориентации поверхности Σ и ограничивающего ее контура L можно сформулировать еще следующим образом: пусть \mathbf{n} — единичный вектор нормали к поверхности Σ в некоторой точке M , принадлежащей L , и пусть

*) Если в пространстве взята левая система координат, то согласованное противоположное, т. е. положительно то направление обхода контура L , при котором поверхность Σ остается справа.

\mathbf{v} — вектор, нормальный к L и к Π и направленный в ту сторону, с которой расположена поверхность Σ . Тогда положительное направление обхода контура L указывается вектором $[\mathbf{v}, \mathbf{n}]$ *) (рис. 5.9).

2. Определение поверхностного интеграла второго рода. Рассмотрим сначала одну из задач, приводящих к понятию поверхностного интеграла второго рода, а именно, задачу о вычислении потока жидкости через некоторую поверхность.

Пусть пространство заполнено движущейся жидкостью, скорость которой в точке (x, y, z) задается вектором $\mathbf{V}(x, y, z)$ с компонентами $P = P(x, y, z)$, $Q = Q(x, y, z)$, $R = R(x, y, z)$. Вычислим количество Π жидкости, протекающей за единицу времени через некоторую ориентированную поверхность Σ .

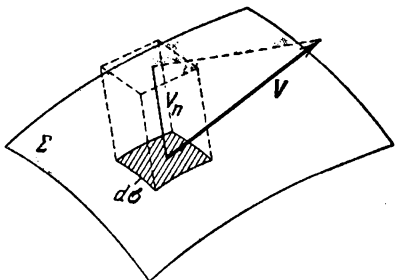


Рис. 5.10.

Рассмотрим бесконечно малый элемент $d\sigma$ поверхности Σ . Количество жидкости, протекающее через $d\sigma$ за единицу времени, равно, очевидно, $d\Pi = V_n d\sigma$, где V_n — проекция скорости \mathbf{V} на направление нормали \mathbf{n} к $d\sigma$ (рис. 5.10). Записав V_n как скалярное произведение вектора \mathbf{V} на единичный вектор нормали \mathbf{n} к $d\sigma$, имеем

$$d\Pi = [P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y) + R \cos(\mathbf{n}, z)] d\sigma. \quad (5.13)$$

Это — элемент потока жидкости. Чтобы получить количество жидкости, протекающее через всю поверхность Σ , нужно просуммировать выражения (5.13) по всем элементам $d\sigma$, т. е. взять интеграл

$$\Pi = \int_{\Sigma} [P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y) + R \cos(\mathbf{n}, z)] d\sigma.$$

Этот интеграл представляет собой не что иное, как поверхностный интеграл первого рода (в том смысле, как мы определили его в § 1) от выражения

$$P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y) + R \cos(\mathbf{n}, z).$$

Важно, однако, то, что само это выражение зависит не только от вектор-функции (P, Q, R) , заданной на поверхности Σ , но и от направления нормали в каждой точке этой поверхности.

*) Это правило остается справедливым, независимо от того, к какой системе координат, правой или левой, отнесено все пространство. Направление вектора \mathbf{n} не зависит от системы координат, направление \mathbf{v} также не зависит. При смене правой системы на левую векторное произведение $[\mathbf{v}, \mathbf{n}]$ меняет свое направление на противоположное.

Перейдем теперь к общему определению. Пусть Σ — гладкая двусторонняя поверхность. Фиксируем какую-либо определенную сторону этой поверхности (поле нормалей $\mathbf{n}(M)$) и рассмотрим некоторую векторную функцию $\mathbf{A} = (P, Q, R)$, заданную на Σ . Обозначим A_n проекцию вектора \mathbf{A} на направление нормали к Σ в данной точке. Эту проекцию можно записать в виде

$$A_n = P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y) + R \cos(\mathbf{n}, z),$$

где $\cos(\mathbf{n}, x)$, $\cos(\mathbf{n}, y)$ и $\cos(\mathbf{n}, z)$ — косинусы углов между направлением нормали к поверхности и направлениями координатных осей, т. е. компоненты единичного вектора нормали \mathbf{n} .

Интеграл

$$\int_{\Sigma} [P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y) + R \cos(\mathbf{n}, z)] d\sigma \quad (5.14)$$

мы назовем *поверхностным интегралом второго рода от вектор-функции $\mathbf{A} = (P, Q, R)$ по поверхности Σ* (точнее говоря, по выбранной стороне поверхности Σ) и будем обозначать

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

Таким образом, по определению

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy &= \\ &= \int_{\Sigma} [P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y) + R \cos(\mathbf{n}, z)] d\sigma. \end{aligned} \quad (5.15)$$

При переходе к другой стороне поверхности компоненты единичного вектора нормали, а следовательно, и сам интеграл (5.14), меняют свой знак на противоположный. *Для односторонней поверхности понятие поверхностного интеграла второго рода не вводится.*

Для того чтобы понятие поверхностного интеграла приобрело общность, необходимую для приложений, приходится рассматривать интегралы и по таким поверхностям, которые имеют самопересечения (с аналогичной ситуацией мы уже встречались в теории криволинейных интегралов).

Замечание 1. Если $d\sigma$ — бесконечно малый элемент площади поверхности, то выражения

$$\cos(\mathbf{n}, x) d\sigma, \cos(\mathbf{n}, y) d\sigma, \cos(\mathbf{n}, z) d\sigma$$

представляют собой проекции элемента $d\sigma$ на плоскости yz , zx и xy (рис. 5.11), поэтому мы и обозначаем их $dy dz$, $dz dx$ и $dx dy$ соответственно.

Замечание 2. Мы определили поверхностный интеграл второго рода, опираясь на понятие поверхностного интеграла первого рода.

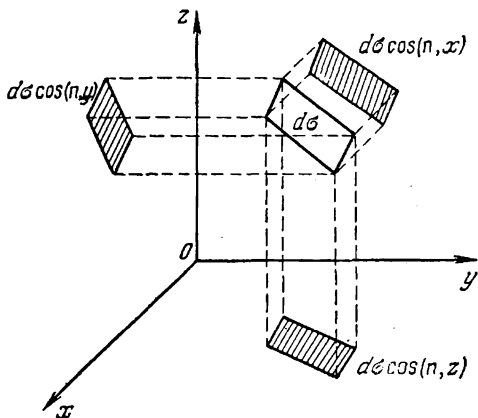


Рис. 5.11.

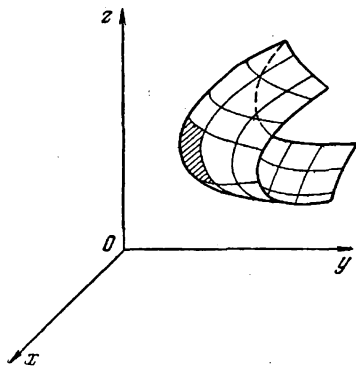


Рис. 5.12.

Однако интеграл второго рода можно определить и непосредственно, с помощью соответствующих интегральных сумм, а именно, следующим образом:

Будем для сокращения записи рассматривать только одну компоненту вектора (P, Q, R) , скажем R . Возьмем некоторую гладкую ориентированную поверхность Σ и рассмотрим разбиение этой поверхности на части Σ_i . Взяв в каждой из этих частей произвольную точку (x_i, y_i, z_i) , составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^n R(x_i, y_i, z_i) S_i, \quad (5.16)$$

где S_i — проекция Σ_i на плоскость xy . При этом величину S_i мы будем считать положительной, если в точках, принадлежащих Σ_i , нормаль к поверхности образует с положительным направлением оси z острый угол, и отрицательной, если в каждой точке элемента Σ_i этот угол тупой *). Нетрудно проверить, что

*) В разбиение поверхности Σ могут входить еще и «неправильные» элементы, т. е. такие, что в некоторых их точках угол (n, z) острый, а в некоторых — тупой (рис. 5.12). Можно или избегать разбиений, содержащих такие элементы, или приписывать таким элементам произвольный знак. Это не влияет на результат, поскольку сумма площадей проекций таких элементов мала.

для непрерывной функции $R(x, y, z)$ и гладкой поверхности Σ предел интегральных сумм (5.16) при неограниченном измельчении разбиения поверхности существует и равен

$$\iint_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy$$

(ср. с определением криволинейного интеграла второго рода в п. 2 § 2 гл. 4).

Аналогичным образом можно определить через интегральные суммы и интегралы

$$\iint_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz \quad \text{и} \quad \iint_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx,$$

а следовательно, и интеграл общего вида

$$\iint_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy$$

— сумму интегралов этих трех типов.

Замечание 3. Отличие поверхностного интеграла второго рода от интеграла первого рода состоит, по существу, в том, что в интеграле второго рода элемент площади $d\sigma$ рассматривается не как скалярная величина, а как вектор $d\sigma$, направленный по нормали к поверхности и имеющий компоненты:

$$d\sigma \cos(\mathbf{n}, x), \quad d\sigma \cos(\mathbf{n}, y), \quad d\sigma \cos(\mathbf{n}, z).$$

В соответствии с этим поверхностный интеграл второго рода от векторной функции $\mathbf{A} = (P, Q, R)$ часто записывают в виде

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{A}, d\sigma), \quad (5.17)$$

что равносильно записи

$$\iint_{\Sigma} (\mathbf{A}, \mathbf{n}) d\sigma. \quad (5.18)$$

Замечание 4. Наряду с интегралами вида (5.18) в некоторых задачах приходится рассматривать интегралы вида

$$\iint_{\Sigma} [\mathbf{A}, \mathbf{n}] d\sigma. \quad (5.19)$$

Значение такого интеграла представляет собой уже не скаляр, а вектор. Его вычисление сводится, очевидно, к покомпонентному интегрированию вектора $[\mathbf{A}, \mathbf{n}]$. Так как здесь подынтегральное выражение зависит и от нормали \mathbf{n} к поверхности Σ , то интеграл (5.19)

естественно рассматривать как поверхностный интеграл второго рода (но только «векторный», в отличие от «скалярного» интеграла (5.18)).

3. Сведение поверхностного интеграла второго рода к двойному интегралу. Из определения поверхностного интеграла второго рода и теоремы 5.1 сразу вытекает следующий результат:

Пусть гладкая (или кусочно-гладкая) поверхность Σ задана уравнением

$$z = z(x, y)$$

(причем берется верхняя сторона этой поверхности) и $R(x, y, z)$ — некоторая ограниченная функция на Σ . Тогда

$$\int_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = \int_D R(x, y, z(x, y)) dx dy, \quad (5.20)$$

где D — проекция поверхности Σ на плоскость xu ; *входящий в это равенство поверхностный интеграл существует, если существует стоящий справа двойной интеграл.*

Действительно, рассматриваемый поверхностный интеграл можно переписать в виде

$$\int_{\Sigma} R(x, y, z) \cos(n, z) d\sigma.$$

Применив к нему формулу (5.9), немедленно получаем требуемое равенство. Таким образом, для того чтобы поверхностный интеграл $\int_{\Sigma} R(x, y, z) d\sigma$, взятый по верхней стороне поверхности Σ , определенной уравнением $z = z(x, y)$, преобразовать в двойной, следует в подынтегральную функцию вместо z подставить соответствующую функцию $z(x, y)$, а интегрирование по поверхности Σ заменить интегрированием по ее проекции D на плоскость xu .

Если же интеграл берется по нижней стороне поверхности Σ , то

$$\int_{\Sigma} R(x, y, z) dx dy = - \int_D R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

Аналогично получают формулы

$$\int_{\Sigma} P(x, y, z) dy dz = \pm \int_{D_1} P(x(y, z), y, z) dy dz \quad (5.21)$$

и

$$\int_{\Sigma} Q(x, y, z) dz dx = \pm \int_{D_2} Q(x, y(z, x), z) dz dx, \quad (5.22)$$

где в первом случае под Σ понимается поверхность, заданная уравнением $x = x(y, z)$, а во втором — поверхность, заданная уравнением $y = y(z, x)$. Знак плюс берется в том случае, когда нормаль к поверхности образует с осью x (соответственно с осью y) острый угол, а знак минус, когда этот угол тупой. D_1 и D_2 — проекции поверхности Σ на плоскости yz и zx соответственно.

Формулой типа (5.20) можно воспользоваться для сведения поверхностного интеграла к двойному и в том случае, когда ориентированная поверхность Σ состоит из нескольких кусков, каждый из которых определяется уравнением вида $z = z(x, y)$. В этом случае рассматриваемый интеграл следует представить как сумму интегралов, отвечающих этим кускам, и затем к каждому из этих слагаемых применить формулу (5.20).

У п р а ж н е н и е. Интеграл

$$J = \int_{\Sigma} \int R(x, y, z) dx dy,$$

взятый по внешней стороне сферы

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2,$$

записать в виде суммы двойных интегралов.

О т в е т.

$$J = \int \int_{x^2 + y^2 \leq a^2} R(x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) dx dy - \\ - \int \int_{x^2 + y^2 \leq a^2} R(x, y, -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}) dx dy.$$

(Первое слагаемое равно интегралу, взятому по верхней стороне верхней полусферы, а второе, *вместе со знаком минус*, равно интегралу, взятому по нижней стороне нижней полусферы. Две таким образом ориентированные полусферы составляют вместе внешнюю сторону полной сферы.)

Мы показали, как сводится к двойному интегралу поверхностный интеграл второго рода, взятый по поверхности, заданной уравнением в декартовых координатах. Для поверхности, заданной параметрическим уравнением, применение теоремы 5.1' сразу дает следующий результат: *если гладкая (или кусочно-гладкая) поверхность Σ задана параметрическим уравнением*

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$$

и (P, Q, R) — ограниченная вектор-функция, определенная на Σ , то

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \\ & = \int_D \int [P \cos(n, x) + Q \cos(n, y) + R \cos(n, z)] \sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} du dv, \end{aligned} \quad (5.23)$$

где D — область изменения параметров u и v , а g_{11} , g_{12} и g_{22} — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности Σ ; входящий в это равенство поверхностный интеграл существует, если существует стоящий справа двойной интеграл.

Формулу (5.23) можно записать несколько иначе. Известно, что (см. п. 5 § 3 гл. 3)

$$\begin{aligned} \cos(n, x) &= \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \quad \cos(n, y) = \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \\ \cos(n, z) &= \frac{C}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}, \end{aligned} \quad (5.24)$$

где

$$A = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

и что

$$\sqrt{g_{11}g_{22} - g_{12}^2} = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}.$$

Поэтому формулу (5.23) можно записать так:

$$\int_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \int_D \int [PA + QB + RC] du dv, \quad (5.25)$$

где

$$P = P(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

и аналогично для Q и R .

Ясно, что равенства (5.20) — (5.22) представляют собой частные случаи общей формулы (5.23).

§ 3. Формула Остроградского

1. Вывод формулы Остроградского. В предыдущей главе мы вывели формулу, связывающую двойной интеграл по некоторой плоской области, с криволинейным интегралом, взятым по ее границе (формула Грина). Сейчас мы установим аналогичную формулу.

связывающую тройной интеграл по пространственной области с поверхностным интегралом, взятым по внешней стороне поверхности, ограничивающей эту область. Эта формула называется *формулой Остроградского* *).

Введем для удобства следующие термины. Пространственную область V , ограниченную двумя кусочно-гладкими поверхностями Σ_1 и Σ_2 , заданными уравнениями

$$z = z_1(x, y) \quad \text{и} \quad z = z_2(x, y), \quad (5.26)$$

и боковой цилиндрической поверхностью Σ_3 с образующими, параллельными оси z , мы назовем *областью, цилиндрической вдоль оси z* или, короче, « z -цилиндрической». Поверхности $z = z_1(x, y)$ и $z = z_2(x, y)$ назовем ее криволинейными основаниями, нижним и верхним **)

Аналогично область, ограниченную кусочно-гладкими поверхностями

$$x = x_1(y, z) \quad \text{и} \quad x = x_2(y, z)$$

и цилиндрической поверхностью с образующими, параллельными оси x , назовем « x -цилиндрической». Так же определяются и « y -цилиндрические» области.

Назовем, наконец, область V *простой*, если ее можно разбить как на конечное число z -цилиндрических областей, так и на конечное число областей каждого из двух остальных типов.

Пусть V — некоторая z -цилиндрическая область с основаниями Σ_1 , Σ_2 , заданными уравнениями (5.26) и боковой поверхностью Σ_3 . Соединение этих трех поверхностей, т. е. всю границу области V , обозначим Σ . При этом мы будем рассматривать внешнюю сторону поверхности Σ . Возьмем функцию $R(x, y, z)$, определенную и непре-

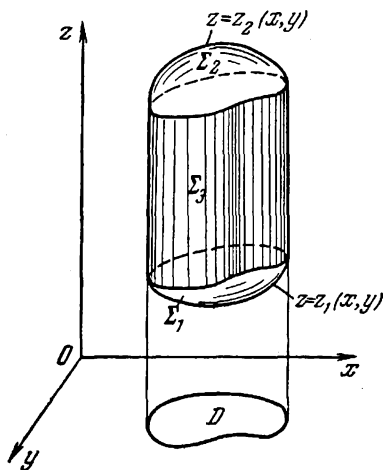


Рис. 5.13.

*) М. В. Остроградский опубликовал эту формулу в 1828 г. в работе «Заметка о теории тепла». Часто ее называют также формулой Гаусса, однако Гауссом эта формула была получена значительно позже, в 1841 г.

**) Боковая поверхность Σ может отсутствовать. Например, шар мы считаем z -цилиндрической областью, основания которой суть Σ_1 — нижняя полусфера и Σ_2 — верхняя полусфера, а боковая поверхность Σ_3 выродилась в экватор (шар является также и областью, цилиндрической вдоль осей x и y).

ривную вместе со своей частной производной $\frac{\partial R}{\partial z}$ в области V (включая ее границу), и рассмотрим очевидное равенство

$$\int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz = R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y)).$$

Проинтегрируем это равенство по области D , представляющей собой проекцию V на плоскость (x, y) , заменяя повторный интеграл тройным:

$$\begin{aligned} \int_V \int \int \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz &= \int_D \int R(x, y, z_2(x, y)) dx dy - \\ &- \int_D \int R(x, y, z_1(x, y)) dx dy. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Первый из стоящих справа интегралов можно записать (см. формулу (5.20)) в виде поверхностного интеграла от функции $R(x, y, z)$, взятого по верхней стороне поверхности

$$z = z_2(x, y).$$

Аналогично второй из этих интегралов можно рассматривать как поверхностный интеграл от той же функции $R(x, y, z)$, взятый по верхней стороне поверхности $z = z_1(x, y)$, или как интеграл по нижней стороне той же поверхности $z = z_1(x, y)$, взятый с обратным знаком. Таким образом, мы получим

$$\int_V \int \int \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \int_{\Sigma_2} R dx dy + \int_{\Sigma_1} R dx dy, \quad (5.28)$$

где первый из стоящих справа интегралов берется по верхней стороне поверхности Σ_2 , а второй — по нижней стороне поверхности Σ_1 . Прибавив к правой части формулы (5.28) интеграл

$$\int_{\Sigma_3} R dx dy$$

(равный, очевидно, нулю), взятый по внешней стороне боковой поверхности Σ_3 , мы получим справа поверхностный интеграл, взятый по внешней стороне всей поверхности Σ , ограничивающей область V . Таким образом, мы получаем следующее равенство:

$$\int_V \int \int \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \int_{\Sigma} R dx dy = \int_{\Sigma} R \cos(\mathbf{n}, z) d\sigma. \quad (5.29)$$

Равенство (5.29) справедливо и для любой области V , которую можно разбить на конечное число z -цилиндрических частей. Действительно, разобьем V на такие части V_i , напишем для каждой из них равенство вида (5.29) и просуммируем эти равенства. Слева мы получим тройной интеграл, взятый по всей области V , а справа — сумму поверхностных интегралов, взятых по частям поверхности Σ , ограничивающей V , и по тем поверхностям, с помощью которых V разбивается на части V_i , причем по каждой из этих последних интеграл берется дважды, один раз по одной ее стороне, а второй раз — по другой. Поэтому в результате суммирования все интегралы, взятые по разделяющим поверхностям, взаимно уничтожаются, и мы получаем

$$\int_V \int \int \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \int_{\Sigma} \int R dx dy. \quad (5.30)$$

Пусть теперь V — область, цилиндрическая вдоль оси x , т. е. ограниченная кусочно-гладкими поверхностями-основаниями

$$x = x_1(y, z), \quad x = x_2(y, z)$$

и боковой цилиндрической поверхностью, а $P(x, y, z)$ — функция, непрерывная вместе со своей производной $\frac{\partial P}{\partial x}$ в области V (включая ее границу). Рассуждения, аналогичные проведенным выше, приводят к равенству

$$\int_V \int \int \frac{\partial P}{\partial x} dx dy dz = \int_{\Sigma} \int P dy dz, \quad (5.31)$$

которое остается в силе и тогда, когда V состоит из конечного числа x -цилиндрических частей.

Аналогично получается и равенство

$$\int_V \int \int \frac{\partial Q}{\partial y} dx dy dz = \int_{\Sigma} \int Q dz dx, \quad (5.32)$$

справедливое для всякой области V , которую можно разбить на конечное число y -цилиндрических областей.

Пусть, наконец, V — некоторая простая область и пусть функции P, Q, R вместе со своими производными $\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны в этой области всюду, включая ее границу (т. е. непрерывны в замкнутой области). Тогда справедливы все три равенства: (5.30),

(5.31) и (5.32). Сложив их, получаем

$$\begin{aligned} \int_V \int \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ = \int_{\Sigma} \int P dy dz + Q dz dx + R dx dy \quad (5.33) \end{aligned}$$

или, в других обозначениях,

$$\begin{aligned} \int_V \int \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz = \\ = \int_{\Sigma} \int [P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y) + R \cos(\mathbf{n}, z)] d\sigma. \quad (5.33') \end{aligned}$$

Это и есть *формула Остроградского*.

Замечание. При выводе формулы Остроградского мы считали, что функции P , Q , R и их частные производные $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ непрерывны (а следовательно, и ограничены) в замкнутой простой области. Применяя те же рассуждения, что и для формулы Грина (см. замечание 1 § 3 гл. 4), можно доказать справедливость формулы Остроградского при следующих более общих условиях:

1. V — ограниченная область, граница которой состоит из конечного числа кусочно-гладких поверхностей.

2. Функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$ непрерывны, а следовательно, и ограничены в замкнутой области V .

3. Производные $\frac{\partial P}{\partial x}$, $\frac{\partial Q}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial z}$ существуют и непрерывны внутри области V (без границы) и интеграл $\int_V \int \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz$ существует (быть может, как несобственный интеграл *).

2. Вычисление поверхностных интегралов с помощью формулы Остроградского. Представление объема пространственной области в виде поверхностного интеграла. Выше мы показали (формула (5.10)), как поверхностный интеграл второго рода свести к двойному. Однако для фактического вычисления поверхностного интеграла этот путь не всегда самый удобный. В частности, интеграл по замкнутой поверхности иногда удобнее сводить к тройному по формуле Остроградского.

Примеры. 1. Вычислить интеграл

$$J = \int_{\Sigma} \int x^3 dy dz + y^3 dz dx + z^3 dx dy,$$

взятый по сфере $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$.

*) О несобственных кратных интегралах см. гл. 9.

Решение. Воспользовавшись формулой Остроградского, будем иметь

$$J = 3 \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz,$$

откуда, введя сферические координаты, получаем

$$J = 3 \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi d\theta \int_0^a r^4 \sin \theta dr = \frac{4}{5} \pi a^5.$$

2. Вычислить интеграл

$$J = \int_{\Sigma} z dy dz + x dz dx + y dx dy,$$

взятый по некоторой замкнутой поверхности Σ .

Решение. По формуле Остроградского рассматриваемый интеграл сводится к тройному, под знаком которого стоит тождественный нуль. Следовательно, $J = 0$, какова бы ни была замкнутая поверхность Σ .

В предыдущей главе мы видели, что формула Грина дает, в частности, выражение для площади области через криволинейный интеграл по ее границе (см. (4.47)). Точно так же и из формулы Остроградского легко получить выражение для объема области в виде поверхностного интеграла по замкнутой поверхности Σ — границе этой области. Действительно, подберем функции P , Q и R так, чтобы

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 1.$$

Тогда получим

$$\int_{\Sigma} P dy dz + Q dz dx + R dx dy = \int_V \int \int dx dy dz = V,$$

где V — объем, ограниченный поверхностью Σ . Интеграл здесь берется по внешней стороне Σ . В частности, положив

$$P = \frac{1}{3} x, \quad Q = \frac{1}{3} y, \quad R = \frac{1}{3} z,$$

мы получим для вычисления объема удобную формулу

$$V = \frac{1}{3} \int_{\Sigma} x dy dz + y dz dx + z dx dy. \quad (5.34)$$

§ 4. Формула Стокса

1. Вывод формулы Стокса. В этом параграфе мы выведем так называемую формулу Стокса, связывающую поверхностные интегралы с криволинейными. Формула Стокса обобщает формулу Грина и переходит в нее, если рассматриваемая поверхность сводится к плоской области, лежащей в плоскости $xу$. Подобно формулам Грина и Остроградского, формула Стокса широко применяется как в самом анализе, так и в его приложениях.

Пусть дана гладкая ориентированная поверхность Σ , ограниченная ориентированным контуром Λ (ориентации Σ и Λ согласованы, см. п. 1 § 2), и пусть в некоторой трехмерной области, содержащей внутри себя поверхность Σ , определена векторная функция (P, Q, R) , такая, что P, Q и R непрерывны в этой области вместе со своими частными производными первого порядка. Постараемся преобразовать криволинейный интеграл

$$\int_{\Lambda} P dx + Q dy + R dz, \quad (5.35)$$

взятый по контуру Λ , в интеграл по поверхности Σ .

Рассмотрим сначала случай, когда поверхность Σ задана уравнением

$$z = z(x, y)$$

в декартовых координатах. Обозначим D проекцию поверхности Σ на плоскость $xу$, и пусть L — граница области D , т. е. проекция контура Λ (рис. 5.14). Преобразование криволинейного интеграла (5.35) в поверхностный мы проведем по следующей схеме:

$$\int_{\Lambda} \rightarrow \int_L \rightarrow \int_D \int \rightarrow \int_{\Sigma} \int.$$

т. е. криволинейный интеграл по пространственному контуру Λ преобразуем сперва в криволинейный интеграл по плоскому контуру L , затем (с помощью формулы Грина) переведем его в двойной интеграл по области D и, наконец, этот последний преобразуем в поверхностный интеграл по Σ .

Проведем теперь соответствующие выкладки. Рассмотрим сначала интеграл вида

$$J_1 = \int_{\Lambda} P dx.$$

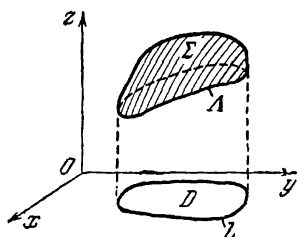


Рис. 5.14.

Заметим прежде всего, что

$$J_1 = \int_{\Lambda} P(x, y, z) dx = \int_L P(x, y, z(x, y)) dx,$$

поскольку контур Λ лежит на поверхности Σ , заданной уравнением $z = z(x, y)$. Далее, применив формулу Грина, получаем

$$J_1 = \int_L P(x, y, z(x, y)) dx = - \int_D \int \left(\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \right) dx dy \quad (5.36)$$

(здесь P — сложная функция от x и y , и мы учли это при вычислении производной от P по y).

Воспользовавшись выражениями для направляющих косинусов нормали (см. (3.36)), получаем, что

$$\frac{\partial z}{\partial y} = - \frac{\cos(\mathbf{n}, y)}{\cos(\mathbf{n}, z)}.$$

Поэтому

$$J_1 = - \int_D \int \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\cos(\mathbf{n}, y)}{\cos(\mathbf{n}, z)} \right) dx dy.$$

Теперь, воспользовавшись формулой (5.20), мы можем этот двойной интеграл преобразовать в поверхностный. Получаем

$$\begin{aligned} J_1 &= - \int_{\Sigma} \int \left(\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial P}{\partial z} \frac{\cos(\mathbf{n}, y)}{\cos(\mathbf{n}, z)} \right) \cos(\mathbf{n}, z) d\sigma = \\ &= - \int_{\Sigma} \int \left(\frac{\partial P}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, z) - \frac{\partial P}{\partial z} \cos(\mathbf{n}, y) \right) d\sigma. \end{aligned}$$

Итак,

$$\int_{\Lambda} P dx = \int_{\Sigma} \int \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos(\mathbf{n}, y) - \frac{\partial P}{\partial y} \cos(\mathbf{n}, z) \right) d\sigma. \quad (5.37)$$

Мы предполагали, что поверхность Σ задана уравнением $z = z(x, y)$. Тот же результат можно было получить, предположив, что Σ задана уравнением $y = y(z, x)$. Для этого нужно было бы рассмотреть проекцию Σ на плоскость zx (вместо xy) и провести рассуждения, аналогичные изложенным выше. Далее, если Σ — часть плоскости, перпендикулярной оси x (тогда Σ нельзя однозначно спроектировать ни на плоскость xy , ни на плоскость zx), то равенство (5.37) верно тривиальным образом: и правая и левая его части будут равны нулю (проверьте это!). Наконец, стандартные рассуждения, которыми мы уже пользовались при выводе формул Грина и Остроградского, показывают, что если поверхность Σ состоит из конечного числа частей, для каждой из которых верно равенство (5.37),

то оно верно и для всей поверхности Σ . Таким образом, равенство (5.37) установлено для поверхности, состоящей из конечного числа кусков перечисленных выше типов. В точности так же получаются два аналогичных равенства:

$$\int_{\Lambda} Q dy = \int_{\Sigma} \int \left(\frac{\partial Q}{\partial x} \cos(n, z) - \frac{\partial Q}{\partial z} \cos(n, x) \right) d\sigma, \quad (5.38)$$

$$\int_{\Lambda} R dz = \int_{\Sigma} \int \left(\frac{\partial R}{\partial y} \cos(n, x) - \frac{\partial R}{\partial x} \cos(n, y) \right) d\sigma. \quad (5.39)$$

Складывая все эти три равенства, получаем

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} P dx + Q dy + R dz = \int_{\Sigma} \int & \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos(n, z) + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos(n, x) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos(n, y) \right] d\sigma. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Это и есть *формула Стокса*. Ее можно переписать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \int_{\Lambda} P dx + Q dy + R dz = \int_{\Sigma} \int & \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \\ & + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Формулу Стокса легко запомнить, заметив, что первое слагаемое в правой ее части — это то же самое выражение, которое стоит под знаком двойного интеграла в формуле Грина, а второе и третье получаются из него циклической перестановкой координат x, y, z и функций P, Q, R .

Если поверхность Σ сводится к плоской области, лежащей в плоскости xy , то интегралы по $dz dx$ и $dy dz$ обращаются в нуль и формула Стокса переходит в формулу Грина.

Замечание 1. При выводе формулы Стокса мы пользовались декартовой системой координат. Но ни криволинейный, ни поверхностный интегралы, входящие в эту формулу, не зависят от способа задания поверхности Σ и ее границы Λ . Поэтому формула Стокса остается в силе и при любом другом способе задания поверхности, например с помощью параметрического уравнения

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v).$$

Замечание 2. Формула Стокса остается в силе и в том случае, когда граница Λ поверхности Σ состоит из нескольких отдельных контуров. В этом случае под $\int_{\Lambda} P dx + Q dy + R dz$ следует пони-

мать сумму интегралов, взятых по этим контурам, причем ориентация каждого из этих контуров опять-таки должна быть согласована с выбором стороны поверхности Σ . Например, если Σ представляет собой боковую поверхность цилиндра с вырезанным в ней отверстием (рис. 5.15) и мы рассматриваем внешнюю сторону этой поверхности, то формула Стокса связывает интеграл по Σ с криволинейным интегралом, взятым по трем контурам, образующим ее границу и ориентированным так, как это показано стрелками на рис. 5.15.

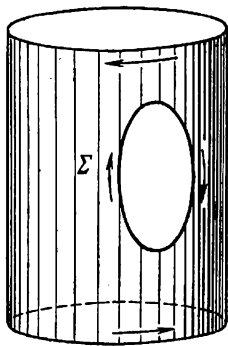


Рис. 5.15.

2. Применение формулы Стокса к исследованию пространственных криволинейных интегралов. Формула Стокса имеет многочисленные применения, и мы еще вернемся к ней в следующей главе. Сейчас мы воспользуемся этой формулой для того, чтобы перенести на пространственные криволинейные интегралы те результаты об условиях независимости криволинейного интеграла от пути, которые в § 4

гл. 4 были получены (с помощью формулы Грина) для плоского случая.

Введем следующее

Определение. Трехмерная область V называется *поверхностно односвязной* *), если на любой замкнутый контур, лежащий в V , можно натянуть поверхность, также целиком лежащую в V (т. е. если внутри V найдется поверхность, имеющая этот контур своей границей).

Примерами поверхностно односвязных областей являются: шар, все пространство, область, заключенная между двумя концентрическими сферами, и т. п. Примером не односвязной области может служить шар, сквозь который проходит цилиндрический туннель (рис. 5.16).

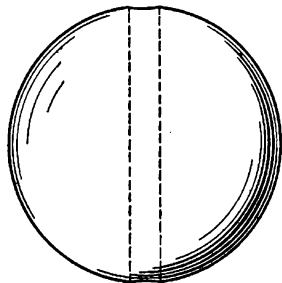


Рис. 5.16.

Установим теперь следующий результат, аналогичный теореме 4.5.

Теорема 5.2. Если функции $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$, $R(x, y, z)$ непрерывны вместе со своими частными

*) Или, короче, просто «односвязной».

производными первого порядка в некоторой замкнутой ограниченной поверхностью односвязной области V , то следующие четыре утверждения равносильны между собой:

1. Интеграл $\oint P dx + Q dy + R dz$, взятый по любому замкнутому контуру, лежащему внутри V , равен нулю.

2. $\int_{AB} P dx + Q dy + R dz$ не зависит от выбора пути, соединяющего точки A и B .

3. $P dx + Q dy + R dz$ — полный дифференциал некоторой однозначной функции, определенной в V .

4. Выполняются равенства

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}. \quad (5.42)$$

Доказательство этой теоремы, по существу, не отличается от доказательства теоремы 4.5 и проводится по той же схеме $1 \rightarrow 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 1$. Мы предоставим его читателю, ограничившись лишь следующим указанием: для того чтобы из условия 4) получить условие 1), рассмотрим некоторый замкнутый контур Λ , лежащий в V ; так как область V по условию односвязна, то на Λ можно натянуть поверхность Σ , целиком лежащую внутри V . Применяя к криволинейному интегралу, взятому по Λ , формулу Стокса, получаем, что из условия (5.42) следует равенство

$$\int_{\Lambda} P dx + Q dy + R dz = 0.$$

Если выражение $P dx + Q dy + R dz$ представляет собой полный дифференциал некоторой функции $U(x, y, z)$, то нетрудно написать явное выражение этой функции:

$$U(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz + C, \quad (5.43)$$

аналогичное формуле (4.50), установленной в § 4 гл. 4 для двух переменных.

(Здесь $\int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)}$ означает интеграл, взятый по произвольному пути, целиком лежащему в области V и соединяющему точку (x_0, y_0, z_0) с (x, y, z) .)

Если функции P , Q и R удовлетворяют условиям (5.42), но область, в которой они определены, не односвязна, то свойства интеграла

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz$$

аналогичны свойствам криволинейного интеграла $\int_{AB} P dx + Q dy$

в плоской многосвязной области. В частности, выражение (5.43) при выполнении равенств (5.42) и в случае многосвязной области представляет собой функцию, полный дифференциал которой равен $P dx + Q dy + R dz$, но в многосвязной области эта функция, вообще говоря, многозначна.

ГЛАВА 6

ТЕОРИЯ ПОЛЯ

Понятие поля лежит в основе многих представлений современной физики. В этой главе мы изложим элементы того математического аппарата, которым приходится пользоваться при изучении физических полей.

В физических задачах чаще всего встречаются величины двух типов: скаляры и векторы *). В соответствии с этим мы будем рассматривать два типа полей — скалярные и векторные.

§ 1. Скалярные поля

1. Определение и примеры скалярных полей. Пусть Ω — некоторая область в пространстве. Мы говорим, что *в этой области задано скалярное поле, если каждой точке M этой области поставлено в соответствие некоторое число $U(M)$* .

Примерами скалярных полей могут служить поле температур внутри некоторого нагретого тела (в каждой точке M этого тела задана соответствующая температура $U(M)$), поле освещенности, создаваемое каким-либо источником света, и т. д.

Важным примером скалярного поля служит поле плотности массы, с которым мы уже встречались. Напомним это понятие. Пусть некоторая пространственная область Ω заполнена непрерывно распределенной массой. Сопоставив каждой области V , содержащейся в Ω , ту массу, которая находится в области V , мы получим аддитивную функцию области $\mu(V)$. Если в каждой точке существует производная от $\mu(V)$ по объему, то эта производная называется плотностью

*) Это, собственно говоря, верно лишь применительно к более элементарным вопросам физики. В ряде разделов теоретической физики — электродинамике, теории относительности, теории элементарных частиц и т. д. существенную роль играют величины более сложной природы, чем скаляры и векторы. Об одном важном типе таких величин — так называемых *тензорах* — будет идти речь в следующей главе.

массы, а значения этой производной образуют скалярное поле, называемое полем плотности массы. Аналогично, рассматривая некоторое непрерывное распределение зарядов по пространственной области Ω , мы приходим к скалярному полю плотности электрического заряда. Число подобных примеров можно было бы увеличить.

Наряду с полями, заданными в пространственных областях, часто приходится рассматривать и плоские скалярные поля. Примером такого поля может служить освещенность части плоскости, создаваемая каким-либо источником света.

2. Поверхности и линии уровня. Если $U(M)$ — некоторое скалярное поле, то, введя в области, где задано поле, декартовы координаты, можно представить это поле в виде функции $U(x, y, z)$ координат точки M^*). Эту функцию мы всегда будем в дальнейшем предполагать непрерывной и имеющей в рассматриваемой области непрерывные частные производные первого порядка по x , y и z .

Задание скалярного поля с помощью фиксированной системы координат и соответствующей функции $U(x, y, z)$ не всегда дает достаточно ясное представление о поведении этого поля. Для получения более наглядной картины удобно пользоваться так называемыми поверхностями уровня. *Поверхностью уровня скалярного поля $U(M)$ называется геометрическое место точек, в которых поле $U(M)$ имеет данное фиксированное значение C .* Уравнение поверхности уровня имеет вид $^{**})$

$$U(x, y, z) = C. \quad (6.1)$$

Ясно, что поверхности уровня (отвечающие различным C) заполняют всю область, в которой определено поле, и никакие две поверхности

$$U(x, y, z) = C_1 \quad \text{и} \quad U(x, y, z) = C_2$$

не имеют общих точек. Задание всех поверхностей уровня с отмет-

*) Вид этой функции зависит, конечно, не только от рассматриваемого поля, но и от выбора системы координат. Но если система координат считается фиксированной, то понятие скалярного поля просто совпадает с понятием функции трех переменных. Мы, однако, будем все время пользоваться термином «поле», подчеркивая этим, что речь идет здесь, как правило, о величинах, имеющих непосредственный физический смысл, не связанный с выбором той или иной системы координат.

**) При сделанных выше предположениях относительно функции $U(x, y, z)$ такое уравнение действительно определяет некоторую гладкую поверхность, если только точки, удовлетворяющие равенству (6.1) (при данном C), вообще существуют и если в этих точках производные $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ не обращаются в нуль одновременно (см. вып. 1, гл. 14, § 4).

кой на них соответствующих значений C равносильно заданию самого поля $U(M)$. Взаимное расположение поверхностей уровня в пространстве дает наглядное представление о соответствующем скалярном поле.

Указанный способ изображения поля особенно удобен тогда, когда речь идет о поле, заданном не в пространственной, а в плоской области. Такое поле описывается функцией двух переменных $U(x, y)$.

Равенство вида $U(x, y) = C$ определяет, вообще говоря, некоторую кривую. Такие кривые называются *линиями уровня* плоского скалярного поля $U(M)$. С помощью линий уровня обычно изображается рельеф местности на топографических картах, а именно, на них проводятся линии, состоящие из точек, имеющих одну и ту же высоту

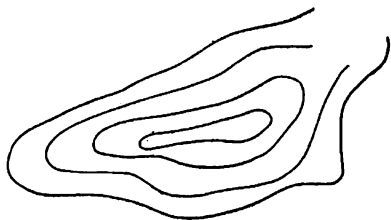


Рис. 6.1.

над уровнем моря; эти линии называются горизонтальями (рис. 6.1). Распределение температур, давлений, количества осадков и т. п. обычно также изображается на специальных картах с помощью соответствующих линий уровня (называемых изотермами в случае температур, изобарами, когда речь идет о давлениях, и т. д.).

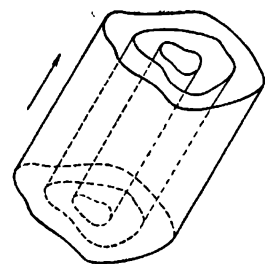


Рис. 6.2.

3. Различные типы симметрии полей.

Во многих физических задачах приходится иметь дело с полями, обладающими теми или иными специальными свойствами симметрии, облегчающими изучение таких полей. Укажем некоторые частные случаи.

а) *Плоскопараллельное поле.* Если скалярное поле $U(M)$ в какой-либо декартовой системе координат можно описать

функцией, зависящей не от трех, а только от двух координат, скажем, функцией вида $U(x, y)$, то такое поле называется *плоскопараллельным* (или *двумерным*). Иначе говоря, поле $U(M)$ называется плоскопараллельным, если в пространстве существует направление, при сдвигах вдоль которого поле $U(M)$ переходит само в себя. Поверхности уровня такого поля — это семейство цилиндрических поверхностей (рис. 6.2); в соответствующем образе выбранной системы координат они задаются уравнениями вида $U(x, y) = C$.

б) *Осесимметрическое поле.* Если для поля $U(M)$ можно подобрать такую цилиндрическую систему координат, в которой оно изображается функцией, зависящей только от переменных

$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ и z (но не от угла φ), то это поле называется *осесимметрическим*. Иначе говоря, поле $U(M)$ осесимметрическое, если оно переходит само в себя при повороте пространства (на произвольный угол) вокруг некоторой фиксированной прямой — оси симметрии этого поля. Поверхности уровня такого поля представляют собой, очевидно, поверхности вращения (рис. 6.3). Если эти

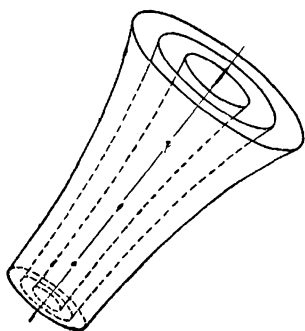


Рис. 6.3.

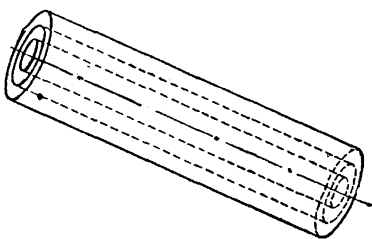


Рис. 6.4.

поверхности вращения — круглые цилиндры (рис. 6.4), т. е. если поле $U(M)$ в соответствующей цилиндрической системе координат изображается функцией, зависящей лишь от одной координаты r (расстояния точки от оси симметрии поля), то $U(M)$ называется *цилиндрическим* полем.

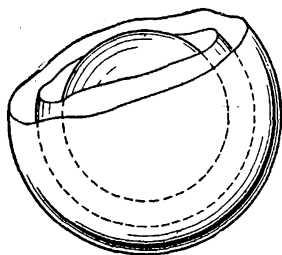


Рис. 6.5.

в) *Сферическое поле*. Если значения $U(M)$ зависят лишь от расстояния точки M от некоторой фиксированной точки M_0 , то такое поле называется *сферическим*. Поверхности уровня сферического поля — семейство концентрических сфер (рис. 6.5).

4. Производная по направлению. При изучении скалярного поля методами анализа мы должны в первую очередь описать его локальные свойства, т. е. изменение величины $U(M)$ при переходе от данной точки M к близким точкам. Для этого мы используем производную поля по направлению. Напомним это понятие.

Пусть $U(M)$ — скалярное поле. Рассмотрим две близкие точки M и M' и составим отношение

$$\frac{U(M') - U(M)}{h}, \quad (6.2)$$

где h — длина отрезка MM' . Пусть точка M' приближается к M , причем направление отрезка MM' все время совпадает с направле-

нием фиксированного единичного вектора λ . Если при этом отношение (6.2) стремится к некоторому пределу, то этот предел называется *производной скалярного поля $U(M)$ в точке M по направлению λ* и обозначается

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \lambda}.$$

Производная $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$ характеризует *скорость изменения величины $U(M)$ в направлении λ* .

Для вычисления $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$ выберем некоторую систему координат и представим $U(M)$ в виде $U(x, y, z)$.

Пусть направление λ образует с осями координат углы α , β и γ . Тогда

$$MM' = h(i \cos \alpha + j \cos \beta + k \cos \gamma)$$

и

$$U(M') = U(x + h \cos \alpha, y + h \cos \beta, z + h \cos \gamma), \quad (6.3)$$

а производная $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$ совпадает с производной по h от сложной функции (6.3) при $h=0$. Дифференцируя, получаем

$$\frac{\partial U(M)}{\partial \lambda} = \frac{\partial U(M')}{\partial h} \Big|_{h=0} = \frac{\partial U}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial U}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial U}{\partial z} \cos \gamma. \quad (6.4)$$

5. Градиент скалярного поля. Выражение (6.4) можно рассматривать как скалярное произведение двух векторов: единичного вектора

$$\lambda = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

определяющего направление, по которому берется производная $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$, и вектора, имеющего компоненты

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \quad \frac{\partial U}{\partial y}, \quad \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Этот вектор называется *градиентом* скалярного поля U и обозначается символом

$$\text{grad } U.$$

Таким образом,

$$\text{grad } U = \left(\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (6.5)$$

и, следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = (\text{grad } U, \lambda). \quad (6.6)$$

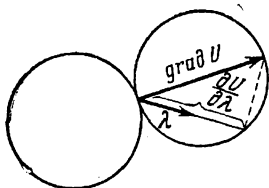
Рис. 6.6 дает наглядную интерпретацию выражения производной по направлению как проекции $\text{grad } U$ на это направление.

Из формулы (6.6), которую можно переписать в виде

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = |\text{grad } U| \cos \varphi$$

(где φ — угол между $\text{grad } U$ и единичным вектором λ), видно, что в каждой точке, в которой $\text{grad } U \neq 0$, существует единственное направление, по которому $\frac{\partial U}{\partial \lambda}$ имеет наибольшее значение, т. е. единственное направление наибо́льшего возрастания функции U . Это направление совпадает с направлением вектора $\text{grad } U$. Действительно, для этого направления $\varphi = 0$ и, следовательно,

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = |\text{grad } U|.$$



в то время как для всех других направлений

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = |\text{grad } U| \cos \varphi < |\text{grad } U|.$$

Рис. 6.6.

Итак, мы получили, что направление вектора $\text{grad } U$ — это направление наибо́льшего возрастания величины U , а длина вектора $\text{grad } U$ равна скорости возрастания величины U в этом направлении.

Однако ни направление наибо́льшего возрастания функции, ни величина ее производной в этом направлении не зависят, очевидно, от выбора системы координат. Мы установили, таким образом, что *градиент скалярного поля зависит лишь от самого поля, но не от выбора системы координат* (хотя из равенства (6.5), принятого нами за определение градиента, это сразу и не видно).

Производные $\frac{\partial U}{\partial x}$, $\frac{\partial U}{\partial y}$, $\frac{\partial U}{\partial z}$ в данной точке M — это компоненты вектора, нормального к поверхности $U(x, y, z) = \text{const}$, проходящей через эту точку*). Таким образом, в каждой точке поля U градиент поля направлен по нормали к поверхности уровня, проходящей через эту точку.

*) Действительно, если направление λ лежит в плоскости, касательной к поверхности $U(x, y, z) = \text{const}$, то производная по этому направлению равна нулю:

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = (\text{grad } U, \lambda) = 0,$$

т. е. $\text{grad } U$ ортогонален любому вектору, лежащему в касательной плоскости.

Назовем линией градиента*) скалярного поля U всякую кривую, касательная к которой в каждой ее точке направлена по $\text{grad } U$ в этой же точке. Таким образом, линии градиента поля — это те линии, вдоль которых поле U меняется быстрее всего.

Можно показать, что если функция $U(x, y, z)$ имеет непрерывные частные производные до 2-го порядка включительно, то через каждую точку области, в которой задано поле U , проходит одна и только одна линия градиента. В каждой точке линия градиента ортогональна той поверхности уровня, на которой эта точка лежит.

§ 2. Векторные поля

1. Определение и примеры векторных полей. Мы говорим, что в некоторой области Ω определено векторное поле, если каждой точке M этой области поставлен в соответствие определенный вектор $A(M)$.

Один из важных примеров векторных полей, к которому мы будем неоднократно возвращаться, — это поле скоростей стационарного потока жидкости. Оно определяется так: пусть область Ω заполнена жидкостью, текущей в каждой точке с некоторой скоростью v , не зависящей от времени (но различной, вообще говоря, в разных точках); поставив в соответствие каждой точке M из Ω вектор $v = v(M)$, мы получим векторное поле, называемое полем скоростей.

Другой важный пример векторного поля — это поле тяготения. Пусть в пространстве распределена некоторая масса. Тогда на материальную точку с массой 1, помещенную в данную точку M , действует некоторая гравитационная сила. Эти силы, определенные в каждой точке, образуют векторное поле, называемое полем тяготения (отвечающим данному распределению масс) или гравитационным полем.

Если в пространстве распределены каким-либо образом электрические заряды, то на единичный электрический заряд, помещенный в точку M , эти заряды действуют с определенной силой $F(M)$. Образованное этими силами векторное поле называется электростатическим полем.

И поле тяготения, и электрическое поле представляют собой примеры силовых полей.

Если $A(M)$ — некоторое векторное поле в пространстве, то, взяв в этом пространстве какую-либо декартову систему координат, мы можем представить $A(M)$ как совокупность трех скалярных функций — компонент этого вектора. Эти компоненты мы будем обозначать, как правило, $P(x, y, z)$, $Q(x, y, z)$ и $R(x, y, z)$. В дальнейшем мы

*) Ср. с общим определением векторной линии в следующем параграфе.

будем рассматривать векторные поля, компоненты которых непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка *).

2. Векторные линии и векторные трубки. Пусть в области Ω задано векторное поле $\mathbf{A}(M)$. Кривая L , лежащая в Ω , называется *векторной линией*, если в каждой точке этой кривой направление касательной к ней совпадает с направлением вектора \mathbf{A} в этой же точке. В частности, если поле \mathbf{A} есть поле скоростей стационарного потока жидкости, то его векторные линии — это траектории частиц жидкости.

В вопросах, связанных с изучением полей, важную роль играет задача о нахождении векторной линии поля \mathbf{A} , проходящей через данную точку M_0 .

Аналитически эта задача формулируется, очевидно, так: требуется найти вектор-функцию $\mathbf{r}(t)$, удовлетворяющую условиям

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) &= \lambda \mathbf{A}, \\ \mathbf{r}(t_0) &= \mathbf{r}_0,\end{aligned}\tag{6.7}$$

где \mathbf{r}_0 — радиус-вектор начальной точки M_0 , t_0 — начальный момент времени, а λ — произвольная числовая величина. Можно показать, что если компоненты P , Q , R вектора \mathbf{A} — непрерывно дифференцируемые функции координат, ни в одной точке не обращающиеся в нуль одновременно, то условия (6.7) действительно определяют в той области, в которой задано поле \mathbf{A} , одну и только одну векторную линию **).

Ограниченная некоторой поверхностью Σ часть пространства, в котором задано векторное поле \mathbf{A} , называется *векторной трубкой*, если в каждой точке поверхности Σ нормаль к Σ ортогональна вектору \mathbf{A} в этой же точке. Иначе говоря, *векторная трубка* — это часть пространства, состоящая из целых векторных линий; каждая векторная линия или целиком лежит внутри данной векторной трубки, или находится целиком вне ее. Можно сказать, что поверхность Σ , ограничивающая векторную трубку, соткана из векторных линий.

Если снова представить себе векторное поле \mathbf{A} как поле скоростей движущейся жидкости, то векторная трубка — это та часть пространства, которую «заметает» при своем перемещении некоторый фиксированный объем жидкости.

3. Различные виды симметрии векторных полей. Изучение векторного поля (как и скалярного) существенно облегчается, если это поле обладает теми или иными свойствами симметрии. Перечислим некоторые важнейшие частные случаи.

*) Ясно, что если это условие выполнено в какой-либо одной декартовой системе координат, то оно выполнено и в любой другой системе.

**) Это следует из теоремы существования и единственности решения для систем дифференциальных уравнений (см. вып. 3, гл. 1, § 6).

а) *Плоскопараллельное поле*. Если для данного векторного поля \mathbf{A} можно подобрать декартову систему координат, в которой компоненты поля \mathbf{A} имеют вид $P(x, y)$, $Q(x, y)$, $R(x, y)$ (т. е. не зависят от z), то поле \mathbf{A} называется *плоскопараллельным*. Если при этом $R(x, y) = 0$, то поле \mathbf{A} называется *плоским*. Примером такого поля может служить поле скоростей жидкости, скорости частиц которой параллельны некоторой фиксированной плоскости и не зависят от расстояния частицы до данной плоскости (плоский поток). Векторные линии такого поля — плоские кривые (одни и те же в каждой параллельной плоскости).

б) *Осесимметрическое поле*. Векторное поле \mathbf{A} называется *осесимметрическим*, если существует такая цилиндрическая система координат r, φ, z , что в каждой точке M вектор $\mathbf{A}(M)$ зависит лишь от r и z , но не от φ . Иными словами, такое поле переходит само в себя при повороте вокруг оси z . Если вектор $\mathbf{A}(M)$ зависит только от r , то поле называется *цилиндрическим*.

в) *Одномерное поле*. Векторное поле называется *одномерным*, если существует такая декартова система координат, в которой компоненты этого поля имеют вид $P(x)$, $0, 0$. Векторные линии такого поля представляют собой, очевидно, совокупность всех прямых, параллельных оси x .

4. Поле градиента. Потенциальное поле. Рассмотрим снова некоторое скалярное поле $U(M)$. Построив в каждой точке M вектор $\text{grad } U$, мы получим векторное поле — поле градиента скалярной величины U . Введем следующее

Определение. Векторное поле $\mathbf{A}(M)$ называется *потенциальным*, если его можно представить как градиент некоторого скалярного поля $U(M)$:

$$\mathbf{A} = \text{grad } U.$$

Само скалярное поле U называется при этом *потенциалом векторного поля \mathbf{A}* .

Рассмотрим следующий пример. Пусть $U = f(r)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ (т. е. U — сферическое поле). Найдем $\text{grad } U$. Имеем

$$\frac{\partial U}{\partial x} = f'(r) \frac{\partial r}{\partial x} = f'(r) \frac{x}{r}.$$

Аналогично

$$\frac{\partial U}{\partial y} = f'(r) \frac{y}{r} \quad \text{и} \quad \frac{\partial U}{\partial z} = f'(r) \frac{z}{r}.$$

Таким образом,

$$\text{grad } U = f'(r) \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad (6.8)$$

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}.$$

Если векторное поле \mathbf{A} имеет потенциал, то этот потенциал определяется полем \mathbf{A} однозначно, с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Действительно, если скалярные поля U и V имеют один и тот же градиент, то

$$\text{grad}(U - V) \equiv 0.$$

Но тогда и производная от $U - V$ по любому направлению равна нулю в любой точке, откуда сразу следует, что

$$U - V = \text{const.}$$

Векторные линии потенциального поля \mathbf{A} представляют собой, разумеется, линии градиента его потенциала U , т. е. линии наибыстрейшего изменения этого потенциала.

Естественно возникает вопрос об условиях, при которых данное векторное поле \mathbf{A} потенциально. Фактически этот вопрос мы уже рассмотрели в гл. 5. Действительно, там было показано (теорема 5.2), что выражение

$$P dx + Q dy + R dz$$

(где P, Q, R — непрерывные функции, имеющие непрерывные частные производные 1-го порядка) служит полным дифференциалом некоторой однозначной функции $U(x, y, z)$ в том и только том случае, если P, Q, R удовлетворяют условиям *):

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}. \quad (6.9)$$

Но если

$$P dx + Q dy + R dz = dU,$$

то

$$P = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Q = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad R = \frac{\partial U}{\partial z},$$

т. е. условие (6.9) как раз и означает, что поле (P, Q, R) потенциально.

Итак, для того чтобы векторное поле $\mathbf{A} = (P, Q, R)$, имеющее непрерывные и непрерывно дифференцируемые компоненты, было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись равенства (6.9).

Если \mathbf{A} — потенциальное векторное поле, то фактическое нахождение его потенциала сводится к нахождению функции по ее полному дифференциалу — задаче, которую мы рассматривали в § 4 гл. 5 (формула (5.43)), а для двух переменных — в § 4 гл. 4 (формула (4.50)).

*) Мы считаем, что область, в которой определено векторное поле \mathbf{A} , односвязна.

К понятию потенциального поля мы еще вернемся в п. 5 § 4.

Пример. Пусть в начало координат O помещена масса m . Если теперь в некоторую точку $M(x, y, z)$ поместить единичную массу, то на нее будет действовать сила притяжения, равная

$$F = -\gamma \frac{m}{r^3} \mathbf{r} \quad (\mathbf{r} = xi + yj + zk).$$

Эти силы, определяемые в каждой точке пространства, образуют векторное поле — поле тяготения точечной массы m . Его можно представить как градиент скалярной величины

$$\frac{\gamma m}{r},$$

называемой ньютоновским потенциалом точечной массы m . В самом деле, воспользовавшись формулой (6.8), получаем

$$\text{grad } \frac{\gamma m}{r} = -\gamma \frac{m}{r^3} \mathbf{r}.$$

§ 3. Поток векторного поля. Дивергенция

1. Поток векторного поля через поверхность. В предыдущей главе (§ 2) мы показали, что количество жидкости, протекающей за единицу времени через данную (ориентированную) поверхность Σ , равно интегралу

$$\int_{\Sigma} \int A_n d\sigma,$$

где A_n — нормальная составляющая вектора скорости $\mathbf{A} = (P, Q, R)$.

Эту величину мы назвали потоком жидкости через поверхность Σ . Пусть теперь \mathbf{A} — произвольное векторное поле и Σ — ориентированная поверхность. Поверхностный интеграл

$$\int_{\Sigma} \int A_n d\sigma$$

мы назовем *поток векторного поля \mathbf{A} через поверхность Σ* . Таким образом, если \mathbf{A} — скорость движения жидкости, то поток вектора \mathbf{A} через некоторую поверхность равен количеству жидкости, протекающей через эту поверхность за единицу времени. Для векторного поля иной природы поток имеет, конечно, другой физический смысл.

Пример. Пусть $U = U(x, y, z)$ — поле температур внутри некоторого тела, k — коэффициент теплопроводности и $\mathbf{A} = \text{grad } U$. Согласно закону Фурье, количество тепла dQ , протекающее за

единицу времени через элемент $d\sigma$ некоторой поверхности Σ , выражается формулой

$$dQ = -k \frac{\partial U}{\partial n} d\sigma, \quad (6.10)$$

где $\frac{\partial U}{\partial n}$ — производная поля температур в направлении нормали к $d\sigma$. (Знак минус в правой части равенства (6.10) отвечает тому известному факту, что тепло течет от более нагретых частей тела к менее нагретым, т. е. в направлении убывания U .) Так как

$$\frac{\partial U}{\partial n} = (\text{grad } U)_n,$$

то равенство (6.10) можно переписать в виде

$$dQ = -k (\text{grad } U)_n d\sigma,$$

из которого следует, что количество тепла Q , протекающего за единицу времени через всю поверхность Σ , равно

$$Q = - \int_{\Sigma} \int k (\text{grad } U)_n d\sigma. \quad (6.11)$$

Введя вектор

$$\mathbf{q} = -k \text{grad } U,$$

называемый вектором потока тепла, получаем

$$Q = \int_{\Sigma} \int q_n d\sigma.$$

Таким образом, количество тепла, протекающее через Σ за единицу времени, равно потоку вектора \mathbf{q} через поверхность Σ (отсюда и название «вектор потока тепла»).

2. Дивергенция. Пусть \mathbf{A} — некоторое векторное поле, которое мы снова будем представлять себе как поле скоростей несжимаемой жидкости. Поскольку жидкость несжимаема, поток

$$\Pi = \int_{\Sigma} \int A_n d\sigma$$

вектора \mathbf{A} через какую-либо замкнутую поверхность Σ *) равен, очевидно, количеству жидкости, которое за единицу времени возникает или уничтожается в пределах той пространственной области Ω , границей которой служит Σ . Назовем это количество *суммарной мощностью источников* (если $\Pi > 0$) или *стоков* (если $\Pi < 0$),

*) Мы условимся рассматривать *внешнюю* сторону этой поверхности.

расположенных в области Σ . Рассмотрим отношение

$$\frac{\int_{\Sigma} \int A_n d\sigma}{V(\Omega)}$$

потока жидкости через поверхность Σ к объему области Ω , ограниченной этой поверхностью. Оно представляет собой среднюю плотность источников (или стоков), т. е. количество жидкости, возникающей (исчезающей) за единицу времени в единице объема области Ω . Рассмотрим, наконец, предел

$$\lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{\int_{\Sigma} \int A_n d\sigma}{V(\Omega)}$$

этого отношения, где знак $\lim_{\Omega \rightarrow M}$ означает предел при условии, что область Ω стягивается к некоторой фиксированной точке M . Этот предел можно назвать плотностью источников (стоков) в точке M . Он представляет собой скалярную величину и служит важной характеристикой исходного поля.

Рассмотрев этот пример, перейдем к общим определениям.

Пусть A — некоторое векторное поле. Поставим в соответствие каждой пространственной области Ω , ограниченной гладкой или кусочно-гладкой поверхностью Σ , величину

$$\int_{\Sigma} \int A_n d\sigma$$

— поток вектора A через внешнюю сторону поверхности Σ . Мы получим некоторую функцию области $\Phi(\Omega)$. Легко проверить, что эта функция аддитивна.

Определение. Производная функции $\Phi(\Omega)$ по объему, т. е. предел

$$\lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{\int_{\Sigma} \int A_n d\sigma}{V(\Omega)}, \quad (6.12)$$

называется дивергенцией векторного поля A и обозначается

$$\operatorname{div} A.$$

Таким образом, введенная нами для поля скоростей несжимаемой жидкости плотность источников представляет собой дивергенцию этого поля скоростей.

Теорема 6.1. Если $\mathbf{A} = (P, Q, R)$ — векторное поле, определенное в области Ω и такое, что функции P, Q, R непрерывны в Ω вместе со всеми своими первыми производными, то $\operatorname{div} \mathbf{A}$ существует во всех точках этой области и в любой декартовой системе координат выражается формулой

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \quad (6.13)$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Остроградского

$$\int_{\Sigma} \int A_n d\sigma = \int_{\Omega} \int \int \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dv.$$

В силу теоремы о производной тройного интеграла по объему (п. 5 § 1 гл. 2), производная по объему от правой части этого равенства существует и равна $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$. Следовательно, тому же самому выражению равна и производная по объему от левой его части. Но эта последняя и есть по определению $\operatorname{div} \mathbf{A}$.

Замечание. Часто равенство

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$$

принимают за определение дивергенции. Однако это определение менее удобно, чем принятое нами, так как оно опирается на выбор той или иной системы координат, и мы должны еще доказывать, что сумма $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ от выбора системы координат не зависит. А независимость от выбора системы координат выражения (6.12) очевидна.

Итак, каждому векторному полю \mathbf{A} , компоненты которого непрерывны и имеют непрерывные частные производные, мы поставили в соответствие скалярную функцию $\operatorname{div} \mathbf{A}$. Пользуясь этим понятием, мы можем теперь формулу Остроградского записать так:

$$\int_{\Sigma} \int A_n d\sigma = \int_{\Omega} \int \int \operatorname{div} \mathbf{A} dv, \quad (6.14)$$

т. е. поток вектора \mathbf{A} через внешнюю сторону замкнутой поверхности Σ равен интегралу от дивергенции поля \mathbf{A} , взятому по области, ограниченной поверхностью Σ .

3. Физический смысл дивергенции для различных полей. Примеры.

а) Мы уже выяснили, что для поля скоростей \mathbf{A} несжимаемой жидкости, движущейся в некоторой пространственной области,

выражение

$$\int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{A} \, dv$$

представляет собой суммарную мощность источников, расположенных в области Ω , а $\operatorname{div} \mathbf{A}$ — это плотность источников (т. е. их мощность, приходящаяся на единицу объема). В частности, если \mathbf{A} — поле скоростей несжимаемой жидкости, у которой нет ни стоков, ни источников, то

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0.$$

б) Рассмотрим теперь поле тяготения, создаваемое некоторым распределением масс. Выясним, что представляет собой дивергенция такого поля. Рассмотрим сначала поле, создаваемое массой m_0 , сосредоточенной в точке (x_0, y_0, z_0) . В этом случае единичная масса, помещенная в точку (x, y, z) , притягивается с силой

$$\mathbf{F} = \left(\gamma m_0 \frac{x - x_0}{r^3}, \quad \gamma m_0 \frac{y - y_0}{r^3}, \quad \gamma m_0 \frac{z - z_0}{r^3} \right) \quad (6.15)$$

$$(r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}).$$

Здесь γ — постоянная тяготения, зависящая от выбора единиц. Ниже мы γ писать не будем, считая, что система единиц выбрана так, что $\gamma = 1$. Вычислим дивергенцию силового поля (6.15). В каждой точке, отличной от точки (x_0, y_0, z_0) , имеем

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(m_0 \frac{x - x_0}{r^3} \right) = m_0 \frac{r^3 - 3(x - x_0)^2 r}{r^6} = m_0 \frac{r^2 - 3(x - x_0)^2}{r^5},$$

аналогично

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(m_0 \frac{y - y_0}{r^3} \right) = m_0 \frac{r^2 - 3(y - y_0)^2}{r^5},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(m_0 \frac{z - z_0}{r^3} \right) = m_0 \frac{r^2 - 3(z - z_0)^2}{r^5}.$$

Складывая, получаем

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = m_0 \frac{3r^2 - 3(x - x_0)^2 - 3(y - y_0)^2 - 3(z - z_0)^2}{r^5} = 0.$$

Однако в точке (x_0, y_0, z_0) приведенные выкладки теряют смысл, и в этой точке значение $\operatorname{div} \mathbf{F}$ вообще не определено. Поэтому и значение интеграла

$$\int \int \int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} \, dv$$

не может быть получено непосредственным вычислением, если область Ω содержит точку (x_0, y_0, z_0) . Таким образом, выражение,

стоящее в формуле Остроградского (6.14) справа, в нашем случае не определено. Однако мы легко можем найти величину, стоящую в этой формуле слева, т. е. поток вектора \mathbf{F} через поверхность Σ , ограничивающую объем Ω . Сделаем это. Пусть сначала Σ — сфера некоторого радиуса a с центром в точке (x_0, y_0, z_0) . В каждой точке такой сферы направление вектора (6.15) совпадает с направлением нормали к этой сфере. Поэтому проекция вектора (6.15) на нормаль в данном случае равна длине этого вектора, т. е. постоянной величине $\frac{m_0}{a^2}$. Следовательно,

$$\int_{\Sigma} \int F_n d\sigma = \frac{m_0}{a^2} 4\pi a^2 = 4\pi m_0.$$

Заменив сферу Σ любой другой замкнутой поверхностью Σ_1 , охватывающей точку (x_0, y_0, z_0) , мы получим тот же самый результат. Действительно, выберем сферу Σ настолько малой, чтобы она целиком содержалась внутри Σ_1 . Тогда

$$\int_{\Sigma_1} \int F_n d\sigma - \int_{\Sigma} \int F_n d\sigma = 0,$$

так как левая часть этого равенства представляет собой поток вектора \mathbf{F} через границу пространственной области, в которой

$$\operatorname{div} \mathbf{F} \equiv 0.$$

Следовательно,

$$\int_{\Sigma_1} \int F_n d\sigma = \int_{\Sigma} \int F_n d\sigma.$$

Рассмотрим теперь поле тяготения, создаваемое несколькими точечными массами. Это поле равно сумме полей, создаваемых каждой массой в отдельности. Поток суммы полей через некоторую поверхность Σ равен, очевидно, сумме потоков слагаемых; отсюда вытекает, что поток через некоторую замкнутую поверхность поля тяготения, создаваемого системой материальных точек, равен сумме находящихся внутри этой поверхности масс, умноженной на 4π .

С помощью предельного перехода от системы материальных точек к массе, непрерывно распределенной по пространству с объемной плотностью $\rho(x, y, z)$, можно показать*), что при непрерывном распределении масс поток гравитационного поля через замкнутую поверхность Σ равен заключенной внутри этой поверхности массе, умноженной на 4π . Но эта же масса может быть представлена как

*) Строгое обоснование этого предельного перехода относится к так называемой теории потенциала; оно опирается на теорию интегралов, зависящих от параметра, основы которой излагаются в гл. 10.

интеграл от плотности $\rho(x, y, z)$, взятый по объему Ω , ограниченному поверхностью Σ . Таким образом, обозначая по-прежнему символом $F(x, y, z)$ значение гравитационного поля в точке (x, y, z) , имеем

$$\iint_{\Sigma} F_n(x, y, z) d\sigma = 4\pi \iiint_{\Omega} \rho(x, y, z) dv,$$

откуда

$$4\pi\rho(x, y, z) = \lim_{\Omega \rightarrow (x, y, z)} \frac{\iint_{\Sigma} F_n d\sigma}{V(\Omega)},$$

стоящий здесь справа предел представляет собой дивергенцию векторного поля F . Итак, окончательно получаем: *дивергенция гравитационного поля, создаваемого некоторым распределением масс, равна объемной плотности $\rho(x, y, z)$ этого распределения, умноженной на 4π .*

в) Те же самые рассуждения, которые мы провели для поля тяготения, можно повторить и для электростатического поля и показать, что дивергенция такого поля равна плотности зарядов, умноженной на 4π . (Это утверждение, известное в электростатике под названием теоремы Гаусса, широко используется в различных задачах, связанных с электростатическими полями, например при вычислении напряженности поля в конденсаторах различной формы.)

4. Соленоидальное поле. Векторное поле, дивергенция которого тождественно равна нулю, называется *соленоидальным* *) или *трубчатым*. Примером соленоидального поля может служить, как мы видели выше, поле скоростей несжимаемой жидкости при отсутствии стоков и источников, т. е. при условии, что ни в одной точке жидкость не исчезает и не возникает.

Для соленоидальных полей имеет место так называемый *закон сохранения интенсивности векторной трубки*, состоящий в следующем.

Пусть A — соленоидальное поле. Рассмотрим некоторую векторную трубку и возьмем ее отрезок, заключенный между двумя ее сечениями Σ_1 и Σ_2 (рис. 6.7). Эти сечения вместе с боковой поверхностью Σ_3 трубки образуют замкнутую поверхность Σ . Так как поле соленоидально, т. е. $\operatorname{div} A \equiv 0$, то,

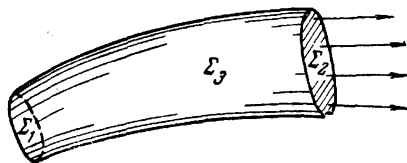


Рис. 6.7.

*) От греческого слова σῶλην (солен) — трубка.

в силу формулы Остроградского,

$$\int_{\Sigma} A_n d\sigma = 0.$$

Но

$$\int_{\Sigma} A_n d\sigma = \int_{\Sigma_1} A_n d\sigma + \int_{\Sigma_2} A_n d\sigma + \int_{\Sigma_3} A_n d\sigma, \quad (6.16)$$

причем в каждом из слагаемых имеется в виду внешняя сторона поверхности. Третье из стоящих справа слагаемых равно нулю, так как по определению векторной трубки на поверхности Σ_3 направление векторного поля \mathbf{A} перпендикулярно направлению нормали к этой поверхности, т. е. на Σ_3

$$A_n \equiv 0.$$

Если мы теперь на сечении Σ_1 направление нормали изменим на противоположное, то равенство (6.16) переписется в виде

$$\int_{\Sigma_1} A_n d\sigma = \int_{\Sigma_2} A_n d\sigma, \quad (6.17)$$

т. е. поток вектора \mathbf{A} через любое сечение векторной трубки имеет одно и то же значение. Если поле вектора \mathbf{A} представлять себе как поле скоростей несжимаемой жидкости при отсутствии источников и стоков, то равенство (6.17) означает: *количество жидкости, протекающей за единицу времени через сечение векторной трубки, одно и то же для всех сечений этой трубки.*

5. Уравнение неразрывности. В качестве применения изложенных выше понятий дадим вывод одного из основных уравнений движения жидкости, так называемого уравнения неразрывности. Пусть \mathbf{A} — поле скоростей движущейся жидкости. Мы будем предполагать, что в рассматриваемой области жидкость не исчезает и не возникает. Однако в отличие от наших предыдущих рассмотрений мы будем предполагать эту жидкость сжимаемой, т. е. считать плотность ρ некоторой функцией координат x, y, z и времени t . Выясним, как связана скорость движения такой жидкости с изменением ее плотности. Для этой цели рассмотрим некоторый замкнутый объем Ω и подсчитаем двумя способами изменение ΔQ количества жидкости внутри этого объема за время Δt . Пусть $\rho(x, y, z, t)$ — плотность жидкости в момент t в точке x, y, z . Тогда, очевидно,

$$\Delta Q = \Delta t \int_{\Omega} \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dv.$$

С другой стороны, изменение количества жидкости внутри объема Ω равно умноженному на Δt потоку жидкости через поверхность Σ ,

ограничивающую этот объем, т. е. равно $-\Delta t \int_{\Sigma} \int (\rho \mathbf{A})_n d\sigma$, где

\mathbf{n} — наружная нормаль (знак минус берется потому, что если скорость направлена наружу, то количество жидкости в объеме уменьшается). Преобразовав этот поверхностный интеграл с помощью формулы Остроградского в объемный, получим

$$\Delta Q = -\Delta t \int_{\Omega} \int \int \operatorname{div} (\rho \mathbf{A}) dv.$$

Приравняв друг другу два выражения для ΔQ и сократив на Δt , будем иметь

$$-\int_{\Omega} \int \int \operatorname{div} (\rho \mathbf{A}) dv = \int_{\Omega} \int \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dv;$$

так как это равенство должно иметь место для любой области Ω , то равны между собой и подынтегральные выражения, т. е.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} (\rho \mathbf{A}). \quad (6.18)$$

Мы получили уравнение, связывающее между собой скорость и плотность движущейся жидкости при отсутствии источников и стоков. Оно называется *уравнением неразрывности*.

Если ввести вектор $\mathbf{J} = \rho \mathbf{A}$ — *плотность потока жидкости*, то уравнение неразрывности можно переписать так:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{J} = 0. \quad (6.18')$$

6. Плоское течение жидкости. Формула Остроградского на плоскости. Рассмотрим плоское векторное поле, т. е. поле, компоненты которого в некоторой декартовой системе координат имеют вид

$$P = P(x, y), \quad Q = Q(x, y), \quad R = 0 \quad (6.19)$$

(см. п. 3 § 2). Его можно представлять себе как поле скоростей жидкости, каждая частица которой движется параллельно фиксированной плоскости со скоростью, не зависящей от ее расстояния до этой плоскости (такое движение жидкости называется *плоским течением*). Дивергенция такого поля равна

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}.$$

Пусть Ω — цилиндр высоты единица, с основанием G , лежащим в плоскости xu , и боковой поверхностью Σ (рис. 6.8). Напишем для области Ω формулу Остроградского, предварительно заметив, что тройной интеграл от $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$ по Ω численно равен двойному интегралу

от этого выражения по плоской области G , поток вектора (6.19) через поверхность Σ равен криволинейному интегралу

$$\int_L [P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y)] dl,$$

где \mathbf{n} — нормаль к контуру L , а поток через верхнее и нижнее основания цилиндра Ω равен нулю (последнее вытекает из того, что вектор (6.19) перпендикулярен оси z). В силу сказанного, формула Остроградского для плоскопараллельного поля \mathbf{A} и цилиндрической области Ω имеет вид

$$\int_L [P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y)] dl = \int_G \int_G \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy. \quad (6.20)$$

Отбросим теперь окончательно третью координату z , будем рассматривать (6.19) как векторное поле, заданное в плоскости xy . Назовем криволинейный интеграл

$$\int_L [P \cos(\mathbf{n}, x) + Q \cos(\mathbf{n}, y)] dl \quad (6.21)$$

потокom этого векторного поля через контур L . Тогда формула (6.20), называемая *формулой Остроградского для плоскости*, означает, что двойной интеграл от дивергенции плоского поля \mathbf{A} по некоторой области G равен потоку вектора \mathbf{A} через границу этой области.

Легко убедиться в том, что формула (6.20) — просто эквивалент формулы Грина (4.45). Действительно, если мы, как обычно, обозначим через α угол между касательной к кривой и положительным направлением оси x , то

$$\cos(\mathbf{n}, x) = -\sin \alpha, \quad \cos(\mathbf{n}, y) = \cos \alpha,$$

поэтому интеграл (6.21) можно записать так:

$$\int_L (Q \cos \alpha - P \sin \alpha) dl,$$

или

$$\int_L Q dx - P dy.$$

Преобразовав этот криволинейный интеграл в двойной с помощью формулы Грина, мы и получим равенство (6.20). Это рассуждение

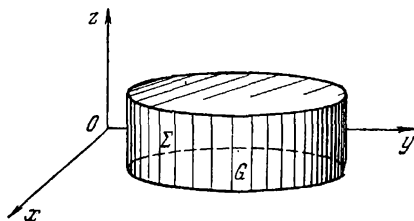


Рис. 6.8.

можно обратить, т. е. если равенство (6.20) установлено, то из него можно вывести формулу Грина.

Таким образом, как формула Стокса, так и формула Остроградского в плоском случае превращаются в формулу Грина.

§ 4. Циркуляция. Ротор

1. Циркуляция векторного поля. Пусть снова $\mathbf{A} = (P, Q, R)$ — некоторое векторное поле и L — гладкая или кусочно-гладкая кривая. Криволинейный интеграл

$$\int_L P dx + Q dy + R dz,$$

или, короче,

$$\int_L A_\tau dl,$$

где A_τ — тангенциальная составляющая поля \mathbf{A} на контуре L , мы назовем *циркуляцией векторного поля \mathbf{A} вдоль кривой L* . Если $\mathbf{A} = (P, Q, R)$ — силовое поле, то его циркуляция вдоль кривой L представляет собой, как мы уже знаем (см. § 2 гл. 4), работу этого силового поля вдоль пути L . Для полей иной природы циркуляция имеет, конечно, другой физический символ.

2. Ротор векторного поля. Запись формулы Стокса в векторных обозначениях. Если L — замкнутый контур, то криволинейный интеграл

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz$$

по этому контуру можно преобразовать в поверхностный, воспользовавшись формулой Стокса (5.41):

$$\begin{aligned} \oint_L P dx + Q dy + R dz = \\ = \int_\Sigma \left(\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy + \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx, \right. \end{aligned} \quad (6.22)$$

взятый по некоторой поверхности Σ , натянутой на контур L . Правая часть равенства (6.22) представляет собой поток через поверхность Σ вектора

$$\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (6.23)$$

Назовем этот вектор *ротором* (или *вихрем*) векторного поля \mathbf{A} и обозначим $\text{rot } \mathbf{A}$. Таким образом, по определению

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}. \quad (6.24)$$

Пользуясь понятием ротора, мы можем переписать формулу Стокса в следующем компактном виде:

$$\oint_L A_\tau dl = \int_\Sigma (\operatorname{rot} \mathbf{A})_n d\sigma, \quad (6.25)$$

т. е. циркуляция векторного поля \mathbf{A} вдоль некоторого замкнутого контура L равна потоку ротора этого векторного поля через поверхность, натянутую на этот контур.

В нашем определении ротора участвует не только само векторное поле \mathbf{A} , но и некоторая определенная система координат (x, y, z) . Однако на самом деле вектор $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ не зависит от выбора координатной системы, а определяется лишь исходным векторным полем \mathbf{A} . Чтобы убедиться в этом, воспользуемся формулой Стокса (6.25), считая, что поверхность Σ — это некоторая плоская площадка, а L — ограничивающий ее контур. Применив к стоящему в равенстве (6.25) справа поверхностному интегралу теорему о среднем, получим *)

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A}(M^*))_n = \frac{\oint_L A_\tau dl}{\sigma},$$

где M^* — некоторая точка, принадлежащая площадке Σ , а σ — площадь этой площадки. Будем теперь стягивать площадку Σ к некоторой фиксированной точке M так, чтобы направление нормали \mathbf{n} к этой площадке оставалось все время одним и тем же. В пределе получим

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A}(M))_n = \lim_{\Sigma \rightarrow M} \frac{\oint_L A_\tau dl}{\sigma}. \quad (6.26)$$

Циркуляция вектора \mathbf{A} вдоль контура не зависит от выбора координатной системы, поэтому из равенства (6.26) вытекает, что проекция $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ на направление нормали \mathbf{n} не зависит от выбора системы координат. Но направление нормали \mathbf{n} мы могли выбрать произвольно, поэтому проекция вектора $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ на любое направление, а следовательно, и сам вектор $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ не зависят от выбора системы координат **).

*) Как обычно, мы считаем, что компоненты P, Q, R векторного поля \mathbf{A} имеют непрерывные частные производные первого порядка по x, y и z .

**) Предполагается, что мы рассматриваем только правые системы координат. При переходе к левой системе координат (где положительным направлением вращения считается направление по часовой стрелке) вектор $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ изменит направление на противоположное.

3. Символическая запись ротора. Ротор векторного поля $\mathbf{A} = (P, Q, R)$ удобно записывать в виде символического детерминанта

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}, \quad (6.27)$$

где $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ — единичные векторы, направленные по осям координат, а под умножением символа $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ или $\frac{\partial}{\partial z}$ на некоторую функцию понимается выполнение соответствующей операции дифференцирования (например, $\frac{\partial}{\partial x} Q$ означает $\frac{\partial Q}{\partial x}$).

Действительно, разложив детерминант (6.27) по элементам первой строки, получим, что

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}.$$

4. Физический смысл ротора. Физический смысл ротора можно пояснить следующим образом. Будем снова рассматривать векторное поле \mathbf{A} как поле скоростей движущейся жидкости. Поместим в таком потоке, в определенной его точке, бесконечно малое колесико с лопастями, расположенными по окружности L этого колесика (рис. 6.9). Под воздействием потока жидкости такое колесико будет вращаться с некоторой скоростью, зависящей, вообще говоря, от направления оси колесика.

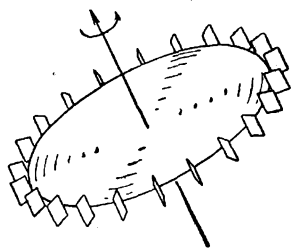


Рис. 6.9.

Естественно считать, что линейная скорость каждой точки окружности L по величине будет равна среднему произведению проекций вектора \mathbf{A} на направление касательной к L , т. е. будет выражаться формулой

$$v = \frac{1}{2\pi R} \oint_L A_\tau dl. \quad (6.28)$$

По формуле Стокса (6.25) криволинейный интеграл (6.28) можно преобразовать в поверхностный интеграл

$$\frac{1}{2\pi R} \int \int_\Sigma (\text{rot } \mathbf{A})_n d\sigma, \quad (6.29)$$

взятый по площади Σ рассматриваемого колесика. Считая это колесико бесконечно малым, мы можем записать интеграл $\int \int_{\Sigma} (\text{rot } \mathbf{A})_n d\sigma$ в виде произведения площади колесика на значение $(\text{rot } \mathbf{A})_n$ в его центре, т. е. в виде

$$\pi R^2 (\text{rot } \mathbf{A})_n.$$

В результате равенство (6.28) принимает вид

$$v = \frac{R}{2} (\text{rot } \mathbf{A})_n.$$

Максимально возможное значение проекции вектора на какое-либо направление есть модуль этого вектора. Поэтому, если направление оси колесика выбрать так, чтобы его скорость v была максимальной (это направление, очевидно, совпадает с направлением $\text{rot } \mathbf{A}$), то мы получим

$$v_{\max} = \frac{R}{2} |\text{rot } \mathbf{A}|$$

или

$$|\text{rot } \mathbf{A}| = \frac{2v_{\max}}{R}.$$

Но $\frac{v}{R}$ — это величина угловой скорости ω колесика. Итак, мы получили следующий результат: если колесико с лопастями ориентировано так, что скорость его вращения максимальна, то его угловая скорость равна половине $|\text{rot } \mathbf{A}|$, а направление оси совпадает с направлением вектора $\text{rot } \mathbf{A}$.

Таким образом, $\text{rot } \mathbf{A}$ характеризует «вращательную компоненту» поля скоростей; он равен удвоенной угловой скорости вращения бесконечно малой частицы жидкости.

Примеры. 1. Рассмотрим векторное поле с компонентами

$$P = -\omega y, \quad Q = x\omega, \quad R = 0.$$

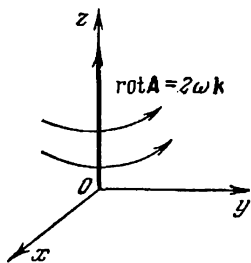


Рис. 6.10.

Это поле можно рассматривать как поле скоростей, отвечающее вращению всего пространства вокруг оси z с угловой скоростью ω . Ротор этого векторного поля равен, как легко проверить, $2\omega \mathbf{k}$, т. е. он направлен по оси вращения, а по величине равен удвоенной угловой скорости (рис. 6.10).

Физический смысл этого результата заключается в следующем. Всякая частица жидкости при вращении вокруг оси z участвует в двух движениях: в мгновенном переносном движении со скоростью $\mathbf{v} = (-\omega y, x\omega, 0)$ и в мгновенном вращательном движении. Легко

видеть, что мгновенная угловая скорость вращения любой частицы совпадает с угловой скоростью ω всего макроскопического движения жидкости. Поэтому поле мгновенных угловых скоростей частиц оказывается постоянным и равным ω . Значит, и поле ротора также постоянно и равно 2ω . Вся жидкость как бы заполнена бесконечно малыми вихрями.

2. Рассмотрим жидкость, текущую в постоянном направлении с постоянной скоростью, т. е. предположим, что P , Q и R постоянны. В этом случае $\text{rot } \mathbf{A} \equiv 0$.

3. Пусть $P = y$, $Q = 0$, $R = 0$. В этом случае

$$\text{rot } \mathbf{A} = -\mathbf{k}.$$

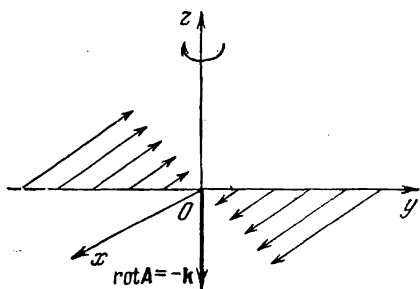


Рис. 6.11.

В последнем примере ротор в каждой точке отличен от нуля, хотя все векторные линии — прямые, параллельные плоскости yz . Это может показаться противоречащим утверждению, что $\text{rot } \mathbf{A}$ характеризует «вращательную компоненту» поля \mathbf{A} . Но на самом деле это не так. Здесь «вращательная компонента» обусловлена не искривлением векторных линий, а изменением скорости движения при изменении расстояния от плоскости yz . Легко сообразить, что колесико с лопастями, поставленное в поток жидкости, движущейся в каждой точке (x, y, z) со скоростью $(y, 0, 0)$, не будет находиться в покое, если только его ось вращения не перпендикулярна оси z .

4. Пусть векторное поле \mathbf{A} имеет компоненты

$$P = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad Q = \frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad R = 0. \quad (6.30)$$

Это поле можно рассматривать как поле скоростей жидкости, движущейся в плоскости xy по гиперболам $xy = C$ (рис. 6.12) так, что величина скорости в каждой точке равна 1. Найдем дивергенцию и ротор этого поля. Имеем

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^{3/2}}, \\ \text{rot } \mathbf{A} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \right] \mathbf{k} &= \frac{-2xy}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \mathbf{k}. \end{aligned}$$

Здесь дивергенция положительна, когда $|y| > |x|$, и отрицательна при $|y| < |x|$. Физически это означает, что движение несжимаемой жидкости, описываемое полем (6.30), возможно лишь тогда, когда

в тех областях, где $|y| > |x|$, имеются источники, а там, где $|y| < |x|$, имеют место стоки. Ротор поля (6.30), как и всякого плоскопараллельного поля, направлен в каждой точке по оси z , именно, его направление совпадает с положительным направлением оси z во второй и четвертой четвертях и с отрицательным направлением оси z в первой и третьей. И дивергенция, и ротор поля (6.30) стремятся к нулю, когда $x^2 + y^2 \rightarrow \infty$, т. е. по мере удаления от начала координат.

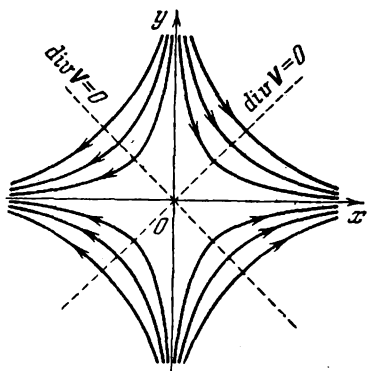


Рис. 6.12.

5. Еще раз о потенциальных и соленоидальных полях. Понятие ротора, рассмотренное в этом параграфе, непосредственно связано с определениями потенциального и соленоидального полей, введенными выше.

Мы назвали потенциальным векторное поле, представимое в виде градиента некоторого скалярного поля, и показали*), что векторное поле $\mathbf{A} = (P, Q, R)$ потенциально в том и только том случае, если его компоненты удовлетворяют условиям

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}, \quad \frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}.$$

Но эти три условия означают не что иное, как равенство нулю всех трех компонент ротора поля \mathbf{A} . Таким образом:

*Для того чтобы векторное поле \mathbf{A} было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие **)*

$$\text{rot } \mathbf{A} \equiv 0.$$

Понятие соленоидального поля, введенное в § 2, тоже связано с понятием ротора. Действительно, непосредственное вычисление показывает, что для любого векторного поля \mathbf{A}

$$\text{div}(\text{rot } \mathbf{A}) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = 0,$$

т. е. векторное поле, представимое в виде ротора какого-либо другого векторного поля, соленоидально. Можно показать (мы не будем этого делать), что верно и обратное, т. е. что *всякое соленоидальное поле можно представить в виде ротора некоторого век-*

*) Считая функции P, Q, R непрерывно дифференцируемыми, а область, в которой задано поле (P, Q, R) , односвязной.

**) Мы считаем, что поле \mathbf{A} задано в односвязной области и его компоненты дважды непрерывно дифференцируемы.

торного поля. Иными словами, для всякого поля \mathbf{A} , удовлетворяющего условию $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$, можно подобрать поле \mathbf{B} так, что $\mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{B}$. Это векторное поле \mathbf{B} определяется не однозначно, а с точностью до произвольного слагаемого вида $\operatorname{grad} U$.

Если $\mathbf{A} = \operatorname{rot} \mathbf{B}$, то поле \mathbf{B} называется *вектор-потенциалом* поля \mathbf{A} .

Хотя потенциальные и соленоидальные поля не исчерпывают всех векторных полей, любое векторное поле сводится к комбинации полей этих двух типов. Точнее говоря, можно доказать, что всякое векторное поле \mathbf{A} представимо в виде

$$\mathbf{A} = \mathbf{B} + \mathbf{C},$$

где \mathbf{B} потенциально, а \mathbf{C} соленоидально.

§ 5. Оператор Гамильтона

1. Символический вектор ∇ . В § 1 мы ввели понятие градиента скалярного поля. Переход от скалярного поля U к $\operatorname{grad} U$ можно рассматривать как некоторую операцию, во многом аналогичную по своим свойствам операции дифференцирования, с той, однако, разницей, что дифференцирование переводит скаляр в скаляр, в то время как здесь мы имеем переход от скаляра к вектору. Операцию перехода от U к $\operatorname{grad} U$ часто обозначают, следуя Гамильтону *), символом ∇ (читается «набла» **) и называют *оператором «набла»*, или *оператором Гамильтона*. Таким образом, по определению

$$\nabla U = \operatorname{grad} U.$$

Оператор ∇ удобно трактовать как символический вектор с компонентами $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial}{\partial z}$:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k},$$

а применение его к скалярной функции — как умножение скаляра на этот вектор ***).

*) У. Р. Гамильтон (1805—1865) — английский математик и механик.

**) Само название «набла» было также введено Гамильтоном. Наблой назывался старинный музыкальный инструмент, имевший треугольную форму.

***) Выше, например, при записи ротора как символического детерминанта мы уже видели, что операцию дифференцирования удобно представлять себе как «умножение» символа дифференцирования на ту функцию, производная которой вычисляется.

С помощью вектора ∇ удобно записывать и остальные операции векторного анализа, а именно, если $\mathbf{A} = (P, Q, R)$, то

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\partial}{\partial x} P + \frac{\partial}{\partial y} Q + \frac{\partial}{\partial z} R = (\nabla, \mathbf{A}),$$

т. е. дивергенция векторного поля \mathbf{A} есть скалярное произведение символического вектора ∇ и вектора \mathbf{A} . Аналогично

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{A} = & \left(\frac{\partial}{\partial y} R - \frac{\partial}{\partial z} Q \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z} P - \frac{\partial}{\partial x} R \right) \mathbf{j} + \\ & + \left(\frac{\partial}{\partial x} Q - \frac{\partial}{\partial y} P \right) \mathbf{k} = [\nabla, \mathbf{A}], \end{aligned}$$

т. е. ротор векторного поля \mathbf{A} есть векторное произведение вектора ∇ на вектор \mathbf{A} .

2. Действия с вектором ∇ . Целесообразность введения символического вектора ∇ состоит в том, что с его помощью удобно получать и записывать различные формулы векторного анализа. Кроме того, сами эти формулы приобретают в такой записи большую наглядность и выразительность. Вот простейшие примеры.

Выше мы с помощью непосредственных вычислений получили следующие два равенства:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U = 0$$

и

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0.$$

Переписав их с помощью вектора ∇ , получим

$$[\nabla, \nabla U] = 0$$

и

$$(\nabla, \nabla, \mathbf{A}) = 0.$$

Левая часть первого из этих равенств представляет собой «векторное произведение» (символическое) двух «векторов», отличающихся друг от друга лишь скалярным множителем, а во втором равенстве слева стоит «смешанное произведение» трех векторов, два из которых одинаковы. Следовательно, равенство нулю этих выражений находится в полном соответствии с основными законами векторной алгебры.

С помощью непосредственной проверки можно убедиться в том, что на вектор ∇ можно перенести многие из основных действий, известных для обычных векторов. Именно это обстоятельство и дает возможность получать с помощью вектора ∇ ряд формул векторного анализа, применяя аппарат векторной алгебры.

Следует, однако, иметь в виду, что аналогия между символическим вектором ∇ и «настоящими» векторами — не полная. Именно, формулы, содержащие символический вектор ∇ , аналогичны обычным

формулам векторной алгебры в том случае, если они не содержат произведений переменных величин (скалярных или векторных), т. е. до тех пор, пока нам не приходится применять входящие в ∇ операции дифференцирования к произведению переменных величин. Если же некоторое выражение содержит произведение двух или нескольких переменных сомножителей, то, применяя к этому выражению вектор ∇ , нельзя руководствоваться обычными правилами векторной алгебры. Для установления соответствующих правил действия рассмотрим некоторые примеры.

1. Пусть $U = U(x, y, z)$ — скалярное поле и $A = A(x, y, z)$ — векторное поле. Вычислим $\text{div}(UA)$, т. е. (∇, UA) . Применение вектора ∇ сводится к применению входящих в него операций дифференцирования. Но, как известно, правило дифференцирования произведения состоит в том, что мы дифференцируем сначала первый сомножитель, а остальные рассматриваем как постоянные, затем дифференцируем второй сомножитель, считая остальные постоянными, и т. д. и берем сумму полученных таким образом выражений.

Условимся каждый раз отмечать в формулах знаком « \downarrow » тот сомножитель, к которому оператор ∇ должен применяться. Тогда, как легко проверить, выражение для $\text{div}(UA)$ можно записать так:

$$(\nabla, UA) = (\nabla, \overset{\downarrow}{U}A) + (\nabla, U\overset{\downarrow}{A}).$$

Множители, на которые ∇ не действует, можно «высвободить» из-под оператора ∇ . Таким образом, получаем

$$(\nabla, UA) = (\nabla, \overset{\downarrow}{U}A) + (\nabla, U\overset{\downarrow}{A}) = (\nabla U, A) + U(\nabla, A),$$

т. е. в обычных обозначениях

$$\text{div}(UA) = (A, \text{grad } U) + U \text{div } A.$$

2. Рассмотрим выражение

$$\text{grad}(UV),$$

которое в символической записи имеет вид

$$\nabla UV.$$

Руководствуясь сказанным выше, имеем

$$\nabla UV = \nabla \overset{\downarrow}{U}V + \nabla U \overset{\downarrow}{V} = V \nabla U + U \nabla V,$$

т. е. в обычных обозначениях

$$\text{grad}(UV) = V \text{grad } U + U \text{grad } V.$$

Из рассмотренных примеров ясны правила, которые надо применять, пользуясь оператором ∇ : в выражениях, содержащих одну

переменную, с ним можно поступать, как с обычным вектором, а к выражениям, содержащим произведения нескольких переменных, оператор ∇ применяется в соответствии с правилом дифференцирования произведения. Наконец, применение ∇ к сумме любых слагаемых всегда сводится к применению ∇ к каждому из слагаемых в отдельности.

Дадим в заключение этого параграфа сводку формул, связывающих операции взятия градиента, ротора и дивергенции с основными операциями векторной алгебры:

1. $\operatorname{div}(UA) = (A, \operatorname{grad} U) + U \operatorname{div} A$;
2. $\operatorname{grad}(UV) = V \operatorname{grad} U + U \operatorname{grad} V$;
3. $\operatorname{rot}(UA) = U \operatorname{rot} A + [\operatorname{grad} U, A]$;
4. $\operatorname{div}[A, B] = (B, \operatorname{rot} A) - (A, \operatorname{rot} B)$;
5. $\operatorname{rot}[A, B] = (B, \nabla)A - (A, \nabla)B + A \operatorname{div} B - B \operatorname{div} A$;
6. $\operatorname{grad}(A, B) = (B, \nabla)A + (A, \nabla)B + [B, \operatorname{rot} A] + [A, \operatorname{rot} B]$;

в частности, положив в последней формуле $A = B$, получим

$$\operatorname{grad} \frac{A^2}{2} = (A, \nabla)A + [A, \operatorname{rot} A].$$

Первые две из этих формул были получены выше. Остальные могут быть получены аналогичным образом с применением оператора ∇ (и соблюдением указанных выше правил действия с ∇) и обычных формул векторной алгебры. В частности, для вычисления выражения $\operatorname{rot}[A, B]$, которое в символической форме пишется как

$$[\nabla, [A, B]],$$

следует применить известную формулу *) двойного векторного произведения:

$$[a, [b, c]] = b(a, c) - c(a, b).$$

Выражение вида $(A, \nabla)B$, встречающееся в последних двух формулах, означает векторную величину

$$\left(A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z}, \quad A_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad A_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z} \right),$$

*) Эту формулу удобно запомнить так: произведение $[a, [b, c]]$ равно среднему вектору b , умноженному на скалярное произведение крайних (т. е. на (a, c)), минус внутренний крайний вектор (т. е. c), умноженный на скалярное произведение двух остальных (т. е. на (a, b)). Это правило, как легко проверить, остается в силе и для двойного векторного произведения, имеющего вид $[[a, b], c]$.

которую можно рассматривать как результат применения «скалярной» операции

$$(\mathbf{A}, \mathbf{V}) = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z}$$

к каждой из компонент вектора \mathbf{V} *).


§ 6. Дифференциальные операции второго порядка. Оператор Лапласа

1. Дифференциальные операции второго порядка. В предыдущих параграфах мы ввели понятия градиента, дивергенции и ротора. В приложениях векторного анализа приходится встречаться не только с выполнением этих основных операций, но и с различными их комбинациями. Особенно часто встречаются так называемые операции второго порядка, т. е. попарные комбинации трех указанных выше основных операций.

Комбинируя символы grad, rot, div попарно, мы можем составить из них девять пар. Однако не все эти пары имеют смысл; например, операция

$$\text{rot div}$$

(т. е. взятие ротора от дивергенции) не имеет смысла ни для скалярного поля, ни для векторного. Все имеющиеся здесь возможности изображаются следующей таблицей:

	Скалярное поле U	Векторное поле \mathbf{A}	
	grad	div	rot
grad		grad div \mathbf{A}	
div	div grad U		div rot $\mathbf{A} \equiv 0$
rot	rot grad $U \equiv 0$		rot rot \mathbf{A}

в которой заштрихованы клетки, отвечающие не имеющим смысла сочетаниям основных операций. Мы видим, что применительно

*) Для большей симметрии формул мы здесь обозначили компоненты векторов \mathbf{A} и \mathbf{V} теми же буквами, что сами векторы, добавив соответствующие индексы. Такой системой обозначений мы будем пользоваться и дальше.

к скалярному полю имеют смысл две операции, а именно:

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} U,$$

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} U.$$

Первое из этих выражений представляет собой ротор потенциального поля $\operatorname{grad} U$ и, как мы видели, тождественно равно нулю. Выражение $\operatorname{div} \operatorname{grad} U$, вообще говоря, не обязано быть нулем. Оно называется *оператором Лапласа* *) и обозначается ΔU . Воспользовавшись известными выражениями градиента и дивергенции в декартовых координатах, получаем

$$\Delta U = \operatorname{div} (\operatorname{grad} U) = \operatorname{div} \left(\frac{\partial U}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{k} \right) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

Так как и дивергенция, и градиент не зависят, как мы знаем, от выбора координатной системы, то и ΔU зависит лишь от самого поля U , но не от системы координат. К оператору Лапласа мы еще вернемся ниже.

Оператор Лапласа Δ естественно рассматривать как скалярный квадрат вектора ∇ . Действительно,

$$(\nabla, \nabla) = \left(\frac{\partial}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial}{\partial z} \right)^2 = \Delta,$$

т. е.

$$(\nabla, \nabla) U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \Delta U.$$

Иногда приходится оператор Δ применять не к скалярной величине, а к вектору. При этом если

$$\mathbf{A} = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k},$$

то под $\Delta \mathbf{A}$ понимается вектор

$$\Delta A_x \mathbf{i} + \Delta A_y \mathbf{j} + \Delta A_z \mathbf{k}.$$

Как мы увидим немного ниже, это выражение на самом деле зависит только от самого вектора \mathbf{A} , но не от выбора системы координат.

Рассмотрим теперь операции второго порядка для векторного поля. Применительно к векторному полю имеют смысл три операции второго порядка, а именно:

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A},$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A}.$$

*) Точнее, оператором Лапласа называется сам символ $\Delta \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad}$, применение которого к скалярному полю U дает величину (опять-таки скалярную) ΔU .

С выражением вида $\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A}$ мы уже встречались в § 4 при нахождении условий соленоидальности поля и выяснили, что всегда

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} \equiv 0.$$

Напротив, выражения $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}$ и $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$ не обязаны обращаться в нуль. Они часто встречаются в различных вопросах механики и электродинамики.

Выведем формулу, связывающую эти величины. Рассмотрим для этого выражение

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

которое в символической форме записывается так:

$$[\nabla, [\nabla, \mathbf{A}]].$$

Воспользовавшись снова формулой для двойного векторного произведения, получим, что

$$[\nabla, [\nabla, \mathbf{A}]] = \nabla(\nabla, \mathbf{A}) - (\nabla, \nabla) \mathbf{A},$$

т. е.

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \Delta \mathbf{A}. \quad (6.31)$$

Из этой формулы видно, в частности, что выражение $\Delta \mathbf{A}$, определенное выше, действительно не зависит от выбора системы координат, поскольку величины $\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}$ и $\operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A}$ с выбором системы координат не связаны.

Так как в выражении (6.31) участвует только одна переменная величина, то мы, оперируя с ∇ , могли воспользоваться обычными формулами векторной алгебры. Читателю рекомендуется проверить равенство (6.31) непосредственно, не прибегая к символическому методу (и сравнить выкладки в том и другом случае).

2. Уравнение теплопроводности. В качестве применения введенных выше понятий рассмотрим вывод уравнения для поля температур внутри некоторого нагретого тела. Пусть $U(x, y, z, t)$ — температура тела в точке (x, y, z) в момент t . Выделим в этом теле некоторый объем Ω , ограниченный замкнутой поверхностью Σ , и вычислим двумя способами изменение количества тепла внутри этого объема за малый промежуток времени dt . В каждом элементе объема температура за время dt меняется на величину $\frac{\partial U}{\partial t} dt$, а масса этого элемента равна ρdv (где ρ — плотность). Следовательно, изменение количества тепла в элементе объема есть

$$c \frac{\partial U}{\partial t} dt \rho dv$$

(здесь c — удельная теплоемкость; величины c и ρ предполагаются постоянными), а изменение количества тепла за время dt во всем объеме Ω равно

$$dQ = dt \int_{\Omega} \int \int \frac{\partial U}{\partial t} c \rho dv.$$

С другой стороны, ту же самую величину dQ можно подсчитать как количество тепла, протекающего за время dt через поверхность Σ , ограничивающую объем Ω . Количество тепла, протекающего за время dt через элементарную площадку $d\sigma$, равно (см. п. 1 § 2)

$$- dt k (\text{grad } U)_n d\sigma,$$

а количество тепла, протекающего за это время через всю поверхность Σ , выразится интегралом

$$dt \int_{\Sigma} \int k (\text{grad } U)_n d\sigma,$$

Преобразовав этот интеграл по формуле Остроградского в объемный, получим

$$dt \int_{\Sigma} \int k (\text{grad } U)_n d\sigma = dt \int_{\Omega} \int \int k \text{div} (\text{grad } U) dv = dt \int_{\Omega} \int \int k \Delta U dv.$$

Приравняв друг другу полученные выражения для ΔQ и сократив на dt , будем иметь

$$\int_{\Omega} \int \int \frac{\partial U}{\partial t} c \rho dv = \int_{\Omega} \int \int k \Delta U dv.$$

Так как это равенство должно иметь место для любой пространственной области Ω , то отсюда следует

$$\frac{\partial U}{\partial t} = a^2 \Delta U \quad \left(a^2 = \frac{k}{c\rho} \right). \quad (6.32)$$

Мы получили уравнение, которому должна удовлетворять функция U , представляющая собой температуру некоторого тела, т. е. так называемое *уравнение теплопроводности*.

3. Стационарное распределение температур. Гармонические поля. Мы показали, что распределение температур внутри тела должно удовлетворять уравнению (6.32). Может, в частности, оказаться, что рассматриваемое нами тело находится в состоянии теплового равновесия, т. е. что ни на границе его, ни во внутренних точках температура не меняется со временем. Тогда $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ и

уравнение (6.32) принимает вид

$$\Delta U = 0,$$

т. е. в декартовых координатах

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0.$$

Состояние теплового равновесия можно представить себе следующим образом. Предположим, что на границе тела в каждой точке поддерживается некоторая фиксированная температура, не зависящая от времени (но разная, вообще говоря, в разных точках). Тогда то распределение температур, которое установится внутри тела через достаточно большой (строго говоря, бесконечно большой) промежуток времени, и будет тем равновесным распределением температур, которое соответствует заданному тепловому режиму на поверхности тела.

Уравнение

$$\Delta U = 0$$

называется *уравнением Лапласа*. С его помощью описывается не только стационарное распределение тепла. Уравнение Лапласа играет первостепенную роль при описании и других установившихся процессов, например равновесного распределения зарядов по поверхности проводника, установившегося движения несжимаемой жидкости в замкнутом сосуде и т. д. Скалярное поле $U(x, y, z)$, удовлетворяющее условию $\Delta U = 0$, называется *лапласовым* или *гармоническим* полем. Стационарное распределение температур внутри некоторого тела представляет собой, согласно сказанному выше, гармоническое поле.

Один из важных примеров гармонического поля — это функция

$$\frac{k}{r} \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad k = \text{const}).$$

Эту функцию можно представлять себе как потенциал поля тяготения (или электростатического поля), создаваемого точечной массой (точечным зарядом), помещенной в начале координат. Проверим, что эта функция — гармоническая (кроме начала координат, где она не определена). Действительно,

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{k}{r} = -\frac{kx}{r^3}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{k}{r} = -k \frac{r^3 - 3x^2 r}{r^6} = k \frac{3x^2 - r^2}{r^5},$$

и аналогично

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} \frac{k}{r} = k \frac{3y^2 - r^2}{r^5}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{k}{r} = k \frac{3z^2 - r^2}{r^5},$$

откуда

$$\Delta \left(\frac{k}{r} \right) = 0.$$

Гармонической будет и функция $\frac{k}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|}$ при любом фиксированном \mathbf{r}_0 , а следовательно, и любая линейная комбинация вида

$$\sum_{i=1}^n \frac{k_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|},$$

представляющая собой потенциал, создаваемый системой точечных масс. Предельный переход от точечного распределения масс к непрерывному с плотностью $\mu(x, y, z)$, естественный здесь с точки зрения физики, потребовал бы для своего математического обоснования применения теории интегралов, зависящих от параметра, которые будут рассмотрены в гл. 10. Систематическое изложение всего круга вопросов, связанных с понятием потенциала, имеется в учебниках по математической физике.

Упражнения. 1. Напишите потенциал поля тяготения, создаваемого массой, непрерывно распределенной по пространству с плотностью $\mu(x, y, z)$.

2. Каков потенциал электростатического поля, создаваемого бесконечной, равномерно заряженной нитью. Будет ли этот потенциал гармонической функцией?

§ 7. Запись основных дифференциальных операций теории поля в ортогональных криволинейных координатах

1. Постановка задачи. Такие величины, как градиент, дивергенция, ротор и другие, часто встречаются в различных задачах теоретической и математической физики. Во многих случаях полезно уметь записывать эти величины не только в декартовых координатах, как это было сделано выше, но и в тех или иных криволинейных системах координат. Предположим, например, что рассматривается поле, обладающее сферической симметрией, т. е. в каждой точке рассматривается величина, скалярная или векторная, зависящая только от расстояния этой точки до начала координат. Ясно, что все формулы, связанные с таким полем, должны значительно упроститься, если записывать их в сферических координатах, а не в декартовых. В других случаях могут оказаться удобными какие-либо иные системы координат.

В этом параграфе мы запишем в криволинейных координатах выражения для градиента, дивергенций, ротора и оператора Лапласа.

2. Криволинейные ортогональные координаты в пространстве.

Предположим, что в трехмерном пространстве введена некоторая система криволинейных координат q_1, q_2, q_3 *) и пусть

$$x = x(q_1, q_2, q_3), \quad y = y(q_1, q_2, q_3), \quad z = z(q_1, q_2, q_3) \quad (6.33)$$

— формулы, связывающие декартовы координаты x, y, z с криволинейными координатами q_1, q_2, q_3 .

Мы ограничимся простейшим и в то же время практически наиболее важным случаем ортогональных координат (система криволинейных координат называется *ортогональной*, если в любой точке три координатные линии, проходящие через эту точку, ортогональны между собой). Свойством ортогональности обладают, в частности, такие употребительные в пространстве системы координат, как сферическая и цилиндрическая.

Найдем прежде всего выражения для элементов длины, площади и объема в ортогональных координатах.

Для этой цели рассмотрим бесконечно малый криволинейный параллелепипед, вырезаемый тремя парами координатных поверхностей, отвечающих соответственно значениям параметров q_1, q_2, q_3 , равным q_1 и $q_1 + dq_1$; q_2 и $q_2 + dq_2$, q_3 и $q_3 + dq_3$ (рис. 6.13).

Рассмотрим сначала ребро MM_1 . Точка M имеет криволинейные координаты (q_1, q_2, q_3) , а точка M_1 — криволинейные координаты $(q_1 + dq_1, q_2, q_3)$. Обозначив декартовы координаты точки M через x, y, z , а декартовы координаты точки M_1 — через $x + dx, y + dy, z + dz$, мы можем написать, что длина dl_1 вектора MM_1 равна

$$\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

Вдоль ребра MM_1 координаты x, y, z суть функции переменной q_1 (q_2 и q_3 постоянны вдоль MM_1). Следовательно, в данном случае

$$dx = \frac{\partial x}{\partial q_1} dq_1, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial q_1} dq_1, \quad dz = \frac{\partial z}{\partial q_1} dq_1$$

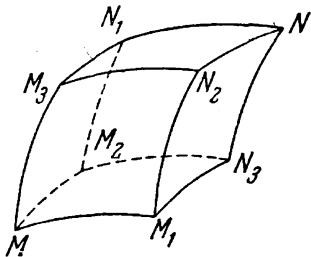


Рис. 6.13.

*) С понятием криволинейных координат в пространстве мы уже встречались в гл. 2. Мы будем предполагать, что функции, связывающие криволинейные координаты с декартовыми, удовлетворяют тем условиям, которые формулировались в гл. 2 § 4. Для большей симметрии формул мы будем здесь обозначать криволинейные координаты несколько иначе, чем в гл. 2, а именно, одной буквой с индексами 1, 2, 3. Аналогично компоненты векторного поля A (в той системе координат, которая будет рассматриваться) мы обозначим A_1, A_2, A_3 .

и

$$dl_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2} dq_1.$$

Аналогично для длин dl_2 и dl_3 ребер MM_2 и MM_3 получаем следующие выражения:

$$dl_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2} dq_2,$$

$$dl_3 = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2} dq_3.$$

Введя обозначения

$$\begin{aligned} H_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)^2}, \\ H_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)^2}, \\ H_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)^2}, \end{aligned} \quad (6.34)$$

перепишем формулы для dl_1 , dl_2 и dl_3 так:

$$dl_1 = H_1 dq_1, \quad dl_2 = H_2 dq_2, \quad dl_3 = H_3 dq_3. \quad (6.35)$$

Множители H_1 , H_2 , H_3 называются *параметрами Ламэ*, отвечающими криволинейным координатам q_1 , q_2 , q_3 ; их называют также *масштабными множителями*. Координатные линии, вдоль каждой из которых меняется только один параметр, следует представлять себе как кривые, на которые нанесены шкалы значений этих параметров. Множители H_1 , H_2 , H_3 на этих кривых преобразуют «неестественные» параметры q_1 , q_2 , q_3 в «естественные» — длины дуг соответствующих линий.

Наша система координат ортогональная, поэтому площадь $d\sigma_1$ грани $MM_2N_1M_3$ равна произведению dl_2 на dl_3 , т. е.

$$d\sigma_1 = H_2 H_3 dq_2 dq_3;$$

аналогично для площадей $d\sigma_2$ и $d\sigma_3$ двух других граней $MM_1N_2M_3$ и $MM_1N_3M_2$ имеем

$$d\sigma_2 = H_3 H_1 dq_3 dq_1 \quad \text{и} \quad d\sigma_3 = H_1 H_2 dq_1 dq_2. \quad (6.36)$$

Наконец, объем всего рассматриваемого бесконечно малого параллелепипеда равен

$$dv = dl_1 dl_2 dl_3 = H_1 H_2 H_3 dq_1 dq_2 dq_3. \quad (6.37)$$

Введем в точке M ортогональный и нормированный базис, состоящий из трех единичных векторов e_1 , e_2 , e_3 , касательных к координатным

линиям, проходящим через точку M . Заметим, что в отличие от декартовой системы координат, определяемой тремя постоянными единичными векторами $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, этот базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ будет меняться от точки к точке, т. е. сами векторы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ представляют собой функции параметров q_1, q_2, q_3 . Это не мешает нам, однако, любой вектор, заданный в произвольной точке M (т. е. любое векторное поле), записать в виде линейной комбинации векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$.

3. Цилиндрические и сферические координаты. Вычислим параметры Ламэ для важнейших частных типов ортогональных криволинейных координат: цилиндрической и сферической систем. Цилиндрические координаты r, φ, z связаны с декартовыми координатами формулами

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad z = z.$$

Отсюда по формулам (6.34) получаем

$$\left. \begin{aligned} H_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2} = \sqrt{\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi} = 1, \\ H_2 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2} = \sqrt{r^2 \sin^2 \varphi + r^2 \cos^2 \varphi} = r, \\ H_3 &= \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2} = \sqrt{1} = 1. \end{aligned} \right\} \quad (6.38)$$

Благодаря тому что параметры Ламэ имеют непосредственный геометрический смысл, эти результаты нетрудно усмотреть геометрически без всяких вычислений. Рассмотрим бесконечно малый параллелепипед, ограниченный тремя парами координатных поверхностей, отвечающих значениям цилиндрических координат, соответственно равным r и $r + dr$, φ и $\varphi + d\varphi$, z и $z + dz$ (рис. 6.14). Длины dl_1, dl_2 и dl_3 ребер AB, AC и AD этого параллелепипеда соответственно равны $dr, r d\varphi$ и dz , откуда сразу следуют формулы (6.38).

Аналогично для сферических координат, задаваемых равенствами

$$x = \rho \cos \varphi \sin \theta, \quad y = \rho \sin \varphi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \theta,$$

вычисление дает

$$H_1 = 1, \quad H_2 = \rho, \quad H_3 = \rho \sin \theta. \quad (6.39)$$

Этот результат тоже виден непосредственно из чертежа (рис. 6.15), так как длины dl_1, dl_2 и dl_3 ребер AB, AC и AD параллелепипеда, ограниченного координатными поверхностями, отвечающими значениям сферических координат ρ и $\rho + d\rho$, φ и $\varphi + d\varphi$, θ и $\theta + d\theta$.

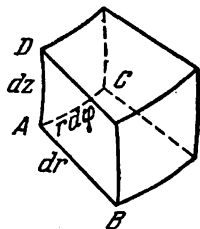


Рис. 6.14.

соответственно равны

$$d\rho, \rho d\theta \text{ и } \rho \sin\theta d\varphi,$$

откуда сразу получаем (6.39).

4. Градиент. Найдем выражение градиента в ортогональных криволинейных координатах. Проекция градиента функции $U = U(q_1, q_2, q_3)$ на некоторое направление совпадает, как известно, с производной от U по этому направлению. Следовательно, для того чтобы вычислить компоненты вектора $\text{grad } U$ в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, нужно вычислить производные от U по направлениям, определяемым этими векторами. Пусть ΔU — разность значений функции U в точках M_1 и M . Тогда

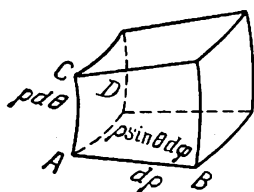


Рис. 6.15.

$$\begin{aligned} (\text{grad } U, \mathbf{e}_1) &= \lim_{dl_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{dl_1} = \\ &= \lim_{dq_1 \rightarrow 0} \frac{\Delta U}{H dq_1} = \frac{1}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1}. \end{aligned}$$

Аналогично две другие компоненты градиента равны

$$\frac{1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \text{ и } \frac{1}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3}.$$

Таким образом, окончательно,

$$\text{grad } U = \frac{1}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \mathbf{e}_1 + \frac{1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \mathbf{e}_2 + \frac{1}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \mathbf{e}_3. \quad (6.40)$$

5. Дивергенция. Вычислим теперь дивергенцию некоторого векторного поля \mathbf{A} в координатах q_1, q_2, q_3 . В § 2 мы определили $\text{div } \mathbf{A}$ в точке M формулой

$$\text{div } \mathbf{A} = \lim_{\Omega \rightarrow M} \frac{1}{v(\Omega)} \int_{\Sigma} \mathbf{A}_n d\sigma.$$

Следовательно, мы можем вычислить $\text{div } \mathbf{A}$ в точке M как отношение потока вектора \mathbf{A} через поверхность бесконечно малого параллелепипеда, изображенного на рис. 6.13, к объему dv этого параллелепипеда. Обозначим A_1, A_2, A_3 компоненты вектора \mathbf{A} в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ (т. е. положим $\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3$) и вычислим сначала поток этого вектора через две грани, перпендикулярные ребру MM_1 .

Внешняя нормаль к грани $MM_2N_1M_3$ совпадает с вектором $-\mathbf{e}_1$ (вектор \mathbf{e}_1 направлен в сторону возрастания q_1 , а внешняя нормаль к рассматриваемой грани имеет противоположное направление). Следо-

вательно, поток вектора \mathbf{A} через эту грань равен (с точностью до бесконечно малых выше первого порядка относительно dv)

$$(\mathbf{A}, -\mathbf{e}_1) d\sigma_1 = -A_1 H_2 H_3 dq_2 dq_3, \quad (6.41)$$

где величины A_1, H_2, H_3 берутся в точке (q_1, q_2, q_3) .

Противоположная грань $M_1 N_3 N N_2$ отличается от рассмотренной тем, что на ней первая криволинейная координата равна $q_1 + dq_1$ (а не q_1); следовательно, значение величины $A_1 H_2 H_3$ на этой грани отличается от ее значения на грани $M M_2 N_1 M_3$ приращением

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 H_2 H_3) dq_1.$$

Кроме того, направление нормали к грани $M_1 N_3 N N_2$ совпадает с направлением вектора \mathbf{e}_1 . Поэтому поток вектора \mathbf{A} через грань $M_1 N_3 N N_2$ равен

$$\left[A H_2 H_3 + \frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 H_2 H_3) dq_1 \right] dq_2 dq_3. \quad (6.42)$$

Сложив выражения (6.41) и (6.42), получим, что поток вектора \mathbf{A} через две параллельные между собой грани $M M_2 N_1 M_3$ и $M_1 N_3 N N_2$ равен

$$\frac{\partial}{\partial q_1} (A_1 H_2 H_3) dq_1 dq_2 dq_3.$$

Аналогично, рассматривая две другие пары параллельных между собой граней, получим следующие два выражения для потока вектора через эти пары граней:

$$\frac{\partial (A_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} dq_1 dq_2 dq_3 \text{ и } \frac{\partial (A_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} dq_1 dq_2 dq_3.$$

Складывая все эти три величины и деля на dv , получим

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left[\frac{\partial (A_1 H_2 H_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial (A_2 H_3 H_1)}{\partial q_2} + \frac{\partial (A_3 H_1 H_2)}{\partial q_3} \right]. \quad (6.43)$$

6. Ротор. В § 4 мы показали, что проекция $(\operatorname{rot} \mathbf{A})_n$ ротора векторного поля \mathbf{A} в некоторой точке M на направление некоторого фиксированного вектора \mathbf{n} представляется формулой

$$(\operatorname{rot} \mathbf{A})_n = \lim_{\Sigma \rightarrow M} \frac{1}{\sigma} \int_L A_\tau dL,$$

где Σ — площадка, перпендикулярная вектору \mathbf{n} , σ — ее площадь и L — ее граница. Следовательно, мы можем получить проекцию $\operatorname{rot} \mathbf{A}$ на направление вектора \mathbf{e}_1 , вычислив циркуляцию \mathbf{A} вдоль контура $M M_2 N_1 M_3 M$ (рис. 6.13) и разделив ее на $d\sigma_1$. Представим эту циркуляцию в виде суммы четырех слагаемых, отвечающих отрезкам

MM_2 , M_2N_1 , N_1M_3 и M_3M , и вычислим каждое слагаемое отдельно. Начнем с первого из них. Проекция вектора \mathbf{A} на направление MM_2 равна A_2 , следовательно, циркуляция вектора \mathbf{A} вдоль MM_2 равна (с точностью до бесконечно малых выше первого порядка относительно $d\sigma_1$)

$$A_2 dl_2 = A_2 H_2 dq_2, \quad (6.44)$$

где величины A_2 и H_2 берутся в точке (q_1, q_2, q_3) . Циркуляция вдоль N_1M_3 отличается от только что полученного выражения тем, что на N_1M_3 третья координата равна $q_3 + dq_3$, а не q_3 , как на MM_2 , и, кроме того, направление отрезка N_1M_3 противоположно направлению \mathbf{e}_2 . Поэтому циркуляция вдоль N_1M_3 равна

$$- \left[A_2 H_2 + \frac{\partial}{\partial q_3} (A_2 H_2) dq_3 \right] dq_2. \quad (6.45)$$

Аналогично получаем для циркуляций вдоль M_2N_1 и N_3M выражения

$$\left[A_3 H_3 + \frac{\partial}{\partial q_2} (A_3 H_3) dq_2 \right] dq_3 \quad (6.46)$$

и

$$- A_3 H_3 dq_3. \quad (6.47)$$

Сложив величины (6.44), (6.45), (6.46) и (6.47), получим, что циркуляция вектора \mathbf{A} вдоль контура $MM_2N_1N_3M$ равна

$$- \frac{\partial (A_2 H_2)}{\partial q_3} dq_2 dq_3 + \frac{\partial (A_3 H_3)}{\partial q_2} dq_2 dq_3.$$

Деля полученное выражение на $H_2 H_3 dq_2 dq_3$, т. е. на площадь грани $MM_2N_1M_3$, получаем, что компонента $(\text{rot } \mathbf{A})_1$ вектора $\text{rot } \mathbf{A}$ в направлении базисного вектора \mathbf{e}_1 равна

$$\frac{1}{H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial (A_3 H_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial (A_2 H_2)}{\partial q_3} \right\}. \quad (6.48_1)$$

Аналогично вычисляются две другие компоненты:

$$(\text{rot } \mathbf{A})_2 = \frac{1}{H_3 H_1} \left\{ \frac{\partial (A_1 H_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial (A_3 H_3)}{\partial q_1} \right\}, \quad (6.48_2)$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_3 = \frac{1}{H_1 H_2} \left\{ \frac{\partial (A_2 H_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial (A_1 H_1)}{\partial q_2} \right\}. \quad (6.48_3)$$

7. Оператор Лапласа. Исходя из найденных выражений для $\text{grad } U$ и $\text{div } \mathbf{A}$, мы можем написать выражение оператора Лапласа в координатах q_1, q_2, q_3 . Получаем

$$\Delta U = \text{div grad } U = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{H_2 H_3}{H_1} \frac{\partial U}{\partial q_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{H_3 H_1}{H_2} \frac{\partial U}{\partial q_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{H_1 H_2}{H_3} \frac{\partial U}{\partial q_3} \right) \right\}. \quad (6.49)$$

Эту формулу очень легко запомнить, если знать ее «происхождение». Множители Ламэ H_1, H_2, H_3 в знаменателях при $\partial q_1, \partial q_2, \partial q_3$ возникли из-за градиента. Множители $H_2 H_3, H_3 H_1, H_1 H_2$ в числителях возникли из площадей тех площадок, через которые вычисляется поток, множитель $\frac{1}{H_1 H_2 H_3}$ возник из-за того, что поток через грани параллелепипеда делится на объем параллелепипеда.

8. Запись основных формул в цилиндрических и сферических координатах. Выше, в п. 3, мы уже нашли параметры Ламэ для цилиндрических и сферических координат. Чтобы написать в этих системах координат формулы для градиента, дивергенции, ротора и оператора Лапласа, нужно лишь подставить эти параметры в полученные выше общие формулы. Таким образом, находим:

а) для цилиндрических координат:

$$\begin{aligned}\text{grad } U &= \frac{\partial U}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi + \frac{\partial U}{\partial z} \mathbf{e}_z, \\ \text{div } \mathbf{A} &= \frac{1}{r} \frac{\partial (r A_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}, \\ \text{rot } \mathbf{A} &= \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left(\frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\varphi + \\ &\quad + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_z, \\ \Delta U &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2};\end{aligned}$$

б) для сферических координат:

$$\begin{aligned}\text{grad } U &= \frac{\partial U}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial U}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial U}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi, \\ \text{div } \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial (\rho^2 A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial (\sin \theta A_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}, \\ \text{rot } \mathbf{A} &= \frac{1}{\rho \sin \theta} \left(\frac{\partial (A_\varphi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} \right) \mathbf{e}_\rho + \\ &\quad + \left(\frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial A_\rho}{\partial \varphi} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\varphi)}{\partial \rho} \right) \mathbf{e}_\theta + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial (\rho A_\theta)}{\partial \rho} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial A_\rho}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\varphi, \\ \Delta U &= \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}.\end{aligned}$$

В задачах, связанных с рассмотрением оператора Лапласа в сферических координатах, часто наряду с полным оператором Лапласа ΔU встречается выражение

$$\frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial U}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2},$$

называемое «угловой частью» оператора Лапласа.

Замечание. В этом параграфе мы систематически пользовались такими понятиями, как «бесконечно малый параллелепипед», «элемент объема» и т. д. Ясно, что здесь, как и в других подобных случаях, смысл этих выражений состоит в том, что мы рассматриваем сначала объекты конечных размеров, а затем совершаем предельный переход, стремя эти размеры к нулю. Мы полагаем, что при желании читатель может проделать самостоятельно все те предельные переходы, которые здесь лишь подразумевались, но не излагались.

§ 8. Переменные поля в сплошных средах

До сих пор мы, изучая те или иные поля, интересовались в основном зависимостью соответствующих величин (скалярных или векторных) от пространственных координат. Сейчас мы рассмотрим некоторые вопросы, связанные с зависимостью поля от времени.

1. Локальная и материальная производные. Рассмотрим движущуюся жидкость, скорость которой в каждой точке зависит не только от координат этой точки, но и от времени. Пусть, далее, с этой жидкостью связана некоторая переменная величина φ , например температура, давление и т. п. Изучая изменение этой величины φ с течением времени, мы можем поступать двояким образом: или следить за ее изменением в данной точке, т. е. при фиксированных значениях x , y и z , или же рассматривать значение этой величины для данной частицы (координаты которой меняются с течением времени). Например, если речь идет о температуре потока жидкости, то ее можно измерять термометром, укрепленным неподвижно, или же термометром, который плавает в этом потоке. Изменение с течением времени некоторой величины $\varphi(M, t)$ в данной точке M характеризуется так называемой *частной* или *локальной* производной

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(M, t + \Delta t) - \varphi(M, t)}{\Delta t}, \quad (6.50)$$

при вычислении которой точка M рассматривается как фиксированная.

Изменение с течением времени величины $\varphi(M, t)$ для данной частицы характеризуется *полной* или *материальной* производной $\varphi(M, t)$ по t , которая определяется следующим образом.

Пусть M — положение данной частицы в момент t , а M' — положение этой же частицы в момент $t + \Delta t$. Полной производной φ по t называется

$$\frac{d\varphi}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\varphi(M', t + \Delta t) - \varphi(M, t)}{\Delta t}. \quad (6.51)$$

Чтобы установить связь между локальной и материальной производными, заметим, что, вычисляя материальную производную, мы должны считать координаты x , y и z точки M функциями от t , причем их производные по t — это компоненты скорости потока в точке M :

$$\frac{dx}{dt} = v_x, \quad \frac{dy}{dt} = v_y, \quad \frac{dz}{dt} = v_z.$$

Поэтому, дифференцируя $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$ как сложную функцию от t , получаем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial\varphi}{\partial x} v_x + \frac{\partial\varphi}{\partial y} v_y + \frac{\partial\varphi}{\partial z} v_z,$$

т. е.

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\mathbf{v}, \text{grad } \varphi). \quad (6.52)$$

Аналогичным образом можно ввести понятия частной и полной производной по времени и для какой-либо векторной величины $\mathbf{A}(M, t)$, связанной с движущейся средой. Эти производные определяются формулами

$$\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(M, t + \Delta t) - \mathbf{A}(M, t)}{\Delta t}, \quad (6.53)$$

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(M, t + \Delta t) - \mathbf{A}(M, t)}{\Delta t}, \quad (6.54)$$

аналогичными формулам (6.50) и (6.51). Связь между этими производными дается формулой

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} v_x + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} v_y + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} v_z, \quad (6.55)$$

которая получится дифференцированием $\mathbf{A}(x, y, z, t)$ как сложной функции от t . Равенства (6.52) и (6.55) удобно записать в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \varphi \quad (6.56)$$

и

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + (\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{A}, \quad (6.57)$$

понимая под (\mathbf{v}, ∇) оператор

$$v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z},$$

т. е. «скалярное произведение» вектора скорости \mathbf{v} и символического вектора ∇ .

Слагаемые $(\mathbf{v}, \nabla) \varphi$ и $(\mathbf{v}, \nabla) \mathbf{A}$, входящие в формулы (6.56) и (6.57), называются *конвективными членами*; они связаны с переносом

(конвекцией) частиц и возникают только при рассмотрении движущейся среды.

Рассмотрим в качестве примера ускорение частицы движущейся жидкости. Оно представляет собой полную (т. е. относящуюся к фиксированной частице) производную скорости. Воспользовавшись формулой (6.56), получаем

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\partial v}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}, \quad (6.58)$$

т. е. в координатной записи

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z},$$

и аналогично для двух других компонент.

2. Уравнение Эйлера. Воспользуемся понятиями материальной и локальной производных для вывода одного из основных уравнений гидродинамики — так называемого уравнения Эйлера.

Рассмотрим внутри движущейся жидкости некоторый объем Ω , ограниченный поверхностью Σ . На элемент $d\sigma$ этой поверхности действует сила — давление, равное — $p n d\sigma$, направленное по нормали *) к $d\sigma$ (здесь \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали, а p — скалярная величина). Сила \mathbf{F} , действующая на всю поверхность Σ , запишется в виде

$$\mathbf{F} = - \int_{\Sigma} \int p n d\sigma, \quad (6.59)$$

где, как всегда, под интегралом от вектора

$$p n = p \cos(\mathbf{n}, x) \mathbf{i} + p \cos(\mathbf{n}, y) \mathbf{j} + p \cos(\mathbf{n}, z) \mathbf{k}$$

понимается вектор с компонентами

$$\int_{\Sigma} \int p \cos(\mathbf{n}, x) d\sigma, \quad \int_{\Sigma} \int p \cos(\mathbf{n}, y) d\sigma \quad \text{и} \quad \int_{\Sigma} \int p \cos(\mathbf{n}, z) d\sigma. \quad (6.60)$$

Интеграл (6.59) можно преобразовать в тройной интеграл по объему, применив формулу Остроградского к каждой из компонент (6.60)

*) Мы считаем, что рассматриваемая жидкость идеальная, т. е. имеет нулевую вязкость. В этом случае давление на любую бесконечно малую площадку внутри жидкости направлено по нормали к этой площадке.

этого вектора. Получим

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Sigma} p \mathbf{n} d\sigma = & -i \int \int \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial x} d\omega - j \int \int \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial y} d\omega - \\
 & - k \int \int \int_{\Omega} \frac{\partial p}{\partial z} d\omega = - \int \int \int_{\Omega} \text{grad } p d\omega,
 \end{aligned}$$

следовательно, на каждый элемент $d\omega$ объема жидкости действует сила

$$- \text{grad } p d\omega.$$

С другой стороны, если $\rho(M, t)$ — плотность жидкости в данной точке M в момент t , а \mathbf{w} — ускорение частицы, находящейся в этой точке, то $\mathbf{w}\rho(M, t)d\omega$ представляет собой произведение массы, содержащейся в объеме $d\omega$, на ускорение, и, следовательно, по закону Ньютона имеет место равенство

$$\mathbf{w}\rho d\omega = - \text{grad } p d\omega,$$

т. е.

$$\mathbf{w}\rho = - \text{grad } p. \quad (6.61)$$

Это и есть основное уравнение свободного движения идеальной жидкости, называемое обычно *уравнением Эйлера* *). Здесь под \mathbf{w} понимается ускорение частицы жидкости, т. е. полная производная скорости по времени $\mathbf{w} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$. Воспользовавшись выражениями для

компонент ускорения, найденными в конце п. 1, мы можем переписать уравнение Эйлера в координатной форме:

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) \rho &= - \frac{\partial p}{\partial x}, \\
 \left(\frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) \rho &= - \frac{\partial p}{\partial y}, \\
 \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \rho &= - \frac{\partial p}{\partial z}.
 \end{aligned}$$

8. Производная по времени от интеграла по жидкому объему. Рассмотрим в движущейся среде некоторый объем Ω . Мы будем называть этот объем *жидким*, если он во все моменты времени состоит из одних и тех же частиц жидкости. Следовательно, жидкий

*) Знак минус в правой части уравнения (6.61) имеет ясный физический смысл: понятно, что ускорение каждой частицы жидкости направлено в сторону уменьшения давления, т. е. против градиента p .

объем с течением времени перемещается и деформируется. Рассмотрим интеграл

$$J = \int \int_{\Omega} \varphi d\omega \quad (6.62)$$

от некоторой скалярной функции $\varphi(M, t)$ по такому жидкому объему и вычислим производную этого интеграла по времени.

При вычислении этой производной мы должны учесть, что интеграл (6.62) зависит от времени двояким образом: во-первых, от t зависит подынтегральная функция, а во-вторых, при изменении t меняется и та пространственная область, по которой интеграл берется*).

Если бы изменения объема Ω не происходило, то за время dt функция φ получила бы приращение $\frac{\partial \varphi}{\partial t} dt$, а интеграл (6.62) получил бы при этом приращение

$$dt \int \int_{\Omega} \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\omega.$$

Рассмотрим теперь изменение интеграла (6.62), вызванное изменением объема Ω . Обозначим Σ поверхность, ограничивающую объем Ω в момент t . Изменение объема Ω за время dt происходит, очевидно, за счет того, что некоторые частицы жидкости за это время втекают или вытекают через поверхность Σ . Через элемент $d\sigma$ поверхности Σ за время dt вытекает объем жидкости, равный $v_n dt d\sigma$, где v_n — проекция скорости жидкости на внешнюю нормаль к $d\sigma$. Это изменение объема даст интегралу (6.62) приращение

$$\varphi v_n dt d\sigma,$$

а все изменение интеграла (6.62), вызванное изменением объема Ω за время dt , равно

$$dt \int_{\Sigma} \varphi v_n d\sigma.$$

Таким образом, полное изменение интеграла (6.62) за время dt равно

$$dJ = dt \int \int_{\Omega} \frac{d\varphi}{dt} d\omega + dt \int_{\Sigma} \varphi v_n d\sigma$$

*) Интеграл (6.62) представляет собой так называемый интеграл, зависящий от параметра, причем от параметра t зависят и подынтегральная функция и область интегрирования. Основы теории интегралов, зависящих от параметра, будут изложены в гл. 10. Здесь мы, не опираясь на общую теорию, рассмотрим лишь вопрос о вычислении производной интеграла (6.62) по времени, важный с точки зрения физических приложений.

и, следовательно,

$$\frac{dJ}{dt} = \int_{\Omega} \int \int \frac{\partial \varphi}{\partial t} d\omega + \int_{\Sigma} \int \varphi v_n d\sigma. \quad (6.63)$$

Преобразовав второе слагаемое в правой части этого равенства по формуле Остроградского, получим

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int \int \varphi d\omega = \int_{\Omega} \int \int \left[\frac{\partial \varphi}{\partial t} + \operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) \right] d\omega. \quad (6.64)$$

Наконец, воспользовавшись равенством

$$\operatorname{div}(\varphi \mathbf{v}) = \varphi \operatorname{div} \mathbf{v} + (\mathbf{v}, \operatorname{grad} \varphi)$$

(см. (6.29)) и выражением (6.52) для полной производной, получаем окончательно

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int \int \varphi d\omega = \int_{\Omega} \int \int \left(\frac{d\varphi}{dt} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{v} \right) d\omega. \quad (6.65)$$

В частности, если $\operatorname{div} \mathbf{v} = 0$ (т. е. рассматривается движение несжимаемой жидкости, без стоков и источников), то формула (6.65) принимает более простой вид:

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int \int \varphi d\omega = \int_{\Omega} \int \int \frac{d\varphi}{dt} d\omega.$$

Замечание. Рассмотренная нами задача о дифференцировании интеграла, взятого по жидкому объему, аналогична следующей одномерной задаче (с которой мы еще встретимся в гл. 10): вычислить производную по t от интеграла

$$J(t) \equiv \int_{a(t)}^{b(t)} \varphi(x, t) dx.$$

Рассматривая $J(t)$ как сложную функцию от $a(t)$, $b(t)$ и t , легко получаем, что

$$J'(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx + \varphi(b(t), t) b'(t) - \varphi(a(t), t) a'(t).$$

Здесь опять-таки $J'(t)$ представляет собой сумму двух слагаемых, первое из которых определяется изменением подынтегральной функции, а второе — изменением области интегрирования.

Мы рассмотрели выше интеграл по жидкому объему от скалярной функции. Аналогичным образом можно рассмотреть интеграл по

жидкому объему от векторной функции $\mathbf{A}(M, t)$. Для производной этого интеграла по t получается с помощью тех же рассуждений формула

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_{\Omega} \mathbf{A} d\omega = \int \int \int_{\Omega} \left[\frac{d\mathbf{A}}{dt} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{v} \right] d\omega. \quad (6.66)$$

Выше речь шла об интегрировании по жидким объемам. В гидродинамике и других разделах физики приходится рассматривать, наряду с жидкими объемами, жидкие поверхности и линии. Они определяются как поверхности и линии, состоящие из фиксированных частиц жидкости и, следовательно, меняющие с течением времени форму и положение в пространстве в соответствии с движением жидкости. Поверхностные или криволинейные интегралы по таким жидким поверхностям или линиям от тех или иных функций опять-таки представляют собой выражения, зависящие от времени двояким образом (от времени зависят и область интегрирования и подынтегральная функция). Применяя те же рассуждения, что и в случае жидких объемов, нетрудно получить формулы для дифференцирования таких поверхностных и криволинейных интегралов по времени.

4. Другой вывод уравнения неразрывности. Из формулы (6.63) сразу вытекает уравнение неразрывности, полученное нами в п. 5 § 3. Пусть $\rho(M, t)$ — плотность движущейся (сжимаемой) жидкости. Масса T этой жидкости, заключенной в некотором объеме Ω , равна

$$T = \int \int \int_{\Omega} \rho d\omega.$$

Если объем Ω жидкий, то масса внутри этого объема остается постоянной. Следовательно (см. (6.64)),

$$\frac{d}{dt} \int \int \int_{\Omega} \rho d\omega = \int \int \int_{\Omega} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) \right] d\omega = 0.$$

Так как объем Ω произволен, то отсюда получаем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0,$$

т. е. уравнение неразрывности.

ГЛАВА 7

ТЕНЗОРЫ

В естествознании и технике приходится иметь дело с физическими величинами различной математической природы. Это различие проявляется, в частности, в характере их аналитического выражения и в законах преобразования их аналитического выражения при переходе от одной системы координат в пространстве к другой.

Простейшими, с точки зрения математической природы, физическими величинами являются скалярные величины, например масса тела, объем тела, длина вектора и т. п., инвариантные относительно преобразований координат. Каждая такая скалярная величина в любой системе координат выражается одним числом, причем это число не зависит от выбора системы координат.

Следующими по сложности математической природы являются величины векторные, например скорость, ускорение, сила и т. п. Векторная величина в трехмерном пространстве в каждом базисе определяется тройкой чисел — тройкой проекций вектора на оси координат, или, как говорят, «тройкой координат вектора в данном базисе», причем эти «координаты вектора» при переходе от одного базиса к другому преобразуются по определенному закону.

Следующими после векторов по сложности математической природы являются физические величины, называемые *тензорами*, играющие роль линейных операторов над векторами (по поводу понятия линейного оператора см. п. 1 § 2). Такого рода величиной описываются, например, проводимость в анизотропном теле.

А именно, в изотропном теле вектор плотности тока \mathbf{j} и вектор напряженности электрического поля \mathbf{E} коллинеарны, т. е. связаны соотношением

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad (7.1)$$

где σ — скалярный множитель ($\sigma > 0$), называемый проводимостью. В анизотропном теле \mathbf{j} и \mathbf{E} уже, вообще говоря, не коллинеарны и множитель σ является линейным оператором, преобразующим вектор \mathbf{E} в вектор \mathbf{j} ; этот оператор называется «тензором» проводимости.

Если выбрать в пространстве какой-либо определенный базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и разложить по этому базису \mathbf{j} и \mathbf{E}

$$\begin{aligned}\mathbf{j} &= j_1 \mathbf{e}_1 + j_2 \mathbf{e}_2 + j_3 \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{E} &= E_1 \mathbf{e}_1 + E_2 \mathbf{e}_2 + E_3 \mathbf{e}_3,\end{aligned}\quad (7.2)$$

то равенство (7.1) можно заменить эквивалентной системой трех скалярных равенств

$$j_k = \sum_{i=1}^3 \sigma_{ki} E_i, \quad k = 1, 2, 3. \quad (7.1')$$

Таким образом, тензор проводимости σ в каждом базисе определяется девятью числами σ_{ki} , $k, i = 1, 2, 3$, которые называются *координатами тензора* σ в данном базисе.

В определении тензора входит описание преобразования его координат при переходе от одного базиса к другому.

В §§ 1—9 мы ограничимся переходами лишь в множестве всех ортогональных нормированных базисов и изучением соответствующих им аффинных ортогональных тензоров. В § 10 мы остановимся кратко на обобщениях.

§ 1. Понятие аффинного ортогонального тензора

1. Преобразования ортогональных нормированных базисов.

Рассмотрим два каких-либо ортогональных нормированных базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ в трехмерном евклидовом пространстве. Из ортогональности и нормированности базисов вытекают следующие соотношения для скалярных произведений:

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_k) = \delta_{ik}, \quad (\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}'_k) = \delta_{ik}, \quad \delta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases} \quad (7.3)$$

Базисы $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ будем условно называть «старым» и «новым». Разложив векторы нового базиса по старому, получим

$$\begin{aligned}\mathbf{e}'_1 &= a_{11} \mathbf{e}_1 + a_{12} \mathbf{e}_2 + a_{13} \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_2 &= a_{21} \mathbf{e}_1 + a_{22} \mathbf{e}_2 + a_{23} \mathbf{e}_3, \\ \mathbf{e}'_3 &= a_{31} \mathbf{e}_1 + a_{32} \mathbf{e}_2 + a_{33} \mathbf{e}_3,\end{aligned}\quad (7.4)$$

или, короче,

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.4')$$

Матрица

$$\| \alpha_{ij} \| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{vmatrix} \quad (7.5)$$

называется *матрицей перехода* от старого базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к новому базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$.

Изучим свойства этой матрицы. Умножая вектор $\mathbf{e}'_i = \alpha_{i1}\mathbf{e}_1 + \alpha_{i2}\mathbf{e}_2 + \alpha_{i3}\mathbf{e}_3$ скалярно на вектор $\mathbf{e}'_j = \alpha_{j1}\mathbf{e}_1 + \alpha_{j2}\mathbf{e}_2 + \alpha_{j3}\mathbf{e}_3$, получим

$$\alpha_{i1}\alpha_{j1} + \alpha_{i2}\alpha_{j2} + \alpha_{i3}\alpha_{j3} = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq i, \\ 1 & \text{при } j = i, \end{cases} \quad (7.6)$$

т. е. сумма квадратов элементов любой строки матрицы равна единице, а сумма произведений соответствующих элементов любых двух различных строк матрицы равна нулю *). Умножая скалярно (7.4') на \mathbf{e}_k , находим **)

$$(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_k) = \alpha_{ik}. \quad (7.7)$$

Найдем аналогичные выражения для элементов матрицы, обратной матрице (7.5). Разлагая векторы старого базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ по новому, будем иметь

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &= \beta_{11}\mathbf{e}'_1 + \beta_{12}\mathbf{e}'_2 + \beta_{13}\mathbf{e}'_3, \\ \mathbf{e}_2 &= \beta_{21}\mathbf{e}'_1 + \beta_{22}\mathbf{e}'_2 + \beta_{23}\mathbf{e}'_3, \\ \mathbf{e}_3 &= \beta_{31}\mathbf{e}'_1 + \beta_{32}\mathbf{e}'_2 + \beta_{33}\mathbf{e}'_3. \end{aligned} \quad (7.8)$$

или, короче,

$$\mathbf{e}_k = \sum_{j=1}^3 \beta_{kj}\mathbf{e}'_j. \quad (7.8')$$

Матрица

$$\| \beta_{ij} \| = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} \quad (7.9)$$

является, очевидно, обратной матрице (7.5). Умножая (7.8') скалярно

*) Матрица $\| \alpha_{ij} \|$, для которой выполнены соотношения (7.6), называется *ортогональной*. Таким образом, матрица перехода от одного ортогонального нормированного базиса к другому является ортогональной.

**) Очевидно, $\alpha_{ik} = (\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_k) = \cos(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_k)$.

на \mathbf{e}'_i , получим

$$(\mathbf{e}'_i, \mathbf{e}_k) = \beta_{ki}. \quad (7.10)$$

Сравнивая (7.10) и (7.7), найдем следующую связь между элементами матриц (7.5) и (7.9):

$$\alpha_{ik} = \beta_{ki}. \quad (7.11)$$

Таким образом, матрица (7.9), обратная матрице (7.5), получается транспонированием матрицы (7.5).

2. Определение аффинного ортогонального тензора. При построении формальной теории тензоров инвариантные скалярные величины и векторы оказывается целесообразным включить в число тензоров. Так, скалярная величина L , инвариантная относительно переходов от одного ортогонального нормированного базиса к другому, называется *аффинным ортогональным тензором нулевого ранга*.

Температура, масса, длина вектора являются аффинными ортогональными тензорами нулевого ранга. Проекция вектора на первую координатную ось (т. е. на ось, определяемую первым базисным вектором \mathbf{e}_1) в каждом базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ является скалярной величиной, не инвариантной относительно переходов от одного базиса к другому, и поэтому не является тензором нулевого ранга.

Включение векторов в число тензоров обеспечивает

Определение 1. Пусть величина L определяется в каждом ортогональном нормированном базисе тройкой чисел: в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ числами L_1, L_2, L_3 , в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ — числами L'_1, L'_2, L'_3 и т. д. Если при переходе от любого базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к любому другому базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ эти числа преобразуются по формулам

$$L'_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} L_k, \quad (7.12)$$

где $\|\alpha_{ik}\|$ — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, то величину L называют *аффинным ортогональным тензором первого ранга* и обозначают символом (L_i) , т. е. $L \equiv (L_i)$.

Числа $L_i, i=1, 2, 3$, называют координатами тензора L в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, а числа $L'_i, i=1, 2, 3$, соответственно координатами этого тензора в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$.

Докажем, что любой вектор является аффинным ортогональным тензором первого ранга. Во-первых, в каждом ортогональном нормированном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ вектор \mathbf{x} определяется тройкой чисел — тройкой своих координат. Во-вторых, при переходе

от одного базиса к другому координаты вектора x преобразуются по формулам вида (7.12). Действительно, разложив x по базисам e_1, e_2, e_3 и e'_1, e'_2, e'_3 , получим

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3 = x'_1 e'_1 + x'_2 e'_2 + x'_3 e'_3. \quad (7.13)$$

Умножим равенство (7.13) скалярно на e'_i . В силу (7.3) и (7.7), это дает

$$x'_i = \alpha_{i1} x_1 + \alpha_{i2} x_2 + \alpha_{i3} x_3 = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} x_k, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.14)$$

причем формулы (7.14) имеют тот же вид, что и формулы (7.12), а это и означает, что вектор x является аффинным ортогональным тензором первого ранга.

Замечание 1. Очевидно, каждый аффинный ортогональный тензор первого ранга можно рассматривать как вектор.

Замечание 2. Так как обратная матрица для матрицы $\|\alpha_{ij}\|$ получается транспонированием $\|\alpha_{ij}\|$, то из равенства (7.14) находим

$$x_i = \sum_{j=1}^3 \alpha_{ji} x'_j, \quad i = 1, 2, 3. \quad (7.14')$$

Сформулируем теперь определение тензора второго ранга.

Определение 2. Пусть величина L определяется в каждом ортогональном нормированном базисе девяткой чисел: в базисе e_1, e_2, e_3 числами L_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, в базисе e'_1, e'_2, e'_3 числами L'_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, и т. д. Если при переходе от любого базиса e_1, e_2, e_3 к любому другому базису e'_1, e'_2, e'_3 эти числа преобразуются по формулам

$$L'_{ij} = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \alpha_{im} \alpha_{jn} L_{mn}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (7.15)$$

где $\|\alpha_{ij}\|$ — матрица перехода от базиса e_1, e_2, e_3 к базису e'_1, e'_2, e'_3 , то величину L называют аффинным ортогональным тензором второго ранга и обозначают символом (L_{ij}) , т. е. $L \equiv (L_{ij})$.

Числа L_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, называют координатами тензора L в базисе e_1, e_2, e_3 , а числа L'_{ij} , $i, j = 1, 2, 3$, — его координатами в базисе e'_1, e'_2, e'_3 .

В §§ 2—9 мы остановимся подробно на примерах и свойствах аффинных ортогональных тензоров второго ранга, а сейчас сформулируем определение аффинного ортогонального тензора произвольного ранга $p \geq 1$.

Определение 3. Пусть величина L определяется в каждом ортогональном нормированном базисе e_1, e_2, e_3

совокупностью 3^p чисел $L_{i_1 i_2 \dots i_p}$, $i_s = 1, 2, 3$; $s = 1, 2, \dots, p$. Если при переходе к любому другому ортогональному нормированному базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ эти числа преобразуются по закону

$$L'_{i_1 i_2 \dots i_p} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_p=1}^3 \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \dots \alpha_{i_p j_p} L_{j_1 j_2 \dots j_p}, \quad (7.16)$$

где $\|\alpha_{ij}\|$ — матрицы перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$, то величину L называют *аффинным ортогональным тензором p -го ранга* и обозначают символом $(L_{i_1 i_2 \dots i_p})$, т. е. $L \equiv (L_{i_1 i_2 \dots i_p})$.

Числа $L_{i_1 i_2 \dots i_p}$ называются координатами этого тензора в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, а числа $L'_{i_1 i_2 \dots i_p}$ — его координатами в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$.

Замечание 1. Иногда определение тензора p -го ранга, $p \geq 1$, формулируют в следующей эквивалентной форме.

Говорят, что задан *аффинный ортогональный тензор ранга $p \geq 1$* $(L_{i_1 i_2 \dots i_p})$, если в каждом ортогональном нормированном базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ задано 3^p чисел $L_{i_1 i_2 \dots i_p}$, $i_s = 1, 2, 3$, $s = 1, \dots, p$ и если при переходе к любому другому ортогональному нормированному базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ эти числа преобразуются по закону

$$L'_{i_1 i_2 \dots i_p} = \sum_{j_1 j_2 \dots j_p=1}^3 \alpha_{i_1 j_1} \alpha_{i_2 j_2} \dots \alpha_{i_p j_p} L_{j_1 j_2 \dots j_p}. \quad (7.17)$$

Иногда мы будем пользоваться этой формой определения тензора при $p = 1$, а также при $p = 2$.

Замечание 2. Определения 1, 2 и 3 сформулированы для трехмерного пространства. Совершенно аналогично они могут быть сформулированы и для N -мерного пространства, где ортогональные нормированные базисы содержат по N единичных векторов $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N$; $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_N$, а матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_N$ к базису $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots, \mathbf{e}'_N$ имеет порядок N , так как

$$\mathbf{e}' = \sum_{j=1}^N \alpha_{ij} \mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

§ 2. Связь между тензорами второго ранга и линейными операторами

1. Линейный оператор как тензор второго ранга. Напомним прежде всего, что *линейным оператором* или *линейной вектор-функцией* называется такая функция

$$\mathbf{y} = L(\mathbf{x}),$$

которая каждому вектору \mathbf{x} ставит в соответствие вектор \mathbf{y} и для которой выполняется равенство

$$L(C_1\mathbf{x}_1 + C_2\mathbf{x}_2) = C_1L(\mathbf{x}_1) + C_2L(\mathbf{x}_2) \quad (7.18)$$

при любых \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 и любых константах C_1 и C_2 .

Координатами линейного оператора L в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ называются коэффициенты L_{ij} разложения образов $L(\mathbf{e}_1), L(\mathbf{e}_2), L(\mathbf{e}_3)$ базисных векторов по базису $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$:

$$\begin{aligned} L(\mathbf{e}_1) &= L_{11}\mathbf{e}_1 + L_{21}\mathbf{e}_2 + L_{31}\mathbf{e}_3, \\ L(\mathbf{e}_2) &= L_{12}\mathbf{e}_1 + L_{22}\mathbf{e}_2 + L_{32}\mathbf{e}_3, \\ L(\mathbf{e}_3) &= L_{13}\mathbf{e}_1 + L_{23}\mathbf{e}_2 + L_{33}\mathbf{e}_3, \end{aligned} \quad (7.19)$$

или, короче, разложения

$$L(\mathbf{e}_j) = \sum_{k=1}^3 L_{kj}\mathbf{e}_k, \quad j = 1, 2, 3. \quad (7.20)$$

Умножим скалярно обе части равенства (7.20) на \mathbf{e}_i . В силу соотношений (7.3), это дает

$$L_{ij} = (\mathbf{e}_i, L(\mathbf{e}_j)), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (7.21)$$

Аналогично для координат оператора L в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ получаем

$$L'_{ij} = (\mathbf{e}'_i, L(\mathbf{e}'_j)), \quad i, j = 1, 2, 3. \quad (7.22)$$

Подставляя в (7.22) выражения

$$\mathbf{e}'_i = \sum_{m=1}^3 \alpha_{im}\mathbf{e}_m, \quad \mathbf{e}'_j = \sum_{n=1}^3 \alpha_{jn}\mathbf{e}_n, \quad (7.23)$$

найдем

$$\begin{aligned} L'_{ij} &= (\mathbf{e}'_i, L(\mathbf{e}'_j)) = \left(\left(\sum_{m=1}^3 \alpha_{im}\mathbf{e}_m \right), \left(\sum_{n=1}^3 \alpha_{jn}L(\mathbf{e}_n) \right) \right) = \\ &= \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \alpha_{im}\alpha_{jn}(\mathbf{e}_m, L(\mathbf{e}_n)) = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \alpha_{im}\alpha_{jn}L_{mn}, \quad i, j = 1, 2, 3. \end{aligned} \quad (7.24)$$

Формулы (7.24) совпадают с формулами (7.15), а следовательно, доказано, что *линейный оператор L является аффинным ортогональным тензором второго ранга*.

2. Тензор второго ранга как линейный оператор. Аффинный ортогональный тензор (L_{ij}) второго ранга можно рассматривать как линейный оператор над векторами евклидова пространства. Пусть задан аффинный ортогональный тензор второго ранга (L_{ij}) . Определим соответствующий линейный оператор $\mathbf{y} = L(\mathbf{x})$ сначала на базисных векторах каждого ортогонального нормированного базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

соотношениями (7.19), а затем определим этот оператор для каждого вектора $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$ соотношением

$$L(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 x_i L(\mathbf{e}_i). \quad (7.25)$$

Докажем, что определенный таким образом оператор действительно является линейным, т. е. что для него выполняется соотношение (7.18). Пусть $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$ и $\mathbf{y} = \sum_{i=1}^3 y_i \mathbf{e}_i$; тогда

$$C_1 \mathbf{x} + C_2 \mathbf{y} = \sum_{i=1}^3 (C_1 x_i + C_2 y_i) \mathbf{e}_i.$$

Следовательно, в силу определения (7.25) (заменяя в (7.25) \mathbf{x} на $C_1 \mathbf{x} + C_2 \mathbf{y}$), получим соотношение

$$\begin{aligned} L(C_1 \mathbf{x} + C_2 \mathbf{y}) &= \sum_{i=1}^3 (C_1 x_i + C_2 y_i) L(\mathbf{e}_i) = \\ &= C_1 \sum_{i=1}^3 x_i L(\mathbf{e}_i) + C_2 \sum_{i=1}^3 y_i L(\mathbf{e}_i) = C_1 L(\mathbf{x}) + C_2 L(\mathbf{y}), \end{aligned}$$

совпадающее с (7.18). Линейность оператора доказана.

Нетрудно доказать, что определение линейного оператора L с помощью тензора (L_{ij}) не зависит от выбора базиса. Иными словами, если вместо координат L_{ij} тензора в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ взять координаты L'_{ij} этого тензора в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ и определить линейный оператор L' соотношениями

$$\begin{aligned} L'(\mathbf{e}'_1) &= L'_{11} \mathbf{e}'_1 + L'_{21} \mathbf{e}'_2 + L'_{31} \mathbf{e}'_3, \\ L'(\mathbf{e}'_2) &= L'_{12} \mathbf{e}'_1 + L'_{22} \mathbf{e}'_2 + L'_{32} \mathbf{e}'_3, \\ L'(\mathbf{e}'_3) &= L'_{13} \mathbf{e}'_1 + L'_{23} \mathbf{e}'_2 + L'_{33} \mathbf{e}'_3 \end{aligned} \quad (7.19')$$

для базисных векторов $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ и соотношением

$$L'(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^3 x'_i L'(\mathbf{e}'_i) \quad (7.25')$$

для каждого вектора $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x'_i \mathbf{e}'_i$, то

$$L'(\mathbf{x}) = L(\mathbf{x}) \quad (7.26)$$

для каждого вектора \mathbf{x} .

Действительно, воспользовавшись соотношениями

$$L'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_{lk} a_{ji} L_{kl}, \quad x_i = \sum_{j=1}^3 a_{ji} x'_j, \quad e_k = \sum_{l=1}^3 a_{lk} e'_l,$$

(7.19), (7.25), (7.19') и (7.25'), получим

$$\begin{aligned} L(x) &= \sum_{i=1}^3 x_i L(e_i) = \sum_{i=1}^3 x_i \sum_{k=1}^3 L_{ki} e_k = \sum_{j=1}^3 x'_j \sum_{l=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 a_{lk} a_{ji} L_{ki} \right) e'_l = \\ &= \sum_{j=1}^3 x'_j \sum_{l=1}^3 L'_{lj} e'_l = \sum_{j=1}^3 x'_j L'(e'_j) = L'(x), \end{aligned} \quad (7.27)$$

что и требовалось доказать.

Мы доказали совпадение операторов L' и L и тем самым доказали, что с помощью соотношений (7.19) и (7.25) каждому аффинному ортогональному тензору второго ранга (L_{ij}) однозначно ставится в соответствие линейный оператор L . Этот линейный оператор L можно отождествить с тензором (L_{ij}) , которому он соответствует, иными словами, рассматривать аффинный ортогональный тензор второго ранга как линейный оператор. Такая интерпретация аффинного ортогонального тензора второго ранга широко используется в физике; именно таким образом интерпретируются тензор проводимости и тензор инерции, упомянутые в начале этой главы, а также тензор напряжений, с которым мы познакомимся в § 5*). Но возможна и другая весьма полезная интерпретация тензора второго ранга, на которой мы остановимся в следующем параграфе.

§ 3. Связь между тензорами и инвариантными полилинейными формами

1. Тензоры первого ранга и инвариантные линейные формы.

Пусть в каждой системе координат задана система трех чисел a_1, a_2, a_3 , причем эти числа при переходе от одной системы координат к другой преобразуются так, что линейная форма $a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3$, где x_1, x_2, x_3 — координаты произвольного вектора x , остается инвариантной; тогда величины a_i ($i = 1, 2, 3$) образуют тензор первого ранга. Действительно, пусть в базисе e_1, e_2, e_3 вектор x представляется в виде $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$ и коэффициенты линейной формы равны a_1, a_2, a_3 , а в базисе e'_1, e'_2, e'_3 тот же вектор x

*) Если вместо соотношений (7.20) и (7.25) для определения линейного оператора, соответствующего тензору (L_{ij}) , воспользоваться соотношениями

$L^*(e_j) = \sum_{k=1}^3 L_{jk} e_k, \quad j = 1, 2, 3,$ и $L^*(x) = \sum_{i=1}^3 x_i L^*(e_i)$, то получится линейный оператор L^* , который называется сопряженным с L .

представляется в виде $\mathbf{x} = x'_1 \mathbf{e}'_1 + x'_2 \mathbf{e}'_2 + x'_3 \mathbf{e}'_3$ и коэффициенты линейной формы равны a'_1, a'_2, a'_3 и пусть линейная форма инвариантна, т. е. для любого вектора \mathbf{x} выполняется равенство

$$a'_1 x'_1 + a'_2 x'_2 + a'_3 x'_3 = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3. \quad (7.28)$$

Подставив в правую часть равенства (7.28) выражение x_k через x'_i :

$x_k = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ik} x'_i$, будем иметь

$$\sum_{i=1}^3 a'_i x'_i = \sum_{k=1}^3 a_k \sum_{i=1}^3 \alpha_{ik} x'_i = \sum_{i=1}^3 \left(\sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} a_k \right) x'_i.$$

В силу произвольности x'_1, x'_2, x'_3 , получим

$$a'_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} a_k, \quad (7.29)$$

что и требовалось доказать.

2. Тензоры второго ранга и инвариантные билинейные формы. Совершенно аналогично коэффициенты инвариантной билинейной формы

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x_i y_j \quad (7.30)$$

(где x_i и y_i — соответственно координаты текущих векторов \mathbf{x} и \mathbf{y}) составляют тензор второго ранга. Действительно, пусть в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ билинейная форма имеет вид (7.30), а в базисе $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ — вид

$$\sum_{i,j=1}^3 a'_{ij} x'_i y'_j \quad (7.31)$$

и пусть

$$\sum_{i,j=1}^3 a'_{ij} x'_i y'_j = \sum_{m,n=1}^3 a_{mn} x_m y_n \quad (7.32)$$

для любых двух векторов \mathbf{x}, \mathbf{y} . Подставив в правую часть равенства (7.32) выражение старых координат векторов \mathbf{x}, \mathbf{y} через новые.

$$x_m = \sum_{i=1}^3 \alpha_{im} x'_i, \quad y_n = \sum_{j=1}^3 \alpha_{jn} y'_j, \quad (7.33)$$

получим

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^3 a'_{ij} x'_i y'_j &= \sum_{m,n=1}^3 a_{mn} \left(\sum_{i=1}^3 \alpha_{im} x'_i \right) \left(\sum_{j=1}^3 \alpha_{jn} y'_j \right) = \\ &= \sum_{i,j=1}^3 \left(\sum_{m,n=1}^3 \alpha_{im} \alpha_{jn} a_{mn} \right) x'_i y'_j. \end{aligned} \quad (7.34)$$

В силу произвольности x'_i и y'_j ,

$$a'_{ij} = \sum_{m,n=1}^3 a_{im} a_{jn} a_{mn}, \quad (7.35)$$

что и требовалось доказать.

Замечание 1. Равенство (7.35) можно доказать, используя лишь векторы единичной длины. Действительно, полагая, например,

$$x'_i = \begin{cases} 1 & \text{при } i = i_0, \\ 0 & \text{при } i \neq i_0, \end{cases} \quad i = 1, 2, 3, \quad y'_j = \begin{cases} 1 & \text{при } j = j_0, \\ 0 & \text{при } j \neq j_0, \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, \quad (7.36)$$

получим из равенства (7.34) равенство

$$a'_{i_0 j_0} = \sum_{m,n=1}^3 a_{i_0 m} a_{j_0 n} a_{mn}, \quad (7.35')$$

причем векторы

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x'_i \mathbf{e}'_i, \quad \mathbf{y} = \sum_{j=1}^3 y'_j \mathbf{e}'_j$$

имеют, в силу соотношений (7.36), единичную длину, так как базис $\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3$ ортогонален и нормирован (мы условились рассматривать только такие базисы). Следовательно, если билинейная форма инвариантна на единичной сфере, т. е. при условии, что ее значения рассматриваются лишь на векторах единичной длины, то совокупность ее коэффициентов a_{ij} образует аффинный ортогональный тензор второго ранга.

Билинейная форма называется *симметричной*, если матрица ее коэффициентов симметрична, т. е. $a_{ji} = a_{ij}$. (В силу (7.35), это равенство имеет место в любом базисе, если оно выполняется хотя в одном базисе.) Полагая в симметричной билинейной форме $\mathbf{y} = \mathbf{x}$, мы получим по определению *квадратичную форму*

$$\sum_{i,j=1}^3 a_{ij} x_i x_j. \quad (7.37)$$

Симметричная билинейная форма однозначно определяется порождаемой ею квадратичной формой. Действительно, подставим в (7.37) вместо координат вектора \mathbf{x} координаты вектора $\mathbf{x} + \mathbf{y}$. Поскольку

$\bar{a}_{ij} = a_{ji}$, мы получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^3 a_{ij}(x_i + y_i)(x_j + y_j) &= \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_ix_j + \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}y_iy_j + \\ &+ \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_iy_j + \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}y_iy_j = \\ &= \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_ix_j + \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}y_iy_j + 2 \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_iy_j. \end{aligned} \quad (7.38)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_iy_j &= \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}(x_i + y_i)(x_j + y_j) - \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_ix_j - \sum_{i,j=1}^3 a_{ij}y_iy_j \right\}, \end{aligned} \quad (7.39)$$

что и требовалось доказать. Отсюда следует, что коэффициенты инвариантной квадратичной формы составляют аффинный ортогональный тензор второго ранга, так как они являются коэффициентами соответствующей симметричной инвариантной билинейной формы, а ранее было доказано, что коэффициенты инвариантной билинейной формы образуют аффинный ортогональный тензор второго ранга.

Замечание 2. На основании замечания 1 мы можем сказать теперь, что система коэффициентов a_{ij} квадратичной формы $\sum_{i,j=1}^3 a_{ij}x_ix_j$, инвариантной на единичной сфере, образует аффинный ортогональный тензор второго ранга.

3. Тензоры произвольного ранга p и инвариантные полилинейные формы. Пусть векторы $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_p$ разложены по базису e_1, e_2, e_3 :

$$\xi_j = \xi_{j1}e_1 + \xi_{j2}e_2 + \xi_{j3}e_3, \quad j = 1, 2, \dots, p,$$

и пусть в этом базисе задана система коэффициентов $a_{i_1 i_2 \dots i_p}$, где $i_s = 1, 2, 3, s = 1, \dots, p$. Тогда функция

$$\sum_{i_1 i_2 \dots i_p=1}^3 a_{i_1 i_2 \dots i_p} \xi_{1 i_1} \xi_{2 i_2} \dots \xi_{p i_p}$$

называется *полилинейной формой*. Как и в случае инвариантной билинейной формы, нетрудно доказать, что совокупность коэффициентов инвариантной полилинейной формы произвольного ранга $p \geq 1$ образует аффинный ортогональный тензор p -го ранга.

§ 4. Тензор деформаций

Рассмотрим некоторое деформируемое тело, любую точку которого в системе координат $Ox_1x_2x_3$ будем характеризовать ее радиусом-вектором $\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$; если радиус-вектор точки M равен \mathbf{r} , т. е. $\overline{OM} = \mathbf{r}$, то будем писать $M(\mathbf{r})$.

Пусть тело подверглось деформации, причем точка $M(\mathbf{r})$ сместилась на вектор \mathbf{u} , т. е. заняла положение $M'(\mathbf{r} + \mathbf{u})$ (рис. 7.1). Эта деформация описывается полем смещений $\mathbf{u} = u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3$. Рассмотрим точку $M_1(\mathbf{r} + d\mathbf{r})$, близкую к $M(\mathbf{r})$; при деформации она перейдет в точку $M'_1(\mathbf{r} + d\mathbf{r}, \mathbf{u} + d\mathbf{u})$. Деформа-

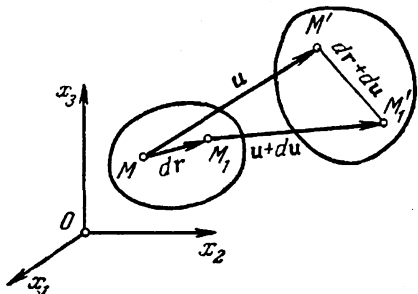


Рис. 7.1.

цию тела в окрестности данной точки $M(\mathbf{r})$ можно характеризовать изменением длин всевозможных отрезков $\overline{MM}_1, \overline{MM}_2, \dots$, выходящих из точки $M(\mathbf{r})$ в достаточно малой ее окрестности.

Рассмотрим изменение длины отрезка \overline{MM}_1 при деформации тела. Длина отрезка \overline{MM}_1 равна $|d\mathbf{r}|$. Он перейдет в отрезок $\overline{M'M'_1}$, длина которого равна $|d\mathbf{r} + d\mathbf{u}|$. За меру изменения длины отрезка \overline{MM}_1 примем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \{ \overline{M'M'_1}^2 - \overline{MM}_1^2 \} &= \frac{1}{2} \{ (d\mathbf{r} + d\mathbf{u})^2 - d\mathbf{r}^2 \} = \frac{1}{2} \{ 2 d\mathbf{u} d\mathbf{r} + d\mathbf{u}^2 \} = \\ &= \gamma_{x_1x_1} dx_1^2 + \gamma_{x_2x_2} dx_2^2 + \gamma_{x_3x_3} dx_3^2 + 2\gamma_{x_1x_2} dx_1 dx_2 + \\ &\quad + 2\gamma_{x_1x_3} dx_1 dx_3 + 2\gamma_{x_2x_3} dx_2 dx_3. \end{aligned}$$

Мы получили квадратичную форму относительно переменных dx_1, dx_2, dx_3 , которая по своему определению является инвариантной. Следовательно, ее коэффициенты образуют тензор второго ранга. Матрицей этого тензора будет

$$\begin{vmatrix} \gamma_{x_1x_1} & \gamma_{x_1x_2} & \gamma_{x_1x_3} \\ \gamma_{x_2x_1} & \gamma_{x_2x_2} & \gamma_{x_2x_3} \\ \gamma_{x_3x_1} & \gamma_{x_3x_2} & \gamma_{x_3x_3} \end{vmatrix}. \quad (7.40)$$

Этот тензор называется *тензором деформаций*.

Если деформация столь мала, что квадратами и произведениями величин u_1, u_2, u_3 и их производных по x_1, x_2, x_3 можно пренебречь

по сравнению с их первыми степенями, то матрица этого тензора представится в виде

$$\left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{array} \right\|. \quad (7.41)$$

§ 5. Тензор напряжений

1. Определение тензора напряжений. Пусть упругое тело деформировано. Проведем мысленно через точку M этого тела элементарную плоскую площадку σ и восставим к какой-нибудь из двух сторон этой площадки нормальный единичный вектор \mathbf{n} (рис. 7.2). Если равнодействующую $\mathbf{F}_{n\sigma}$ всех упругих сил, приложенных к выбранной стороне площадки, разделить на площадь σ этой площадки;

то по определению получится среднее напряжение $(\mathbf{p}_n)_{\text{ср}} = \frac{\mathbf{F}_{n\sigma}}{\sigma}$ на

площадке σ , проходящей через точку M с нормалью \mathbf{n} . Переходя к пределу при стягивании σ к M , получим истинное напряжение в точке M на элементарной площадке с нормалью \mathbf{n} :

$$\mathbf{p}_n = \lim_{\sigma \rightarrow M} \frac{\mathbf{F}_{n\sigma}}{\sigma}. \quad (7.42)$$

Меняя направление нормали \mathbf{n} , т. е. поворачивая площадку σ , проходящую через точку M , мы получим различные значения век-

тора \mathbf{p}_n в одной и той же точке M . Таким образом, напряженное состояние упругого тела в данной его точке M не может быть описано одним вектором. Но оказывается, что достаточно знать напряжение на трех взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через точку M , и тогда может быть вычислено напряжение в точке M на площадке любой ориентации, проходящей через M .

Докажем это. Обозначим через \mathbf{p}_{x_1} , \mathbf{p}_{x_2} и \mathbf{p}_{x_3} напряжения в точке M на элементарных площадках, нормали к которым совпадают по направлению с осями координат Ox_1 , Ox_2 , Ox_3 . Иными словами, \mathbf{p}_{x_i} означает напряжение на площадке с единичной нормалью \mathbf{e}_i ,

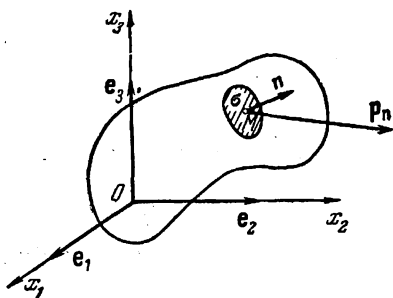


Рис. 7.2.

где \mathbf{e}_i — единичный вектор вдоль оси Ox_i (рис. 7.3). Рассмотрим тетраэдр с вершиной в точке M и ребрами MA , MB , MC , параллельными осями Ox_1 , Ox_2 , Ox_3 . Внешняя нормаль \mathbf{n}_2 к грани MAC направлена противоположно вектору \mathbf{e}_2 . Значит, напряжение на этой площадке будет равно $-\mathbf{p}_{x_2}$. Аналогично напряжение на грани BMC соответствующей внешней нормали $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{e}_1$, будет равно $-\mathbf{p}_{x_1}$, а напряжение на площадке MAB , соответствующей внешней нормали $\mathbf{n}_3 = -\mathbf{e}_3$, будет равно $-\mathbf{p}_{x_3}$. Обозначим через \mathbf{p}_n напряжение на площадке ABC , соответствующей внешней нормали \mathbf{n} , и составим уравнение, выражающее второй закон Ньютона для тетраэдра $MABC$:

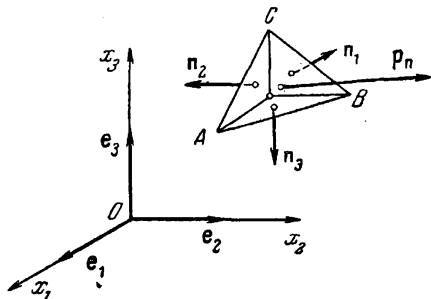


Рис. 7.3.

$$\rho \frac{1}{3} \sigma h \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \sigma \mathbf{p}_n - \sigma \cos(\mathbf{n}, x_1) \mathbf{p}_{x_1} - \sigma \cos(\mathbf{n}, x_2) \mathbf{p}_{x_2} - \sigma \cos(\mathbf{n}, x_3) \mathbf{p}_{x_3} + \frac{1}{3} \sigma h \rho \mathbf{f}. \quad (7.43)$$

(Здесь σ — площадь грани ABC , h — высота тетраэдра, если за основание принята грань ABC , ρ — объемная плотность массы, \mathbf{f} — объемная сила, приходящаяся на единицу массы (например, сила тяжести).)

Тогда $\frac{1}{3} \sigma h$ — объем тетраэдра $MABC$, $\sigma \cos(\mathbf{n}, x_1)$, $\sigma \cos(\mathbf{n}, x_2)$, $\sigma \cos(\mathbf{n}, x_3)$ — площади граней BMC , MAC , MAB . Если разделить равенство (7.43) на σ , а затем перейти к пределу при $h \rightarrow 0$ при условии, что ускорение $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ и объемная сила \mathbf{f} остаются ограниченными, то получится равенство

$$0 = \mathbf{p}_n - \mathbf{p}_{x_1} \cos(\mathbf{n}, x_1) - \mathbf{p}_{x_2} \cos(\mathbf{n}, x_2) - \mathbf{p}_{x_3} \cos(\mathbf{n}, x_3).$$

Следовательно,

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{x_1} \cos(\mathbf{n}, x_1) + \mathbf{p}_{x_2} \cos(\mathbf{n}, x_2) + \mathbf{p}_{x_3} \cos(\mathbf{n}, x_3). \quad (7.44)$$

Так определяется напряжение \mathbf{p}_n на площадке с нормалью \mathbf{n} через напряжения на площадках, нормали к которым совпадают по направлению с осями координат.

Разложим векторы \mathbf{p}_{x_1} , \mathbf{p}_{x_2} , \mathbf{p}_{x_3} по базисным векторам \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 :

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_{x_1} &= p_{11}\mathbf{e}_1 + p_{12}\mathbf{e}_2 + p_{13}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{p}_{x_2} &= p_{21}\mathbf{e}_1 + p_{22}\mathbf{e}_2 + p_{23}\mathbf{e}_3, \\ \mathbf{p}_{x_3} &= p_{31}\mathbf{e}_1 + p_{32}\mathbf{e}_2 + p_{33}\mathbf{e}_3.\end{aligned}\tag{7.45}$$

Если матрица

$$\|p_{ij}\| = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{vmatrix}\tag{7.46}$$

для данной точки M известна, то в точке M можно определить напряжение на любой площадке σ , проходящей через точку M , как только будет задано направление нормали \mathbf{n} к этой площадке; это обеспечивается соотношениями (7.44) и (7.45). Таким образом, напряженное состояние тела в точке характеризуется матрицей (7.46).

Рассмотрим проекцию вектора напряжения \mathbf{p}_n на площадке с нормалью \mathbf{n} на направление этой нормали. По самому своему смыслу эта величина не зависит от выбора системы координат. Умножая обе части равенства (7.44) скалярно на \mathbf{n} и используя (7.45), получим, что эта величина выражается квадратичной формой

$$(\mathbf{p}_n, \mathbf{n}) = \sum_{i,j=1}^n p_{ij} \cos(\mathbf{n}, x_i) \cos(\mathbf{n}, x_j),\tag{7.47}$$

определенной на единичной сфере.

Таким образом, квадратичная форма (7.47) инвариантна на единичной сфере. Следовательно, совокупность ее коэффициентов p_{ij} образует аффинный ортогональный тензор второго ранга $\Pi = (p_{ij})$ (см. замечание 2 § 3).

Этот тензор называется *тензором напряжений*.

2. Тензор напряжений как линейный оператор. Тензор напряжений удобно рассматривать как линейный оператор, преобразующий единичную нормаль \mathbf{n} к площадке в вектор напряжения \mathbf{p}_n на этой площадке.

Подставим в левую часть равенства (7.44) разложение вектора напряжения по базису \mathbf{e}_1 , \mathbf{e}_2 , \mathbf{e}_3 :

$$\mathbf{p}_n = p_{n_1}\mathbf{e}_1 + p_{n_2}\mathbf{e}_2 + p_{n_3}\mathbf{e}_3,$$

а в правую часть — разложения \mathbf{p}_{x_1} , \mathbf{p}_{x_2} , \mathbf{p}_{x_3} по этому же базису (см. соотношения (7.45)). Получим, в силу единственности разложения

p_n по базису e_1, e_2, e_3 , систему трех скалярных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} p_{n1} &= p_{11} \cos(n, x_1) + p_{21} \cos(n, x_2) + p_{31} \cos(n, x_3), \\ p_{n2} &= p_{12} \cos(n, x_1) + p_{22} \cos(n, x_2) + p_{32} \cos(n, x_3), \\ p_{n3} &= p_{13} \cos(n, x_1) + p_{23} \cos(n, x_2) + p_{33} \cos(n, x_3), \end{aligned} \right\} \quad (7.48)$$

выражающих упомянутый линейный оператор в базисе e_1, e_2, e_3 . Если единичный вектор нормали к площадке

$$n = e_1 \cos(n, x_1) + e_2 \cos(n, x_2) + e_3 \cos(n, x_3)$$

представить в виде горизонтальной матрицы-строки

$$n = \|\cos(n, x_1), \cos(n, x_2), \cos(n, x_3)\|,$$

то можно написать (см. Дополнение к гл. 7)

$$p_n = n \|p_{ij}\|, \quad (7.49)$$

где $\|p_{ij}\|$ — матрица тензора $\Pi = (p_{ij})$, представляющая тензор напряжений в данной точке. Вместо того чтобы говорить об умножении матрицы $\|p_{ij}\|$ тензора $\Pi = (p_{ij})$ на вектор, говорят об умножении тензора (p_{ij}) на вектор *). Таким образом, чтобы получить в данной точке M напряжение на площадке с единичной нормалью n , нужно умножить тензор напряжений $\Pi = (p_{ij})$ в данной точке на единичный вектор нормали n слева:

$$p_n = n (p_{ij}) = n \Pi. \quad (7.49')$$

§ 6. Алгебраические операции над тензорами

1. Сложение, вычитание и умножение тензоров. Тензоры одинакового ранга можно суммировать и вычитать; например, суммой (разностью) тензоров второго ранга a_{ij} и b_{ij} называется тензор, координаты которого равны

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}), \quad i, j = 1, 2, 3.$$

Нетрудно убедиться, что величины c_{ij} при изменении системы координат преобразуются по тензорному закону. Аналогично определяется сумма двух тензоров любого (одинакового) ранга. Перемножать можно тензоры любых рангов. Например, произведением тензора второго ранга a_{ij} на тензор третьего ранга b_{mnp} называется тензор пятого ранга, координаты которого равны

$$c_{ijmnp} = a_{ij} b_{mnp}; \quad i, j, m, n, p = 1, 2, 3.$$

Нетрудно доказать, что величины c_{ijmnp} при переходе от одной

*) Или, точнее, об операторном умножении тензора на вектор.

системы координат к другой преобразуются по тензорному закону. Аналогично определяется произведение двух тензоров любых рангов.

Умножение тензора на число можно рассматривать как частный случай произведения двух тензоров; оно определяется так: произведением тензора a_{ijk} на число C называется тензор с координатами $b_{ijk} = Ca_{ijk}$. Нетрудно проверить, что величины b_{ijk} составляют тензор.

2. Умножение тензора на вектор. Остановимся теперь на так называемом операторном умножении тензора второго ранга на вектор. Мы уже встречались с частным случаем такого умножения тензора второго ранга на вектор при рассмотрении тензора напряжений (см. соотношение (7.49) предыдущего параграфа). Различают операторное умножение тензора (L_{ij}) на вектор \mathbf{x} слева, $\mathbf{x}(L_{ij})$, и справа, $(L_{ij})\mathbf{x}$. В обоих случаях под произведением тензора на вектор понимают некоторый вектор. Пусть матрица тензора (L_{ij}) в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равна

$$\|L_{ij}\| = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} \quad (7.50)$$

и пусть в этом базисе $\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i$. Тогда координаты вектора-произведения

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{x}(L_{ij}) \quad (7.51)$$

определяются в этом базисе уравнением (см. Дополнение к гл. 7)

$$\|y_1^*, y_2^*, y_3^*\| = \|x_1, x_2, x_3\| \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix}, \quad (7.52)$$

а координаты вектора-произведения

$$\mathbf{y} = (L_{ij})\mathbf{x} \quad (7.53)$$

определяются в этом же базисе уравнением

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}. \quad (7.54)$$

Соотношения (7.52) и (7.54) можно записать соответственно в более компактной форме

$$\mathbf{y}^* = \mathbf{x} \|L_{ij}\| \quad (7.52')$$

и

$$\mathbf{y} = \|L_{ij}\| \mathbf{x}, \quad (7.54')$$

интерпретируя в первом случае векторы x и y^* как матрицы-строки, а во втором случае — векторы x и y как матрицы-столбцы *).

3. Свертка. Следующей операцией, специфической для тензоров, является *операция свертывания* или *свертки* по какой-либо паре индексов. Так, например, сверткой тензора четвертого ранга c_{ijmn} называется тензор второго ранга, координаты которого определяются равенствами

$$a_{mn} = \sum_{i=1}^3 c_{iimn}.$$

Нетрудно доказать, что величины a_{mn} образуют тензор второго ранга. Если тензор четного ранга подвергнуть операции свертки максимально возможное число раз, то получится число, т. е. инвариант.

Так, например, если произведение двух тензоров первого ранга $a_i b_j$ подвергнуть свертке, то получится скалярное произведение векторов a и b :

$$(a, b) = \sum_{i=1}^3 a_i b_i.$$

4. Перестановка индексов. Рассмотрим перестановку индексов для весьма важного случая — аффинного ортогонального тензора второго ранга (L_{ij}) . Положим в каждом базисе e_1, e_2, e_3

$$L_{ij}^* = L_{ji},$$

где L_{ij} — координаты тензора (L_{ij}) в этом базисе. Совокупость величин L_{ij}^* , как нетрудно доказать, также образует аффинный ортогональный тензор второго ранга. Этот тензор называется *сопряженным с тензором (L_{ij})* и обозначается символом (L_{ij}^*) . Аналогично в тензоре любого ранга можно делать перестановку любых двух индексов, при этом снова получится тензор того же ранга.

5. Разложение тензора второго ранга на симметричный и антисимметричный. Тензор второго ранга (L_{ij}) называется *симметричным*, если его матрица

$$\|L_{ij}\| = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix}$$

в каждом базисе симметрична, т. е. если в каждом базисе выполнены соотношения $L_{ij} = L_{ji}$, $i, j = 1, 2, 3$.

Тензор второго ранга (L_{ij}) называется *антисимметричным*, если для элементов его матрицы $\|L_{ij}\|$ в каждом базисе выполнены

*) Соотношениями (7.51) и (7.53) (или, что то же самое, соотношениями (7.52') и (7.54')) определяются два взаимно сопряженных линейных оператора. Ср. со сноской на стр. 271.

соотношения

$$L_{ij} = -L_{ji}.$$

Из этих соотношений следует, что для антисимметричного тензора $L_{ii} = -L_{ii}$, т. е. $2L_{ii} = 0$ и $L_{ii} = 0$. Таким образом, симметричный тензор второго ранга определяется шестью своими координатами, а антисимметричный — только тремя недиагональными координатами.

Простейшим примером антисимметричного тензора второго ранга является векторное произведение двух векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} . Действительно, пусть в базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$

$$\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + a_2\mathbf{e}_2 + a_3\mathbf{e}_3, \quad \mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + b_3\mathbf{e}_3.$$

Тогда векторное произведение $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ можно записать так:

$$[\mathbf{a}, \mathbf{b}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \\ = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{e}_1 + (a_3b_1 - a_1b_3)\mathbf{e}_2 + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{e}_3. \quad (7.55)$$

Учитывая, что векторы \mathbf{a} и \mathbf{b} являются тензорами первого ранга, получим, что система девяти величин $L_{ij} = a_ib_j - a_jb_i$ образует тензор второго ранга. Очевидно, этот тензор антисимметричен. Действительно, $L_{ji} = a_jb_i - a_ib_j = -(a_ib_j - a_jb_i) = -L_{ij}$. Следовательно, этот тензор определяется тремя своими координатами $(a_2b_3 - a_3b_2)$, $(a_3b_1 - a_1b_3)$, $(a_1b_2 - a_2b_1)$, входящими в равенство (7.55).

Нетрудно показать, что если матрица тензора второго ранга (L_{ij}) симметрична (антисимметрична) в каком-либо одном ортогональном нормированном базисе, то она также симметрична (антисимметрична) в любом другом таком базисе.

Заметим теперь, что каждый тензор второго ранга (L_{ij}) может быть представлен в виде суммы симметричного и антисимметричного тензоров, что вытекает из равенства

$$L_{ij} = \frac{1}{2} \{L_{ij} + L_{ji}\} + \frac{1}{2} \{L_{ij} - L_{ji}\}. \quad (7.56)$$

В следующем параграфе мы рассмотрим важный пример разложения аффинного ортогонального тензора второго ранга на симметричный и антисимметричный тензоры, а именно, тензор относительных смещений разложим на тензор деформаций и тензор относительного поворота.

§ 7. Тензор относительных смещений

Рассмотрим, как и в § 4, деформированное состояние тела. Пусть $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{r}) = \mathbf{e}_1u_1(x_1, x_2, x_3) + \mathbf{e}_2u_2(x_1, x_2, x_3) + \mathbf{e}_3u_3(x_1, x_2, x_3)$ — вектор смещения точки, определяемой радиусом-вектором $\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3$.

Предполагая функции u_1, u_2, u_3 дифференцируемыми, получим

$$\begin{aligned} du_1 &= \frac{\partial u_1}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} dx_3, \\ du_2 &= \frac{\partial u_2}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} dx_3, \\ du_3 &= \frac{\partial u_3}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} dx_3. \end{aligned} \quad (7.57)$$

Переходя от координат x_1, x_2, x_3 к координатам x'_1, x'_2, x'_3 , $x'_i = \sum_{k=1}^3 \alpha_{ik} x_k$, нетрудно проверить, что величины $\frac{\partial u_l}{\partial x_j}$, $l, j = 1, 2, 3$, образуют аффинный ортогональный тензор второго ранга. Этот тензор называется *тензором относительных смещений*. Обозначая его через $\left(\frac{dU(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}}\right)$, можно переписать систему (7.57) в виде равенства

$$dU = \left(\frac{dU(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}}\right) d\mathbf{r}. \quad (7.58)$$

Разложим теперь тензор $\left(\frac{dU(\mathbf{r})}{d\mathbf{r}}\right)$ на симметричный и антисимметричный тензоры. На языке матриц это разложение примет вид

$$\begin{aligned} \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{array} \right\| &= \\ &= \left\| \begin{array}{ccc} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{array} \right\| + \\ &\quad + \left\| \begin{array}{ccc} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{array} \right\|, \quad (7.59) \end{aligned}$$

где вектор $\omega = \omega_1 \mathbf{e}_1 + \omega_2 \mathbf{e}_2 + \omega_3 \mathbf{e}_3$ равен $\frac{1}{2} \text{rot } U$. Первая матрица в правой части равенства (7.59) есть матрица симметричного тензора деформаций D , а вторая — матрица антисимметричного тензора относительного поворота Ω . Теперь равенство (7.58) можно переписать

в виде

$$dU = D dr + \Omega dr. \quad (7.60)$$

Непосредственным вычислением можно проверить, что

$$\Omega dr = \left[\frac{1}{2} \operatorname{rot} U, dr \right],$$

а следовательно,

$$dU = D dr + \left[\frac{1}{2} \operatorname{rot} U, dr \right]. \quad (7.61)$$

Рассматривая относительные смещения dU точек в окрестности точки r , получившей в результате деформации смещение $U(r)$, замечаем, что: 1) если $\operatorname{rot} U \equiv 0$, то, в силу (7.61), относительные смещения dU происходят за счет чистой деформации; 2) если же $D = 0$ (т. е. все элементы матрицы тензора D равны нулю), то относительные смещения dU происходят за счет чистого поворота.

§ 8. Поле тензора

1. Поле тензора. Дивергенция тензора. Если каждой точке M некоторой области G пространства поставлен в соответствие тензор (L_{ij}) , то говорят, что в области G задано поле тензора $(L_{ij})^*$, при этом предполагается, что координаты L_{ij} тензора являются определенными функциями координат точки $M(x_1, x_2, x_3)$.

Характерными примерами тензорных полей являются поле тензора деформаций и поле тензора напряжений в упругом теле, подвергнутом деформации, так как напряженное и деформированное состояния такого тела в различных его точках (x_1, x_2, x_3) , вообще говоря, различны.

Пусть координаты L_{ij} тензора (L_{ij}) имеют непрерывные частные производные первого порядка по x_1, x_2, x_3 .

Составим с помощью матрицы тензора

$$\|L_{ij}\| = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} \quad (7.62)$$

векторы

$$\begin{aligned} L_1 &= L_{11}e_1 + L_{12}e_2 + L_{13}e_3, \\ L_2 &= L_{21}e_1 + L_{22}e_2 + L_{23}e_3, \\ L_3 &= L_{31}e_1 + L_{32}e_2 + L_{33}e_3. \end{aligned} \quad (7.63)$$

*) Для определенности мы имеем в виду поле тензора второго ранга.

Дивергенцией тензора (L_{ij}) называется вектор

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(L_{ij}) &= \frac{\partial L_1}{\partial x_1} + \frac{\partial L_2}{\partial x_2} + \frac{\partial L_3}{\partial x_3} = \left(\frac{\partial L_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial L_{31}}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \\ &+ \left(\frac{\partial L_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial L_{32}}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial L_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial L_{33}}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_3 = \\ &= (\operatorname{div}(L_{ij}))_1 \mathbf{e}_1 + (\operatorname{div}(L_{ij}))_2 \mathbf{e}_2 + (\operatorname{div}(L_{ij}))_3 \mathbf{e}_3. \end{aligned} \quad (7.64)$$

Это определение дивергенции тензора (L_{ij}) является формальным. Нужно проверить, имеет ли оно инвариантный характер, т. е. является ли определенная таким образом дивергенция вектором или, что то же самое, тензором первого ранга. Итак, нужно проверить, что величины

$$(\operatorname{div}(L_{ij}))_i = \frac{\partial L_{1i}}{\partial x_1} + \frac{\partial L_{2i}}{\partial x_2} + \frac{\partial L_{3i}}{\partial x_3}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.65)$$

образуют тензор первого ранга. Имеем

$$(\operatorname{div}(L_{ij}))_i = \sum_{k=1}^3 \frac{\partial L_{ki}}{\partial x_k}, \quad i = 1, 2, 3.$$

Перейдем к новой системе координат $Ox'_1x'_2x'_3$. В новой системе

$$(\operatorname{div}(L_{ij}))'_j = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial L'_{mj}}{\partial x'_m} = \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \frac{\partial L'_{mj}}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial x'_m}. \quad (7.66)$$

Но, как известно, матрица, обратная матрице $\|\alpha_{ij}\|$, получается простым транспонированием $\|\alpha_{ij}\|$, поэтому

$$x_n = \sum_{m=1}^3 \alpha_{mn} x'_m. \quad (7.67)$$

В силу определения тензора второго ранга имеем

$$L'_{mj} = \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \alpha_{mk} \alpha_{ji} L_{ki}. \quad (7.68)$$

Подставляя выражения (7.67) и (7.68) в (7.66), получим

$$\begin{aligned} (\operatorname{div}(L_{ij}))'_j &= \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \alpha_{mn} \alpha_{mk} \alpha_{ji} \frac{\partial L_{ki}}{\partial x_n} = \\ &= \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \alpha_{ji} \left[\sum_{n=1}^3 \left(\sum_{m=1}^3 \alpha_{mn} \alpha_{mk} \right) \frac{\partial L_{ki}}{\partial x_n} \right] = \\ &= \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \alpha_{ji} \left(\sum_{n=1}^3 \delta_{nk} \frac{\partial L_{ki}}{\partial x_n} \right) = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ji} \left(\sum_{k=1}^3 \frac{\partial L_{ki}}{\partial x_k} \right) = \sum_{i=1}^3 \alpha_{ji} (\operatorname{div}(L_{ij}))_i. \end{aligned}$$

поскольку

$$\sum_{m=1}^3 \alpha_{mn} \alpha_{mk} = \delta_{nk} = \begin{cases} 1 & \text{при } n = k, \\ 0 & \text{при } n \neq k, \end{cases}$$

что и требовалось доказать.

2. Формула Остроградского для поля тензора. Пусть координаты L_{ij} , $i=1, 2, 3$, $j=1, 2, 3$, тензора (L_{ij}) имеют непрерывные производные первого порядка в замкнутой ограниченной области $\Omega + \sigma_\Omega$, границей которой является кусочно-гладкая поверхность σ_Ω , удовлетворяющая условиям, при которых устанавливается справедливость обычной формулы Остроградского. Пусть, далее, \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности, а произведение $\mathbf{n}(L_{ij})$ образуется так же, как в соотношении (7.49') образовывалось $\mathbf{n}(p_{ij})$. Тогда имеет место формула

$$\int_{\sigma_\Omega} \mathbf{n}(L_{ij}) d\sigma = \int_{\Omega} \int \int \operatorname{div}(L_{ij}) d\omega, \quad (7.69)$$

которая читается так:

Поток тензора (L_{ij}) через замкнутую поверхность σ_Ω равен тройному интегралу от дивергенции тензора L_{ij} по объему Ω , ограниченному этой поверхностью.

Потоком тензора (L_{ij}) через поверхность σ_Ω называется интеграл, стоящий в левой части (7.69).

Формула (7.69) называется *тензорной формулой Остроградского*.

Доказательство формулы (7.69) сводится к применению обычной формулы Остроградского к каждой составляющей вектора $\mathbf{n}(L_{ij})$:

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_\Omega} \mathbf{n}(L_{ij}) d\sigma &= \\ &= \mathbf{e}_1 \int_{\sigma_\Omega} [L_{11} \cos(\mathbf{n}, x_1) + L_{21} \cos(\mathbf{n}, x_2) + L_{31} \cos(\mathbf{n}, x_3)] d\sigma + \\ &+ \mathbf{e}_2 \int_{\sigma_\Omega} [L_{12} \cos(\mathbf{n}, x_1) + L_{22} \cos(\mathbf{n}, x_2) + L_{32} \cos(\mathbf{n}, x_3)] d\sigma + \\ &+ \mathbf{e}_3 \int_{\sigma_\Omega} [L_{13} \cos(\mathbf{n}, x_1) + L_{23} \cos(\mathbf{n}, x_2) + L_{33} \cos(\mathbf{n}, x_3)] d\sigma = \\ &= \mathbf{e}_1 \int_{\Omega} \int \int (\operatorname{div}(L_{ij}))_1 d\omega + \mathbf{e}_2 \int_{\Omega} \int \int (\operatorname{div}(L_{ij}))_2 d\omega + \\ &+ \mathbf{e}_3 \int_{\Omega} \int \int (\operatorname{div}(L_{ij}))_3 d\omega = \int_{\Omega} \int \int (\operatorname{div}(L_{ij})) d\omega. \end{aligned}$$

3. Уравнения движения сплошной среды. Применим тензорную формулу Остроградского к выводу уравнения движения сплошной среды. Выделим мысленно элементарную область в движущейся сплошной среде (рис. 7.4) и напомним для нее второй закон Ньютона, рассматривая область Ω , заполненную массой, как материальную точку,

$$\rho \Omega \frac{dv}{dt} = \rho \Omega f + \int_{\sigma_{\Omega}} p_n d\sigma. \quad (7.70)$$

(Здесь ρ — объемная плотность массы, Ω — объем области (Ω), f — объемная сила, приходящаяся на единицу массы, p_n — напряжение на элементарной площадке $d\sigma$ с единичным нормальным вектором n .)

Поверхностный интеграл в правой части равенства (7.70) равен

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_{\Omega}} p_n d\sigma &= \int_{\sigma_{\Omega}} n \Pi d\sigma = \\ &= \int_{\Omega} \int \int \operatorname{div} \Pi d\omega = \\ &= e_1 \int_{\Omega} \int \int (\operatorname{div} \Pi)_1 d\omega + \\ &+ e_2 \int_{\Omega} \int \int (\operatorname{div} \Pi)_2 d\omega + \\ &+ e_3 \int_{\Omega} \int \int (\operatorname{div} \Pi)_3 d\omega, \end{aligned} \quad (7.71)$$

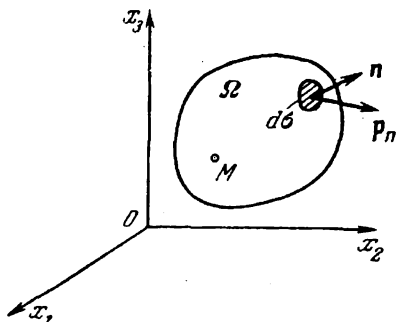


Рис. 7.4.

где Π — тензор напряжений. Применяя к каждому из интегралов в правой части равенства (7.71) теорему о среднем, получим

$$\int_{\sigma_{\Omega}} p_n d\sigma = e_1 \Omega (\operatorname{div} \Pi)_1^* + e_2 \Omega (\operatorname{div} \Pi)_2^* + e_3 \Omega (\operatorname{div} \Pi)_3^*. \quad (7.72)$$

Подставляя этот результат в (7.70), деля на Ω и переходя к пределу при $\Omega \rightarrow M$ (при стягивании Ω к точке M), получим уравнение движения сплошной среды в векторной форме:

$$\rho \frac{dv}{dt} = \rho f + \operatorname{div} \Pi. \quad (7.73)$$

В проекциях на оси координат векторное уравнение (7.73) распадается на три скалярных уравнения:

$$\begin{aligned} \rho \frac{dv_1}{dt} &= \rho f_1 + \frac{\partial p_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{31}}{\partial x_3}, \\ \rho \frac{dv_2}{dt} &= \rho f_2 + \frac{\partial p_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{32}}{\partial x_3}, \\ \rho \frac{dv_3}{dt} &= \rho f_3 + \frac{\partial p_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial p_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial p_{33}}{\partial x_3}. \end{aligned} \quad (7.74)$$

§ 9. Приведение симметричного тензора второго ранга к главным осям

Будем интерпретировать аффинный ортогональный тензор второго ранга (L_{ij}) как линейный оператор

$$y = L(x) \quad (7.75)$$

(см. п. 2 § 2). *Собственными векторами и собственными значениями тензора (L_{ij})* называют собственные векторы и собственные значения линейного оператора $L(x)$. Напомним, что всякий отличный от нулевого вектор x , удовлетворяющий равенству

$$L(x) = \lambda x, \quad (7.76)$$

где λ — некоторое число, называется собственным вектором оператора L ; при этом число λ называется собственным значением оператора L , отвечающим собственному вектору x .

Переходя к координатам вектора x в базисе e_1, e_2, e_3 , уравнение (7.76) можно заменить системой скалярных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (L_{11} - \lambda)x_1 + L_{12}x_2 + L_{13}x_3 &= 0, \\ L_{21}x_1 + (L_{22} - \lambda)x_2 + L_{23}x_3 &= 0, \\ L_{31}x_1 + L_{32}x_2 + (L_{33} - \lambda)x_3 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.77)$$

Чтобы эта линейная однородная система имела нетривиальный вектор — решение, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, т. е.

$$\begin{vmatrix} L_{11} - \lambda & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} - \lambda & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (7.78)$$

Если тензор симметричен, т. е. если его матрица в каждом базисе e_1, e_2, e_3 симметрична, то, как известно, все корни λ_1, λ_2 и λ_3 уравнения (7.78) вещественны. Известно, что можно так выбрать нормированные собственные векторы e_1, e_2, e_3 , отвечающие собственным значениям $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, чтобы они образовали ортогональный нормированный базис, причем в этом базисе матрица оператора L будет иметь диагональную форму

$$\begin{vmatrix} L_1 & 0 & 0 \\ 0 & L_2 & 0 \\ 0 & 0 & L_3 \end{vmatrix}. \quad (7.79)$$

Выбор базиса e_1, e_2, e_3 , в котором матрица тензора имеет диагональную форму, называется *приведением тензора к главным*

осям. Укажем в качестве примера, что для тензора проводимости в анизотропном теле — «монокристалле» — главными осями являются кристаллографические оси. По поводу главных осей тензора инерции, тензора деформации и тензора напряжений мы отсылаем к курсам механики и механики сплошных сред.

§ 10. Общее определение тензора

Понятие аффинного ортогонального тензора, рассматривавшееся в предыдущих параграфах, связано с преобразованием ортогональных декартовых систем координат и соответствующих им ортогональных нормированных базисов.

В настоящем параграфе, рассматривая всевозможные косоугольные декартовы системы координат и соответственно произвольные базисы, мы дадим общее определение тензора.

1. Взаимные базисы векторов. Пусть векторы

$$\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \text{ или, короче, } \mathbf{e}_i \quad (7.80)$$

образуют базис. Обозначим через

$$V = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \quad (7.81)$$

объем параллелепипеда, построенного на этих векторах, как на ребрах. Векторы \mathbf{e}^k

$$\mathbf{e}^1 = \frac{[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]}{V}, \quad \mathbf{e}^2 = \frac{[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]}{V}, \quad \mathbf{e}^3 = \frac{[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]}{V} \quad (7.82)$$

образуют так называемый «взаимный» базис для базиса \mathbf{e}_i .

Легко проверить, что и, наоборот, базис \mathbf{e}_i является взаимным для базиса \mathbf{e}^k . Действительно, объем параллелепипеда, построенного на векторах \mathbf{e}^k , как на ребрах, равен

$$\begin{aligned} V' = (\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3) &= \left(\frac{[\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3]}{V}, \frac{[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1]}{V}, \frac{[\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]}{V} \right) = \\ &= \frac{1}{V^3} ([\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3], [\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]) = \\ &= \frac{1}{V^3} ([\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3] \{ \mathbf{e}_1 (\mathbf{e}_3 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_2) - \mathbf{e}_2 (\mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_3) \}) = \frac{V^2}{V^3} = \frac{1}{V}. \end{aligned} \quad (7.83)$$

Таким образом,

$$VV' = 1. \quad (7.84)$$

Поэтому

$$\frac{[\mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3]}{V'} = V \frac{[[\mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1], [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]]}{V^2} = \frac{V^2 \mathbf{e}_1}{V^2} = \mathbf{e}_1; \quad (7.85)$$

аналогично получаем

$$\frac{[\mathbf{e}^3, \mathbf{e}^1]}{V^1} = \mathbf{e}_2, \quad \frac{[\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2]}{V^1} = \mathbf{e}_3. \quad (7.86)$$

Из соотношений (7.85) и (7.86) вытекает, что

$$(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^k) = \delta_i^k = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases} \quad (7.87)$$

Следует заметить, что если базис $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ортонормирован, то взаимный базис с ним совпадает.

2. Ковариантные и контравариантные координаты векторов. Рассмотрим разложение вектора \mathbf{x} по взаимным базисам:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}^i = \sum_{i=1}^3 x^i \mathbf{e}_i. \quad (7.88)$$

Контравариантными координатами вектора \mathbf{x} в данном базисе называются коэффициенты разложения этого вектора по данному базису; так, числа x^i и x_i являются контравариантными координатами вектора \mathbf{x} в базисах $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ и $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$, соответственно. *Ковариантными координатами* вектора \mathbf{x} в данном базисе называются скалярные произведения этого вектора на векторы взаимного базиса. Умножая скалярно (7.88) на \mathbf{e}_k или на \mathbf{e}^k и используя (7.87), получим, что ковариантные координаты вектора \mathbf{x} в базисах $\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2, \mathbf{e}^3$ и $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ равны, соответственно,

$$(\mathbf{x}, \mathbf{e}_k) = \sum_{i=1}^3 x_i (\mathbf{e}^i, \mathbf{e}_k) = \sum_{i=1}^3 x_i \delta_k^i = x_k, \quad (7.89)$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{e}^k) = \sum_{i=1}^3 x^i (\mathbf{e}_i, \mathbf{e}^k) = \sum_{i=1}^3 x^i \delta_i^k = x^k. \quad (7.90)$$

Таким образом, ковариантными координатами вектора в данном базисе являются его контравариантные координаты во взаимном базисе.

3. Операция суммирования в тензорной символике. В тензорном исчислении для записи операции суммирования принято следующее правило: если в некотором выражении встречаются одинаковые индексы, из которых один верхний, а другой нижний, то это означает, что по данному индексу проведено суммирование от 1 до 3. Например, суммы (7.87) и (7.88) в соответствии с этим правилом записываются в виде

$$\mathbf{x} = x_i \mathbf{e}^i, \quad \mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i; \quad (7.91)$$

билинейная форма $\sum_{i,k=1}^3 a_{ik} x^i x^k$ записывается в виде

$$a_{ik} x^i x^k \quad (7.92)$$

и т. п.

4. Преобразование базисных векторов. Рассмотрим преобразование старого базиса \mathbf{e}_i в новый базис $\mathbf{e}_{i'}$. Применяя тензорную запись суммирования, будем иметь

$$\mathbf{e}_{i'} = \alpha_{i'}^i \mathbf{e}_i, \quad i' = 1, 2, 3. \quad (7.93)$$

Коэффициенты $\alpha_{i'}^i$ образуют матрицу перехода от старого базиса \mathbf{e}_i к новому базису $\mathbf{e}_{i'}$, т. е.

$$\|\alpha_{i'}^i\| = \begin{vmatrix} \alpha_1^1 & \alpha_1^2 & \alpha_1^3 \\ \alpha_2^1 & \alpha_2^2 & \alpha_2^3 \\ \alpha_3^1 & \alpha_3^2 & \alpha_3^3 \end{vmatrix}. \quad (7.94)$$

Если мы рассмотрим обратное преобразование нового базиса $\mathbf{e}_{i'}$ в старый базис \mathbf{e}_i :

$$\mathbf{e}_i = \alpha_i^{i'} \mathbf{e}_{i'}, \quad (7.95)$$

то матрица $\|\alpha_i^{i'}\|$, очевидно, будет обратной для матрицы $\|\alpha_{i'}^i\|$. Действительно, подставляя в равенство

$$\mathbf{e}_k = \alpha_k^{i'} \mathbf{e}_{i'}, \quad (7.96)$$

выражение $\mathbf{e}_{i'} = \alpha_{i'}^i \mathbf{e}_i$, получим

$$\mathbf{e}_k = \alpha_k^{i'} \alpha_{i'}^i \mathbf{e}_i. \quad (7.97)$$

В силу единственности разложения вектора \mathbf{e}_k по базисным векторам $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, из (7.97) получаем

$$\alpha_k^{i'} \alpha_{i'}^i = \delta_k^i = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k, \end{cases} \quad (7.98)$$

но это и означает, что матрицы $\|\alpha_{i'}^i\|$ и $\|\alpha_i^{i'}\|$ взаимно обратны.

5. Преобразование ковариантных и контравариантных координат вектора. Рассмотрим сначала, как преобразуются контравариантные координаты вектора:

$$\mathbf{x} = x^i \mathbf{e}_i = x^{i'} \mathbf{e}_{i'}. \quad (7.99)$$

Подставляя $\mathbf{e}_i = \alpha_i^{i'} \mathbf{e}_{i'}$ в (7.99), получим, что

$$\mathbf{x} = x^i \alpha_i^{i'} \mathbf{e}_{i'} = x^{i'} \mathbf{e}_{i'}.$$

В силу единственности разложения \mathbf{x} по базису $\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}$, находим

$$x^{i'} = \alpha_i^{i'} x^i. \quad (7.100)$$

Таким образом, «новые» контравариантные координаты $x^{i'}$ выражаются через «старые» контравариантные координаты x^l с помощью матрицы $\|\alpha_{i'}^{l'}\|$ обратного перехода от нового базиса $\mathbf{e}_{i'}$ к старому базису \mathbf{e}_i (*). Отсюда и происходит название «контравариантные координаты» (т. е. противоположающиеся).

Аналогично (7.100) получаем, что

$$x^i = \alpha_{i'}^i x^{i'}. \quad (7.101)$$

Рассмотрим теперь, как преобразуются ковариантные координаты x_i вектора \mathbf{x} . Так как

$$x_i = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_i), \quad x_{i'} = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_{i'}), \quad (7.102)$$

то

$$x_{i'} = (\mathbf{x}, \mathbf{e}_{i'}) = (\mathbf{x} \alpha_{i'}^{l'}, \mathbf{e}_l) = \alpha_{i'}^l x_l. \quad (7.103)$$

Таким образом, прямое преобразование ковариантных координат выполняется с помощью той же матрицы, что и прямое преобразование базисных векторов (\mathbf{e}_i в $\mathbf{e}_{i'}$); отсюда и название «ковариантные координаты» (т. е. сопереобразующиеся). Аналогично (7.103) получаем

$$x_i = \alpha_i^{i'} x_{i'}. \quad (7.104)$$

6. Общее определение тензора. Будем по-прежнему обозначать через $\|\alpha_{i'}^i\|$ матрицу перехода от старого базиса \mathbf{e}_i к новому $\mathbf{e}_{i'}$, а через $\|\alpha_i^{i'}\|$ — матрицу обратного перехода от нового базиса $\mathbf{e}_{i'}$ к старому \mathbf{e}_i .

Определение 1. Величина A , определяемая в каждом базисе \mathbf{e}_i ($i = 1, 2, 3$) 3^{p+q} числами $A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$, где индексы $i_s, s = 1, 2, \dots, p$, и $j_t, t = 1, 2, \dots, q$, независимо друг от друга пробегают значения 1, 2, 3, называется тензором $(p+q)$ -го ранга, p раз ковариантным и q раз контравариантным, если при переходе от любого базиса \mathbf{e}_i к любому другому базису $\mathbf{e}_{i'}$ эти числа преобразуются по закону

$$A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = \alpha_{i_1}^{l_1} \alpha_{i_2}^{l_2} \dots \alpha_{i_p}^{l_p} \alpha_{j_1}^{l'_1} \alpha_{j_2}^{l'_2} \dots \alpha_{j_q}^{l'_q} A_{l_1 l_2 \dots l_p}^{l'_1 l'_2 \dots l'_q}, \quad (7.105)$$

где $\|\alpha_{i'}^i\|$ — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{e}_{1'}, \mathbf{e}_{2'}, \mathbf{e}_{3'}$, а матрица $\|\alpha_i^{i'}\|$ — обратная ей.

Числа $A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$ называются координатами тензора A в базисе \mathbf{e}_i . Верхние индексы j_1, \dots, j_q называются контравариантными индексами тензора, а нижние i_1, \dots, i_p — ковариантными.

*) Точнее, с помощью матрицы, получающейся транспонированием этой обратной матрицы.

Иногда пользуются следующей эквивалентной формой определения тензора.

Пусть в каждом базисе $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ задана система 3^{p+q} чисел $A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q}$, где индексы $i_s, s = 1, 2, \dots, p$, и $j_t, t = 1, 2, \dots, q$, независимо друг от друга пробегает значения 1, 2, 3. Если при переходе к любому другому базису $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$, эти числа преобразуются по закону

$$A_{i_1 i_2 \dots i_p}^{j_1 j_2 \dots j_q} = \alpha_{i_1}^{i'_1} \alpha_{i_2}^{i'_2} \dots \alpha_{i_p}^{i'_p} \alpha_{j_1}^{j'_1} \alpha_{j_2}^{j'_2} \dots \alpha_{j_q}^{j'_q} A_{i'_1 i'_2 \dots i'_p}^{j'_1 j'_2 \dots j'_q}, \quad (7.105)$$

где $\|\alpha_{i'}^{i'}\|$ — матрица перехода от базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ к базису $\mathbf{e}_1', \mathbf{e}_2', \mathbf{e}_3'$, а матрица $\|\alpha_i^{i'}\|$ — обратная ей, то говорят, что задан тензор $(p+q)$ -го ранга, p раз ковариантный и q раз контравариантный.

Примеры. 1. а) Система коэффициентов $a_{i_1 i_2}$ инвариантной билинейной формы

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a_{i_1 i_2} x^{i_1} y^{i_2} = a_{i'_1 i'_2} x^{i'_1} y^{i'_2} \quad (7.106)$$

является ковариантным тензором второго ранга.

Действительно, подставляя в (7.106) выражения

$$x^{i_1} = \alpha_{i_1}^{i'_1} x^{i'_1} \quad \text{и} \quad y^{i_2} = \alpha_{i_2}^{i'_2} y^{i'_2}, \quad (7.107)$$

получим, в силу произвольности векторов \mathbf{x} и \mathbf{y} , что

$$a_{i'_1 i'_2} = \alpha_{i_1}^{i'_1} \alpha_{i_2}^{i'_2} a_{i_1 i_2}. \quad (7.108)$$

б) В частности, если $f(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$ — скалярное произведение двух векторов \mathbf{x}, \mathbf{y} , то совокупность коэффициентов $g_{i_1 i_2}$ билинейной формы

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = g_{i_1 i_2} x^{i_1} y^{i_2}$$

называется *метрическим тензором* или, точнее, *ковариантным метрическим тензором*. Если в каждом базисе \mathbf{e}_i элементы обратной матрицы для $\|g_{i_1 i_2}\|$ обозначить через $g^{i_1 i_2}$, то они образуют так называемый *контравариантный метрический тензор*.

В силу симметрии скалярного произведения, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{y}, \mathbf{x})$, тензоры g_{ij} и g^{ij} симметричны, т. е. в каждом базисе

$$g_{ij} = g_{ji}, \quad g^{ij} = g^{ji}.$$

2. Совокупность координат L_i^j линейного оператора L

$$L(\mathbf{e}_i) = L_i^j \mathbf{e}_j, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7.109)$$

образует тензор второго ранга, один раз ковариантный и один раз контравариантный. Действительно, взяв новый базис $\mathbf{e}_{i'}$, имеем

$$L(\mathbf{e}_{i'}) = L_{i'}^{j'} \mathbf{e}_{j'}. \quad (7.110)$$

С другой стороны,

$$L(\mathbf{e}_{i'}) = L(\alpha_{i'}^l, \mathbf{e}_l) = \alpha_{i'}^l L(\mathbf{e}_l) = \alpha_{i'}^l L_l^j \mathbf{e}_j. \quad (7.111)$$

Сравнивая (7.110) с (7.111), в силу единственности разложения вектора $L(\mathbf{e}_{i'})$ по базису $\mathbf{e}_{j'}$, получаем

$$L_{i'}^{j'} = \alpha_{i'}^l \alpha_j^{j'} L_l^j. \quad (7.112)$$

3. Совокупность ковариантных координат x_i вектора \mathbf{x} образует ковариантный тензор первого ранга; совокупность контравариантных координат вектора \mathbf{x} образует контравариантный тензор первого ранга.

7. Операции над тензорами. Операции над тензорами в общем случае определяются так же, как в случае аффинных ортогональных тензоров, с той лишь разницей, что операции сложения и вычитания определяются для тензоров одинакового ранга, имеющих одинаковое строение, т. е. таких, у которых число p нижних индексов одинаково и число q верхних индексов также одинаково, а свертка делается только по верхнему и нижнему индексам.

Добавляются некоторые новые операции, например операции опускания и поднятия индексов, осуществляемые соответственно путем свертки с ковариантным или контравариантным метрическим тензором.

8. Дальнейшие обобщения. Дальнейшие обобщения связаны с введением криволинейных координат. Возникают понятия параллельного перенесения, ковариантного дифференцирования, объекта связности. По поводу общей теории тензоров мы отсылаем к специальным руководствам [1], [2], [3].

ДОПОЛНЕНИЕ К ГЛ. 7

ОБ УМНОЖЕНИИ МАТРИЦ

Напомним, что произведением $P \cdot Q$ двух прямоугольных матриц (где число столбцов в первом множителе должно равняться числу строк во втором)

$$P = \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{m1} & p_{m2} & \cdots & p_{mn} \end{vmatrix} \quad \text{и} \quad Q = \begin{vmatrix} q_{11} & q_{12} & \cdots & q_{1s} \\ q_{21} & q_{22} & \cdots & q_{2s} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ q_{n1} & q_{n2} & \cdots & q_{ns} \end{vmatrix}$$

называется матрица

$$R = \begin{vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{m1} & r_{m2} & \dots & r_{mn} \end{vmatrix},$$

элемент которой r_{ij} , $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, 2, \dots, n$, стоящий на пересечении i -й строки и j -го столбца, равен скалярному произведению i -й строки первого множителя (матрицы P) на j -й столбец второго множителя (матрицы Q):

$$r_{ij} = \sum_{v=1}^n p_{iv} q_{vj}.$$

Представим векторы y и x как вертикальные матрицы-столбцы

$$y = \begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix}, \quad x = \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix}.$$

Тогда равенство

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{vmatrix} \quad (1)$$

после умножения матриц в правой его части принимает вид

$$\begin{vmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \sum_{k=1}^3 L_{1k} x_k \\ \sum_{k=1}^3 L_{2k} x_k \\ \sum_{k=1}^3 L_{3k} x_k \end{vmatrix}, \quad (2)$$

что равносильно системе трех скалярных равенств

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= L_{11}x_1 + L_{12}x_2 + L_{13}x_3, \\ y_2 &= L_{21}x_1 + L_{22}x_2 + L_{23}x_3, \\ y_3 &= L_{31}x_1 + L_{32}x_2 + L_{33}x_3. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Аналогично представим векторы x и y^* в виде горизонтальных матриц-строк

$$x = \| x_1, x_2, x_3 \|, \quad y^* = \| y_1^*, y_2^*, y_3^* \|.$$

Тогда равенство

$$\|y_1^*, y_2^*, y_3^*\| = \|x_1, x_2, x_3\| \begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} \quad (4)$$

после умножения матриц в правой части принимает вид

$$\|y_1^*, y_2^*, y_3^*\| = \left\| \sum_{i=1}^3 L_{i1} x_i, \sum_{i=1}^3 L_{i2} x_i, \sum_{i=1}^3 L_{i3} x_i \right\|,$$

что равносильно системе трех скалярных равенств:

$$\left. \begin{aligned} y_1^* &= L_{11}x_1 + L_{21}x_2 + L_{31}x_3, \\ y_2^* &= L_{12}x_1 + L_{22}x_2 + L_{32}x_3, \\ y_3^* &= L_{13}x_1 + L_{23}x_2 + L_{33}x_3. \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

Обычно равенство (1) записывают еще короче в виде

$$y = Lx, \quad (6)$$

а равенство (4) соответственно в виде

$$y^* = xL. \quad (7)$$

ГЛАВА 8

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ И РЯДЫ

В этой главе мы рассмотрим последовательности и ряды, членами которых являются функции. Такие последовательности и ряды называются *функциональными*.

Разложение функций в ряды, члены которых, вообще говоря, проще, чем разлагаемые функции, используется при вычислении и исследовании функций, при интегрировании функций, при решении дифференциальных уравнений и играет важную роль в математике и ее приложениях. При этом существенно используются понятия равномерной сходимости и сходимости в среднем, характерные для функциональных последовательностей и рядов.

§ 1. Понятие равномерной сходимости; признаки равномерной сходимости

1. Сходимость и равномерная сходимость. Рассмотрим последовательность функций

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (8.1)$$

определенных на сегменте $a \leq x \leq b$ *). Если вместо текущего x подставить какое-нибудь фиксированное значение $x_0 \in [a, b]$, то функциональная последовательность превратится в числовую:

$$f_1(x_0), f_2(x_0), \dots, f_n(x_0), \dots \quad (8.2)$$

Функциональная последовательность (8.1) называется *сходящейся в точке* x_0 , если числовая последовательность (8.2) сходится; функциональная последовательность (8.1) называется *расходящейся в точке* x_0 , если числовая последовательность (8.2) расходится. В первом случае x_0 называют *точкой сходимости последовательности* (8.1),

*) Вместо сегмента $a \leq x \leq b$ можно взять какое-либо другое множество X значений x , например: $a < x < b$ или $a \leq x < b$, или $a < x \leq b$, или $a < x < +\infty$, или $a \leq x < +\infty$, или $-\infty < x < +\infty$ и т. п. В тех случаях, когда такая замена замкнутого отрезка $[a, b]$ произвольным множеством X недопустима, это будет оговариваться особо.

во втором случае — *точкой расходимости* этой *последовательности* *).

Если последовательность функций сходится в каждой точке $x \in [a, b]$, то говорят, что она *сходится на сегменте* $[a, b]$. При этом в каждой точке x сегмента $[a, b]$ существует определенный предел $\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x)$, который будет, вообще говоря, зависеть от x , т. е. будет некоторой функцией $f(x)$, определенной на $[a, b]$. Эту функцию называют *пределом последовательности функций* (8.1) и пишут

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \text{ при } n \rightarrow +\infty,$$

или

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = f(x) \text{ на } [a, b]. \quad (8.3)$$

Теперь мы можем сформулировать следующее

Определение 1. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется *сходящейся к функции* $f(x)$ *на сегменте* $[a, b]$, *если при каждом фиксированном значении* $x \in [a, b]$ *последовательность чисел* $f_n(x)$ *сходится к числу* $f(x)$, *т. е. если для каждого* $\varepsilon > 0$ *и каждого* $x \in [a, b]$ *найдется такое* $N = N(\varepsilon, x)$ **, *зависящее от* ε *и, вообще говоря, от* x , *что будет*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ при каждом } n > N(\varepsilon, x). \quad (8.4)$$

Среди всех сходящихся функциональных последовательностей особого внимания заслуживают равномерно сходящиеся последовательности.

Определение 2. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется *равномерно сходящейся к функции* $f(x)$ *на сегменте* $[a, b]$, *если для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $N = N(\varepsilon)$ ***, *зависящее от* ε *и не зависящее от* x , *что отклонение* $f_n(x)$ *от* $f(x)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \text{ при каждом } n > N(\varepsilon) \quad (8.5)$$

сразу для всех $x \in [a, b]$.

*) Множество всех точек сходимости функциональной последовательности (8.1) называют *областью сходимости* этой последовательности. Область сходимости функциональной последовательности может иметь сколь угодно сложную структуру; она может совпадать со всей осью x , как в случае последовательности $f_n(x) \equiv \frac{1}{n}$, $-\infty < x < +\infty$, $n = 1, 2, \dots$, сходящейся на всей оси x к функции $f(x) \equiv 0$, или не содержать ни одной точки, как в случае последовательности $f_n(x) \equiv (-1)^n$, $-\infty < x < +\infty$, $n = 1, 2, \dots$, расходящейся при каждом значении x , $-\infty < x < +\infty$.

**) $N(\varepsilon, x)$ не предполагается обязательно целым.

***) $N(\varepsilon)$ не предполагается обязательно целым.

Этому определению, очевидно, эквивалентно следующее

Определение 2'. Последовательность функций $\{f_n(x)\}$ называется равномерно сходящейся к функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$, если

$$\sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty, \quad (8.5')$$

т. е. если верхняя грань отклонения функции $f_n(x)$ от функции $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$.

Действительно, если выполняется (8.5'), то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N(\varepsilon)$, что при любом $n > N(\varepsilon)$ будет

$$\sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Но, в силу определения верхней грани,

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)|$$

сразу для всех $x \in [a, b]$. Следовательно, будут выполнены соотношения (8.5).

Обратно, если выполнены соотношения (8.5), то

$$\sup_{a \leq x \leq b} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

при каждом $n > N(\varepsilon)$, а это означает, в силу произвольности $\varepsilon > 0$, что выполнено (8.5').

Равномерную сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ на $[a, b]$ обозначают символом

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ на } [a, b]. \quad (8.6)$$

Равномерная сходимость имеет простой геометрический смысл. Соотношение (8.5') означает, что верхняя грань отклонения графика функции $y = f_n(x)$ от графика функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$ стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$. Иными словами, если окружить график функции $y = f(x)$ « ε -полоской», определяемой соотношениями

$$f(x) - \varepsilon < y < f(x) + \varepsilon, \quad a \leq x \leq b, \quad (8.7)$$

то графики всех функций $y = f_n(x)$, начиная с достаточно большого n , целиком лежат в этой « ε -полоске», окружающей график предельной функции $y = f(x)$ (рис. 8.1).

Примеры. 1. Последовательность $f_n(x) = \frac{1}{n} \sin nx \rightarrow f(x) \equiv 0$ при $n \rightarrow +\infty$ на всей оси x , $-\infty < x < +\infty$; эта сходимость является равномерной, так как $|f_n(x) - f(x)| = \frac{1}{n} |\sin nx| \leq \frac{1}{n} < \varepsilon$ сразу при всех x , $-\infty < x < +\infty$, если только $n > N(\varepsilon) = \frac{1}{\varepsilon}$.

2. Последовательность $f_n(x) = x^n$ сходится к функции

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{при } x = 1 \end{cases} \quad \text{на сегменте } 0 \leq x \leq 1 \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Однако эта сходимость будет неравномерной. Действительно, пусть $0 < \varepsilon < 1$, $0 < x < 1$. Тогда неравенство $|f_n(x) - f(x)| = x^n < \varepsilon$ выполняется только при $n > N(\varepsilon, x) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln x}$. Но $N(\varepsilon, x) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \rightarrow +\infty$ при $x \rightarrow 1 - 0$ и $0 < \varepsilon < 1$. Следовательно, при

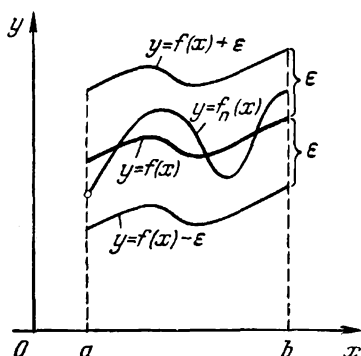


Рис. 8.1.

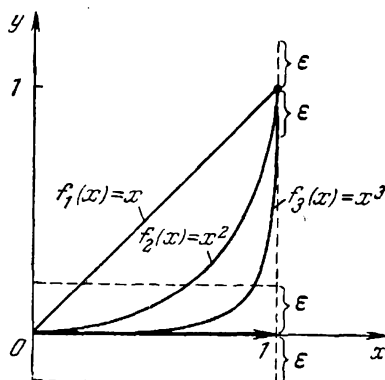


Рис. 8.2.

$0 < \varepsilon < 1$ не найдется такого конечного $N(\varepsilon)$, не зависящего от x , чтобы неравенство $|f_n(x) - f(x)| = x^n < \varepsilon$ выполнялось при каждом $n > N(\varepsilon)$ сразу для всех x из полусегмента $0 \leq x < 1$. Если сегмент $0 \leq x \leq 1$ заменить меньшим сегментом $0 \leq x \leq 1 - \delta$, где $0 < \delta < 1$, причем δ может быть сколь угодно малым положительным числом, то на этом меньшем сегменте последовательность $f_n(x) = x^n$ сходится к своему пределу $f(x) \equiv 0$ равномерно. Действительно, $N(\varepsilon, x) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln x} \leq N(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln(1 - \delta)}$ при $0 \leq x \leq 1 - \delta$, поэтому $|f_n(x) - f(x)| = x^n < \varepsilon$ при $n > N(\varepsilon) = \frac{\ln \varepsilon}{\ln(1 - \delta)}$ сразу для всех $x \in [0, 1 - \delta]$.

К анализу этого примера можно подойти и с геометрической точки зрения. На рис. 8.2 изображены графики функций последовательности и жирной линией график предельной функции $f(x)$; он состоит из отрезка $0 \leq x < 1$ (без правого конца) оси x и изолированной точки с координатами $(1, 1)$. Окружим график предельной функции $f(x)$ « ε -полоской» при $0 < \varepsilon < 1$. График каждой функции $f_n(x) = x^n$, выйдя из начала координат, обязательно при некотором x , $0 < x < 1$,

покидает эту « ε -полоску», так как его правый конец должен попасть в точку $(1, 1)$. Значит, последовательность $f_n(x) = x^n$, $n = 1, 2, \dots$, сходится на сегменте $0 \leq x \leq 1$ неравномерно.

3. Последовательность функций $f_n(x) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} nx$, $-\infty < x < +\infty$, $n = 1, 2, 3, \dots$, сходится к функции

$$f(x) = \operatorname{sign} x = \begin{cases} -1 & \text{при } -\infty < x < 0, \\ 0 & \text{при } x = 0, \\ +1 & \text{при } 0 < x < +\infty, \end{cases}$$

однако эта сходимость не является равномерной, что легко устанавливается с помощью геометрического анализа, аналогично тому, как это сделано в предыдущем примере.

4. Последовательность функций $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ сходится к функции $f(x) \equiv 0$ на полупрямой $0 \leq x < +\infty$. Чтобы установить, сходится ли эта последовательность равномерно к своему пределу на полупрямой $0 \leq x < +\infty$, проверим, выполняется ли соотношение типа (8.5'), т. е. будет ли $\sup_{0 \leq x < +\infty} |f_n(x) - f(x)| \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Для

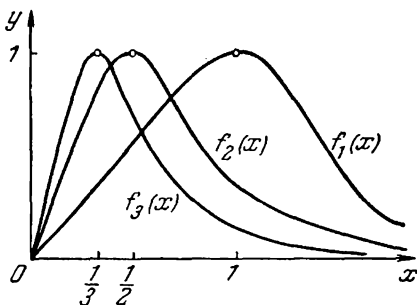


Рис. 8.3.

этого найдем максимум «отклонения» $\Phi_n(x) = |f_n(x) - f(x)| = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$ на полупрямой $0 \leq x < +\infty$. Мы имеем

$$\Phi'_n(x) = \frac{(1+n^2x^2)2n - 2nx \cdot 2n^2x}{(1+n^2x^2)^2} = 2n \frac{1-n^2x^2}{(1+n^2x^2)^2}.$$

Очевидно, что $\Phi'_n(x) = 0$ при $1 - n^2x^2 = 0$, т. е. при $x_n = \frac{1}{n}$. Следовательно,

$$\max_{0 \leq x < +\infty} \Phi_n(x) = \Phi_n\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{2n \cdot \frac{1}{n}}{1 + \frac{n^2 \cdot 1}{n^2}} = 1 \not\rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Значит, сходимость не является равномерной. Здесь неравномерная сходимость характеризуется наличием бегущего горбика, высота которого (рис. 8.3), равная единице, является максимумом отклонения графика $f_n(x)$ от графика $f(x)$ при $0 \leq x < +\infty$.

Все сказанное до сих пор о функциональных последовательностях легко переносится на функциональные ряды, т. е. на ряды вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_k(x) + \dots, \quad (8.8)$$

где функции $u_k(x)$ заданы, например, на сегменте $[a, b]$.

Определение 1₁. Функциональный ряд (8.8) называется *сходящимся*, если сходится последовательность его *частичных сумм*

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x), \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.9)$$

Предел последовательности частичных сумм

$$S(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) \quad (8.10)$$

называют *суммой ряда* (8.8). Если ряд (8.8) сходится и его сумма равна $S(x)$, то пишут

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x). \quad (8.11)$$

Определение 2₁. Функциональный ряд (8.11) называется *равномерно сходящимся* к своей сумме $S(x)$ на сегменте $[a, b]$, если последовательность его *частичных сумм* $\{S_n(x)\}$ сходится *равномерно* на $[a, b]$ к его сумме $S(x)$, т. е. если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N = N(\varepsilon)$, что отклонение $S_n(x)$ от $S(x)$ будет удовлетворять неравенству

$$|S(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \varepsilon \quad (8.12)$$

для каждого $n > N(\varepsilon)$ сразу при всех $x \in [a, b]$, иными словами, если

$$\sup_{a \leq x \leq b} |S(x) - S_n(x)| = \sup_{a \leq x \leq b} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty. \quad (8.12')$$

Примеры равномерно (неравномерно) сходящихся рядов легко построить, отправляясь от примеров равномерно (неравномерно) сходящихся последовательностей. Действительно, по произвольной последовательности функций

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (8.13)$$

легко построить ряд

$$f_1(x) + [f_2(x) - f_1(x)] + [f_3(x) - f_2(x)] + \dots \\ \dots + [f_n(x) - f_{n-1}(x)] + \dots, \quad (8.14)$$

для которого она является последовательностью частичных сумм. Поэтому, если последовательность (8.13) сходится равномерно (неравномерно), то и ряд (8.14) сходится равномерно (неравномерно), в силу определения 2_1 .

Заметим, что в силу определения 2_1 справедливо и обратное утверждение: из равномерной (неравномерной) сходимости ряда (8.14) следует равномерная (неравномерная) сходимость последовательности (8.13).

Непосредственно из определения равномерной сходимости вытекает справедливость следующих двух утверждений:

1) *Сумма конечного числа равномерно сходящихся последовательностей (рядов) является равномерно сходящейся последовательностью (рядом).*

2) *Умножение всех членов равномерно сходящейся последовательности (ряда) на одну и ту же ограниченную функцию $\varphi(x)$ (в частности, константу) не нарушает равномерной сходимости.*

Докажем, например, второе утверждение. Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a, b]$ и пусть существует такая константа C , $0 < C < +\infty$, что $|\varphi(x)| < C$ при всех $x \in [a, b]$. Пусть, наконец, дано какое угодно $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости $f_n(x)$ к $f(x)$, найдется такое $N(\varepsilon)$, что $|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{C}$ сразу при всех $x \in [a, b]$ для каждого $n > N(\varepsilon)$, но тогда

$$|\varphi(x)f_n(x) - \varphi(x)f(x)| = |\varphi(x)| \cdot |f_n(x) - f(x)| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

для каждого $n > N(\varepsilon)$ сразу при всех $x \in [a, b]$, т. е. $\varphi(x)f_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)f(x)$ на $[a, b]$ при $n \rightarrow +\infty$. Считая $f_n(x)$ частичной суммой, а $f(x)$ — суммой равномерно сходящегося функционального ряда, заключаем, что это утверждение справедливо и для равномерно сходящегося ряда.

2. Признаки равномерной сходимости. Если предел $f(x)$ последовательности функций (8.13) известен, то ее исследование на равномерную сходимость часто может быть выполнено непосредственно, на основе определений 2 и 2_1 или их геометрической интерпретации, аналогично тому, как это было сделано в примерах 1—4.

Однако иногда целесообразнее исследование вопроса о равномерной сходимости последовательности функций (8.13) свести к исследованию вопроса о равномерной сходимости соответствующего функционального ряда (8.14), для которого она является последовательностью частичных сумм. Такое сведение может быть полезным

потому, что для функциональных рядов существуют различные практически удобные признаки равномерной сходимости.

Наиболее простым и широко используемым из таких признаков является мажорантный признак Вейерштрасса, основанный на сравнении функционального ряда с числовым рядом, члены которого неотрицательны.

Числовой ряд с неотрицательными членами

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots \quad (8.15)$$

называется *мажорирующим*, или *мажорантным*, для функционального ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_k(x) + \dots \quad (8.16)$$

на отрезке $a \leq x \leq b$, если

$$|u_k(x)| \leq a_k \quad (8.17)$$

при всех $k=1, 2, \dots$ сразу для всех $x \in [a, b]$.

Мажорантный признак Вейерштрасса. Если для функционального ряда (8.16) существует сходящийся мажорирующий на $[a, b]$ числовой ряд (8.15), то ряд (8.16) сходится равномерно на $[a, b]$.

Доказательство. Пусть дано какое угодно $\varepsilon > 0$. В силу сходимости мажорантного ряда (8.15), при всех достаточно больших значениях n имеет место неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k < \varepsilon.$$

Тогда при всех таких n , в силу соотношений (8.17), будут выполняться неравенства

$$\left| \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k(x) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} |u_k(x)| \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} a_k < \varepsilon \quad (8.18)$$

сразу для всех $x \in [a, b]$, что и означает равномерную сходимость ряда (8.16). Признак доказан.

Примеры. 1. Ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$ сходится равномерно на всей оси x , $-\infty < x < +\infty$, так как для него существует мажорирующий сходящийся числовой ряд

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} \quad \left(\left| \frac{\sin nx}{n^2} \right| \leq \frac{1}{n^2} \quad \text{при} \quad -\infty < x < +\infty \right).$$

2. Рассмотрим ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ на полуоси $0 \leq x < +\infty$. Пользуясь обычными приемами дифференциального исчисления, находим $\max_{0 \leq x < +\infty} \frac{x}{1+n^4x^2} = \frac{1}{2n^2}$. Следовательно, $\left| \frac{x}{1+n^4x^2} \right| \leq \frac{1}{2n^2}$ при $0 \leq x < +\infty$. Но ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ сходится. Следовательно, по признаку Вейерштрасса, ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x}{1+n^4x^2}$ сходится равномерно на всей полуоси $0 \leq x < +\infty$.

3. Для ряда $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$, $0 \leq x < +\infty$, не существует мажорирующего сходящегося числового ряда, так как $\max_{0 \leq x < +\infty} \left| \frac{(-1)^n}{x+n} \right| = \frac{1}{n}$, а ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ расходится. Однако, в силу признака Лейбница (см. вып. 1, гл. 13, § 5, неравенство (13.80)), при любом $x \in [0, +\infty)$ имеет место оценка

$$\left| \sum_{k=n}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{x+k} \right| \leq \frac{1}{x+n} \leq \frac{1}{n} \quad \text{при } 0 \leq x < +\infty,$$

а следовательно, в силу определения равномерной сходимости функционального ряда (см. соотношение (8.12)), ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}$ сходится равномерно на полуоси $0 \leq x < +\infty$. Этот пример показывает, что признак Вейерштрасса является лишь достаточным для равномерной сходимости и не является необходимым.

Приведем теперь основной критерий равномерной сходимости, имеющий важное теоретическое значение и позволяющий установить более тонкие достаточные признаки равномерной сходимости, чем признак Вейерштрасса.

Критерий Коши (для равномерно сходящихся последовательностей). Для равномерной сходимости последовательности функций $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовало такое $N = N(\varepsilon)$, что при каждом $n > N(\varepsilon)$ и всех $p > 0$ неравенство

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (8.19)$$

выполнялось бы сразу для всех $x \in [a, b]$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на $[a, b]$; тогда при любом $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ и всех $p > 0$ будет

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad |f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

сразу для всех $x \in [a, b]$. Поэтому

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq$$

$$\leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

при всех $n > N(\varepsilon)$ и всех $p > 0$ сразу для всех $x \in [a, b]$.

Достаточность. Из выполнения неравенства (8.19) при всех $x \in [a, b]$ вытекает, что при каждом фиксированном $x \in [a, b]$ последовательность чисел $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, сходится, так как она является фундаментальной, т. е. последовательность функций $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, сходится на всем отрезке $[a, b]$. Обозначим предельную функцию через $f(x)$. Переходя к пределу в (8.19) при $p \rightarrow +\infty$, получим, что

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

при всех $n > N(\varepsilon)$ сразу для всех $x \in [a, b]$. Но это и означает, что $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$ на отрезке $[a, b]$. Критерий доказан.

Применяя критерий Коши для равномерно сходящихся последовательностей к последовательности частичных сумм

$$S_1(x) = u_1(x),$$

$$S_2(x) = u_1(x) + u_2(x), \dots, S_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x), \dots$$

функционального ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$, получим

Критерий Коши (для равномерно сходящихся рядов). Для равномерной сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_k(x) + \dots \quad (8.20)$$

на отрезке $[a, b]$ необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовало такое $N = N(\varepsilon)$, что при каждом $n > N(\varepsilon)$ и всех $p > 0$ неравенство

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| = |u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon \quad (8.21)$$

выполнялось бы сразу для всех $x \in [a, b]$.

С помощью критерия Коши можно доказать

Признак Абеля. Если частичные суммы ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_k(x) + \dots \quad (8.22)$$

равномерно ограничены на $[a, b]$, т. е. существует такая константа C , $0 < C < +\infty$, что

$$|S_n(x)| = \left| \sum_{k=1}^n u_k(x) \right| < C \quad \text{при } n = 1, 2, \dots, \quad (8.23)$$

сразу для всех $x \in [a, b]$, а последовательность функций

$$\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_k(x), \dots, \quad (8.24)$$

монотонно не возрастают, равномерно стремятся к нулю на этом отрезке, то ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha_k(x) u_k(x) \quad (8.25)$$

сходится равномерно на $[a, b]$.

Прежде чем доказать признак Абеля, приведем пример его применения.

4. Ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k}$ можно рассматривать как результат умножения членов ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \sin kx = \sin x + \sin 2x + \dots + \sin kx + \dots \quad (8.26)$$

на члены последовательности

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{k}, \dots \quad (8.27)$$

Для частичных сумм ряда (8.26) имеет место оценка

$$|S_n(x)| \leq \frac{1}{\left| \sin \frac{x}{2} \right|}$$

(ср. с вып. 1, гл. 13, § 5), а следовательно, сразу при всех x , удовлетворяющих неравенствам

$$2m\pi + \alpha \leq x \leq (2m+1)\pi + \alpha, \quad \text{где } 0 < \alpha < \pi, \\ m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (8.28)$$

выполняются неравенства

$$|S_n(x)| \leq \frac{1}{\sin \frac{\alpha}{2}} = \text{const} < +\infty \quad \text{при } n = 1, 2, \dots$$

Так как последовательность (8.27), монотонно убывая, стремится к нулю и, будучи числовой, стремится к своему пределу равномерно на всей оси x , то ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\sin kx}{k}$ удовлетворяет всем усло-

виям признака Абеля на каждом интервале (8.28) и поэтому сходится равномерно на каждом таком интервале.

Доказательство признака Абеля. Докажем, что при сформулированных выше условиях для ряда (8.25) выполнен критерий Коши (для равномерно сходящихся рядов). Мы имеем

$$\begin{aligned} \alpha_{n+1}u_{n+1} + \alpha_{n+2}u_{n+2} + \dots + \alpha_{n+p}u_{n+p} &= \\ &= \alpha_{n+1}[S_{n+1} - S_n] + \alpha_{n+2}[S_{n+2} - S_{n+1}] + \dots \\ \dots + \alpha_{n+p}[S_{n+p} - S_{n+p-1}] &= -\alpha_{n+1}S_n + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2})S_{n+1} + \dots \\ &\dots + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p})S_{n+p-1} + \alpha_{n+p}S_{n+p}. \end{aligned} \quad (8.29)$$

Учитывая, что $\alpha_1(x) \geq \alpha_2(x) \geq \dots \geq \alpha_n(x) \geq \alpha_{n+1}(x) \geq \dots$ и что $|S_n(x)| \leq C$ при всех $n=1, 2, \dots$ и всех $x \in [a, b]$, из равенства (8.29) получим, что

$$\begin{aligned} |\alpha_{n+1}u_{n+1} + \dots + \alpha_{n+p}u_{n+p}| &\leq C \{ \alpha_{n+1} + (\alpha_{n+1} - \alpha_{n+2}) + \\ &+ (\alpha_{n+2} - \alpha_{n+3}) + \dots + (\alpha_{n+p-1} - \alpha_{n+p}) + \alpha_{n+p} \} = 2C\alpha_{n+1} \leq 2C\varepsilon_{n+1} \end{aligned}$$

при всех $p > 0$ и сразу для всех $x \in [a, b]$, где $\varepsilon_{n+1} = \sup_{a \leq x \leq b} \alpha_{n+1}(x) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, что и требовалось доказать.

§ 2. Свойства равномерно сходящихся функциональных последовательностей и рядов

1. Непрерывность и равномерная сходимость.

Теорема 8.1. А) Если последовательность непрерывных функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ сходится равномерно на $[a, b]$ к функции $f(x)$, то $f(x)$ также непрерывна на $[a, b]$.

Б) Если все члены ряда

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \quad (8.30)$$

непрерывны на $[a, b]$ и ряд сходится равномерно на $[a, b]$, то его сумма $S(x)$ также непрерывна на $[a, b]$.

Доказательство. А) Возьмем произвольную точку $x \in [a, b]$, и пусть $(x+h) \in [a, b]$. Установим непрерывность $f(x)$ в точке x . Для этого оценим разность $f(x+h) - f(x)$. Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Покажем, что при достаточно малых по

модулю значениях h модуль этой разности будет меньше ε . Имеем

$$|f(x+h) - f(x)| \leq |f(x+h) - f_n(x+h)| + |f_n(x+h) - f_n(x)| + |f_n(x) - f(x)|. \quad (8.31)$$

Взяв n достаточно большим, мы, в силу равномерной сходимости $f_n(x)$ к $f(x)$ на $[a, b]$, будем иметь

$$|f(x+h) - f_n(x+h)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при всех } (x+h) \in [a, b], \quad (8.32)$$

$$|f(x) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при всех } x \in [a, b]. \quad (8.33)$$

Фиксировав n , выбранное указанным образом, рассмотрим средний член в правой части неравенства (8.31). Так как $f_n(x)$ — функция непрерывная, то найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что при всех h , удовлетворяющих неравенству $|h| < \delta(\varepsilon)$, будет

$$|f_n(x+h) - f_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (8.34)$$

Но тогда из (8.31), в силу (8.32), (8.33) и (8.34), получаем, что $|f(x+h) - f(x)| < \varepsilon$ при всех h , удовлетворяющих неравенству $|h| < \delta(\varepsilon)$, а это и означает, что $f(x)$ непрерывна в точке $x \in [a, b]$. Но точка $x \in [a, b]$ была выбрана произвольно, следовательно, $f(x)$ непрерывна в каждой точке $x \in [a, b]$, т. е. непрерывна на $[a, b]$.

Заметим, что если x является одним из концов сегмента $[a, b]$, то приращению h можно придавать значения лишь какого-нибудь одного знака, что приводит к доказательству непрерывности справа в точке a и непрерывности слева в точке b .

Б) Частичная сумма ряда $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$, как сумма конечного числа непрерывных функций, непрерывна при любом $n = 1, 2, 3, \dots$. Так как, в силу равномерной сходимости ряда, $S_n(x) \rightrightarrows S(x)$ на $[a, b]$, то, по доказанному в А), сумма ряда также непрерывна. Теорема доказана.

Равномерная сходимость является лишь достаточным условием для того, чтобы предел последовательности непрерывных функций был непрерывной функцией. Это подтверждает хотя бы пример 4 из п. 1 § 1, в котором рассматривается последовательность непрерывных функций $f_n(x) = \frac{2nx}{1+n^2x^2}$, $n = 1, 2, \dots$, неравномерно сходящаяся на полупрямой $0 \leq x < +\infty$ к непрерывной функции $f(x) \equiv 0$.

Однако для некоторого узкого класса последовательностей и рядов справедливы и обратные утверждения, доказанные Дини *).

*) Улсс Дини (1845—1918) — итальянский математик.

Теорема 8.1' (теорема Дини). А) Если последовательность непрерывных функций, заданных на $[a, b]$ *), не убывает, т. е. $f_1(x) \leq f_2(x) \leq \dots \leq f_n(x) \leq \dots$ на $[a, b]$, и сходится к непрерывной функции $f(x)$, то эта сходимость является равномерной на $[a, b]$.

Б) Если сумма ряда $S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ с неотрицательными непрерывными на $[a, b]$ членами непрерывна на $[a, b]$, то этот ряд сходится равномерно на $[a, b]$.

Доказательство. А) Докажем, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое n , при котором будет

$$0 \leq R_n(x) = f(x) - f_n(x) < \varepsilon \quad \text{сразу при всех } x \in [a, b]. \quad (8.35)$$

Тогда, в силу очевидной монотонности последовательности

$$R_1(x) \geq R_2(x) \geq \dots \geq R_n(x) \geq \dots, \quad (8.36)$$

соотношение (8.35) будет выполняться и при всех больших значениях n , т. е. будет иметь место равномерная сходимость.

Доказательство будем вести от противного. Пусть для некоторого $\varepsilon_0 > 0$ такого n не существует. Тогда при каждом $n = 1, 2, \dots$ найдется такое $x_n \in [a, b]$, что будет

$$R_n(x_n) \geq \varepsilon_0. \quad (8.37)$$

Из последовательности точек $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ на отрезке $[a, b]$ выберем по теореме Больцано — Вейерштрасса подпоследовательность $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots, x_{n_k}, \dots$, сходящуюся к некоторому $x_0 \in [a, b]$. Функция $R_n(x) = f(x) - f_n(x)$, как разность двух непрерывных функций, является непрерывной; поэтому при любом m будет

$$\lim_{n_k \rightarrow +\infty} R_m(x_{n_k}) = R_m(x_0).$$

Но при любом m и достаточно большом k будет $n_k > m$, и, следовательно, в силу (8.36) и (8.37),

$$R_m(x_{n_k}) \geq R_{n_k}(x_{n_k}) \geq \varepsilon_0.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n_k \rightarrow +\infty$, получим, что $R_m(x_0) \geq \varepsilon_0$ при любом m . Но это противоречит соотношению $\lim_{m \rightarrow +\infty} R_m(x_0) = 0$, вытекающему из сходимости $f_m(x)$ к $f(x)$ в точке x_0 .

*) В этой теореме существенно используется замкнутость и ограниченность отрезка $[a, b]$; однако теорема сохраняет силу и при замене отрезка $[a, b]$ произвольным замкнутым ограниченным множеством X .

Б) Частичные суммы ряда $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$, $n = 1, 2, \dots$, с отрицательными непрерывными членами образуют неубывающую последовательность непрерывных функций, сходящуюся по условию к непрерывной функции $S(x)$. Следовательно, в силу пункта А) данной теоремы, эта сходимость равномерна, а это и означает, что ряд сходится равномерно.

2. Предельный переход под знаком интеграла и почленное интегрирование ряда. Если

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x f_n(\xi) d\xi = \int_{x_0}^x \left[\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(\xi) \right] d\xi \quad (8.38_1)$$

или

$$\int_{x_0}^x \left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(\xi) \right\} d\xi = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{x_0}^x u_k(\xi) d\xi, \quad (8.38_2)$$

то говорят, что можно переходить к пределу под знаком интеграла $\int_{x_0}^x f_n(\xi) d\xi$ или соответственно что ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ можно интегрировать почленно в пределах от x_0 до x .

Соотношение (8.38₂) является обобщением теоремы об интеграле суммы на случай бесконечного числа слагаемых.

Заменяя функциональную последовательность $\{f_n(x)\}$ рядом, для которого она является последовательностью частичных сумм, или,

наоборот, заменяя ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ последовательностью его частичных сумм, мы можем соответственно соотношение (8.38₁) преобразовать к виду (8.38₂) и соотношение (8.38₂) преобразовать к виду (8.38₁).

Таким образом, решая вопрос об условиях справедливости одного из них, мы тем самым решаем вопрос об условиях справедливости и другого. Заметим, что для справедливости соотношений (8.38₁) и (8.38₂) не достаточно существования интегралов и сходимости соответствующих последовательностей и рядов (см. примеры в конце этого пункта). Требуется еще выполнение некоторых дополнительных условий. Такого рода достаточными условиями являются: 1) равномерная сходимость и, как это будет показано в § 6 настоящей главы, 2) сходимость в среднем.

Теорема 8.2. А) Если последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на $[a, b]$ к функции $f(x)$, т. е.

$$f_n(x) \rightrightarrows f(x) \text{ на } [a, b], \quad (8.39)$$

то последовательность интегралов $\left\{ \int_{x_1}^x f_n(z) dz \right\}$ сходится равномерно по x на $[a, b]$ к интегралу $\int_{x_0}^x f(z) dz$

$$\int_{x_0}^x f_n(z) dz \Rightarrow \int_{x_0}^x f(z) dz \quad (8.40)$$

при любом $x_0 \in [a, b]$.

Б) Если ряд

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x), \quad (8.41)$$

члены которого непрерывны на отрезке $[a, b]$, сходится равномерно на этом отрезке, то имеет место равенство

$$\int_{x_0}^x S(z) dz = \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{x_0}^x u_k(z) dz, \quad (8.42)$$

т. е. ряд (8.41) можно интегрировать почленно в пределах от x_0 до x при любых x_0 и x из $[a, b]$, причем ряд (8.42) сходится равномерно по x на $[a, b]$ при любом $x_0 \in [a, b]$.

Доказательство. А) Пусть дано $\varepsilon > 0$. Выберем такое $N(\varepsilon)$, чтобы, в силу (8.34), выполнялось неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \quad (8.43)$$

при каждом $n > N(\varepsilon)$ сразу при всех $x \in [a, b]$. Так как по теореме 8.1 функция $f(x)$, будучи пределом равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, непрерывна, то интеграл $\int_{x_0}^x f(z) dz$ существует при любых x_0 и x из $[a, b]$. Оценим

разность $\int_{x_0}^x f_n(z) dz - \int_{x_0}^x f(z) dz$. При каждом $n > N(\varepsilon)$, в силу (8.43), мы имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^x f_n(z) dz - \int_{x_0}^x f(z) dz \right| &= \left| \int_{x_0}^x [f_n(z) - f(z)] dz \right| \leq \\ &\leq \int_{x_0}^x |f_n(z) - f(z)| dz \leq |x - x_0| \frac{\varepsilon}{b-a} \leq \varepsilon, \end{aligned} \quad (8.44)$$

а это и означает, что имеет место (8.40). Из соотношения (8.40) вытекает равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x f_n(z) dz = \int_{x_0}^x f(z) dz \quad \text{при } x, x_0 \in [a, b]. \quad (8.45)$$

Таким образом, если последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на $[a, b]$, то можно переходить к пределу под знаком интеграла $\int_{x_1}^x f_n(z) dz$ при любых x_0 и x из $[a, b]$.

Б) При любом $n = 1, 2, 3, \dots$ частичная сумма $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$, как сумма конечного числа непрерывных функций, непрерывна. По условию

$$S_n(x) \rightrightarrows S(x) \quad \text{на } [a, b].$$

Но тогда, в силу пункта А),

$$\int_{x_0}^x S_n(z) dz \rightrightarrows \int_{x_0}^x S(z) dz \quad \text{на } [a, b].$$

Заметим, что

$$\int_{x_0}^x S_n(z) dz = \int_{x_0}^x \sum_{k=1}^n u_k(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x u_k(z) dz. \quad (8.46)$$

Поэтому соотношение (8.45) можно переписать так:

$$\left\{ \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x u_k(z) dz \right\} \rightrightarrows \int_{x_0}^x S(z) dz \quad \text{на } [a, b], \quad (8.47)$$

причем выражение, стоящее в фигурной скобке, является частичной суммой ряда (8.42). Следовательно, равенство (8.42) имеет место и ряд (8.42) сходится равномерно на $[a, b]$, что и требовалось доказать.

Замечание. Теорема сохраняет силу и в том случае, когда $f_n(x)$, $n = 1, 2, \dots$, могут иметь разрывы, но являются интегрируемыми функциями. Тогда при условии равномерной сходимости $f(x)$ также интегрируема и выполняется соотношение (8.40).

Равномерная сходимость является лишь достаточным условием для того, чтобы можно было переходить к пределу под знаком интеграла и интегрировать ряд почленно. Например, последовательность $f_n(x) = x^n$ сходится неравномерно на отрезке $0 \leq x \leq 1$ к своему

пределу $f(x) \equiv 0$ при $0 \leq x < 1$, $f(1) = 1$. Однако

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x f_n(z) dz &= \int_{x_0}^x z^n dz = \frac{x^{n+1} - x_0^{n+1}}{n+1} \rightarrow 0 = \\ &= \int_{x_0}^x f(z) dz \quad \text{при } n \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

и любых x_0 и x из отрезка $[a, b]$. Но если последовательность интегрируемых функций $f_n(x)$ сходится к своему пределу $f(x)$ неравномерно, то может случиться, что $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x f_n(z) dz \neq \int_{x_0}^x f(z) dz$. Например,

$$\begin{aligned} \text{но } f_n(x) &= 4nx^3e^{-nx^4} \rightarrow f(x) \equiv 0, \quad -\infty < x < +\infty, \\ \int_0^1 4nx^3e^{-nx^4} dx &= 1 - e^{-n} \not\rightarrow \int_0^1 0 \cdot dx = 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

3. Предельный переход под знаком производной и почленное дифференцирование ряда. Если

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) = \left\{ \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \right\}' \quad (8.48)$$

или

$$\left\{ \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \right\}' = \sum_{k=1}^{+\infty} u'_k(x), \quad (8.49)$$

то говорят, что можно переходить к пределу под знаком производной или соответственно что ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ можно дифференцировать почленно.

Соотношения (8.48) и (8.49) эквивалентны в таком же смысле, как и соотношения (8.38₁) и (8.38₂).

Соотношение (8.49) является обобщением правила дифференцирования суммы на случай бесконечного числа слагаемых.

Для справедливости соотношений (8.48) и (8.49) не достаточно существования производных и сходимости соответствующих последовательностей и рядов, требуется еще выполнение некоторых дополнительных условий. Достаточные условия такого рода содержит

Теорема 8.3. А) Если последовательность непрерывно дифференцируемых функций *) $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ на $[a, b]$,

$$f_n(x) \rightarrow f(x) \quad \text{на } [a, b], \quad (8.50)$$

*) Функция $f(x)$ называется непрерывно дифференцируемой, если она имеет непрерывную производную.

а последовательность их производных $\{f'_n(x)\}$ сходится равномерно к $\varphi(x)$ на $[a, b]$,

$$f'_1(x), f'_2(x), \dots, f'_n(x), \dots \rightrightarrows \varphi(x) \text{ на } [a, b], \quad (8.51)$$

то $f(x)$ также дифференцируема на $[a, b]$ и

$$f'(x) = \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x), \quad (8.52)$$

т. е. допустим предельный переход под знаком производной.

Б) Если ряд с непрерывно дифференцируемыми членами

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \quad (8.53)$$

сходится на $[a, b]$, а ряд производных

$$\sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u'_k(x) \quad (8.54)$$

сходится равномерно на $[a, b]$, то сумма $S(x)$ ряда дифференцируема на этом отрезке и всюду на нем выполняется равенство

$$S'(x) = \sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u'_k(x), \quad (8.55)$$

т. е. ряд (8.53) можно почленно дифференцировать.

Доказательство. А) Так как по условию доказываемой теоремы, производные $f'_n(x)$ являются непрерывными функциями и имеет место равномерная сходимость $f'_n(x) \rightrightarrows \varphi(x)$ на $[a, b]$, то по теореме 8.2

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x f'_n(z) dz = \int_{x_0}^x \varphi(z) dz, \quad (8.56)$$

т. е.

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [f_n(x) - f_n(x_0)] = \int_{x_0}^x \varphi(z) dz. \quad (8.57)$$

Переходя к пределу в левой части равенства (8.57), получим

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x \varphi(z) dz,$$

т. е.

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x \varphi(z) dz. \quad (8.58)$$

Следовательно, $f(x)$ как сумма двух дифференцируемых функций — константы $f(x_0)$ и интеграла $\int_{x_0}^x \varphi(z) dz$ — является функцией дифференцируемой. Дифференцируя обе части равенства (8.58) по x , получим

$$f'(x) = \varphi(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x).$$

Б) Полагая $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$, имеем $S_n(x) \rightarrow S(x)$ на $[a, b]$, $S'_n(x) \rightarrow \sigma(x)$ на $[a, b]$, причем $S'_n(x) = \sum_{k=1}^n u'_k(x)$ непрерывна на $[a, b]$ при $n = 1, 2, \dots$. Следовательно, в силу пункта А), $S(x)$ является функцией, дифференцируемой на этом отрезке, и всюду на этом отрезке выполняется равенство

$$S'(x) = \sigma(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u'_k(x),$$

что и требовалось доказать.

Если последовательность производных сходится неравномерно, то может случиться, что равенство (8.52) не выполняется. Например,

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \ln(nx + \sqrt{n^2 x^2 + 1}) \rightarrow f(x) \equiv 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty,$$

$$-\infty < x < +\infty,$$

но

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 x^2 + 1}} \Big|_{x=0} \right) = 1 \neq f'(0) = 0.$$

4. Почленный предельный переход в функциональных последовательностях и рядах. Теорема о пределе суммы, вообще говоря, неверна в случае бесконечного числа слагаемых. Так, например, и сумма, и каждый член ряда в равенстве

$$x = \frac{2l}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad -l < x < l, \quad l \neq 0,$$

справедливость которого доказывается в п. 5 § 2 гл. 11, стремятся к определенным конечным пределам при $x \rightarrow l - 0$. Если же применить к этому равенству теорему о пределе суммы при $x \rightarrow l - 0$, то мы получим абсурдное равенство $l = 0$.

Однако при определенных дополнительных ограничениях теорема о пределе суммы распространяется и на случай бесконечного числа слагаемых. Справедлива следующая

Теорема 8.4. А) Если функциональный ряд

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_k(x) + \dots \quad (8.59)$$

сходится равномерно в некоторой окрестности точки x_0 и если

$$\lim_{x \rightarrow x_0} u_k(x) = c_k \quad \text{при } k = 1, 2, \dots, \quad (8.60)$$

то числовой ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$ сходится, причем

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k, \quad (8.61)$$

т. е. в равномерно сходящемся ряде можно переходить к пределу почленно.

Б) Если последовательность функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ равномерно сходится в окрестности точки x_0 и при каждом n существует определенный конечный предел

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x) = A_n,$$

то последовательность чисел $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ также сходится и

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \lim_{x \rightarrow x_0} f_n(x).$$

Доказательство. Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ряд (8.59) сходится равномерно в окрестности x_0 , то существует такое $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ и всех $p > 0$ будет

$$|u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon \quad (8.62)$$

сразу для всех x из этой окрестности x_0 . Переходя к пределу при $x \rightarrow x_0$ в неравенстве (8.62), получим неравенство

$$|c_{n+1} + \dots + c_{n+p}| \leq \varepsilon, \quad (8.63)$$

справедливое при всех $n > N(\varepsilon)$ и всех $p > 0$. Следовательно, ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k$ сходится. Устремляя в (8.62) и (8.63) индекс p к бесконечности, получим

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \right| \leq \varepsilon, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| \leq \varepsilon \quad (8.64)$$

при всех $n \geq N(\varepsilon)$ и сразу для всех x из окрестности x_0 . Фиксируем теперь $n > N(\varepsilon)$ и выберем $\delta = \delta(\varepsilon)$ так, чтобы

выполнялось неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - \sum_{k=1}^n c_k \right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad 0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon). \quad (8.65)$$

Тогда при $0 < |x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ будем иметь, в силу (8.64) и (8.65),

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) - \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \right| &\leq \left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - \sum_{k=1}^n c_k \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| + \\ &+ \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k \right| \leq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon. \end{aligned} \quad (8.66)$$

Доказательство Б) следует из А), если рассмотреть ряд

$$f_1(x) + [f_2(x) - f_1(x)] + \dots + [f_n(x) - f_{n-1}(x)] + \dots,$$

для которого последовательность $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$ является последовательностью частичных сумм и который удовлетворяет всем условиям пункта А).

§ 3. Степенные ряды

Степенным рядом называется функциональный ряд вида

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (8.67)$$

или вида

$$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k (x - x_0)^k = c_0 + c_1 (x - x_0) + \dots + c_n (x - x_0)^n + \dots, \quad (8.68)$$

где коэффициенты $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ — постоянные числа. Ряд вида (8.68) простой заменой $x' = x - x_0$ сводится к ряду вида (8.67). Поэтому в дальнейшем мы ограничимся рассмотрением рядов вида (8.67). Представление функции в виде суммы степенного ряда или, иными словами, разложение функции в степенной ряд применяется как в теоретических исследованиях, так и в приближенных вычислениях. Подробнее мы остановимся на этом в § 5, а сейчас займемся изучением основных свойств степенных рядов.

1. Интервал сходимости степенного ряда; радиус сходимости.

Выясним прежде всего, какой может быть область сходимости степенного ряда. В отличие от области сходимости произвольного функционального ряда, которая может оказаться множеством точек сколь угодно сложной структуры, область сходимости степенного ряда

$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ всегда является отрезком оси x , который может быть

сегментом, полусегментом или интервалом, может вырождаться в одну точку $x = 0$ или совпадать со всей осью x . Всякий степенной ряд

$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ сходится в точке $x = 0$, поскольку в этой точке он превращается в числовой ряд

$$c_0 + c_1 \cdot 0 + c_2 \cdot 0 + \dots + c_n \cdot 0 + \dots = c_0.$$

Существуют степенные ряды, сходящиеся только в точке $x = 0$,

например ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$ *). Действительно, при любом $x \neq 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(n+1)! |x|^{n+1}}{n! |x|^n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) |x| = +\infty,$$

следовательно, по признаку Даламбера ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} n! x^n$ расходится.

Существуют степенные ряды, сходящиеся на всей оси x , например

ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$; его сходимость при любом x легко устанавливается также

с помощью признака Даламбера. Рассмотрим теперь какой-нибудь степенной ряд, область сходимости которого не совпадает со всей осью x и не вырождается в точку $x = 0$, например ряд $1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$, представляющий собой геометрическую прогрессию со знаменателем x . Как известно, он сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| \geq 1$. Таким образом, областью сходимости этого ряда является конечный интервал $-1 < x < 1$ с центром в точке $x = 0$. Оказывается, что вообще справедлива следующая

Теорема 8.5. Если область сходимости степенного ряда

$\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ не вырождается в точку $x = 0$ и не совпадает со всей осью x , то существует такой конечный интервал $(-R, R)$, называемый интервалом сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$, в каждой внутренней точке которого этот ряд сходится абсолютно, а в каждой точке, лежащей вне сегмента $[-R, R]$, расходится **).

*) Напомним, что по определению $0! = 1$.

**) При этом, если интервал $(-R, R)$ является интервалом сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$, то, как выяснится из дальнейшего, областью сходимости этого ряда может оказаться либо интервал $(-R, R)$, либо сегмент $[-R, R]$, либо один из полусегментов $(-R, R]$ или $[-R, R)$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется

Лемма. Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ сходится при $x = \alpha \neq 0$, то он сходится абсолютно при каждом x , для которого $|x| < |\alpha|$.

Доказательство леммы. Из сходимости ряда $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k \alpha^k$ следует, что $c_k \alpha^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$; поэтому существует такое $A = \text{const} < +\infty$, что $|c_k \alpha^k| \leq A$ при всех $k = 0, 1, 2, \dots$. Пусть $|x| < |\alpha|$. Положим $q = \frac{|x|}{|\alpha|}$; очевидно, что $0 \leq q < 1$. Тогда мы будем иметь $|c_k x^k| = |c_k \alpha^k| \cdot \left| \frac{x}{\alpha} \right|^k \leq A q^k$ при всех $k = 0, 1, 2, \dots$. Но ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} A q^k$, как геометрическая прогрессия со знаменателем, меньшим единицы, сходится, значит, ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k x^k|$ также сходится по признаку сравнения (см. вып. 1, гл. 13, § 2), т. е. ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ при данном значении x сходится абсолютно. Лемма доказана.

Из доказанной леммы вытекает, что если степенной ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ сходится при некотором значении $x = \alpha \neq 0$, то он сходится абсолютно на интервале $-|\alpha| < x < |\alpha|$. В частности, если ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ сходится на всей оси x , то он сходится на всей оси x абсолютно.

Доказательство теоремы 8.5. Положим $R = \sup |x'|$, где x' пробегает множество всех точек сходимости ряда. Совершенно очевидно, что $R < +\infty$, так как если бы существовали точки сходимости x' со сколь угодно большим модулем $|x'|$, то, в силу леммы, ряд сходил бы абсолютно на всей оси x , а это противоречит условию теоремы. В силу определения числа R , при $|x| > R$ ряд расходится. Докажем, что при $|x| < R$ он сходится абсолютно. Пусть $|x| < R$. В силу определения точной верхней грани, найдется такая точка сходимости x' , что $|x| < |x'| < R$; но тогда по лемме при таком значении x ряд будет сходиться абсолютно. Теорема доказана.

В концах интервала сходимости степенные ряды могут вести себя различным образом. Например, ряды

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots, \quad (a)$$

$$1 - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} + \dots + (-1)^n \frac{x^n}{n} + \dots, \quad (б)$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots, \quad (в)$$

$$1 + x + \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^3}{3^2} + \dots + \frac{x^n}{n^2} + \dots \quad (г)$$

имеют интервал сходимости $-1 < x < 1$. Для рядов (б), (в), (г) это устанавливается с помощью признака Даламбера, а ряд (а) — известная геометрическая прогрессия. Ряд (а) в концах интервала сходимости расходится. Ряды (б) и (в) сходятся в одном из концов интервала (по признаку Лейбница) и расходятся в другом, превращаясь в гармонический ряд. Ряд (г) сходится абсолютно в обоих концах интервала сходимости (в силу интегрального признака).

Таким образом, если область сходимости степенного ряда $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ отлична от одной-единственной точки $x=0$ и не совпадает со всей осью x , то существует такое число R , $0 < R < +\infty$, что область сходимости данного степенного ряда является какой-либо из отрезков: $(-R, R)$ или $(-R, R]$, или $[-R, R)$, или $[-R, R]$; это число R называют *радиусом сходимости степенного ряда*.

Если степенной ряд сходится только при $x=0$, то полагают, что радиус сходимости $R=0$; если же степенной ряд сходится на всей оси x , то полагают $R=+\infty$. Это позволяет пользоваться понятием радиуса сходимости в случае любого степенного ряда. Степенной ряд, а следовательно, и его радиус сходимости однозначно определяются последовательностью коэффициентов $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$. Укажем некоторые способы вычисления радиуса сходимости по коэффициентам ряда.

Теорема 8.6₁. Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = l, \quad 0 \leq l < +\infty,$$

то радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ равен $R = \frac{1}{l}$, при этом полагают $R=0$ при $l=+\infty$ и $R=+\infty$ при $l=0$.

Доказательство. Применив к ряду признак Даламбера, получим, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|c_{n+1}| |x|^{n+1}}{|c_n| |x|^n} = |x| \cdot \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|} = |x| \cdot l^*).$$

*) Если члены ряда неположительны, то для применения признака Даламбера нужно брать их абсолютные величины. Аналогично обстоит дело с применением признака Коши.

Если $l=0$, то $|x| \cdot l=0$ и ряд сходится абсолютно при любых значениях x , т. е. $R=+\infty$. Если $l=+\infty$ и $x \neq 0$, то $|x| \cdot l=+\infty$ и ряд расходится при любых $x \neq 0$, т. е. $R=0$. Если $0 < l < +\infty$, то при $l|x| < 1$ ряд сходится абсолютно, а при $l|x| > 1$ ряд расходится; иными словами, при $|x| < \frac{1}{l}$ ряд сходится абсолютно, а при $x > \frac{1}{l}$ он расходится; следовательно, $R = \frac{1}{l}$. Теорема доказана.

Аналогично доказывается (с применением признака Коши) следующая

Теорема 8.6₂. Если существует предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = l, \quad 0 \leq l < +\infty,$$

то радиус сходимости ряда $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ равен $R = \frac{1}{l}$, при этом полагают $R=0$ при $l=+\infty$ и $R=+\infty$ при $l=0$.

Теоремы 8.6₁ и 8.6₂ применимы лишь в тех случаях, когда существуют соответственно пределы $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}$ и $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$.

К любому степенному ряду применима следующая более сильная

Теорема 8.6₃ (Коши — Адамара). Радиус сходимости произвольного степенного ряда $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ равен

$$R = \frac{1}{l}, \quad \text{где} \quad l = \overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}. \quad (8.69)$$

причем считается, что $R=0$ при $l=+\infty$ и $R=+\infty$ при $l=0$.

Замечание. Символом $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ обозначен верхний предел последовательности неотрицательных чисел $|c_1|, \sqrt{|c_2|}, \sqrt[3]{|c_3|}, \dots, \sqrt[n]{|c_n|}, \dots$. Если эта последовательность не ограничена, то по определению $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|} = +\infty$. Если же она ограничена, то $\overline{\lim}_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ является абсциссой самой правой предельной точки последовательности.

Доказательство теоремы 8.6₃. Возможны лишь следующие три случая: 1) $0 < l < +\infty$, 2) $l=0$, 3) $l=+\infty$. Рассмотрим каждый случай отдельно.

1) Пусть $0 < l < +\infty$. Докажем, что $R = \frac{1}{l}$, т. е. что: а) при любом x_1 , для которого $|x_1| < \frac{1}{l}$, ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ сходится; б) при любом x_2 , для которого $|x_2| > \frac{1}{l}$, этот ряд расходится.

а) Пусть $|x_1| < \frac{1}{l}$, т. е. $l|x_1| < 1$. Тогда при достаточно малом $\varepsilon > 0$ будет $(l + \varepsilon)|x_1| = q < 1$. Так как $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ является самой правой предельной точкой последовательности $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$, то $\sqrt[n]{|c_n|} < l + \varepsilon$, начиная с достаточно большого n , а следовательно, при всех таких значениях n

$$\sqrt[n]{|c_n|} |x_1| < (l + \varepsilon) |x_1| = q < 1, \quad \text{т. е.} \quad |c_n| |x_1|^n < q^n.$$

Поэтому, в силу признака сравнения и в силу сходимости прогрессии $\sum_{n=0}^{+\infty} q^n$, ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| |x_1|^n$ сходится, т. е. ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_1^n$ сходится абсолютно.

б) Пусть $|x_2| > \frac{1}{l}$, т. е. $l|x_2| > 1$. Тогда при достаточно малом ε , $0 < \varepsilon < l$, будет $(l - \varepsilon)|x_2| > 1$. Но так как $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$ является предельной точкой последовательности $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$, то найдется такая бесконечная последовательность индексов $n_1 < n_2 < \dots < n_k < \dots$, что $\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} > l - \varepsilon$, т. е. $\sqrt[n_k]{|c_{n_k}|} |x_2| > (l - \varepsilon) |x_2| > 1$ и $|c_{n_k}| |x_2|^{n_k} > 1$. Таким образом, для ряда $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ необходимый признак сходимости не выполнен, а следовательно, этот ряд расходится.

2) Пусть $l = 0$. Докажем, что $R = +\infty$, т. е. что ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ сходится при всех x , $-\infty < x < +\infty$. Пусть $x_0 \neq 0$. Так как $l = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$, то, начиная с достаточно большого n , будет $\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{1}{2|x_0|}$, т. е. при всех таких n будет $\sqrt[n]{|c_n|} |x_0| < \frac{1}{2}$ и $|c_n| |x_0|^n < \frac{1}{2^n}$. Поэтому, в силу признака сравнения, ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n| |x_0|^n$ сходится, а следовательно, ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_0^n$ сходится абсолютно.

3) Пусть $l = +\infty$, т. е. последовательность чисел $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$ не ограничена. Докажем, что $R = 0$, т. е. что при любом $x_0 \neq 0$ ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_0^n$ расходится. Допустим, что ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_0^n$, где $x_0 \neq 0$, сходится, тогда $c_n x_0^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$ (в силу необходимого признака сходимости), а следовательно, найдется такое число A , $1 < A < +\infty$, что $|c_n x_0^n| < A$ при всех $n = 0, 1, 2, \dots$; поэтому при всех $n = 0, 1, 2, \dots$ будет $\sqrt[n]{|c_n|} |x_0| < \sqrt[n]{A} \leq A$, т. е. будет $\sqrt[n]{|c_n|} < \frac{A}{|x_0|}$, а это противоречит условию, что последовательность $\{\sqrt[n]{|c_n|}\}$ не ограничена. Теорема полностью доказана.

Замечание. Теорема Коши — Адамара позволяет иначе, чем это сделано в п. 3, доказать возможность почленного дифференцирования и почленного интегрирования степенного ряда, так как легко проверить, что формулы (8.69) для проинтегрированного и продифференцированного степенного ряда дают ту же величину радиуса сходимости, что и для исходного степенного ряда.

2. О равномерной сходимости степенного ряда и непрерывности его суммы. Было установлено, что во внутренних точках интервала сходимости степенной ряд сходится абсолютно. Выясним теперь, как обстоит дело с равномерной сходимостью. Справедлива

Теорема 8.7. *Степенной ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ сходится равномерно на каждом замкнутом интервале, лежащем строго внутри интервала сходимости.*

Доказательство. Пусть $-R < \alpha \leq x \leq \beta < R$, где $(-R, R)$ — интервал сходимости. Докажем, что на отрезке $[\alpha, \beta]$ ряд сходится равномерно. Возьмем $x_0 > \max(|\alpha|, |\beta|)$, $x_0 \in (-R, R)$. Тогда для всех $x \in [\alpha, \beta]$ будет выполняться неравенство $|x| < |x_0|$, а следовательно, и неравенство $|c_n x^n| \leq |c_n x_0^n|$. Но числовой ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x_0^n$ сходится. Следовательно, по признаку Вейерштрасса ряды $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$ и $\sum_{n=0}^{+\infty} |c_n x^n|$ сходятся на отрезке $[\alpha, \beta]$ равномерно. Теорема доказана.

Замечание 1. Если ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} |u_k(x)|$ сходится равномерно, то ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k(x)$ называется *регулярно сходящимся*. Следовательно,

степенной ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ сходится регулярно на каждом замкнутом интервале, лежащем строго внутри интервала сходимости.

Замечание 2. На всем интервале сходимости степенной ряд может сходиться неравномерно. Например, ряд

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

на своем интервале сходимости $-1 < x < 1$ сходится неравномерно, так как модуль разности между его суммой и частичной суммой при любом фиксированном n неограниченно возрастает при $x \rightarrow 1$ и, следовательно, не может оставаться меньше конечного $\varepsilon > 0$ сразу при всех x из интервала $-1 < x < 1$. Однако справедлива

Теорема 8.7.1. Если степенной ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ сходится в конце $x = R$ интервала сходимости $(-R, R)$, то он сходится равномерно на замкнутом интервале $[0, R]$.

Доказательство. Докажем, что на замкнутом интервале $[0, R]$ будет выполнен критерий Коши равномерной сходимости функционального ряда. Отсюда будет следовать равномерная сходимость ряда на $[0, R]$. Введем обозначение

$$S_{n,p} = c_{n+1}R^{n+1} + \dots + c_{n+p}R^{n+p}, \quad p = 1, 2, \dots$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} c_{n+1}R^{n+1} &= S_{n,1}, \\ c_{n+2}R^{n+2} &= S_{n,2} - S_{n,1}, \dots, c_{n+p}R^{n+p} = S_{n,p} - S_{n,p-1}. \end{aligned} \quad (\alpha)$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Так как числовой ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k R^k$ по условию сходится, то, в силу критерия Коши для числового ряда, существует такое $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ будет

$$|S_{n,k}| < \varepsilon \quad \text{для всех } k = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\beta)$$

Учитывая, что $\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} \leq \left(\frac{x}{R}\right)^{n+p-1} \leq \dots \leq \left(\frac{x}{R}\right)^n \leq 1$ при $0 \leq x \leq R$, и используя (α) и (β), получим

$$\begin{aligned} &|c_{n+1}x^{n+1} + c_{n+2}x^{n+2} + \dots + c_{n+p}x^{n+p}| = \\ &= \left| c_{n+1}R^{n+1}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+1} + c_{n+2}R^{n+2}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+2} + \dots + c_{n+p}R^{n+p}\left(\frac{x}{R}\right)^{n+p} \right| = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left| S_{n,1} \left[\left(\frac{x}{R} \right)^{n+1} - \left(\frac{x}{R} \right)^{n+2} \right] + S_{n,2} \left[\left(\frac{x}{R} \right)^{n+2} - \left(\frac{x}{R} \right)^{n+3} \right] + \dots \right. \\
&\quad \left. \dots + S_{n,p-1} \left[\left(\frac{x}{R} \right)^{n+p-1} - \left(\frac{x}{R} \right)^{n+p} \right] + S_{n,p} \left(\frac{x}{R} \right)^{n+p} \right| \leqslant \\
&\leqslant |S_{n,1}| \left[\left(\frac{x}{R} \right)^{n+1} - \left(\frac{x}{R} \right)^{n+2} \right] + |S_{n,2}| \left[\left(\frac{x}{R} \right)^{n+2} - \left(\frac{x}{R} \right)^{n+3} \right] + \dots \\
&\quad \dots + |S_{n,p-1}| \left[\left(\frac{x}{R} \right)^{n+p-1} - \left(\frac{x}{R} \right)^{n+p} \right] + |S_{n,p}| \left(\frac{x}{R} \right)^{n+p} < \\
&< \varepsilon \left\{ \left(\frac{x}{R} \right)^{n+1} - \left(\frac{x}{R} \right)^{n+2} + \left(\frac{x}{R} \right)^{n+2} - \left(\frac{x}{R} \right)^{n+3} + \dots \right. \\
&\quad \left. \dots - \left(\frac{x}{R} \right)^{n+p} + \left(\frac{x}{R} \right)^{n+p} \right\} = \varepsilon \left(\frac{x}{R} \right)^{n+1} \leqslant \varepsilon
\end{aligned}$$

при всех $n > N(\varepsilon)$, всех $p = 1, 2, \dots$ и сразу для всех x из отрезка $0 \leqslant x \leqslant R$, что и требовалось доказать.

Замечание 1. Аналогично обстоит дело, если ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ сходится в левом конце интервала сходимости $(-R, R)$ или в обоих концах, тогда он сходится равномерно на $[-R, 0]$ или соответственно на $[-R, R]$.

Замечание 2. Если в конце $x = R$ интервала сходимости $(-R, R)$ степенной ряд расходится, то он не может сходиться равномерно на интервале $0 \leqslant x \leqslant R$, иначе по теореме о почленном переходе к пределу в равномерно сходящемся ряде мы получили бы, что он будет сходиться и в конце $x = R$.

Из теорем о равномерной сходимости степенного ряда и непрерывности членов степенного ряда вытекает следующая

Теорема 8.8. Сумма степенного ряда

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \quad (8.70)$$

непрерывна в каждой внутренней точке интервала сходимости *).

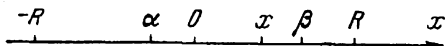
Доказательство. Если точка x лежит внутри интервала сходимости $(-R, R)$ ряда (8.70), то ее можно заключить в замкнутый интервал $[\alpha, \beta]$, лежащий строго внутри интервала сходимости (рис. 8.4). На интервале $[\alpha, \beta]$ ряд (8.70) сходится равномерно и его члены непрерывны. Следовательно, его сумма будет непрерывной на интервале $[\alpha, \beta]$, а значит, и в точке x этого интервала. Теорема доказана.

*) Здесь и в дальнейшем мы будем предполагать, что интервал сходимости ряда (8.70) не вырождается в точку.

Замечание. Если ряд (8.70) сходится в каком-либо из концов интервала сходимости $(-R, R)$, то его сумма будет непрерывной и в этом конце. Это вытекает из равномерной сходимости ряда (8.70) на соответствующем замкнутом интервале вида $[-R, 0]$ или $[0, R]$ (см. теорему 8.7₁).

3. Дифференцирование и интегрирование степенных рядов.

Теорема 8.9. *Степенной ряд (8.70) можно дифференцировать почленно во внутренних точках интервала сходимости, т. е. в них его сумма $S(x)$ дифференцируема и выполняется равенство*



$$S'(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} k c_k x^{k-1}, \quad (8.71)$$

Рис. 8.4.

причем производный ряд (8.71) имеет тот же интервал сходимости, что и ряд (8.70).

Доказательство. Обозначим соответственно через R и R' радиусы сходимости рядов (8.70) и (8.71). Докажем сначала, что $R' = R$. Если $x \in (-R', R')$, то ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} k |c_k| |x|^{k-1}$ сходится, поэтому сходится ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} k |c_k| |x|^k$, а значит, и ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} |c_k| |x|^k$, следовательно, $x \in (-R, R)$. Поэтому $R' \leq R$. Если $x \in (-R, R)$, то можно выбрать такое $x_0 \in (-R, R)$, чтобы выполнялось неравенство $|x_0| > |x|$ ($x_0 \neq 0$). Так как ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x_0^k$ сходится, то $c_k x_0^k \rightarrow 0$ при $k \rightarrow +\infty$; значит, найдется такая константа $A > 0$, что будет $|c_k x_0^k| < A$ при всех $k = 0, 1, 2, \dots$. Поэтому имеет место следующая оценка для членов ряда (8.71):

$$|k c_k x^{k-1}| \equiv \frac{1}{|x_0|} k |c_k x_0^k| \cdot \left| \frac{x}{x_0} \right|^{k-1} < \frac{A}{|x_0|} k \left| \frac{x}{x_0} \right|^{k-1}. \quad (8.72)$$

При $|x| < |x_0|$, т. е. при $\left| \frac{x}{x_0} \right| < 1$, ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{A}{|x_0|} k \left| \frac{x}{x_0} \right|^{k-1}$ сходится, что легко устанавливается с помощью признака Даламбера. Действительно, при $k \rightarrow +\infty$ будет

$$\frac{A}{|x_0|} (k+1) \left| \frac{x}{x_0} \right|^{k+1} : \frac{A}{|x_0|} k \left| \frac{x}{x_0} \right|^k = \left(1 + \frac{1}{k}\right) \left| \frac{x}{x_0} \right| \rightarrow \left| \frac{x}{x_0} \right| < 1.$$

Но тогда по признаку сравнения, в силу соотношений (8.72), ряд (8.71) при данном x также сходится, т. е. $x \in (-R', R')$. Следовательно, $R \leq R'$. Сопоставляя это с полученным ранее неравенством $R' \leq R$, заключаем, что $R' = R$.

Теперь мы можем воспользоваться тем, что на каждом замкнутом интервале, лежащем строго внутри интервала сходимости $(-R, R)$, ряды (8.70) и (8.71) сходятся равномерно, а члены их непрерывны. Это означает, что заведомо выполнены условия теоремы 8.3 о почленном дифференцировании функционального ряда, откуда и следует справедливость доказываемой теоремы.

Следствие. Сумма степенного ряда $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ имеет производные всех порядков, причем

$$S^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1) \dots (k-n+1) c_k x^{k-n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.73)$$

Радиус сходимости ряда (8.73) совпадает с радиусом сходимости ряда $S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$.

Доказательство этого следствия получается повторным применением теоремы 8.9 к производному ряду (8.71), затем к полученному из него таким же образом производному ряду второго порядка и т. д.

Теорема 8.10. Степенной ряд

$$S(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \quad (8.70)$$

можно интегрировать почленно в интервале сходимости; в частности, имеет место равенство

$$\int_0^x S(z) dz = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k \frac{x^{k+1}}{k+1}, \quad (8.74)$$

причем радиусы сходимости рядов (8.70) и (8.74) совпадают.

Доказательство. Ряд (8.70) состоит из непрерывных функций, поэтому его можно интегрировать почленно на интервалах равномерной сходимости. Какова бы ни была точка $x \in (-R, R)$, ее всегда можно заключить в замкнутый интервал $[\alpha, \beta]$, лежащий строго внутри интервала $(-R, R)$ и содержащий начало координат. Интегрируя в этом интервале от 0 до x ряд (8.70) почленно, получим равенство (8.74), что и требовалось доказать.

Замечание. Если ряд (8.70) сходится в каком-либо из концов интервала сходимости $(-R, R)$, то x в равенстве (8.74) может совпадать с этим концом, так как тогда ряд (8.70) сходится равномерно на соответствующем замкнутом интервале $[-R, 0]$ или $[0, R]$.

4. Арифметические операции над степенными рядами. Остановимся сначала на сложении, вычитании и умножении. Пусть

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n, \quad (\alpha)$$

$$g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots = \sum_{n=0}^{+\infty} b_nx^n, \quad (\beta)$$

причем радиусы сходимости рядов (α) и (β) равны соответственно $R_a > 0$ и $R_b > 0$. Тогда

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_n \pm b_n) x^n \text{ при } |x| < \min(R_a, R_b), \quad (\gamma)$$

$$f(x)g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0) x^n$$

при $|x| < \min(R_a, R_b)$. (δ)

Справедливость соотношения (γ) очевидна (см. вып. 1, гл. 13, § 4); соотношение (δ) получается по теореме об умножении абсолютно сходящихся рядов (см. вып. 1, гл. 13, § 4), так как при $|x| < \min(R_a, R_b)$ оба ряда (γ) и (δ) сходятся абсолютно.

Рассмотрим, наконец, деление. Если $R_a > 0$, $R_b > 0$ и $b_0 \neq 0$, то при достаточно малых значениях $|x|$ имеет место следующее разложение в степенной ряд частного:

$$\frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n + \dots} =$$

$$= c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_nx^n + \dots,$$

коэффициенты c_i которого могут быть найдены по рекуррентным формулам, получающимся в результате умножения степенных рядов в правой части равенства

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots \equiv$$

$$\equiv (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots)(c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots)$$

и сравнения коэффициентов при одинаковых степенях x в правой и левой частях результирующего равенства. Ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} c_nx^n$ может быть

также получен делением ряда $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots$ на ряд $b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots$ по тем же правилам, по которым делятся многочлены, расположенные по возрастающим степеням x . На доказательстве этих утверждений мы останавливаться не будем.

§ 4. Разложение функций в степенные ряды

Говорят, что функция $f(x)$ разлагается в степенной ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ на интервале $(-r, r)$, если на этом интервале данный степенной ряд сходится и его сумма равна $f(x)$, т. е.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k \quad (8.75)$$

на интервале $(-r, r)$, при этом предполагается, что интервал $(-r, r)$ не вырождается в точку *). О роли, которую играют разложения функций в степенные (и другие функциональные) ряды, мы уже говорили в начале главы. В конце этого параграфа мы дадим характерные примеры применения разложений в степенные ряды при вещественных значениях x . Степенным рядам в комплексной области посвящен § 5 этой главы.

1. Основные теоремы о разложениях функций в степенные ряды; разложения элементарных функций. Докажем прежде всего, что одна и та же функция $f(x)$ не может иметь двух различных разложений вида (8.75), так как справедлива

Теорема 8.11. *Степенной ряд*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k, \quad (8.76)$$

сходящийся на интервале $(-R, R)$ (не вырождающемся в точку), является рядом Тейлора для своей суммы $f(x)$, т. е. его коэффициенты находятся по формулам Тейлора

$$c_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (8.77)$$

а следовательно, коэффициенты степенного ряда (8.76) определяются по его сумме однозначно.

Доказательство. Для доказательства достаточно воспользоваться следствием из теоремы о почленном дифференцировании степенного ряда. В силу этого следствия, сумма $f(x)$ ряда (8.75) бесконечно дифференцируема и имеет место равенство

$$f^{(n)}(x) = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1) \dots (k-n+1) c_k x^{k-n}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.78)$$

*) Если $f(x)$ может быть разложена на интервале $(-r, r)$ в степенной ряд, то она называется аналитической функцией переменной x на этом интервале.

Полагая в (8.78) $x=0$, получим

$$f^{(n)}(0) = n! c_n,$$

а следовательно,

$$c_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!},$$

что и требовалось доказать. Итак, если функцию $f(x)$ можно разложить в сходящийся к ней степенной ряд, то он является для этой функции *рядом Тейлора*.

Возникает вопрос, справедливо ли обратное утверждение? Если функция $f(x)$ бесконечно дифференцируема на интервале $(-R, R)$, где $R \neq 0$, и для нее формально построен ряд Тейлора

$$f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots, \quad (8.79)$$

то будет ли он сходиться на интервале $(-R, R)$, и если да, то будет ли его сумма равна функции $f(x)$? В общем случае ответ на этот вопрос является отрицательным, как показывает пример функции

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases} \quad (8.80)$$

Эта функция бесконечно дифференцируема на всей оси x , причем в начале координат

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n)}(0) = f^{(n+1)}(0) = \dots = 0. \quad (8.81)$$

Следовательно, все коэффициенты ряда Тейлора для этой функции равны нулю; ряд Тейлора сходится на всей оси x , и его сумма тождественно равна нулю, в то время как данная функция равна нулю только в начале координат.

Теорема 8.12. Для того чтобы функцию $f(x)$ можно было разложить в степенной ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ на интервале $(-R, R)$, $R \neq 0$, необходимо и достаточно, чтобы $f(x)$ имела на этом интервале производные всех порядков и чтобы остаточный член в формуле Тейлора

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + R_n \quad (8.82)$$

стремился к нулю при всех $x \in (-R, R)$, когда $n \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Если $f(x)$ может быть разложена в степенной ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ на интервале $(-R, R)$, то, в силу следствия

теоремы 8.9, она имеет производные всех порядков, и по теореме 8.11 равенство $f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ может быть переписано в виде

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n + \dots \quad (8.83)$$

Равенство (8.83) означает, что разность между суммой и частичной суммой ряда (8.83), равная, согласно (8.82), остаточному члену в формуле Тейлора, должна стремиться к нулю при $n \rightarrow +\infty$ для всех $x \in (-R, R)$.

Обратно, если $f(x)$ имеет производные всех порядков на интервале $(-R, R)$ и в формуле Тейлора (8.82) $R_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$ для каждого $x \in (-R, R)$, то

$$\left| f(x) - \left[f(0) + \frac{f'(0)}{1!} x + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n \right] \right| \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow +\infty$ для каждого $x \in (-R, R)$, а следовательно, ряд (8.83) сходится и его сумма равна $f(x)$ на интервале $(-R, R)$, что и требовалось доказать.

Удобные достаточные условия разложимости функции в степенной ряд содержит следующая

Теорема 8.13. Для того чтобы функцию $f(x)$ можно было разложить в степенной ряд $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$ на интервале $(-R, R)$, достаточно, чтобы $f(x)$ имела на $(-R, R)$ производные всех порядков и чтобы существовала такая константа M , что $|f^{(n)}(x)| \leq M$ при $n = 0, 1, 2, \dots$ и всех $x \in (-R, R)$, (8.84)

т. е. чтобы производные всех порядков были равномерно ограничены в совокупности на интервале $(-R, R)$.

Доказательство. Так как функция $f(x)$ имеет производные всех порядков на $(-R, R)$, то для нее можно формально построить ряд Тейлора. Докажем, что он сходится к $f(x)$. Для этого, согласно теореме 8.12, достаточно доказать, что остаточный член в формуле Тейлора (8.82) стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$ и всех $x \in (-R, R)$. Воспользовавшись формой Лагранжа *) для R_n , получим, в силу (8.84), следующую оценку:

$$|R_n| = \left| \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!} x^{n+1} \right| < \frac{MR^{n+1}}{(n+1)!} \text{ при } n = 0, 1, \dots$$

$$\dots, x \in (-R, R), \quad 0 < \theta < 1. \quad (8.85)$$

*) См. вып. 1, гл. 8, § 9.

Нетрудно проверить с помощью признака Даламбера, что ряд

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{MR^{n+1}}{(n+1)!}$ сходится; поэтому, в силу необходимого признака сходимости, будет

$\frac{MR^{n+1}}{(n+1)!} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Значит, в силу оценки (8.85), будет $R_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$ и всех $x \in (-R, R)$, что и требовалось доказать.

Рассмотрим некоторые важные примеры разложения функций в степенной ряд, т. е. в ряд Тейлора.

1. Для функций $f(x) = \sin x$ и $f(x) = \cos x$ имеем $|f^{(n)}(x)| \leq 1$ при всех $n = 0, 1, 2$ и всех x , $-\infty < x < +\infty$, поэтому каждая из них разлагается в степенной ряд, сходящийся на всей числовой оси.

Вычисляя коэффициенты Тейлора $\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$, получим

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$$

2. Для функции $f(x) = e^x$ производные всех порядков на отрезке $(-R, R)$ удовлетворяют условию $|f^{(n)}(x)| = e^x \leq e^R$. Следовательно, показательная функция $f(x) = e^x$ разлагается в степенной ряд на любом интервале $(-R, R)$ оси x , т. е. на всей оси x .

Вычисляя коэффициенты Тейлора, получим

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

3. К функции $f(x) = \ln(1+x)$ целесообразно применить следующий прием. Дифференцируя ее по x и разлагая полученную производную по формуле геометрической прогрессии, получим

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \quad \text{при } -1 < x < 1.$$

Интегрируя это равенство почленно, на основании теоремы 8.3 будем иметь

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad \text{при } -1 < x < 1. \quad (8.86)$$

Разложение (8.86) остается справедливым и при $x = 1$. Действительно, так как ряд (8.86) сходится при $x = 1$ (по признаку Лейбница), то

его сумма

$$S(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

будет непрерывной (в силу замечания к теореме 8.3) на отрезке $[0, 1]$. Следовательно, $\lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = S(1) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$. Функция $f(x) = \ln(1+x)$ также непрерывна на этом отрезке, поэтому $\ln 2 = \ln(1+x)|_{x=1-0}$. Но при $0 \leq x < 1$ выполняется, согласно (8.86), равенство $\ln(1+x) = S(x)$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \ln 2 &= \lim_{x \rightarrow 1-0} \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = S(1) = \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \end{aligned}$$

4. Функцию $f(x) = \operatorname{arctg} x$ можно разложить в степенной ряд аналогичным образом. Дифференцируя и применяя для производной разложение по формуле геометрической прогрессии, находим

$$f'(x) = \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad \text{при } -1 < x < 1.$$

Интегрируя почленно, получим

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad \text{при } -1 < x < 1.$$

Что это разложение остается справедливым и в точке $x=1$, можно показать так же, как была доказана в предыдущем примере справедливость разложения

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

5. Напишем формально ряд Тейлора для функции $f(x) = (1+x)^a$, где a — произвольное отличное от нуля действительное число:

$$\begin{aligned} 1 + ax + \frac{a(a-1)}{2!} x^2 + \frac{a(a-1)(a-2)}{3!} x^3 + \dots = \\ = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} x^k. \end{aligned} \quad (8.87)$$

При целом положительном $a=n$ все члены ряда (8.87), начиная с $(n+1)$ -го, обращаются в нуль, и мы приходим к обычной формуле бинома Ньютона. Применяя признак Даламбера (при $a \neq n$, $n=0, 1, 2, \dots$) легко установить, что радиус сходимости ряда (8.87) равен 1. Следовательно, вне отрезка $[-1, 1]$ функция $(1+x)^a$

при α , не являющемся целым положительным числом, заведомо не может быть разложена в степенной ряд вида $\sum_{k=0}^{+\infty} c_k x^k$, т. е. по целым неотрицательным степеням x . Покажем, что внутри этого отрезка будет справедливо разложение

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots = \\ = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-k+1)}{k!} x^k. \quad (8.88)$$

Для этого достаточно доказать, согласно теореме 8.12, что остаточный член в формуле Тейлора для функции $(1+x)^\alpha$ будет стремиться к нулю при $n \rightarrow +\infty$ для всех x из интервала $(-1, 1)$.

Остаточный член в формуле Тейлора возьмем в форме Коши:

$$R_n = \frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!} f^{(n+1)}(\theta x), \quad 0 < \theta < 1.$$

Для функции $(1+x)^\alpha$ он примет вид

$$R_n = \frac{(1-\theta)^n x^{n+1}}{n!} \alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n) (1+\theta x)^{\alpha-n} = \\ = \left[\frac{(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n)}{n!} x^n \right] \cdot \left[\left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n \right] \cdot [\alpha x (1+\theta x)^\alpha]. \quad (8.89)$$

Так как $x > -1$, то $0 < \frac{1-\theta}{1+\theta x} < 1$, а следовательно, $0 < \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x} \right)^n < 1$ при всех $n=1, 2, 3, \dots$. Далее, при всех $x \in (-1, 1)$, в силу неравенства $0 < \theta < 1$, $|\alpha x| (1+\theta x)^\alpha$ будет заключено между $|\alpha x| (1-|x|)^\alpha$ и $|\alpha x| (1+|x|)^\alpha$, а последние величины не зависят от n . Наконец, множитель $\frac{(\alpha-1)(\alpha-2) \dots (\alpha-n)}{n!} x^n$ является n -м членом ряда Тейлора для функции $(1+x)^{\alpha-1}$, сходимость которого при $-1 < x < 1$ легко доказывается с помощью признака Даламбера. Поэтому при $-1 < x < 1$, в силу необходимого признака сходимости, будем иметь

$$\frac{\alpha(\alpha-1) \dots (\alpha-n)}{n!} x^n \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow +\infty$. Таким образом, при $-1 < x < 1$ две из квадратных скобок в (8.89) остаются ограниченными, а третья стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$; следовательно, $R_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$ для каждого $x \in (-1, 1)$. Этим доказательство справедливости разложения (8.88) на интервале $-1 < x < 1$ завершено.

2. Некоторые применения степенных рядов.

а) *Степенные ряды могут применяться для приближенных вычислений значений функций.* Ряды

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \quad (8.90)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots \quad (8.91)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \quad (8.92)$$

можно использовать для вычисления значений e^x , $\sin x$ и $\cos x$ при любых значениях x с любой степенью точности, поскольку равенства (8.90) — (8.92) выполняются на всей оси x .

Если в качестве приближенных значений этих функций брать частичные суммы рядов (8.90) — (8.92) соответственно, то допускаемые при этом погрешности особенно просто оцениваются в случае рядов (8.91) и (8.92), в силу признака Лейбница погрешность не превосходит первого из отброшенных членов *).

Ряд для логарифма

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + \dots, \quad (8.93)$$

$$-1 < x \leq 1,$$

хотя и знакопеременный, но сходится медленно, а при $x > 1$ расходится. Чтобы ускорить сходимость ряда и сделать возможным вычисление логарифмов чисел, больших единицы, из разложения (8.93) вычитают разложение

$$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \dots \quad (8.93')$$

Это дает

$$\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = 2x\left(1 + \frac{x^2}{3} + \frac{x^4}{5} + \dots\right). \quad (8.94)$$

Полагая в (8.94) $x = \frac{1}{2n+1}$, получают

$$\begin{aligned} \ln \frac{n+1}{n} &= \ln(n+1) - \ln n = \\ &= \frac{2}{2n+1} \left(1 + \frac{1}{3(2n+1)^2} + \frac{1}{5(2n+1)^4} + \dots\right). \end{aligned} \quad (8.95)$$

Отправляясь от $\ln 1 = 0$, можно с помощью ряда (8.95), сходящегося достаточно быстро, найти логарифмы всех натуральных чисел.

*) Ср. с вып. 1, гл. 13, § 5.

Ряд для арктангенса

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \quad (8.96)$$

можно использовать для вычисления числа π с любой степенью точности. Именно, полагая в (8.96) $x = 1$, получим

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots \quad (8.97)$$

В силу знакопеременности этого ряда, легко оценивается погрешность, допускаемая при замене его суммы частичной суммой.

Ряд

$$(1+x)^a = 1 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a(a-1)\dots(a-k+1)}{k!} x^k$$

можно использовать для извлечения корней. Например,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{10} &= 2 \sqrt[3]{1 + \frac{1}{4}} = 2 \left(1 + \frac{1}{4}\right)^{\frac{1}{3}} = \\ &= 2 \left[1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} - \frac{2}{9} \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots\right]. \end{aligned} \quad (8.98)$$

Выписанные члены дают значение этого корня с четырьмя верными знаками. Ряд (8.98) — знакопеременный, поэтому погрешность оценивается легко.

б) Разложение в степенные ряды можно использовать для вычисления интегралов, не берущихся в элементарных функциях. Например, используя ряд (8.91) для $\sin x$, получим

$$\operatorname{Si} x = \int_0^x \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - \frac{x^7}{7 \cdot 7!} + \dots \quad (8.99)$$

Заметим, что деление ряда (8.91) на x при $x \neq 0$ законно, так что

$$\frac{\sin x}{x} = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots \quad (*)$$

при $x \neq 0$. При $x = 0$ полагаем $\frac{\sin x}{x} = 1$; тогда равенство (*) сохранится и при $x = 0$. Ряд (8.99) — знакопеременный, так что погрешность при замене его суммы частичной суммой оценивается очень просто.

в) Степенные ряды (не только по целым положительным степеням x) **находят широкое применение при интегрировании дифференциальных уравнений**, причем это приводит, вообще говоря, к построению новых функций, о чем подробно будет идти

речь в вып. 3 и 4 настоящего курса. Мы же ограничимся здесь одним элементарным примером. Пусть требуется разложить в степенной ряд

функцию $F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{\xi^2} d\xi$. Легко проверить, что $F(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$F'(x) + 2xF(x) = 1 \quad (8.100)$$

и начальному условию $F(0) = 0$. Будем искать решение уравнения (8.100) в виде степенного ряда

$$F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots + c_n x^n + \dots \quad (8.101)$$

Подставляя этот ряд в уравнение (8.100) и сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x в левой и правой частях равенства, получим

$$c_1 = 1, \quad (n+2)c_{n+2} + 2c_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots \quad (8.102)$$

Из начального условия $F(0) = 0$ находим

$$c_0 = 0. \quad (8.103)$$

С помощью (8.102) и (8.103) из (8.101) получаем

$$F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{\xi^2} d\xi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n 2^n x^{2n+1}}{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}. \quad (8.104)$$

Сначала ряд (8.101) мы дифференцировали почленно формально, теперь, когда коэффициенты его уже известны, мы видим, что ряд (8.104) сходится при всех x , $-\infty < x < +\infty$, и, следовательно, почленное дифференцирование законно при всех значениях x (см. теорему 8.9).

§ 5. Степенные ряды в комплексной области

Последовательность комплексных чисел

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \dots, \quad z_n = x_n + iy_n, \dots \quad (A)$$

называется *сходящейся* к комплексному числу $z_0 = x_0 + iy_0$ при $n \rightarrow +\infty$, если

$$|z_n - z_0| = \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

Поэтому для сходимости последовательности (A) к числу $z_0 = x_0 + iy_0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$x_n \rightarrow x_0 \quad \text{и} \quad y_n \rightarrow y_0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

Ряд с комплексными членами

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k,$$

где $a_k = \alpha_k + i\beta_k$, $k = 1, 2, \dots$, называется *сходящимся*, если сходится последовательность его частичных сумм.

На ряды с комплексными членами легко распространяются понятия абсолютной и условной сходимости, а также основной критерий сходимости, признак Даламбера и признак Коши *).

Областью сходимости степенного ряда

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots, \quad (\text{Б})$$

где коэффициенты $c_0, c_1, \dots, c_n, \dots$ — комплексные числа, а $z = x + iy$ — комплексное переменное, является круг с центром в точке $z = 0$. Этот круг может вырождаться в точку $z = 0$ или занимать всю плоскость переменного $z = x + iy$. Внутри круга сходимости ряд (Б) сходится абсолютно. Справедливость этих утверждений вытекает из следующей леммы.

Лемма. Если степенной ряд (Б) сходится при $z = a \neq 0$, то он сходится абсолютно при любом z , для которого $|z| < |a|$, т. е. в круге $|z| < |a|$ с центром в точке $z = 0$ и радиусом, равным $|a|$ **).

В каждом круге, concentрическом с кругом сходимости и лежащем строго внутри него, степенной ряд сходится равномерно, и его сумма будет не только непрерывной, но и бесконечное число раз дифференцируемой функцией.

Отправляясь от разложений в степенные ряды элементарных функций действительного переменного:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots, \quad (8.105)$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots, \quad (8.106)$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \dots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + \dots, \quad (8.107)$$

мы можем дать определение элементарных функций комплексного переменного $z = x + iy$: e^z , $\cos z$, $\sin z$, которые при $z = x$ совпадают соответственно с e^x , $\cos x$ и $\sin x$. Напомним, что ряды (8.105) —

*) Если члены ряда не являются положительными вещественными числами, то для применения признаков Даламбера и Коши нужно брать их модули.

**) Эта лемма была доказана для степенных рядов в действительной области (см. доказательство теоремы 8.5), но таким же образом она доказывается и для степенных рядов в комплексной области.

(8.107) сходятся при всех действительных значениях x , но тогда, в силу сформулированной выше леммы, они будут сходиться и при всех комплексных значениях z , если в них вместо x подставить z . Поэтому, полагая

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \dots + \frac{z^n}{n!} + \dots, \quad (8.108)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \dots + (-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!} + \dots, \quad (8.109)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \dots + (-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!} + \dots, \quad (8.110)$$

мы получим функции комплексного переменного z , определенные при всех значениях z . Умножая абсолютно сходящиеся (в силу леммы) ряды, можно проверить, что для определенных таким образом функций комплексного переменного e^z , $\cos z$, $\sin z$ выполняются соотношения

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1+z_2} *) \quad (8.111)$$

и

$$\cos^2 z + \sin^2 z \equiv 1. \quad (8.112)$$

Заменяя в (8.108) z на iz и группируя отдельно в полученном ряде члены, явно содержащие и явно не содержащие i , получим, используя (8.109) и (8.110), замечательную формулу Эйлера

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad (8.113)$$

справедливую при любом комплексном z . Действительно,

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz + \frac{i^2 z^2}{2!} + \frac{i^3 z^3}{3!} + \frac{i^4 z^4}{4!} + \dots = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - i \frac{z^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \dots \\ &\dots = \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) + i \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) = \cos z + i \sin z. \end{aligned}$$

Так как из соотношений (8.109) и (8.110) следует, что $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$, то, заменяя в формуле Эйлера z на $-z$, получим

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \quad (8.114)$$

Из уравнений (8.113) и (8.114) находим

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}. \quad (8.115)$$

Эти формулы также обычно называют формулами Эйлера.

*) Равенство (8.111) получается путем умножения степенных рядов для e^{z_1} и e^{z_2} по правилам, которые были доказаны в действительной области и сохраняют силу в комплексной области.

Из формул (8.115) следует, что $\cos z$ и $\sin z$ в комплексной области могут принимать сколь угодно большие значения. Полагая, например, $z = -in$, где n — натуральное число, получим

$$\cos(-in) = \frac{e^n + e^{-n}}{2} \rightarrow +\infty \quad \text{при } n \rightarrow +\infty.$$

При этом формула (8.112) остается справедливой.

С помощью степенных рядов в комплексной области можно определить и другие функции комплексного переменного, такие, как $\ln(1+z)$, $\operatorname{arctg} z$ и другие.

Теория функций комплексного переменного является одним из важнейших разделов современной математики и находит широкие применения в математической физике.

С точки зрения теории функций комплексного переменного находят более полное объяснение некоторые факты из анализа функций действительного переменного. Например, в равенстве

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots \quad (*)$$

левая часть непрерывна и ограничена на всей числовой оси, однако стоящий справа ряд при $|x| \geq 1$ расходится. Если рассматривать равенство (*) при комплексных значениях x , то причина этого явления становится ясной, так как при $x = i$ левая часть равенства обращается в бесконечность и, следовательно, окружность круга сходимости (с центром в начале координат) должна проходить через точку $x = i$. (Если бы эта точка лежала внутри круга сходимости, то в ней функция $\frac{1}{1+x^2}$ была бы непрерывной, а она при $x = i$ обращается в бесконечность.)

В § 4 была рассмотрена функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Эта функция имеет в начале координат производные по x всех порядков, но не разложима в степенной ряд по целым неотрицательным степеням x . Причина этого становится ясной, если рассмотреть функцию

$$\varphi(z) = e^{-\frac{1}{z^2}} \quad (z \neq 0),$$

считая, что z принимает комплексные значения. Беря $z = iy$, получим $e^{-\frac{1}{z^2}} = e^{\frac{1}{y^2}} \rightarrow +\infty$ при $y \rightarrow 0$, в то время как $e^{-\frac{1}{x^2}} \rightarrow 0$ при $x \rightarrow 0$. Следовательно, эту функцию нельзя доопределить в начале координат таким образом, чтобы она стала непрерывной. Если бы существовал

степенной ряд, сходящийся к $\varphi(x)$ на некотором отрезке $-R < x < R$, то при замене x на z получился бы степенной ряд, сходящийся к $\varphi(x)$ в круге $|z| < R$, и функция $\varphi(z)$ была бы в точке $z=0$ непрерывной и даже дифференцируемой по z , а она разрывна. Исчерпывающий анализ этого примера также может быть выполнен лишь в теории функций комплексного переменного.

§ 6. Сходимость в среднем

В ряде разделов математики и ее приложений используется близость функций $f(x)$ и $g(x)$ в некотором интегральном смысле, допускающем в отдельных точках большие значения модуля разности $f(x) - g(x)$. Обычно в качестве меры интегральной близости берут «квадратичное уклонение» и рассматривают тесно связанную с ним «сходимость в среднем».

1. Квадратичное уклонение и сходимость в среднем.

Определение 1. Квадратичным уклонением функции $f(x)$ от $g(x)$ на $[a, b]$ называется неотрицательное число

$$\rho^2(f, g) = \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx^* \quad (8.116)$$

Очевидно, что

$$\rho^2(f, g) = \rho^2(g, f).$$

Графики двух функций $f(x)$ и $g(x)$, близких в смысле малости квадратичного уклонения, могут сильно отклоняться друг от друга в отдельных точках (рис. 8.5).

Определение 2. Последовательность функций

$$f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots \quad (8.117)$$

называют сходящейся в среднем к функции $f(x)$ на $[a, b]$, если

$$\rho^2(f_n, f) = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty. \quad (8.118)$$

*) Все функции в настоящем параграфе будут предполагаться интегрируемыми в обычном смысле, хотя большая часть понятий и утверждений этого параграфа сохраняет силу и для функций, интегрируемых с квадратом в смысле несобственного интеграла.

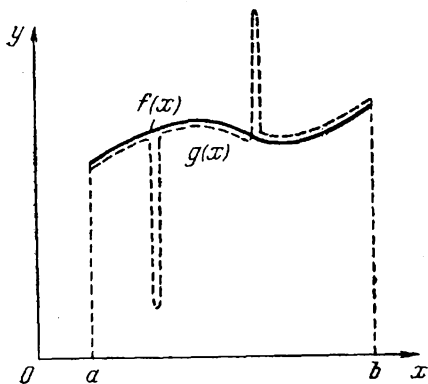


Рис. 8.5.

При этом пишут:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} f_n(x) \doteq f(x) \quad \text{на } [a, b]. \quad (8.119)$$

Определение 3. Функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \quad (8.120)$$

называется *сходящимся в среднем к $S(x)$ на отрезке $[a, b]$* , если последовательность его частичных сумм

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x), \quad n = 1, 2, \dots, \quad (8.121)$$

сходится в среднем к $S(x)$ на $[a, b]$, т. е. если

$$\rho^2(S(x), S_n(x)) = \int_a^b \left[S(x) - \sum_{k=1}^n u_k(x) \right]^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty. \quad (8.122)$$

При этом пишут:

$$S(x) \doteq \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \quad \text{на } [a, b]. \quad (8.123)$$

2. Неравенство Коши — Буняковского. Если $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют на $[a, b]$ описанным выше требованиям, то

$$\left| \int_a^b f(x) g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}. \quad (8.124)$$

Доказательство. Положим

$$A = \int_a^b f^2(x) dx, \quad B = \int_a^b f(x) g(x) dx, \quad C = \int_a^b g^2(x) dx \quad (8.125)$$

и рассмотрим два возможных случая: 1) $A = C = 0$ и 2) по крайней мере одно из чисел A и C отлично от нуля.

1) Если $A = C = 0$, т. е.

$$\int_a^b f^2(x) dx = \int_a^b g^2(x) dx = 0,$$

то из очевидного неравенства

$$|f(x) g(x)| \leq \frac{1}{2} [f^2(x) + g^2(x)]$$

следует, что

$$\int_a^b |f(x)g(x)| dx \leq \frac{1}{2} \left[\int_a^b f^2(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx \right] = 0.$$

Но

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)g(x)| dx,$$

следовательно, $B = \int_a^b f(x)g(x) dx = 0$, и неравенство (8.124) выполняется, так как в левой и правой его частях стоит нуль.

2) Пусть, например, $A > 0$. Тогда поступим следующим образом. Заметим, что при всех действительных значениях параметра λ

$$[\lambda f(x) + g(x)]^2 \geq 0.$$

т. е.

$$\lambda^2 f^2(x) + 2\lambda f(x)g(x) + g^2(x) \geq 0.$$

Интегрируя это неравенство по x от a до b и учитывая обозначения (8.125), получим, что при всех действительных λ

$$A\lambda^2 + 2B\lambda + C \geq 0, \quad (8.126)$$

причем $A > 0$. Но тогда квадратный трехчлен $A\lambda^2 + 2B\lambda + C$ не может иметь двух различных действительных корней $\lambda_1 < \lambda_2$, иначе его можно было бы представить в виде $A(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)$ и он принимал бы отрицательные значения при $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, что противоречит неравенству (8.126). Необходимым и достаточным условием отсутствия различных действительных корней является, как известно, неположительность дискриминанта трехчлена

$$B^2 - AC \leq 0. \quad (8.127)$$

Перенося произведение AC в правую часть неравенства и извлекая из обеих частей арифметический квадратный корень, получим $|B| \leq \sqrt{|A|} \cdot \sqrt{|C|}$, а это, если учесть обозначения (8.125), и есть неравенство Коши — Буняковского.

3. Интегрирование сходящихся в среднем последовательностей и рядов.

Теорема 8.14₁. Если последовательность функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... сходится в среднем на отрезке $[a, b]$ к функции $f(x)$, то при любых x_0 и x на $[a, b]$ будет

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{x_0}^x f_n(z) dz = \int_{x_0}^x f(z) dz; \quad (8.128)$$

более того, при любом $x_0 \in [a, b]$ имеет место равномерная по x сходимостъ

$$\int_{x_0}^x f_n(z) dz \rightrightarrows \int_{x_0}^x f(z) dz \quad \text{на } [a, b]^*, \quad (8.129)$$

Доказательство. По условию

$$\rho^2(f, f_n) = \int_a^b [f(z) - f_n(z)]^2 dz \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty. \quad (8.130)$$

Чтобы доказать (8.129) (а следовательно, и (8.128)), оценим интеграл $\int_{x_0}^x [f(z) - f_n(z)] dz$. Для этого, представив подынтегральную функцию в виде произведения

$$[f(z) - f_n(z)] = 1 \cdot [f(z) - f_n(z)],$$

применим неравенство Коши — Буняковского

$$\begin{aligned} \left| \int_{x_0}^x [f(z) - f_n(z)] dz \right| &\leq \sqrt{\int_{x_0}^x 1^2 dz} \cdot \sqrt{\int_{x_0}^x |f(z) - f_n(z)|^2 dz} \leq \\ &\leq \sqrt{b-a} \cdot \sqrt{\int_a^b |f(z) - f_n(z)|^2 dz} = \sqrt{b-a} \sqrt{\rho^2(f, f_n)}. \end{aligned} \quad (8.131)$$

Так как правая часть неравенства (8.131) от x не зависит и, в силу (8.130), стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$, то это и означает, что

$$\int_{x_0}^x [f(z) - f_n(z)] dz \rightrightarrows 0 \quad \text{на } [a, b],$$

т. е. соотношение (8.129) выполняется. Этим доказательство теоремы завершено.

Если разность $f(x) - f_n(x)$ заменить ее модулем, то вместо (8.131) при $x_0 = a$ и $x = b$ получим неравенство

$$\int_a^b |f(z) - f_n(z)| dz \leq \sqrt{b-a} \cdot \sqrt{\rho^2(f, f_n)}. \quad (8.132)$$

Интеграл в левой части (8.132) выражает площадь, заключенную

*) Напомним, что все функции в данном параграфе, в том числе $f_n(x)$ и $f(x)$, предполагаются интегрируемыми на $[a, b]$ в обычном смысле; см., однако, сноску на стр. 342.

между графиками $f_n(x)$ и $f(x)$ и ординатами $x=a$ и $x=b$. Таким образом, в случае сходимости в среднем $f_n(x)$ к $f(x)$ на $[a, b]$ эта площадь стремится к нулю, так как квадратичное отклонение $\rho^2(f, f_n)$ стремится к нулю. При этом максимум обычного отклонения $f_n(x)$ от $f(x)$ на $[a, b]$ может даже неограниченно возрастать. Например,

последовательность $f_n(x) = n^{-\frac{1}{8}} \sqrt[4]{2nxe}^{-\frac{1}{2}nx^2}$ сходится в среднем к $f(x) \equiv 0$ на отрезке $0 \leq x \leq 1$, но

$$\max_{0 \leq x \leq 1} |f_n(x) - f(x)| = f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \sqrt[4]{\frac{2}{e}} n^{\frac{1}{8}} \rightarrow +\infty \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

С помощью теоремы 8.14₁, доказанной для последовательностей, легко доказывается для рядов

Теорема 8.14₂. Если функциональный ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x)$ с интегрируемыми членами сходится в среднем к интегрируемой функции $S(x)$ на отрезке $[a, b]$, то

$$\int_{x_0}^x S(z) dz = \int_{x_0}^x u_1(z) dz + \dots + \int_{x_0}^x u_n(z) dz + \dots \quad (8.133)$$

при любых x_0 и $x \in [a, b]$, причем ряд (8.133) сходится к своей сумме равномерно на $[a, b]$.

Доказательство. Так как по условию $S_n(x)$ сходится в среднем к $S(x)$ на $[a, b]$, где $S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x)$, то по теореме 8.14

$$\int_{x_0}^x S_n(z) dz \Rightarrow \int_{x_0}^x S(z) dz \text{ на } [a, b], \quad (8.134)$$

но

$$\int_{x_0}^x S_n(z) dz = \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x u_k(z) dz,$$

следовательно,

$$\left\{ \sum_{k=1}^n \int_{x_0}^x u_k(z) dz \right\} \Rightarrow \int_{x_0}^x S(z) dz,$$

т. е. частичная сумма ряда (8.133) сходится равномерно к функции

$\int_{x_0}^x S(z) dz$, что и требовалось доказать.

4. О связи между сходимостью в среднем и возможностью почленного дифференцирования последовательностей и рядов.

Теорема 8.15₁. Если последовательность непрерывно дифференцируемых функций $\{f_n(x)\}$ сходится на $[a, b]$ к функции $f(x)$, а последовательность их производных $\{f'_n(x)\}$ сходится в среднем на $[a, b]$ к непрерывной функции $\varphi(x)$, то $f(x)$ дифференцируема на $[a, b]$ и

$$f'(x) = \varphi(x) \doteq \lim_{n \rightarrow +\infty} f'_n(x) \text{ на } [a, b]. \quad (8.135)$$

Доказательство. Мы имеем при $x, x_0 \in [a, b]$,

$$\begin{aligned} \left| f_n(x) - f_n(x_0) - \int_{x_0}^x \varphi(z) dz \right| &= \left| \int_{x_0}^x [f'_n(z) - \varphi(z)] dz \right| \leq \\ &\leq \sqrt{\int_{x_0}^x 1^2 dz} \cdot \sqrt{\int_{x_0}^x [f'_n(z) - \varphi(z)]^2 dz} \leq \\ &\leq \sqrt{b-a} \cdot \sqrt{\rho^2(f'_n, \varphi)} \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (8.136)$$

при $n \rightarrow +\infty$. Следовательно, переходя к пределу и учитывая, что $f_n(x) \rightarrow f(x)$ и $f_n(x_0) \rightarrow f(x_0)$ при $n \rightarrow +\infty$, получим

$$f(x) - f(x_0) = \int_{x_0}^x \varphi(z) dz, \text{ т. е. } f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^x \varphi(z) dz. \quad (8.137)$$

Из равенства (8.137) вытекает, что $f(x)$ дифференцируема и что имеет место равенство (8.135). Теорема доказана.

Аналогичным образом доказывается

Теорема 8.15₂. Если функциональный ряд

$$S(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} u_k(x) \quad (8.138)$$

с непрерывно дифференцируемыми членами сходится на $[a, b]$, а ряд

$$\sigma(x) \doteq \sum_{k=1}^{+\infty} u'_k(x) \quad (8.139)$$

сходится в среднем к непрерывной функции $\sigma(x)$, то сумма $S(x)$ ряда (138) дифференцируема на $[a, b]$ и

$$S'(x) = \sigma(x) \doteq \sum_{k=1}^{+\infty} u'_k(x). \quad (8.140)$$

Доказательство теоремы 8.15₂ предоставляем выполнить читателям.

5. Связь между сходимостью в среднем и другими видами сходимости. Из обычной сходимости последовательности функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ в каждой точке отрезка $[a, b]$

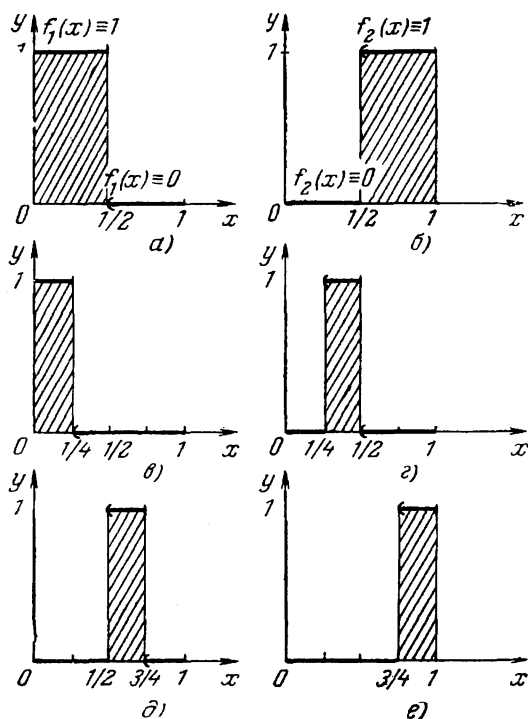


Рис. 8.6.

сходимость в среднем не вытекает. Например,

$$f_n(x) = \sqrt{2n} x e^{-\frac{1}{2} n x^2} \rightarrow f(x) \equiv 0 \text{ на отрезке } [0, 1],$$

но

$$\int_0^1 [f_n(x) - f(x)]^2 dx = \int_0^1 2n x e^{-n x^2} dx = (1 - e^{-n}) \rightarrow 1 \text{ при } n \rightarrow +\infty.$$

Из равномерной сходимости вытекает сходимость в среднем. Действительно, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N(\varepsilon)$ неравенство $|f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}}$

выполняется сразу для всех $x \in [a, b]$, то, возводя в квадрат обе части этого неравенства и интегрируя, получим, что

$$\rho^2(f, f_n) = \int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon$$

при всех $n > N(\varepsilon)$, т. е. что $\rho^2(f, f_n) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, а это и означает сходимость в среднем $f_n(x)$ к $f(x)$ на $[a, b]$.

Из сходимости в среднем равномерная сходимость не вытекает; более того, не вытекает даже обычная сходимость в каждой точке. Рассмотрим пример последовательности функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ..., сходящейся в среднем к $f(x) \equiv 0$ на отрезке $[0, 1]$ и не сходящейся на этом отрезке ни в одной точке. Построение этой последовательности будем вести шаг за шагом, подвергая отрезок $[0, 1]$ разбиению сначала на 2 равные части, затем на 2^2 равных частей и т. д., на 2^n равных частей и т. д. Разбив отрезок $[0, 1]$ на две равные части, определим $f_1(x)$ и $f_2(x)$, как указано на рис. 8.6, а и б. График функции изображен жирной линией, а маленькая дужка означает, что точка, через которую она проходит, к примыкающему куску графика не причисляется.

Разбив отрезок $[0, 1]$ на 2^2 равных частей, определим $f_3(x)$, $f_4(x)$, $f_5(x)$ и $f_6(x)$, как указано на рис. 8.6, в, г, д, е. Продолжая этот процесс неограниченно, получим последовательность функций $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ..., каждая из которых принимает на отрезке $[0, 1]$ только два значения: 0 и 1, поэтому $f_n^2(x) \equiv f_n(x)$ на отрезке $[0, 1]$ при всех $n = 1, 2, 3, \dots$

Докажем, что $f_n(x)$ сходится в среднем к $f(x) \equiv 0$ на $[0, 1]$. Мы имеем

$$\rho^2(f, f_n) = \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|^2 dx = \int_0^1 f_n^2(x) dx = \int_0^1 f_n(x) dx \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow +\infty$. Действительно, $\int_0^1 f_n(x) dx$ равен площади заштрихованного прямоугольника, которая, очевидно, стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$. Сходимость в среднем доказана.

Однако последовательность $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$, ... не сходится ни в одной точке отрезка $[0, 1]$, так как в каждой точке x этого отрезка при сколь угодно большом $N > 0$ найдутся функции с номером $n' > N$, имеющие в этой точке значение 0, и найдутся функции с номером $n'' > N$, имеющие в этой же точке значение 1.

ДОПОЛНЕНИЕ I К ГЛ. 8

КРИТЕРИЙ КОМПАКТНОСТИ СЕМЕЙСТВА ФУНКЦИЙ

Вопрос о компактности семейства функций в математической физике возникает при доказательстве существования решений дифференциальных и интегральных уравнений и при доказательстве сходимости различных приближенных методов решения таких уравнений, но для его рассмотрения не требуется привлечения понятий теории дифференциальных или интегральных уравнений; по своему характеру он естественным образом примыкает к вопросам, рассмотренным в настоящей главе.

Определение 1. Семейство функций $\{f(x)\}$, заданных на некотором множестве X точек x , мы будем называть компактным (в смысле равномерной сходимости), если из любой бесконечной последовательности функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$ данного семейства можно выделить подпоследовательность $f_{n_1}(x), f_{n_2}(x), \dots, f_{n_k}(x), \dots$, равномерно сходящуюся на множестве X^* .

Определение 2. Семейство функций $\{f(x)\}$, заданных на некотором множестве X , мы будем называть равномерно ограниченным на этом множестве, если существует такая константа $C, 0 < C < +\infty$, что неравенство $|f(x)| \leq C$ выполняется сразу для всех $x \in X$ и для всех функций $f(x)$ из данного семейства.

Определение 3. Семейство функций $\{f(x)\}$, заданных на множестве X , называется равномерно непрерывным на этом множестве, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, не зависящее от выбора функции $f(x) \in \{f(x)\}$ и выбора x' и $x'' \in X$, что для каждой функции $f(x) \in \{f(x)\}$ и любых x' и $x'' \in X$, удовлетворяющих неравенству $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$, выполняется неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \quad (1)$$

Теорема 1 (Арцела). Если семейство функций $\{f(x)\}$, заданных на отрезке $a \leq x \leq b$, равномерно ограничено и равномерно непрерывно, то оно компактно в смысле равномерной сходимости.

Доказательство. Рассмотрим какое-либо счетное всюду плотное на отрезке $a \leq x \leq b$ множество M точек $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$, например множество всех рациональных точек этого отрезка или множество всех точек деления при последовательном делении

*) Аналогичным образом определяется компактность в смысле сходимости в среднем. Однако по этому поводу мы отсылаем к руководствам по функциональному анализу.

этого отрезка на $2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$ равных частей. Возьмем какую-либо последовательность функций $\{f_n(x)\}$ из данного семейства. В силу равномерной ограниченности семейства, $|f_n(x)| \leq C = \text{const} < +\infty$ при всех $n = 1, 2, 3, \dots$ и сразу для всех $x \in M$. В частности, последовательность чисел $f_n(x_1)$, $n = 1, 2, \dots$ будет ограниченной, так что по теореме Больцано — Вейерштрасса найдется сходящаяся подпоследовательность $f_{11}(x_1), f_{12}(x_1), \dots, f_{1n}(x_1), \dots$. В результате из последовательности функций $f_n(x)$ оказалась выделенной подпоследовательность

$$f_{11}(x), f_{12}(x), \dots, f_{1n}(x), \dots, \quad (2_1)$$

сходящаяся в точке $x_1 \in M$.

Аналогично из последовательности (2_1) выделим подпоследовательность

$$f_{21}(x), f_{22}(x), \dots, f_{2n}(x), \dots, \quad (2_2)$$

сходящуюся в точке $x_2 \in M$; последовательность (2_2) сходится также и в точке $x_1 \in M$, ибо она является подпоследовательностью последовательности (2_1) , которая в точке x_1 сходится. Итак, последовательность (2_s) сходится в точках x_1 и x_2 множества M .

Продолжая неограниченно этот процесс выделения подпоследовательностей, получим бесконечную таблицу:

$$\begin{pmatrix} f_{11}(x), & f_{12}(x), & \dots, & f_{1n}(x), & \dots \\ f_{21}(x), & f_{22}(x), & \dots, & f_{2n}(x), & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ f_{n1}(x), & f_{n2}(x), & \dots, & f_{nn}(x), & \dots \end{pmatrix} \quad (3)$$

в n -й строке которой ($n=1, 2, 3, \dots$) стоит подпоследовательность, сходящаяся в точках x_1, x_2, \dots, x_n . Поэтому диагональная последовательность

$$f_{11}(x), f_{22}(x), \dots, f_{nn}(x), \dots \quad (4)$$

будет сходиться в каждой точке $x_n \in M$. Докажем, что она сходится равномерно на $[a, b]$. Для этого достаточно доказать, что данная последовательность (4) удовлетворяет критерию Коши для равномерно сходящихся функциональных последовательностей.

Пусть дано какое угодно $\epsilon > 0$. Сначала выберем из всюду плотного множества M такое конечное подмножество $\tilde{M}[x_1, x_2, \dots, x_p]$, чтобы его точки делили отрезок $[a, b]$ на частичные отрезки длины $< \delta(\epsilon)$, где $\delta(\epsilon) > 0$ выбирается из условия равномерной непрерывности семейства, т. е.

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |x' - x''| < \delta(\varepsilon) \quad \text{и} \quad x', x'' \in [a, b].$$

Тогда для каждого $x \in [a, b]$ найдется такое значение $x_i \in \tilde{M}$, что $|x - x_i| < \delta(\varepsilon)$. Найдём, далее, по заданному $\varepsilon > 0$ такое $N(\varepsilon)$, не

зависящее от x_i , $i = 1, 2, \dots, p$, что

$$|f_{mt}(x_i) - f_{nn}(x_i)| < \varepsilon \quad \text{при всех } m \text{ и } n > N(\varepsilon) \quad (5)$$

и всех $i = 1, 2, \dots, p$. Тогда будет $|f_{mn}(x) - f_{nn}(x)| < 3\varepsilon$ при всех m и $n > N(\varepsilon)$ и сразу для всех $x \in [a, b]$. Действительно, пусть m и $n > N(\varepsilon)$, а $x \in [a, b]$. Найдется такое значение $x_i \in \tilde{M}$, что $|x - x_i| < \delta(\varepsilon)$. Но тогда, в силу равностепенной непрерывности $|f_{mt}(x) - f_{mt}(x_i)| < \varepsilon$, $|f_{nn}(x) - f_{nn}(x_i)| < \varepsilon$, а следовательно, в силу (5), будет выполняться неравенство

$$|f_{mt}(x) - f_{nn}(x)| \leq |f_{mt}(x) - f_{mt}(x_i)| + |f_{mt}(x_i) - f_{nn}(x_i)| + |f_{nn}(x_i) - f_{nn}(x)| < \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon.$$

Критерий Коши равномерной сходимости для последовательности (4) выполнен. Теорема доказана.

Теорема Арцела находит, например, применение при доказательстве существования решения дифференциальных уравнений.

Докажем еще одну теорему, существенно используемую в теории интегральных уравнений.

Теорема 2. Если последовательность функций $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на $[a, b]$ и удовлетворяет условию

$$\rho^2(f_n, f_m) = \int_a^b [f_m(x) - f_n(x)]^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n, m \rightarrow +\infty, \quad (6)$$

то она сходится равномерно на этом отрезке к некоторой непрерывной функции $f(x)$.

Доказательство. Докажем, что для этой последовательности выполнен критерий Коши равномерной сходимости, т. е. докажем, что

$$\varphi_{n,m}(x) = [f_n(x) - f_m(x)] \rightarrow 0 \quad \text{на } [a, b] \quad \text{при } n, m \rightarrow +\infty.$$

Допустим противное. Тогда найдется такое $\varepsilon_0 > 0$, что при как угодно больших k существуют такие $n_k > k$ и $x_k \in [a, b]$, для которых

$$|\varphi_{kn_k}(x_k)| \geq 4\varepsilon_0. \quad (7)$$

В силу равностепенной непрерывности последовательности, найдется $\delta = \delta(\varepsilon_0)$, для которого

$$|f_n(x) - f_n(x_k)| < \varepsilon_0 \quad \text{при } |x - x_k| < \delta(\varepsilon_0). \quad (8)$$

Следовательно, при $n_k > k > N(\varepsilon_0)$ и $|x - x_k| < \delta(\varepsilon_0)$ будет

$$|\varphi_{kn_k}(x) - \varphi_{kn_k}(x_k)| \leq |f_k(x) - f_k(x_k)| + |f_{n_k}(x) - f_{n_k}(x_k)| < 2\varepsilon_0. \quad (9)$$

Но тогда, в силу (7) и (9), будем иметь

$$|\varphi_{kn_k}(x)| \geq |\varphi_{kn_k}(x_k)| - |\varphi_{kn_k}(x) - \varphi_{kn_k}(x_k)| \geq 4\varepsilon_0 - 2\varepsilon_0 = 2\varepsilon_0. \quad (10)$$

Если взять $\delta(\varepsilon_0) < b - a$, то по крайней мере половина интервала $x_k - \delta < x < x_k + \delta$ лежит на отрезке $[a, b]$. Следовательно, в силу (10), при $n_k > k > N(\varepsilon_0)$

$$\rho^2(f_{n_k}, f_k) = \int_a^b \varphi_{kn_k}^2(x) dx > 4\varepsilon_0^2 \frac{\delta}{2} = 2\varepsilon_0^2 \delta = \text{const} > 0, \quad (11)$$

что противоречит условию (6), так как число k можно взять сколь угодно большим. Поэтому $\varphi_{mn}(x) = [f_m(x) - f_n(x)] \rightarrow 0$ на $[a, b]$ при n и $m \rightarrow +\infty$. Следовательно, в силу критерия Коши для равномерно сходящихся последовательностей, последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на $[a, b]$ к некоторой функции $f(x)$, причем $f(x)$ непрерывна, как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций. Теорема доказана.

ДОПОЛНЕНИЕ 2 К ГЛ. 8

СЛАБАЯ СХОДИМОСТЬ И ДЕЛЬТА-ФУНКЦИЯ

Наряду с равномерной сходимостью и сходимостью в среднем важную роль в математике и математической физике играет так называемая слабая сходимость.

Определение 1. Последовательность функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (1)$$

определенных и интегрируемых на (a, b) , называется слабо сходящейся «в себе» на (a, b) , если для всякой непрерывной и ограниченной на (a, b) функции $f(x)$ существует конечный предел

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx. \quad (2)$$

Определение 2. Функция $\varphi(x)$ называется слабым пределом последовательности функций (1) на (a, b) , если

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx = \int_a^b f(x) \varphi(x) dx, \quad (3)$$

для любой непрерывной и ограниченной на (a, b) функции $f(x)$ *).

*) Точнее, в этом случае говорят, что последовательность (1) сходится к $\varphi(x)$ слабо в классе функций, непрерывных на (a, b) ; можно определить слабую сходимость и в других классах функций.

Если последовательность (1) сходится равномерно или в среднем к интегрируемой функции $\varphi(x)$, то, в силу теорем о предельном переходе под знаком интеграла, равенство (3) будет выполняться для каждой непрерывной и ограниченной функции $f(x)$; таким образом, из равномерной сходимости, а также из сходимости в среднем $\{\varphi_n(x)\}$ к $\varphi(x)$ вытекает *слабая* сходимость $\{\varphi_n(x)\}$ к $\varphi(x)$.

Если для любой непрерывной и ограниченной на (a, b) функции $f(x)$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx = 0, \quad (4)$$

то, очевидно, последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится слабо к нулю на (a, b) , так как равенство (4) можно переписать в виде

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx = \int_a^b f(x) \cdot 0 \cdot dx. \quad (4')$$

Применяя критерий Коши к последовательности чисел $\left\{ \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx \right\}$, получим следующий критерий слабой сходимости «в себе».

Критерий Коши (для слабо сходящихся последовательностей). Для того чтобы последовательность (1) была слабо сходящейся «в себе» на (a, b) , необходимо и достаточно, чтобы она была слабо фундаментальной, т. е. чтобы для каждой непрерывной функции $f(x)$ и для каждого $\varepsilon > 0$ существовало такое число $N(\varepsilon, f)$, что

$$\left| \int_a^b f(x) [\varphi_n(x) - \varphi_m(x)] dx \right| < \varepsilon \quad (5)$$

при всех n и $m > N(\varepsilon, f)$.

Напомним, что не всякая фундаментальная последовательность рациональных чисел сходится к рациональному числу, и это приводит к необходимости расширения запаса чисел и введению иррациональных чисел. Аналогично не всякая слабо фундаментальная последовательность интегрируемых функций сходится слабо к интегрируемой функции, и это приводит к необходимости расширения запаса функций и введению так называемых обобщенных функций.

Рассмотрим, например, последовательность функций $\{\delta_n(x_0, x)\}$, определяемых соотношениями

$$\delta_n(x_0, x) = \begin{cases} n & \text{при } x_0 - \frac{1}{2n} < x < x_0 + \frac{1}{2n}, \\ 0 & \text{при } -\infty < x < x_0 - \frac{1}{2n}, \quad x_0 + \frac{1}{2n} < x < +\infty. \end{cases} \quad (6)$$

Эта последовательность сходится слабо «в себе» на любом интервале (a, b) .

Действительно, пусть $f(x)$ непрерывна на (a, b) и пусть $x_0 \in (a, b)$. Тогда, начиная с достаточно большого n , интервал $\left(x_0 - \frac{1}{2n}, x_0 + \frac{1}{2n}\right)$ содержится в (a, b) , и, применяя теорему о среднем к интегралу, получим

$$\int_a^b f(x) \delta_n(x_0, x) dx = n \int_{x_0 - \frac{1}{2n}}^{x_0 + \frac{1}{2n}} f(x) dx = f(\xi), \quad (6')$$

$$x_0 - \frac{1}{2n} \leq \xi \leq x_0 + \frac{1}{2n}.$$

Переходя в последнем равенстве к пределу при $n \rightarrow +\infty$, в силу непрерывности $f(x)$, получим

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \delta_n(x_0, x) dx = f(x_0). \quad (7)$$

Если же x_0 лежит вне сегмента $[a, b]$, найдем

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) \delta_n(x_0, x) dx = 0. \quad (8)$$

Однако не существует никакой обычной интегрируемой функции, которая являлась бы слабым пределом последовательности $\{\delta_n(x_0, x)\}$. В качестве слабого предела этой последовательности вводят обобщенную функцию $\delta(x_0, x)$, называемую δ -функцией (дельта-функцией) с центром в точке x_0 .

В силу определения слабого предела (см. равенство (3)) и в силу (7) и (8), для любой непрерывной на (a, b) функции $f(x)$ будем иметь

$$\int_a^b f(x) \delta(x_0, x) dx = \begin{cases} f(x_0) & \text{при } x_0 \in (a, b), \\ 0 & \text{при } x_0 \notin [a, b]. \end{cases} \quad (9)$$

Иногда δ -функцию определяют формально соотношением (9).

Замечание. Вместо ограниченной и непрерывной на (a, b) функции $f(x)$ в соотношениях (7) и (8) можно, очевидно, брать кусочно-непрерывную ограниченную на (a, b) функцию $f(x)$, если в каждой точке разрыва x^* она доопределена равенством $f(x^*) = \frac{f(x^* - 0) + f(x^* + 0)}{2}$. Тогда равенство (9) естественно считать

выполненным и для таких функций *).

Аналогично тому, как одно и то же иррациональное число можно определять с помощью различных эквивалентных фундаментальных последовательностей рациональных чисел, так и одну и ту же обобщенную функцию можно определять с помощью различных эквивалентных слабо сходящихся последовательностей. При этом имеет место следующее

Определение 3. Две слабо сходящиеся на (a, b) последовательности функций $\{\varphi_n(x)\}$, и $\{\psi_n(x)\}$ называются эквивалентными, если для любой непрерывной и ограниченной на (a, b) функции $f(x)$ выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b f(x) [\varphi_n(x) - \psi_n(x)] dx = 0.$$

При практическом применении δ -функции часто вместо рассмотренной нами последовательности $\{\delta_n(x_0, x)\}$ берут другие эквивалентные ей слабо сходящиеся последовательности, определяющие δ -функцию (см. Дополнение 5 к гл. 11). Характеризуя соотношение (9), которым формально определяется δ -функция, иногда говорят, что δ -функция обладает «выхватывающим» или «фильтрующим» свойством: умножая любую непрерывную функцию $f(x)$ на $\delta(x_0, x)$ и интегрируя их произведение по интервалу, в котором

*) Если x_0 — точка разрыва кусочно-непрерывной функции $f(x)$, причем $f(x_0) = \frac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$, то для доказательства равенства (7) при

$x_0 \in (a, b)$ нужно интеграл $\int_{x_0 - \frac{1}{2n}}^{x_0 + \frac{1}{2n}} f(x) dx$ в соотношении (6') разбить на два:

$\int_{x_0 - \frac{1}{2n}}^{x_0} f(x) dx$ и $\int_{x_0}^{x_0 + \frac{1}{2n}} f(x) dx$ и применять теорему о среднем к каждому из них.

определена $f(x)$ и в котором лежит x_0 , мы «выхватываем» или «отфильтровываем» значение $f(x)$ в точке x_0 .

Если каждой функции $f(x)$ из некоторого класса функций, определенных на (a, b) , ставится однозначно в соответствие некоторое число, то говорят, что на этом классе функций определен функционал.

Например, пусть $\{f(x)\}_b^a$ — класс всех интегрируемых на (a, b) функций; тогда интеграл $\int_a^b f(x) dx$ является функционалом, определенным на этом классе.

С помощью интеграла (9) при любом фиксированном $x_0 \in (a, b)$ также определяется функционал на классе всех функций, непрерывных на (a, b) . Действительно, с помощью интеграла (9) каждой непрерывной на (a, b) функции $f(x)$ ставится однозначно в соответствие число $f(x_0)$, равное значению этой функции в точке $x_0 \in (a, b)$.

Иногда δ -функцию отождествляют с функционалом, который определяется соотношением (9). Такова одна из интерпретаций обобщенных функций, которая может быть положена в основу построения теории обобщенных функций.

ГЛАВА 9

НЕСОБСТВЕННЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Определение интеграла как предела интегральной суммы

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\max \Delta x_k \rightarrow 0} \sum_{k=0}^n f(\xi_k) \Delta x_k \quad (9.1)$$

не охватывает случаев, когда подынтегральная функция не ограничена или интервал интегрирования бесконечен. Однако в математике и математической физике широко используются интегралы от неограниченных функций и интегралы с неограниченными областями интегрирования. Такие интегралы называются *несобственными*. Для их определения не достаточно одного предельного перехода вида (9.1), требуется еще дополнительный переход по области интегрирования. Именно, первоначальную область интегрирования, где определение (9.1) не годится, заменяют такой подобластью, где оно пригодно; предел интеграла, взятого по этой подобласти, когда она, расширяясь, стремится совпасть с первоначальной областью, называют несобственным интегралом по первоначальной области. Такова общая идея определения несобственного интеграла. Более точные формулировки будут приведены ниже.

§ 1. Интегралы с бесконечными пределами интегрирования

1. Определения; примеры. Пусть функция $f(x)$ определена на полупрямой $a \leq x < +\infty$ и пусть для каждого $B > a$ существует

интеграл $\int_a^B f(x) dx$ (определяемый соотношением вида (9.1)).

Определение 1. Несобственным интегралом $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется предел

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B f(x) dx. \quad (9.2)$$

Если этот предел существует и конечен, то говорят, что несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится; в противном случае говорят, что он расходится.

Замечание. Пусть $a_1 > a$. Тогда из равенства

$$\int_a^B f(x) dx = \int_a^{a_1} f(x) dx + \int_{a_1}^B f(x) dx$$

следует, что интегралы $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ и $\int_{a_1}^{+\infty} f(x) dx$ сходятся или расходятся одновременно. Таким образом, исследование на сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ можно заменить исследованием на сходимос-

ть интеграла $\int_{a_1}^{+\infty} f(x) dx$ при любом $a_1 > a$, если только функция $f(x)$ удовлетворяет требованиям определения (1).

Несобственный интеграл (9.2) имеет простой геометрический смысл. Пусть $f(x)$ — непрерывная неотрицательная функция при $x \geq a$. Область Ω , примыкающая сверху к оси x , ограничена графиком этой функции, отрезком $a \leq x < +\infty$ оси x и отрезком ординаты $x = a$, $0 \leq y \leq f(a)$. Определения квадратуемости и площади области, сформулированные ранее (п. 3 § 1 гл. 1), к этой области неприменимы*). Проведя произвольную ординату $x = B > a$, $0 \leq y \leq f(B)$, мы отсечем квадратуемую криволинейную трапецию $ABB'A'$ (рис. 9.1),

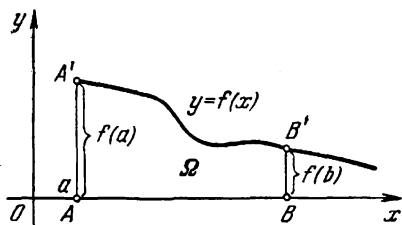


Рис. 9.1.

площадь которой выражается интегралом $\int_a^B f(x) dx$. Естественно на-

звать область Ω квадратуемой, если площадь трапеции $ABB'A'$ стремится к конечному пределу, когда $B \rightarrow +\infty$, и этот предел площади трапеции $ABB'A'$ назвать площадью области Ω . Но тогда площадь области Ω будет выражаться несобственным интегралом (9.2).

*) В силу ее неограниченности.

Аналогично интегралу (9.2) определяется *несобственный интеграл*

$$\int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx. \quad (9.3)$$

Если оба предела интегрирования бесконечны, то полагают по определению, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx, \quad (9.4)$$

где a — произвольное конечное число, причем интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ называется *сходящимся* тогда и только тогда, когда оба интеграла в правой части (9.4) сходятся.

Легко показать, что сходимость интеграла $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ и его величина в случае, если он сходится, не зависят от выбора точки a *). Итак, интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ сводится к интегралам вида $\int_a^{+\infty} f(x) dx$

*) Можно определить интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ соотношением

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow +\infty}} \int_A^B f(x) dx, \quad (9.4')$$

где A и B стремятся к своим пределам независимо друг от друга. Действительно, в силу (9.4), (9.3) и (9.2), имеем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{+\infty} f(x) dx = \\ &= \lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx + \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B f(x) dx = \lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow +\infty}} \int_A^B f(x) dx, \end{aligned}$$

причем для существования последнего предела при независимом стремлении $A \rightarrow -\infty$, $B \rightarrow +\infty$ необходимо и достаточно существование пределов

$$\lim_{A \rightarrow -\infty} \int_A^a f(x) dx, \quad \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B f(x) dx.$$

и $\int_{-\infty}^a f(x) dx$. Но интеграл вида $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ простой заменой x на $-x$ сводится к интегралу вида $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, поэтому мы ограничимся в основном изучением интегралов вида $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Рассмотрим некоторые примеры.

1. Интеграл $\int_0^{+\infty} \sin x dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_0^B \sin x dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} (1 - \cos B)$ расходится, так как $\cos B$ при $B \rightarrow +\infty$ не стремится ни к какому пределу, колеблясь между -1 и $+1$.

2. Интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2}$ сходится, так как существует определенный конечный предел:

$$\lim_{\substack{B \rightarrow +\infty \\ A \rightarrow -\infty}} \int_A^B \frac{dx}{1+x^2} = \lim_{\substack{B \rightarrow +\infty \\ A \rightarrow -\infty}} [\operatorname{arctg} B - \operatorname{arctg} A] = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi.$$

3. Особенно важным примером служит интеграл

$$\int_a^{+\infty} \frac{C}{x^\alpha} dx, \quad \text{где } C > 0 \text{ и } a > 0;$$

он сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$. Действительно,

$$\int_a^B \frac{C}{x^\alpha} dx = \begin{cases} C \ln \frac{B}{a} & \text{при } \alpha = 1, \\ C \frac{B^{1-\alpha} - a^{1-\alpha}}{1-\alpha} & \text{при } \alpha \neq 1, \end{cases}$$

поэтому

$$\lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B \frac{C}{x^\alpha} dx = \begin{cases} C \frac{a^{1-\alpha}}{\alpha-1} & \text{при } \alpha > 1, \\ +\infty & \text{при } \alpha \leq 1. \end{cases}$$

Используя этот интеграл для сравнения, можно установить сходимость или расходимость многих других несобственных интегралов. (Подробнее об этом см. теорему 9.3, п. 4.)

2. Сведение несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ к числовой последовательности и числовому ряду. Исследование сходимости несобственного интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ может быть сведено к исследованию сходимости числовых последовательностей или числовых рядов.

Согласно определению 1, несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ является пределом функции $F(B) = \int_a^B f(x) dx$ при $B \rightarrow +\infty$. Если применить к $F(B)$ определение предела функции через последовательности (см. вып. 1, гл. 4, § 2), мы придем к следующему критерию:

Для сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ необходимо и достаточно, чтобы при любом выборе последовательности точек $B_n > a$, $n = 1, 2, \dots$; $B_n \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow \infty$ (9.5) последовательность чисел

$$\int_a^{B_n} f(x) dx, \quad n = 1, 2, 3, \dots, \quad (9.6)$$

сходилась к одному и тому же конечному пределу. В случае сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ предел последовательности (9.6) равен этому интегралу.

Заметим, что последовательность (9.6) является последовательностью частичных сумм ряда

$$\int_a^{B_1} f(x) dx + \int_{B_1}^{B_2} f(x) dx + \dots + \int_{B_{n-1}}^{B_n} f(x) dx + \dots \quad (9.7)$$

В связи с этим высказанный выше критерий можно сформулировать иначе:

Для сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ необходимо и достаточно, чтобы при любом выборе последовательности точек

(9.5) числовой ряд (9.7) был сходящимся и его сумма не зависела от выбора последовательности точек (9.5). В случае сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сумма ряда (9.7) равна этому интегралу.

Замечание 1. Если функция $f(x)$ знакопеременна на полупрямой $a \leq x < +\infty$, то из сходимости ряда (9.7) при каком-либо одном выборе последовательности точек (9.5) еще не вытекает,

вообще говоря, сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$. Например, инте-

грал $\int_0^{+\infty} \sin x dx$ расходится (см. пример 1 п. 1), хотя ряд

$\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} \sin x dx$ сходится, так как все его члены равны нулю.

Если функция $f(x)$ сохраняет знак при всех $x \geq a$, например $f(x) \geq 0$ при всех $x \geq 0$, то для сходимости интеграла

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ необходимо и достаточно, чтобы ряд (9.7) сходиллся хотя бы при каком-либо одном выборе монотонно возрастающей последовательности (9.5) *).

Необходимость этого критерия вытекает из сказанного выше. Докажем его достаточность. Пусть $f(x) \geq 0$ при всех $x \geq a$ и пусть ряд (9.7) сходится для некоторой монотонно возрастающей последовательности (9.5). Тогда последовательность частных сумм (9.6) этого ряда, в силу неотрицательности $f(x)$, будет монотонно возрастающей (неубывающей) и стремящейся к определенному конечному пределу J . Докажем, что при любом другом выборе последовательности

$$B'_m > a, \quad m = 1, 2, \dots; \quad B'_m \rightarrow +\infty \text{ при } m \rightarrow +\infty \quad (9.5')$$

соответствующий ряд

$$\int_a^{B'_1} f(x) dx + \int_{B_1}^{B'_2} f(x) dx + \dots + \int_{B_m}^{B'_{m+1}} f(x) dx + \dots \quad (9.7')$$

также сходится и его сумма равна J .

*) Ср. с интегральным признаком сходимости числового ряда (вып. 1, гл. 13, § 2, п. 4).

При доказательстве мы будем оперировать с частными суммами рядов (9.7) и (9.7'). Пусть дано $\varepsilon > 0$; тогда найдется такое B_{n_0} , что будет выполняться неравенство

$$J - \varepsilon < \int_a^{B_{n_0}} f(x) dx < J.$$

Возьмем такое m_0 , чтобы при всех $m \geq m_0$ было $B'_m \geq B_{n_0}$. Так как для любого B'_m найдется $B_{n_m} > B'_m$, то при всех $m \geq m_0$, в силу неотрицательности $f(x)$, будет выполняться неравенство

$$J - \varepsilon < \int_a^{B_{n_0}} f(x) dx \leq \int_a^{B'_m} f(x) dx \leq \int_a^{B_{n_m}} f(x) dx \leq J.$$

Следовательно, $\lim_{m \rightarrow +\infty} \int_a^{B'_m} f(x) dx = J$, что и требовалось доказать.

Пример. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} 2^n & \text{при } n \leq x \leq n + \frac{1}{2^{2n}}, \\ 0 & \text{при } n + \frac{1}{2^{2n}} < x < n + 1. \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots$$

Тогда интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_n^{n+1} f(x) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n} = 1$ сходится.

Замечание 2. Этот пример показывает, что из сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ даже в случае неотрицательной функции $f(x)$ не следует, что $f(x) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$.

3. Критерий Коши для несобственных интегралов. Сходимость несобственного интеграла

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B f(x) dx \quad (9.2)$$

означает существование определенного конечного предела у функции $F(B) = \int_a^B f(x) dx$ при $B \rightarrow +\infty$.

Согласно общему критерию Коши (см. вып. 1, гл. 8, § 1, п. 2), $F(B)$ стремится к определенному конечному пределу при $B \rightarrow +\infty$

в том и только том случае, если для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $B(\varepsilon)$, что $|F(B'') - F(B')| < \varepsilon$ при всех B' и $B'' > B(\varepsilon)$.

Подставляя сюда выражение $F(B) = \int_a^B f(x) dx$, получим следующий

Критерий Коши (для интеграла). Для сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовало такое $B(\varepsilon)$, что при всех B' и $B'' > B(\varepsilon)$ выполнялось бы неравенство

$$\left| \int_{B'}^{B''} f(x) dx \right| < \varepsilon, \quad (9.8)$$

т. е. чтобы интеграл

$$\int_{B'}^{B''} f(x) dx \quad (9.8')$$

стремился к нулю при B' и $B'' \rightarrow +\infty$.

В некоторых случаях критерий Коши (9.8) можно применять непосредственно при исследовании на сходимость конкретных интегралов.

Пример. Рассмотрим интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ (полагая его подынтегральную функцию, для непрерывности, равной 1 при $x = 0$). Интегрируя по частям, будем иметь

$$\int_{B'}^{B''} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\cos B'}{B'} - \frac{\cos B''}{B''} - \int_{B'}^{B''} \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \left| \int_{B'}^{B''} \frac{\sin x}{x} dx \right| &\leq \frac{1}{B'} + \frac{1}{B''} + \left| \int_{B'}^{B''} \frac{|\cos x|}{x^2} dx \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{B'} + \frac{1}{B''} + \left| \int_{B'}^{B''} \frac{dx}{x^2} \right| \leq \frac{2}{B'} + \frac{2}{B''} \rightarrow 0 \quad \text{при } B' \text{ и } B'' \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Следовательно, интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ сходится.

Важнее, однако, применение критерия Коши не к исследованию отдельных конкретных интегралов, а к выводу практически более

удобных общих достаточных признаков сходимости интегралов. Переходя к рассмотрению таких признаков, введем сначала понятие абсолютной сходимости интеграла, аналогичное понятию абсолютной сходимости числового ряда.

4. Абсолютная сходимость. Признаки абсолютной сходимости.

Определение 2. Пусть функция $f(x)$ интегрируема в обычном смысле на каждом конечном отрезке *) $a \leq x \leq B$, $a < B < +\infty$. Несобственный интеграл (9.2) называется абсолютно сходящимся, если сходится интеграл

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx. \quad (9.9)$$

Теорема 9.1. Если интеграл (9.2) сходится абсолютно, то он сходится.

Доказательство. Действительно, из сходимости интеграла (9.10) вытекает, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $B(\varepsilon)$, что

$$\left| \int_{B'}^{B''} |f(x)| dx \right| < \varepsilon \text{ при всех } B' \text{ и } B'' > B(\varepsilon). \text{ Но всегда}$$

$$\left| \int_{B'}^{B''} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{B'}^{B''} |f(x)| dx \right|. \quad (9.10)$$

Поэтому будет

$$\left| \int_{B'}^{B''} f(x) dx \right| \leq \left| \int_{B'}^{B''} |f(x)| dx \right| < \varepsilon \text{ при всех } B' \text{ и } B'' > B(\varepsilon),$$

т. е. для интеграла (9.2) выполняется критерий Коши. Следовательно, интеграл (9.2) сходится. Теорема доказана.

Замечание 1. Из сходимости интеграла (9.2) его абсолютная сходимость не вытекает. Например, интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$

сходится (см. п. 3), а интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x} dx$ расходится. Чтобы доказать его расходимость, достаточно, согласно п. 2, доказать рас-

*) Из интегрируемости $f(x)$ в обычном смысле на конечном отрезке следует, как известно, интегрируемость $|f(x)|$ в обычном смысле на этом отрезке.

ходимость числового ряда $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{|\sin x|}{x} dx$, которая легко устанавливается с помощью признака сравнения числовых рядов. Мы имеем

$$\int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \frac{|\sin x|}{x} dx \geq \frac{1}{(n+1)\pi} \left| \int_{\pi n}^{\pi(n+1)} \sin x dx \right| = \frac{2}{(n+1)\pi} \quad \text{при } n \geq 1,$$

а ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{\pi n} = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ расходится, так как он отличается лишь постоянным множителем $\frac{2}{\pi}$ от гармонического ряда *).

Замечание 2. Пусть $f(x)$ определена при $a \leq x < +\infty$ и интегрируема на каждом конечном интервале $a \leq x \leq B$. Тогда при любом $a_1 > a$ из абсолютной сходимости интеграла $\int_{a_1}^{+\infty} f(x) dx$

следует абсолютная сходимость интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, так как для сходимости любого из интегралов $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ и $\int_{a_1}^{+\infty} |f(x)| dx$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{B'}^{B''} |f(x)| dx \rightarrow 0 \quad \text{при } B' \text{ и } B'' \rightarrow +\infty.$$

При исследовании абсолютной сходимости несобственных интегралов обычно применяют признаки сравнения для интегралов.

Теорема 9.2. (общий признак сравнения). Если при всех достаточно больших x

$$|f(x)| \leq g(x), \quad (9.11)$$

*) Если интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится, а интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ расходится, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ называется условно сходящимся. Таким интегралам посвящен п. 5.

то из сходимости интеграла

$$\int_a^{+\infty} g(x) dx \quad (9.12)$$

следует абсолютная сходимость интеграла *)

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx. \quad (9.13)$$

Доказательство. В силу выполнения критерия Коши для сходящегося интеграла (9.1) и в силу неравенства (9.11), для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $B(\varepsilon)$, что

$$\left| \int_{B'}^{B''} |f(x)| dx \right| \leq \left| \int_{B'}^{B''} g(x) dx \right| < \varepsilon \quad \text{при всех } B', B'' > B(\varepsilon),$$

т. е. критерий Коши будет выполнен также и для интеграла $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$. Следовательно, интеграл $\int_a^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится, а это и означает абсолютную сходимость интеграла (9.13). Признак доказан.

В примере 3 п. 1 мы установили, что при $a > 0$ и $C > 0$

$$\int_a^{+\infty} \frac{C dx}{x^a} = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B \frac{C dx}{x^a} = \begin{cases} C \frac{a^{1-a}}{a-1} & \text{при } a > 1, \\ +\infty & \text{при } a \leq 1. \end{cases}$$

Отсюда и из общего признака сравнения следует

Теорема 9.3 (частный признак сравнения). Пусть дан несобственный интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ *).

1. Если при всех достаточно больших значениях x , $|f(x)| < \frac{C}{x^a}$, где $C \geq 0$ и $a > 1$, то данный интеграл сходится абсолютно.

2. Если же при всех достаточно больших значениях x функция $f(x) \geq \frac{C}{x^a}$ или если при всех достаточно больших x функция $f(x) \leq -\frac{C}{x^a}$, где $C > 0$ и $a \leq 1$, то этот интеграл расходится.

*) В теоремах 9.2, 9.3, 9.3', 9.3'' и 9.3''' мы предполагаем, что функция $f(x)$ интегрируема в обычном смысле на каждом конечном интервале $a \leq x \leq B$, $a < B < +\infty$.

Доказательство. 1) Полагая в общем признаке сравнения

$$g(x) = \frac{C}{x^a} \text{ и учитывая, что при } a > 1 \text{ интеграл } \int_a^{+\infty} g(x) dx = \\ = C \int_a^{+\infty} \frac{dx}{x^a} = C \frac{a^{1-a}}{a-1} \text{ (при } a > 0 \text{) *} \text{ сходится, получим, что инте-} \\ \text{грал } \int_a^{+\infty} f(x) dx \text{ сходится абсолютно.}$$

2) Пусть $f(x) \geq \frac{C}{x^a}$, где $C > 0$ и $a \leq 1$ при всех $x \geq a_1 > a$.

$$\text{Интегрируя в пределах от } a_1 \text{ до } B, \text{ получим, что } \int_{a_1}^B f(x) dx \geq \\ \geq C \int_{a_1}^B \frac{dx}{x^a} \rightarrow +\infty \text{ при } B \rightarrow +\infty, \text{ так как } a \leq 1, \text{ а следовательно,} \\ \text{интеграл } \int_{a_1}^{+\infty} f(x) dx \text{ расходится. Но тогда расходится и интеграл} \\ \int_a^{+\infty} f(x) dx.$$

Если же $f(x) \leq -\frac{C}{x^a}$ при всех $x \geq a_1 > a > 0$, $C > 0$ и $a \leq 1$, то, полагая $f^*(x) = -f(x)$, получим $f^*(x) \geq \frac{C}{x^a}$ при всех $x \geq a_1 > a > 0$, а следовательно, интеграл $\int_a^{+\infty} f^*(x) dx$ расходится; вместе с ним расходится и интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx = \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B f(x) dx = - \lim_{B \rightarrow +\infty} \int_a^B f^*(x) dx.$$

*) Мы предполагаем, что $a > 0$, так как в противном случае можно заменить a через $a_1 > 0$, потому что из абсолютной сходимости интеграла $\int_{a_1}^{+\infty} f(x) dx$ следует абсолютная сходимость $\int_a^{+\infty} f(x) dx$, а из расходимости $\int_{a_1}^{+\infty} f(x) dx$ — расходимость $\int_a^{+\infty} f(x) dx$.

Замечание 1. Пункт 2 теоремы 9.3 можно сформулировать в следующей эквивалентной форме: *если при всех достаточно больших значениях $x (x \geq a)$ функция $f(x)$ сохраняет знак и $|f(x)| \geq \frac{C}{x^\alpha}$, где $C > 0$, $\alpha \leq 1$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится.*

Замечание 2. Выполнение условия $|f(x)| \geq \frac{C}{x^\alpha}$, $C > 0$, $\alpha \leq 1$, при всех достаточно больших $x \geq a$ является недостаточным для расходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x) dx$. Интеграл может оказаться сходящимся за счет знакопеременности функции. Например, нетрудно показать, что интеграл $\int_1^{+\infty} f(x) dx$ от функции, определяемой соотношением $f(x) = (-1)^{n+1} \frac{1}{x^\alpha}$, $n \leq x < n+1$, $n=1, 2, 3, \dots$, где $0 < \alpha \leq 1$, сходится, хотя $|f(x)| = \frac{1}{x^\alpha}$, где $0 < \alpha \leq 1$.

Очевидно, признак сравнения с функцией $\frac{C}{x^\alpha}$ можно сформулировать иначе:

Теорема 9.3' (модифицированный частный признак сравнения). Пусть подынтегральная функция в интеграле $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ при всех достаточно больших x представима в виде $f(x) = \frac{g(x)}{x^\alpha}$. Тогда: 1) если $g(x)$ по модулю ограничена, а $\alpha > 1$, то этот интеграл сходится абсолютно, 2) если $g(x)$ сохраняет знак и $|g(x)| \geq \text{const} > 0$, а $\alpha < 1$, то этот интеграл расходится.

Иногда оказывается удобной следующая форма признака сравнения с функцией $\frac{C}{x^\alpha}$:

Теорема 9.3'' (частный признак сравнения в предельной форме). Пусть существует предел $\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| x^\alpha = C$. Тогда: 1) если $0 \leq C < +\infty$, $\alpha > 1$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится абсолютно, 2) если же $0 < C \leq +\infty$, $\alpha \leq 1$, а $f(x)$ сохраняет знак при всех достаточно больших x , то этот интеграл расходится.

Доказательство. 1) Если $0 \leq C < +\infty$, то при всех достаточно больших x

$$|f(x)| x^\alpha \leq 2C, \quad \text{т. е.} \quad |f(x)| \leq \frac{2C}{x^\alpha} \quad \text{при} \quad C > 0,$$

и

$$|f(x)| x^\alpha \leq 1, \quad \text{т. е.} \quad |f(x)| \leq \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{при} \quad C = 0,$$

поэтому, в силу теоремы 9.3, интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится абсолютно.

2) Если $0 < C \leq +\infty$, $\alpha \leq 1$, то при всех достаточно больших x

$$|f(x)| x^\alpha > \frac{C}{2}, \quad \text{т. е.} \quad |f(x)| > \frac{C}{2x^\alpha} \quad \text{при} \quad C < +\infty,$$

и

$$|f(x)| x^\alpha > 1, \quad \text{т. е.} \quad |f(x)| > \frac{1}{x^\alpha} \quad \text{при} \quad C = +\infty,$$

поэтому, в силу замечания 1 к теореме 9.3', интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится. Теорема доказана.

Замечание 3. Теорема 9.3'' (частный признак сравнения в предельной форме) охватывает несколько более узкий класс функций, чем теорема 9.3' (частный признак сравнения), поскольку в отличие от теоремы 9.3' теорема 9.3'' предполагает существование конечного или бесконечного предела у $|f(x)| x^\alpha$ при $x \rightarrow +\infty$.

Из теоремы 9.3'' очевидным образом следует

Теорема 9.3''' (частный признак сравнения в терминах порядков величин). Пусть $|f(x)|$ является бесконечно малой величиной порядка $\frac{1}{x^\alpha}$ при $x \rightarrow +\infty$, тогда: 1) если $\alpha > 1$, то интеграл

$\int_a^{+\infty} f(x) dx$ сходится абсолютно, 2), если же $\alpha \leq 1$, а $f(x)$ сохраняет знак при всех достаточно больших x , то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ расходится.

Напомним, что $f(x)$ называется величиной такого же порядка малости, как и $\frac{1}{x^\alpha}$ ($\alpha > 0$) при $x \rightarrow +\infty$, если

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| : \frac{1}{x^\alpha} = \lim_{x \rightarrow +\infty} |f(x)| x^\alpha = C, \quad \text{где} \quad 0 < C < +\infty.$$

Замечание 4. Теорема 9.3''', очевидно, охватывает еще более узкий класс функций, чем теорема 9.3'', так как предполагает существование предела $|f(x)|x^\alpha$ при $x \rightarrow +\infty$, отличного от нуля и бесконечности.

Примеры. 1. Интеграл Пуассона $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$ сходится, в силу теоремы 9.3, так как показательная функция e^{-x^2} убывает быстрее любой отрицательной степени x при $x \rightarrow +\infty$ и, следовательно, при всех достаточно больших x будет

$$e^{-x^2} < \frac{C}{x^2},$$

где $C = \text{const} > 0$ (здесь мы взяли $\alpha = 2$, хотя могли бы взять α равным и любому другому числу > 1). Этот интеграл сходится также и в силу теоремы 9.3', так как

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x^2} = 0 \quad (\alpha = 2).$$

2. Интеграл $\int_1^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$ сходится при всех вещественных значениях p , например, в силу теоремы 9.3'', поскольку при любых таких p

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^{-x} x^{p-1} = 0.$$

3. Рассмотрим интеграл $\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n} dx$ при $n \geq 0$. Мы имеем

$$\frac{x^m}{1+x^n} = \frac{x^m}{x^n} \frac{1}{1+x^{-n}} = \frac{g(x)}{x^{n-m}},$$

где $\frac{1}{2} \leq g(x) \leq 1$ при $x \geq 1$. Следовательно, в силу теоремы 9.3', интеграл сходится при $n-m > 1$ и расходится при $n-m \leq 1$.

Б. Условная сходимость.

Определение 3. Интеграл

$$\int_a^{+\infty} f(x) dx \tag{9.14}$$

называется условно сходящимся, если он сходится, в то время как интеграл

$$\int_a^{+\infty} |f(x)| dx \tag{9.15}$$

расходится.

Сходимость некоторых условно сходящихся интегралов позволяет установить признак Абеля.

Теорема 9.4 (признак Абеля). Пусть $\varphi(x)$ непрерывна, а $g(x)$ непрерывно дифференцируема на полупрямой $a \leq x < +\infty$. Интеграл

$$\int_a^{+\infty} \varphi(x) g(x) dx \quad (9.16)$$

заведомо сходится, если первообразная $\Phi(B) = \int_a^B \varphi(x) dx$ ограничена на полупрямой $a \leq B < +\infty$, а $g(x)$, монотонно убывая, стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$.

Доказательство. Покажем, что при выполнении условий теоремы для интеграла (9.16) выполнен критерий Коши. Интегрируя по частям, получаем

$$\int_{B'}^{B''} \varphi(x) g(x) dx = \Phi(B'') g(B'') - \Phi(B') g(B') - \int_{B'}^{B''} \Phi(x) g'(x) dx.$$

В силу монотонного убывания $g(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, $g'(x) \leq 0$, поэтому к последнему интегралу можно применить обобщенную теорему о среднем; это дает

$$\int_{B'}^{B''} \Phi(x) g'(x) dx = \Phi(\xi) \int_{B'}^{B''} g'(x) dx = \Phi(\xi) [g(B'') - g(B')],$$

где ξ заключено между B' и B'' . Следовательно,

$$\int_{B'}^{B''} \varphi(x) g(x) dx = \Phi(B'') g(B'') - \Phi(B') g(B') - \Phi(\xi) [g(B'') - g(B')],$$

откуда, в силу ограниченности $\Phi(B)$ и стремления к нулю $g(B)$ при $B \rightarrow +\infty$, получаем

$$\int_{B'}^{B''} \varphi(x) g(x) dx \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad B' \text{ и } B'' \rightarrow +\infty.$$

Теорема доказана.

Примеры. 1. Интеграл $\int_{\pi}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\alpha}} dx$, где $\alpha > 0$, сходится, так как, положив $\varphi(x) = \sin x$ и $g(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$, будем иметь

$$|\Phi(x)| = \left| \int_{\pi}^x \varphi(x) dx \right| = \left| \int_{\pi}^x \sin x dx \right| = |\cos \pi - \cos x| \leq 2$$

при $\pi \leq x \leq +\infty$, а $g'(x) = \frac{1}{x^{\alpha}} \rightarrow 0$, монотонно убывая, при $x \rightarrow +\infty$ и $\alpha > 0$.

Замечание. Сходимость этого интеграла можно доказать и не прибегая к признаку Абеля, а применяя критерий Коши и интегрирование по частям, как в конце п. 4.

2. Полагая в интеграле

$$\int_e^{+\infty} \frac{(\ln x) \sin x}{x} dx, \quad \varphi(x) = \sin x, \quad g(x) = \frac{\ln x}{x},$$

замечаем, что он сходится по признаку Абеля.

3. Рассмотрим интеграл Френеля $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$, находящий применение в оптике. Полагая $x^2 = t$, получим

$$\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt.$$

Последний интеграл сходится в силу признака Абеля.

6. Распространение методов вычисления интегралов на случай несобственных интегралов. При вычислении несобственных интегралов можно использовать замену переменных, интегрирование по частям, представление интеграла от суммы нескольких слагаемых в виде суммы интегралов от этих слагаемых, т. е. поступать так, как это делалось в случае собственных интегралов; соответствующие формулы будут иметь силу, если все входящие в них интегралы сходятся.

Поясним на примере смысл последней оговорки. Интеграл

$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + x - 2}$ сходится (например, в силу частного признака сравне-

ния). Разлагая дробь на простейшие (см. вып. 1, гл. 7, § 7), имеем

$$\frac{1}{x^2+x-2} = -\frac{1}{3(x+2)} + \frac{1}{3(x-1)}. \quad (*)$$

Однако интегралы $\int_3^{\infty} \frac{dx}{x+2}$ и $\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x-1}$ очевидным образом расходятся. Поэтому нельзя написать равенство

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = -\frac{1}{3} \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{3} \int_3^{+\infty} \frac{dx}{x-1}.$$

Чтобы воспользоваться разложением (*) для вычисления рассматриваемого интеграла, проинтегрируем (*) от 0 до A и преобразуем после этого правую часть равенства:

$$\int_3^A \frac{dx}{x^2+x-2} = -\frac{1}{3} \int_3^A \frac{dx}{x+2} + \frac{1}{3} \int_3^A \frac{dx}{x-1} = \frac{1}{3} \ln \left[\frac{5}{2} \frac{A-1}{A+2} \right].$$

Переходя к пределу в последнем равенстве при $A \rightarrow +\infty$, получим

$$\int_3^{+\infty} \frac{dx}{x^2+x-2} = \frac{1}{3} \ln \frac{5}{2}.$$

§ 2. Интегралы от неограниченных функций с конечными и бесконечными пределами интегрирования

Остановимся сначала на интегралах с конечными пределами интегрирования. Пусть $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ всюду, кроме, быть может, конечного числа точек. Точку $x_0 \in [a, b]$ мы будем называть *особой* для $f(x)$, если $f(x)$ не ограничена на $[a, b]$ в любой окрестности точки x_0 . Например, для функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases} \quad \text{точка } x = 0 \text{ является особой (рис. 9.2).}$$

Для функции

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} \sin \frac{1}{x} & \text{при } 0 < x \leq 1, \\ 0 & \text{при } x = 0 \end{cases}$$

точка $x=0$ также является особой (рис. 9.3). Заметим, что в этом примере $f(x)$ не стремится к бесконечности при $x \rightarrow 0$, так как в сколь угодно малой окрестности точки $x=0$ эта функция бесконечное число раз обращается в нуль.

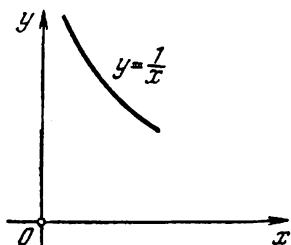


Рис. 9.2.

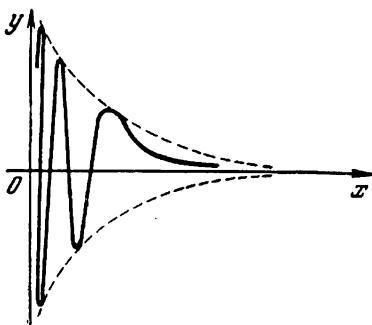


Рис. 9.3.

Определение. Пусть $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$ всюду, кроме, может быть, конечного числа точек. Если $x=b$ является для $f(x)$ особой точкой и если интеграл $\int_a^{b-\mu} f(x) dx$ существует при каждом μ , $0 < \mu < b-a$, то несобственным интегралом $\int_a^b f(x) dx$ называется предел

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\mu \rightarrow +0} \int_a^{b-\mu} f(x) dx. \quad (9.17)$$

Если этот предел существует и конечен, то интеграл (9.17) называется сходящимся, в противном случае — расходящимся.

Аналогично определяется несобственный интеграл в случаях, когда особой точкой для $f(x)$ является:

левый конец $x=a$ интервала интегрирования $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow +0} \int_{a+\lambda}^b f(x) dx, \quad (9.18)$$

или оба конца $x=a$ и $x=b$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow +0 \\ \mu \rightarrow +0}} \int_{a+\lambda}^{b-\mu} f(x) dx, \quad (9.19)$$

или внутренняя точка $x=c$, $a < c < b$:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow +0 \\ \mu \rightarrow +0}} \left[\int_a^{c-\mu} f(x) dx + \int_{c+\lambda}^b f(x) dx \right]. \quad (9.20)$$

Остановимся теперь на условиях сходимости несобственных интегралов от неограниченных функций. Применяя критерий Коши к функции

$$F(\mu) = \int_a^{b-\mu} f(x) dx \quad (9.21)$$

при $\mu \rightarrow +0$, получим

Критерий Коши (для несобственного интеграла (9.17)). Для сходимости интеграла (9.17) необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$\left| \int_{b-\mu'}^{b-\mu''} f(x) dx \right| < \varepsilon \quad \text{при всех} \quad 0 < \mu', \mu'' < \delta(\varepsilon).$$

Аналогично может быть сформулирован критерий Коши для интегралов (9.18) — (9.20). Можно доказать, что для сходимости интегралов (9.19) и (9.20) необходимо и достаточно, чтобы сходились интегралы $\int_a^c f(x) dx$ и $\int_c^b f(x) dx$, причем в случае (9.19) точку $x=c$, $a < c < b$, можно выбирать произвольно. В случае сходимости для интегралов (9.19) и (9.20) имеет место равенство

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx. \quad (9.22)$$

Аналогично можно поступить в случае любого конечного числа особых точек на интервале интегрирования $[a, b]$; интервал $[a, b]$ следует так разбить на конечное число интервалов, чтобы на каждом частичном интервале функция $f(x)$ имела особую точку лишь в одном из его концов.

Таким образом, общий случай сводится к интегралам вида (9.17) и (9.18); но интеграл вида (9.18) простой заменой x на $-x$ сводится к интегралу вида (9.17). Поэтому мы ограничимся в основном рассмотрении интегралов вида (9.17).

Абсолютная и условная сходимости определяются, как и в случае интегралов с бесконечными пределами интегрирования. С помощью критерия Коши можно доказать, что из абсолютной сходимости следует сходимость, а также установить следующий

Общий признак сравнения. Если b — единственная особая точка $f(x)$ на $[a, b]$ и $|f(x)| \leq g(x)$ при всех $x \in [a, b)$, достаточно близких к b , то из сходимости интеграла $\int_a^b g(x) dx$ вытекает абсолютная сходимость интеграла $\int_a^b f(x) dx$.

Остановимся теперь на частном признаке сравнения с функцией $\frac{C}{(b-x)^\alpha}$, аналогичном теореме 9.3.

Частный признак сравнения. Пусть функция $f(x)$, заданная на $[a, b]$, имеет особую точку в конце $x=b$ и интеграл $\int_a^{b-\mu} f(x) dx$ существует при каждом μ , $0 < \mu < b-a$. Тогда:

1) если при всех $x \in [a, b)$, достаточно близких к b ,

$$|f(x)| \leq \frac{C}{(b-x)^\alpha}, \quad \text{где } 0 \leq C < +\infty, \quad \alpha < 1, \quad (9.23)$$

то интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится абсолютно;

2) если же при всех $x \in [a, b)$, достаточно близких к b ,

$$f(x) > \frac{C}{(b-x)^\alpha}, \quad \text{где } C > 0, \quad \alpha \geq 1, \quad (9.24)$$

либо при всех $x \in [a, b)$, достаточно близких к b ,

$$f(x) < -\frac{C}{(b-x)^\alpha}, \quad \text{где } C > 0, \quad \alpha \geq 1, \quad (9.24')$$

то этот интеграл расходится.

Доказательство. 1) В этом случае имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{b-\mu'}^{b-\mu''} f(x) dx \right| &\leq \left| \int_{b-\mu'}^{b-\mu''} |f(x)| dx \right| \leq C \left| \int_{b-\mu'}^{b-\mu''} \frac{dx}{(b-x)^\alpha} \right| = \\ &= C \left| \frac{(\mu')^{1-\alpha} - (\mu'')^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\alpha < 1$ и $\mu', \mu'' \rightarrow 0$. Следовательно, интегралы $\int_a^b f(x) dx$ и $\int_a^b |f(x)| dx$ сходятся.

2) Предполагая $f(x)$ неотрицательной*), будем иметь

$$f(x) > \frac{C}{(b-x)^{\alpha}} \quad \text{при } a < a_1 \leq x < b,$$

$$\int_{a_1}^{b-\mu} f(x) dx > \int_{a_1}^{b-\mu} \frac{C}{(b-x)^{\alpha}} dx \rightarrow +\infty \quad \text{при } \mu \rightarrow 0+0 \text{ и } \alpha \geq 1,$$

так как

$$\int_{a_1}^{b-\mu} \frac{C}{(b-x)^{\alpha}} dx = \begin{cases} C \left[\frac{\mu^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{(b-a_1)^{1-\alpha}}{1-\alpha} \right] & \text{при } \alpha > 1, \\ C \ln \frac{b-a_1}{\mu} & \text{при } \alpha = 1. \end{cases}$$

Следовательно, интеграл $\int_{a_1}^b f(x) dx$, а с ним и интеграл $\int_a^b f(x) dx$, расходится.

Замечание. Пункт 2) доказанного признака можно сформулировать в следующей эквивалентной форме: если при всех x , достаточно близких к b , $|f(x)| \geq \frac{C}{x^{\alpha}}$, где $C > 0$, $\alpha \geq 1$, причем

$f(x)$ при указанных x сохраняет знак, то интеграл $\int_a^b f(x) dx$ расходится.

Простой перефразировкой из доказанного частного признака сравнения получается

Модифицированный частный признак сравнения. Пусть функция $f(x)$, интегрируемая в обычном смысле на каждом отрезке $a \leq x \leq b-\lambda$, где $0 < \lambda < b-a$, может быть представлена в окрестности b (т. е. при $b-\lambda < x < b$) в виде $f(x) = \frac{g(x)}{(b-x)^{\alpha}}$. Тогда:

1) если $g(x)$ ограничена по модулю, а $\alpha < 1$, то интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится абсолютно;

) Если $f(x)$ неположительна, то делаем замену $f^(x) = -f(x)$, где $f^*(x)$ уже неотрицательна; из расходимости $\int_a^b f^*(x) dx$ вытекает расхо-

мость интеграла $\int_a^b f(x) dx = - \int_a^b f^*(x) dx$.

2) если $g(x)$ сохраняет знак в окрестности b , $|g(x)| \geq \geq \text{const} > 0$, а $\alpha \geq 1$, то этот интеграл $\int_a^b f(x) dx$ расходится.

Аналогично формулируется модифицированный частный признак сравнения в случае, когда единственной особой точкой $f(x)$ на $[a, b]$ является конец $x = a$.

Нетрудно также сформулировать и доказать частный признак сравнения в предельной форме, что мы предоставляем сделать читателю.

Напомним, что $|f(x)|$ называется величиной такого же порядка, что и $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$ при $x \rightarrow b-0$, если

$$\lim_{x \rightarrow b-0} |f(x)| : \frac{1}{(b-x)^\alpha} = \lim_{x \rightarrow b-0} (b-x)^\alpha |f(x)| = C, \text{ где } 0 < C < +\infty,$$

и формулируем

Частный признак сравнения в терминах порядков величин. Пусть $|f(x)|$ при $x \rightarrow b-0$ *) является бесконечно большой величиной порядка $\frac{1}{(b-x)^\alpha}$ ($\alpha > 0$); тогда:

1) если $\alpha < 1$, то интеграл $\int_a^b f(x) dx$ сходится абсолютно;

2) если же $\alpha \geq 1$, а $f(x)$ сохраняет знак в окрестности $x=b$ (т. е. при $b-\lambda < x < b$, $0 < \lambda < b-a$), то этот интеграл расходится.

Аналогично формулируется этот признак, когда $f(x)$ имеет особую точку не в конце $x=b$, а в конце $x=a$ отрезка $[a, b]$.

Примеры. 1. Интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ сходится, так как

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{1}{(1-x)^{1/2}} \frac{1}{(1+x+x^2)^{1/2}} = \frac{1}{(1-x)^{1/2}} g(x),$$

где $g(x) = \frac{1}{(1+x+x^2)^{1/2}}$ — ограниченная функция. Здесь $a=0$, $b=1$, $\alpha = \frac{1}{2}$.

*) Мы предполагаем функцию $f(x)$ интегрируемой в обычном смысле на каждом отрезке $a \leq x \leq b-\lambda$, $0 < \lambda < b-a$.

2. Рассмотрим интеграл $\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx$. Мы имеем

$$f(x) = \frac{\sin x}{x^p} = \frac{1}{x^{p-1}} \frac{\sin x}{x} = \frac{1}{x^{p-1}} g(x), \text{ где } g(x) = \frac{\sin x}{x} - \text{функ-}$$

ция, ограниченная по модулю, причем $\sin x \leq g(x) \leq 1$. Здесь $a=0$, $b=1$, $\alpha=p-1$. Поэтому при $\alpha=p-1 < 1$ интеграл сходится, а при $\alpha=p-1 \geq 1$ он расходится. Таким образом, интеграл

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^p} dx \text{ сходится при } p < 2 \text{ и расходится при } p \geq 2.$$

Признак Абеля для несобственных интегралов с конечными пределами интегрирования мы предоставляем сформулировать и доказать читателю по аналогии с признаком Абеля для несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования (см. п. 5 § 1).

Наконец, по поводу замены переменных, интегрирования по частям и разложения на слагаемые несобственных интегралов с конечными пределами интегрирования можно сказать то же самое, что говорилось об этих операциях для несобственных интегралов с бесконечными пределами интегрирования (см. п. 6 § 1).

Остановимся теперь кратко на интегралах с бесконечными пределами интегрирования от неограниченных функций с конечным числом особых точек. Если несобственный интеграл берется по полу-прямой $a \leq x < +\infty$ ($-\infty < x \leq a$) или по всей оси $-\infty < x < +\infty$, то, разбивая область интегрирования одной или двумя точками деления на один конечный интервал, содержащий все особые точки подынтегральной функции $f(x)$, и на один или два полубесконечных интервала без особых точек $f(x)$, сводят общий несобственный интеграл к рассмотренным выше частным случаям. При этом исходный интеграл полагают равным по определению сумме интегралов по частичным интервалам, на которые разбита первоначальная область интегрирования.

Исходный интеграл называют сходящимся тогда и только тогда, когда все интегралы по упомянутым частичным интервалам сходятся, и расходящимся, если хоть один из них расходится.

Можно показать, что это определение сходимости исходного интеграла и численная величина интеграла в случае его сходимости не зависят от выбора точек деления.

Примеры. 3. $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$. Если $p-1 < 0$, то подынтегральная функция имеет особую точку $x=0$. Поэтому разбиваем интервал интегрирования точкой $x=1$ на два: $[0, 1]$ и $(1, +\infty)$;

мы имеем

$$\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx = \int_0^1 e^{-x} x^{p-1} dx + \int_1^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx.$$

Интеграл $\int_0^1 e^{-x} x^{p-1} dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{x^{1-p}} dx$ сходится при $1 - p < 1$, т. е.

при $p > 0$, и расходится при $p \leq 0$. Интеграл $\int_1^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$, как было установлено ранее (п. 4 § 1), сходится при всех значениях p , $-\infty < p < +\infty$, следовательно, интеграл *) $\int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$ сходится при всех $p > 0$ и расходится при всех $p \leq 0$.

4. $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$. Сделаем замену переменных: $\ln \frac{1}{x} = t$, $\frac{1}{x} = e^t$, $x = e^{-t}$, $dx = -e^{-t} dt$. Тогда

$$\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx = - \int_{+\infty}^0 e^{-pt} t^q e^{-t} dt = \int_0^{+\infty} t^q e^{-(p+1)t} dt.$$

При $q < 0$ подынтегральная функция имеет особую точку $x = 0$. Поэтому разбиваем интеграл на два:

$$\int_0^{+\infty} t^q e^{-(p+1)t} dt = \int_0^1 e^{-(p+1)t} t^q dt + \int_1^{+\infty} e^{-(p+1)t} t^q dt.$$

Интеграл $\int_0^1 e^{-(p+1)t} t^q dt = \int_0^1 \frac{e^{-(p+1)t}}{t^{-q}} dt$ сходится только при $-q < 1$, т. е. только при $q > -1$, независимо от значений, принимаемых p .

Интеграл $\int_1^{+\infty} e^{-(p+1)t} t^q dt$ при $q > -1$ сходится только при $p+1 > 0$,

*) Этот интеграл называется гамма-функцией Эйлера и обозначается символом $\Gamma(p)$, т. е. $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^{p-1} dx$.

т. е. только при $p > -1$. Следовательно, интеграл $\int_0^1 x^p \ln^q \frac{1}{x} dx$ сходится только при $p > -1$ и $q > -1$.

5. $\int_e^{+\infty} \frac{dx}{x^p (\ln x)^q (\ln \ln x)^r}$. Делаем замену $\ln \ln x = t$. Получаем,

что при $p > 1$ интеграл сходится только при $r < 1$ и любых q ; при $p = 1$ он сходится только при $r < 1$ и $q > 0$; если $p < 1$, то он расходится при любых r и q .

§ 3. Главное значение расходящегося интеграла

Пусть $f(x)$ интегрируема в обычном смысле на каждом конечном отрезке оси x . Если не существует $\lim_{\substack{A \rightarrow -\infty \\ B \rightarrow +\infty}} \int_A^B f(x) dx$ при незави-

симом стремлении A и B к их пределам, т. е. интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

расходится, но существует $\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx$, то этот предел назы-

вают *главным значением расходящегося интеграла* $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$

и пишут

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx \quad (9.25)$$

(V.p. — начальные буквы французских слов «Valeur principal», означающих «главное значение»).

Пусть теперь $f(x)$ имеет единственную особую точку c , $a < c < b$, на отрезке $[a, b]$ и пусть интеграл

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0+0 \\ \mu \rightarrow 0+0}} \left\{ \int_a^{c-\lambda} f(x) dx + \int_{c+\mu}^b f(x) dx \right\}$$

расходится, т. е. предел фигурной скобки при независимом стремлении λ и μ к $0+0$ не существует. Тогда, если предел этой скобки существует при $\lambda = \mu \rightarrow 0+0$, то его называют *главным*

значением расходящегося интеграла $\int_a^b f(x) dx$ и пишут

$$\text{V.p.} \int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \left\{ \int_a^{c-\lambda} f(x) dx + \int_{c+\lambda}^b f(x) dx \right\}. \quad (9.26)$$

Примеры. 1. Если $f(x)$ — нечетная функция*), то всегда существует

$$\text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_{-A}^A f(x) dx = 0.$$

2. Если $f(x)$ — четная функция*), то

$$\int_{-A}^A f(x) dx = 2 \int_0^A f(x) dx = 2 \int_{-A}^0 f(x) dx.$$

Поэтому, если интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ от четной функции расходится,

т. е. хоть один из интегралов $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ и $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ расходится,

то и главное значение $\text{V.p.} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ также не существует.

3. Применяя главные значения расходящихся интегралов, вычислим интеграл

$$2J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx, \quad \text{где } m \text{ и } n \text{ — целые, } 0 < m < n, \quad (2.27)$$

играющий важную роль в теории эйлеровых интегралов (см. § 3 гл. 10). Так как

$$\left| \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} \right| < \frac{C}{x^2} \quad \text{при } x \rightarrow \pm\infty, \quad \text{где } C = \text{const},$$

и так как все корни уравнения $1+x^{2n}=0$, $x_k = e^{i \frac{(2k+1)\pi}{2n}} = a_k + ib_k$, $k=0, 1, \dots, 2n-1$, не являются вещественными, то подынтегральная функция не имеет особых точек на оси x

*) См. п. 8 § 1 гл. 11.

и интеграл сходится. Разлагая дробь $\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}$ на простейшие и интегрируя в пределах от $-l$ до l , получим *)

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx &= \sum_{k=0}^{2n-1} A_k \int_{-l}^l \frac{dx}{x-x_k} = \sum_{k=0}^{2n-1} A_k \int_{-l}^l \frac{dx}{(x-a_k)-ib_k} = \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} A_k \left\{ \int_{-l}^l \frac{x-a_k}{(x-a_k)^2+b_k^2} dx + i \int_{-l}^l \frac{b_k}{(x-a_k)^2+b_k^2} dx \right\} = \\ &= \sum_{k=0}^{2n-1} A_k \left\{ \ln \frac{(l-a_k)^2+b_k^2}{(l+a_k)^2+b_k^2} + i \left[\operatorname{arctg} \frac{l-a_k}{b_k} + \operatorname{arctg} \frac{l+a_k}{b_k} \right] \right\}, \end{aligned}$$

где $A_k = \frac{x_k^{2m}}{2nx_k^{2n-1}} = -\frac{1}{2n} x_k^{2m+1}$, так как $x_k^{2n} = -1$. Переходя к пределу при $l \rightarrow +\infty$, находим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = \sum_{k=0}^{2n-1} \pm \pi i A_k,$$

где знак плюс соответствует $b_k > 0$, а минус соответствует $b_k < 0$. Интегралы

$$A_k \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x-x_k} = A_k \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x-a_k) dx}{(x-a_k)^2+b_k^2} + i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b_k dx}{(x-a_k)^2+b_k^2} \right\}$$

являются, очевидно, расходящимися, а числа $\pm \pi i A_k = \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{-l}^l \frac{dx}{x-x_k}$

являются их главными значениями.

Заметив, что $b_k > 0$ при $k=0, 1, \dots, n-1$ и $b_k < 0$ при $k=n, n+1, \dots, 2n-1$, можно написать

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = \pi i \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} A_k - \sum_{k=n}^{2n-1} A_k \right\}, \quad (A)$$

*) Интеграл от комплексной функции $u(x) + iv(x)$ вещественной переменной x , где $u(x)$ и $v(x)$ вещественны, по определению равен

$$\int [u(x) + iv(x)] dx = \int u(x) dx + i \int v(x) dx.$$

где

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-1} A_k &= -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} x_k^{2m-1} = -\frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{n-1} e^{i \frac{(2m+1)(2k+1)}{2n} \pi} = \\ &= -\frac{1}{2n} \frac{e^{i \frac{(2m+1)}{2n} \pi} - e^{i \frac{(2m+1)(2n+1)}{2n} \pi}}{1 - e^{i 2 \frac{2m+1}{2n} \pi}} = -\frac{1}{n} \frac{e^{i \frac{2m+1}{2n} \pi}}{1 - e^{i 2 \frac{2m+1}{2n} \pi}}, \quad (\text{Б}) \end{aligned}$$

так как $e^{i(2m+1)\pi} = -1$. Далее, полагая $k = k' + n$, получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=n}^{2n-1} A_k &= -\frac{1}{2n} \sum_{k=n}^{2n-1} x_k^{2m+1} = -\frac{1}{2n} \sum_{k=n}^{2n-1} e^{i \frac{(2m+1)(2k+1)}{2n} \pi} = \\ &= -\frac{1}{2n} \sum_{k'=0}^{n-1} e^{i \frac{(2m+1)(2k'+1)}{2n} \pi} e^{i(2m+1)\pi} = \frac{1}{2n} \sum_{k'=0}^{n-1} e^{i \frac{(2m+1)(2k'+1)}{2n} \pi}, \quad (\text{В}) \end{aligned}$$

а эта сумма лишь знаком отличается от суммы (Б).

Из (А) с помощью (Б) и (В) получаем

$$2J = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = -\frac{2\pi i}{n} \frac{e^{i \frac{2m+1}{2n} \pi}}{1 - e^{i 2 \frac{2m+1}{2n} \pi}} = \frac{\pi}{n} \frac{1}{\sin \frac{2m+1}{2n} \pi}.$$

В силу четности подынтегральной функции (см. сноску на стр. 384), отсюда находим, что

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = \frac{\pi}{2n} \frac{1}{\sin \frac{2m+1}{2n} \pi}. \quad (2.27')$$

4. Интеграл

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{x-c} &= \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0+0 \\ \mu \rightarrow 0+0}} \left\{ \int_a^{c-\lambda} \frac{dx}{x-c} + \int_{c+\mu}^b \frac{dx}{x-c} \right\} = \\ &= \ln \frac{b-c}{c-a} + \lim_{\substack{\lambda \rightarrow 0+0 \\ \mu \rightarrow 0+0}} \ln \frac{\lambda}{\mu}, \end{aligned}$$

где $a < c < b$, расходится. Однако если при переходе к пределу считать, что $\lambda = \mu$, то мы получим, что данный интеграл имеет главное значение:

$$\text{V.p.} \int_a^b \frac{dx}{x-c} = \ln \frac{b-c}{c-a}.$$

§ 4. Несобственные кратные интегралы

Сначала мы рассмотрим случай, когда подынтегральная функция не ограничена, а область интегрирования ограничена, а затем случай, когда область интегрирования не ограничена. Все рассуждения мы будем вести для двойных интегралов; тройные и N -кратные интегралы рассматриваются аналогично.

1. Интеграл от неограниченной функции по ограниченной области. Пусть в ограниченной области Ω на плоскости xu задана функция $f(M) = f(x, y)$, неограниченная в окрестности точки $M_0(x_0, y_0) \in \bar{\Omega}$, и пусть, какова бы ни была область ω_δ , содержащая внутри себя точку M_0 , в области $\Omega - \omega_\delta$ (заштрихованной на

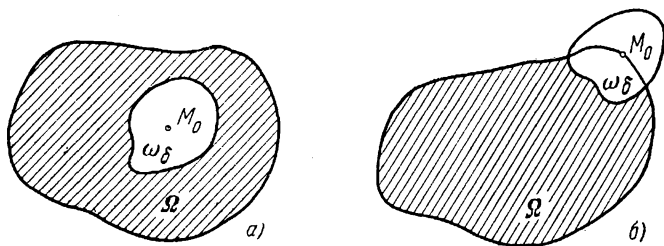


Рис. 9.4.

рис. 9.4, а и б) функция $f(M) = f(x, y)$ ограничена и интегрируема в обычном смысле, т. е. интеграл $\int\limits_{\Omega - \omega_\delta} f(M) d\omega$ существует как

предел интегральной суммы (см. определение 1, § 2, гл. 1)*). Индексом δ обозначен диаметр области ω_δ . При $\delta \rightarrow 0$ область ω_δ стягивается к точке M_0 .

Определение 1. Несобственным интегралом от функции $f(M) = f(x, y)$ по области Ω называется предел

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int\limits_{\Omega - \omega_\delta} f(M) d\omega = \int\limits_{\Omega} f(M) d\omega. \quad (9.28)$$

*) Области Ω и ω_δ , как и все другие, рассматриваемые в этом параграфе, предполагаем квадрируемыми; символом $\bar{\Omega}$ обозначается замкнутая область, т. е. область Ω с присоединенной к ней границей. Точка M_0 может лежать внутри Ω или на границе, но она обязана лежать внутри ω_δ ; под $\Omega - \omega_\delta$ понимается множество всех точек, принадлежащих Ω и не принадлежащих ω_δ если Ω и ω_δ квадрируемы, то $\Omega - \omega_\delta$ квадрируема.

Если этот предел существует, конечен и не зависит от способа стягивания ω_δ к точке M_0 , то несобственный интеграл (9.28) называется сходящимся; в противном случае он называется расходящимся.

Мы говорим, что при $\delta \rightarrow 0$ интеграл $\int_{\Omega - \omega_\delta} f(M) d\omega$ стремится к определенному конечному пределу J , не зависящему от способа стягивания области ω_δ к точке M_0 , если, какова бы ни была последовательность областей

$$\omega_{\delta_1}, \omega_{\delta_2}, \dots, \omega_{\delta_n}, \dots, \quad (9.29)$$

каждая из которых содержит точку M_0 внутри себя и диаметры которых удовлетворяют условию

$$\delta_n \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty^*), \quad (9.30)$$

соответствующая последовательность чисел

$$\int_{\Omega - \omega_{\delta_1}} f(M) d\omega, \int_{\Omega - \omega_{\delta_2}} f(M) d\omega, \dots, \int_{\Omega - \omega_{\delta_n}} f(M) d\omega, \dots \quad (9.31)$$

сходится к одному и тому же пределу J , не зависящему от выбора последовательности (9.29).

Замечание 1. В то время как для однократного интеграла (т. е. при $N=1$) в качестве $\Omega - \delta_n$ брались интервалы $[a, b - \lambda]$ (см. определение и формулу (9.17)), т. е. обязательно связанные области, при $N \geq 2$ области $\Omega - \omega_{\delta_n}$ и ω_{δ_n} не предполагаются связными.

Определение 2. Пусть точка M_0 лежит внутри Ω . Если интеграл (9.28) расходится, но последовательность (9.31) стремится к одному и тому же пределу каждый раз, когда в качестве (9.29) берется стягивающаяся последовательность кругов с центром в M_0 , то этот предел называется главным значением расходящегося интеграла (9.28)**).

Главное значение расходящегося двойного (и тройного) интеграла находит применение в математической физике.

Замечание 2. Если точка M_0 лежит внутри Ω , то исследование на сходимость интеграла $\int_{\Omega} f(M) d\omega$ можно заменить иссле-

*) Здесь не предполагается, что последовательность (9.29) стягивается монотонно, т. е. что $\omega_{\delta_1} \supset \omega_{\delta_2} \supset \dots \supset \omega_{\delta_n} \supset \dots$; предполагается только выполнение условия (9.30).

**) При определении главного значения расходящегося N -кратного интеграла вместо стягивающихся последовательностей кругов берутся стягивающиеся последовательности N -мерных шаров.

дованием на сходимость интеграла $\int_{\Omega'} \int f(M) d\omega$ по любой под- области $\Omega' \subset \Omega$, содержащей внутри себя точку M_0 (ср. с замечанием на стр. 359, § 1). В том случае, когда особая точка M_0 принадлежит границе Ω , в качестве Ω' можно взять подобласть, являющуюся пересечением с областью Ω какой угодно области Ω^* , содержащей M_0 внутри себя.

Замечание 3. Случай, когда $f(M)$ имеет произвольное конечное число особых точек, принадлежащих области Ω или ее границе, сводится к случаю, рассмотренному в определении 1, с помощью надлежащего разбиения области Ω на части, аналогично тому, как это делалось для однократных несобственных интегралов.

2. Интегралы от неотрицательных функций. Интегралы от неотрицательных функций мы рассмотрим в первую очередь, поскольку их исследование проще и сами они могут быть использованы при исследовании интегралов от переменных функций.

Теорема 9.5. Пусть подынтегральная функция $f(M) = f(x, y)$ в интеграле (9.28) является неотрицательной и пусть в качестве стягивающейся последовательности (9.29) взята какая-либо монотонно стягивающаяся последовательность кругов с центрами в точке M_0 , т. е. такая, что

$$K_{\delta'_1} \supset K_{\delta'_2} \supset \dots \supset K_{\delta'_n} \supset \dots, \quad \delta'_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty. \quad (9.29')$$

Тогда для сходимости интеграла (9.28) необходимо и достаточно, чтобы соответствующая последовательность чисел

$$\int_{\Omega - K_{\delta'_1}} \int f(M) d\omega, \quad \int_{\Omega - K_{\delta'_2}} \int f(M) d\omega, \dots, \quad \int_{\Omega - K_{\delta'_n}} \int f(M) d\omega, \dots \quad (9.31')$$

была ограниченной.

Доказательство. Необходимость условия вытекает непосредственно из определения сходимости интеграла (9.28): если интеграл (9.28) сходится, то последовательность (9.31') сходится и, следовательно, она ограничена.

Достаточность. Пусть последовательность (9.31') ограничена. Так как последовательность (9.29') является монотонно стягивающейся, то последовательность областей интегрирования у интегралов (9.31') является монотонно расширяющейся, т. е. имеют место включения

$$\Omega - K_{\delta'_1} \subset \Omega - K_{\delta'_2} \subset \dots \subset \Omega - K_{\delta'_n} \subset \dots$$

Тогда, в силу неотрицательности подынтегральной функции $f(M) = f(x, y)$, последовательность чисел (9.31') будет неубывающей.

Но, в силу ограниченности, она будет сходиться к определенному конечному пределу J :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega - K_{\delta'_n}} \int f(M) d\omega = J, \quad (9.32)$$

причем $\int_{\Omega - K_{\delta'_n}} \int f(M) d\omega \leq J$. Для завершения доказательства теоремы

нужно установить, что и при любом другом выборе стягивающейся последовательности областей (9.29) соответствующая последовательность чисел (9.31) будет сходиться к тому же пределу J . Чтобы это установить, заметим, что при любом достаточно большом n для области ω_{δ_n} можно найти такие круги $K_{\delta'_p}$ и $K_{\delta'_q}$ из последовательности (9.29'), чтобы имело место включение

$$K_{\delta'_p} \supset \omega_{\delta_n} \supset K_{\delta'_q} \quad (9.33)$$

и чтобы радиусы δ'_p и δ'_q этих кругов стремились к нулю при $\delta_n \rightarrow 0$. Из включения (9.33) вытекает включение

$$\Omega - K_{\delta'_p} \subset \Omega - \omega_{\delta_n} \subset \Omega - K_{\delta'_q}, \quad (9.34)$$

из которого, в силу неотрицательности функции, вытекает неравенство

$$\int_{\Omega - K_{\delta'_p}} \int f(M) d\omega \leq \int_{\Omega - \omega_{\delta_n}} \int f(M) d\omega \leq \int_{\Omega - K_{\delta'_q}} \int f(M) d\omega; \quad (9.35)$$

но

$$\lim_{\delta'_p \rightarrow 0} \int_{\Omega - K_{\delta'_p}} \int f(M) d\omega = \lim_{\delta'_q \rightarrow 0} \int_{\Omega - K_{\delta'_q}} \int f(M) d\omega = J,$$

следовательно, из (9.35) вытекает, что

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega - \omega_{\delta_n}} \int f(M) d\omega = J,$$

что и требовалось доказать.

Из теоремы 9.5 непосредственно следует более общая

Теорема 9.6. Пусть подынтегральная функция $f(M) = f(x, y)$ в интеграле (9.28) является неотрицательной и пусть в качестве (9.29) взята произвольная стягивающаяся последовательность областей (см. сноску на стр. 388). Тогда для

сходимости интеграла (9.28) необходимо и достаточно, чтобы соответствующая последовательность чисел (9.31) была ограниченной.

Доказательство. Необходимость устанавливается так же, как в доказательстве предыдущей теоремы. Для доказательства достаточности возьмем какую-либо монотонно стягивающуюся последовательность кругов (9.29') и докажем, что соответствующая последовательность чисел (9.31') будет ограниченной, если ограничена последовательность (9.31). А тогда по теореме 9.5 интеграл (9.28) будет сходящимся. Ограниченность последовательности чисел (9.31') устанавливается следующим образом: пусть

$$\int_{\Omega - \omega_{\delta_m}} f(M) d\omega \leq C = \text{const} < +\infty \quad (9.36)$$

при всех $m = 1, 2, 3, \dots$. Так как $\delta_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow +\infty$, то, каково бы ни было n , найдется такое m , что будет иметь место включение

$$K_{\delta_n}' \supset \omega_{\delta_m}, \quad (9.37)$$

из которого следует включение

$$\Omega - K_{\delta_n}' \subset \Omega - \omega_{\delta_m}. \quad (9.38)$$

Поэтому, в силу неотрицательности $f(M) = f(x, y)$, будет выполняться неравенство

$$\int_{\Omega - K_{\delta_n}'} f(M) d\omega \leq \int_{\Omega - \omega_{\delta_m}} f(M) d\omega. \quad (9.39)$$

Сопоставляя его с (9.36), получаем, что при всех n выполняется неравенство

$$\int_{\Omega - K_{\delta_n}'} f(M) d\omega \leq C = \text{const} < +\infty, \quad (9.40)$$

что и требовалось доказать.

Пример. Докажем, что интеграл

$$\int_{\Omega} \int \frac{C}{r^\alpha} dx dy, \text{ где } C = \text{const}, r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad (9.41)$$

по ограниченной области Ω , содержащей внутри себя точку $M_0 \equiv (x_0, y_0)$, сходится при $\alpha < 2$ и расходится при $\alpha \geq 2$.

В соответствии с замечанием 1 в конце п. 1 интеграл (9.41) по области Ω можно заменить интегралом по какой-либо подобласти Ω' , содержащей внутри себя точку M_0 . В качестве такой подобласти возьмем круг K_R с центром в точке M_0 и достаточно малым радиусом R и исследуем интеграл

$$\int_{K_R} \int \frac{C}{r^\alpha} dx dy, \quad C > 0, \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}, \quad \alpha = \text{const.} \quad (9.42)$$

Для этого возьмем какую-либо монотонно стягивающуюся последовательность кругов

$$K_R \supset K_{\delta_1} \supset K_{\delta_n} \supset \dots \ni M_0, \quad \text{где } \delta_n \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty, \quad (9.43)$$

и рассмотрим интеграл

$$\int_{K_R - K_{\delta_n}} \int \frac{C}{r^\alpha} dx dy. \quad (9.44)$$

Переходя к полярным координатам, получаем

$$\begin{aligned} \int_{K_R - K_{\delta_n}} \int \frac{C}{r^\alpha} dx dy &= \int_{K_R - K_{\delta_n}} \int \frac{C}{r^\alpha} r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{\delta_n}^R \frac{C}{r^\alpha} r dr = \\ &= 2\pi C \int_{\delta_n}^R r^{1-\alpha} dr = \begin{cases} 2\pi C \left[\frac{r^{2-\alpha}}{2-\alpha} \right]_{r=\delta_n}^{r=R} & \text{при } \alpha \neq 2, \\ 2\pi C [\ln r]_{r=\delta_n}^{r=R} & \text{при } \alpha = 2. \end{cases} \end{aligned} \quad (9.45)$$

Если в (9.45) перейти к пределу при $\delta_n \rightarrow 0$, то мы получим, что интеграл (9.40) при $\alpha < 2$ остается ограниченным, а при $\alpha \geq 2$ он становится неограниченным. Следовательно, интеграл (9.42), а вместе с ним и интеграл (9.41), сходится при $\alpha < 2$ и расходится при $\alpha \geq 2$.

Аналогично в случае любого числа N независимых переменных x_1, x_2, \dots, x_N N -кратный интеграл

$$\begin{aligned} \int \int \dots \int_{\Omega} \frac{C}{r^\alpha} dx_1 \dots dx_N, \quad C > 0, \\ r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_N - x_N^0)^2} \end{aligned} \quad (9.46)$$

сходится при $\alpha < N$ и расходится при $\alpha \geq N$, если точка $M_0 = (x_1^0, \dots, x_N^0)$ лежит внутри N -мерной области Ω . Таким обра-

зом, значение $\alpha = N$, равное размерности пространства, является критическим, оно отделяет значения α ($\alpha < N$), при которых интеграл (9.46) сходится, от значений α ($\alpha \geq N$), при которых этот интеграл расходится, причем значение $\alpha = N$ приводит к расходимости интеграла.

3. Абсолютная сходимость. Пусть функция $f(M)$, заданная в области Ω , имеет единственную особую точку M_0 , принадлежащую области Ω или ее границе, и, какова бы ни была область ω , содержащая внутри себя M_0 . $f(M)$ интегрируема в обычном смысле в области $\Omega - \omega$.

Определение 3. Интеграл $\int_{\Omega} f(M) d\omega$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_{\Omega} |f(M)| d\omega$.

Теорема 9.7. Если интеграл $\int_{\Omega} f(M) d\omega$ сходится абсолютно, то он сходится.

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 9.7, отметим некоторые общие свойства сходящихся несобственных интегралов. В силу теоремы о пределе суммы и теоремы о выносе постоянного множителя за знак предела, имеем:

1) если интегралы $\int_{\Omega} f_1(M) d\omega$ и $\int_{\Omega} f_2(M) d\omega$ сходятся, то сходятся и интегралы $\int_{\Omega} [f_1(M) \pm f_2(M)] d\omega$, причем имеет место равенство

$$\int_{\Omega} [f_1(M) \pm f_2(M)] d\omega = \int_{\Omega} f_1(M) d\omega \pm \int_{\Omega} f_2(M) d\omega;$$

2) если интеграл $\int_{\Omega} f(M) d\omega$ сходится, то при $C = \text{const}$ интеграл $\int_{\Omega} Cf(M) d\omega$ также сходится и

$$\int_{\Omega} Cf(M) d\omega = C \int_{\Omega} f(M) d\omega.$$

Перейдем теперь к доказательству теоремы 9.7. Представим подынтегральную функцию $f(M)$ в виде разности двух неотрицательных функций

$$f(M) = |f(M)| - [|f(M)| - f(M)] = f_1(M) - f_2(M), \quad (9.47)$$

где

$$f_1(M) = |f(M)| \quad \text{и} \quad f_2(M) = |f(M)| - f(M).$$

Интеграл $\int_{\Omega} \int f_1(M) d\omega = \int_{\Omega} \int |f(M)| d\omega$ сходится по условию.

Так как

$$f_2(M) = |f(M)| - f(M) \leq 2|f(M)|,$$

а интеграл

$$\int_{\Omega} \int 2|f(M)| d\omega = 2 \int_{\Omega} \int |f(M)| d\omega$$

сходится по условию доказываемой теоремы, то, в силу теоремы 9.6, какова бы ни была стягивающаяся последовательность (9.29), соответствующая ей последовательность интегралов $\int_{\Omega - \omega_{\delta_n}} \int 2|f(M)| d\omega$

ограничена. Поэтому, в силу очевидного неравенства

$$\int_{\Omega - \omega_{\delta_n}} \int f_2(M) d\omega \leq \int_{\Omega - \omega_{\delta_n}} \int 2|f(M)| d\omega,$$

последовательность $\int_{\Omega - \omega_{\delta_n}} \int f_2(M) d\omega$ также ограничена. Следова-

тельно, по теореме 9.6 интеграл $\int_{\Omega} \int f_2(M) d\omega$ сходится. Но тогда,

в силу (9.47), будет сходиться и интеграл $\int_{\Omega} \int f(M) d\omega$, причем

будет выполняться равенство

$$\int_{\Omega} \int f(M) d\omega = \int_{\Omega} \int f_1(M) d\omega - \int_{\Omega} \int f_2(M) d\omega, \quad (9.48)$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Для N -кратного несобственного интеграла при $N \geq 2$ справедлива и обратная теорема (см. п. 5), т. е. сходимость и абсолютная сходимость эквивалентны.

4. Признаки абсолютной сходимости.

Теорема 9.8 (общий признак сравнения). Пусть всюду в области Ω выполняется неравенство

$$0 \leq |f(M)| \leq g(M), \quad (9.49)$$

причем $f(M)$ и $g(M)$ имеют единственную особую точку M_0 , принадлежащую области Ω или ее границе. Тогда:

1) если $\int_{\Omega} \int g(M) d\omega$ сходится, то и $\int_{\Omega} \int f(M) d\omega$ сходится абсолютно;

2) если $\int_{\Omega} \int f(M) d\omega$ расходится, то и $\int_{\Omega} \int g(M) d\omega$ расходится.

Доказательство. Возьмем какую-либо стягивающуюся последовательность областей (9.29). В силу неравенства (9.49), будем иметь

$$\int_{\Omega - \omega_{\delta_n}} \int |f(M)| d\omega \leq \int_{\Omega - \omega_{\delta_n}} \int g(M) d\omega. \quad (9.50)$$

1) Если $\int_{\Omega} \int g(M) d\omega$ сходится, то последовательность $\left\{ \int_{\Omega - \omega_{\delta_n}} \int g(M) d\omega \right\}$ остается ограниченной, но тогда, в силу неравенства (9.50), последовательность $\left\{ \int_{\Omega - \omega_{\delta_n}} \int |f(M)| d\omega \right\}$ также ограничена, а следовательно, по теореме 9.6 интеграл $\int_{\Omega} \int |f(M)| d\omega$ сходится.

2) Если интеграл $\int_{\Omega} \int f(M) d\omega$ расходится, то расходится также и интеграл $\int_{\Omega} \int |f(M)| d\omega$; действительно, если бы последний интеграл сходил, то сходил бы по теореме 9.7 также и интеграл $\int_{\Omega} \int f(M) d\omega$. Из расходимости интеграла $\int_{\Omega} \int |f(M)| d\omega$ вытекает, в силу теоремы 9.6, что при любом выборе стягивающейся последовательности (9.29) последовательность $\int_{\Omega - \omega_{\delta_n}} \int |f(M)| d\omega$ не ограничена; но тогда, в силу неравенства (9.50), не ограничена также последовательность $\int_{\Omega - \omega_{\delta_n}} \int g(M) d\omega$, а следовательно, интеграл $\int_{\Omega} \int g(M) d\omega$ расходится, что и требовалось доказать.

Теорема 9.9 (частный признак сравнения). Если для функции, заданной в Ω и имеющей единственную особую точку

$M_0(x_0, y_0)$, принадлежащую области Ω или ее границе, выполняется неравенство

$$|f(M)| = |f(x, y)| < \frac{C}{r^\alpha}, \quad \text{где } C = \text{const} > 0, \quad (9.51)$$

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

при $\alpha < 2$, то интеграл $\int_{\Omega} f(M) d\omega$ сходится и притом абсолютно.

Доказательство. В силу (9.51) и в силу сходимости интеграла (9.41), при $\alpha < 2$ интеграл $\int_{\Omega} |f(M)| d\omega$ будет сходящимся по теореме 9.8, что и требовалось доказать.

Замечание. В случае несобственного интеграла по N -мерной области Ω

$$\overbrace{\int \int \dots \int_{\Omega}}^{N \text{ раз}} f(x_1, \dots, x_N) dx_1 \dots dx_N$$

от функции $f(M) = f(x_1, \dots, x_N)$, имеющей единственную особую точку $M_0 = (x_1^0, \dots, x_N^0)$ в области Ω или на ее границе, в частном признаке абсолютной сходимости (теорема 9.9) следует брать $r = \sqrt{(x_1 - x_1^0)^2 + \dots + (x_N - x_N^0)^2}$ и $\alpha < N$.

Пример. Найдём силу притяжения материальной точки $M_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ с единичной массой материальным телом, занимающим объём Ω в пространстве (x, y, z) , если объёмная плотность массы тела равна $\rho(M) = \rho(x, y, z)$.

Найдём проекции силы притяжения на оси x, y, z (см. п. 5 § 2 гл. 2):

$$\left. \begin{aligned} F_x &= \int_{\Omega} \int \int \rho(M) \frac{x - x_0}{r^3} dx dy dz, \\ F_y &= \int_{\Omega} \int \int \rho(M) \frac{y - y_0}{r^3} dx dy dz, \\ F_z &= \int_{\Omega} \int \int \rho(M) \frac{z - z_0}{r^3} dx dy dz, \end{aligned} \right\} \quad (9.52)$$

где

$$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}, \quad M \equiv (x, y, z).$$

В гл. 2 мы ограничились случаем, когда точка $M_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)$ лежит вне тела Ω ; если же M_0 лежит внутри тела Ω , то инте-

гралы (9.52) становятся, вообще говоря, несобственными. Пусть плотность $\rho(M) = \rho(x, y, z)$ ограничена в Ω , т. е. $\rho(M) \leq \rho_0 = \text{const}$ при всех значениях $M \in \Omega$. Тогда

$$\left| \rho(M) \frac{x - x_0}{r^3} \right| \leq \rho_0 \left| \frac{1}{r^2} \frac{x - x_0}{r} \right| \leq \frac{\rho_0}{r^2}, \quad \text{ибо} \quad \left| \frac{x - x_0}{r} \right| \leq 1.$$

Так как $\alpha = 2 < N = 3$, то, в силу частного признака сравнения, первый из интегралов (9.52) сходится абсолютно. Аналогично устанавливается абсолютная сходимость двух других интегралов (9.52).

Для N -кратных несобственных интегралов при $N \geq 2$, в отличие от однократных, имеет место тот замечательный факт, что из обычной сходимости интеграла вытекает его абсолютная сходимость, т. е. справедлива теорема, обратная теореме 9.7.

5. Эквивалентность сходимости и абсолютной сходимости. При $N \geq 2$ несобственный интеграл от $f(M)$ сходится тогда и только тогда, когда сходится интеграл от $|f(M)|$. Это вытекает из теоремы 9.7 и следующей теоремы.

Теорема 9.10. Если интеграл $\overbrace{\int \int \dots \int_{\Omega}}^{N \text{ раз}} f(M) dx_1 \dots dx_N$ сходится и $N \geq 2$, то интеграл $\overbrace{\int \int \dots \int_{\Omega}}^N |f(M)| dx_1 \dots dx_N$ также сходится.

Доказательство. Для упрощения записи доказательство будем вести для случая $N = 2$. Пусть особая точка M_0 функции $f(M) = f(x, y)$ лежит внутри области Ω на плоскости *). Пусть интеграл $\int \int_{\Omega} f(M) d\omega$ сходится;

предположим, что интеграл $\int \int_{\Omega} |f(M)| d\omega$ расходится. Тогда, взяв какую угодно стягивающуюся последовательность концентрических кругов $\{K_n\}$

$$\Omega \supset K_1 \supset K_2 \supset \dots \supset K_n \supset \dots \ni M_0 \quad *) \quad (9.53)$$

с центром в точке M_0 , в силу неотрицательности $|f(M)|$, получим

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int \int_{\Omega - K_n} |f(M)| d\omega = +\infty. \quad (9.54)$$

Но тогда последовательность (9.53) можно выбрать так, чтобы выполнялись неравенства

$$\int \int_{K_n - K_{n+1}} |f(M)| d\omega \geq 2 \int \int_{\Omega - K_n} |f(M)| d\omega + 2n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.55)$$

*) Если M_0 лежит на границе Ω , то вместо кругов K_n нужно взять их пересечения с Ω , т. е. их части, лежащие в Ω .

Введем функции

$$f_+(M) = \frac{1}{2} [|f(M)| + f(M)], \quad f_-(M) = \frac{1}{2} [|f(M)| - f(M)]. \quad (9.56)$$

Очевидно, что $f_+(M) \geq 0$, $f_-(M) \geq 0$ и

$$f(M) = f_+(M) - f_-(M), \quad |f(M)| = f_+(M) + f_-(M). \quad (9.57)$$

В силу (9.57), имеем

$$\int_{K_n - K_{n+1}} \int |f(M)| d\omega = \int_{K_n - K_{n+1}} \int f_+(M) d\omega + \int_{K_n - K_{n+1}} \int f_-(M) d\omega. \quad (9.58)$$

Последовательность (9.53) можно считать выбранной так, что

$$\int_{K_n - K_{n+1}} \int f_+(M) d\omega \geq \int_{K_n - K_{n+1}} \int f_-(M) d\omega. \quad (9.59)$$

(В противном случае можно перейти к подпоследовательности последовательности (9.53) и, если потребуется, к замене $f(M)$ на $-f(M)$.) Тогда из (9.58) и (9.55) вытекает, что

$$\int_{K_n - K_{n+1}} \int f_+(M) d\omega > \int_{\Omega - K_n} \int |f(M)| d\omega + n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.60)$$

Если разбить кольцо $K_n - K_{n+1}$ на достаточно малые квадратуемые ячейки, то нижняя интегральная сумма $\sum_{K_n - K_{n+1}} m_i^{f_+} \Delta\omega_i$ *) для $\int_{K_n - K_{n+1}} \int f_+(M) d\omega$ на этом кольце будет, в силу (9.60), удовлетворять неравенству

$$\sum_{K_n - K_{n+1}} m_i^{f_+} \Delta\omega_i > \int_{\Omega - K_n} \int |f(M)| d\omega + n, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.61)$$

На всех этих ячейках $m_i^{f_+} \geq 0$, так как $f_+ \geq 0$ всюду. Не нарушая неравенства (9.61), отбросим из суммы $\sum_{K_n - K_{n+1}} m_i^{f_+} \Delta\omega_i$ все слагаемые, для кото-

рых $m_i^{f_+} = 0$. Если обозначить через G_n область, составленную из ячеек, соответствующих оставшимся слагаемым, то, очевидно, на этой области $f(M) = f_+(M)$ и

$$\begin{aligned} \int_{G_n} \int f(M) d\omega &= \int_{G_n} \int f_+(M) d\omega \geq \sum_{G_n} m_i^{f_+} \Delta\omega_i > \\ &> \int_{\Omega - K_n} \int |f(M)| d\omega + n, \quad n = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (9.62)$$

*) Здесь $m_i^{f_+}$ означает точную нижнюю грань $f_+(M)$ на ячейке $\Delta\omega_i$.

Далее имеем

$$\int_{\Omega - K_n} \int f(M) d\omega \geq - \int_{\Omega - K_n} \int |f(M)| d\omega, \quad n = 1, 2, \dots \quad (9.63)$$

Складывая (9.62) и (9.63), получим

$$\int_{H_n} \int f(M) d\omega > n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (9.64)$$

где $H_n = (\Omega - K_n) + G_n$, причем если обозначить через ω_n разность $\Omega - H_n$, то, очевидно, диаметр $\omega_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$. Следовательно, из (9.64) вытекает расходимость интеграла $\int_{\Omega} \int f(M) d\omega$, что противоречит условию. Итак,

предположение, что интеграл $\int_{\Omega} \int |f(M)| d\omega$ расходится, приводит к противоречию; следовательно, он сходится. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Если в определении N -кратного несобственного интеграла при $N \geq 2$ области $\Omega - \omega_{\delta_n}$ считать связными, то теорема 9.10 сохранит свою силу. Действительно, область $H_n = (\Omega - K_n) + G_n$ в доказательстве теоремы 9.10 можно сделать связной, сохранив неравенство (9.64); для этого достаточно соединить связные куски, составляющие H_n , квадратурыми полосками с достаточно малой суммарной площадью. Возможность построения таких полосок становится очевидной, если разбиение кольца $K_n - K_{n+1}$ на квадратуемые ячейки для образования интегральной суммы $\sum_{K_n - K_{n+1}} m_i^f + \Delta\omega_i$ осуществлять с помощью лучей, выходящих из центра M_0

этого кольца, и концентрических окружностей с центром в M_0 .

В противоположность этому, если в случае однократного несобственного интеграла $\int_a^b f(x) dx$ вместо последовательностей интервалов $[a, b - \lambda]$, входящих в определение (см. § 2, соотношение (9.17)), брать исчерпывающие последовательности произвольных «разрывных» областей, то класс функций, интегрируемых в несобственном смысле, сузится; интегрируемыми в несобственном смысле функциями окажутся лишь абсолютно интегрируемые в несобственном смысле функции. (Абсолютно интегрируемые в несобственном смысле функции в обоих определениях, очевидно, одинаковы.)

6. Несобственные интегралы с неограниченной областью интегрирования. Подынтегральные функции которых ограничены в любой ограниченной подобласти, исследуются совершенно аналогично. Сформулируем для примера определение несобственного интеграла и достаточный признак сходимости.

Определение 4. Пусть дана неограниченная область Ω . Расширяющаяся последовательность ограниченных подобластей

$$\Omega_1, \Omega_2, \dots, \Omega_n, \dots \quad (9.65)$$

называется *исчерпывающей*, если, каково бы ни было $R > 0$, все точки области Ω , принадлежащие кругу радиуса R с центром в начале координат, будут принадлежать всем Ω_n , начиная с достаточно большого n .

Определение 5. Пусть в неограниченной области Ω задана функция $f(M)$, интегрируемая в обычном смысле по любой ограниченной подобласти. Если при любом выборе исчерпывающей последовательности (9.65) соответствующая последовательность чисел

$$\int \int_{\Omega_1} f(M) d\omega, \int \int_{\Omega_2} f(M) d\omega, \dots, \int \int_{\Omega_n} f(M) d\omega, \dots$$

сходится к одному и тому же конечному пределу J , то интеграл $\int \int_{\Omega} f(M) d\omega$ называется *сходящимся*; в противном случае интеграл называется *расходящимся*.

Достаточный признак сходимости. Если $f(M) = f(x, y)$ удовлетворяет требованиям, сформулированным в предыдущем определении, и неравенству

$$|f(M)| \leq \frac{C}{r^\alpha}, \text{ где } C = \text{const} > 0,$$

$$\alpha = \text{const} > 2, \quad r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2},$$

причем $M_0 = (x_0, y_0)$ — какая-нибудь фиксированная точка, то интеграл $\int \int_{\Omega} f(M) d\omega$ сходится.

Заметим, что общие теоремы, аналогичные 9.5, 9.6, 9.7, 9.8, 9.10, верны и для несобственных интегралов с неограниченными областями интегрирования.

7. Методы вычисления несобственных кратных интегралов. Сведение сходящегося несобственного двойного интеграла к повторному осуществляется так же, как и в случае собственного двойного интеграла: 1) для неотрицательной (неположительной) подынтегральной функции — при условии сходимости повторного интеграла от этой функции, 2) для знакопеременной подынтегральной функции — при условии сходимости повторного интеграла от ее модуля *).

Замена переменных в сходящемся несобственном N -кратном интеграле осуществляется по тем же правилам, что и в случае собственного N -кратного интеграла.

*) Аналогично обстоит дело в случае N -кратного несобственного интеграла при $N \geq 3$.

Оставляя в стороне доказательства общих утверждений, ограничимся примером, в котором используются сведения несобственного двойного интеграла к повторному и замена переменных в несобственном двойном интеграле.

Пусть требуется вычислить интеграл $J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$. Его сходимость устанавливается обычным образом. Так как при изменении обозначения переменного интегрирования величина определенного интеграла не меняется, то $J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy$. Поэтому

$$\begin{aligned} J^2 &= \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{+\infty} \left(e^{-x^2} \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy \right) dx = \\ &= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dy, \end{aligned}$$

причем повторный интеграл сходится. Двойной интеграл

$$\int_0^{+\infty} dx \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dy,$$

очевидно, также сходится, в силу достаточного признака сходимости. Следовательно,

$$J^2 = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

Переходя к полярным координатам, получаем

$$J^2 = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{2} \int_0^{+\infty} e^{-r^2} r dr = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Этот прием вычисления данного интеграла предложен Пуассоном.

ГЛАВА 10

ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

В математике и математической физике весьма эффективным аналитическим аппаратом являются интегралы, зависящие от параметра; таковы, например, эйлеровы интегралы (см. § 3), интегралы типа потенциала (см. вып. 4) и т. п.

Эта глава посвящена изучению свойств интегралов, зависящих от параметра.

§ 1. Собственные и простейшие несобственные интегралы, зависящие от параметра

1. Собственные интегралы, зависящие от параметра. Пусть функция $u = f(x, y)$, заданная в прямоугольнике Π : $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, интегрируема по x на отрезке $a \leq x \leq b$ при каждом значении y из отрезка $c \leq y \leq d$. Тогда интеграл

$$J(y) = \int_a^b f(x, y) dx \quad (10.1)$$

является функцией параметра y , определенной на отрезке $c \leq y \leq d$. Займемся изучением свойств интегралов вида (10.1).

Теорема 10.1 (о непрерывной зависимости интеграла от параметра). Если функция $f(x, y)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике Π : $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, то интеграл

$J(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ является непрерывной функцией параметра y на отрезке $c \leq y \leq d$.

Доказательство. Из непрерывности функции $f(x, y)$ в замкнутом прямоугольнике Π следует ее равномерная непрерывность. Это значит, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, не зависящее от расположения точек (x', y') и (x'', y'') в прямоугольнике Π , что при выполнении неравенств

$$|x' - x''| < \delta(\varepsilon) \quad \text{и} \quad |y' - y''| < \delta(\varepsilon) \quad (10.2)$$

выполняется также неравенство

$$|f(x', y') - f(x'', y'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \quad (10.3)$$

В частности, полагая $x' = x'' = x$, получим, что для любых y' и y'' из отрезка $c \leq y \leq d$, удовлетворяющих неравенству

$$|y' - y''| < \delta(\varepsilon), \quad (10.2')$$

и всех x из отрезка $a \leq x \leq b$ будет выполняться неравенство

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}. \quad (10.3')$$

Поэтому при любых y' и y'' из отрезка $c \leq y \leq d$, удовлетворяющих неравенству (10.2'), будет выполняться неравенство

$$\begin{aligned} |J(y') - J(y'')| &= \left| \int_a^b [f(x, y') - f(x, y'')] dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f(x, y') - f(x, y'')| dx \leq \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon, \end{aligned}$$

а это означает равномерную непрерывность $J(y)$ на отрезке $c \leq y \leq d$. Теорема доказана.

Следствие. При условиях теоремы 10.1 функция $F(u, v, y) = \int_u^v f(x, y) dx$ непрерывна в замкнутом параллелепипеде Π^* :

$$a \leq u \leq b, \quad a \leq v \leq b, \quad c \leq y \leq d.$$

Доказательство. В силу непрерывности функции $f(x, y)$ в замкнутом прямоугольнике Π , найдется такая константа C , $0 < C < +\infty$, что $|f(x, y)| < C$ всюду в Π . Поэтому при любых (u', v', y') и (u'', v'', y'') из Π^* выполняется неравенство

$$\begin{aligned} |F(u', v', y') - F(u'', v'', y'')| &= \left| \int_{u'}^{v'} f(x, y') dx - \int_{u''}^{v''} f(x, y'') dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{u'}^{v'} [f(x, y') - f(x, y'')] dx \right| + \left| \int_{u'}^{u''} f(x, y'') dx \right| + \\ &+ \left| \int_{v'}^{v''} f(x, y'') dx \right| \leq \left| \int_{u'}^{v'} [f(x, y') - f(x, y'')] dx \right| + \\ &+ C|u'' - u'| + C|v'' - v'|. \quad (10.4) \end{aligned}$$

Пусть точка (u', v', y') фиксирована, а точка $(u'', v'', y'') \rightarrow (u', v', y')$. Тогда первое слагаемое в правой части (10.4) стремится к нулю по теореме 10.1, а второе и третье — очевидным образом, что и требовалось доказать.

Теорема 10.2 (о дифференцировании интеграла по параметру). Если $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны в прямоугольнике Π :

$a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, то интеграл $J(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ является дифференцируемой функцией параметра y на отрезке $c \leq y \leq d$, причем всюду на этом отрезке

$$\frac{dJ}{dy} = \frac{d}{dy} \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b f'_y(x, y) dx. \quad (10.5)$$

Замечание. Формула (10.5) называется формулой дифференцирования интеграла по параметру по правилу Лейбница: *производная интеграла по параметру равна интегралу от производной подынтегральной функции по этому параметру.*

Доказательство. Мы должны доказать, что

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{J(y + \Delta y) - J(y)}{\Delta y} = \int_a^b f'_y(x, y) dx.$$

Для этого докажем, что разность между переменной величиной $\frac{J(y + \Delta y) - J(y)}{\Delta y}$ и ее предполагаемым пределом $\int_a^b f'_y(x, y) dx$ стремится к нулю при $\Delta y \rightarrow 0$. В силу формулы конечных приращений, имеем

$$\begin{aligned} \frac{J(y + \Delta y) - J(y)}{\Delta y} &= \int_a^b \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} dx = \\ &= \int_a^b f'_y(x, y + \theta \Delta y) dx, \end{aligned}$$

где $0 \leq \theta < 1$. Поэтому упомянутая разность равна

$$\begin{aligned} \frac{J(y + \Delta y) - J(y)}{\Delta y} - \int_a^b f'_y(x, y) dx &= \\ &= \int_a^b [f'_y(x, y + \theta \Delta y) - f'_y(x, y)] dx. \end{aligned} \quad (10.6)$$

Оценим ее при достаточно малых значениях $|\Delta y|$. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Так как $f'_y(x, y)$ непрерывна в замкнутом прямоугольнике Π , то она равномерно непрерывна в нем. Следовательно, найдется такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что при $|\Delta y| < \delta(\varepsilon)$ будет

$$|f'_y(x, y + \Delta y) - f'_y(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

при всех $x \in [a, b]$ и любых y и $y + \Delta y$ из отрезка $[c, d]$. Так как $0 < \theta < 1$, то и подавно при всех указанных x, y и $y + \Delta y$ будет

$$|f'_y(x, y + \theta \Delta y) - f'_y(x, y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Следовательно, в силу (10.6),

$$\begin{aligned} \left| \frac{J(y + \Delta y) - J(y)}{\Delta y} - \int_a^b f'_y(x, y) dx \right| &= \\ &= \left| \int_a^b [f'_y(x, y + \theta \Delta y) - f'_y(x, y)] dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f'_y(x, y + \theta \Delta y) - f'_y(x, y)| dx < \frac{\varepsilon}{b-a} (b-a) = \varepsilon \end{aligned}$$

при всех $|\Delta y| < \delta(\varepsilon)$. Теорема доказана.

Теорема 10.3 (о дифференцировании по параметру интеграла с пределами интегрирования, зависящими от параметра). Пусть $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны в прямоугольнике Π : $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, а $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$ дифференцируемы и удовлетворяют условию $a < x_1(y) < b$ ($l = 1, 2$) при $c \leq y \leq d$. Тогда производная интеграла

$$J(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx \quad (10.7)$$

по параметру y существует и равна

$$J'(y) = \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f'_y(x, y) dx + f(x_2(y), y) \frac{dx_2}{dy} - f(x_1(y), y) \frac{dx_1}{dy}. \quad (10.8)$$

Доказательство. Мы имеем

$$J(y) = F(x_1(y), x_2(y), y), \quad (10.9)$$

причем функция $F(u, v, y) = \int_u^v f(x, y) dx$ при $a \leq u \leq b$, $a \leq v \leq b$, $c \leq y \leq d$ имеет непрерывные частные производные:

$$F_u = -f(u, y), \quad F_v = f(v, y), \quad F_y = \int_u^v f'_y(x, y) dx. \quad (10.10)$$

Непрерывность частной производной F_y , существующей по теореме 10.3, имеет место в силу следствия теоремы (10.1). Поскольку функции $x = x_1(y)$ и $x = x_2(y)$ дифференцируемы, то к интегралу (10.7) можно применить правило дифференцирования сложной функции, которое и приведет к равенству (10.8). Теорема доказана.

Теорема 10.4 (об интегрировании интеграла по параметру). Если функция $f(x, y)$ непрерывна в прямоугольнике Π : $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, то

$$\int_c^d J(y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy, \quad (10.11)$$

т. е. для того, чтобы проинтегрировать интеграл $J(y) = \int_a^b f(x, y) dx$ по параметру y , нужно подынтегральную

функцию $f(x, y)$ проинтегрировать по этому параметру y .

Доказательство. Равенство (10.11) является следствием теоремы о сведении двойного интеграла к повторному (см. § 5 гл. 1).

Приведем еще одно доказательство, легко распространяющееся на N -мерный случай (см. § 4). Вместо равенства (10.11) докажем более общее равенство

$$\int_c^d dy \int_a^t f(x, y) dx = \int_a^t dx \int_c^d f(x, y) dy \quad \text{при} \quad a \leq t \leq b. \quad (10.12)$$

Если ввести обозначения

$$\varphi(t) = \int_c^d dy \int_a^t f(x, y) dx, \quad \psi(t) = \int_a^t dx \int_c^d f(x, y) dy, \quad (10.13)$$

то достаточно доказать, что $\varphi'(t) \equiv \psi'(t)$ при $a \leq t \leq b$ и что $\varphi(a) = \psi(a)$, так как тогда, очевидно, будет $\varphi(t) \equiv \psi(t)$ на $[a, b]$.

Равенство $\varphi(a) = \psi(a)$ очевидно, так как $\varphi(a) = 0$ и $\psi(a) = 0$.

Полагая $F(t, y) = \int_a^t f(x, y) dx$, получим $\varphi(t) = \int_c^d F(t, y) dy$, где

$F(t, y)$ непрерывна в прямоугольнике Π^* : $a \leq t \leq b$, $c \leq y \leq d$, в силу следствия теоремы 10.1, а $F'_t(t, y) = f(t, y)$ непрерывна по условию доказываемой теоремы. Следовательно, по теореме 10.2

$$\varphi'(t) = \int_c^d F'_t(t, y) dy = \int_c^d f(t, y) dy. \quad (10.14)$$

Полагая $\xi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$, получим $\psi(t) = \int_a^t \xi(x) dx$. Так как

по теореме 10.1 $\xi(x)$ является непрерывной функцией x на отрезке $a \leq x \leq b$, то по теореме о дифференцировании определенного интеграла по верхнему пределу

$$\psi'(t) = \frac{d}{dt} \int_a^t \xi(x) dx = \xi(t) = \int_c^d f(t, y) dy. \quad (10.15)$$

Сопоставляя (10.14) и (10.15), получаем, что $\varphi'(t) \equiv \psi'(t)$ при $a \leq t \leq b$. Следовательно, в силу равенства $\varphi(a) = \psi(a)$, также $\varphi(t) \equiv \psi(t)$ при $a \leq t \leq b$. В частности, $\varphi(b) = \psi(b)$, т. е. равенство (10.11) выполняется. Что и требовалось доказать.

2. Простейшие несобственные интегралы, зависящие от параметра. Теоремы 10.1, 10.2, 10.4 легко распространяются на несобственные интегралы следующего специального вида:

$$J(y) = \int_a^b f(x, y) g(x) dx, \quad (10.16)$$

где $f(x, y)$ непрерывна, а $g(x)$ — вообще говоря, разрывная функция, но такая, что интеграл $\int_a^b |g(x)| dx$ сходится, причем один или оба предела интегрирования могут быть бесконечными.

Перейдем к точным формулировкам соответствующих обобщенных теорем*).

Теорема 10.1' (обобщенная теорема о непрерывной зависимости интеграла от параметра). Если $f(x, y)$ непрерывна и ограничена при $a \leq x < +\infty$, $c \leq y \leq d$, а интеграл $\int_a^{+\infty} |g(x)| dx$

*) Теоремы 10.1', 10.2', 10.4' находят применение в математической физике и в теории интеграла Фурье.

сходится, то

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) g(x) dx \quad (10.17)$$

является непрерывной функцией y на отрезке $c \leq y \leq d$.

Теорема 10.2' (обобщенная теорема о дифференцировании интеграла по параметру). Если $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны и

ограничены при $a \leq x < +\infty$, $c \leq y \leq d$, а интеграл $\int_a^{+\infty} |g(x)| dx$

сходится, то интеграл (10.17) является дифференцируемой функцией параметра y на отрезке $c \leq y \leq d$, причем всюду на этом отрезке выполняется равенство

$$J'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) g(x) dx. \quad (10.18)$$

Теорема 10.4' (обобщенная теорема об интегрировании интеграла по параметру). При условиях теоремы 10.1 интеграл (9.17) является интегрируемой функцией параметра y на отрезке $c \leq y \leq d$, причем

$$\int_c^d J(y) dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) g(x) dx = \int_a^{+\infty} \left(g(x) \int_c^d f(x, y) dy \right) dx. \quad (10.19)$$

Докажем для примера теорему 10.1'. Пусть $|f(x, y)| < C = \text{const}$ при $a \leq x < +\infty$, $c \leq y \leq d$, а $\int_a^{+\infty} |g(x)| dx < K < +\infty$ и пусть дано $\varepsilon > 0$. В силу сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} |g(x)| dx$, можно взять $l > a$.

столь большим, что будет $2C \int_l^{+\infty} |g(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2}$. Фиксировав такое l и взяв y' и y'' на отрезке $c \leq y \leq d$, представим разность $J(y') - J(y'')$ в виде

$$J(y') - J(y'') = \int_a^l [f(x, y') - f(x, y'')] g(x) dx + \\ + \int_l^{+\infty} [f(x, y') - f(x, y'')] g(x) dx. \quad (10.20)$$

В прямоугольнике $a \leq x \leq l$, $c \leq y \leq d$ функция $f(x, y)$, будучи непрерывной, равномерно непрерывна. Поэтому найдется такое

$\delta = \delta(\epsilon) > 0$, что для любых y' и y'' из отрезка $c \leq y \leq d$, удовлетворяющих неравенству $|y' - y''| < \delta(\epsilon)$, при всех x из отрезка $a \leq x \leq l$ будет выполняться неравенство

$$|f(x, y') - f(x, y'')| < \frac{\epsilon}{2K}.$$

Но тогда из равенства (10.20) получаем неравенство

$$\begin{aligned} |J(y') - J(y'')| &\leq \int_a^l |f(x, y') - f(x, y'')| |g(x)| dx + \\ &+ \int_l^{+\infty} \{ |f(x, y')| - |f(x, y'')| \} |g(x)| dx \leq \\ &\leq \frac{\epsilon}{2K} \int_a^l |g(x)| dx + 2C \int_l^{+\infty} |g(x)| dx \leq \frac{\epsilon}{2K} K + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon \\ &\text{при } |y' - y''| < \delta(\epsilon). \end{aligned}$$

а это означает, что интеграл $J(y)$ является непрерывной функцией на отрезке $c \leq y \leq d$.

Мы предоставляем читателю доказать теоремы 10.2' и 10.4' для интегралов вида (10.17), а также переформулировать и доказать теоремы 10.1', 10.2' и 10.4' для интегралов вида (10.16). Заметим только, что в случае интегралов вида (10.16): 1) ограниченность $f(x, y)$, $f'_y(x, y)$ вытекает из непрерывности $f(x, y)$, $f'_y(x, y)$ в рассматриваемой области $a \leq x \leq b$, $c \leq y \leq d$, 2) отпадает необходимость разбиения интервала интегрирования по x , $a \leq x \leq b$, на части, в отличие от того, как это делалось при доказательстве теоремы 10.1' для интегралов вида (10.17).

Дифференцирование и интегрирование интегралов по параметру широко применяются для вычисления интегралов, зависящих от параметра, а также для вычисления интегралов, не зависящих от параметра, после надлежащего введения параметра.

Пример. Вычислим интеграл

$$J(y) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \frac{\sin xy}{x} dx, \text{ где } a = \text{const} > 0, -A \leq y \leq A. \quad (10.21)$$

Полагая $f(x, y) = \frac{\sin xy}{x}$, $g(x) = e^{-ax}$, получим, что $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны и ограничены в полуполосе $0 \leq x < +\infty$,

$$-A \leq y \leq A, \quad \text{а интеграл} \quad \int_0^{+\infty} |f(x)| dx = \int_0^{+\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}$$

сходится. Поэтому можно применить обобщенную теорему 10.2' для интеграла вида (10.17). Дифференцируя по параметру под знаком интеграла, получим

$$J'(y) = \int_0^{+\infty} e^{-ax} \cos xy \, dx.$$

Выполняя дважды в последнем интеграле интегрирование по частям (по x), найдем

$$J'(y) = \frac{\alpha}{\alpha^2 + y^2}. \quad (10.22)$$

Так как, согласно (10.21), $J(0) = 0$, то, интегрируя (10.22) в пределах от 0 до y , получим

$$J(y) = \int_0^y \frac{\alpha}{\alpha^2 + y^2} \, dy = \operatorname{arctg} \frac{y}{\alpha}.$$

Можно поступать и несколько иначе. Интегрируя (10.22) по y , будем иметь

$$J(y) = \operatorname{arctg} \frac{y}{\alpha} + C.$$

Так как, в силу (10.21), $J(0) = 0$, то, полагая в равенстве, содержащем константу C , $y = 0$, получим, что $C = 0$. При обоих подходах требуется, чтобы было известно значение вычисляемого интеграла при некотором частном значении параметра y .

§ 2. Несобственные интегралы, зависящие от параметра

Пусть функция $u = f(x, y)$ определена при $0 \leq x < +\infty$, $c \leq y \leq d$ и пусть при каждом значении y , $c \leq y \leq d$, интеграл

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) \, dx \quad (10.23)$$

сходится; тогда $J(y)$ является функцией y , определенной на отрезке $[c, d]$. В силу определения несобственного интеграла, имеем

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) \, dx = \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_a^l f(x, y) \, dx. \quad (10.24)$$

Аналогично обстоит дело с интегралами от неограниченных функций. Пусть, например, функция $u = f(x, y)$ определена при $a \leq x < b$, $c \leq y \leq d$, не ограничена при $x \rightarrow b - 0$ и

при каждом значении $y \in [c, d]$ интеграл

$$J^*(y) = \int_a^b f(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \int_a^{b-\lambda} f(x, y) dx \quad (10.25)$$

сходится. Тогда $J^*(y)$ является функцией y , определенной на отрезке $[c, d]$.

1. Понятие равномерной сходимости. В теории несобственных интегралов, зависящих от параметра, важную роль играет понятие равномерной сходимости. При наличии равномерной сходимости с несобственными интегралами, зависящими от параметра, можно обращаться, вообще говоря, как с собственными (см. п. 3 настоящего параграфа). Остановимся сначала на определении равномерной сходимости для интеграла с бесконечным интервалом интегрирования.

Определение 1. Интеграл (10.23) называется равномерно сходящимся по параметру y (относительно параметра y) на отрезке $c \leq y \leq d$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $L = L(\varepsilon)$, что неравенство

$$\left| J(y) - \int_a^l f(x, y) dx \right| = \left| \int_l^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad (10.26)$$

будет выполняться при всех $l > L(\varepsilon)$ сразу для всех $y \in [c, d]$.

Аналогично определяется равномерная сходимость и для интеграла от неограниченной функции.

Определение 2. Интеграл (10.25) называется равномерно сходящимся по параметру y на отрезке $[c, d]$, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что неравенство

$$\left| J^*(y) - \int_a^{b-\lambda} f(x, y) dx \right| = \left| \int_{b-\lambda}^b f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad (10.27)$$

будет выполняться при всех λ , удовлетворяющих неравенству $0 < \lambda < \delta(\varepsilon)$, сразу для всех $y \in [c, d]$.

Примеры. 1. Интеграл $J(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx$ сходится при каждом y на отрезке $0 \leq y \leq 1$, но эта сходимость не является равномерной. Действительно,

$$\int_l^{+\infty} ye^{-xy} dx = \int_{ly}^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-ly}$$

при сколь угодно большом фиксированном $l > 0$ будет $> \frac{1}{2}$ при всех значениях y , достаточно близких к нулю, и, следовательно, при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ не найдется такого $L(\varepsilon)$, чтобы при $l > L(\varepsilon)$ неравенство

$$\left| \int_l^{+\infty} ye^{-xy} dx \right| < \varepsilon = \frac{1}{2}$$

выполнялось сразу для всех y из отрезка $0 \leq y \leq 1$.

Если же отрезок $0 \leq y \leq 1$ заменить отрезком $0 < \delta \leq y \leq 1$, то на нем интеграл $J(y) = \int_0^{+\infty} ye^{-xy} dx$ сходится уже равномерно. Действительно, $\int_l^{+\infty} ye^{-xy} dx = \int_{ly}^{+\infty} e^{-t} dt = e^{-ly} \leq e^{-l\delta}$ при $0 < \delta \leq y \leq 1$; поэтому при $0 < \varepsilon < 1$ и $l > \frac{\ln \frac{1}{\varepsilon}}{\delta}$ неравенство

$$\left| \int_l^{+\infty} ye^{-xy} dx \right| < \varepsilon$$

будет выполнено сразу при всех y из отрезка $0 < \delta \leq y \leq 1$.

2. Интеграл $J(y) = \int_0^1 yx^{y-1} dx$ сходится при каждом y из отрезка $0 \leq y \leq 1$, но эта сходимость не является равномерной. Заметив, что подынтегральная функция становится неограниченной при $x \rightarrow 0+0$, оценим интеграл $\int_0^\lambda yx^{y-1} dx = x^y|_0^\lambda = \lambda^y$. Как бы ни было мало фиксированное $\lambda > 0$, при $y \rightarrow 0+0$ этот интеграл стремится к единице. Поэтому при $\varepsilon = \frac{1}{2}$ не найдется такого $\delta = \delta(\varepsilon)$, чтобы при $0 < \lambda < \delta(\varepsilon)$ неравенство $\left| \int_0^\lambda yx^{y-1} dx \right| < \varepsilon = \frac{1}{2}$ выполнялось сразу для всех y из отрезка $0 \leq y \leq 1$.

Если же отрезок $0 \leq y \leq 1$ заменить отрезком $0 < \delta_0 \leq y \leq 1$, то на нем интеграл $J(y) = \int_0^1 yx^{y-1} dx$ сходится уже равно-

мерно. Действительно, $\int_0^{\lambda} yx^{y-1} dx = \lambda^y \leq \lambda^{\delta_0}$ при $0 < \lambda < 1$ и

$\delta_0 \leq y \leq 1$. Так что, если $0 < \varepsilon < 1$ и $\lambda < \varepsilon^{\frac{1}{\delta_0}}$, то $\left| \int_0^{\lambda} yx^{y-1} dx \right| < \varepsilon$

при всех y из отрезка $\delta_0 \leq y \leq 1$.

2. Сведение несобственного интеграла, зависящего от параметра, к последовательности функций позволяет доказательство основных теорем о таких интегралах свести к простой ссылке на соответствующие теоремы о последовательностях функций.

Если интеграл

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (10.28)$$

сходится при каждом y из отрезка $[c, d]$, то, какова бы ни была последовательность значений $l_1, l_2, \dots, l_k, \dots \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$, где $l_k \geq a$ при $k = 1, 2, \dots$, последовательность функций

$$F_k(y) = \int_a^{l_k} f(x, y) dx, \quad k = 1, 2, \dots, \quad c \leq y \leq d,$$

будет, очевидно, сходиться к $J(y)$ на отрезке $[c, d]$.

Пусть интеграл (10.28) сходится при каждом y из отрезка $[c, d]$; тогда справедлива

Теорема 10.5. Для равномерной сходимости интеграла $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dy$ по параметру y на отрезке $[c, d]$ необходимо и достаточно, чтобы при любом выборе последовательности значений $l_1, l_2, \dots, l_k, \dots \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ последовательность функций

$$F_k(y) = \int_a^{l_k} f(x, y) dx, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (10.29)$$

сходилась к $J(y)$ равномерно на отрезке $c \leq y \leq d$.

Доказательство. Необходимость. Пусть интеграл (10.28) сходится равномерно на отрезке $c \leq y \leq d$ и пусть дано $\varepsilon > 0$. Тогда найдется такое $L(\varepsilon)$, что при всех $l > L(\varepsilon)$ неравенство

$$\left| J(y) - \int_a^l f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

будет выполняться сразу для всех $y \in [c, d]$.

Пусть $l_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ (причем $l_k \geq a$ при $k = 1, 2, \dots$). Тогда найдется такое $N(\varepsilon)$, что при всех $k \geq N(\varepsilon)$ будет $l_k > L(\varepsilon)$, а следовательно, при всех таких k , в силу выбора $L(\varepsilon)$, будет выполняться неравенство

$$|J(y) - F_k(y)| = \left| J(y) - \int_a^{l_k} f(x, y) dx \right| < \varepsilon$$

сразу для всех $y \in [c, d]$, что и означает равномерную на отрезке сходимость последовательности (10.29) к интегралу (10.28).

Достаточность. Если всякая последовательность функций вида (10.29), где $l_k \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$, сходится равномерно к $J(y)$ на отрезке $c \leq y \leq d$, то интеграл (10.28) будет равномерно сходящимся по параметру y на этом отрезке. Действительно, если бы интеграл (10.28), сходящийся по условию при каждом $y \in [c, d]$, сходился неравномерно относительно y на этом отрезке, то существовало бы такое $\varepsilon_0 > 0$, что при сколь угодно большом L нашлись бы такие $l > L$ и $y \in [c, d]$, для которых выполнялось бы неравенство

$$\left| J(y) - \int_a^l f(x, y) dx \right| \geq \varepsilon_0.$$

Тогда, придавая L значения $L = 1, 2, 3, \dots, k, \dots$, мы получили бы последовательности соответствующих значений $l_k > k$ и $y_k \in [c, d]$, для которых было бы

$$\left| J(y_k) - \int_a^{l_k} f(x, y_k) dx \right| = |J(y_k) - F_k(y_k)| \geq \varepsilon_0,$$

т. е. построенная последовательность функций $F_k(y) = \int_a^{l_k} f(x, y) dx$, $k = 1, 2, \dots$, оказалась бы неравномерно сходящейся на отрезке $c \leq y \leq d$, что противоречит условию. Теорема доказана.

Замечание 1. Если функция $f(x, y)$ сохраняет знак, например неотрицательна, то для равномерной сходимости интеграла

$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ по y на отрезке $c \leq y \leq d$ достаточно, чтобы

при каком-либо одном выборе последовательности $l_1, l_2, \dots, l_k, \dots$ соответствующая последовательность функций (10.29) сходилась к $J(y)$ равномерно на отрезке $c \leq y \leq d$.

Действительно, если $f(x, y)$ неотрицательна, то $\int_a^l f(x, y) dx \geqslant \int_a^{l_k} f(x, y) dx$ при всех $l \geqslant l_k$. Поэтому

$$\left| J(y) - \int_a^l f(x, y) dx \right| \leqslant \left| J(y) - \int_a^{l_k} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad \text{при всех } l > l_k$$

сразу для всех $y \in [c, d]$, если только l_k достаточно велико.

З а м е ч а н и е 2. Если функция $f(x, y)$ непрерывна при $0 \leqslant x < +\infty$, $c \leqslant y \leqslant d$ и сохраняет знак, например неотрицательна, а интеграл $J(y) = \int_0^{+\infty} f(x, y) dx$ является непрерывной функцией параметра y на отрезке $[c, d]$, то этот интеграл сходится равномерно на отрезке $[c, d]$.

Действительно, взяв какую-либо возрастающую последовательность $l_1, l_2, \dots, l_k, \dots \rightarrow +\infty$ ($l_k \geqslant a$, $k = 1, 2, \dots$), получим последовательность непрерывных, в силу теоремы (10.1), функций

$$F_k(y) = \int_a^{l_k} f(x, y) dx, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (\text{A})$$

монотонно возрастающую, в силу неотрицательности $f(x, y)$, и сходящуюся к непрерывной функции

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (\text{Б})$$

на отрезке $c \leqslant y \leqslant d$. Но тогда по теореме Дини (см. п. 1 § 2 гл. 8) последовательность (А) будет равномерно сходиться на отрезке $[c, d]$ к своему пределу (Б), а следовательно, в силу замечания 1, интеграл $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ будет равномерно сходящимся на этом отрезке.

З а м е ч а н и е 3. Несобственный интеграл

$$J^*(y) = \int_a^b f(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \int_a^{b-\lambda} f(x, y) dx$$

можно аналогичным образом свести к последовательности функций $F_k^*(y) = \int_a^{b-\lambda_k} f(x, y) dx$, где $\lambda_k \rightarrow 0+0$ при $k \rightarrow +\infty$. Подробности мы опускаем.

3. Свойства равномерно сходящихся интегралов, зависящих от параметра.

Теорема 10.6. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в полосе $a \leq x < +\infty$, $c \leq y \leq d$, а интеграл $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно по параметру y на отрезке $c \leq y \leq d$, то на этом отрезке $J(y)$ является непрерывной функцией.

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность чисел $l_1, l_2, \dots, l_k, \dots \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ ($l_k \geq a$) и рассмотрим последовательность функций

$$F_k(y) = \int_a^{l_k} f(x, y) dx, \quad k = 1, 2, \dots, c \leq y \leq d.$$

По теореме 10.1 о непрерывной зависимости собственного интеграла от параметра, все они непрерывны на отрезке $c \leq y \leq d$. По теореме 10.5 эта последовательность сходится равномерно на отрезке $c \leq y \leq d$ к интегралу $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$, а следовательно $J(y)$,

как предел равномерно сходящейся последовательности непрерывных функций, будет непрерывной функцией. Теорема доказана.

Теорема 10.7 (о дифференцировании несобственного интеграла по параметру). Пусть $f(x, y)$ и $f'_y(x, y)$ непрерывны при $c \leq y \leq d$, $a \leq x < +\infty$ и интеграл

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (10.28)$$

сходится на отрезке $c \leq y \leq d$, а интеграл

$$\int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx \quad (10.30)$$

сходится равномерно на этом отрезке. Тогда $J(y)$ является дифференцируемой функцией y на $[c, d]$, причем

$$\frac{dJ}{dy} = \frac{d}{dy} \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx. \quad (10.31)$$

Доказательство. Возьмем произвольную последовательность чисел $l_1, l_2, \dots, l_k, \dots \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ ($l_k \geq a$) и рассмотрим последовательность функций

$$F_k(y) = \int_a^{l_k} f(x, y) dx, \quad k = 1, 2, \dots, c \leq y \leq d,$$

сходящуюся на отрезке $[c, d]$ к интегралу $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$.

По теореме 10.3 о дифференцировании собственного интеграла по параметру имеем

$$F'_k(y) = \frac{d}{dy} \int_a^{l_k} f(x, y) dx = \int_a^{l_k} f'_y(x, y) dx, \quad k = 1, 2, \dots, c \leq y \leq d,$$

причем все $F'_k(y)$ непрерывны на $[c, d]$; а в силу равномерной сходимости интеграла (10.30), последовательность функций $F'_k(y)$ сходится равномерно на отрезке $[c, d]$ к интегралу (10.30). Итак,

$$F_k(y) \rightarrow J(y) \text{ на } [c, d], \quad F'_k(y) \rightrightarrows \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx \text{ на } [c, d],$$

причем $F'_k(y)$ непрерывны на $[c, d]$. Поэтому, в силу теоремы о дифференцировании функциональной последовательности (см. п. 3 § 2 гл. 8) $J(y)$ будет дифференцируемой функцией на $[c, d]$, и всюду на этом отрезке будет

$$J'(y) = \int_a^{+\infty} f'_y(x, y) dx, \quad (10.31)$$

что и требовалось доказать.

Теорема 10.8 (об интегрировании несобственного интеграла по параметру). Если $f(x, y)$ непрерывна при $a \leq x < +\infty$, $c \leq y \leq d$, а интеграл

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (10.28)$$

сходится равномерно на отрезке $c \leq y \leq d$, то

$$\int_c^d J(y) dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (10.32)$$

Доказательство. Какова бы ни была последовательность чисел $l_1, l_2, \dots, l_k, \dots \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ ($l_k \geq a$),

соответствующая последовательность функций

$$F_k(y) = \int_a^{l_k} f(x, y) dx, \quad k = 1, 2, \dots,$$

по теореме 10.5 о сведении равномерно сходящегося интеграла к последовательности функций сходится к $J(y)$ равномерно на $[c, d]$. По теореме 10.1 о непрерывности собственного интеграла, как функции параметра, все $F_k(y)$, $k = 1, 2, \dots$, непрерывны на отрезке $[c, d]$. Следовательно, по теореме об интегрировании функциональных последовательностей (см. п. 2 § 2 гл. 8)

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_c^d F_k(y) dy = \int_c^d J(y) dy.$$

Но по теореме об интегрировании собственного интеграла по параметру

$$\int_c^d F_k(y) dy = \int_c^d dy \int_a^{l_k} f(x, y) dx = \int_a^{l_k} dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

Следовательно, при любом выборе последовательности $l_1, l_2, \dots, l_k, \dots \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow +\infty$ будет

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \int_a^{l_k} dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d J(y) dy.$$

А это означает, что интеграл $\int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy$ сходится и имеет место равенство

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx.$$

Теорема доказана.

Следствие. Если $f(x, y)$ непрерывна и сохраняет знак при $a \leq x < +\infty$, $c \leq y \leq d$, например неотрицательна, то из непрерывности интеграла

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$$

на отрезке $[c, d]$ следует справедливость равенства (10.32).

Доказательство. Действительно, в силу замечания 2 к теореме 10.5, интеграл $J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ сходится равномерно на

отрезке $c \leq y \leq d$, а следовательно, в силу теоремы 10.8, справедливо равенство (10.32).

Для знакопостоянной функции $f(x, y)$ справедлива следующая

Теорема 10.9 (о перестановке двух несобственных интегрирований). Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна и сохраняет знак при $c \leq y < +\infty$, $a \leq x < +\infty$, а интегралы

$$J(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dx, \quad J^*(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

как функции параметров непрерывны соответственно при $c \leq y < +\infty$ и $a \leq x < +\infty$. Тогда, если хотя бы один из повторных интегралов

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx, \quad \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$$

сходится, то сходится и другой, и они равны между собой, т. е.

$$\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx = \int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy.$$

Доказательство. Будем вести доказательство для случая, когда $f(x, y)$ неотрицательна при $c \leq y < +\infty$, $a \leq x < +\infty$. Допустим, что сходится повторный интеграл

$$J = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx. \quad (10.33)$$

Тогда нужно доказать, что

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_a^l dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy = J = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx. \quad (10.34)$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Докажем, что при всех достаточно больших l разность между переменной величиной $\int_a^l dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ и ее предполагаемым пределом $\int_a^{+\infty} dy \int_c^{+\infty} f(x, y) dx$ будет по абсолютной величине меньше ε .

Прежде чем оценивать эту разность, заметим, что, в силу следствия теоремы 10.8,

$$\int_a^l dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^l f(x, y) dx.$$

Учитывая, что $f(x, y)$ неотрицательна, можно записать

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^l dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy = \int_c^{+\infty} dy \int_l^{+\infty} f(x, y) dx = \\ &= \int_c^{c_1} dy \int_l^{+\infty} f(x, y) dx + \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_l^{+\infty} f(x, y) dx \leq \\ &\leq \int_c^{c_1} dy \int_l^{+\infty} f(x, y) dx + \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx. \end{aligned} \quad (10.35)$$

Оценим сначала второе слагаемое в правой части неравенства (10.35). Поскольку повторный интеграл (10.33) сходится, то найдется такое c_1 , что

$$\int_{c_1}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (10.36)$$

Фиксировав c_1 так, чтобы выполнялось неравенство (10.36), перейдем к оценке первого слагаемого в правой части неравенства (10.35).

По условию интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ является непрерывной на отрезке $c \leq y < +\infty$ функцией и, следовательно, поскольку $f(x, y)$ неотрицательна, сходится равномерно на отрезке $c \leq y \leq c_1$ (по замечанию 2 к теореме 10.5). Поэтому можно найти такое $L(\varepsilon)$, что

при всех $l > L(\varepsilon)$ неравенство $\int_l^{+\infty} f(x, y) dx < \frac{\varepsilon}{2(c_1 - c)}$ будет выполняться сразу для всех $y \in (c, c_1)$. Но тогда при всех $l > L(\varepsilon)$ будет

$$\int_c^{c_1} dy \int_l^{+\infty} f(x, y) dx < \frac{\varepsilon(c_1 - c)}{2(c_1 - c)} = \frac{\varepsilon}{2}. \quad (10.37)$$

Сопоставляя (10.35), (10.36) и (10.37) заключаем, что

$$0 \leq \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^l dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy < \varepsilon$$

при всех $l > L(\varepsilon)$, что и требовалось доказать.

Если на знак функции не наложено никаких ограничений, то имеет место следующая

Теорема 10.9' (о перестановке двух несобственных интегрирований). Пусть функция $f(x, y)$ непрерывна при $a \leq x < +\infty$, $c \leq y < +\infty$, а интегралы

$$\int_c^{+\infty} f(x, y) dy \quad \text{и} \quad \int_a^{+\infty} f(x, y) dx \quad (10.38)$$

сходятся равномерно: первый — на каждом конечном отрезке $a \leq x \leq A$, а второй — на каждом конечном отрезке $c \leq y \leq C$. Тогда если хотя бы один из повторных интегралов

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x, y)| dy, \quad \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx \quad (10.39)$$

сходится, то сходятся и равны между собой повторные интегралы

$$\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy, \quad \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx. \quad (10.40)$$

Доказательство. Пусть сходится, например, второй из интегралов (10.39). Тогда, в силу двукратно примененного признака сравнения — один раз для функций $f(x, y)$ и $|f(x, y)|$, а другой раз для

функций $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ и $\int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$ —, второй из интегралов (10.40) также сходится.

Поэтому нужно доказать только, что

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \int_a^l dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx. \quad (10.41)$$

В силу равномерной сходимости интеграла $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$, при любом конечном $l > a$ будет

$$\int_a^l dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^l f(x, y) dx. \quad (10.42)$$

Оценим разность между переменной величиной $\int_a^l dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ и предполагаемым пределом $\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ в соотношении (10.41).

Воспользовавшись равенством (10.42), мы получим при любом $c_1 > c$, что

$$\begin{aligned} & \left| \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^l dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy \right| = \\ &= \left| \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_c^{+\infty} dy \int_a^l f(x, y) dx \right| = \\ &= \left| \int_c^{+\infty} dy \int_l^{+\infty} f(x, y) dx \right| = \left| \int_c^{c_1} dy \int_l^{+\infty} f(x, y) dx + \right. \\ &+ \left. \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_l^{+\infty} f(x, y) dx \right| \leq \left| \int_c^{c_1} dy \int_l^{+\infty} f(x, y) dx \right| + \\ &+ \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_l^{+\infty} |f(x, y)| dx \leq \left| \int_c^{c_1} dy \int_l^{+\infty} f(x, y) dx \right| + \\ &+ \int_{c_1}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx. \quad (10.43) \end{aligned}$$

Так как повторный интеграл $\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx$ по условию сходится, то при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $c_1 > c$, что будет

$$\int_{c_1}^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x, y)| dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (10.44)$$

Фиксировав $c_1 > c$, выбираем, как в доказательстве теоремы 10.9 (пользуясь равномерной сходимостью $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$), такое $L(\varepsilon)$,

чтобы при всех $l > L(\varepsilon)$ неравенство $\left| \int_l^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2(c_1 - c)}$

выполнялось сразу для всех $y \in [c, c_1]$. Тогда

$$\left| \int_c^{c_1} dy \int_l^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon(c_1 - c)}{2(c_1 - c)} = \frac{\varepsilon}{2} \quad (10.45)$$

при всех $l > L(\varepsilon)$, а следовательно, в силу (10.43), (10.44) и (10.45) при всех таких l будет

$$\left| \int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} f(x, y) dx - \int_a^l dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy \right| < \varepsilon,$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что аналогичные теоремы имеют место также и для зависящих от параметра несобственных интегралов от неограниченных функций.

4. Признаки равномерной сходимости несобственных интегралов, зависящих от параметра.

Критерий Коши. Для равномерной сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} f(x, y) dx$ на отрезке $[c, d]$ необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ существовало такое $L = L(\varepsilon)$, что при всех l' и $l'' > L(\varepsilon)$ неравенство

$$\left| \int_{l'}^{l''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad (10.46)$$

выполнялось бы сразу для всех $y \in [c, d]$.

Доказательство. Это условие является необходимым. Действительно, в случае равномерной сходимости при любом $\varepsilon > 0$ можно найти такое $L = L(\varepsilon)$, что при всех $l' > L(\varepsilon)$ и всех $l'' > L(\varepsilon)$ неравенства

$$\left| \int_{l'}^{\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \left| \int_{l''}^{+\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

будут выполняться сразу для всех $y \in [c, d]$. Поэтому при всех l' и $l'' > L(\varepsilon)$ и сразу для всех $y \in [c, d]$ будет выполняться неравенство

$$\begin{aligned} \left| \int_{l'}^{l''} f(x, y) dx \right| &= \left| \int_{l'}^{\infty} f(x, y) dx - \int_{l''}^{\infty} f(x, y) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{l'}^{+\infty} f(x, y) dx \right| + \left| \int_{l''}^{\infty} f(x, y) dx \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Это условие является достаточным. Действительно, если при всех l' и $l'' > L(\varepsilon)$ неравенство (10.46) выполняется сразу для всех $u \in [c, d]$, то интеграл $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ сходится при каждом $u \in [c, d]$ (см. п. 3 § 1 гл. 9), и, переходя к пределу в (10.46) при $l'' \rightarrow +\infty$, получим, что при всех $l' > L(\varepsilon)$ неравенство

$$\left| \int_{l'}^{+\infty} f(x, u) dx \right| \leq \varepsilon$$

выполняется сразу для всех $u \in [c, d]$. Теорема доказана.

Мажорантный достаточный признак равномерной сходимости (признак Вейерштрасса). Если $|f(x, u)| \leq g(x)$ при $a \leq x < +\infty$, $c \leq u \leq d$, причем интеграл $\int_a^{+\infty} g(x) dx$ сходится,

то интегралы $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ и $\int_a^{+\infty} |f(x, u)| dx$ сходятся равномерно на отрезке $c \leq u \leq d$.

Доказательство. Пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. В силу сходимости интеграла $\int_a^{+\infty} g(x) dx$, найдется такое $L = L(\varepsilon)$, что при всех l' и $l'' > L(\varepsilon)$ будет выполняться неравенство

$$\int_{l'}^{l''} g(x) dx < \varepsilon \quad (l'' > l');$$

но тогда при всех l' и $l'' > L(\varepsilon)$ будут также выполняться и неравенства

$$\left| \int_{l'}^{l''} f(x, u) dx \right| \leq \int_{l'}^{l''} |f(x, u)| dx \leq \int_{l'}^{l''} g(x) dx < \varepsilon \quad (l'' > l')$$

сразу для всех $u \in [c, d]$. Следовательно, в силу критерия Коши, интегралы $\int_a^{+\infty} f(x, u) dx$ и $\int_a^{+\infty} |f(x, u)| dx$ сходятся равномерно на отрезке $c \leq u \leq d$, что и требовалось доказать.

Для несобственных интегралов от неограниченных функций с конечными пределами интегрирования признаки равномерной сходи-

мости формулируются и доказываются аналогичным образом. Сформулируем для примера

Критерий Коши (для равномерно сходящегося интеграла). Для равномерной сходимости интеграла

$$J^*(y) = \int_a^b f(x, y) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0+0} \int_a^{b-\lambda} f(x, y) dx, \quad c \leq y \leq d, \quad (10.47)$$

по параметру y на отрезке $c \leq y \leq d$ необходимо и достаточно, чтобы для каждого $\varepsilon > 0$ существовало такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что при всех λ' и λ'' из интервала $0 < \lambda < \delta(\varepsilon)$ неравенство

$$\left| \int_{b-\lambda'}^{b-\lambda''} f(x, y) dx \right| < \varepsilon \quad (10.48)$$

выполнялось сразу для всех $y \in [c, d]$.

Примеры. 1. Ясно что интеграл $J(p) = \int_0^1 x^{p-1} dx$ сходится при $p > 0$ и расходится при $p \leq 0$. Пусть $p_0 > 0$; при $0 < x < 1$ неравенство $x^{p-1} \leq x^{p_0-1}$ будет выполняться при всех $p \geq p_0$. Поэтому в мажорантном признаке можно взять $f(x, p) = x^{p-1}$, $g(x) = x^{p_0-1}$, и, в силу сходимости интеграла

$$\int_0^1 g(x) dx = \int_0^1 x^{p_0-1} dx = \frac{x^{p_0}}{p_0} \Big|_0^1 = \frac{1}{p_0},$$

интеграл $J(p) = \int_0^1 f(x, p) dx = \int_0^1 x^{p-1} dx$ будет сходиться равномерно относительно параметра p на отрезке $0 < p_0 \leq p < +\infty$, сколь бы мало ни было $p_0 > 0$.

Посмотрим, будет ли этот интеграл сходиться равномерно на отрезке $0 < p < +\infty$. Для этого изучим поведение интеграла

$\int_0^\lambda x^{p-1} dx$ при $p \rightarrow 0+0$. Имеем $\int_0^\lambda x^{p-1} dx = \frac{\lambda^p}{p} \rightarrow +\infty$ при $p \rightarrow 0+0$ и любом сколь угодно малом фиксированном $\lambda > 0$. Следовательно, при любом $\varepsilon > 0$ неравенство

$$\left| \int_0^\lambda x^{p-1} dx \right| < \varepsilon$$

не может быть выполнено сразу для всех p из интервала $0 < p < +\infty$, как бы мало ни было $\lambda > 0$, т. е. на интервале $0 < p < +\infty$ интеграл $J(p) = \int_0^1 x^{p-1} dx$ сходится неравномерно.

2. Интеграл $J(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ сходится равномерно при $0 < \alpha_0 \leq \alpha < +\infty$, как бы мало ни было $\alpha_0 > 0$, в силу мажорантного признака, если положить $f(x, \alpha) = e^{-\alpha x^2}$, $g(x) = e^{-\alpha_0 x^2}$, так как $|f(x, \alpha)| = e^{-\alpha x^2} \leq g(x) = e^{-\alpha_0 x^2}$ при $0 < \alpha_0 \leq \alpha < +\infty$, $0 \leq x < +\infty$, причем интеграл $\int_0^{+\infty} g(x) dx = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha_0 x^2} dx$ сходится.

Докажем, что если устранить число $\alpha_0 > 0$, не допускающее стремления α к нулю, и рассмотреть полный интервал значений α , при которых интеграл $J(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ сходится, т. е. интервал $0 < \alpha < +\infty$, то на нем этот интеграл не будет сходиться равномерно. Для этого прежде всего заметим, что $\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt$ есть некоторая положительная константа, как интеграл от неотрицательной непрерывной функции, не равной тождественно нулю.

Оценим теперь остаток интеграла $\int_l^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx$ при как угодно большом фиксированном l и $0 < \alpha < +\infty$. Полагая $t = x \sqrt{\alpha}$, $dt = \sqrt{\alpha} dx$, получим

$$\int_l^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{l\sqrt{\alpha}}^{+\infty} e^{-t^2} dt \rightarrow +\infty \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0+0,$$

так как

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_{l\sqrt{\alpha}}^{+\infty} e^{-t^2} dt = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \text{const} > 0.$$

Следовательно, при любом $l > 0$ и малом фиксированном ε неравенство

$$\left| \int_l^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx \right| = \left| \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_{l\sqrt{\alpha}}^{+\infty} e^{-t^2} dt \right| < \varepsilon$$

не может выполняться сразу для всех α из интервала $0 < \alpha < +\infty$, т. е. интеграл $J(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} dx$ на всем интервале $0 < \alpha < +\infty$ сходится неравномерно.

3. Докажем, что интеграл $J(\alpha) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx$ при $0 \leq \alpha < +\infty$ и фиксированном $\beta \neq 0$ сходится равномерно относительно параметра α . Оценим для этого остаток интеграла $\int_l^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx$, полагая $u = \frac{1}{x}$, $dv = e^{-\alpha x} \sin \beta x dx$ и интегрируя по частям, получим

$$\int_l^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx = - \left. \frac{e^{-\alpha x} \sin(\beta x + \varphi)}{x \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right|_{x=l}^{+\infty} - \int_l^{+\infty} \frac{e^{-\alpha x} \sin(\beta x + \varphi)}{x^2 \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} dx,$$

где φ — вспомогательный угол, определяемый соотношениями $\cos \varphi = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$, $\sin \varphi = \frac{\beta}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}$. Так как $\left| \frac{e^{-\alpha x} \sin \beta x}{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \right| \leq \frac{1}{|\beta|}$ при $\beta \neq 0$ у всех $x \geq 0$ и всех $\alpha \geq 0$, то, следовательно,

$$\left| \int_l^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx \right| \leq \frac{1}{l|\beta|} + \frac{1}{|\beta|} \int_l^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{2}{l|\beta|} < \varepsilon \quad \text{при } l > \frac{2}{|\beta|\varepsilon}$$

сразу для всех α , $0 \leq \alpha < +\infty$, что и означает равномерную сходимость интеграла.

Если интеграл, зависящий от параметра y на отрезке $[c, d]$, является несобственным по нескольким причинам, то интервал интегрирования разбиваем на конечное число интервалов таким образом, чтобы (если это возможно) каждый из отвечающих им интегралов был несобственным по какой-либо одной причине: либо из-за наличия особенности у подынтегральной функции, либо из-за бесконечности интервала интегрирования. Первоначальный интеграл называется равномерно сходящимся относительно параметра y на отрезке $c \leq y \leq d$ тогда и только тогда, когда каждый из частных интегралов, полученных при таком разбиении, сходится равномерно на этом отрезке.

Б. Примеры вычисления несобственных интегралов с помощью дифференцирования и интегрирования по параметру. Интегралы в этих примерах служат не только для демонстрации методов, но почти все представляют также самостоятельный интерес и находят применения в различных разделах математики и физики.

1. Зная, что

$$\int_0^1 \frac{x^{2m}}{1+x^{2n}} dx = \frac{\pi}{2n} \frac{1}{\sin \frac{2m+1}{2n} \pi}$$

при $m < n$, где m и n — натуральные числа (см. пример 3 § 3 гл. 9), докажем, пользуясь теоремой 10.6 о непрерывной зависимости интеграла от параметра, что

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad (\text{А})$$

при $0 < p < 1$. Сделав замену переменного интегрирования, получим

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{\frac{2m+1}{2n}-1}}{1+t} dt = \frac{\pi}{\sin \frac{2m+1}{2n} \pi}. \quad (\text{Б})$$

Заметим, что функция $f(t, p)$ является непрерывной при $0 < t < +\infty$,

$0 < p < 1$, и что интеграл $\int_0^1 \frac{t^{p-1}}{1+t} dt$ сходится равномерно отно-

сительно p на любом отрезке вида $0 < p_1 \leq p \leq p_2 < 1$. (Послед-

нее легко установить, разбив интеграл $\int_0^{+\infty}$ на два: \int_0^1 и $\int_1^{+\infty}$, и при-

менив к ним мажорантный признак с мажорирующими функциями $\frac{t^{p_1-1}}{1+t}$ и $\frac{t^{p_2-1}}{1+t}$ соответственно). Следовательно, интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{1+t} dt$

является непрерывной функцией параметра p при $0 < p < 1$. Так как любое значение p из этого интервала может быть получено как предел последовательности чисел вида $\frac{2m+1}{2n}$, где $m < n$, то, переходя к пределу в (Б), получим требуемое равенство (А). Равенство (А) используется в теории эйлеровых интегралов (см. § 4 настоящей главы).

2. Вычислим интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx$. Непосредственно его нельзя дифференцировать по параметру β , но мы знаем (см. п.2 § 1), что более общий интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx$, отличающийся от данного «множителем сходимости» $e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$, можно вычислить, применяя дифференцирование по параметру и это дает (см. там же),

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha}.$$

Было доказано (пример 3 п. 4), что последний интеграл сходится равномерно по α при фиксированном β и $0 \leq \alpha < +\infty$, следовательно, он является непрерывной функцией параметра α при $0 \leq \alpha < +\infty$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \beta x}{x} dx &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin \beta x}{x} dx = \\ &= \lim_{\alpha \rightarrow 0+0} \operatorname{arctg} \frac{\beta}{\alpha} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & \text{при } \beta > 0, \\ 0 & \text{при } \beta = 0, \\ -\frac{\pi}{2} & \text{при } \beta < 0. \end{cases} \quad (10.49) \end{aligned}$$

В частности,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}. \quad (10.50)$$

Последний интеграл используется в теории рядов и интегралов Фурье.

3. Вычислим интеграл Пуассона (см. также конец гл. 9)

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx. \quad (10.51)$$

Его сходимость была установлена ранее (см. п. 4 § 1 гл. 9). Полагая $x = ut$, $dx = u dt$, получим

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-u^2 t^2} u dt.$$

Умножая обе части последнего равенства на e^{-u^2} , найдем

$$J e^{-u^2} = \int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u \, dt. \quad (10.52)$$

Интегрирование последнего равенства по u дает

$$J^2 = J \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u \, dt. \quad (10.53)$$

Подынтегральная функция $f(t, u) = e^{-(1+t^2)u^2}$ неотрицательна и непрерывна при $0 \leq t < +\infty$, $0 \leq u < +\infty$. Внутренний интеграл в (10.53) является, согласно (10.52), непрерывной функцией u при $0 \leq u < +\infty$. Изменив формально порядок интегрирования, получим повторный интеграл

$$\int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u \, du, \quad (10.54)$$

внутренний интеграл которого

$$\int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u \, du = -\frac{1}{2} \frac{e^{-(1+t^2)u^2}}{1+t^2} \Big|_{u=0}^{u=+\infty} = \frac{1}{2} \frac{1}{1+t^2} \quad (10.55)$$

является непрерывной функцией t при $0 \leq t < +\infty$. Следовательно, по теореме 10.9 о перестановке двух несобственных интегрирований в случае знакопостоянной подынтегральной функции интеграл (10.54) также будет сходящимся и будет равен интегралу (10.53). Таким образом, в силу (10.55),

$$\int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-(1+t^2)u^2} u \, du = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4}.$$

Следовательно,

$$J = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (10.56)$$

Этот интеграл имеет различные применения, в частности, в теории теплопроводности, в теории вероятностей и статистической физике.

4. Вычислим интеграл

$$J(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x \, dx, \quad \text{где } \alpha = \text{const} > 0, \quad (10.57)$$

имеющий применение в теории теплопроводности и в статистической физике. Его сходимость следует, например, из сходимости интеграла

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx. \text{ Дифференцируя формально по } \beta, \text{ получим равенство}$$

$$\frac{dJ}{d\beta} = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} (-x) \sin \beta x dx. \quad (10.58)$$

Справедливость равенства (10.58) нетрудно обосновать. В самом деле: 1) $e^{-\alpha x^2} \cos \beta x$ и $e^{-\alpha x^2} x \sin \beta x$ непрерывны при $-\infty < \beta < +\infty$, $0 \leq x < +\infty$, и 2) интеграл (10.57) сходится при $-\infty < \beta < +\infty$, а интеграл (10.58) сходится равномерно относительно β при $-\infty < \beta < +\infty$, в силу мажорантного признака с мажорирующей функцией $g(x) = e^{-\alpha x^2}$; таким образом, равенство (10.58) действительно имеет место по теореме о дифференцировании несобственного интеграла по параметру. Интегрируя в (10.58) по частям (по x), получим

$$\frac{dJ}{d\beta} = e^{-\alpha x^2} \frac{\sin \beta x}{2\alpha} \Big|_{x=0}^{x=+\infty} - \frac{\beta}{2\alpha} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x dx = -\frac{\beta}{2\alpha} J(\beta).$$

Разделяя переменные в полученном дифференциальном уравнении для $J(\beta)$, найдем

$$\frac{dJ}{J} = -\frac{\beta d\beta}{2\alpha}. \quad (10.59)$$

Интегрируя (10.59), получим

$$J(\beta) = C e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}. \quad (10.60)$$

Найдем теперь константу C . Согласно (10.56) имеем

$$J(0) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \int_0^{+\infty} e^{-z^2} dz = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \quad (z = x \sqrt{\alpha}). \quad (10.61)$$

Следовательно, в силу (10.60) и (10.61),

$$J(0) = C = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}.$$

Подставляя этот результат в (10.60), будем иметь

$$J(\beta) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x^2} \cos \beta x dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}. \quad (10.62)$$

5. Вычислим интегралы Френеля $\int_0^{+\infty} \sin(x^2) dx$ и $\int_0^{+\infty} \cos(x^2) dx$, находящие применение в оптике. Полагая $x^2 = t$, получим

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt, \quad \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{\cos t}{\sqrt{t}} dt.$$

Вычислим, например, первый из них. Заметив, что $\frac{1}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du$ (см. 10.61), получим

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t dt}{\sqrt{t}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-tu^2} \sin t du. \quad (10.63)$$

Если бы в интеграле (10.63) было легко обосновать изменение порядка интегрирования, то вычисления было бы легко довести до конца. Однако непосредственно это делается весьма громоздко, поэтому, как в примере 1, мы введем множитель сходимости e^{-kt} , где $k = \text{const} > 0$, т. е.

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} e^{-kt} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} e^{-(k+u^2)t} \sin t du = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} du \int_0^{+\infty} e^{-(k+u^2)t} \sin t dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+(k+u^2)^2}. \end{aligned} \quad (10.64)$$

В этом случае перестановка двух интегрирований легко обосновывается с помощью теоремы 10.9. Так как интеграл $\int_0^{+\infty} e^{-kt} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt$ сходится равномерно при $0 \leq k < +\infty$ и его подынтегральная функция непрерывна при $0 \leq k < +\infty$, $0 \leq t < +\infty$, то он является непрерывной функцией k на отрезке $0 \leq k < +\infty$. Поэтому, переходя к пределу при $k \rightarrow 0+0$, получим

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{\sqrt{t}} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4}.$$

Разлагая дробь на простейшие и выполняя интегрирование, находим

$$\int_0^{+\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (10.65)$$

Аналогичным путем доказывается, что

$$\int_0^{+\infty} \cos x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \quad (10.66)$$

6. Рассмотрим, наконец, интеграл Фруллани

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx, \quad \text{где } 0 < a < b. \quad (10.67)$$

Остановимся на двух основных случаях:

1) Если $f'(x)$ непрерывна и интегрируема на полупрямой $0 \leq x < +\infty$, а $f(x)$ стремится к определенному конечному пределу $f(+\infty)$ при $x \rightarrow +\infty$, т. е.

$$\int_0^{+\infty} f'(x) dx = f(+\infty) - f(0),$$

то интеграл

$$\int_0^{+\infty} f'(ux) dx \quad (10.68)$$

сходится равномерно по параметру u на отрезке $0 < a \leq u \leq b$. Действительно, так как $f(x)$ стремится к конечному пределу $f(+\infty)$ при $x \rightarrow +\infty$, то для $f(x)$ выполнен критерий Коши, т. е. для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $N(\varepsilon)$, что при всех x' и $x'' > N(\varepsilon)$ будет

$$|f(x') - f(x'')| < \varepsilon. \quad \text{Но тогда} \quad \left| \int_{A'}^{A''} f'(ux) dx \right| = \left| \frac{1}{u} \int_{A'u}^{A''u} f'(t) dt \right| =$$

$$= \left| \frac{f(A''u) - f(A'u)}{u} \right| \leq \frac{1}{a} |f(A''u) - f(A'u)| < \varepsilon \quad \text{при всех } A' \text{ и } A'' > \frac{1}{a} N(\varepsilon) \text{ сразу для всех } u \text{ из отрезка } a \leq u \leq b. \text{ Поэтому интеграл (10.67) можно вычислить, интегрируя (10.68) по параметру в пределах от } a \text{ до } b, \text{ т. е.}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx &= \int_0^{+\infty} dx \int_a^b f'(ux) du = \int_a^b du \int_0^{+\infty} f'(ux) dx = \\ &= \int_a^b \frac{f(+\infty) - f(0)}{u} du = [f(+\infty) - f(0)] \ln \frac{b}{a}. \quad (10.69) \end{aligned}$$

2) Если не существует конечный предел $f(x)$ при $x \rightarrow +\infty$, но сходится интеграл $\int_A^{+\infty} \frac{f(x)}{x} dx$, $A > 0$, и существует производная $f'(0)$,

то

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx = -f(0) \ln \frac{b}{a}. \quad (10.70)$$

Действительно,

$$\begin{aligned} \int_0^{as} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt &= \int_0^s \frac{f(ax) - f(0)}{x} dx \quad (t = ax); \\ \int_0^{bs} \frac{f(t) - f(0)}{t} dt &= \int_0^s \frac{f(bx) - f(0)}{x} dx \quad (t = bx). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \int_0^s \frac{f(bx) - f(ax)}{x} dx &= \int_{as}^{bs} \frac{f(t)}{t} dt - f(0) \int_{as}^{bs} \frac{dt}{t} = \\ &= \int_{as}^{bs} \frac{f(t)}{t} dt - f(0) \ln \frac{b}{a}, \end{aligned}$$

откуда, переходя к пределу при $s \rightarrow +\infty$, получим (10.70).

Равенства Фруллани (10.69) и (10.70) можно применять к вычислению различных конкретных интегралов. Так, с помощью (10.69) находим (всюду $0 < a < b$)

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} dx = \ln \frac{a}{b}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{arctg} bx - \operatorname{arctg} ax}{x} dx = \frac{\pi}{2} \ln \frac{b}{a},$$

а с помощью (10.70) находим

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin bx - \sin ax}{x} dx = 0, \quad \int_0^{+\infty} \frac{\cos bx - \cos ax}{x} dx = \ln \frac{a}{b}.$$

§ 3. Эйлеровы интегралы

Эйлеровы интегралы

$$\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx \text{ — гамма-функция от } p$$

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \text{ — бета-функция от } p, q$$

играют важную роль в различных разделах математики и математической физики. Поскольку бета-функция может быть выражена через гамма-функцию (см. соотношение (10.81)), то мы в первую очередь остановимся на исследовании свойств гамма-функции.

1. Свойства гамма-функции.

1) Интеграл $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ сходится при $0 < p < +\infty$ и расходится при $p \leq 0$ (см. конец § 2 гл. 9). При $p < 1$ он является несобственным не только потому, что интервал интегрирования бесконечен, но и потому, что при $p < 1$ подынтегральная функция стремится к бесконечности при $x \rightarrow 0 + 0$.

Докажем, что интеграл $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ сходится равномерно по параметру p на любом конечном отрезке $0 < p_0 \leq p \leq P_0 < +\infty$. Как и в случае исследования этого интеграла на простую сходимость, разобьем интервал интегрирования $[0, +\infty)$ на два: $0 \leq x \leq 1$ и $1 \leq x < +\infty$, и займемся исследованием на равномерную сходимость интегралов $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$ и $\int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$. Интеграл $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$ сходится равномерно при $0 < p_0 \leq x < +\infty$ в силу мажорантного признака, так как $e^{-x} x^{p-1} \leq x^{p_0-1}$ при $0 < x < 1$ и $p \geq p_0$, а интеграл $\int_0^1 x^{p_0-1} dx$ при $p_0 > 0$ сходится. Остаток

$$\int_0^\lambda x^{p-1} e^{-x} dx \geq \int_0^\lambda x^{p-1} e^{-1} dx = e^{-1} \int_0^\lambda x^{p-1} dx = \frac{\lambda^p}{pe} \rightarrow +\infty$$

при $p \rightarrow 0 + 0$ и $\lambda = \text{const} > 0$. Следовательно, на интервале $0 < p < +\infty$ интеграл $\int_0^1 x^{p-1} e^{-x} dx$ сходится неравномерно.

Интеграл $\int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ сходится равномерно при $-\infty < p < P_0 < +\infty$, где P_0 — произвольное фиксированное число, в силу мажорантного признака, так как

$$x^{p-1} e^{-x} \leq x^{P_0-1} e^{-x} \quad \text{при} \quad 1 \leq x < +\infty, \quad -\infty < p < P_0.$$

а интеграл $\int_1^{+\infty} x^{p_0-1} e^{-x} dx$ сходится. На интервале $-\infty < p < +\infty$ этот интеграл равномерно сходиться не будет. Чтобы это доказать, исследуем остаток $\int_l^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ при $p \rightarrow +\infty$ и любом фиксированном $l > 1$. Каково бы ни было натуральное N , при $p \rightarrow +\infty$, начиная с некоторого значения p , будет $p-1 > N$, и мы будем иметь неравенство

$$\begin{aligned} \int_l^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx &> \int_l^{+\infty} x^N e^{-x} dx = -e^{-x} x^N \Big|_{x=l}^{+\infty} + N \int_l^{+\infty} x^{N-1} e^{-x} dx = \\ &= [l^N + N l^{N-1} + N(N-1) l^{N-2} + \dots + N!] e^{-l} \rightarrow +\infty \text{ при } N \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lim_{p \rightarrow +\infty} \int_l^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = +\infty$$

при любом фиксированном $l > 0$.

Итак, интеграл $\int_0^1 e^{-x} x^{p-1} dx$ сходится равномерно на интервале $0 < p_0 \leq p < +\infty$, где p_0 — произвольное положительное число, а интеграл $\int_1^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ сходится равномерно на интервале $-\infty < p \leq P_0 < +\infty$, где P_0 — произвольное конечное число. Поэтому оба они одновременно сходятся равномерно на любом отрезке вида $0 < p_0 \leq p \leq P_0$, а следовательно, и интеграл $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ сходится равномерно относительно p на каждом таком отрезке.

2) Так как подынтегральная функция $f(x, p) = x^{p-1} e^{-x}$ непрерывна при $0 < x < +\infty$, $0 < p < +\infty$, а сходимость

$$\lim_{\substack{l \rightarrow +\infty \\ \lambda \rightarrow 0+0}} \int_{\lambda}^l x^{p-1} e^{-x} dx = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$$

является равномерной по p на каждом конечном отрезке $0 < p_0 \leq p \leq P_0 < +\infty$, то $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ является непрерывной

функцией на каждом таком отрезке, т. е. непрерывной функцией при всех p , удовлетворяющих неравенству $0 < p < +\infty$.

3) Дифференцируя $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ по p под знаком интеграла, получим

$$\Gamma'(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} (\ln x) e^{-x} dx. \quad (10.71)$$

Равенство (10.71) справедливо, так как интеграл (10.71) сходится равномерно на каждом конечном отрезке $0 < p_0 \leq p \leq P_0 < +\infty$ и частная производная $f'_p(x, p) = x^{p-1} (\ln x) e^{-x}$ непрерывна при $0 < x < +\infty$, $0 < p < +\infty$. Равномерная сходимость интеграла (10.71) устанавливается применением мажорантного признака к интегралам:

$$\int_0^1 x^{p-1} (\ln x) e^{-x} dx \quad \text{и} \quad \int_0^{\infty} x^{p-1} (\ln x) e^{-x} dx$$

с мажорирующими функциями $x^{p_0-1} |\ln x|$ и $x^{p_0-1} |\ln x| e^{-x}$ соответственно.

Аналогично устанавливаются существование производной любого порядка $k = 1, 2, 3, \dots$ и справедливость равенства

$$\Gamma^{(k)}(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} (\ln x)^k e^{-x} dx, \quad k = 1, 2, \dots \quad (10.72)$$

4) Интегрируя по частям, находим

$$p\Gamma(p) = p \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx = x^p e^{-x} \Big|_{x=0}^{+\infty} + \int_0^{+\infty} x^p e^{-x} dx,$$

т. е.

$$\Gamma(p+1) = p\Gamma(p). \quad (10.73)$$

Применяя повторно рекуррентную формулу (10.73), можно свести вычисление $\Gamma(a+n)$, где $0 < a \leq 1$, а n — произвольное натуральное число, к вычислению $\Gamma(a)$:

$$\Gamma(a+n) = (a+n-1)(a+n-2) \dots (a+1)a\Gamma(a). \quad (10.74)$$

Если положить $a = 1$ и учесть, что

$$\Gamma(1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1, \quad (10.75)$$

то формула (10.74) даст

$$\Gamma(n+1) = n(n-1) \dots 2 \cdot 1 = n! \quad (10.76)$$

5) Вычислим

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} x^{-\frac{1}{2}} e^{-x} dx,$$

полагая $x = t^2$. Получим

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = 2 \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\pi}. \quad (10.77)$$

6) График функции $\Gamma(p)$ имеет вид, изображенный на рис. 10.1, причем $\Gamma(p) \rightarrow +\infty$ при $p \rightarrow 0+0$ и при $p \rightarrow +\infty$. Значения $\Gamma(p)$ при натуральных значениях p находятся по формулам (10.83) и (10.84).

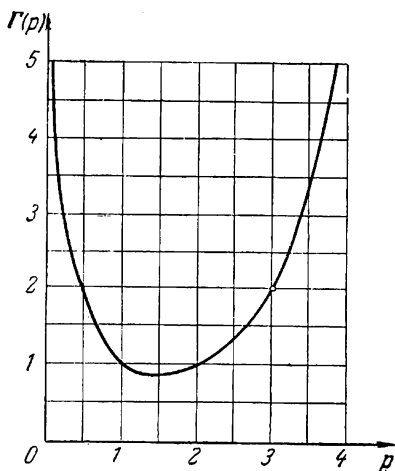


Рис. 10.1.

Так как $\Gamma(1) = \Gamma(2) = 1$, то по теореме Ролля $\Gamma'(p)$ обращается в нуль по крайней мере в одной точке интервала $1 < p < 2$; пусть это будет p_0 . Так как $\Gamma''(p) =$

$$= \int_0^{+\infty} x^{p-1} (\ln x)^2 e^{-x} dx > 0 \text{ при всех}$$

$p, 0 < p < +\infty$, то $\Gamma'(p)$ монотонно возрастает при $0 < p < +\infty$ и не может иметь при $0 < p < +\infty$ корней, отличных от p_0 ; кроме того, в силу монотонного возрастания, $\Gamma'(p) < 0$ при $p < p_0$ и $\Gamma'(p) > 0$ при $p > p_0$. Значит, $\Gamma(p)$ при $p = p_0$ достигает минимума. Приведем численные значения:

$$p_0 \approx 1,4616, \quad \min \Gamma(p) = \Gamma(p_0) = 0,8856.$$

Так как при $p \geq 2$ гамма-функция возрастает, то при $p > n + 1$, где $n \geq 1$, будет $\Gamma(p) > \Gamma(n + 1) = n!$. Следовательно, $\Gamma(p) \rightarrow +\infty$ при $p \rightarrow +\infty$. Далее,

$$\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p}$$

при $p > 0$. Следовательно, $\Gamma(p) = \frac{\Gamma(p+1)}{p} \rightarrow +\infty$ при $p \rightarrow 0$, так как $\Gamma(p+1) \rightarrow \Gamma(1) = 1$ при $p \rightarrow 0+0$.

2. Свойства бета-функции.

1) Интеграл $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ сходится при $p > 0$ и $q > 0$.

2) С помощью замены переменной интегрирования $x = 1 - t$, получаем, что

$$B(p, q) = B(q, p). \quad (10.78)$$

Следовательно, бета-функция симметрична относительно p и q .

3) Если $q > 1$, то

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 (1-x)^{q-1} d\left(\frac{x^p}{p}\right) = \\ &= \frac{x^p (1-x)^{q-1}}{p} \Big|_{x=0}^{x=1} + \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^p (1-x)^{q-2} dx = \\ &= \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-2} dx - \frac{q-1}{p} \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = \\ &= \frac{q-1}{p} B(p, q-1) - \frac{q-1}{p} B(p, q). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$B(p, q) = \frac{q-1}{p+q-1} B(p, q-1) \text{ при } q > 1. \quad (10.79)$$

Если $p > 1$, то, в силу симметрии бета-функции, используя (10.79), можно записать

$$B(p, q) = \frac{p-1}{p+q-1} B(p-1, q) \text{ при } p > 1. \quad (10.79')$$

4) Выполнив в интеграле $B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx$ замену переменной интегрирования $x = \frac{z}{1+z}$, получим для бета-функции новое аналитическое представление:

$$B(p, q) = \int_0^{+\infty} \frac{z^{p-1}}{(1+z)^{p+q}} dz. \quad (10.80)$$

5) Связь между функциями B и Γ . Докажем, что при $p > 0$ и $q > 0$

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}. \quad (10.81)$$

Сделав в интеграле $\Gamma(p) = \int_0^{+\infty} x^{p-1} e^{-x} dx$ замену переменной $x = tz$, $t > 0$, $dx = t dz$, получим

$$\frac{\Gamma(p)}{t^p} = \int_0^{+\infty} z^{p-1} e^{-tz} dz. \quad (10.82)$$

Заменяя в (10.82) t на $1+t$ и p на $p+q$, получим

$$\frac{\Gamma(p+q)}{(1+t)^{p+q}} = \int_0^{+\infty} z^{p+q-1} e^{-(1+t)z} dz. \quad (10.83)$$

Умножим обе части последнего равенства на t^{p-1} и проинтегрируем по t от 0 до $+\infty$:

$$\Gamma(p+q) \int_0^{+\infty} \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}} dt = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} t^{p-1} z^{p+q-1} e^{-(1+t)z} dz.$$

В силу (10.80), последнее равенство переписывается так:

$$\Gamma(p+q) B(p, q) = \int_0^{+\infty} dt \int_0^{+\infty} z^{p+q-1} t^{p-1} e^{-(1+t)z} dz. \quad (10.84)$$

В интеграле (10.84) при $p > 1$ и $q > 1$ допустима перестановка двух интегрирований, в силу теоремы 10.9 о перестановке двух несобственных интегрирований в случае знакопостоянной подынтегральной функции. Действительно,

а) функция

$$f(z, t) = z^{p+q-1} t^{p-1} e^{-(1+t)z} \geq 0$$

и заведомо непрерывна при $0 \leq z < +\infty$, $0 \leq t < +\infty$;

б) если $p > 1$ и $q > 1$, то интеграл (10.84) сходится;

в) интеграл

$$\int_0^{+\infty} t^{p-1} z^{p+q-1} e^{-(1+t)z} dt = \Gamma(p+q) \frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}$$

является непрерывной функцией t при $0 \leq t < +\infty$, а интеграл

$$\int_0^{+\infty} t^{p-1} z^{p+q-1} e^{-(1+t)z} dt = \Gamma(p) z^{q-1} e^{-z}$$

является непрерывной функцией z при $0 \leq z < +\infty$. Следовательно, в силу упомянутой теоремы, повторный интеграл

$$\int_0^{+\infty} dz \int_0^{+\infty} z^{p+q-1} t^{p-1} e^{-(1+t)z} dt \text{ также сходится и равен интегралу (10.84).}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}\Gamma(p+q)B(p, q) &= \int_0^{+\infty} dz \int_0^{+\infty} z^{p+q-1} t^{p-1} e^{-(1+t)z} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} z^{p+q-1} e^{-z} dz \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-tz} dt = \int_0^{+\infty} z^{p+q-1} e^{-z} \frac{\Gamma(p)}{z^p} dz = \\ &= \Gamma(p) \int_0^{+\infty} z^{q-1} e^{-z} dz = \Gamma(p) \Gamma(q).\end{aligned}$$

Следовательно, равенство (10.81) имеет место при $p > 1$ и $q > 1$.

Чтобы доказать его справедливость при $p > 0$ и $q > 0$, применим к этому равенству, написанному для $p > 1$ и $q > 1$, рекуррентные формулы (10.79), (10.80) к левой части и (10.73) к правой части.

6) Имеет место равенство

$$B(p, 1-q) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad \text{при } 0 < p < 1. \quad (10.85)$$

Действительно, подставляя в формулу (10.80) $q = 1 - p$, получим

$$B(p, 1-q) = \int_0^{+\infty} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz, \quad 0 < p < 1. \quad (10.86)$$

Но в п. 5 § 2 (пример 1) было доказано, что интеграл (10.86) равен $\frac{p}{\sin p\pi}$ при $0 < p < 1$, откуда и следует справедливость соотношения (10.85). Воспользовавшись формулой (10.81), из (10.85) получим так называемую формулу дополнения:

$$\Gamma(p) \Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin p\pi} \quad \text{при } 0 < p < 1. \quad (10.87)$$

Многие интегралы можно вычислять, сводя их к эйлеровым интегралам.

Примеры.

$$\begin{aligned}1. \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt[4]{x}}{(1+x)^2} dx &= B\left(\frac{5}{4}, \frac{3}{4}\right) = \\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma(2)} = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4} \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{4}} = \frac{\pi \sqrt{2}}{4}.\end{aligned}$$

2. Вычислим интеграл $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{\frac{5}{2}} x \cos^{\frac{3}{2}} x dx$. Полагая $\sin^2 x = z$,

получим $\sin x = z^{\frac{1}{2}}$, $\cos x = (1 - z)^{\frac{1}{2}}$, $dz = 2 \sin x \cos x dx$. Следовательно, учитывая предыдущий пример, будем иметь

$$J = B\left(\frac{7}{4}, \frac{5}{4}\right) = \frac{3\pi\sqrt{2}}{16}.$$

3. Вычислим интеграл

$$J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x dx, \quad p > 0, \quad q > 0.$$

Полагая $\sin^2 x = z$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x dx &= \frac{1}{2} \int_0^1 z^{\frac{p}{2}-1} (1-z)^{\frac{q}{2}-1} dz = \\ &= \frac{1}{2} B\left(\frac{p}{2}, \frac{q}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(\frac{q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}\right)}. \end{aligned}$$

В частности, при $q = 1$ найдем

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}.$$

§ 4. Кратные собственные и несобственные интегралы, зависящие от параметров

Для краткости мы будем рассматривать только тройные интегралы, зависящие от параметров; однако все рассуждения будут иметь силу и для интегралов любой кратности, кроме тех случаев, которые будут оговорены особо.

Пусть функция $f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ определена при $(x, y, z) \in \Omega$ и $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Omega^*$, где Ω и Ω^* — области пространств (x, y, z) и (α, β, γ) соответственно, и пусть интеграл

$$J(\alpha, \beta, \gamma) = \iiint_{\Omega} f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) dx dy dz \quad (10.88)$$

существует в собственном или несобственном смысле при любых $(\alpha, \beta, \gamma) \in \Omega^*$. Тогда он является функцией параметров (α, β, γ) , определенной в области Ω^* .

Справедливы следующие предложения:

1) Если $f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ непрерывна, как функция $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ в области $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}^*$, причем $\bar{\Omega}$ и $\bar{\Omega}^*$ — замкнутые ограниченные области*), то, как и в одномерном случае, $J(\alpha, \beta, \gamma)$ будет непрерывной функцией параметров α, β, γ в $\bar{\Omega}^*$.

2) Если, кроме того, $f'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ также непрерывна в $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}^*$, то

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \alpha} &= \frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{\Omega} \int \int f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) dx dy dz = \\ &= \int_{\Omega} \int \int f'_\alpha(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) dx dy dz. \end{aligned} \quad (10.89)$$

Аналогично обстоит дело с дифференцированием по β и γ .

3) Наконец, при условиях предложения 1) допустимо интегрирование интеграла по параметру.

Предложения 1) — 3) доказываются так же, как и в одномерном случае. Они легко распространяются на интегралы вида

$$J(\alpha, \beta, \gamma) = \int_{\Omega} \int \int f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma) g(x, y, z) dx dy dz, \quad (10.90)$$

где $f(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ удовлетворяют прежним требованиям, а

$$\int_{\Omega} \int \int |g(x, y, z)| dx dy dz < K = \text{const} < +\infty,$$

причем интеграл $\int_{\Omega} \int \int |g(x, y, z)| dx dy dz$ может быть собственным или несобственным.

Пример. Потенциал гравитационного поля, создаваемого телом Ω с плотностью массы $\rho(M) = \rho(x, y, z)$ в точке $Q(x_0, y_0, z_0)$, лежащей вне тела, равен

$$U(Q) = U(x_0, y_0, z_0) = \int_{\Omega} \int \int \frac{\rho(P)}{r_{PQ}} dx dy dz, \quad (10.91)$$

) Областью $\bar{\Omega} \times \bar{\Omega}^$ называется множество всех точек $(x, y, z, \alpha, \beta, \gamma)$ шестимерного евклидова пространства, получающихся, когда точка (x, y, z) пробегает $\bar{\Omega}$ и, независимо от нее, точка (α, β, γ) пробегает $\bar{\Omega}^*$.

где $r_{PQ} = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ — расстояние между точками $P(x, y, z)$ и $Q(x_0, y_0, z_0)$. Функция $f(x, y, z, x_0, y_0, z_0) = \frac{1}{r_{PQ}}$, если точка Q лежит на положительном расстоянии от тела Ω , непрерывна и имеет непрерывные производные $\frac{\partial f}{\partial x_0}, \frac{\partial f}{\partial y_0}, \frac{\partial f}{\partial z_0}$. Плотность $\rho(x, y, z)$ можно считать абсолютно интегрируемой функцией в Ω . Дифференцируя (10.91) по x_0, y_0 и z_0 по правилу Лейбница (см. соотношение (10.89)), получим проекции на оси координат силы притяжения материальной точки $Q(x_0, y_0, z_0)$ единичной массы телом Ω :

$$\left. \begin{aligned} F_x(Q) &= \frac{\partial U}{\partial x_0} = \int_{\Omega} \int \int \frac{\rho(P)}{r_{PQ}^3} (x - x_0) dx dy dz, \\ F_y(Q) &= \frac{\partial U}{\partial y_0} = \int_{\Omega} \int \int \frac{\rho(P)}{r_{PQ}^3} (y - y_0) dx dy dz, \\ F_z(Q) &= \frac{\partial U}{\partial z_0} = \int_{\Omega} \int \int \frac{\rho(P)}{r_{PQ}^3} (z - z_0) dx dy dz. \end{aligned} \right\} \quad (10.92)$$

Если точка $Q(x_0, y_0, z_0)$ лежит внутри тела Ω , то $r_{PQ} = 0$ при совпадении P с Q . Следовательно, Q является особой точкой подынтегральной функции интегралов (10.91) и (10.92) и эти интегралы становятся несобственными, даже если $\rho(P) = \rho(x, y, z)$ является ограниченной интегрируемой функцией в Ω . Характерной чертой этих несобственных интегралов, зависящих от параметров (x_0, y_0, z_0) , является то, что координаты особой точки подынтегральной функции зависят от этих параметров, а именно, равны им. Мы ограничимся рассмотрением несобственных кратных интегралов, зависящих от параметров, вида

$$J(Q) = \int_{\Omega} \int \int F(P, Q) f(P) dx dy dz, \quad (10.93)$$

где

$$P(x, y, z) \in \Omega, \quad Q(x_0, y_0, z_0) \in \Omega.$$

Функция $F(P, Q)$ непрерывна при $P \neq Q$ и становится неограниченной при $P \rightarrow Q$, а $f(P)$ — ограниченная интегрируемая в Ω функция. (Интегралы (10.91) и (10.92) являются частными случаями интеграла вида (10.93).)

Определение. Интеграл (10.93) называется равномерно сходящимся в точке $Q(x_0, y_0, z_0)$, если для всякого $\varepsilon > 0$

существует такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что неравенство

$$\left| \iiint_{\Omega_{\delta(\varepsilon)}} F(P, Q') f(P) dx dy dz \right| < \varepsilon \quad (10.94)$$

выполняется для любой области $\Omega_{\delta(\varepsilon)}$ диаметра $< \delta(\varepsilon)$, содержащей в себе точку Q , и для любой точки Q' , расстояние которой от Q меньше $\delta(\varepsilon)$.

Достаточный признак равномерной сходимости. Интеграл (10.93) сходится равномерно в точке $Q(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$, если существуют такая окрестность точки $Q(x_0, y_0, z_0)$ и такие константы C и λ , что при всех P и Q' из этой окрестности выполняется неравенство

$$|F(P, Q')| \leq \frac{C}{r_{PQ'}^\lambda}, \text{ где } \lambda = \text{const} < 3, C = \text{const} < +\infty. \quad (10.95)$$

Доказательство. По условию $|f(P)| < K = \text{const} < \infty$ всюду в Ω . Следовательно, если шар радиуса $\delta(\varepsilon)$ с центром в Q , $\Pi_{\delta(\varepsilon)}(Q)$, лежит в упомянутой окрестности точки Q , то для любой области $\Omega_{\delta(\varepsilon)}$ диаметра $< \delta(\varepsilon)$, содержащей в себе Q и для любой точки $Q' \in \Pi_{\delta(\varepsilon)}$ будет

$$\begin{aligned} \left| \iiint_{\Omega_{\delta(\varepsilon)}} F(P, Q') f(P) dx dy dz \right| &\leq \\ &\leq \iiint_{\Omega_{\delta(\varepsilon)}} \frac{C}{r_{PQ'}^\lambda} K dx dy dz \leq \\ &\leq CK \iiint_{\Pi_{2\delta(\varepsilon)}(Q')} \frac{dx dy dz}{r_{PQ'}^\lambda}, \quad (10.96) \end{aligned}$$

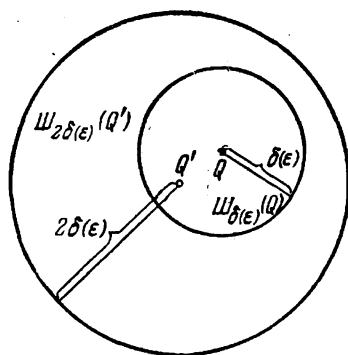


Рис. 10.2.

где $\Pi_{2\delta(\varepsilon)}(Q')$ — шар радиуса $2\delta(\varepsilon)$ с центром в Q' (рис. 10.2). Переходя к сферическим координатам с полюсом в точке Q' , получим

$$\begin{aligned} \iiint_{\Pi_{2\delta(\varepsilon)}} \frac{dx dy dz}{r_{PQ'}^\lambda} &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\theta d\theta \int_0^{2\delta(\varepsilon)} \frac{r^2 \sin \theta}{r^\lambda} dr = \\ &= 4\pi \int_0^{2\delta(\varepsilon)} r^{2-\lambda} dr = \frac{4\pi}{3-\lambda} [2\delta(\varepsilon)]^{3-\lambda}. \quad (10.96') \end{aligned}$$

Из (10.96) и (10.96') следует, что

$$\left| \int_{\Omega_{\delta(\epsilon)}} \int \int F(P, Q') f(P) dx dy dz \right| \leq \frac{4\pi}{3-\lambda} [2\delta(\epsilon)]^{3-\lambda}. \quad (10.97)$$

Так как $3-\lambda > 0$, то при достаточно малом $\delta(\epsilon)$ правая часть (10.97) будет меньше ϵ , что и требовалось доказать.

Замечание. В случае N -кратного интеграла ($N \geq 1$) показатель λ в признаке должен удовлетворять неравенству $\lambda < N$.

Если плотность массы $\rho(P)$ в интегралах (10.91) и (10.92) является ограниченной интегрируемой функцией в Ω , то, в силу доказанного признака, эти интегралы будут равномерно сходящимися в любой точке $Q(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$.

Из равномерной сходимости вытекают следствия, такие же как и в случае однократных интегралов. Рассмотрим для примера теоремы о непрерывности интеграла, как функции параметров, и о дифференцировании интеграла по параметру.

Теорема 10.10. Если интеграл (10.93) сходится равномерно в точке $Q \in \Omega$, то при сформулированных ранее ограничениях на функции $F(P, Q)$ и $f(P)$ интеграл (10.93) является непрерывной функцией в точке $Q \in \Omega$.

Доказательство. Докажем, что для всякого $\epsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\epsilon)$, что из неравенства $|r_{QQ'}| < \delta(\epsilon)$ следует неравенство

$$|J(Q) - J(Q')| < \epsilon. \quad \text{Для этого возьмем шар } \Pi_{\delta(\epsilon)}(Q) \text{ радиуса } \delta(\epsilon) \text{ с центром в } Q, \text{ лежащий внутри } \Omega \text{ (рис. 10.3), и разобьем каждый из интегралов } J(Q) \text{ и } J(Q') \text{ на два слагаемых: } J_1 \text{ по области } \Pi_{\delta(\epsilon)}(Q) \text{ и } J_2 \text{ по области } \Omega - \Pi_{\delta(\epsilon)}(Q). \text{ Тогда}$$

$$|J(Q) - J(Q')| \leq |J_2(Q) - J_2(Q')| + |J_1(Q) - J_1(Q')|. \quad (10.98)$$

При достаточно малом $\delta(\epsilon) > 0$ и второе и третье слагаемые в правой части (10.98) (каждое) будут $< \frac{\epsilon}{3}$,

в силу равномерной сходимости интеграла в точке Q . Если взять какое угодно положительное $\delta'(\epsilon) < \frac{1}{2} \delta(\epsilon)$, то при условии, что расстояние от Q до Q' удовлетворяет неравенству

$$|\overline{QQ'}| < \delta'(\epsilon), \quad (10.99)$$

интегралы в первом слагаемом в правой части (10.98) будут собственными. Следовательно, если взять $\delta'(\epsilon) < \frac{1}{2} \delta(\epsilon)$ достаточно ма-

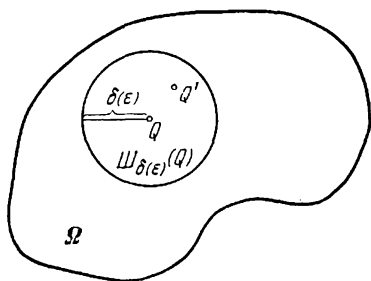


Рис. 10.3.

лым, то по теореме о непрерывной зависимости собственного кратного интеграла от параметров первое слагаемое в правой части (10.98) также будет $< \frac{\varepsilon}{3}$ при условии (10.99). Сопоставляя эти результаты, получаем, что, в силу (10.98), из выполнения неравенства (10.99) будет следовать выполнение неравенства

$$|J(Q) - J(Q')| < \varepsilon, \quad (10.100)$$

что и требовалось доказать.

Исследование дифференцируемости по параметру несобственного интеграла вида (10.93) в общем случае выходит за рамки данной книги (см., напр., [12], Лекц. VII, § 2). Покажем, как решается этот вопрос в случае, когда $F(P, Q) = 1/r_{PQ}$, $f(P) = \rho(P)$, где $\rho(P)$ — ограниченная ($|\rho(P)| < C = \text{const} < +\infty$) в Ω интегрируемая функция, т. е. когда интеграл имеет вид (10.91). Этот случай является весьма существенным для теории потенциала (см. вып. 4). Если точка $Q(x_0, y_0, z_0)$ лежит вне Ω ($P(x, y, z)$ пробегает Ω), то интеграл (10.91) является собственным и, как было доказано выше, выполняются равенства (10.92). Докажем, что равенства (10.92) сохраняют силу и в том случае, когда точка $Q(x_0, y_0, z_0)$ лежит внутри Ω . Ограничимся рассмотрением первого из равенств (10.92). Для его доказательства докажем, что разность

$$\alpha = \frac{U(x_0 + \Delta x_0, y_0, z_0) - U(x_0, y_0, z_0)}{\Delta x_0} - \int \int \int_{\Omega} \frac{\rho(P)(x - x_0)}{r_{PQ}^3} dx dy dz \quad (10.101)$$

стремится к нулю при $\Delta x_0 \rightarrow 0$ и фиксированной $Q(x_0, y_0, z_0) \in \Omega$. Пусть дано какое-нибудь $\varepsilon > 0$. Опишем из точки $Q(x_0, y_0, z_0)$ шар достаточно малого радиуса $\delta(\varepsilon)$, $\Pi_{\delta(\varepsilon)}(Q)$, лежащий внутри Ω , и обозначим через $U_1(x_0, y_0, z_0)$ и $U_2(x_0, y_0, z_0)$ интеграл (10.91), взятый по области $\Omega_1 = \Pi_{\delta(\varepsilon)}(Q)$ и $\Omega_2 = \Omega - \Omega_1 = \Omega - \Pi_{\delta(\varepsilon)}(Q)$. Очевидно, $U = U_1 + U_2$, поэтому разность (10.101) можно переписать в виде

$$\alpha = \left\{ \frac{\Delta U_1}{\Delta x_0} \right\} + \left\{ - \int \int \int_{\Omega_1} \frac{\rho(P)(x - x_0)}{r_{PQ}^3} dx dy dz \right\} + \left\{ \frac{\Delta U_2}{\Delta x_0} - \int \int \int_{\Omega_2} \frac{\rho(P)(x - x_0)}{r_{PQ}^3} dx dy dz \right\}. \quad (10.102)$$

Оценим первое слагаемое в правой части (10.102). Мы имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta U_1}{\Delta x_0} &= \frac{1}{\Delta x_0} \int \int \int_{\Omega_1} \rho(P) \left(\frac{1}{r_{PQ'}} - \frac{1}{r_{PQ}} \right) dx dy dz = \\ &= \frac{1}{\Delta x_0} \int \int \int_{\Omega_1} \rho(P) \frac{r_{PQ} - r_{PQ'}}{r_{PQ} r_{PQ'}} dx dy dz, \end{aligned} \quad (10.103)$$

где Q' — точка с координатами $(x_0 + \Delta x_0, y_0, z_0)$, лежащая в $\Omega_1 = \Pi_{\delta(\epsilon)}(Q)$. Стороны треугольника QPQ' равны r_{PQ} , $r_{PQ'}$ и $|\Delta x_0|$; поэтому

$$|r_{PQ'} - r_{PQ}| \leq |\Delta x_0|. \quad (10.104)$$

Учитывая оценку (10.104) и очевидное неравенство

$$\frac{1}{r_{PQ}r_{PQ'}} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{r_{PQ}^2} + \frac{1}{r_{PQ'}^2} \right),$$

получаем для (10.103) оценку

$$\left| \frac{\Delta U_1}{\Delta x_0} \right| \leq \frac{C}{2} \int \int \int_{\Omega_1} \left(\frac{1}{r_{PQ}^2} + \frac{1}{r_{PQ'}^2} \right) dx dy dz, \text{ так как } |\rho(P)| \leq C. \quad (10.105)$$

Интеграл $\int \int \int_{\Omega_1} \frac{dx dy dz}{r_{PQ}^2}$ сходится равномерно в $\Omega_1 = \Pi_{\delta(\epsilon)}(Q)$ (см. достаточный признак); поэтому правая часть неравенства (10.105) будет $< \frac{\epsilon}{3}$ при достаточно малом $\delta = \delta(\epsilon) > 0$. Второе слагаемое в правой части (10.102) в силу неравенства $|x - x_0|/r_{PQ} \leq 1$ и достаточного признака равномерной сходимости также является равномерно сходящимся интегралом и поэтому будет по модулю $< \frac{\epsilon}{3}$ при всех достаточно малых $\delta = \delta(\epsilon)$. Оценим, наконец, третье слагаемое в правой части (10.102). Так как $U_2(x_0, y_0, z_0) = \int \int \int_{\Omega_2} \frac{\rho(P)}{r_{PQ}} dx dy dz$ является интегралом вида (10.90) (точка $Q(x_0, y_0, z_0)$ лежит вне Ω_2), то его можно дифференцировать по параметру x_0 , а следовательно, при всех достаточно малых $|\Delta x_0| < \delta = \delta(\epsilon)$ будет

$$\left| \frac{\Delta U_2}{\Delta x_0} - \int \int \int_{\Omega_2} \frac{\rho(P)(x - x_0)}{r_{PQ}^3} dx dy dz \right| < \frac{\epsilon}{3}. \quad (10.106)$$

Таким образом вся разность (10.101) будет по модулю $< \epsilon$ при всех достаточно малых $\delta = \delta(\epsilon)$ и $|\Delta x_0|$, что и требовалось доказать.

Замечание. Результаты, полученные в этом параграфе для интегралов по объему, без труда переносятся на интегралы по кривым и поверхностям. Надлежащее видоизменение формулировок и доказательств предоставляется сделать читателям.

ГЛАВА 11

РЯДЫ ФУРЬЕ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

В естествознании и технике часто приходится иметь дело с периодическими процессами: колебательным и вращательным движением различных деталей машин и приборов, периодическим движением небесных тел и элементарных частиц, акустическими и электромагнитными колебаниями и т. п.

Математически все такие процессы описываются периодическими функциями. *Функция $f(t)$ одной переменной t называется периодической, если существует такое число $T \neq 0$, называемое ее периодом, что*

$$f(t+T) = f(t) \text{ при всех значениях } t, \quad -\infty < t < +\infty. \quad (11.1)$$

Простейшими периодическими функциями являются, как известно, тригонометрические функции $\sin t$ и $\cos t$ с периодом $T = 2\pi$.

В физике простейшей периодической функцией обычно считают «гармонику» (или «гармоническое колебание»)

$$\xi(t) = A \sin(\omega t + \varphi), \quad -\infty < t < +\infty. \quad (11.2)$$

Так как

$$\xi\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = \xi(t) \quad \text{при} \quad -\infty < t < +\infty, \quad (11.3)$$

то $T = \frac{2\pi}{\omega}$ есть период гармоник. Константы A , ω и φ называются соответственно амплитудой, частотой и начальной фазой гармоник.

Одним из основных вопросов настоящей главы является вопрос о представлении произвольной периодической функции в виде суммы гармоник.

§ 1. Предварительные сведения о периодических функциях и постановка основной задачи

1. Периоды периодической функции. Пусть $f(t)$ — периодическая функция с периодом $T \neq 0$, т. е.

$$f(t+T) = f(t) \quad \text{при всех } t, \quad -\infty < t < +\infty. \quad (11.4)$$

Тогда любое целочисленное кратное периода kT , $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, также является периодом этой функции.

Действительно, если T — период, то при любом целом $k > 1$ будет

$$f(t + kT) = f[t + (k-1)T + T] = f[t + (k-1)T] = \dots = f(t) \quad (11.5)$$

при всех t , $-\infty < t < +\infty$, то есть kT является периодом $f(t)$. Далее,

$$f[t - T] = f[(t - T) + T] = f(t) \quad \text{при всех } t, \quad -\infty < t < +\infty, \quad (11.6)$$

а следовательно, число $-T$ является периодом $f(t)$. Но тогда по только что доказанному число $k(-T) = -kT$ при любом целом $k > 1$ также является периодом $f(t)$. Утверждение доказано.

Пусть теперь числа T_1 и T_2 являются периодами функции $f(t)$; тогда легко проверить, что числа $T_1 \pm T_2$ также являются периодами этой функции.

Очевидно, тождественную константу можно рассматривать как периодическую функцию с каким угодно периодом, иными словами, любое число будет ее периодом.

*Если $f(t)$ — непрерывная периодическая функция, отличная от тождественной константы, то она имеет наименьший положительный период *), который обычно и называют периодом этой функции.*

2. Периодическое продолжение непериодической функции. Отправляясь от непериодической функции $f(x)$ **), заданной на отрезке $a \leq x \leq a + T$, можно построить периодическую функцию $F(x)$ с периодом T , совпадающую с $f(x)$ на отрезке $a \leq x \leq a + T$. Если рассуждать геометрически, то для этого нужно выполнить переносы графика функции $f(x)$ параллельно оси x вправо и влево на расстояния $T, 2T, 3T, \dots, nT, \dots$ (рис. 11.1). Этот процесс мы назовем *периодическим продолжением функции $f(x)$ за пределы отрезка $a \leq x \leq a + T$ с периодом T* . При этом $F(x)$ не получает, вообще говоря, однозначного определения в точках вида $x = a \pm kT$, $k = 1, 2, 3, \dots$

*) Если бы непрерывная периодическая функция $f(t)$, отличная от тождественной константы, не имела наименьшего положительного периода, то, как нетрудно показать, нашлась бы последовательность ее положительных периодов $T_1, T_2, \dots, T_n, \dots$, сходящаяся к нулю. Их всевозможные целочисленные кратные представляли бы всюду плотное множество точек на оси t , $-\infty < t < +\infty$, а следовательно, значения $f(t)$ на этом всюду плотном множестве были бы равны значению $f(t)$ в начале координат. Таким образом, $f(t)$ была бы равна тождественной константе $f(0)$ на этом всюду плотном множестве и, в силу непрерывности, она была бы равна тождественной константе на всей оси t , $-\infty < t < +\infty$, что противоречит условию.

**) В дальнейшем независимую переменную мы всюду будем обозначать через x .

3. Интеграл от периодической функции. Если $f(x)$ является периодической интегрируемой функцией с периодом T , то

$$\int_a^{a+T} f(x) dx = \int_0^T f(x) dx \text{ при любом } a, -\infty < a < +\infty. \text{ Действительно,}$$

$$\begin{aligned} \int_a^{a+T} f(x) dx &= \int_a^T f(x) dx + \int_T^{a+T} f(x) dx = \\ &= \int_a^T f(x) dx + \int_0^a f(x) dx = \int_0^T f(x) dx, \end{aligned}$$

так как, в силу периодичности функции,

$$\int_T^{a+T} f(x) dx = \int_T^{a+T} f(x-T) dx = \int_0^a f(x') dx', \text{ где } x' = x - T.$$

Таким образом, интеграл от периодической функции с периодом T по любому отрезку длины T имеет одно и то же значение.

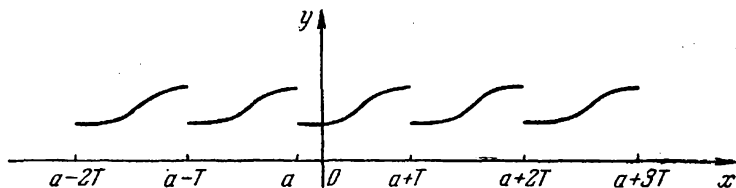


Рис. 11.1.

4. Арифметические действия над периодическими функциями. Очевидно, что сумма, разность, произведение и частное функций с одним и тем же периодом T являются периодическими функциями с периодом T .

Если периоды T_f и T_g двух периодических функций $f(x)$ и $g(x)$ соответственно соизмеримы, т. е. $T_f : T_g = p : q$, где p и q — целые числа, то число $T^* = pT_g = qT_f$ будет периодом как функции $f(x)$, так и функции $g(x)$. Следовательно, сумма, разность, произведение и частное этих функций также будут периодическими функциями с периодом T^* .

Если же периоды T_f и T_g функций $f(x)$ и $g(x)$ несоизмеримы, то сумма таких функций уже не является периодической функцией, она будет так называемой *почти периодической функцией*.

Сформулируем определение почти периодической функции. Функция $f(x)$, непрерывная на всей вещественной оси $-\infty < x < +\infty$, называется

почти периодической, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое число $L = L(\varepsilon) > 0$, что на любом интервале длины L , $a \leq x \leq a + L$, $-\infty < a < +\infty$, найдется по крайней мере один «почти период» $\tau = \tau(\varepsilon)$, соответствующий данному ε , т. е. такое число $\tau = \tau(\varepsilon)$, что

$$|f(x + \tau(\varepsilon)) - f(x)| < \varepsilon$$

при всех x , $-\infty < x < +\infty$.

(Очевидно, что периодические функции являются частным случаем почти периодических.) Можно доказать, что сумма, разность, произведение и частное (если делитель $\neq 0$) двух любых почти периодических функций является почти периодической функцией, т. е. что множество всех почти периодических функций (в отличие от множества всех периодических функций) замкнуто относительно основных арифметических операций.

5. Суперпозиция гармоник с кратными частотами. Рассмотрим последовательность гармоник

$$A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x + \varphi_k\right), \quad k = 1, 2, \dots, \quad -\infty < x < +\infty. \quad (11.7)$$

Очевидно, число $T_k = \frac{T}{k}$ является периодом k -й гармоники *). Следовательно, число $T = kT_k$ является общим периодом всех гармоник последовательности (11.7). Частотой k -й гармоники является $\lambda_k = \frac{2\pi k}{T}$, $k = 1, 2, \dots$. Таким образом, частоты гармоник последовательности (11.7) являются целочисленными кратными одного и того же числа $\frac{2\pi}{T}$. Такие гармоники мы будем называть гармониками с кратными частотами.

Сумма или, как говорят физики, суперпозиция конечного числа таких гармоник

$$f_N(x) = A_0 + \sum_{k=1}^N A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x + \varphi_k\right) \quad (11.8)$$

*является периодической функцией периода T , так как число T является общим периодом всех этих гармоник **).*

Аналогично суперпозиция бесконечного числа таких гармоник, точнее, сумма сходящегося ряда

$$f(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} A_k \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x + \varphi_k\right), \quad (11.9)$$

также является периодической функцией с периодом T .

*) Действительно, $\sin\left[\frac{2\pi k}{T}\left(x + \frac{T}{k}\right) + \varphi_k\right] = \sin\left[\left(\frac{2\pi k}{T} x + \varphi_k\right) + 2\pi\right] = \sin\left(\frac{2\pi k}{T} x + \varphi_k\right)$.

**) Напомним, что константу A_0 можно считать периодической функцией с каким угодно периодом и, в частности, с периодом T .

Равенства (11.8) и (11.9) можно преобразовать так. Учитывая, что

$$A_k \sin \left(\frac{2\pi k}{T} x + \varphi_k \right) = A_k \sin \varphi_k \cos \frac{2\pi k}{T} x + A_k \cos \varphi_k \sin \frac{2\pi k}{T} x,$$

положим

$$\frac{a_0}{2} = A_0, \quad a_k = A_k \sin \varphi_k, \quad b_k = A_k \cos \varphi_k, \quad 2l = T;$$

тогда равенства (11.8) и (11.9) примут вид

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^N \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \quad (11.10)$$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right). \quad (11.11)$$

В правой и левой частях равенств (11.10) и (11.11) все функции являются периодическими с периодом $2l$.

Заметим, что функции $f_N(x)$ и $f(x)$ имеют уже более сложную природу, чем составляющие их гармоники или функции $\cos \frac{k\pi x}{l}$ и $\sin \frac{k\pi x}{l}$, $k = 1, 2, 3, \dots$ (см., например, рис. 7, б).

Ряд (11.11) называют *тригонометрическим*, а равенство (11.11), если оно имеет место, — *разложением функции $f(x)$ в тригонометрический ряд*.

6. Постановка основной задачи. Основной задачей настоящей главы является исследование вопросов:

1) Какую периодическую функцию с периодом $2l$ можно разложить в тригонометрический ряд вида (11.11), т. е. представить в виде суммы такого ряда?

2) Как найти коэффициенты разложения (11.11) a_0 , a_k и b_k , если это разложение возможно?

3) Какова зависимость между характером сходимости ряда (11.11) и свойствами функции $f(x)$?

7. Ортогональность тригонометрической системы; коэффициенты Фурье и ряд Фурье. Разложение (11.11) — это разложение функции $f(x)$ в ряд по функциям системы:

$$\frac{1}{2}, \quad \cos \frac{\pi x}{l}, \quad \sin \frac{\pi x}{l}, \quad \dots, \quad \cos \frac{k\pi x}{l}, \quad \sin \frac{k\pi x}{l}, \quad \dots, \quad (11.12)$$

которую мы будем называть *основной тригонометрической системой*.

Основная тригонометрическая система является *ортогональной на отрезке $[-l, l]$* в следующем смысле: интеграл по отрезку

$[-l, l]$ от произведения любых двух различных функций этой системы равен нулю, а интеграл по отрезку $[-l, l]$ от квадрата любой функции этой системы отличен от нуля.

Действительно,

$$\left. \begin{aligned} \int_{-l}^l \frac{1}{2} \cos \frac{k\pi x}{l} dx &= \frac{1}{2} \frac{l}{k\pi} \sin \frac{k\pi x}{l} \Big|_{x=-l}^{x=l} = 0, \\ \int_{-l}^l \frac{1}{2} \sin \frac{k\pi x}{l} dx &= -\frac{1}{2} \frac{l}{k\pi} \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_{x=-l}^{x=l} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{l}{k\pi} [(-1)^k - (-1)^k] = 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.13_1)$$

Далее,

$$\begin{aligned} &\int_{-l}^l \cos \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int_{-l}^l \left[\cos \frac{(k+n)\pi}{l} x + \cos \frac{(k-n)\pi}{l} x \right] dx = 0 \text{ при } k \neq n. \end{aligned} \quad (11.13_2)$$

Аналогично находим

$$\left. \begin{aligned} \int_{-l}^l \sin \frac{k\pi x}{l} \sin \frac{n\pi x}{l} dx &= 0 \text{ при } k \neq n, \\ \int_{-l}^l \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx &= 0 \text{ при } k \neq n. \end{aligned} \right\} \quad (11.13_3)$$

Наконец,

$$\left. \begin{aligned} \int_{-l}^l \cos^2 \frac{k\pi x}{l} dx &= \int_{-l}^l \frac{1 + \cos^2 \frac{k\pi x}{l}}{2} dx = l, \\ \int_{-l}^l \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx &= \int_{-l}^l \frac{1 - \cos^2 \frac{k\pi x}{l}}{2} dx = l, \\ \int_{-l}^l \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx &= \frac{l}{2}. \end{aligned} \right\} \quad (11.13_4)$$

Решим теперь вопрос об определении коэффициентов a_0, a_k, b_k разложения (11.11).

Если ряд (11.11) сходится равномерно или в среднем на отрезке $[-l, l]$ к функции $f(x)$, то его можно интегрировать почленно. Это утверждение сохраняет силу и после умножения равенства (11.11) на любую интегрируемую функцию. Последнее обстоятельство в сочетании с ортогональностью системы (11.12) позволяет найти коэффициенты a_0 , a_k и b_k разложения (11.11). Интегрируя равенство (11.11) почленно, получим

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l f(x) dx &= \\ &= \frac{a_0}{2} \int_{-l}^l dx + \sum_{k=0}^{+\infty} \left[a_k \int_{-l}^l \cos \frac{k\pi x}{l} dx + b_k \int_{-l}^l \sin \frac{k\pi x}{l} dx \right] = a_0 l, \end{aligned}$$

откуда

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx. \quad (11.14_0)$$

Чтобы определить коэффициент a_n при $\cos \frac{n\pi x}{l}$, умножим равенство (11.11) на $\cos \frac{n\pi x}{l}$ и проинтегрируем по x от $-l$ до l ; это даст (в силу (11.13₁) — (11.13₄))

$$\begin{aligned} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx &= \frac{a_0}{2} \int_{-l}^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \\ &+ \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \int_{-l}^l \cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \int_{-l}^l \sin \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \\ &= a_n \int_{-l}^l \cos^2 \frac{n\pi x}{l} dx = a_n l, \end{aligned}$$

откуда

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (11.14_1)$$

Аналогично, чтобы определить коэффициент b_n при $\sin \frac{n\pi x}{l}$, умножим равенство (11.11) на $\sin \frac{n\pi x}{l}$ и проинтегрируем по x от

— l до $+l$; это даст (в силу (11.13₁) — (11.13₄))

$$\int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = b_n l,$$

откуда

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx. \quad (11.14_2)$$

Определение 1. Числа a_0 , a_n и b_n , определяемые по формулам (11.14₀), (11.14₁) и (11.14₂), называются коэффициентами Фурье функции $f(x)$ по основной тригонометрической системе (11.12).

Определение 2. Тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \quad (11.15)$$

коэффициенты a_0 , a_k и b_k которого определяются по формулам (11.14₀), (11.14₁) и (11.14₂) через функцию $f(x)$, называется рядом Фурье функции $f(x)$.

Заметим, что для существования интегралов (11.14₀), (11.14₁) и (11.14₂) достаточно интегрируемости функции $f(x)$ на отрезке $[-l, l]$. Поэтому каждой интегрируемой на отрезке $[-l, l]$ функции $f(x)$ можно поставить в соответствие ее ряд Фурье

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \quad (11.16)$$

т. е. тригонометрический ряд, коэффициенты которого определяются по формулам (11.14₀), (11.14₁) и (11.14₂). Однако, если от функции $f(x)$ не требовать ничего, кроме интегрируемости на отрезке $[-l, l]$, то знак соответствия в соотношении (11.16), вообще говоря, нельзя заменить знаком равенства. В следующем параграфе мы выясним некоторые достаточные условия, при выполнении которых это можно сделать.

8. Разложение в ряд Фурье четных и нечетных функций. Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-l, l]$, называется *четной*, если

$$f(-x) = f(x) \quad \text{при всех } x \in [-l, l]. \quad (11.17)$$

Функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-l, l]$, называется *нечетной*, если

$$f(-x) = -f(x) \quad \text{при всех } x \in [-l, l]. \quad (11.18)$$

Из этих определений следует, что график четной функции симметричен относительно оси ординат, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

Если $f(x)$ — произвольная функция, заданная на отрезке $[-l, l]$, то первая из функций

$$f_1(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2} \quad \text{и} \quad f_2(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2} \quad (11.19)$$

является четной, а вторая — нечетной, причем

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) \quad \text{при всех} \quad x \in [-l, l], \quad (11.20)$$

а следовательно, всякая функция $f(x)$, заданная на отрезке $[-l, l]$, может быть представлена в виде суммы четной и нечетной функций.

Если $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-l, l]$, то

$$\int_{-l}^l f(x) dx = \int_{-l}^0 f(x) dx + \int_0^l f(x) dx = \int_0^l [f(x) + f(-x)] dx \quad (11.21)$$

(так как при замене x на $-x$ получаем

$$\int_{-l}^0 f(x) dx = - \int_l^0 f(-x) dx = \int_0^l f(-x) dx).$$

Из соотношения (11.21) следует, что

$$\int_{-l}^l f(x) dx = \begin{cases} 2 \int_0^l f(x) dx, & \text{если функция } f(x) \text{ четная,} \\ 0, & \text{если функция } f(x) \text{ нечетная.} \end{cases} \quad (11.22)$$

Функции $\frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi x}{l}$, $\cos \frac{2\pi x}{l}$, ..., $\cos \frac{k\pi x}{l}$ — четные, а функции $\sin \frac{\pi x}{l}$, $\sin \frac{2\pi x}{l}$, ..., $\sin \frac{k\pi x}{l}$ — нечетные.

Пусть $f(x)$ интегрируема на отрезке $[-l, l]$; если функция $f(x)$ *четная*, то ее ряд Фурье имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l}; \quad (11.23)$$

если же функция $f(x)$ *нечетная*, то ее ряд Фурье имеет вид:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (11.24)$$

Действительно, если функция $f(x)$ четная, то $f(x) \cos \frac{k\pi x}{l}$ также четная, а $f(x) \sin \frac{k\pi x}{l}$ нечетная, поэтому

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) d\xi = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) d\xi, \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \sin \frac{k\pi \xi}{l} d\xi = 0, \\ a_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{k\pi \xi}{l} d\xi = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \cos \frac{k\pi \xi}{l} d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (11.25)$$

Если же функция $f(x)$ нечетная, то $f(x) \cos \frac{k\pi x}{l}$ нечетная, а $f(x) \sin \frac{k\pi x}{l}$ четная, поэтому

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) d\xi = 0, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{k\pi \xi}{l} d\xi = 0, \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \sin \frac{k\pi \xi}{l} d\xi = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{k\pi \xi}{l} d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (11.26)$$

9. Разложение функций на отрезке $[-\pi, \pi]$. Если требуется разложить в тригонометрический ряд Фурье функцию $f(x)$, заданную на отрезке $[-\pi, \pi]$, то, полагая в формулах (11.13) и (11.17) $l = \pi$, получим для коэффициентов Фурье и ряда Фурье следующие выражения:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) d\xi, \quad a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos n\xi d\xi, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin n\xi d\xi, \quad f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \end{aligned}$$

Общий случай задания функции $f(x)$ на отрезке $[-l, l]$ сводят к только что рассмотренному с помощью замены независимой переменной $x' = \frac{\pi x}{l}$. Функция $\varphi(x') = f\left(\frac{lx}{\pi}\right)$ определена на отрезке $-\pi \leq x' \leq \pi$, если $f(x)$ определена на отрезке $[-l, l]$.

Однако, имея в виду последующие применения рядов Фурье в математической физике, мы для единообразия написания и выработки надлежащих навыков будем вести все рассмотрения непосредственно для отрезка $[-l, l]$.

§ 2. Основная теорема о сходимости тригонометрического ряда Фурье

Целью настоящего параграфа является доказательство того, что *тригонометрический ряд Фурье (11.16) периодической кусочно-гладкой функции $f(x)$ с периодом $2l$ сходится к $f(x)$ в каждой точке непрерывности $f(x)$.*

Сначала мы опишем класс кусочно-гладких функций, играющих важную роль в математической физике, а затем перейдем к изложению основной теоремы.

1. Класс кусочно-гладких функций. Функция $f(x)$ называется *кусочно-непрерывной* на $[a, b]$, если она непрерывна всюду на этом отрезке, исключая, быть может, конечное число точек разрыва первого рода.

Такая функция имеет в каждой точке x отрезка $[a, b]$ конечные правое и левое предельные значения:

$$f(x+0) = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0}} f(x+z), \quad f(x-0) = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0}} f(x-z), \quad (11.27)$$

а в концах отрезка $[a, b]$ — конечные предельные значения $f(a+0)$ и $f(b-0)$.

Кусочно-непрерывную на $[a, b]$, $a < b$, функцию $f(x)$ называют кусочно-гладкой на $[a, b]$, если $f'(x)$ существует и непрерывна всюду на этом отрезке, кроме, быть может, конечного числа точек, в которых, однако, существуют конечные правое и левое предельные значения

$$f'(x+0) = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0}} f'(x+z), \quad f'(x-0) = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0}} f'(x-z). \quad (11.28)$$

При этом предполагается также, что существуют конечные предельные значения $f'(a+0)$ и $f'(b-0)$ в концах отрезка $[a, b]$.

Кусочно-гладкая функция $f(x)$ имеет в каждой точке x отрезка $[a, b]$ конечные правую и левую производные:

$$\left. \begin{aligned} f'_{\text{прав}}(x) &= \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0}} \frac{f(x+z) - f(x+0)}{z}, \\ f'_{\text{лев}}(x) &= \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0}} \frac{f(x-z) - f(x-0)}{-z}. \end{aligned} \right\} \quad (11.29)$$

Действительно, применяя формулу конечных приращений *) и используя соотношения (11.28), получим

$$\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0}} \frac{f(x \pm z) - f(x \pm 0)}{\pm z} = \lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z > 0}} f'(x \pm \theta z) = f'(x \pm 0), \quad (11.30)$$

а следовательно, производные $f'_{\text{прав}}(x)$ и $f'_{\text{лев}}(x)$ существуют и имеют место равенства

$$f'_{\text{прав}}(x) = f'(x + 0), \quad f'_{\text{лев}}(x) = f'(x - 0).$$

График кусочно-гладкой функции $f(x)$ имеет определенную касательную в каждой точке, кроме, быть может, конечного числа точек,



Рис. 11.2.

в которых, однако, существуют определенные правая и левая касательные (рис. 11.2).

Если $f(x)$ является кусочно-гладкой функцией на $[a, b]$, то, очевидно, $[a, b]$ можно разбить на конечное число таких отрезков

$$[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_i, a_{i+1}], \dots, [a_N, a_{N+1}],$$

где

$$a_0 = a < a_1 < \dots < a_i < a_{i+1} < \dots < a_N < a_{N+1} = b,$$

что внутри каждого отрезка $[a_i, a_{i+1}]$ функции $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны и стремятся к определенным конечным пределам

$$f(a_i + 0), \quad f'(a_i + 0) \quad \text{и} \quad f(a_{i+1} - 0), \quad f'(a_{i+1} - 0)$$

*) Нужную нам формулу конечных приращений $f(x+z) - f(x+0) = zf'(x+\theta z)$, где $0 < \theta < 1$, можно получить так: возьмем $0 < \delta < z$ и применим обычную формулу конечных приращений

$$f(x+z) - f(x+\delta) = (z-\delta)f'(x+\xi),$$

где $0 < \delta < \xi < z$, а затем перейдем к пределу при $\delta \rightarrow 0$.

при стремлении x к a_i справа и к a_{i+1} слева. Отсюда следует ограниченность $f(x)$ и $f'(x)$ на каждом из отрезков $[a_i, a_{i+1}]$, а следовательно и на $[a, b]$ *).

2. Формулировка основной теоремы о сходимости тригонометрического ряда Фурье.

Теорема 11.1. Если функция $f(x)$ является кусочно-гладкой на отрезке $-l \leq x \leq l$, то ее тригонометрический ряд Фурье сходится в каждой точке x этого отрезка, причем для суммы

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right) \quad (11.31)$$

этого ряда выполняются равенства:

1) $S(x) = f(x)$, если $-l < x < l$ и x является точкой непрерывности $f(x)$,

2) $S(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, если $-l < x < l$ и x является точкой разрыва $f(x)$,

3) $S(-l) = S(l) = \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}$.

Замечание. Если $-l < x < l$ и x является точкой непрерывности $f(x)$, то $f(x-0) = f(x+0) = f(x)$, а следовательно,

$$\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} = \frac{2f(x)}{2} = f(x).$$

Поэтому равенства 1) и 2) можно заменить одним равенством

$$S(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}, \quad (11.32)$$

выполняющимся в каждой внутренней точке x отрезка $[-l, l]$.

3. Основная лемма. Для доказательства теоремы нам потребуется следующая

Основная лемма. Если $f(x)$ является кусочно-гладкой функцией на отрезке $a \leq x \leq b$, то

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) \sin \alpha x \, dx = 0. \quad (11.33)$$

*) Действительно, если $f(x)$ и $f'(x)$ доопределить по-новому в концах отрезка $[a_i, a_{i+1}]$, полагая, что $f(a_i) = f(a_i+0)$, $f(a_{i+1}) = f(a_{i+1}-0)$, $f'(a_i) = f'(a_i+0)$, $f'(a_{i+1}) = f'(a_{i+1}-0)$, то $f(x)$ и $f'(x)$ станут непрерывными на замкнутом отрезке $[a_i, a_{i+1}]$, а следовательно, и ограниченными на нем. Так как при этом значения $f(x)$ и $f'(x)$ могут измениться лишь в концах отрезка $[a_i, a_{i+1}]$, то и при первоначальном определении функции $f(x)$ и $f'(x)$ ограничены на $[a_i, a_{i+1}]$.

Доказательство. Разобьем $[a, b]$ на такие частичные отрезки

$$[a_0, a_1], [a_1, a_2], \dots, [a_i, a_{i+1}], \dots, [a_N, a_{N+1}],$$

где $a = a_0 < a_1 < \dots < a_i < a_{i+1} < \dots < a_N < a_{N+1} = b$, что функции $f(x)$ и $f'(x)$ внутри каждого отрезка $[a_i, a_{i+1}]$ непрерывны и стремятся к определенным конечным пределам

$$f(a_i + 0), f'(a_i + 0) \text{ и } f(a_{i+1} - 0), f'(a_{i+1} - 0)$$

при $x \rightarrow a_i$ справа и $x \rightarrow a_{i+1}$ слева. Так как

$$\int_a^b f(x) \sin \alpha x \, dx = \sum_{i=0}^N \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) \sin \alpha x \, dx, \quad (11.34)$$

то достаточно доказать, что

$$\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) \sin \alpha x \, dx = 0 \quad (11.35)$$

при $0 \leq i \leq N$. Поскольку $f(x)$ и $f'(x)$ можно считать непрерывными на замкнутом отрезке $[a_i, a_{i+1}]$ (см. сноску на стр. 461), то можно воспользоваться интегрированием по частям. Это дает

$$\int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) \sin \alpha x \, dx = -\frac{f(x) \cos \alpha x}{\alpha} \Big|_{x=a_i+0}^{x=a_{i+1}-0} + \frac{1}{\alpha} \int_{a_i}^{a_{i+1}} f'(x) \cos \alpha x \, dx. \quad (11.36)$$

Так как $f(x)$ и $f'(x)$ ограничены на $[a, b]$, т. е. существуют такие константы M и M' , что $|f(x)| \leq M$ и $|f'(x)| \leq M'$ всюду на $[a, b]$, то из равенства (11.36) следует неравенство

$$\left| \int_{a_i}^{a_{i+1}} f(x) \sin \alpha x \, dx \right| \leq \frac{2M}{\alpha} + \frac{M'(a_{i+1} - a_i)}{\alpha}. \quad (11.37)$$

Из неравенства (11.37) при $\alpha \rightarrow \infty$ следует соотношение (11.35). Этим основная лемма доказана.

Замечание 1. Можно доказать, что лемма верна и для значительно более широкого класса функций. Например, если $f(x)$ абсолютно интегрируема на $[a, b]$, т. е. несобственный интеграл

$$\int_a^b |f(x)| \, dx < +\infty, \text{ то лемма также сохраняет силу.}$$

Замечание 2. Под знаком интеграла в лемме можно вместо $\sin \alpha x$ брать $\cos \alpha x$.

4. Доказательство основной теоремы сходимости. Пусть $f(x)$ — кусочно-непрерывная и кусочно-гладкая функция на отрезке $-l \leq x \leq l$. Продолжим периодически функцию $f(x)$ с периодом $2l$ за пределы этого отрезка на всю ось x и докажем, что для каждого x , $-\infty < x < +\infty$,

$$\left\{ S_n(x) - \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} \right\} \rightarrow 0 \text{ при } n \rightarrow +\infty, \quad (11.38)$$

где

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right) \quad (11.39)$$

— частичная сумма тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$, отвечающего отрезку $-l \leq x \leq l$ (*). Подставляя в (11.39) выражения коэффициентов Фурье

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) d\xi, \quad a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{k\pi \xi}{l} d\xi, \\ b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \sin \frac{k\pi \xi}{l} d\xi, \quad (11.40)$$

получим

$$S_n(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) d\xi + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^n \int_{-l}^l f(\xi) \left[\cos \frac{k\pi \xi}{l} \cos \frac{k\pi x}{l} + \right. \\ \left. + \sin \frac{k\pi \xi}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \right] d\xi = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi (\xi - x)}{l} \right] d\xi = \\ = \frac{1}{l} \int_{-l-x}^{l-x} f(x+z) \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi z}{l} \right] dz, \quad (11.41)$$

*) Так как $f(x)$ после периодического продолжения стала периодической функцией с периодом $2l$, а $\frac{1}{2}$, $\cos \frac{\pi x}{l}$, $\sin \frac{\pi x}{l}$, ..., $\cos \frac{k\pi x}{l}$, $\sin \frac{k\pi x}{l}$ также являются периодическими функциями с периодом $2l$, то интегралы при вычислении коэффициентов Фурье $a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx$, $a_n =$

$= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx$, $b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$ можно после такого

продолжения $f(x)$ брать не только по отрезку $-l \leq x \leq l$, но и по любому другому отрезку длины $2l$; от этого значения коэффициентов не изменятся.

где $z = \xi - x$. Найдем теперь замкнутое выражение для суммы

$$\sigma_n(z) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi z}{l}. \quad (11.42)$$

Умножая обе части (11.42) на $2 \sin \frac{\pi z}{2l}$, получим

$$\begin{aligned} 2\sigma_n(z) \sin \frac{\pi z}{2l} &= \sin \frac{\pi z}{2l} + \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{\pi z}{2l} \cos \frac{k\pi z}{l} = \\ &= \sin \frac{\pi z}{2l} + \sum_{k=1}^n \left[\sin \left(k + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{l} - \sin \left(k - \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{l} \right] = \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{l}, \end{aligned}$$

откуда

$$\sigma_n(z) = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{l}}{2 \sin \frac{\pi z}{2l}} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos \frac{k\pi z}{l}. \quad (11.43)$$

Подставляя это в (11.41), получим для частичной суммы ряда Фурье выражение

$$S_n(x) = \frac{1}{l} \int_{-l-x}^{l-x} f(x+z) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{l}}{2 \sin \frac{\pi z}{2l}} dz. \quad (11.44)$$

Так как $f(x)$ (периодически продолженная за пределы отрезка $[-l, l]$ с периодом $2l$) является периодической функцией с периодом $2l$

и так как, в силу (11.43), $\frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{l}}{2 \sin \frac{\pi z}{2l}}$ является периодической

функцией z с периодом $2l$, то произведение $f(x+z) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{l}}{2 \sin \frac{\pi z}{2l}}$

также является периодической функцией z с периодом $2l$. Поэтому интеграл по z от этого произведения по любому отрезку длины $2l$ имеет одно и то же значение. Следовательно, в интеграле (11.44), берущемся по интервалу длины $2l$, пределы интегрирования $-l-x$ и $l-x$ можно заменить пределами $-l$ и l ; в результате получим равенство

$$S_n(x) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x+z) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{l}}{2 \sin \frac{\pi z}{2l}} dz. \quad 11.45)$$

Интегрируя (11.43) по z от $-l$ до l , получим

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{l}}{2 \sin \frac{\pi z}{2l}} dz = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l dz = 1, \quad (11.46)$$

так как $\int_{-l}^l \cos \frac{k\pi z}{l} dz = 0$ при $k = 1, 2, 3, \dots$. Но $\frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{l}}{2 \sin \frac{\pi z}{2l}}$

является четной функцией z (см. п. 8 § 1); поэтому из (11.46) вытекает, что

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^0 \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{l}}{2 \sin \frac{\pi z}{2l}} dz = \frac{1}{2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{l} \int_0^l \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{l}}{2 \sin \frac{\pi z}{2l}} dz = \frac{1}{2}. \quad (11.47)$$

Умножая первое из равенств (11.47) на $f(x-0)$, а второе на $f(x+0)$ и складывая результаты, получим

$$\begin{aligned} \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} &= \frac{1}{l} \int_{-l}^0 f(x-0) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{l}}{2 \sin \frac{\pi z}{2l}} dz + \\ &+ \frac{1}{l} \int_0^l f(x+0) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{l}}{2 \sin \frac{\pi z}{2l}} dz. \end{aligned} \quad (11.48)$$

Вычитая (11.48) из (11.45), будем иметь

$$\begin{aligned} S_n(x) - \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} &= \\ &= \frac{1}{l} \int_{-l}^0 [f(x+z) - f(x-0)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{l}}{2 \sin \frac{\pi z}{2l}} dz + \\ &+ \frac{1}{l} \int_0^l [f(x+z) - f(x+0)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi z}{l}}{2 \sin \frac{\pi z}{2l}} dz. \end{aligned} \quad (11.49)$$

Докажем, что оба интеграла в правой части равенства (11.49) стремятся к нулю при $n \rightarrow +\infty$. Покажем это, например, для

второго из интегралов (11.49). Представим оцениваемый интеграл в виде

$$J_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \frac{f(x+z) - f(x+0)}{z} \frac{\frac{\pi z}{2l}}{\sin \frac{\pi z}{2l}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{l} dz + \\ + \frac{1}{l} \int_\delta^l \frac{f(x+z) - f(x+0)}{2 \sin \frac{\pi z}{2l}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{l} dz = J'_n + J''_n. \quad (11.50)$$

взяв $0 < \delta < l$. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Докажем, что за счет выбора $\delta > 0$ первый из интегралов (11.50) можно сделать по модулю $< \frac{\varepsilon}{2}$ сразу при всех $n = 1, 2, \dots$. Так как $\frac{f(x+z) - f(x+0)}{z} \rightarrow f'(x+0)$ при $z \rightarrow 0 + 0^*$, то при достаточно малом $\delta > 0$ и всех z из интервала $0 < z < \delta$ будет

$$\left| \frac{f(x+z) - f(x+0)}{z} \right| < |f'(x+0)| + 1.$$

Так как $\frac{\frac{\pi z}{2l}}{\sin \frac{\pi z}{2l}} \rightarrow 1$ при $z \rightarrow 0$, то при достаточно малом $\delta > 0$ и всех z из интервала $0 < z < 2\delta$

$$1 < \frac{\frac{\pi z}{2l}}{\sin \frac{\pi z}{2l}} < 2.$$

Наконец, при всех действительных z и всех $n = 1, 2, \dots$

$$\left| \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{l} \right| \leq 1.$$

Следовательно, при всех $n = 1, 2, \dots$

$$|J'_n| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^\delta \left| \frac{f(x+z) - f(x+0)}{z} \right| \left| \frac{\frac{\pi z}{2l}}{\sin \frac{\pi z}{2l}} \right| \left| \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{l} \right| dz \leq \\ \leq \frac{2\delta}{\pi} [|f'(x+0)| + 1],$$

если только $\delta > 0$ достаточно мало. Взяв $\delta > 0$ столь малым, чтобы $\frac{2\delta}{\pi} [|f'(x+0)| + 1] < \frac{\varepsilon}{2}$, получим, что

$$|J'_n| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при всех } n = 1, 2, \dots \quad (11.51)$$

*) См. соотношения (11.30).

Фиксируем выбранное $\delta > 0$ и рассмотрим второй интеграл из (11.50)

$$J_n'' = \frac{1}{l} \int_{\delta}^l \frac{f(x+z) - f(x+0)}{2 \sin \frac{\pi z}{2l}} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) \frac{\pi z}{l} dz.$$

Функция $\frac{f(x+z) - f(x+0)}{2 \sin \frac{\pi z}{2l}}$ является кусочно-непрерывной и кусочно-гладкой на отрезке $\delta \leq z \leq l$ (при $\delta > 0$), так как таковым является числитель, а знаменатель $2 \sin \frac{\pi z}{2l}$ представляет собой непрерывно дифференцируемую функцию, не обращающуюся в нуль на этом отрезке. Тогда по основной лемме $J_n'' \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$ и, следовательно, при всех достаточно больших значениях n будет

$$|J_n''| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (11.52)$$

Сопоставляя (11.51) и (11.52), получим, в силу (11.50), что

$$|J_n| \leq |J_n'| + |J_n''| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (11.53)$$

при всех достаточно больших n , т. е. $J_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$.

Аналогично доказывается, что и первый из интегралов в правой части (11.49) стремится к нулю при $n \rightarrow +\infty$. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \quad (11.54)$$

Напомним, что $f(x)$ периодически продолжена за пределы отрезка $[-l, l]$ с периодом $2l$. Следовательно,

$$f(l+0) = f(-l+0) \quad \text{и} \quad f(-l-0) = f(l-0). \quad (11.55)$$

Подставляя в (11.54) сначала $x = -l$, а затем $x = l$ и используя соотношения (11.45), получим

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(-l) = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n(l) = \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2}. \quad (11.56)$$

Этим доказательство теоремы завершено.

5. Примеры. 1. Разложим $f(x) = x$ в тригонометрический ряд Фурье на отрезке $[-l, l]$. В силу нечетности функции $f(x)$

$$a_0 = 0, \quad a_n = 0, \quad b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Интегрируя по частям, будем иметь

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l x \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \\ = \frac{2}{l} \left\{ \left(-\frac{xl}{n\pi} \cos \frac{n\pi x}{l} \right) \Big|_{x=0}^{x=l} + \frac{l}{n\pi} \int_0^l \cos \frac{n\pi x}{l} dx \right\} = \frac{2l}{n\pi} (-1)^{n+1}.$$

Следовательно, по основной теореме сходимости

$$S(x) = \frac{2l}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{k\pi x}{l} = \\ = \begin{cases} \frac{f(x-0) + f(x+0)}{2} = x & \text{при } -l < x < l, \\ \frac{f(-l+0) + f(l-0)}{2} = \frac{-l+l}{2} = 0 & \text{при } x = \pm l. \end{cases} \quad (11.57)$$

Графики $f(x) = x$ и $S(x)$ изображены на рис. 11.3.

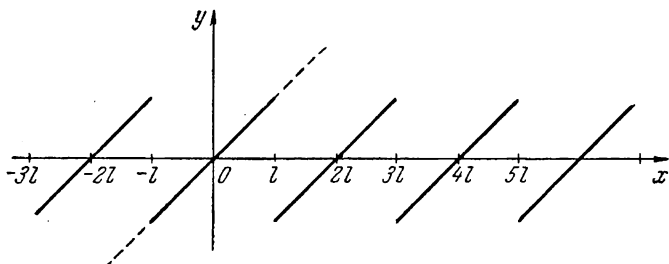


Рис. 11.3.

Функция $S(x)$ является периодической с периодом $2l$, причем $S(x) = x$ только при $-l < x < l$. В точках вида $x = (2k+1)l$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $S(x)$ претерпевает разрывы, принимая значение, равное нулю, так как полусумма правого и левого предельных значений $S(x)$ в каждой такой точке равна нулю. На рис. 11.4 приведен график частичной суммы $S_5(x) = \frac{2l}{\pi} \sum_{k=1}^5 \frac{(-1)^{k+1}}{k} \sin \frac{k\pi x}{l}$ при $-l \leq x \leq l$.

2. Пусть $f(x) = x^2$ на отрезке $[-l, l]$. Так как $f(x) = x^2$ — функция четная, то

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l x^2 dx, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l x^2 \cos \frac{n\pi x}{l} dx, \quad b_n = 0, \quad n = 1, 2, \dots$$

Вычислив коэффициенты a_0 и a_n , получим, в силу основной теоремы сходимости, что

$$S(x) = \frac{l^2}{3} + \frac{4l^2}{\pi^2} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos \frac{k\pi x}{l} = x^2 \quad \text{при } -l \leq x \leq l. \quad (11.58)$$

Графики функции $f(x) = x^2$ и суммы ряда Фурье $S(x)$ изображены на рис. 11.5.

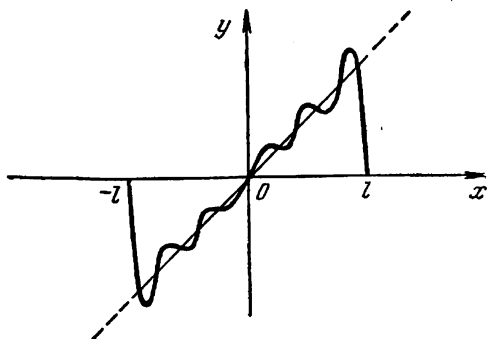


Рис. 11.4.

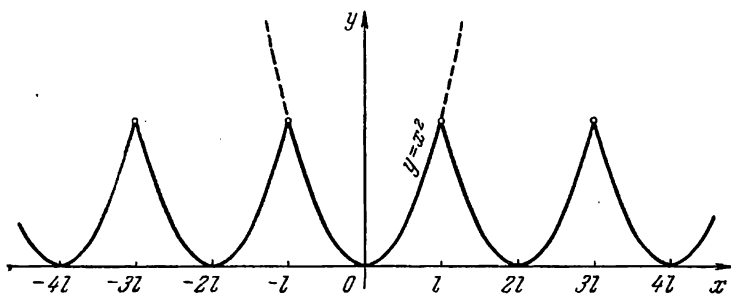


Рис. 11.5.

Функция $S(x)$ является непрерывной и в точках вида $x = (2k+1)\pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, так как $f(-l+0) = f(l-0) = l^2$ для функции $f(x) = x^2$.

Если разложение ведется на интервале $[-\pi, \pi]$, т. е. $l = \pi$, то равенство (11.58) принимает вид

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos kx. \quad (11.59)$$

При $x=0$ из (11.59) получаем полезное равенство

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots + (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2} + \dots \quad (11.60)$$

3. Пусть

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{при } -l < x < 0, \\ c_2 & \text{при } 0 < x < l. \end{cases}$$

Тогда

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^0 c_1 dx + \frac{1}{l} \int_0^l c_2 dx = c_1 + c_2,$$

$$a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^0 c_1 \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{1}{l} \int_0^l c_2 \cos \frac{n\pi x}{l} dx = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = \frac{1}{l} \int_{-l}^0 c_1 \sin \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{1}{l} \int_0^l c_2 \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

Следовательно, $b_n = 0$ при n четном и $b_n = \frac{2(c_2 - c_1)}{\pi n}$ при n нечетном.

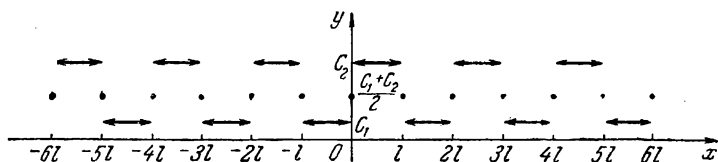


Рис. 11.6.

Поэтому, в силу основной теоремы сходимости,

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{c_1 + c_2}{2} + \frac{2(c_2 - c_1)}{\pi} \left\{ \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{l} + \dots \right\} = \\ &= \begin{cases} c_1 & \text{при } -l < x < 0, \\ c_2 & \text{при } 0 < x < l, \\ \frac{c_1 + c_2}{2} & \text{при } x = \pm l, 0. \end{cases} \end{aligned}$$

График $S(x)$ изображен на рис. 11.6.

На рис. 11.7 приведены графики частичных сумм полученного ряда Фурье $S_1(x)$, $S_2(x)$ и $S_3(x)$ при условии, что $c_1 = -1$, $c_2 = +1$,

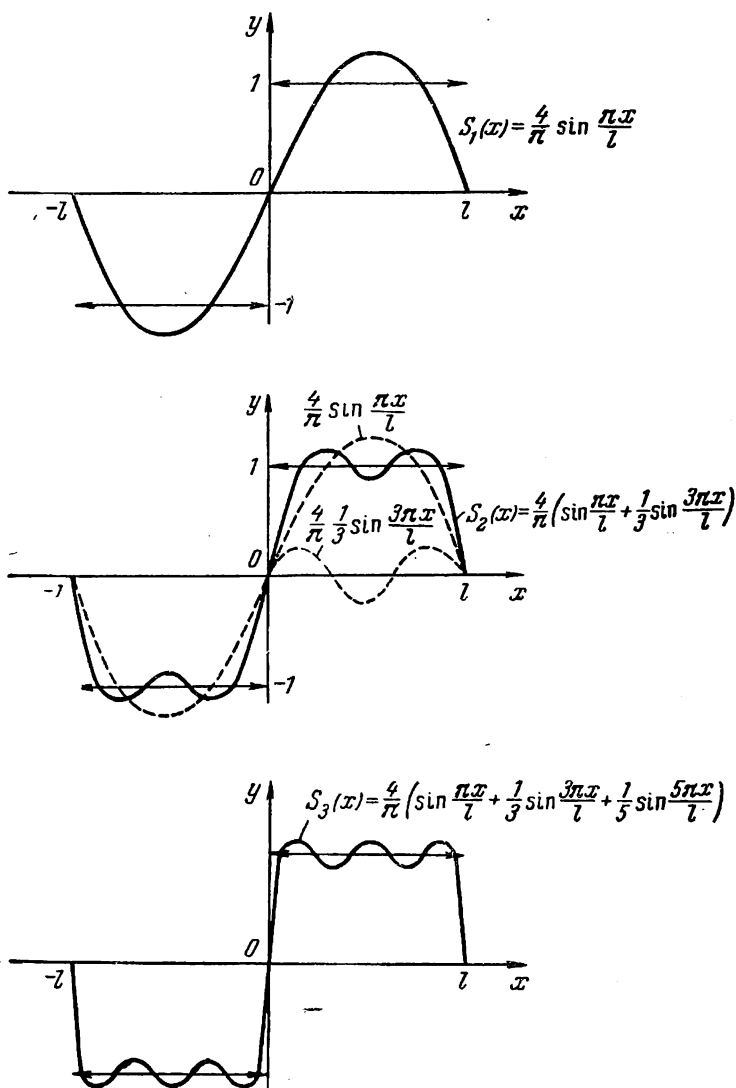


Рис. 11.7.

когда ряд принимает вид

$$S(x) = \frac{4}{\pi} \left\{ \sin \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3} \sin \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5} \sin \frac{5\pi x}{l} + \dots \right\} =$$

$$= \begin{cases} -1 & \text{при } -l < x < 0, \\ 1 & \text{при } 0 < x < l, \\ 0 & \text{при } x = 0, x = \pm l. \end{cases}$$

6. Разложение функций, заданных на отрезке $[0, l]$, только по синусам или только по косинусам. Пусть кусочно-непрерывная и кусочно-гладкая функция $f(x)$ задана на отрезке $0 \leq x \leq l$. Ее можно продолжить различным образом на отрезок $-l \leq x \leq 0$, в частности: 1) четно и 2) нечетно. В первом случае на отрезке $[-l, l]$ получится четная функция. Для нее

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) d\xi, \quad a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \cos \frac{k\pi\xi}{l} d\xi, \quad b_k = 0, \quad (11.61)$$

а ряд Фурье на отрезке $[-l, l]$ принимает вид

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l}. \quad (11.62)$$

Во втором случае получается нечетная функция на отрезке $[-l, l]$. Для нее

$$a_0 = 0, \quad a_k = 0, \quad b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{k\pi\xi}{l} d\xi, \quad (11.63)$$

а ряд Фурье на отрезке $[-l, l]$ принимает вид

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (11.64)$$

На отрезке $0 < x < l$ каждый из рядов (11.62) и (11.64) сходится к $f(x)$ (в точках непрерывности $f(x)$).

Следовательно, мы можем сказать, что каждую кусочно-гладкую функцию $f(x)$, заданную на отрезке $0 \leq x \leq l$, можно, по желанию, разложить в ряд по одним косинусам (11.62), коэффициенты которого находятся по формулам (11.61), и в ряд по одним синусам (11.64), коэффициенты которого находятся по формулам (11.63).

Пусть, например, $f(x) = x$ на отрезке $0 \leq x \leq l$; при нечетном продолжении получаем $f(x) = x$ на отрезке $-l \leq x \leq l$, но разложение такой функции в ряд Фурье было рассмотрено выше (см. пример 1 и рис. 11.3). При четном продолжении $f(x) = x$ получаем $f(x) = |x|$ на отрезке $-l \leq x \leq l$. Разлагая $f(x)$ в ряд

по косинусам на отрезке $0 \leq x \leq l$ по формулам (11.61), (11.62), получим

$$x = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{l} \quad \text{при } 0 \leq x \leq l,$$

где

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^l x \, dx = l, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l x \cos \frac{k\pi x}{l} \, dx = \frac{2l}{\pi^2 n^2} [(-1)^n - 1] =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{при } n \text{ четном,} \\ -\frac{4l}{\pi^2 n^2} & \text{при } n \text{ нечетном.} \end{cases}$$

Следовательно,

$$x = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \left\{ \cos \frac{\pi x}{l} + \frac{1}{3^2} \cos \frac{3\pi x}{l} + \frac{1}{5^2} \cos \frac{5\pi x}{l} + \dots \right\} \quad (11.65)$$

при $0 \leq x \leq l$.

Справедливость равенства (11.65) при $x=0$ и $x=l$ легко установить, если рассматривать (11.65) как тригонометрический ряд

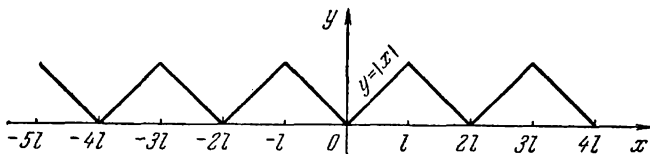


Рис. 11.8.

Фурье четной функции $f(x) = |x|$, заданной на отрезке $[-l, l]$. Такое истолкование ряда (11.65) позволяет легко построить график его суммы при любых значениях x (рис. 11.8).

Вообще, так как при четном продолжении любой кусочно-непрерывной и кусочно-гладкой функции $f(x)$, заданной на отрезке $[0, l]$, имеют место соотношения

$$f(-0) = f(+0) \quad \text{и} \quad f(-l+0) = f(l-0), \quad (11.66)$$

то сумма ее тригонометрического ряда Фурье в точках $x=0$ и $x=\pm l$ будет непрерывной и равной соответственно $f(+0) = f(-0)$ и $f(-l+0) = f(l-0)$. Если $f(x)$, кроме того, непрерывна в концах отрезка $[0, l]$, т. е. $f(+0) = f(0)$ и $f(l-0) = f(l)$, то отсюда следует, что сумма ее ряда по косинусам равна $f(x)$ и в концах этого отрезка.

Напротив, при разложении $f(x)$, $0 \leq x \leq l$, в ряд по синусам, т. е. при нечетном продолжении $f(x)$ на отрезок $-l \leq x \leq 0$,

у сумм ряда Фурье могут появиться разрывы в точках $x = 0$ и $x = \pm l$, несмотря на непрерывность и гладкость $f(x)$ на отрезке $0 \leq x \leq l$. На рис. 11.9 изображен график суммы ряда Фурье нечетно продолженной функции $f(x) = x + 1$, заданной при $0 \leq x \leq l$. Так как

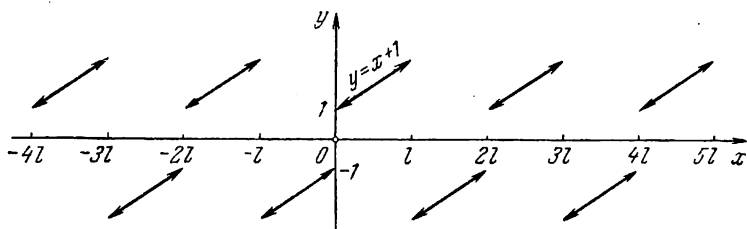


Рис. 11.9.

при нечетном продолжении $f(-0) = -f(+0)$ и $f(-l+0) = -f(l-0)$, то равенства $f(-0) = f(+0)$ и $f(-l+0) = f(l-0)$, необходимые для непрерывности суммы ряда Фурье в точках $x = 0$ и $x = \pm l$, будут иметь место только в случае, когда

$$f(+0) = 0 \quad \text{и} \quad f(l-0) = 0. \quad (11.67)$$

§ 3. Ряды Фурье по ортогональным системам. Неравенство Бесселя

Разложение функции $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье является частным случаем разложения $f(x)$ в ряд по ортогональной системе функций.

1. Ортогональные системы функций. Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, интегрируемые*) на $[a, b]$, называются *ортогональными* на $[a, b]$, если

$$\int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx = 0. \quad (11.68)$$

Система функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots, \quad (11.69)$$

интегрируемых на $[a, b]$, называется *ортогональной* на $[a, b]$, если

$$\int_a^b \varphi_l(x) \varphi_k(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } l \neq k, \\ > 0 & \text{при } l = k. \end{cases} \quad (11.70)$$

*) Всюду, если не оговорено противное, интегрируемость понимается в смысле собственного интеграла, а функции предполагаются вещественными

Приведем примеры ортогональных систем.

1) Основная тригонометрическая система

$$\frac{1}{2}, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{k\pi x}{l}, \sin \frac{k\pi x}{l}, \dots \quad (11.71)$$

ортогональна на отрезке $[-l, l]$.

2) Системы функций

$$\begin{aligned} \text{а) } & \frac{1}{2}, \cos \frac{\pi x}{l}, \cos \frac{2\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{k\pi x}{l}, \dots, \\ \text{б) } & \sin \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{2\pi x}{l}, \dots, \sin \frac{k\pi x}{l}, \dots \end{aligned} \quad (11.72)$$

ортогональны (каждая) на отрезке $[0, l]$.

3) Система полиномов Лежандра

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n = 1, 2, \dots, P_0(x) = 1, \quad (11.73)$$

ортогональна на отрезке $[-1, 1]$ (см. Дополнение 1 к гл. 11).

Если функция $\varphi(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то ее н о р м о й на $[a, b]$ назовем неотрицательное число

$$\|\varphi\| = \left(\int_a^b \varphi^2(x) dx \right)^{1/2}. \quad (11.74)$$

Нормы всех функций ортогональной системы положительны, в силу соотношений (11.70), которыми определяется ортогональность системы.

Используя символ нормы, эти соотношения можно переписать так:

$$\int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ \|\varphi_k\|^2 & \text{при } i = k. \end{cases} \quad (11.75)$$

Приведем нормы функций некоторых ортогональных систем.

1) Нормы функций основной тригонометрической системы (11.71) на отрезке $[-l, l]$ равны, в силу определения (11.74) и соотношений (11.13₂):

$$\left\| \frac{1}{2} \right\| = \sqrt{\frac{l}{2}}, \quad \left\| \cos \frac{k\pi x}{l} \right\| = \sqrt{l}, \quad \left\| \sin \frac{k\pi x}{l} \right\| = \sqrt{l}, \quad (11.76)$$

$$k = 1, 2, \dots$$

2) Нормы функций систем (11.72) на отрезке $[0, l]$, как нетрудно вычислить, равны

$$\begin{aligned} \text{а) } & \left\| \frac{1}{2} \right\| = \frac{\sqrt{l}}{2}, \quad \left\| \cos \frac{k\pi x}{l} \right\| = \sqrt{\frac{l}{2}}, \\ \text{б) } & \left\| \sin \frac{k\pi x}{l} \right\| = \sqrt{\frac{l}{2}}. \end{aligned} \quad (11.77)$$

3) Нормы полиномов Лежандра на отрезке $[-1, 1]$ равны

$$\|P_n(x)\| = \left(\int_{-1}^{+1} P_n^2(x) dx \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}. \quad (11.78)$$

(По поводу вычисления нормы $\|P_n(x)\|$ см. Дополнение 1 к гл. 11.)

2. Коэффициенты Фурье и ряд Фурье функции $f(x)$ по ортогональной системе. Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и пусть на $[a, b]$ имеет место равенство

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \varphi_k(x), \quad (11.79)$$

где a_k — постоянные числа, а $\varphi_k(x)$ — функции ортогональной на $[a, b]$ системы (11.69). Если ряды, получающиеся после умножения равенства (11.79) на любую функцию $\varphi_n(x)$ системы (11.69), можно интегрировать почленно*), то, в силу ортогональности системы (11.69), коэффициенты a_k очень просто выражаются через $f(x)$ следующим образом. Умножим равенство (11.79), на $\varphi_n(x)$ и проинтегрируем по x от a до b ; мы получим

$$\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \int_a^b \varphi_k(x) \varphi_n(x) dx. \quad (11.80)$$

Все интегралы в правой части равенства (11.80) при $k \neq n$ обращаются в нуль, в силу соотношений ортогональности (11.70). Следовательно,

$$\int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx = a_n \int_a^b \varphi_n^2(x) dx = a_n \|\varphi_n\|^2,$$

откуда

$$a_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx. \quad (11.81)$$

Числа a_n , определяемые по формулам (11.81), называются *коэффициентами Фурье функции $f(x)$ по ортогональной системе* (11.69), а ряд (11.79), коэффициенты a_k которого определяются по формулам (11.81), называется *рядом Фурье функции $f(x)$ по ортогональной системе* (11.69).

Так как для образования чисел a_k по формулам (11.81) от функции $f(x)$ требуется лишь интегрируемость (напомним, что функ-

*) Возможность такого почленного интегрирования заведомо будет иметь место, если ряд (11.79) сходится к своей сумме равномерно или в среднем на отрезке $[a, b]$.

ции $\varphi_k(x)$ интегрируемы в силу определения ортогональной системы), то каждой интегрируемой на $[a, b]$ функции $f(x)$ можно поставить в соответствие ее ряд Фурье по системе (11.69), ортогональной на $[a, b]$:

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \varphi_k(x), \quad (11.82)$$

т. е. ряд, коэффициенты a_k которого находятся по формулам (11.81).

Условия, которым должна удовлетворять функция $f(x)$ для того, чтобы знак соответствия в соотношении (11.82) можно было заменить знаком равенства, зависят от свойств ортогональной системы $\{\varphi_k(x)\}$. Для случая, когда в качестве ортогональной системы, по которой ведется разложение, взята основная тригонометрическая система, соответствующие достаточные условия содержатся в доказанной выше основной теореме сходимости тригонометрического ряда Фурье. Доказательство аналогичных теорем сходимости для других ортогональных систем требует специального рассмотрения.

3. Задача о наименьшем квадратичном отклонении. Тождество Бесселя. Неравенство Бесселя. Рассмотрим какой-либо фиксированный отрезок

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x) \quad (11.83)$$

системы (11.69), ортогональной на $[a, b]$; линейная комбинация функций

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x) \quad (11.84)$$

с произвольными числовыми коэффициентами α_k , $k=1, 2, \dots, n$, называется *многочленом n -го порядка по ортогональной системе* (11.69).

Пусть функция $f(x)$ интегрируема на $[a, b]$ и пусть требуется решить следующую задачу:

Найти, при каких значениях коэффициентов α_k , $k=1, 2, \dots, n$, многочлен n -го порядка по данной ортогональной системе имеет наименьшее квадратичное отклонение (гл. 8, § 6, п. 1) от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, т. е. при каких значениях коэффициентов $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ величина

$$\rho^2 \left(f, \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right) = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x) \right]^2 dx = \left\| f - \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right\|^2 \quad (11.85)$$

достигает своего абсолютного минимума.

Раскрывая квадратную скобку, получим

$$\begin{aligned} \rho^2 \left(f, \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right) &= \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx + \int_a^b \left(\sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k(x) \right)^2 dx = \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - 2 \sum_{k=1}^n \alpha_k a_k \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=1}^n \alpha_k^2 \|\varphi_k\|^2, \quad (11.86) \end{aligned}$$

так как $\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = a_k \|\varphi_k\|^2$ (согласно (11.81))

$$\text{и } \int_a^b \varphi_i(x) \varphi_k(x) dx = 0 \quad \text{при } i \neq k, \text{ а } \int_a^b \varphi_k^2(x) dx = \|\varphi_k\|^2.$$

Дополняя до полного квадрата, из (11.86) получим

$$\rho^2 \left(f, \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right) = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=1}^n a_k^2 \|\varphi_k\|^2 + \sum_{k=1}^n (\alpha_k - a_k)^2 \|\varphi_k\|^2. \quad (11.87)$$

Только последняя сумма в правой части (11.87) зависит от коэффициентов α_k . Так как эта сумма неотрицательна, то она достигает точной нижней грани, обращаясь в нуль при $\alpha_k = a_k$; при этом квадратичное отклонение $\rho^2 \left(f, \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right)$ достигает, очевидно, своего абсолютного минимума, равного

$$\begin{aligned} \min \rho^2 \left(f, \sum_{k=1}^n \alpha_k \varphi_k \right) &= \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x) \right]^2 dx = \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=1}^n a_k^2 \|\varphi_k\|^2. \quad (11.88) \end{aligned}$$

Многочлен

$$\sum_{k=1}^n a_k \varphi_k(x), \quad (11.89)$$

коэффициенты a_k которого являются коэффициентами Фурье функции $f(x)$ по данной ортогональной системе $\{\varphi_k(x)\}$, называется *многочленом Фурье функции $f(x)$ по данной ортогональной системе $\{\varphi_k(x)\}$* .

Итак, среди всех многочленов n -го порядка (n фиксировано) по данной ортогональной на $[a, b]$ системе $\{\varphi_k(x)\}$ наименьшее квадратичное отклонение от функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ имеет многочлен Фурье функции $f(x)$ по этой ортогональной системе.

Равенство (11.88), выражающее квадратичное отклонение от $f(x)$ ее многочлена Фурье на отрезке $[a, b]$, называется *тождеством Бесселя*.

Замечая, что левая часть равенства (11.88) неотрицательна, получим неравенство

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx, \quad (11.90)$$

справедливое при всех $n \geq 1$, поскольку правая его часть от n не зависит. При возрастании n сумма, стоящая в левой части неравенства (11.90), не убывает; в силу ограниченности сверху, она стремится к определенному конечному пределу при $n \rightarrow +\infty$. Переходя к пределу в неравенстве (11.90) при $n \rightarrow +\infty$, получим так называемое *неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_k^2 \|\varphi_k\|^2 \leq \int_a^b f^2(x) dx. \quad (11.91)$$

В случае основной тригонометрической системы неравенство (11.91) принимает, в силу соотношений (11.76), вид

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^2(x) dx. \quad (11.92)$$

Неравенство Бесселя (11.91) мы установили для любой функции $f(x)$, интегрируемой в обычном смысле на отрезке $[a, b]$.

Функция $f(x)$ называется *интегрируемой с квадратом* на $[a, b]$, если интегралы

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_a^b f^2(x) dx \quad (11.93)$$

существуют как собственные или как несобственные.

Неравенство Бесселя (11.91) (а следовательно, и 11.92) сохраняет силу и для любой функции $f(x)$, интегрируемой с квадратом на $[a, b]$.

Более того, неравенство Бесселя (11.91) сохраняет силу и в том случае, когда функции $\varphi_k(x)$ ортогональной системы также являются функциями, интегрируемыми с квадратом. Действительно,

из сходимости интегралов $\int_a^b f^2(x) dx$, $\int_a^b \varphi_k^2(x) dx$ и очевидных неравенств

$$|f(x) \varphi_k(x)| \leq \frac{f^2(x) + \varphi_k^2(x)}{2}, \quad |\varphi_l(x) \varphi_k(x)| \leq \frac{\varphi_l^2(x) + \varphi_k^2(x)}{2} *$$

вытекает, в силу общего признака сращения, абсолютная сходимость интегралов

$$\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx \quad \text{и} \quad \int_a^b \varphi_l(x) \varphi_k(x) dx,$$

а при написании и выводе неравенства Бесселя мы имеем дело лишь с такими интегралами **).

Вводя понятие интегрируемости с квадратом и ортогональности с весом можно вывести обобщенное неравенство Бесселя, справедливое для более широкого класса функций (см. по этому поводу Дополнение 2 к гл. 11).

Из неравенства Бесселя для случая основной тригонометрической системы (см. неравенство (11.92)) вытекает сходимость ряда

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k^2 + b_k^2) \text{ и, следовательно,}$$

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow +\infty} a_k &= \frac{1}{l} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-l}^{+l} f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = 0, \\ \lim_{k \rightarrow +\infty} b_k &= \frac{1}{l} \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{-l}^{+l} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = 0. \end{aligned} \quad (11.94)$$

Соотношения (11.94) являются частным случаем более общих соотношений

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{-l}^{+l} f(x) \cos \alpha x dx = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_{-l}^{+l} f(x) \sin \alpha x dx = 0, \quad (11.95)$$

справедливых, в силу замечания 1 к основной лемме (см. § 2), для абсолютно интегрируемых функций.

*) $0 \leq (|f(x)| - |\varphi_k(x)|)^2 = f^2(x) - 2|f(x) \varphi_k(x)| + \varphi_k^2(x)$, откуда
 $|f(x) \varphi_k(x)| \leq \frac{1}{2} [f^2(x) + \varphi_k^2(x)].$

**) По поводу дальнейших обобщений см. Дополнение 2 к гл. 11.

§ 4. Связь между степенью гладкости функции и скоростью сходимости ее тригонометрического ряда Фурье. Понятие улучшения сходимости

Сначала мы изучим условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье, а затем установим связь между степенью гладкости функции $f(x)$ и скоростью убывания коэффициентов a_k и b_k ее тригонометрического ряда Фурье (при неограниченном возрастании номера k), и оценить скорость сходимости этого ряда.

1. Условия равномерной сходимости тригонометрического ряда Фурье. Равномерную сходимость тригонометрического ряда Фурье мы докажем для непрерывной и кусочно-гладкой функции, удовлетворяющей некоторому дополнительному необходимому условию. Напомним, что функция $f(x)$ называется непрерывной и кусочно-гладкой на отрезке $[-l, l]$, если сама она непрерывна, а ее производная $f'(x)$ кусочно-непрерывна на этом отрезке. Справедлива следующая

Теорема 11.2. Если непрерывная и кусочно-гладкая на отрезке $[-l, l]$ функция $f(x)$ имеет равные значения на концах этого отрезка $f(-l) = f(l)$, то ее тригонометрический ряд Фурье

$$S(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \quad (11.96)$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) d\xi, & a_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{n\pi \xi}{l} d\xi, \\ b_n &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{l} d\xi, \end{aligned} \quad (11.97)$$

сходится равномерно на этом отрезке, причем $S(x) = f(x)$ в каждой точке отрезка $[-l, l]$.

Доказательство. Чтобы доказать равномерную сходимость ряда (11.96), достаточно доказать сходимость мажорирующего числового ряда

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (|a_k| + |b_k|) \quad (11.98)$$

или, что равносильно, сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (|a_k| + |b_k|). \quad (11.99)$$

Тогда по признаку Вейерштрасса (см. п. 2, § 1 гл. 8) ряд (11.96) будет равномерно сходящимся на всей оси x , так как

$$\left| a_k \cos \frac{k\pi x}{l} \right| \leq |a_k| \quad \text{и} \quad \left| b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right| \leq b_k$$

при всех x , $-\infty < x < +\infty$. Обозначим через a'_k и b'_k коэффициенты Фурье производной $f'(x)$:

$$a'_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f'(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \quad b'_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f'(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx,$$

и выполним в формулах для коэффициентов Фурье функции $f(x)$ интегрирование по частям. Будем иметь

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \\ &= \frac{1}{l} \frac{l}{k\pi} f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} \Big|_{x=-l}^{x=l} - \frac{1}{l} \frac{l}{k\pi} \int_{-l}^l f'(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = -\frac{l}{\pi} \frac{b'_k}{k}, \end{aligned}$$

так как $\sin \frac{k\pi x}{l}$ обращается в нуль при $x = \pm l$;

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx = \\ &= -\frac{1}{l} \frac{l}{k\pi} f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} \Big|_{x=-l}^{x=l} + \frac{1}{l} \frac{l}{k\pi} \int_{-l}^l f'(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx = \frac{l}{\pi} \frac{a'_k}{k}, \end{aligned}$$

поскольку

$$\begin{aligned} \cos \frac{k\pi x}{l} f(x) \Big|_{x=-l}^{x=l} &= f(l)(-1)^k - f(-l)(-1)^k = \\ &= (-1)^k [f(l) - f(-l)] = 0, \end{aligned}$$

так как по условию теоремы $f(l) = f(-l)$. Поэтому

$$|a_k| + |b_k| \leq \frac{l}{\pi} \left(\frac{|a'_k|}{k} + \frac{|b'_k|}{k} \right). \quad (11.100)$$

Но $f'(x)$ по условию теоремы кусочно-непрерывна на отрезке $[-l, l]$. Поэтому она интегрируема на этом отрезке и для нее выполняется неравенство Бесселя

$$\frac{a_0'^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k'^2 + b_k'^2) \leq \frac{1}{l} \int_{-l}^l f'^2(x) dx,$$

а следовательно, числовой ряд

$$\frac{a_0'^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k'^2 + b_k'^2) \quad (11.101)$$

сходится. Далее, из неравенств

$$0 \leq \left(|a_k'| - \frac{1}{k} \right)^2 = a_k'^2 - 2 \frac{|a_k'|}{k} + \frac{1}{k^2},$$

$$0 \leq \left(|b_k'| - \frac{1}{k} \right)^2 = b_k'^2 - 2 \frac{|b_k'|}{k} + \frac{1}{k^2}$$

вытекают неравенства

$$\frac{|a_k'|}{k} \leq \frac{1}{2} \left(a_k'^2 + \frac{1}{k^2} \right), \quad \frac{|b_k'|}{k} \leq \frac{1}{2} \left(b_k'^2 + \frac{1}{k^2} \right).$$

Следовательно,

$$\frac{|a_k'|}{k} + \frac{|b_k'|}{k} \leq \frac{1}{2} (a_k'^2 + b_k'^2) + \frac{1}{k^2}. \quad (11.102)$$

Но тогда из сходимости рядов (11.101) и $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$ (легко устанавливаемой с помощью интегрального признака) вытекает сходимость ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} \left\{ \frac{1}{2} (a_k'^2 + b_k'^2) + \frac{1}{k^2} \right\}$, а следовательно, в силу признака сравнения и неравенств (11.102) и (11.100), сходится ряд

$$\frac{|a_0|}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (|a_k| + |b_k|),$$

мажорирующий для тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$. Отсюда следует равномерная сходимость тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ к его сумме $S(x)$ на всей оси x . Справедливость равенства $S(x) = f(x)$ на отрезке $[-l, l]$ вытекает из основной теоремы сходимости, условия которой здесь выполнены. Этим доказательство теоремы завершено.

Замечание. Равенство значений функции $f(x)$ на концах отрезка $[-l, l]$ является необходимым условием того, чтобы тригонометрический ряд Фурье (11.96) функции $f(x)$ сходилась к ней на концах этого отрезка. Действительно, если для суммы этого ряда $S(x)$ выполнены равенства

$$S(-l) = f(-l), \quad S(l) = f(l), \quad (11.103)$$

то, в силу равенства

$$S(-l) = S(l), \quad (11.104)$$

являющегося следствием периодичности суммы ряда (11.96) с периодом $2l$ (все члены ряда периодичны с периодом $2l$), будет выполняться также равенство

$$f(-l) = f(l). \quad (11.105)$$

Поэтому равенство (11.105) и подавно является необходимым для того, чтобы ряд Фурье (11.96) функции $f(x)$ сходиллся к ней равномерно на всем замкнутом отрезке $[-l, l]$.

Если изменить в конечном числе точек значения непрерывной кусочно-гладкой функции $f(x)$, заданной на отрезке $[-l, l]$ и имеющей равные значения на его концах, то получится разрывная функция, имеющая на концах отрезка $[-l, l]$, вообще говоря, различные значения. Коэффициенты Фурье такой измененной функции останутся прежними (так как интегралы, выражающие коэффициенты Фурье, при этом не изменятся). Следовательно, в силу оценок дока-

зательства теоремы 11.2 ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} (|a_k| + |b_k|)$ будет сходящимся; а значит, тригонометрический ряд Фурье этой кусочно-непрерывной и кусочно-гладкой функции будет сходиться равномерно на отрезке $[-l, l]$, но не к ней, а к исходной функции. Однако для равномерной сходимости на отрезке $[-l, l]$ тригонометрического ряда Фурье кусочно-непрерывной и кусочно-гладкой функции $f(x)$ необходимо, чтобы все ее разрывы были устранимыми и имело место равенство ее предельных значений на концах отрезка $f(-l+0) = f(l-0)$. Это легко доказывается с помощью теорем о непрерывности суммы ряда и о почленном предельном переходе в равномерно сходящемся ряде (§ 2 гл. 8).

Теорему 11.2 можно сформулировать несколько иначе. Заметим прежде всего, что если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-l, l]$ и имеет равные значения на его концах, то при ее периодическом продолжении с периодом $2l$ получается функция, непрерывная на всей оси x .

Назовем, далее, функцию $f(x)$ кусочно-гладкой на всей оси x , если она является кусочно-гладкой на каждом конечном отрезке оси x . Теперь мы можем сформулировать теорему следующим образом:

Если периодическая функция $f(x)$ с периодом $2l$ является непрерывной и кусочно-гладкой на всей оси x , то ее тригонометрический ряд Фурье (11.96) сходится к ней равномерно на всей оси.

2. Связь между степенью гладкости функции и скоростью сходимости ее тригонометрического ряда Фурье. Исследование такой связи важно для выяснения возможности приближенной замены

суммы тригонометрического ряда Фурье его частичной суммой, а также для выяснения возможности почленного дифференцирования такого ряда, что находит важные применения в математической физике.

Теорема 11.3. Если $f(x)$, $f'(x)$, ..., $f^{(m)}(x)$, где $m \geq 0$, непрерывны на отрезке $[-l, l]$ и имеют равные значения на его концах, т. е.

$$f(-l) = f(l), \quad f'(-l) = f'(l), \quad \dots, \quad f^{(m)}(-l) = f^{(m)}(l), \quad (11.106)$$

а $f^{(m+1)}(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[-l, l]$, то для коэффициентов Фурье функции $f(x)$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(\xi) \cos \frac{k\pi\xi}{l} d\xi, \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f(\xi) \sin \frac{k\pi\xi}{l} d\xi$$

выполняются соотношения

$$a_k = o\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right), \quad b_k = o\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right) \quad (11.107)$$

и ряды

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^v (|a_k| + |b_k|), \quad v = 0, 1, 2, \dots, m, \quad (11.108)$$

сходятся *).

Доказательство. Интегрируя по частям, как при доказательстве теоремы 11.1, получим

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{k\pi\xi}{l} d\xi = \\ &= \frac{1}{l} \frac{l}{k\pi} f(\xi) \sin \frac{k\pi\xi}{l} \Big|_{\xi=-l}^{\xi=l} - \frac{1}{k\pi} \int_{-l}^l f'(\xi) \sin \frac{k\pi\xi}{l} d\xi = \\ &= -\frac{1}{k\pi} \int_{-l}^l f'(\xi) \sin \frac{k\pi\xi}{l} d\xi = \\ &= \frac{l}{k^2\pi^2} f'(\xi) \cos \frac{k\pi\xi}{l} \Big|_{\xi=-l}^{\xi=l} - \frac{l}{k^2\pi^2} \int_{-l}^l f''(\xi) \cos \frac{k\pi\xi}{l} d\xi = \end{aligned}$$

*) Соотношения (11.107) означают, что

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \left(a_k : \frac{1}{k^{m+1}} \right) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \left(b_k : \frac{1}{k^{m+1}} \right) = 0.$$

$$\begin{aligned}
 &= -\frac{l}{k^2\pi^2} \int_{-l}^l f''(\xi) \cos \frac{k\pi\xi}{l} d\xi = \dots \\
 &\dots = \pm \frac{l^{m+1}}{k^{m+1}\pi^{m+1}} \frac{1}{l} \int_{-l}^l f^{(m+1)}(\xi) \left\{ \begin{array}{l} \cos \frac{k\pi\xi}{l} \\ \sin \frac{k\pi\xi}{l} \end{array} \right\} d\xi. \quad (11.109)
 \end{aligned}$$

При этом мы пользуемся тем, что, в силу: 1) условия (11.10) теоремы, 2) четности косинуса и 3) обращения в нуль синуса на концах отрезка $[-l, l]$, выполняются равенства

$$f^{(s)}(\xi) \cos \frac{k\pi\xi}{l} \Big|_{\xi=-l}^{\xi=+l} = 0, \quad f^{(s)}(\xi) \sin \frac{k\pi\xi}{l} \Big|_{\xi=-l}^{\xi=+l} = 0 \quad \text{при } 0 \leq s \leq m.$$

Фигурная скобка под знаком интеграла (11.109) означает, что в зависимости от того, сколько раз было выполнено интегрирование по частям, в качестве множителя при $f^{(m+1)}(\xi)$ может оказаться либо $\cos \frac{k\pi\xi}{l}$, либо $\sin \frac{k\pi\xi}{l}$.

Совершенно аналогично получаем, что

$$b_k = \pm \frac{l^{m+1}}{k^{m+1}\pi^{m+1}} \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} f^{(m+1)}(\xi) \left\{ \begin{array}{l} \sin \frac{k\pi\xi}{l} \\ \cos \frac{k\pi\xi}{l} \end{array} \right\} d\xi. \quad (11.110)$$

Переходя в равенствах (11.109) и (11.110) к модулям и складывая результаты, будем иметь

$$|a_k| + |b_k| = \frac{l^{m+1}}{\pi^{m+1}} \left(\frac{|a_k^{(m+1)}|}{k^{m+1}} + \frac{|b_k^{(m+1)}|}{k^{m+1}} \right), \quad (11.111)$$

где $a_k^{(m+1)}$ и $b_k^{(m+1)}$ — коэффициенты Фурье $f^{(m+1)}(x)$.

Так как $a_k^{(m+1)}$ и $b_k^{(m+1)}$ стремятся к нулю при $k \rightarrow +\infty$, то из (11.111) следует, что

$$a_k = o\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right), \quad b_k = o\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right). \quad (11.112)$$

Из (11.111) получаем, что

$$\begin{aligned}
 k^m (|a_k| + |b_k|) &\leq \frac{l^{m+1}}{\pi^{m+1}} \left(\frac{|a_k^{(m+1)}|}{k} + \frac{|b_k^{(m+1)}|}{k} \right) \leq \\
 &\leq \frac{l^{m+1}}{2\pi^{m+1}} \left\{ |a_k^{(m+1)}|^2 + |b_k^{(m+1)}|^2 + \frac{2}{k^2} \right\}, \quad (11.113)
 \end{aligned}$$

так как

$$\frac{|a_k^{(m+1)}|}{k} \leq \frac{1}{2} \left(|a_k^{(m+1)}|^2 + \frac{1}{k^2} \right), \quad \frac{|b_k^{(m+1)}|}{k} \leq \frac{1}{2} \left(|b_k^{(m+1)}|^2 + \frac{1}{k^2} \right).$$

Поэтому из (11.111), в силу неравенства Бесселя

$$\frac{|a_0^{(m+1)}|^2}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} (|a_k^{(m+1)}|^2 + |b_k^{(m+1)}|^2) \leq \frac{1}{l} \int_{-l}^{+l} |f^{(m+1)}(x)|^2 dx$$

и в силу сходимости ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}$, вытекает сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^m (|a_k| + |b_k|), \text{ а из нее — сходимость всех рядов (11.108).}$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Если речь идет о разложении в ряд по $\sin \frac{k\pi x}{l}$, $k = 1, 2, \dots$, функции $f(x)$, заданной только на отрезке $[0, l]$, то условия теоремы 11.3 должны быть выполнены для функции $F(x)$, определяемой на всем отрезке $[-l, l]$ путем нечетного продолжения $f(x)$. В частности, для непрерывности функции $F(x)$ при $x = 0$ необходимо, чтобы выполнялось равенство $f(0) = 0$, так как в противном случае при нечетном продолжении получится разрыв в точке $x = 0$. Аналогично этому в точке $x = l$ должно быть $f(l) = 0$, ибо для продолженной нечетной функции должно выполняться равенство $F(-l) = F(l)$. Поскольку производная нечетной функции четна, то для производной функции $F(x)$ автоматически выполняется соотношение $F'(-l) = F'(l)$.

Вообще для того чтобы производные функции $F(x)$, непрерывные, на отрезке $[-l, l]$, имели равные значения на его концах, нужно потребовать, чтобы выполнялись условия

$$f^{(v)}(0) = f^{(v)}(l) = 0 \quad \text{при } v = 0, 2, 4, \dots$$

Тогда для производных нечетного порядка от функции $F(x)$ соответствующие условия теоремы 11.3 будут выполнены автоматически.

В частности, для сходимости рядов

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^v |b_k|, \quad v = 0, 1, 2,$$

где $b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{k\pi\xi}{l} d\xi$ — коэффициенты Фурье функции $f(x)$,

заданной на отрезке $[0, l]$, достаточно потребовать, чтобы $f(x)$ удовлетворяла следующим условиям:

1) $f(x)$, $f'(x)$ и $f''(x)$ должны быть непрерывны, а $f'''(x)$ — кусочно-непрерывна на отрезке $[0, l]$;

2) $f(0) = f(l)$; $f''(0) = f''(l) = 0$.

Замечание 2. Если функцию $f(x)$, удовлетворяющую условиям теоремы 11.3, периодически продолжить за пределы отрезка $[-l, l]$ с периодом $2l$, то она станет непрерывной периодической функцией с периодом $2l$ на всей оси x , равно как и ее производные до m -го порядка включительно. Поэтому теорему 11.3 можно перефразировать следующим образом:

Если периодическая функция $f(x)$ с периодом $2l$ является непрерывной при $-\infty < x < \infty$ вместе со своими производными до m -го порядка включительно ($m \geq 0$), а $(m+1)$ -я производная $f^{(m+1)}(x)$ кусочно-непрерывна, то для коэффициентов Фурье a_k и b_k этой функции по основной тригонометрической системе выполняются соотношения:

$$1) \quad a_k = o\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right), \quad b_k = o\left(\frac{1}{k^{m+1}}\right) \quad \text{при } k \rightarrow +\infty,$$

$$2) \quad \text{ряды} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} k^v (|a_k| + |b_k|) \quad \text{при } v = 0, 1, \dots, m$$

сходятся. Таким образом, эта теорема устанавливает связь между степенью гладкости периодической функции и скоростью сходимости ее тригонометрического ряда Фурье.

Замечание 3. Если выполнены условия теоремы 11.3 при $m > 0$, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x)$ можно дифференцировать почленно не менее m раз, т. е. заведомо будут выполняться равенства

$$f^{(s)}(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right)^{(s)} \quad (11.114)$$

$$\text{при } 1 \leq s \leq m, \quad -l \leq x \leq l,$$

так как мажорирующие ряды

$$\frac{\pi^s}{l^s} \sum_{k=1}^{+\infty} k^s (|a_k| + |b_k|) \quad \text{при } 1 \leq s \leq m$$

сходятся вместе с рядами (11.109).

Замечание 4. Доказательство теоремы 11.3 позволяет оценить скорость сходимости ряда Фурье, то есть дать оценку погрешности, допускаемой при замене суммы тригонометрического ряда Фурье его частичной суммой. При выполнении условий теоремы 11.3, используя соотношение (11.111), неравенство Коши — Буняковского для сумм, неравенство Бесселя для коэффициентов Фурье функции $f^{(m+1)}(x)$

и очевидную оценку ряда

$$\sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m+2}} \leq \int_{k_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2m+2}},$$

получим

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right) \right| &\leq \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} (|a_k| + |b_k|) \leq \\ &\leq \frac{l^{m+1}}{\pi^{m+1}} \sqrt{\sum_{k=k_0+1}^{+\infty} \frac{1}{k^{2m+2}}} \sqrt{2 \sum_{k=k_0+1}^{+\infty} (|a_k^{(m+1)}|^2 + |b_k^{(m+1)}|^2)} \leq \\ &\leq \frac{l^{m+1}}{\pi^{m+1}} \left(\int_{k_0}^{+\infty} \frac{dx}{x^{2m+2}} \right)^{1/2} \left(\frac{2}{l} \int_{-l}^{+l} |f^{(m+1)}(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \\ &= \frac{2l^{m+\frac{1}{2}}}{\pi^{m+1} (2m+1)^{1/2}} \left(\int_{-l}^{+l} |f^{(m+1)}(x)|^2 dx \right)^{1/2} \frac{1}{k_0^{m+\frac{1}{2}}} = O \left(\frac{1}{k_0^{m+\frac{1}{2}}} \right). \end{aligned}$$

3. Понятие улучшения сходимости тригонометрического ряда Фурье. Тригонометрический ряд Фурье, получающийся в результате решения какой-либо конкретной задачи, может оказаться столь медленно сходящимся, что его практическое использование затруднено, поскольку замкнутое выражение его суммы неизвестно.

В связи с этим возникает вопрос, нельзя ли из медленно сходящегося тригонометрического ряда Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \quad -l \leq x \leq l, \quad (\text{A})$$

выделить такой медленно сходящийся тригонометрический ряд Фурье, сумма которого $\varphi(x)$ известна в замкнутой форме, чтобы оставшийся ряд, связанный с $f(x)$ и $\varphi(x)$ соотношением

$$f(x) = \varphi(x) + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\alpha_k \cos \frac{k\pi x}{l} + \beta_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right) \quad (\text{B})$$

сходиллся уже достаточно быстро, т. е. чтобы его коэффициенты α_k и β_k достаточно быстро стремились к нулю при $k \rightarrow +\infty$.

Такой переход от представления (A) для функции $f(x)$ к представлению (B) называется *улучшением сходимости ряда (A)*.

Если известны особенности функции $f(x)$ (предельные значения $f(x)$ и ее производных при $x \rightarrow \pm l$ и в точках разрыва), то

улучшение сходимости достигается вычитанием из $f(x)$ достаточно простой функции $\varphi(x)$ с такими же особенностями, как и у $f(x)$.

Пусть, например, известно, что $f(x)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[-l, l]$ и что $\lim_{x \rightarrow \pm l} f(x) = \pm l$. Так как значения $f(x)$ на концах отрезка $[-l, l]$ не равны, то ряд (А) сходится неравномерно на этом отрезке. Положим $\varphi(x) = x$; эта функция так же непрерывно дифференцируема на $[-l, l]$ и имеет такие же предельные значения на его концах, как и $f(x)$. Поэтому функция $f(x) - x$ непрерывно дифференцируема и имеет равные предельные значения на концах отрезка $[-l, l]$, а следовательно, ряд в представлении (Б) для функции $f(x)$ при $\varphi(x) = x$ будет сходиться уже равномерно на отрезке $[-l, l]$.

Ознакомимся теперь с другим подходом к улучшению сходимости ряда (А), когда никакой дополнительной информации о его сумме не имеется. А. Н. Крылов предложил в этом случае выделять из коэффициентов a_n и b_n ряда (А) младшие степени величины $\frac{1}{n}$ и пытаться суммировать ряд с коэффициентами, содержащими эти младшие степени величины $\frac{1}{n}$. При этом нужно пользоваться таблицей разложений различных функций в тригонометрические ряды Фурье с достаточно медленно сходящимися разложениями.

Пусть, например, требуется улучшить сходимость ряда

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{n^3}{n^4 - 1} \sin nx, \quad -\pi < x < \pi. \quad (11.115)$$

Так как

$$\frac{n^3}{n^4 - 1} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n^5 - n},$$

то

$$f(x) = \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^5 - n}, \quad -\pi < x < \pi.$$

Но ранее было установлено (см. пример 1 п. 5 § 2, в котором для нашего случая нужно положить $l = \pi$), что

$$x = 2 \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\sin nx}{n}, \quad -\pi < x < \pi.$$

Поэтому

$$\sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n} = -\frac{x}{2} + \sin x, \quad -\pi < x < \pi.$$

Следовательно,

$$f(x) = -\frac{x}{2} + \sin x + \sum_{n=2}^{+\infty} (-1)^n \frac{\sin nx}{n^5 - n}, \quad -\pi < x < \pi. \quad (11.116)$$

Ряд (11.116) сходится уже значительно быстрее, чем ряд (11.115).

§ 5. Равномерная аппроксимация непрерывной функции тригонометрическими и алгебраическими многочленами; теоремы Вейерштрасса

Пусть $\varepsilon > 0$ — какое-нибудь фиксированное число. Если неравенство

$$|\varphi(x) - \psi(x)| < \varepsilon$$

выполняется сразу для всех $x \in [a, b]$, то говорят, что $\psi(x)$ *равномерно ε -аппроксимирует* функцию $\varphi(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Теорема 11.4. (первая теорема Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $-l \leq x \leq l$ и имеет равные значения на его концах, то при любом $\varepsilon > 0$ найдется тригонометрический многочлен

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \quad (11.117)$$

равномерно ε -аппроксимирующий функцию $f(x)$ на отрезке $[-l, l]$.

Для доказательства этой теоремы нам потребуется

Лемма. Какова бы ни была непрерывная на отрезке $a \leq x \leq b$ функция $f(x)$, при всяком $\varepsilon > 0$ существует такая непрерывная и кусочно-гладкая на этом отрезке функция $g_\varepsilon |x|$, что

$$|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при всех } x \in [a, b], \quad (11.118)$$

причем

$$g_\varepsilon(a) = f(a), \quad g_\varepsilon(b) = f(b). \quad (11.119)$$

Доказательство леммы. Так как $f(x)$ непрерывна на замкнутом отрезке $[a, b]$, то она равномерно непрерывна на нем, т. е. при любом $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon)$, что для любых x' и x'' из отрезка $[a, b]$, удовлетворяющих неравенству $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$, будет выполняться неравенство

$$|f(x') - f(x'')| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (11.120)$$

Поэтому, если разбить отрезок $[a, b]$ точками деления $x_0 = a < x_1 < \dots < x_i < x_{i+1} < \dots < x_{n+1} = b$ на частичные отрезки $[x_i, x_{i+1}]$ длины меньше δ , то для любых двух точек x' и x'' , принадлежащих одному и тому же частичному отрезку $[x_i, x_{i+1}]$, будет выполняться неравенство (11.120).

Определим на $[a, b]$ непрерывную кусочно-гладкую функцию $y = g_\varepsilon(x)$, положив $g_\varepsilon(x_i) = f(x_i)$ при $i = 0, 1, \dots, m+1$ и считая $g_\varepsilon(x)$ линейной на каждом отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, 1, \dots, m$. График функции $y = g_\varepsilon(x)$ представляет собой ломаную, вписанную в график функции $y = f(x)$. В силу определения $g_\varepsilon(x)$, имеем

$$g_\varepsilon(a) = f(a), \quad g_\varepsilon(b) = f(b).$$

Докажем, что

$$|f(x') - g_\varepsilon(x')| < \frac{\varepsilon}{2}$$

при любом $x' \in [a, b]$. Пусть, например, $x' \in [x_i, x_{i+1}]$. В силу линейности $g_\varepsilon(x)$ на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$, значение $g_\varepsilon(x')$ заключено между значениями $g_\varepsilon(x_i) = f(x_i)$ и $g_\varepsilon(x_{i+1}) = f(x_{i+1})$. Так как непрерывная функция $f(x)$ принимает на отрезке $[x_i, x_{i+1}]$ все значения, промежуточные между значениями $f(x_i)$ и $f(x_{i+1})$, то найдется такое $x'' \in [x_i, x_{i+1}]$, что $f(x'') = g_\varepsilon(x')$. Следовательно,

$$|f(x') - f(x'')| = |f(x') - g_\varepsilon(x')| < \frac{\varepsilon}{2},$$

так как x' и $x'' \in [x_i, x_{i+1}]$, что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 11.4. По условию $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-l, l]$ и имеет равные значения на его концах: $f(-l) = f(l)$. Пусть дано $\varepsilon > 0$. Согласно лемме существует такая непрерывная и кусочно-гладкая на $[-l, l]$ функция $g_\varepsilon(x)$, что

$$|f(x) - g_\varepsilon(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при всех } x \in [-l, l] \quad (11.121)$$

и

$$g_\varepsilon(-l) = f(-l), \quad g_\varepsilon(l) = f(l),$$

а следовательно,

$$g_\varepsilon(-l) = g_\varepsilon(l). \quad (11.122)$$

так как $f(-l) = f(l)$.

По теореме 11.2 тригонометрический ряд Фурье функции $g_\varepsilon(x)$ сходится равномерно к $g_\varepsilon(x)$ на отрезке $[-l, l]$. Следовательно, при достаточно большом n для его частичной суммы $T_n(x) =$

$= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right)$ будет выполняться неравенство

$$|g_\varepsilon(x) - T_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при всех } x \in [-l, l]. \quad (11.123)$$

Сопоставляя (11.121) и (11.123), получим

$$|f(x) - T_n(x)| \leq |f(x) - g_\varepsilon(x)| + |g_\varepsilon(x) - T_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad (11.124)$$

при всех $x \in [-l, l]$. Теорема доказана.

З а м е ч а н и е. Взяв последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \dots$ стремящуюся к нулю, мы получим последовательность тригонометрических многочленов $T_{n_1}(x), T_{n_2}(x), \dots$ равномерно сходящуюся на отрезке $[-l, l]$ к функции $f(x)$. Однако эти тригонометрические многочлены не являются, вообще говоря, частичными суммами одного и того же тригонометрического ряда. Действительно, многочлен $T_n(x)$, отвечающий данному $\varepsilon > 0$, т. е. входящий в неравенство (11.124), является многочленом Фурье для вспомогательной непрерывной и кусочно-гладкой функции $g_\varepsilon(x)$, которая с изменением ε меняется, что приводит к изменению коэффициентов многочлена $T_n(x)$. Однако тот факт, что непрерывная функция $f(x)$ не является, вообще говоря, пределом равномерно сходящейся последовательности частичных сумм одного и того же тригонометрического ряда, не есть следствие лишь способа построения многочленов $T_n(x)$.

Если бы $f(x)$ была пределом равномерно сходящейся последовательности частичных сумм некоторого тригонометрического ряда

$$\frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\alpha_k \cos \frac{k\pi x}{l} + \beta_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right) \quad \text{на отрезке } [-l, l], \quad \text{то он (этот}$$

ряд) неизбежно являлся бы тригонометрическим рядом Фурье для $f(x)$. Однако можно привести примеры непрерывных функций $f(x)$ на отрезке $[-l, l]$, тригонометрические ряды Фурье которых расходятся в конечном или даже в бесконечном числе точек этого отрезка. Построение таких примеров довольно сложно*).

Теорема 11.5 (вторая теорема Вейерштрасса). Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $a \leq x \leq l$, то для всякого $\varepsilon > 0$ найдется алгебраический многочлен

$$P_m(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_mx^m,$$

равномерно ε -аппроксимирующий $f(x)$ на отрезке $a \leq x \leq b$.

*) См., например, Н. К. Б а р н, Тригонометрические ряды.

т. е. такой, что всюду на этом отрезке выполняется неравенство

$$|f(x) - P_m(x)| < \varepsilon. \quad (11.125)$$

Доказательство. Возьмем $l > 0$ столь большим, чтобы отрезок $[a, b]$ лежал строго внутри отрезка $[-l, l]$. Определим на $[-l, l]$ непрерывную функцию $F(x)$, положив $F(x) = f(x)$ на $[a, b]$, $F(-l) = F(l) = 0$ и считая $F(x)$ линейной на отрезках $-l \leq x \leq a$, $b \leq x \leq l$. По первой теореме Вейерштрасса при любом $\varepsilon > 0$ найдется такой тригонометрический многочлен

$$T_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \quad (11.126)$$

что всюду на $[-l, l]$ будет выполняться неравенство

$$|F(x) - T_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (11.127)$$

Разложим в ряд Тейлора синусы и косинусы, входящие в (11.127):

$$\cos \frac{k\pi x}{l} = 1 - \frac{k^2 \pi^2}{2! l^2} x^2 + \frac{k^4 \pi^4}{4! l^4} x^4 - \dots, \quad (11.128)$$

$$\sin \frac{k\pi x}{l} = \frac{k\pi}{l} x - \frac{k^3 \pi^3}{3! l^3} x^3 + \frac{k^5 \pi^5}{5! l^5} x^5 - \dots \quad (11.129)$$

Степенные ряды (11.128) и (11.129) сходятся (например, по признаку Даламбера) при всех x , $-\infty < x < +\infty$. Подставляя (11.128) и (11.129) в (11.126), получим степенной ряд

$$T_n(x) = A_0 + A_1 x + A_2 x^2 + \dots + A_m x^m + \dots, \quad (11.130)$$

сходящийся при всех x , $-\infty < x < +\infty$, и, следовательно, равномерно сходящийся на любом конечном отрезке оси x , в частности на отрезке $[-l, l]$. Поэтому, беря m достаточно большим, получим такую частичную сумму ряда (11.131)

$$P_m(x) = A_0 + A_1 x + \dots + A_m x^m,$$

что

$$|T_n(x) - P_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при всех } x \in [-l, l]. \quad (11.131)$$

Сопоставляя неравенства (11.131) и (11.127), получим

$$\begin{aligned} |F(x) - P_m(x)| &\leq |F(x) - T_n(x)| + \\ &+ |T_n(x) - P_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned} \quad (11.132)$$

при всех $x \in [-l, l]$, в частности при всех $x \in [a, b]$. Но при всех $x \in [a, b]$ $F(x) = f(x)$ и неравенство (11.132) превращается в

неравенство

$$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon, \quad (11.133)$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Взяв последовательность $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k, \dots$, сходящуюся к нулю, получим последовательность алгебраических многочленов $P_{m_1}(x), P_{m_2}(x), \dots$, равномерно сходящуюся к $f(x)$ на $[a, b]$. Эти многочлены не представляют собой, вообще говоря, частичных сумм одного и того же степенного ряда по причинам, аналогичным описанным в замечании после доказательства первой теоремы Вейерштрасса (теоремы 11.4).

Теоремы Вейерштрасса не дают эффективного способа построения многочленов, равномерно аппроксимирующих непрерывную функцию с заданной точностью $\varepsilon > 0$.

П. Л. Чебышев поставил и исследовал проблему построения многочленов наилучшего приближения, играющую важную роль при эффективной равномерной аппроксимации непрерывных функций многочленами.

Обозначим через H_n множество всех алгебраических многочленов степени $\leq n$. Пусть $P_n(x) \in H_n$, а функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$. Число

$$E(f, P_n) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - P_n(x)|$$

назовем отклонением $P_n(x)$ от $f(x)$ на $[a, b]$. Нижнюю грань значений $E(f, P_n)$, когда $P_n(x)$ пробегает все множество H_n , обозначим через $E_n(f)$ и будем называть наименьшим отклонением. Чебышев доказал существование и единственность многочлена наилучшего равномерного приближения, т. е. такого $P_n(x) \in H_n$, что

$$E(f, P_n) = E_n(f),$$

и исследовал методы построения таких многочленов. При этом им были получены так называемые многочлены Чебышева, наименее уклоняющиеся от нуля (см. по этому поводу [4], том II, гл. 4). При построении многочлена, равномерно аппроксимирующего непрерывную функцию $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с заданной точностью ε , для практических применений важно, чтобы он имел наименьшую возможную степень. Таким многочленом, очевидно, является многочлен наилучшего равномерного приближения к функции $f(x)$ на $[a, b]$ из совокупности H_n при n , для которого выполняется неравенство

$$E_n(f) \leq \varepsilon < E_{n-1}(f).$$

§ 6. О полноте и замкнутости ортогональных систем

Всюду в этом параграфе под классом функций $Q[a, b]$ мы будем понимать множество всех кусочно-непрерывных на $[a, b]$ функций. Понятия полноты и замкнутости будут определены для функций из $Q[a, b]$; основные теоремы о полноте и замкнутости будут также

доказаны для функций этого класса (теоремы 11.6—11.10 настоящего параграфа).

Следует заметить, однако, что все это может быть сделано и для значительно более широкого класса функций — для функций, интегрируемых с квадратом на $[a, b]$, или даже для функций, интегрируемых с квадратом с некоторым весом $p(x)$ на $[a, b]$ (см. Дополнение 2 к гл. 11).

1. Понятие полноты ортогональной системы. Ортогональная на $[a, b]$ система функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (11.134)$$

называется *полной* в $Q[a, b]$, если для каждой функции $f(x)$ из $Q[a, b]$ ее ряд Фурье по ортогональной системе (11.134)

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (11.135)$$

где

$$c_k = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx, \quad \|\varphi_k\| = \left(\int_a^b \varphi_k^2(x) dx \right)^{1/2}, \quad (11.136)$$

сходится к $f(x)$ в среднем на $[a, b]$, т. е.

$$\rho^2 \left(f, \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right) = \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right]^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty. \quad (11.137)$$

В этом случае говорят, что система (11.134) образует базис пространства $Q[a, b]$, так как для каждого «элемента» $f(x) \in Q[a, b]$ в случае полноты системы (11.134) имеет место обобщенное равенство

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \varphi_k(x), \quad \text{где } c_k = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx, \quad (11.138)$$

которое следует понимать в смысле сходимости в среднем на отрезке $[a, b]$, т. е. в смысле выполнения соотношения (11.137).

2. Критерий полноты — равенство Парсеваля. Воспользуемся тождеством Бесселя

$$\begin{aligned} \rho^2 \left(f, \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right) &= \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right]^2 dx = \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=1}^n c_k^2 \|\varphi_k\|^2 \end{aligned} \quad (11.139)$$

(см. п. 3 § 3). Переходя в нем к пределу при $n \rightarrow +\infty$, получим

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho^2 \left(f, \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right) = \int_a^b f^2(x) dx - \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2, \quad (11.140)$$

откуда следует, что равенство

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \rho^2 \left(f, \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k \right) = 0 \quad (11.141)$$

равносильно равенству

$$\int_a^b f^2(x) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2. \quad (11.142)$$

Равенство (11.142) называется *равенством Парсеваля*. Таким образом, для того чтобы ортогональная система (11.134) была полна в $Q[a, b]$, необходимо и достаточно, чтобы для любой функции $f(x) \in Q[a, b]$ выполнялось равенство Парсеваля (11.142).

3. Свойства полных систем. *Ортогональная на $[a, b]$ система*

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (11.143)$$

называется замкнутой в $Q[a, b]$, если любая функция $f(x) \in Q[a, b]$, ортогональная на $[a, b]$ всем функциям системы (11.143), является нулем пространства $Q[a, b]$, т. е. равна нулю всюду в точках непрерывности $f(x)$, и, следовательно, может быть отлична от нуля лишь в конечном числе точек на $[a, b]$.

Теорема 11.6. *Если ортогональная на $[a, b]$ система (11.143) полна в $Q[a, b]$, то она и замкнута в $Q[a, b]$.*

Доказательство. Пусть кусочно-непрерывная функция $f(x)$ ортогональна всем функциям системы (11.143) на $[a, b]$, т. е.

$$\int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = 0 \quad \text{при } k = 1, 2, \dots$$

Тогда коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по системе (11.143) равны нулю:

$$c_k = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx = 0, \quad k = 1, 2, \dots \quad (11.144)$$

В силу полноты системы (11.143) в $Q[a, b]$, для любой функции $f(x) \in Q[a, b]$ будет выполняться равенство Парсеваля

$$\int_a^b f^2(x) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 \|\varphi_k\|^2. \quad (11.145)$$

но, в силу (11.144), из (11.145) следует, что

$$\int_a^b f^2(x) dx = 0. \quad (11.146)$$

Пусть $f(x_0) \neq 0$, где $x_0 \in [a, b]$ является точкой непрерывности $f(x)$. Заклучим x_0 в отрезок $[a', b']$, на котором $f(x)$ непрерывна и который содержится в $[a, b]$. Так как $f^2(x)$ непрерывна и неотрицательна на $[a', b']$, причем $f^2(x_0) > 0$, то $\int_{a'}^{b'} f^2(x) dx > 0$. Но тогда

и подавно $\int_a^b f^2(x) dx > 0$, что противоречит равенству (11.146).

Следовательно, $f(x) \equiv 0$ в точках непрерывности на $[a, b]$. Теорема доказана.

Теорема 11.7. Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ из $Q[a, b]$ имеют один и тот же ряд Фурье по полной ортогональной системе на $[a, b]$, то они как элементы пространства $Q[a, b]$ совпадают, т. е. могут отличаться лишь в конечном числе точек на $[a, b]$.

Доказательство. Функция $\psi(x) = (f(x) - g(x)) \in Q[a, b]$ ортогональна всем функциям системы (11.143) на $[a, b]$. Действительно,

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(x) \varphi_k(x) dx &= \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx - \int_a^b g(x) \varphi_k(x) dx = \\ &= c_k^f \|\varphi_k\|^2 - c_k^g \|\varphi_k\|^2 = (c_k^f - c_k^g) \|\varphi_k\|^2, \quad k = 1, 2, 3, \dots, \end{aligned} \quad (11.147)$$

где c_k^f — коэффициент Фурье функции $f(x)$, а c_k^g — коэффициент Фурье функции $g(x)$. Так как по условию ряды Фурье этих функций совпадают, т. е. $c_k^f = c_k^g$ при $k = 1, 2, \dots$, то из (11.147) следует, что

$$\int_a^b \psi(x) \varphi_k(x) dx = 0 \quad \text{при} \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (11.148)$$

Но тогда по предыдущей теореме разность $\psi(x) = f(x) - g(x)$ тождественно равна нулю на $[a, b]$ в точках непрерывности $\psi(x)$, а следовательно, может быть отличной от нуля лишь в конечном числе точек на $[a, b]$, что и требовалось доказать.

Теорема 11.8. Если ортогональная на $[a, b]$ система (11.143) является полной в $Q[a, b]$, то для любых двух функций $f(x)$ и $g(x)$ из $Q[a, b]$ имеет место обобщенное равенство

Парсеваля

$$\int_a^b f(x) g(x) dx = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k^f c_k^g \|\varphi_k\|^2, \quad (11.149)$$

где c_k^f и c_k^g — коэффициенты Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ по ортогональной системе (11.143).

Доказательство. Равенство (11.149) получается, если написать равенство Парсеваля для функций $f(x) + g(x)$ и $f(x) - g(x)$, а затем вычесть их и разделить результат пополам.

Теорема 11.9. Если $f(x) \in Q[a, b]$, а ортогональная на $[a, b]$ система $\{\varphi_l(x)\}$ полна в $Q[a, b]$, то ряд Фурье функции $f(x)$ по системе $\{\varphi_l(x)\}$ можно интегрировать почленно т. е.

$$\int_{x_0}^x f(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \int_{x_0}^x \varphi_k(\xi) d\xi \quad (11.150)$$

при любых x_0 и x из отрезка $[a, b]$, причем ряд (11.150) сходится равномерно по x на $[a, b]$.

Доказательство. Справедливость этой теоремы вытекает из сходимости в среднем ряда Фурье $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \varphi_k(x)$ к $f(x)$ на $[a, b]$ и теоремы о почленном интегрировании рядов, сходящихся в среднем (см. п. 3 § 6 гл. 8).

4. Полнота основной тригонометрической системы.

Теорема 11.10. Основная тригонометрическая система

$$\frac{1}{2}, \cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}, \dots, \cos \frac{k\pi x}{l}, \sin \frac{k\pi x}{l}, \dots \quad (11.151)$$

полна в $Q[-l, l]$.

Доказательство. Требуется доказать, что для любой кусочно-непрерывной функции $f(x)$ на $[-l, l]$ будет

$$\rho^2(f, T_n^f) = \int_{-l}^l [f(x) - T_n^f(x)]^2 dx \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty, \quad (11.152)$$

где

$$T_n^f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right)$$

— многочлен Фурье функции $f(x)$ по системе (11.151).

Пусть $|f(x)| < M$ на $[-l, l]$ и пусть $\varepsilon > 0$. Не нарушая общности рассуждений, можно предположить, что $f(x)$ имеет единственную точку разрыва x_0 , лежащую внутри $[-l, l]$. Построим такую непрерывную на отрезке $[-l, l]$ функцию $g(x)$, чтобы она имела

равные значения на его концах: $g(-l) = g(l)$, и чтобы выполнялось неравенство

$$\rho^2(f, g) = \int_{-l}^l [f(x) - g(x)]^2 dx < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (11.153)$$

Для этого, взяв $\delta > 0$ достаточно малым, положим $g(x) = f(x)$ при $-l \leq x \leq x_0 - \delta$ и при $x_0 + \delta \leq x \leq l - \delta$, а на отрезках $x_0 - \delta \leq x \leq x_0 + \delta$, $l - \delta \leq x \leq l$ будем считать $g(x)$ линейной (см. рис. 11.10, на котором график $f(x)$ изображен сплошной линией, а график функции $g(x)$ — пунктиром с длинными штрихами).

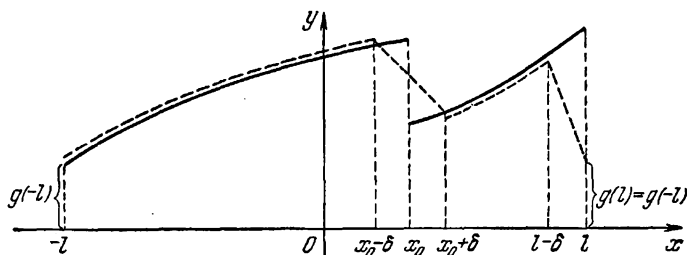


Рис. 11.10.

В силу определения $g(x)$, имеем $g(-l) = g(l) = f(-l)$, причем разность $f(x) - g(x)$ может быть отличной от нуля только при $x_0 - \delta < x < x_0 + \delta$ и при $l - \delta < x < l$. Поэтому будем иметь

$$\begin{aligned} \rho^2(f, g) &= \int_{-l}^l [f(x) - g(x)]^2 dx = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} [f(x) - g(x)]^2 dx + \\ &+ \int_{l - \delta}^l [f(x) - g(x)]^2 dx \leq \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \{|f(x)| + |g(x)|\}^2 dx + \\ &+ \int_{l - \delta}^l \{|f(x)| + |g(x)|\}^2 dx \leq 4M^2 2\delta + 4M^2 \delta = 12M^2 \delta < \frac{\varepsilon}{4}, \end{aligned}$$

если только взять $\delta > 0$ достаточно малым. Так как $g(x)$ непрерывна на отрезке $[-l, l]$ и имеет равные значения на его концах: $g(-l) = g(l)$, то по первой теореме Вейерштрасса (теорема 11.4) найдется такой тригонометрический многочлен

$$T_{n_0}(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^n \left(\alpha_k \cos \frac{k\pi x}{l} + \beta_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right),$$

что

$$|g(x) - T_{n_0}(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{8l}} \quad \text{при всех } x \in [-l, l]. \quad (11.154)$$

Следовательно,

$$\rho^2(g, T_{n_0}) = \int_{-l}^l |g(x) - T_{n_0}(x)|^2 dx < \frac{\varepsilon}{8l} \int_{-l}^l dx = \frac{\varepsilon}{4}. \quad (11.155)$$

Воспользуемся теперь элементарным неравенством

$$(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2,$$

положив $a = f(x) - g(x)$, $b = g(x) - T_{n_0}(x)$; это даст

$$[f(x) - T_{n_0}(x)]^2 \leq 2[f(x) - g(x)]^2 + [g(x) - T_{n_0}(x)]^2$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \rho^2(f, T_{n_0}) &= \int_{-l}^l [f(x) - T_{n_0}(x)]^2 dx \leq 2 \int_{-l}^l [f(x) - g(x)]^2 dx + \\ &+ 2 \int_{-l}^l [g(x) - T_{n_0}(x)]^2 dx < 2 \frac{\varepsilon}{4} + 2 \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Если в последнем неравенстве заменить тригонометрический многочлен $T_{n_0}(x)$ тригонометрическим многочленом Фурье $T_{n_0}^f(x)$ функции $f(x)$, то и подавно будет

$$\rho^2(f, T_{n_0}^f) < \varepsilon, \quad (11.156)$$

так как при подстановке $T_{n_0}^f$ вместо T_{n_0} квадратичное отклонение достигает своего минимума.

Воспользовавшись тождеством Бесселя, перепишем неравенство (11.156) так:

$$\rho^2(f, T_{n_0}^f) = \int_{-l}^l f^2(x) dx - l \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n_0} (a_k^2 + b_k^2) \right\} < \varepsilon. \quad (11.157)$$

Следовательно, и подавно будет

$$\rho^2(f, T_n^f) = \int_{-l}^l f^2(x) dx - l \left\{ \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right\} < \varepsilon \quad (11.158)$$

при всех $n \geq n_0$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, это означает, что $\rho^2(f, T_n^f) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow +\infty$, что и требовалось доказать.

Из доказанной полноты тригонометрической системы следует, согласно предыдущему, ее замкнутость, а также однозначная определенность кусочно-непрерывной функции $f(x)$ ее тригонометрическим рядом Фурье всюду на отрезке $[-l, l]$, кроме, быть может, конечного числа точек (точек разрыва $f(x)$). Впервые полноту тригонометрической системы доказал А. М. Ляпунов.

Б. Полнота других классических ортогональных систем, используемых в математической физике, доказывается аналогично. Рассмотрим, например, доказательство полноты системы полиномов Лежандра. Пусть $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[-1, 1]$ и пусть дано произвольное $\varepsilon > 0$. Заменяем $f(x)$ непрерывной на $[-1, 1]$ функцией $g_\varepsilon(x)$, для которой

$$\rho^2(f, g_\varepsilon) = \int_{-1}^1 [f(x) - g_\varepsilon(x)]^2 dx < \frac{\varepsilon}{4}, \quad (11.159)$$

аналогично тому, как это делалось в доказательстве полноты тригонометрической системы; только здесь уже незачем добиваться равенства значений функции $g_\varepsilon(x)$ на концах отрезка $[-1, 1]$. По второй теореме Вейерштрасса (теорема 11.5) найдется такой алгебраический многочлен

$$Q_m(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 + \dots + A_mx^m.$$

что равномерно на отрезке $[-1, 1]$ будет выполняться неравенство

$$|g_\varepsilon(x) - Q_m(x)| < \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}},$$

а следовательно, и неравенство

$$\rho^2(g_\varepsilon, Q_m) = \int_{-1}^{+1} [g_\varepsilon(x) - Q_m(x)]^2 dx < \frac{\varepsilon}{4}. \quad (11.160)$$

Так как $1, x, x^2, \dots, x^m$ являются линейными комбинациями полиномов Лежандра, то

$$Q_m(x) = B_0 + B_1P_1(x) + B_2P_2(x) + \dots + B_mP_m(x),$$

где $P_1(x), \dots, P_m(x)$ — полиномы Лежандра.

Из (11.159) и (11.160), в силу неравенства $(a+b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$, следует, что

$$\rho^2(f, Q_m) \leq 2\rho^2(f, g_\varepsilon) + 2\rho^2(g_\varepsilon, Q_m) \leq 2\frac{\varepsilon}{4} + 2\frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon. \quad (11.161)$$

*) См. Дополнение 1 к гл. 11.

Если в выражении $\rho^2(f, Q_m)$ коэффициенты B_0, \dots, B_m заменить коэффициентами Фурье функции $f(x)$ по системе полиномов Лежандра

$$c_k = \frac{1}{\|P_k\|^2} \int_{-1}^{+1} f(x) P_k(x) dx, \quad k = 0, 1, \dots, m, \quad (11.162)$$

то, в силу минимизирующего свойства коэффициентов Фурье, квадратичное отклонение $\rho^2(f, Q'_m)$ не увеличится. Поэтому, вводя обозначение

$$Q'_m(x) = c_0 + c_1 P_1(x) + \dots + c_m P_m(x), \quad (11.163)$$

получим, что

$$\rho^2(f, Q'_m) < \varepsilon. \quad (11.164)$$

В силу тождества Бесселя

$$\rho^2(f, Q'_n) = \int_{-1}^{+1} f^2(x) dx - \sum_{k=1}^n c_k^2 \|P_k\|^2, \quad (11.165)$$

получим, что из выполнения неравенства (11.164) вытекает также выполнение неравенства

$$\rho^2(f, Q'_n) < \varepsilon \quad (11.166)$$

при всех $n \geq m$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$, это означает, что

$$\rho^2(f, Q'_n) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty. \quad (11.167)$$

Этим полнота системы полиномов Лежандра в $Q[-1, 1]$ доказана.

§ 7. Ряды Фурье по ортогональным системам комплексных функций и комплексная запись тригонометрического ряда Фурье

В данном параграфе наряду с вещественными функциями мы будем рассматривать комплексные функции вещественной переменной x , а именно, функции вида

$$\varphi(x) = \varphi^*(x) + i\varphi^{**}(x), \quad (11.168)$$

где $\varphi^*(x)$ и $\varphi^{**}(x)$ — вещественные функции. Функцию, комплексно сопряженную с $\varphi(x)$, т. е. отличающуюся знаком мнимой части, будем обозначать через $\bar{\varphi}(x)$; таким образом,

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi^*(x) - i\varphi^{**}(x). \quad (11.168')$$

Заметим, что

$$\varphi(x) \bar{\varphi}(x) = [\varphi^*(x)]^2 + [\varphi^{**}(x)]^2 = |\varphi(x)|^2 \geq 0. \quad (11.169)$$

Функция $\varphi(x) = \varphi^*(x) + i\varphi^{**}(x)$ называется *непрерывной* (кусочно-непрерывной) на $[a, b]$, если ее вещественная и мнимая части, т. е. $\varphi^*(x)$ и $\varphi^{**}(x)$, непрерывны (кусочно-непрерывны) на $[a, b]$.

Производная и интеграл от функции $\varphi(x) = \varphi^*(x) + i\varphi^{**}(x)$ определяются соответственно равенствами

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi^*}{dx} + i \frac{d\varphi^{**}}{dx}, \quad (11.170)$$

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b \varphi^*(x) dx + i \int_a^b \varphi^{**}(x) dx, \quad (11.171)$$

причем $\varphi(x) = \varphi^*(x) + i\varphi^{**}(x)$ называется *дифференцируемой* (интегрируемой), если $\varphi^*(x)$ и $\varphi^{**}(x)$ дифференцируемы (интегрируемы).

Если $\varphi(x) = \varphi^*(x) + i\varphi^{**}(x)$ и $\psi(x) = \psi^*(x) + i\psi^{**}(x)$ интегрируемы на $[a, b]$, то, очевидно, функция $\varphi(x)\bar{\psi}(x)$ также интегрируема на $[a, b]$. В частности, если $\varphi(x)$ интегрируема на $[a, b]$, то $\varphi(x)\bar{\varphi}(x)$ также интегрируема на $[a, b]$, причем

$$\int_a^b \varphi(x)\bar{\varphi}(x) dx = \int_a^b |\varphi(x)|^2 dx = \int_a^b \{[\varphi^*(x)]^2 + [\varphi^{**}(x)]^2\} dx \geq 0.$$

Функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, интегрируемые на $[a, b]$, называются *ортogonalными* на этом отрезке, если

$$\int_a^b \varphi(x)\bar{\psi}(x) dx = 0. \quad (11.172)$$

Система комплексных функций

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots, \quad (11.173)$$

интегрируемых на $[a, b]$, называется *ортogonalной* на $[a, b]$, если

$$\int_a^b \varphi_j(x)\bar{\varphi}_k(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{при } j \neq k, \\ \|\varphi_k\|^2 > 0 & \text{при } j = k, \end{cases} \quad (11.174)$$

причем *нормой* интегрируемой функции $\varphi(x)$ называется неотрицательное число

$$\|\varphi\| = \left(\int_a^b \varphi(x)\bar{\varphi}(x) dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_a^b |\varphi(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (11.175)$$

Одним из важнейших примеров ортогональных систем комплексных функций является система

$$e^{i \frac{n\pi x}{l}}, \quad n=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (11.176)$$

ортогональная на отрезке $[-l, l]$. Ортогональность $e^{i \frac{k\pi x}{l}}$ и $e^{i \frac{n\pi x}{l}}$ при $k \neq n$ устанавливается непосредственным интегрированием произведения

$$\begin{aligned} e^{i \frac{k\pi x}{l}} \overline{\left(e^{i \frac{n\pi x}{l}} \right)} &= e^{i \frac{k\pi x}{l}} e^{-i \frac{n\pi x}{l}} = e^{i \frac{(k-n)\pi x}{l}} = \\ &= \cos \frac{(k-n)\pi x}{l} + i \sin \frac{(k-n)\pi x}{l}. \end{aligned}$$

Для норм получаем значения

$$\left\| e^{i \frac{n\pi x}{l}} \right\| = \left(\int_{-l}^l e^{i \frac{n\pi x}{l}} e^{-i \frac{n\pi x}{l}} dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{-l}^l dx \right)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2l}. \quad (11.177)$$

Коэффициенты Фурье для любой функции $f(x)$, интегрируемой на $[a, b]$, по ортогональной системе (11.173) определяются по формулам

$$c_k = \frac{1}{\|\varphi_k\|^2} \int_a^b f(x) \overline{\varphi_k(x)} dx, \quad k=1, 2, \dots \quad (11.178)$$

Рядом Фурье функции $f(x)$ по ортогональной системе (11.173) называется ряд

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \varphi_k(x), \quad (11.179)$$

коэффициентами c_k которого являются числа (11.178).

В частности, коэффициенты Фурье $f(x)$ по системе (11.176) равны

$$c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{k\pi x}{l}} dx, \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (11.178')$$

а ряд Фурье (11.179) по этой системе принимает вид

$$f(x) \sim \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{l}}. \quad (11.179')$$

Докажем, что если функция $f(x)$ вещественна на отрезке $[-l, l]$, то соотношения (11.178') и (11.179') эквивалентны соотношениям

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k = 0, 1, 2, \dots; \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi x}{l} dx, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (11.180)$$

и

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \quad (11.181)$$

т. е. что соотношения (11.178) и (11.179) являются комплексной записью коэффициентов Фурье и ряда Фурье для функции $f(x)$ по основной тригонометрической системе.

Применяя формулу Эйлера

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$$

к (11.178'), получим

$$c_0 = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) dx = \frac{a_0}{2}; \quad (11.182)$$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{k\pi x}{l}} dx = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \left[\cos \frac{k\pi x}{l} - i \sin \frac{k\pi x}{l} \right] dx = \\ &= \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad k = 1, 2, \dots; \end{aligned} \quad (11.183)$$

$$\begin{aligned} c_{-k} &= \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{i \frac{k\pi x}{l}} dx = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) \left[\cos \frac{k\pi x}{l} + i \sin \frac{k\pi x}{l} \right] dx = \\ &= \frac{a_k + ib_k}{2}, \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (11.184)$$

Ряд (11.179') можно переписать в виде

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{l}} = c_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} c_k e^{i \frac{k\pi x}{l}} + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{-k} e^{-i \frac{k\pi x}{l}}. \quad (11.185)$$

Подставляя в (11.185) выражения (11.182), (11.183) и (11.184) коэффициентов c_0 , c_k и c_{-k} и используя формулы Эйлера

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i},$$

получим равенство

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{l}} &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k - ib_k}{2} e^{i \frac{k\pi x}{l}} + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{a_k + ib_k}{2} e^{-i \frac{k\pi x}{l}} = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left[a_k \frac{e^{i \frac{k\pi x}{l}} + e^{-i \frac{k\pi x}{l}}}{2} + b_k \frac{e^{i \frac{k\pi x}{l}} - e^{-i \frac{k\pi x}{l}}}{2i} \right] = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \quad (11.186) \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Если функция $f(x)$ является не только интегрируемой, но и кусочно-гладкой на $[-l, l]$, то, в силу основной теоремы о сходимости тригонометрического ряда Фурье и в силу равенства (11.186), можно написать

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{i \frac{n\pi x}{l}}, \quad (11.187)$$

где коэффициенты Фурье определяются по формулам (11.178), причем в левой части равенства (11.187) $f(x)$ в точках разрыва нужно заменить через $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, если $-l < x < l$, а в точках $x = \pm l$ через $\frac{f(l-0) + f(l+0)}{2}$.

Комплексная запись (11.178), (11.179) разложения функции $f(x)$ в тригонометрический ряд Фурье широко используется в математике и ее приложениях. Она весьма удобна при выполнении различных выкладок, в частности, где фигурируют произведения тригонометрических рядов Фурье, а также при рассмотрении тригонометрических рядов Фурье для функций нескольких независимых переменных.

§ 8. Тригонометрические ряды Фурье для функций нескольких независимых переменных

Пусть функция $f(x, y)$ определена в прямоугольнике $-l_1 \leq x \leq l_1$, $-l_2 \leq y \leq l_2$ и при каждом $y \in [-l_2, l_2]$ удовлетворяет условиям, при которых ее можно разложить в тригонометрический ряд Фурье, как функцию x на отрезке $[-l_1, l_1]$. Тогда, воспользовавшись комплексным представлением для тригонометрического ряда Фурье, получим

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n(y) e^{i \frac{n\pi x}{l_1}}, \quad (11.188)$$

где

$$c_n(y) = \frac{1}{2l_1} \int_{-l_1}^{l_1} f(\xi, y) e^{-\frac{n\pi\xi}{l_1}} d\xi, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11.189)$$

Пусть каждую из функций $c_n(y)$ в свою очередь можно разложить на отрезке $-l_2 \leq y \leq l_2$ в тригонометрический ряд Фурье, т. е.

$$c_n(y) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{nm} e^{i \frac{m\pi y}{l_2}}, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (11.190)$$

где

$$c_{nm} = \frac{1}{2l_2} \int_{-l_2}^{l_2} c_n(\eta) e^{-i \frac{m\pi\eta}{l_2}} d\eta, \quad n, m = 0; \pm 1, \pm 2, \dots \quad (11.191)$$

Тогда, подставляя (11.189) в (11.191) и (11.190) в (11.188), получим

$$f(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} c_{nm} e^{i \left(\frac{n\pi x}{l_1} + \frac{m\pi y}{l_2} \right)}, \quad (11.192)$$

где

$$c_{nm} = \frac{1}{4l_1 l_2} \int_{-l_1}^{l_1} \int_{-l_2}^{l_2} f(\xi, \eta) e^{-i \left(\frac{n\pi\xi}{l_1} + \frac{m\pi\eta}{l_2} \right)} d\xi d\eta. \quad (11.193)$$

Так мы получили разложение функции двух переменных в тригонометрический ряд Фурье в комплексной форме.

Воспользовавшись формулой Эйлера $e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi$, разложение (11.192) можно переписать в следующей форме:

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{n, m=-\infty}^{+\infty} c_{nm} \left(\cos \frac{n\pi x}{l_1} + i \sin \frac{n\pi x}{l_1} \right) \left(\cos \frac{m\pi y}{l_2} + i \sin \frac{m\pi y}{l_2} \right) = \\ &= \sum_{m, n=-\infty}^{+\infty} \lambda_{mn} \left[a_{mn} \cos \frac{n\pi x}{l_1} \cos \frac{m\pi y}{l_2} + b_{mn} \sin \frac{n\pi x}{l_1} \cos \frac{m\pi y}{l_2} + \right. \\ &\quad \left. + c'_{mn} \cos \frac{n\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2} + d_{mn} \sin \frac{n\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2} \right], \quad (11.194) \end{aligned}$$

где

$$\lambda_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{при } m = n = 0, \\ \frac{1}{2} & \text{при } m = 0, n > 0 \text{ или } m > 0, n = 0, \\ 1 & \text{при } m > 0, n > 0 \end{cases} \quad (11.195)$$

и

$$\begin{aligned}
 a_{mn} &= \frac{1}{l_1 l_2} \int_{-l_1}^{l_1} \int_{-l_2}^{l_2} f(x, y) \cos \frac{n\pi x}{l_1} \cos \frac{m\pi y}{l_2} dx dy; \\
 b_{mn} &= \frac{1}{l_1 l_2} \int_{-l_1}^{l_1} \int_{-l_2}^{l_2} f(x, y) \sin \frac{n\pi x}{l_1} \cos \frac{m\pi y}{l_2} dx dy; \\
 c'_{mn} &= \frac{1}{l_1 l_2} \int_{-l_1}^{l_1} \int_{-l_2}^{l_2} f(x, y) \cos \frac{n\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2} dx dy, \\
 d_{mn} &= \frac{1}{l_1 l_2} \int_{-l_1}^{l_1} \int_{-l_2}^{l_2} f(x, y) \sin \frac{n\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2} dx dy. \quad (11.196)
 \end{aligned}$$

Если $f(x, y)$ является четной функцией по каждому из аргументов, т. е.

$$f(-x, y) = f(x, -y) = f(x, y), \quad (11.197)$$

то, как легко усмотреть, $b_{mn} = c'_{mn} = d_{mn} = 0$ и ряд Фурье для такой функции принимает вид

$$f(x, y) = \sum_{m, n=0}^{+\infty} \lambda_{mn} a_{mn} \cos \frac{n\pi x}{l_1} \cos \frac{m\pi y}{l_2}. \quad (11.198)$$

Если $f(x, y)$ нечетна по x и по y , то для нее могут быть отличными от нуля только d_{mn} , так что ряд Фурье принимает вид

$$f(x, y) = \sum_{m, n=0}^{+\infty} d_{mn} \sin \frac{n\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2}. \quad (11.199)$$

Если $f(x, y)$ четна по y и нечетна по x , то она разлагается в ряд по $\sin \frac{n\pi x}{l_1} \cos \frac{m\pi y}{l_2}$; если же она нечетна по y и четна по x , то разлагается в ряд по $\cos \frac{n\pi x}{l_1} \sin \frac{m\pi y}{l_2}$.

Мы не будем исследовать условий разложимости функции $f(x, y)$ в двойной тригонометрический ряд Фурье, а сформулируем без доказательства, что если $f(x, y)$, $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ являются непрерывными функциями, периодическими по x с периодом $2l_1$ и по y с периодом $2l_2$, то тригонометрический ряд Фурье функции $f(x, y)$ сходится к $f(x, y)$ в каждой точке.

§ 9. Интеграл Фурье

1. Неограниченное растяжение интервала разложения функции в ряд Фурье и интегральная формула Фурье. Если интервал $[-l, l]$, на котором функция $f(x)$ разлагается в тригонометрический ряд Фурье, неограниченно возрастает, т. е. $l \rightarrow +\infty$, то ряд Фурье превращается в интеграл Фурье. При переходе к пределу происходит качественный скачок: функция, заданная на любом конечном интервале $[-l, l]$, разлагается в ряд «гармонических колебаний», частоты которых образуют дискретную последовательность; функция $f(x)$, заданная на всей оси x или на полуоси x , разлагается в интеграл, который представляет собой сумму «гармонических колебаний», частоты которых непрерывно заполняют действительную полуось $0 \leq \lambda < +\infty$. Рассмотрим этот предельный переход от ряда Фурье к интегралу Фурье.

Пусть $f(x)$ задана на всей оси x и на каждом конечном отрезке $[-l, l]$ является кусочно-гладкой. Тогда, в силу основной теоремы о сходимости тригонометрического ряда Фурье, при любом $l > 0$

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \quad (11.200)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) d\xi, & a_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{k\pi \xi}{l} d\xi, \\ b_k &= \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \sin \frac{k\pi \xi}{l} d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (11.201)$$

Равенство (11.200) имеет место, если x — внутренняя точка отрезка $[-l, l]$, в которой $f(x)$ непрерывна; если же x — внутренняя точка этого отрезка, в которой $f(x)$ разрывна, то в левой части равенства (11.200) $f(x)$ нужно заменить через $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$.

Подставляя выражения (11.201) в (11.200), получим

$$f(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(\xi) d\xi + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{k\pi}{l} (\xi - x) d\xi. \quad (11.202)$$

Если $f(x)$ еще и абсолютно интегрируема на всей оси x , т. е.

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx = Q < +\infty, \quad (11.203)$$

то при переходе к пределу при $l \rightarrow +\infty$ первое слагаемое в правой части (11.202) в силу условия (11.203) стремится к нулю. Следовательно,

$$f(x) = \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{+\infty} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{k\pi}{l} (\xi - x) d\xi. \quad (11.204)$$

Положим $\frac{k\pi}{l} = \lambda_k$, $\frac{\pi}{l} = \Delta\lambda_k$. Тогда (11.204) можно переписать в виде

$$f(x) = \lim_{\substack{l \rightarrow +\infty \\ \Delta\lambda_k \rightarrow 0}} \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{+\infty} \Delta\lambda_k \int_{-l}^l f(\xi) \cos \lambda_k (\xi - x) d\xi. \quad (11.205)$$

Будем теперь рассуждать нестрого:

1) при больших значениях l интеграл $\int_{-l}^l f(\xi) \cos \lambda_k (\xi - x) d\xi$ можно

заменить интегралом $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda_k (\xi - x) d\xi$,

2) $\sum_{k=1}^{+\infty} \Delta\lambda_k \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda_k (\xi - x) d\xi$ является интегральной суммой

для интеграла $\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda (\xi - x) d\xi$, поэтому из (11.205) получаем

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda (\xi - x) d\xi, \quad (11.206)$$

где в левой части равенства (11.206) вместо $f(x)$ нужно писать $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$, если x является точкой разрыва функции $f(x)$.

Равенство (11.206) называется *интегральной формулой Фурье*, а интеграл, стоящий в ее правой части, — *интегралом Фурье*.

2. Обоснование интегральной формулы Фурье. Равенство (11.206) было получено с помощью формальных предельных переходов, которые не были обоснованы. Вместо того чтобы их обосновывать, удобнее непосредственно доказывать справедливость равенства (11.206).

Теорема 11.11. Если функция $f(x)$, кусочно-гладкая на каждом конечном отрезке оси x , абсолютно интегрируема

на всей оси x , т. е. интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx$ сходится, то

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^l d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda (\xi - x) d\xi = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}. \quad (11.207)$$

Доказательство. Заметим прежде всего, что интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda (\xi - x) d\xi$, зависящий от параметра λ , сходится равномерно по параметру λ при $0 \leq \lambda < +\infty$, так как $|f(\xi) \cos \lambda (\xi - x)| \leq |f(\xi)|$, а интеграл $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi)| d\xi$ по условию сходится. Следовательно, можно изменить порядок интегрирования (см. п. 3 § 2 гл. 10), т. е. записать так:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^l d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda (\xi - x) d\xi &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi \int_0^l f(\xi) \cos \lambda (\xi - x) d\lambda = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \frac{\sin l(\xi - x)}{\xi - x} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x + \zeta) \frac{\sin l\zeta}{\zeta} d\zeta, \end{aligned} \quad (11.208)$$

где $\zeta = \xi - x$, $d\zeta = d\xi$. Нам остается доказать, что

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^0 f(x + \zeta) \frac{\sin l\zeta}{\zeta} d\zeta = \frac{f(x-0)}{2}, \quad (11.209)$$

$$\lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x + \zeta) \frac{\sin l\zeta}{\zeta} d\zeta = \frac{f(x+0)}{2}. \quad (11.210)$$

При доказательстве мы воспользуемся известным соотношением

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin l\zeta}{\zeta} d\zeta = \frac{1}{2} \quad (11.211)$$

(см. п. 5 § 2 гл. 10).

Докажем, например, справедливость соотношения (11.210). В силу равенства (11.211), можно записать, что

$$\frac{f(x+0)}{2} = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x + \zeta) \frac{\sin l\zeta}{\zeta} d\zeta. \quad (11.212)$$

Поэтому разность между переменной величиной и предполагаемым пределом в соотношении (11.210) будет равна

$$\begin{aligned} J_{0, +\infty} &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} f(x+\zeta) \frac{\sin l\zeta}{\zeta} d\zeta - \frac{f(x+0)}{2} = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} [f(x+\zeta) - f(x+0)] \frac{\sin l\zeta}{\zeta} d\zeta. \end{aligned} \quad (11.213)$$

Таким образом, нужно доказать, что этот интеграл стремится к нулю при $l \rightarrow +\infty$. Разобьем интервал интегрирования $0 \leq \zeta < +\infty$ на три: $0 \leq \zeta \leq \delta$, $\delta \leq \zeta \leq \Delta$, $\Delta \leq \zeta < +\infty$; тогда интеграл (11.213) будет представлен в виде суммы трех интегралов

$$J_{0, +\infty} = J_{0, \delta} + J_{\delta, \Delta} + J_{\Delta, +\infty}. \quad (11.214)$$

После этого будем действовать следующим образом. Сначала, задавшись произвольным $\varepsilon > 0$, докажем, что при всех достаточно малых $\delta > 0$ и всех достаточно больших $\Delta > \delta$ будут выполняться неравенства

$$|J_{0, \delta}| < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{и} \quad |J_{\Delta, +\infty}| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (11.215)$$

сразу при всех $l \geq 1$. Затем, фиксировав δ и Δ так, чтобы выполнялись неравенства (11.215), выберем $l \geq 1$ столь большим, чтобы в силу основной леммы (см. § 5) выполнялось неравенство $|J_{\delta, \Delta}| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Отсюда, в силу (11.214), будет следовать, что $|J_{0, +\infty}| < \varepsilon$ при всех достаточно больших $l \geq 1$. Итак, оценим сначала интеграл

$$J_{0, \delta} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{f(x+\zeta) - f(x+0)}{\zeta} \sin l\zeta d\zeta.$$

При всех достаточно малых $\delta > 0$

$$\left| \frac{f(x+\zeta) - f(x+0)}{\zeta} \right| < |f'_{\text{прав}}(x)| + 1 \quad \text{при всех} \quad \zeta \in (0, \delta).$$

Следовательно,

$$|J_{0, \delta}| < \frac{\delta}{\pi} \{|f'_{\text{прав}}(x)| + 1\} < \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{при всех} \quad \delta < \frac{\varepsilon \pi}{3 \{|f'_{\text{прав}}(x)| + 1\}} \quad (11.216)$$

и при всех значениях l .

Оценим, далее, интеграл

$$J_{\Delta, +\infty} = \frac{1}{\pi} \int_{\Delta}^{+\infty} f(x+\zeta) \frac{\sin l\zeta}{\zeta} d\zeta - \frac{f(x+0)}{\pi} \int_{\Delta}^{+\infty} \frac{\sin l\zeta}{\zeta} d\zeta.$$

Мы имеем

$$\begin{aligned} |J_{\Delta, +\infty}| &\leq \frac{1}{\pi} \int_{\Delta}^{+\infty} |f(x+\zeta)| \frac{d\zeta}{\zeta} + \frac{|f(x+0)|}{\pi} \left| \int_{\Delta}^{+\infty} \frac{\sin l\zeta}{\zeta} d\zeta \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\pi\Delta} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x+\zeta)| d\zeta + \frac{|f(x+0)|}{\pi} \left| \int_{l\Delta}^{+\infty} \frac{\sin \zeta^*}{\zeta^*} d\zeta^* \right| = \\ &= \frac{Q}{\pi\Delta} + \frac{|f(x+0)|}{\pi} \left| \int_{l\Delta}^{+\infty} \frac{\sin \zeta^*}{\zeta^*} d\zeta^* \right|, \quad \text{где } \zeta^* = l\zeta. \quad (11.217) \end{aligned}$$

Напомним, что, согласно условию (11.203), $Q = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)| dx < \infty$,

поэтому при всех достаточно больших $\Delta > 0$ будет $\frac{Q}{\pi\Delta} < \frac{\varepsilon}{6}$ сразу

для всех l . Далее, так как интеграл $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \zeta^*}{\zeta^*} d\zeta^*$ сходится, то при всех достаточно больших $\Delta > 0$ и всех $l \geq 1$

$$\frac{|f(x+0)|}{\pi} \left| \int_{l\Delta}^{+\infty} \frac{\sin \zeta^*}{\zeta^*} d\zeta^* \right| < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Следовательно, в силу (11.217)

$$|J_{\Delta, +\infty}| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (11.218)$$

при всех достаточно больших $\Delta > 0$ и всех $l \geq 1$.

Оценим, наконец, интеграл

$$J_{\delta, \Delta} = \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(x+\zeta) - f(x+0)}{\zeta} \sin l\zeta d\zeta. \quad (11.219)$$

Функция $\frac{f(x+\zeta) - f(x+0)}{\zeta}$ по переменной ζ является кусочно-гладкой на отрезке $\delta \leq \zeta \leq \Delta$. Поэтому, в силу основной леммы (см. § 5), при всех достаточно больших значениях $l \geq 1$ будет выполняться неравенство

$$|J_{\delta, \Delta}| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (11.220)$$

Сопоставляя (11.216), (11.218) и (11.220), получим, что при всех достаточно больших $l \geq 1$

$$|J_{0, +\infty}| < \varepsilon, \quad (11.221)$$

что и требовалось доказать.

Замечание. Основная теорема об интеграле Фурье справедлива и при более слабых ограничениях, налагаемых на функцию $f(x)$. А именно, если абсолютно интегрируемая на всей оси x функция $f(x)$ 1) кусочно-непрерывна на каждом конечном отрезке оси x и 2) отношение $\left| \frac{f(x+\xi) - f(x+0)}{\xi} \right|$ ограничено при любом фиксированном x для всех достаточно малых ξ , то основная теорема сохраняет силу.

Действительно, доказательство основной теоремы сводится к оценке трех интегралов: $J_{0, \delta}$, $J_{\delta, \Delta}$, $J_{\Delta, +\infty}$ для $J_{0, +\infty}$ *). Последний из этих трех интегралов мал при достаточно большом Δ , в силу абсолютной интегрируемости $f(x)$. Интеграл $J_{0, \delta}$ мал при всех достаточно малых $\delta > 0$, если отношение $\left| \frac{f(x+\xi) - f(x+0)}{\xi} \right|$ ограничено при каждом фиксированном x для всех достаточно малых $\xi > 0$. В интеграле же

$$J_{\delta, \Delta} = \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\Delta} \frac{f(x+\xi) - f(x+0)}{\xi} \sin \xi d\xi$$

функция $\varphi(\xi) = \frac{f(x+\xi) - f(x+0)}{\xi}$ кусочно-непрерывна на отрезке $0 < \delta \leq \xi \leq \Delta$ при любом фиксированном x . Пусть $[a, b]$ — какой-либо сегмент, на котором $\varphi(\xi)$ непрерывна, и пусть дано какое угодно $\varepsilon > 0$. Построим такую кусочно-гладкую функцию $g_\varepsilon(x)$ (как при доказательстве первой теоремы Вейерштрасса), чтобы выполнялось неравенство

$$|\varphi(\xi) - g_\varepsilon(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad \text{при} \quad 0 < \delta \leq \xi \leq \Delta.$$

Но тогда

$$\left| \int_a^b \varphi(\xi) \sin \xi d\xi \right| \leq \int_a^b |\varphi(\xi) - g_\varepsilon(\xi)| d\xi + \left| \int_a^b g_\varepsilon(\xi) \sin \xi d\xi \right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

*) И соответствующих трех интегралов $J_{0, -\delta}$, $J_{-\delta, -\Delta}$, $J_{-\Delta, -\infty}$ для $J_{0, -\infty}$, которые рассматриваются совершенно аналогично.

при всех достаточно больших $l > 0$, так как для кусочно-гладкой функции $g_\varepsilon(\xi)$ справедлива основная лемма. Разбивая интеграл $J_{\delta, \Delta}$ на интегралы по сегментам непрерывности $\varphi(\xi)$, получаем, что $J_{\delta, \Delta} \rightarrow 0$ при $l \rightarrow +\infty$, чем и завершается доказательство теоремы.

3. Интеграл Фурье как разложение в сумму гармоник. Интегральную формулу Фурье (11.206) можно переписать следующим образом:

$$f(x) = \int_0^{+\infty} [A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x] d\lambda, \quad (11.222)$$

где

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi, \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi. \quad (11.223)$$

Равенство (11.222) аналогично разложению функции в тригонометрический ряд Фурье, а выражения (11.223) аналогичны формулам для коэффициентов Фурье. Выражение (11.222) можно несколько преобразовать. Мы имеем

$$A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x = N(\lambda) \sin(\lambda x + \varphi_\lambda), \quad (11.224)$$

где

$$N(\lambda) = \sqrt{A^2(\lambda) + B^2(\lambda)}, \quad \cos \varphi_\lambda = \frac{A(\lambda)}{N(\lambda)}, \quad \sin \varphi_\lambda = \frac{B(\lambda)}{N(\lambda)}. \quad (11.225)$$

Таким образом, соотношение (11.222) представляет собой разложение функции $f(x)$, заданной на бесконечном интервале $0 \leq \lambda < +\infty$, на гармонические колебания, частоты которых λ непрерывно заполняют действительную полуось $0 \leq \lambda < +\infty$, а функции $A(\lambda)$ и $B(\lambda)$ дают закон распределения амплитуд $0 \leq \lambda < +\infty$ и начальных фаз φ_λ в зависимости от частоты λ .

Если функция $f(x)$ задана на конечном отрезке $[-l, l]$, то, как было установлено выше, при надлежащих ограничениях она разлагается на «гармонические колебания»:

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right) = \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} N_k \sin(\lambda_k x + \varphi_k), \end{aligned} \quad (11.226)$$

частоты которых $\lambda_k = \frac{k\pi}{l}$, $k = 1, 2, \dots$, образуют арифметическую прогрессию.

4. Комплексная форма интеграла Фурье имеет вид

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi; \quad (11.227)$$

она эквивалентна действительной форме (11.206). В самом деле, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda(x - \xi) d\xi$ является четной функцией λ , а

$\int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda(x - \xi) d\xi$ — нечетной функцией λ ; поэтому

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda(\xi - x) d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda(x - \xi) d\xi,$$

$$0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda(x - \xi) d\xi.$$

Следовательно, в силу формулы Эйлера

$$e^{i\lambda(x-\xi)} \equiv \cos \lambda(x - \xi) + i \sin \lambda(x - \xi),$$

имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\lambda(x-\xi)} d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda(x - \xi) d\xi + \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda(x - \xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda(x - \xi) d\xi, \end{aligned}$$

откуда вытекает эквивалентность (11.206) и (11.227). При этом

интеграл $0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda(x - \xi) d\xi$ понимается, вообще говоря, в смысле главного значения (см § 3 гл. 9):

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda(x - \xi) d\xi &= \\ &= \lim_{l \rightarrow +\infty} \frac{1}{l} \int_{-l}^l d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda(x - \xi) d\xi. \end{aligned}$$

5. Преобразование Фурье. Равенство (11.227) можно переписать в виде

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\lambda x} d\lambda \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{i\lambda \xi} d\xi \right). \quad (11.228)$$

Если ввести обозначение

$$\bar{f}(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda \xi} d\xi, \quad (11.229)$$

то, согласно (11.228), получим

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda. \quad (11.230)$$

Функция $\bar{f}(\lambda)$ называется *образом Фурье* или *спектральной характеристикой функции* $f(x)$, заданной на всей вещественной оси x , $-\infty < x < +\infty$, а переход от $f(x)$ к $\bar{f}(\lambda)$ по формуле (11.229) называется *преобразованием Фурье*. Восстановление «оригинала» $f(x)$ по образу $\bar{f}(\lambda)$ с помощью формулы (11.230) называется *обратным преобразованием Фурье*.

Перефразируя основную теорему об интеграле Фурье, мы можем теперь утверждать, что справедлива

Теорема 11.12. Если $f(x)$ абсолютно интегрируема на всей оси x и является кусочно-гладкой на каждом ее конечном отрезке, то: 1) образ Фурье функции, определяемый соотношением (11.229), существует и 2) справедлива формула обращения (11.230), которую следует понимать как предельное соотношение:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{l \rightarrow +\infty} \int_{-l}^l \bar{f}(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda.$$

Замечание. В силу замечания к основной теореме об интеграле Фурье, теорема 11.12 сохраняет силу и для любой абсолютно интегрируемой на всей оси x функции $f(x)$, кусочно-непрерывной на каждом конечном ее отрезке, если отношение $\left| \frac{f(x+\xi) - f(x+0)}{\xi} \right|$ остается ограниченным при каждом фиксированном x для всех достаточно малых $|\xi|$. Преобразование Фурье для функций, заданных при $-\infty < x < +\infty$, находит широкое применение в математике и математической физике (см. Дополнение 4 к гл. 11).

Наряду с преобразованием Фурье, которое применяется для функций, заданных на всей бесконечной прямой $-\infty < x < +\infty$,

широко используются также синус- и косинус-преобразования Фурье для функций, заданных на полупрямой $0 \leq x < +\infty$. Остановимся на этих преобразованиях несколько подробнее. Раскрывая в формуле (11.206) косинус разности, получим

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi \cos \lambda x d\xi + \\ + \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi \sin \lambda x d\xi, \quad (11.231)$$

причем оба интеграла сходятся, в силу абсолютной интегрируемости $f(x)$, на всей оси x . Если $f(\xi)$ — четная функция, то $f(\xi) \sin \lambda \xi$ нечетная, а $f(\xi) \cos \lambda \xi$ четная, поэтому второе слагаемое в правой части (11.231) обращается в нуль и мы получаем

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \lambda x d\lambda \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi. \quad (11.232)$$

Если функция $f(x)$ нечетная, то аналогично находим, что

$$f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \sin \lambda x d\lambda \int_0^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi. \quad (11.233)$$

В случае, когда x является точкой разрыва, нужно в левых частях равенств (11.231), (11.232) и (11.233) заменить $f(x)$ на $\frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$.

Если $f(x)$ определена только на отрезке $0 \leq x < +\infty$, то ее можно продолжить на отрезок $-\infty < x < 0$ четно или нечетно, и тогда для $f(x)$ мы получим два различных представления:

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \cos \lambda x d\lambda \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi \right), \quad (11.234)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} \sin \lambda x d\lambda \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \right). \quad (11.235)$$

Если $f(x)$, заданная на полуоси $0 \leq x < +\infty$, непрерывна в точке $x=0$, то при четном продолжении она будет непрерывной в точке $x=0$ и как функция, определенная на всей оси, поэтому равенство (11.234) будет выполняться также при $x=0$. Напротив, равенство (11.235) будет выполняться при $x=0$ только в том случае, если $f(0)=0$, так как при нечетном продолжении функции

всегда $\frac{f(+0)+f(-0)}{2}=0$. Равенство (11.234) можно разложить на два более простых равенства следующим образом. Положим по определению

$$f_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi. \quad (11.236)$$

Тогда, согласно (11.234), будет

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f_c(\lambda) \cos \lambda x d\lambda. \quad (11.237)$$

Функция $f_c(\lambda)$ называется *косинус-образом Фурье функции $f(x)$* , заданной на полуоси $0 \leq x < +\infty$, а переход от $f(x)$ к $f_c(\lambda)$ по формуле (11.236) называется *косинус-преобразованием Фурье*. Восстановление «оригинала» $f(x)$ по косинус-образу $f_c(\lambda)$ с помощью формулы (11.237) называется *обратным косинус-преобразованием Фурье*.

Мы видим, что преобразования (11.236) и (11.237) являются взаимно обратными.

Аналогично вместо (11.235) можно написать

$$f_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi \quad (11.238)$$

и

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} f_s(\lambda) \sin \lambda x d\lambda, \quad (11.239)$$

где $f_s(\lambda)$ называется *синус-образом Фурье функции $f(x)$* , заданной на полуоси $0 \leq x < +\infty$; переход от $f(x)$ к $f_s(\lambda)$ по формуле (11.238) называется *синус-преобразованием Фурье*, а восстановление «оригинала» $f(x)$ по формуле (11.239) называется *обратным синус-преобразованием Фурье*.

Примеры.

$$1. f(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x < a, \\ \frac{1}{2} & \text{при } x = a, \\ 0 & \text{при } x > a. \end{cases}$$

$$f_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \cos \lambda \xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \lambda x}{\lambda}.$$

Применяя формулу (11.237), получаем

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\sin \lambda a \cos \lambda x}{\lambda} d\lambda = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 \leq x < a, \\ \frac{1}{2} & \text{при } x = a, \\ 0 & \text{при } x > a. \end{cases}$$

2. $f(x) = e^{-ax}$, $a > 0$, $x \geq 0$. Интегрируя по частям, по формулам (11.236) и (11.238) находим, что

$$f_c(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-a\xi} \cos \lambda \xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + \lambda^2},$$

$$f_s(\lambda) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{+\infty} e^{-a\xi} \sin \lambda \xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\lambda}{a^2 + \lambda^2}.$$

Применяя к полученным равенствам соответственно формулы (11.237) и (11.239), получим

$$\frac{2a}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\cos \lambda x}{a^2 + \lambda^2} d\lambda = e^{-ax}, \quad x > 0,$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{\lambda \sin \lambda x}{a^2 + \lambda^2} d\lambda = e^{-ax}, \quad x > 0.$$

Так, применяя косинус- и синус-преобразования Фурье, мы можем получить таблицу значений несобственных интегралов, зависящих от параметра. Однако основное назначение синус- и косинус-преобразований Фурье состоит в применении к решению задач математической физики (см. Дополнение 3 к гл. 11).

6. Интеграл Фурье для функций нескольких независимых переменных. Остановимся сначала на случае двух независимых переменных. Пусть функция $f(x_1, x_2)$ определена при $-\infty < x_1 < +\infty$, $-\infty < x_2 < +\infty$ и абсолютно интегрируема от $-\infty$ до $+\infty$ по каждой из переменных x_1, x_2 при каждом фиксированном значении другой из них. Если, кроме того, $f(x_1, x_2)$ является непрерывной и кусочно-гладкой по каждой из переменных x_1, x_2 при каждом фиксированном значении другой из них, то к функции $f(x_1, x_2)$ по каждой из переменных x_1, x_2 в отдельности при любом фиксированном значении другой из них применима интегральная формула Фурье. Фиксировав x_2 и применяя формулу Фурье (11.206) по x_1 , получим

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, x_2) \cos \lambda_1 (x_1 - \xi_1) d\xi_1. \quad (11.240)$$

Фиксировав ξ_1 и применяя к $f(\xi_1, x_2)$ формулу Фурье (11.206) по x_2 , получим

$$f(\xi_1, x_2) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2) \cos \lambda_2 (x_2 - \xi_2) d\xi_2. \quad (11.241)$$

Подставляя (11.241) в (11.242), найдем

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{+\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \cos \lambda_1 (x_1 - \xi_1) d\xi_1 \int_0^{+\infty} d\lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2) \cos \lambda_2 (x_2 - \xi_2) d\xi_2 = \\ &= \frac{1}{\pi^2} \int_0^{+\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \int_0^{+\infty} d\lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2) \cos \lambda_1 (x_1 - \xi_1) \cos \lambda_2 (x_2 - \xi_2) d\xi_2. \end{aligned} \quad (11.242)$$

Если $f(x_1, x_2)$ четна как по x_1 , так и по x_2 , то формула (11.242) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \cos \lambda_1 x_1 d\lambda_1 \int_0^{+\infty} \cos \lambda_1 \xi_1 d\xi_1 \int_0^{+\infty} \cos \lambda_2 x_2 d\lambda_2 \times \\ &\quad \times \int_0^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2) \cos \lambda_2 \xi_2 d\xi_2. \end{aligned} \quad (11.243)$$

Если же $f(x_1, x_2)$ нечетна как по x_1 , так и по x_2 , то

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{4}{\pi^2} \int_0^{+\infty} \sin \lambda_1 x_1 d\lambda_1 \int_0^{+\infty} \sin \lambda_1 \xi_1 d\xi_1 \int_0^{+\infty} \sin \lambda_2 x_2 d\lambda_2 \times \\ &\quad \times \int_0^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2) \sin \lambda_2 \xi_2 d\xi_2. \end{aligned} \quad (11.244)$$

Переходя к комплексной форме интеграла Фурье, формулу (11.242) можно преобразовать к виду

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2) e^{i[\lambda_1(x_1 - \xi_1) + \lambda_2(x_2 - \xi_2)]} d\xi_2, \end{aligned} \quad (11.245)$$

причем интегралы по λ_1 и по λ_2 следует понимать, вообще говоря, в смысле главного значения (см. § 3 гл. 9, а также п. 4 § 9

настоящей главы). Если возможно изменение порядка интегрирования по ξ_1 и λ_2 , то формула (11.245) оказывается эквивалентной совокупности следующих двух формул:

$$\bar{f}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2) e^{-i[\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2]} d\xi_2, \quad (11.246)$$

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda_1, \lambda_2) e^{i[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2]} d\lambda_2. \quad (11.247)$$

Первая из них называется прямым преобразованием Фурье функции $f(x_1, x_2)$, а вторая — обратным.

Аналогично обстоит дело и в случае функции трех и большего числа независимых переменных. Приведем соответствующие формулы для функции трех независимых переменных. Интегральная формула Фурье имеет вид

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{\pi^3} \int_0^{+\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \int_0^{+\infty} d\lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2 \int_0^{+\infty} d\lambda_3 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \times \\ \times \cos \lambda_1(x_1 - \xi_1) \cos \lambda_2(x_2 - \xi_2) \cos \lambda_3(x_3 - \xi_3) d\xi_3, \quad (11.248)$$

а в комплексной форме

$$f(x_1, x_2, x_3) = \\ = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^{+\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \int_0^{+\infty} d\lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2 \int_0^{+\infty} d\lambda_3 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \times \\ \times e^{i[\lambda_1(x_1 - \xi_1) + \lambda_2(x_2 - \xi_2) + \lambda_3(x_3 - \xi_3)]} d\xi_3. \quad (11.249)$$

Если промежуточные интегрирования перестановочны, то формула (11.249) эквивалентна совокупности следующих двух формул:

$$\bar{\bar{f}}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \\ = \frac{1}{(V2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) e^{-i[\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \lambda_3 \xi_3]} d\xi_3 \quad (11.250)$$

и

$$f(x_1, x_2, x_3) = \\ = \frac{1}{(V2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_2 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\bar{f}}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) e^{i[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3]} d\lambda_3. \quad (11.251)$$

Интегралы (11.247) и (11.251) понимаются, вообще говоря, в смысле главного значения.

Остановимся вкратце на обосновании формул (11.246) и (11.247). Аналогично обосновываются формулы (11.250) и (11.251). Справедлива следующая

Теорема 11.13. Пусть функция $f(x_1, x_2)$ непрерывна на всей плоскости $x_1 x_2$ и выполнены следующие условия: 1) интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, x_2)| dx_1 \quad \text{и} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, x_2)| dx_2 \quad (11.252)$$

сходятся равномерно по x_2 и x_1 на каждом конечном отрезке $x_2 \leq x_2 \leq \bar{x}_2$ и $x_1 \leq x_1 \leq \bar{x}_1$, соответственно, 2) повторный интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1, x_2)| dx_1 \quad (11.253)$$

сходится; тогда если при всех достаточно малых $|\xi|$:

3) $\left| \frac{f(x_1 + \xi, x_2) - f(x_1 + 0, x_2)}{\xi} \right| \leq C_1$ при каждом фиксированном x_1 и всех x_2 ,

4) $\left| \frac{f(x_1, x_2 + \xi) - f(x_1, x_2 + 0)}{\xi} \right| \leq C_2(x_1)$ при каждом фиксированном x_2 и всех x_1 , причем $\int_{-\infty}^{+\infty} C_2(x_1) dx_1$ сходится, то существует образ Фурье функции $f(x_1, x_2)$

$$\bar{f}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_1 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2) e^{-i(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2)} d\xi_2 \quad (11.254)$$

и справедлива формула обращения

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\lambda_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda_1, \lambda_2) e^{i[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2]} d\lambda_2, \quad (11.255)$$

понимаемая в следующем смысле:

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \lim_{l_1, l_2 \rightarrow +\infty} \int_{-l_1}^{l_1} d\lambda_1 \int_{-l_2}^{l_2} \bar{f}(\lambda_1, \lambda_2) e^{i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)} d\lambda_2, \quad (11.256)$$

где предельный переход осуществляется сначала по l_2 , а затем по l_1 .

Доказательство. Образ Фурье функции $f(x_1, x_2)$ по аргументу x_1

$$\bar{f}(\lambda_1, x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, x_2) e^{-i\lambda_1 \xi_1} d\xi_1 \quad (11.257)$$

существует, в силу сходимости первого интеграла (11.252), и является непрерывной функцией x_2 , в силу равномерной сходимости, вытекающей из равномерной сходимости первого интеграла (11.252). Интеграл

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\bar{f}(\lambda_1, x_2)| dx_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, x_2) e^{i\lambda_1 \xi_1} d\xi_1 \right| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (11.258)$$

сходится, в силу сходимости интеграла (11.253).

В силу условий 1) и 3) и непрерывности функции $f(x_1, x_2)$ по x_1 и в силу замечания к основной теореме о преобразованиях Фурье (см. теорему 11.10 п. 4 § 6), справедлива формула обращения

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda_1, x_2) e^{i\lambda_1 x_1} d\lambda_1 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{l_1 \rightarrow +\infty} \int_{-l_1}^{l_1} \bar{f}(\lambda_1, x_2) e^{i\lambda_1 x_1} d\lambda_1. \end{aligned} \quad (11.259)$$

В силу условия 4) и равенства (11.257), имеем

$$\begin{aligned} |\bar{f}(\lambda_1, x_2 + \xi) - \bar{f}(\lambda_1, x_2 + 0)| &\leq \\ &\leq \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\xi_1, x_2 + \xi) - f(\xi_1, x_2 + 0)| d\xi_1 \leq |\xi| \int_{-\infty}^{+\infty} C_2(\xi_1) d\xi_1, \end{aligned}$$

т. е.

$$\left| \frac{\bar{f}(\lambda_1, x_2 + \xi) - \bar{f}(\lambda_1, x_2 + 0)}{\xi} \right| < \int_{-\infty}^{+\infty} C_2(\xi_1) d\xi_1. \quad (11.260)$$

В силу сходимости интеграла (11.258), существует двукратный образ Фурье функции $f(x_1, x_2)$:

$$\begin{aligned} \bar{\bar{f}}(\lambda_1, \lambda_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\lambda_1, \xi_2) e^{-i\lambda_2 \xi_2} d\xi_2 = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\xi_2 \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2) e^{-i(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2)} d\xi_1, \end{aligned} \quad (11.261)$$

причем, в силу непрерывности $\bar{f}(\lambda_1, x_2)$ по x_2 и выполнения условия (11.260), справедлива формула обращения

$$\begin{aligned}\bar{f}(\lambda_1, x_2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\bar{f}}(\lambda_1, \lambda_2) e^{i\lambda_2 x_2} d\lambda_2 = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{l_2 \rightarrow +\infty} \int_{-l_2}^{l_2} \bar{\bar{f}}(\lambda_1, \lambda_2) e^{i\lambda_2 x_2} d\lambda_2.\end{aligned}\quad (11.262)$$

Подставляя (11.262) в (11.259), получим

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \lim_{l_1 \rightarrow +\infty} \int_{-l_1}^{l_1} e^{i\lambda_1 x_1} d\lambda_1 \left\{ \lim_{l_2 \rightarrow +\infty} \int_{-l_2}^{l_2} \bar{\bar{f}}(\lambda_1, \lambda_2) e^{i\lambda_2 x_2} d\lambda_2 \right\}, \quad (11.263)$$

или иначе

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \lim_{l_1, l_2 \rightarrow +\infty} \int_{-l_1}^{l_1} d\lambda_1 \int_{-l_2}^{l_2} \bar{\bar{f}}(\lambda_1, \lambda_2) e^{i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)} d\lambda_2, \quad (11.264)$$

где предельный переход совершается сначала по l_2 , а затем по l_1 . Теорема доказана.

В случае функции трех переменных $f(x_1, x_2, x_3)$ формулы прямого и обратного преобразований Фурье запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}\bar{\bar{\bar{f}}}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \times \\ &\times e^{-i(\lambda_1 \xi_1 + \lambda_2 \xi_2 + \lambda_3 \xi_3)} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3\end{aligned}\quad (11.265)$$

и

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{\bar{\bar{f}}}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \times \\ &\times e^{i(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3)} d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3.\end{aligned}\quad (11.266)$$

Если подставить (11.265) в (11.266), то получится равенство

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, x_3) &= \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \times \\ &\times e^{i[\lambda_1(x_1 - \xi_1) + \lambda_2(x_2 - \xi_2) + \lambda_3(x_3 - \xi_3)]} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3.\end{aligned}\quad (11.267)$$

Не составляет труда выписать соответствующие формулы и для функции N переменных.

Для обоснования системы равенства (11.265), (11.266), кроме требований к сходимости интегралов, аналогичных рассмотренным в случае функций двух переменных, достаточно потребовать, чтобы при всех достаточно малых $|\xi|$ выполнялись неравенства:

$$1) \quad \left| \frac{f(x_1 + \xi_1, x_2, x_3) - f(x_1 + 0, x_2, x_3)}{\xi_1} \right| \leq C_1$$

при каждом фиксированном x_1 и всех x_2 и x_3 ,

$$2) \quad \left| \frac{f(x_1, x_2 + \xi_2, x_3) - f(x_1, x_2 + 0, x_3)}{\xi_2} \right| \leq C_2(x_1)$$

при каждом фиксированном x_2 и всех x_1 и x_3 ,

$$3) \quad \left| \frac{f(x_1, x_2, x_3 + \xi_3) - f(x_1, x_2, x_3 + 0)}{\xi_3} \right| \leq C_3(x_1, x_2)$$

при каждом фиксированном x_3 и всех x_1 и x_2 , причем интегралы $\int_{-\infty}^{+\infty} C_2(x_1) dx_1$ и $\int_{-\infty}^{+\infty} dx_2 \int_{-\infty}^{+\infty} C_3(x_1, x_2) dx_1$ должны сходиться. Тогда существует трехкратный образ Фурье (11.265) функции $f(x_1, x_2, x_3)$ и имеет место равенство (11.265), понимаемое в следующем смысле:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^3} \lim_{l_1 \rightarrow +\infty} \int_{-l_1}^{l_1} d\lambda_1 \times \\ \times \left\{ \lim_{l_2 \rightarrow +\infty} \int_{-l_2}^{l_2} d\lambda_2 \left\{ \lim_{l_3 \rightarrow +\infty} \int_{-l_3}^{l_3} f(\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3) e^{i[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3]} d\lambda_3 \right\} \right\}, \quad (11.268)$$

где предельный переход осуществляется сначала по l_3 , затем по l_2 и, наконец, по l_1 .

Случай N независимых переменных рассматривается аналогично.

О ПОЛИНОМАХ ЛЕЖАНДРА

Докажем, что полиномы Лежандра

$$P_0(x) \equiv 1, \quad P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

ортogonalны на отрезке $[-1, 1]$, т. е. что

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) P_m(x) dx = 0 \quad \text{при} \quad m \neq n. \quad (2)$$

Очевидно, достаточно доказать, что равенство (2) выполняется при $m < n$ (ввиду равноправия m и n), а для этого в свою очередь достаточно доказать, что

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) x^m dx = 0 \quad \text{при } m < n, \quad (3)$$

где m — целое и неотрицательное. Полагая

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n u_n(x)}{dx^n}, \quad \text{где } u_n(x) = [x^2 - 1]^n,$$

получим, что

$$\int_{-1}^{+1} P_n(x) x^m dx = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} \frac{d^n u_n(x)}{dx^n} x^m dx. \quad (4)$$

Выполняя в последнем интеграле интегрирование по частям до исчезновения x^m и учитывая, что

$$u_n(\pm 1) = u'_n(\pm 1) = \dots = u_n^{(n-1)}(\pm 1) = 0,$$

получим равенство (3). Этим доказательство ортогональности полиномов Лежандра на отрезке $[-1, 1]$ завершено.

Вычислим теперь норму n -го полинома Лежандра. Для этого снова применим интегрирование по частям в интеграле

$$\|P_n(x)\|^2 = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^{+1} \left[\frac{d^n u_n(x)}{dx^n} \right]^2 dx. \quad (5)$$

Интегрируя по частям n раз и учитывая, что $u_n(x)$ имеет степень $2n$ и $u_n(\pm 1) = u'_n(\pm 1) = \dots = u_n^{(n-1)}(\pm 1) = 0$, получим

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} \frac{d^n u_n(x)}{dx^n} \frac{d^n u_n(x)}{dx^n} dx &= - \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-1} u_n(x)}{dx^{n-1}} \frac{d^{n+1} u_n(x)}{dx^{n+1}} dx = \\ &= (-1)^2 \int_{-1}^{+1} \frac{d^{n-2} u_n(x)}{dx^{n-2}} \frac{d^{n+2} u_n(x)}{dx^{n+2}} dx = \dots \\ \dots &= (-1)^n \int_{-1}^{+1} u_n(x) \frac{d^{2n} u_n(x)}{dx^{2n}} dx = (2n)! \int_{-1}^{+1} (1-x)^n (1+x)^n dx. \quad (6) \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{+1} (1-x)^n (1+x)^n dx &= \frac{n}{n+1} \int_{-1}^{+1} (1-x)^{n-1} (1+x)^{n+1} dx = \dots \\ \dots &= \frac{n(n-1) \dots 1}{(n+1)(n+2) \dots (2n)} \int_{-1}^{+1} (1+x)^{2n} dx = \frac{(n!)^2}{(2n)! (2n+1)} 2^{2n+1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6) и (6) в (5), получим

$$\|P_n(x)\|^2 = \int_{-1}^{+1} [P_n(x)]^2 dx = \frac{2}{2n+1}. \quad (8)$$

Следовательно, норма n -го полинома Лежандра равна

$$\|P_n(x)\| = \sqrt{\frac{2}{2n+1}}. \quad (9)$$

Заметим, что степень n -го полинома Лежандра $P_n(x)$ равна n при $n=0, 1, 2, \dots$. Так как полиномы Лежандра $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ ортогональны на отрезке $[-1, 1]$, то они линейно независимы, а следовательно, образуют базис пространства всех алгебраических многочленов степени $\leq n$; отсюда вытекает, что любой многочлен степени $\leq n$ может быть представлен в виде линейной комбинации многочленов Лежандра $P_0(x), P_1(x), \dots, P_n(x)$ и, в частности,

$$x^n = \alpha_{0n} P_0(x) + \alpha_{1n} P_1(x) + \dots + \alpha_{nn} P_n(x)$$

(см. Дополнение 2 к гл. 11).

ДОПОЛНЕНИЕ 2 К ГЛ. 11

ОРТОГОНАЛЬНОСТЬ С ВЕСОМ И ОРТОГОНАЛИЗАЦИЯ

Обобщением введенного ранее понятия ортогональности функций является понятие ортогональности функций с весом. Пусть $p(x)$ — неотрицательная функция, не равная тождественно нулю и непрерывная на открытом интервале (a, b) , причем интеграл

$$\int_a^b p(x) dx \quad (1)$$

существует (как собственный или как несобственный) и положителен *). Будем называть функцию $p(x)$ *весом*.

Пусть для функции $f(x)$, заданной на $[a, b]$, интегралы

$$\int_a^b p(x) f(x) dx \quad \text{и} \quad \int_a^b p(x) [f(x)]^2 dx \quad (2)$$

(собственные или несобственные) существуют; тогда функция называется *интегрируемой с квадратом с весом $p(x)$* на $[a, b]$. В частности, если $p(x) \equiv 1$, то мы приходим к сформулированному ранее (стр. 479, соотношение (11.93)) определению интегрируемости с квадратом.

Пусть функции системы

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots, \quad (3)$$

заданной на $[a, b]$, также интегрируемы с квадратом с весом $p(x)$ на $[a, b]$, т. е. интегралы

$$\int_a^b p(x) \varphi_n(x) dx \quad \text{и} \quad \int_a^b p(x) [\varphi_n(x)]^2 dx, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

(собственные или несобственные), существуют. Если интервал $[a, b]$ конечен, то из существования интегралов (2) и (4) и элементарных неравенств

$$\begin{aligned} |f(x) \varphi_n(x)| &\leq \frac{1}{2} [f^2(x) + \varphi_n^2(x)], \\ |\varphi_n(x) \varphi_m(x)| &\leq \frac{1}{2} [\varphi_n^2(x) + \varphi_m^2(x)] \end{aligned} \quad (5)$$

следует существование интегралов

$$\int_a^b p(x) f(x) \varphi_n(x) dx \quad \text{и} \quad \int_a^b p(x) \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx. \quad (6)$$

Если же интервал $[a, b]$ бесконечен, то существование интегралов (6) будем предполагать дополнительно.

Мы будем предполагать, далее, что каждая из рассматриваемых функций непрерывна на $[a, b]$ всюду, кроме, может быть, конечного числа точек, которые могут быть, в частности, особыми точками функций.

*) Интеграл при сформулированных условиях может оказаться несобственным, если функция $p(x)$ не ограничена при $x \rightarrow a + 0$ или $x \rightarrow b - 0$. Такого типа особенности у $p(x)$ встречаются в случае некоторых важных классов специальных функций (см., например, полиномы Чебышева первого рода в конце этого Дополнения).

Функции $\varphi_n(x)$ и $\varphi_m(x)$ называются *ортгоналными с весом $p(x)$* на отрезке $[a, b]$, если

$$\int_a^b p(x) \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0 \quad \text{при } m \neq n. \quad (7)$$

Система функций (2), интегрируемых с квадратом с весом $p(x)$ на $[a, b]$, называется *ортгоналной с весом $p(x)$* на $[a, b]$, если

$$\int_a^b p(x) \varphi_n(x) \varphi_m(x) dx = 0 \quad \text{при } n \neq m \quad (8)$$

и

$$\int_a^b p(x) \varphi_n^2(x) dx > 0 \quad \text{при } n = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Обычная ортгоналность функций является частным случаем ортгоналности с весом, когда вес $p(x) \equiv 1$.

Пусть функция $f(x)$ интегрируема с квадратом с весом $p(x)$ на $[a, b]$, а система (3) ортгонална с весом $p(x)$ на $[a, b]$.

Если коэффициенты ряда

$$f(x) \sim c_1 \varphi_1(x) + c_2 \varphi_2(x) + \dots + c_n \varphi_n(x), \dots \quad (A)$$

определяются по формулам

$$c_n = \frac{\int_a^b p(x) f(x) \varphi_n(x) dx}{\int_a^b p(x) \varphi_n^2(x) dx}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (B)$$

то он называется *рядом Фурье для функции $f(x)$ по системе (3)*.

Мы скажем, что ряд (A) *сходится к $f(x)$ в среднем с весом $p(x)$ на $[a, b]$, если*

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b p(x) \left[f(x) - \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x) \right]^2 dx = 0. \quad (B)$$

Если ряд (A) сходится равномерно или в среднем с весом $p(x)$ к функции $f(x)$ на $[a, b]$, то его коэффициенты однозначно определяются по формулам (B). Действительно, при сформулированных

условиях, в силу неравенства Коши — Буняковского, имеем

$$\left| \int_a^b p(x) \varphi_n(x) \left[f(x) - \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k(x) \right] dx \right| \leqslant \\ \leqslant \left(\int_a^b p(x) \varphi_n^2(x) dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b p(x) \left[f(x) - \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k(x) \right]^2 dx \right)^{1/2} \rightarrow 0$$

при $m \rightarrow +\infty$ и любом фиксированном n . С другой стороны, в силу ортогональности с весом $p(x)$ функций $\varphi_l(x)$ на $[a, b]$ при $m \geqslant n$, имеем

$$\int_a^b p(x) \varphi_n(x) \left[f(x) - \sum_{k=1}^m c_k \varphi_k(x) \right] dx = \\ = \int_a^b p(x) f(x) \varphi_n(x) dx - c_n \int_a^b p(x) \varphi_n^2(x) dx = \text{const}$$

при фиксированном n . Следовательно,

$$\int_a^b p(x) f(x) \varphi_n(x) dx - c_n \int_a^b p(x) \varphi_n^2(x) dx = 0,$$

откуда и следует (Б).

Понятие полноты и замкнутости (см. § 6 гл. 11), а также основные связанные с ними теоремы (теоремы 11.4—11.7 § 5, 6 гл. 11) легко обобщаются на случай систем, ортогональных с весом.

Разложение функций в ряд по системам, ортогональным с весом, находит широкое применение в математической физике. Из систем, ортогональных с весом, назовем прежде всего различные системы специальных полиномов, о которых речь будет идти ниже, а также системы собственных функций круглой и кольцевой мембран, шара и шарового слоя (см. вып. 4).

Разложение функций в ряд по системам, ортогональным с весом (в частности, с весом $p(x) \equiv 1$), весьма удобно в силу простоты определения коэффициентов разложения. Ортогональные с весом системы можно строить, отправляясь от линейно независимых систем, путем так называемой *ортogonalизации*.

Функции *) $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ называют линейно зависимиыми на $[a, b]$, если существуют такие константы C_1, C_2, \dots, C_n , не все равные нулю, что линейная комбинация

$$C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) + \dots + C_n \varphi_n(x) = 0 \quad (10)$$

*) Напомним, что каждую из рассматриваемых функций мы считаем непрерывной всюду на $[a, b]$, кроме, быть может, конечного числа точек.

Числа λ_{lj} , входящие в (13), однозначно определяются из условий ортогональности функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ..., $\varphi_n(x)$. Это можно доказать по индукции. Умножая обе части второго из равенств (13) на $p(x)\varphi_1(x)$ и интегрируя по x от a до b , получим

$$\begin{aligned} \int_a^b p(x) \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx &= \\ &= \int_a^b p(x) \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx + \lambda_{21} \int_a^b p(x) \varphi_1^2(x) dx = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\lambda_{21} = - \frac{\int_a^b p(x) \varphi_1(x) \varphi_2(x) dx}{\int_a^b p(x) \varphi_1^2(x) dx}.$$

Пусть λ_{lj} при $l \leq k-1$ уже вычислены и функции $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_{k-1}(x)$ попарно ортогональны на $[a, b]$ с весом $p(x)$. Тогда из соотношений ортогональности

$$0 = (\varphi_k, \varphi_j) = (\psi_k, \varphi_j) + \sum_{l=1}^{k-1} \lambda_{kl} (\varphi_l, \varphi_j) = (\psi_k, \varphi_j) + \lambda_{kj} (\varphi_j, \varphi_j)$$

при $j = 1, 2, \dots, k-1$ находим, что

$$\lambda_{kj} = - \frac{(\psi_k, \varphi_j)}{(\varphi_j, \varphi_j)}, \quad j = 1, 2, \dots, k-1,$$

где

$$(\psi_k, \varphi_j) = \int_a^b p(x) \psi_k(x) \varphi_j(x) dx, \quad (\varphi_j, \varphi_j) = \int_a^b p(x) \varphi_j^2(x) dx.$$

После этого уже все функции $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_k(x)$ определены и попарно ортогональны на $[a, b]$ с весом $p(x)$. Этим доказательство утверждения закончено.

Описанный процесс построения по системе линейно независимых функций $\psi_1(x)$, ..., $\psi_n(x)$ ортогональной системы $\varphi_1(x)$, ..., $\varphi_n(x)$, связанной с ней соотношениями (13), называется *ортogonalизацией*.

Ортogonalизуя систему целых неотрицательных степеней x

$$1, x, x^2, \dots, x^n, \dots \quad (15)$$

на отрезке $[-1, 1]$ с весом $p(x) \equiv 1$, мы получим систему ортогональных на отрезке $[-1, 1]$ многочленов, которые лишь постоян-

ными множителями отличаются от многочленов Лежандра, определяемых по формуле Родрига

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} [(x^2 - 1)^n], \quad n = 1, 2, \dots; \quad P_0(x) \equiv 1. \quad (16)$$

Ортогонализуя ту же систему степеней (15) на отрезке $[-1, 1]$ с весом $p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, получим систему полиномов Чебышева первого рода; если же взять вес $p(x) = \sqrt{1-x^2}$, то получаются полиномы Чебышева второго рода.

Ортогонализуя систему степеней (15) на полупрямой $[0, +\infty)$ с весом $p(x) = e^{-x}$, получим систему полиномов Чебышева — Лагерра. Если же взять $p(x) = x^s e^{-x}$, где $s > -1$, то при ортогонализации системы (15) на той же полуоси $[0, +\infty)$ получатся обобщенные полиномы Чебышева — Лагерра.

Наконец, ортогонализуя систему степеней (15) на всей прямой $-\infty < x < +\infty$ с весом $p(x) = e^{-x^2}$, получим систему полиномов Чебышева — Эрмита. Для всех специальных полиномов существуют удобные общие формулы, подобные формуле Родрига (16) (см. вып. 4).

Перечисленные системы ортогональных полиномов находят важные применения в математической физике (см. вып. 4).

ФУНКЦИОНАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ АНАЛОГИИ

Множество функций $Q[a, b]$, определенное в § 6, можно рассматривать как *функциональное пространство*, считая, что две функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ из $Q[a, b]$ представляют один и тот же элемент или «вектор» пространства, если они могут отличаться самое большее в конечном числе точек на $[a, b]$. Элементы пространства $Q[a, b]$, определяемые функциями $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $\eta(x)$, ... будем обозначать, опуская аргумент x , через φ , ψ , η , ...

Определив сумму элементов $\varphi + \psi$ и произведение $\lambda\varphi$ элемента φ на число λ соответственно через сумму $\varphi(x) + \psi(x)$ и произведение на число λ функций $\varphi(x)$, представляющих эти элементы, получим, что $Q[a, b]$ относительно этих операций ведет себя так же, как множество всех векторов трехмерного евклидова пространства относительно операций сложения векторов и умножения их на числа. Нулевой элемент 0 пространства представляется любой функцией из $Q[a, b]$, которая может отличаться от нуля самое большее в конечном числе точек на $[a, b]$.

Определим *скалярное произведение* любых двух элементов φ и ψ из $Q[a, b]$ равенством

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx. \quad (1)$$

Нетрудно проверить, что определенное таким образом скалярное произведение удовлетворяет обычным требованиям, а именно:

$$(1) (\varphi, \psi) = (\psi, \varphi),$$

$$(2) (\lambda\varphi, \psi) = \lambda(\varphi, \psi), \text{ где } \lambda — \text{любое вещественное число,}$$

$$(3) (\varphi, \psi_1 + \psi_2) = (\varphi, \psi_1) + (\varphi, \psi_2),$$

$$(4) (\varphi, \varphi) \geq 0; \text{ если же } (\varphi, \varphi) = 0, \text{ то } \varphi = 0.$$

(Выполнение требования (4) уже было доказано в ходе доказательства теоремы 11.6 п. 3 § 6.)

Таким образом, относительно скалярного произведения, определяемого равенством (1), пространство $Q[a, b]$ ведет себя так же, как множество всех векторов трехмерного евклидова пространства относительно обычного скалярного произведения.

Два «вектора» φ и ψ из $Q[a, b]$ называются *ортгональными*, если их скалярное произведение равно нулю, т. е. если

$$(\varphi, \psi) = \int_a^b \varphi(x) \psi(x) dx = 0. \quad (2)$$

Норму или «длину» вектора $\varphi \in Q[a, b]$ можно теперь определить равенством

$$\|\varphi\| = \sqrt{(\varphi, \varphi)}. \quad (3)$$

Если $\|\varphi\| \neq 0$, то, полагая $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{\|\varphi\|}$, получим, что

$$\|\psi\|^2 = \left(\frac{\varphi}{\|\varphi\|}, \frac{\varphi}{\|\varphi\|} \right) = \frac{1}{\|\varphi\|^2} (\varphi, \varphi) = 1, \quad (4)$$

в силу определения (3). Косинус угла между $f(x)$ и $g(x)$ определим соотношением

$$\cos(\widehat{f, g}) = \frac{(f, g)}{\|f\| \|g\|}. \quad (5)$$

Это определение закономерно, так как, в силу неравенства Коши — Буняковского (ср. п. 2 § 6 гл. 8),

$$|(f, g)| \leq \|f\| \|g\|. \quad (6)$$

Проекцией f на g , где $g \neq 0$, называют

$$\|f\| \cos(\widehat{f, g}) = \frac{(f, g)}{\|g\|}. \quad (7)$$

Определим теперь сходимость в пространстве $Q[a, b]$. Мы скажем, что $\varphi_n \rightarrow \varphi$ при $n \rightarrow +\infty$, если

$$\|\varphi_n - \varphi\| = \left(\int_a^b [\varphi_n(x) - \varphi(x)]^2 dx \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad (8)$$

при $n \rightarrow +\infty$, т. е. если последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится в среднем к $\varphi(x)$ на $[a, b]$.

Мы скажем, что имеет место равенство

$$f \doteq f_1 + f_2 + \dots + f_n + \dots, \quad (9)$$

если

$$\left\| f - \sum_{k=1}^n f_k \right\| = \left(\int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^n f_k(x) \right]^2 dx \right)^{1/2} \rightarrow 0 \quad (10)$$

при $n \rightarrow +\infty$, т. е. если ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} f_k(x)$ сходится в среднем к $f(x)$ на $[a, b]$.

Установим аналогию между разложением вектора x трехмерного евклидова пространства по ортогональному базису e_1, e_2, e_3 и разложением функции $f(x) \in Q[a, b]$ в ряд Фурье по полной ортогональной системе

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x), \dots \quad (11)$$

В трехмерном евклидовом пространстве для каждого вектора x в любом фиксированном базисе существует единственное разложение

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3. \quad (12)$$

Коэффициенты этого разложения легко найти, если воспользоваться скалярным произведением. Умножая равенство (12) скалярно на e_i , получим

$$(x, e_i) = x_i (e_i, e_i) = x_i \|e_i\|^2, \quad (13)$$

в силу ортогональности базиса e_1, e_2, e_3 *). Из (13) находим, что

$$x_i = \frac{(x, e_i)}{\|e_i\|^2}. \quad (14)$$

Величины

$$x_k \|e_k\| = \frac{(x, e_k)}{\|e_k\|}, \quad k = 1, 2, 3, \quad (15)$$

где символом $\| \cdot \|$ обозначена длина вектора, являются проекциями вектора x на направление векторов e_k , $k = 1, 2, 3$.

*) Векторы e_1, e_2, e_3 мы не предполагаем, вообще говоря, единичными.

Возводя обе части равенства (12) в скалярный квадрат, получим равенство

$$\|x\|^2 = x_1^2 \|e_1\|^2 + x_2^2 \|e_2\|^2 + x_3^2 \|e_3\|^2, \quad (16)$$

выражающее теорему Пифагора для трехмерного случая: квадрат длины вектора равен сумме квадратов его проекций на три взаимно перпендикулярных направления.

Совершенно аналогично в пространстве $Q[a, b]$ каждый «вектор» f может быть единственным образом разложен по «векторам» полной ортогональной системы $\{\varphi\}$, т. е. представлен в виде (см. п. 1 § 6 гл. 11)

$$f = c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + \dots + c_k \varphi_k + \dots, \quad (17)$$

причем коэффициенты c_k разложения (17) определяются по формулам

$$c_k = \frac{(f, \varphi_k)}{\|\varphi_k\|}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Таким образом, каждый «вектор» f из $Q[a, b]$ однозначно определяется бесконечной последовательностью своих «координат» (c_k) в «базисе» $\{\varphi_k\}$.

В силу полноты системы $\{\varphi_n\}$, имеет место равенство Парсеваля (см. п. 2 § 6)

$$\|f\|^2 = c_1^2 \|\varphi_1\|^2 + c_2^2 \|\varphi_2\|^2 + \dots + c_n^2 \|\varphi_n\|^2 + \dots, \quad (19)$$

выражающее теорему Пифагора для функционального пространства $Q[a, b]$.

Если взять проекции вектора x не на все базисные векторы e_1, e_2, e_3 , а, например, только на e_1 и e_2 , то равенство (16) заменится неравенством

$$\|x\|^2 \geq x_1^2 \|e_1\|^2 + x_2^2 \|e_2\|^2. \quad (20)$$

Аналогично, если ортогональная система $\{\varphi_n\}$ не полна в $Q[a, b]$, то равенство Парсеваля (19) заменится неравенством Бесселя

$$\|f\|^2 \geq c_1^2 \|\varphi_1\|^2 + c_2^2 \|\varphi_2\|^2 + \dots + c_n^2 \|\varphi_n\|^2 + \dots \quad (21)$$

Эти геометрические идеи используются в теории так называемых гильбертовых пространств, находящей применения в квантовой механике и математической физике.

О НЕКОТОРЫХ ПРИМЕНЕНИЯХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ

Остановимся на некоторых применениях преобразования Фурье.

Многие физические приборы можно рассматривать как операторы или преобразователи, на вход которых подаются функции $f_1(t)$, $f_2(t)$, ..., а на выходе получаются соответственно функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, ... Так, различные усилители можно рассматривать как операторы, преобразующие напряжение $f(t)$ переменного тока, подаваемого на вход, в напряжение $x(t)$ переменного тока, получающегося на выходе.

Преобразователь называется *линейным*, если он удовлетворяет следующим требованиям:

1) если $f(t)$ преобразуется в $x(t)$, то $cf(t)$, где c — произвольная постоянная, преобразуется в $cx(t)$,

2) если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ преобразуются соответственно в $x_1(t)$ и $x_2(t)$, то $f_1(t) + f_2(t)$ преобразуется в $x_1(t) + x_2(t)$.

Если требования 1) и 2) выполнены, то говорят, что для преобразователя выполняется *принцип суперпозиции*.

Мы будем предполагать также, что установившиеся гармонические колебания с частотой ω преобразуются в установившиеся гармонические колебания с той же частотой ω , т. е. что выполнено еще одно требование:

3) функция $e^{i\omega t}$ преобразуется в функцию $A(\omega)e^{i\omega t}$.

Зависимость коэффициента пропорциональности $A(\omega)$ от частоты означает, что гармонические колебания с различными частотами один и тот же преобразователь преобразует по-разному. Функция $A = A(\omega)$ называется *спектральной характеристикой* преобразователя. Эта функция принимает, вообще говоря, комплексные значения

$$A(\omega) = R(\omega)e^{i\varphi(\omega)}, \quad \text{где} \quad R(\omega) = |A(\omega)|, \quad \varphi(\omega) = \arg A(\omega).$$

Следовательно, гармоническое колебание $e^{i\omega t}$ преобразуется в гармоническое колебание $A(\omega)e^{i\omega t} = R(\omega)e^{i(\omega t + \varphi(\omega))}$.

Модуль $R(\omega) = |A(\omega)|$ спектральной характеристики называется *частотной характеристикой* преобразователя; он показывает, во сколько раз изменяется амплитуда гармонического колебания с данной частотой ω . Аргумент $\varphi(\omega) = \arg A(\omega)$ спектральной характеристики называется *фазовой характеристикой* преобразователя; он показывает, насколько изменяется фаза гармонического колебания с данной частотой ω .

Зная спектральную характеристику $A = A(\omega)$ линейного преобразователя и применяя преобразование Фурье, можно решить следующие две задачи.

Прямая задача. По заданной функции $f(t)$ на входе найти преобразованную функцию $x(t)$ на выходе.

Обратная задача. По преобразованной функции $x(t)$, получающейся на выходе, найти функцию $f(t)$, поданную на вход.

Покажем сначала, как решается прямая задача. Пусть на вход подана функция $f(t)$. Найдем ее образ Фурье

$$\bar{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (1)$$

и представим функцию $f(t)$ в виде

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (2)$$

Интеграл в правой части равенства (2) можно рассматривать как сумму бесконечно большого числа бесконечно малых гармонических колебаний вида

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3)$$

Гармоническое колебание $e^{i\omega t}$ преобразуется в гармоническое колебание $A(\omega) e^{i\omega t}$, следовательно, гармоническое колебание $\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{f}(\omega) d\omega\right) e^{i\omega t}$ преобразуется, в силу свойства 1) преобразователя, в гармоническое колебание

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \bar{f}(\omega) d\omega\right) A(\omega) e^{i\omega t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} A(\omega) \bar{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (4)$$

Сумма колебаний (3) преобразуется, в силу свойства 2) преобразователя, в сумму колебаний (4), а следовательно, функция $f(x)$, определяемая соотношением (2), преобразуется в функцию $x(t)$, определяемую соотношением

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \bar{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (5)$$

Соотношением (5) решается прямая задача.

Из соотношения (5) следует, что образом Фурье функции $x(t)$ является

$$\bar{x}(\omega) = A(\omega) \bar{f}(\omega), \quad (6)$$

т. е. для получения образа Фурье $\bar{x}(\omega)$ преобразованной функции $x(t)$ нужно образ Фурье $\bar{f}(\omega)$ функции $f(t)$, поданной на вход, умножить на спектральную характеристику $A(\omega)$ преобразователя.

Чтобы решить обратную задачу, из соотношения (6) находим

$$\bar{f}(\omega) = \frac{\bar{x}(\omega)}{A(\omega)} \quad (7)$$

и, применяя к этому равенству обратное преобразование Фурье, получаем, что

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\bar{x}(\omega)}{A(\omega)} e^{i\omega t} d\omega. \quad (8)$$

Соотношение (8) представляет собой решение обратной задачи; оно позволяет по функции $x(t)$, получающейся на выходе, найти функцию $f(t)$, поданную на вход, при этом предварительно нужно, применив преобразование Фурье, найти образ Фурье $\bar{x}(\omega)$ функции $x(t)$, получающейся на выходе.

Эти задачи часто приходится решать в радиотехнике, радиотехнике, при исследовании систем автоматического регулирования и т. п.

Преобразование Фурье широко применяется также для решения различных краевых задач математической физики. Образ Фурье искомой функции часто удовлетворяет значительно более простому уравнению, чем сама искомая функция. Поэтому для решения краевых задач математической физики преобразование Фурье применяется по следующей схеме: сначала подвергают преобразованию Фурье уравнение, которому удовлетворяет искомая функция, и таким путем получают уравнение для ее образа Фурье, затем, найдя из этого уравнения образ Фурье используемой функции, находят с помощью обратного преобразования Фурье саму искомую функцию (см. вып. 4).

Рассмотрим один характерный пример. Пусть требуется найти распределение температуры в неограниченном стержне в произвольный момент времени $t > 0$, если ее распределение в начальный момент времени $t = 0$ известно. Температура u в стержне (ось x считается направленной по стержню) является функцией точки x стержня и времени t : $u = u(x, t)$, $-\infty < x < +\infty$, $0 < t < +\infty$. Известно, что температура в стержне удовлетворяет уравнению теплопроводности (см. вып. 4)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad -\infty < x < +\infty, \quad t > 0. \quad (9)$$

Так как начальное распределение температуры известно, то

$$u(x, 0) = f(x), \quad -\infty < x < +\infty, \quad (10)$$

где $f(x)$ — известная функция. Таким образом, чтобы найти распределение температуры в неограниченном стержне в любой момент времени t , нужно найти решение уравнения (9), принимающее заданные начальные значения (10).

Решим эту задачу, применяя преобразование Фурье по переменной x . Через $\bar{u}(\lambda, t)$ обозначим образ Фурье функции $u(x, t)$:

$$\bar{u}(\lambda, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\lambda x} dx. \quad (11)$$

Умножим обе части уравнения (9) на $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\lambda x}$ и проинтегрируем по x от $-\infty$ до $+\infty$, предполагая, что функция u и ее производные достаточно быстро стремятся к нулю при $x \rightarrow \pm \infty$.

Применив интегрирование по частям, получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-i\lambda x} dx &= \frac{\partial}{\partial t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, t) e^{-i\lambda x} dx = \\ &= \frac{d\bar{u}(\lambda, t)}{dt} = a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} e^{-i\lambda x} dx = a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial u}{\partial x} e^{-i\lambda x} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} + \\ &+ a^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} i\lambda u e^{-i\lambda x} \Big|_{x=-\infty}^{x=+\infty} - a^2 \lambda^2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u e^{-i\lambda x} dx = -a^2 \lambda^2 \bar{u}(\lambda, t), \end{aligned}$$

так как внеинтегральные члены обращаются в нуль, в силу ограниченности $e^{-i\lambda x}$ *) и стремления к нулю u и $\frac{\partial u}{\partial x}$ при $x \rightarrow \pm \infty$. Следовательно, для образа Фурье искомой функции получается уравнение

$$\frac{d\bar{u}}{dt} + a^2 \lambda^2 \bar{u} = 0, \quad (12)$$

значительно более простое, чем уравнение (9). Из равенства (11) при $t=0$ находим начальное условие для $\bar{u}(\lambda, t)$

$$\begin{aligned} \bar{u}(\lambda, 0) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} u(x, 0) e^{-i\lambda x} dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = \bar{f}(\lambda). \end{aligned} \quad (13)$$

Решим уравнение (12) при начальном условии (13); из (12) получаем

$$\frac{d\bar{u}}{\bar{u}} = -a^2 \lambda^2 dt.$$

*) $|e^{-i\lambda x}| = |\cos \lambda x + i \sin \lambda x| = \sqrt{\cos^2 \lambda x + \sin^2 \lambda x} = 1.$

Следовательно,

$$\ln \bar{u} = -a^2 \lambda^2 t + \ln C$$

и

$$\bar{u}(\lambda, t) = C e^{-a^2 \lambda^2 t}.$$

Определим константу C с помощью начального условия (13):

$$\bar{u}(\lambda, 0) = C = \bar{f}(\lambda).$$

Подставляя это значение C в предыдущее равенство, получим для образа Фурье искомой функции выражение

$$\bar{u}(\lambda, t) = \bar{f}(\lambda) e^{-a^2 \lambda^2 t}. \quad (14)$$

Чтобы найти $u(x, t)$, применим к равенству (14) обратное преобразование Фурье, подставив вместо $\bar{f}(\lambda)$ его явное выражение $\bar{f}(\lambda) =$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-i\lambda\xi} d\xi. \text{ Это дает} \\ u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \bar{u}(\lambda, t) e^{i\lambda x} d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} e^{i\lambda(x-\xi)} d\lambda = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) d\xi \int_0^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \lambda(x-\xi) d\lambda = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi, \end{aligned}$$

так как (см. п. 5 § 2 гл. 10)

$$\int_0^{+\infty} e^{-a^2 \lambda^2 t} \cos \beta \lambda d\lambda = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a^2 t}} e^{-\frac{\beta^2}{4a^2 t}}.$$

Таким образом, решение уравнения (9) при начальном условии (10) имеет вид

$$u(x, t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2 t}} d\xi.$$

Аналогичным образом применяются синус- и косинус-преобразования Фурье для решения краевых задач на полупрямой $0 \leq x < +\infty$ (см. вып. 4).

Применение кратных преобразований Фурье позволяет решать краевые задачи для неограниченных областей на плоскости и в пространстве, таких, как вся плоскость, полуплоскость, квадрант, все пространство, полупространство и т. п.

ДОПОЛНЕНИЕ 5 К ГЛ. 11

РАЗЛОЖЕНИЕ δ -ФУНКЦИИ В РЯД ФУРЬЕ И ИНТЕГРАЛ ФУРЬЕ

Вычисляя коэффициенты Фурье для δ -функции $\delta(x_0, x)$ по обычным формулам, получаем

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \delta(x_0, \xi) \cos \frac{k\pi\xi}{l} d\xi = \frac{1}{l} \cos \frac{k\pi x_0}{l},$$

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \delta(x_0, \xi) d\xi = \frac{1}{l},$$

$$b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l \delta(x_0, \xi) \sin \frac{k\pi\xi}{l} d\xi = \frac{1}{l} \sin \frac{k\pi x_0}{l} \quad (\text{при } x_0 \in (-l, l)).$$

Следовательно, ряд Фурье для δ -функции $\delta(x_0, x)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \delta(x_0, x) &\sim \frac{1}{2l} + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\cos \frac{k\pi x_0}{l} \cos \frac{k\pi x}{l} + \sin \frac{k\pi x_0}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \right) = \\ &= \frac{1}{2l} + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{+\infty} \cos \frac{k\pi}{l} (x - x_0) \end{aligned} \quad (1)$$

или в комплексной форме

$$\delta(x_0, x) \sim \frac{1}{2l} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{ik \frac{\pi}{l} (x - x_0)}. \quad (2)$$

Рассмотрим последовательность частичных сумм этого ряда

$$\tilde{\delta}_n(x_0, x) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^n \left(\cos \frac{k\pi x_0}{l} \cos \frac{k\pi x}{l} + \sin \frac{k\pi x_0}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \right), \quad (3)$$

$n = 1, 2, \dots,$

или в комплексной форме

$$\tilde{\delta}_n(x_0, x) = \frac{1}{2l} \sum_{k=-n}^n e^{ik \frac{\pi}{l} (x - x_0)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (4)$$

Если $f(x)$ является кусочно-гладкой на интервале $(-l, l)$, то, очевидно,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{-l}^l f(x) \tilde{\delta}_n(x_0, x) dx = f(x_0), \quad (5)$$

если считать $f(x)$ доопределенной в каждой точке разрыва x^* равенством $f(x^*) = \frac{f(x^* - 0) + f(x^* + 0)}{2}$. Поэтому (см. замечание после соотношений (7), (8) и (9) в Дополнении 2 к гл. 8 и сноску на стр. 356) последовательность $\{\tilde{\delta}_n(x_0, x)\}$ будет слабо сходящейся к δ -функции $\delta(x_0, x)$ в классе кусочно-гладких функций на $(-l, l)$; иными словами, ряд (1) слабо сходится к $\delta(x_0, x)$ в классе кусочно-гладких функций на $(-l, l)$. Этот факт можно выразить символическим равенством

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{2l} + \frac{1}{l} \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\cos \frac{k\pi x_0}{l} \cos \frac{k\pi x}{l} + \sin \frac{k\pi x_0}{l} \sin \frac{k\pi x}{l} \right). \quad (6)$$

Умножив обе части равенства (6) на любую кусочно-гладкую функцию $f(x)$ и интегрируя почленно по x от $-l$ до l , мы приходим к доказанному выше равенству

$$f(x_0) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{+\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x_0}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x_0}{l} \right), \quad (7)$$

где a_k и b_k определяются по обычным формулам для коэффициентов тригонометрического ряда Фурье функции $f(x)$ на интервале $(-l, l)$.

Равенство (6), понимаемое в смысле слабой сходимости в классе кусочно-гладких функций на $(-l, l)$, называется *разложением δ -функции $\delta(x_0, x)$ в тригонометрический ряд Фурье*.

Аналогично обстоит дело с разложением δ -функции $\delta(x_0, x)$ в интеграл Фурье. Применяя к $\delta(x_0, x)$ формально интегральную формулу Фурье (см. § 9)

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x_0, \xi) \cos \lambda (\xi - x) d\xi,$$

получим

$$\delta(x_0, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \cos \lambda (x_0 - x) d\lambda. \quad (8)$$

Это равенство, называемое *разложением δ -функции $\delta(x_0, x)$ в интеграл Фурье*, также следует понимать в смысле слабой сходимости. Умножая обе его части на любую абсолютно интегрируемую на всей оси x функцию $f(x)$, кусочно-гладкую на каждом конечном интервале, и интегрируя по x от $-\infty$ до $+\infty$ (с изменением порядка интегрирования по x и λ в правой части), получим известное равенство

$$f(x_0) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi) \cos \lambda(x_0 - \xi) d\xi. \quad (9)$$

Итак, при разложении δ -функции $\delta(x_0, x)$ в ряд Фурье (6) и в интеграл Фурье (8) с δ -функцией можно обращаться так же, как с обычной кусочно-гладкой функцией (абсолютно интегрируемой на всей оси в случае интеграла Фурье), а с разложениями (6) и (8), понимаемыми в смысле слабой сходимости, можно, в известном смысле, обращаться, как с обычными равенствами.

По поводу дальнейших сведений о δ -функции мы отсылаем к вып. 4 настоящего курса, а также к [5] и [6].

ДОПОЛНЕНИЕ 6 К ГЛ. 11

РАВНОМЕРНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ФУНКЦИЙ МНОГОЧЛЕНАМИ

Приведем доказательство теоремы Вейерштрасса о равномерной аппроксимации непрерывной функции f алгебраическими многочленами, легко распространяющееся на функции многих независимых переменных. Это доказательство в случае N -кратно непрерывно дифференцируемой функции f позволяет построить равномерно аппроксимирующий функцию f алгебраический многочлен, производные которого до N -го порядка включительно равномерно аппроксимируют соответствующие производные функции f .

Теорема 1 (Вейерштрасса). *Любую функцию $f(x)$, непрерывную на замкнутом ограниченном отрезке $a \leq x \leq b$, можно равномерно аппроксимировать алгебраическим многочленом со сколь угодно высокой точностью.*

Доказательство. Предположим, что $0 < a < b < 1$ (в противном случае сделаем надлежащую замену независимой переменной x). Возьмем числа α и β , удовлетворяющие неравенствам $0 < \alpha < a < b < \beta < 1$, и продолжим $f(x)$ непрерывно на весь отрезок $0 \leq x \leq 1$ так, чтобы было $f(x) \equiv 0$ при $0 \leq x \leq \alpha$ и $\beta \leq x \leq 1$.

Докажем, что алгебраический многочлен степени $2n$ (относительно x)

$$P_n(x) = \frac{\int_a^{\beta} f(u) [1 - (u - x)^2]^n du}{\int_{-1}^{+1} (1 - u^2)^n du} \quad (1)$$

при достаточно большом n равномерно аппроксимирует функцию $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с любой наперед заданной степенью точности. Для этого заметим, что

$$J_n = \int_0^1 (1 - v^2)^n dv \geq \int_0^1 (1 - v)^n dv = -\frac{(1 - v)^{n+1}}{n+1} \Big|_{v=0}^{v=1} = \frac{1}{n+1},$$

$$J_n^* = \int_{\delta}^1 (1 - v^2)^n dv < (1 - \delta^2)^n \quad \text{при любом } \delta, \quad 0 < \delta < 1.$$

Следовательно,

$$0 < \frac{J_n^*}{J_n} \leq (1 - \delta^2)^n (n+1) \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow +\infty, \quad (2)$$

если $\delta = \text{const}$, $0 < \delta < 1$. Сделав замену $u - x = v$, перепишем интеграл (1) в виде

$$P_n(x) = \frac{\int_{a-x}^{\beta-x} f(v+x) (1 - v^2)^n dv}{\int_{-1}^{+1} (1 - v^2)^n dv} \quad (3)$$

и оценим на отрезке $a \leq x \leq b$ разность

$$P_n(x) - f(x) = \frac{\int_{a-x}^{\beta-x} f(v+x) (1 - v^2)^n dv - \int_{-1}^{+1} f(x) (1 - v^2)^n dv}{2J_n}. \quad (4)$$

Пусть дано $\varepsilon > 0$. Выберем δ , $0 < \delta < 1$, так, чтобы выполнялось неравенство

$$|f(x+v) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } a \leq x \leq b \text{ и } |v| \leq \delta \quad (5)$$

и чтобы было $0 < x+v < 1$ при $a \leq x \leq b$ и $|v| \leq \delta$. Представим

числитель дроби (4) в виде

$$\begin{aligned} \int_{\alpha-x}^{-\delta} f(v+x)(1-v^2)^n dv + \int_{\delta}^{\beta-x} f(v+x)(1-v^2)^n dv + \\ + \int_{-\delta}^{\delta} [f(x+v) - f(x)](1-v^2)^n dv + \\ + \int_{-1}^{-\delta} f(x)(1-v^2)^n dv + \int_{\delta}^1 f(x)(1-v^2)^n dv. \end{aligned} \quad (6)$$

В силу (5) имеем

$$\left| \int_{-\delta}^{\delta} [f(x+v) - f(x)](1-v^2)^n dv \right| \leq 2 \frac{\varepsilon}{2} [J_n - J_n^*]. \quad (7)$$

Полагая $M = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$, получаем оценки

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha-x}^{-\delta} f(v+x)(1-v^2)^n dv \right| &\leq MJ_n^*, \\ \left| \int_{\delta}^{\beta-x} f(v+x)(1-v^2)^n dv \right| &\leq MJ_n^*, \end{aligned} \quad (8)$$

так как $-1 < \alpha - x < 0$ и $0 < \beta - x < 1$ при $a \leq x \leq b$, и оценки

$$\left| \int_{-1}^{\delta} f(x)(1-v^2)^n dv \right| \leq MJ_n^* \quad \text{и} \quad \left| \int_{\delta}^1 f(x)(1-v^2)^n dv \right| \leq MJ_n^*. \quad (9)$$

Поэтому числитель дроби (4) не превосходит величины

$$2 \frac{\varepsilon}{2} J_n + 4MJ_n^*. \quad (10)$$

Заметив это, получаем следующую оценку для (4):

$$|P_n(x) - f(x)| < \frac{2 \frac{\varepsilon}{2} J_n + 4MJ_n^*}{2J_n} = \frac{\varepsilon}{2} + 2M \frac{J_n^*}{J_n} \quad (11)$$

для всех $x \in [a, b]$.

Но, в силу (2), второе слагаемое в правой части неравенства (11) будет меньше $\varepsilon/2$ при всех достаточно больших n . Следовательно, при всех достаточно больших n

$$|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \text{для всех } x \in [a, b]. \quad (12)$$

Теорема доказана.

Совершенно аналогично для функции многих переменных может быть доказана

Теорема 2 (Вейерштрасса). Пусть $f(x_1, x_2, \dots, x_m)$ непрерывна в области Π : $a_i \leq x_i \leq b_i$, $i=1, 2, \dots, m$, причем $0 < a_i < b_i < 1$. Продолжим f непрерывно на весь единичный m -мерный куб E_m : $0 \leq x_i \leq 1$, $i=1, 2, \dots, m$, так, чтобы f была тождественно равна нулю вне параллелепипеда Π^* : $\alpha_i \leq x_i \leq \beta_i$, где $0 < \alpha_i < a_i < b_i < \beta_i < 1$. Тогда алгебраический многочлен степени nm относительно x_1, x_2, \dots, x_m

$$P_n(x_1, x_2, \dots, x_m) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} \dots \int_{\alpha_m}^{\beta_m} f(u_1, \dots, u_m) [1 - (u_1 - x_1)^2]^n \dots [1 - (u_m - x_m)^2]^n du_1 \dots du_m$$

$$\left[\int_{-1}^{+1} (1 - u^2)^n (du) \right]^m \quad (13)$$

при достаточно большом n равномерно аппроксимирует функцию $f(x_1, \dots, x_m)$ в Π с любой наперед заданной точностью.

Замечание 1. Если функция $f(x)$ ($f(x_1, \dots, x_m)$) имеет непрерывные производные до некоторого порядка N включительно, то производные $P_n(x)$ ($P_n(x_1, \dots, x_m)$) до N -го порядка включительно равномерно аппроксимируют соответствующие производные $f(x)$ ($f(x_1, \dots, x_m)$) со сколь угодно высокой точностью на отрезке $[a, b]$ (в параллелепипеде Π) при всех достаточно больших значениях n .

Докажем справедливость этого утверждения в простейшем случае. Пусть $f(x)$ и $f'(x)$ непрерывны на отрезке $a \leq x \leq b$, $0 < a < b < 1$. Продолжим $f(x)$ на весь отрезок $0 \leq x \leq 1$ так, чтобы $f(x)$ и $f'(x)$ были непрерывны на всем этом отрезке и тождественно равны нулю вне отрезка $\alpha \leq x \leq \beta$, где $0 < \alpha < a < b < \beta < 1$. Дифференцируя многочлен (1) по x и интегрируя по частям, получим

$$P'_n(x) = \frac{\frac{d}{dx} \int_{\alpha}^{\beta} f(u) [1 - (u - x)^2]^n du}{2J_n} =$$

$$= \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(u) \frac{d}{dx} [1 - (u - x)^2]^n du}{2J_n} = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f(u) \frac{d}{du} [1 - (u - x)^2]^n du}{2J_n} =$$

$$= \frac{\int_{\alpha}^{\beta} f'(u) [1 - (u - x)^2]^n du}{2J_n} = \frac{\int_{\alpha-x}^{\beta-x} f'(v+x) (1 - v^2)^n dv}{\int_{-1}^{+1} (1 - v^2)^n dv}.$$

После этого разность

$$P'_n(x) - f'(x) = \frac{\int_{\alpha-x}^{\beta-x} f'(x+v)(1-v^2)^n dv - \int_{-1}^{+1} f'(x)(1-v^2)^n dv}{2J_n}$$

оценивается так же, как разность (4) при доказательстве теоремы 1.

Замечание 2. Простым следствием теоремы 2 является

Теорема 3 (Вейерштрасса). Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $-l \leq x \leq l$ и имеет равные значения на его концах, т. е. $f(-l) = f(l)$, то она может быть с любой наперед заданной степенью точности равномерно аппроксимирована на этом отрезке тригонометрическим многочленом вида

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi x}{l} + b_k \sin \frac{k\pi x}{l} \right). \quad (14)$$

Доказательство. Положим $\frac{\pi x}{l} = \theta$. Тогда функция $F(\theta) = f\left(\frac{l\theta}{\pi}\right) = f(x)$ будет непрерывной на отрезке $-\pi \leq \theta \leq \pi$, причем $F(-\pi) = F(\pi)$. Введем на плоскости с декартовыми прямоугольными координатами ξ, η полярные координаты θ, ρ : $\xi = \rho \cos \theta$, $\eta = \rho \sin \theta$, и рассмотрим функцию $\varphi(\xi, \eta) = \rho F(\theta)$. Эта функция непрерывна на всей плоскости ξ, η и при $\rho = 1$ совпадает с $F(\theta)$, т. е. $\varphi(\xi, \eta) = F(\theta)$ на окружности $\xi^2 + \eta^2 = 1$. По теореме 2 функцию $\varphi(\xi, \eta)$ можно в квадрате $-1 \leq \xi \leq 1$, $-1 \leq \eta \leq 1$ равномерно аппроксимировать со сколь угодно высокой точностью алгебраическим многочленом $P_n(\xi, \eta)$. Полагая $\rho = 1$, получим равномерную аппроксимацию $F(\theta)$ с той же точностью на отрезке $-\pi \leq \theta \leq \pi$ тригонометрическим многочленом $P_n(\cos \theta, \sin \theta)$ или, возвращаясь к $x = \frac{l\theta}{\pi}$, равномерную аппроксимацию $f(x)$ с той же точностью на отрезке $-l \leq x \leq l$ тригонометрическим многочленом $P_n\left(\cos \frac{\pi x}{l}, \sin \frac{\pi x}{l}\right)$. Заменяя в последнем произведении и высшие степени $\cos \frac{\pi x}{l}$ и $\sin \frac{\pi x}{l}$ линейными комбинациями синусов и косинусов кратных дуг, этот многочлен можно привести к виду (14). Теорема доказана.

ОБ УСТОЙЧИВОМ СУММИРОВАНИИ РЯДОВ ФУРЬЕ С ВОЗМУЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Пусть известны точные значения c_k коэффициентов Фурье функции $f(x)$, интегрируемой с квадратом на $[a, b]$ по ортонормированной системе $\{\varphi_k(x)\}$:

$$c_k = \int_a^b f(x) \varphi_k(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (1)$$

и пусть при некотором $x \in [a, b]$ выполнено равенство

$$f(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \varphi_k(x). \quad (2)$$

Заменяя в нем сумму ряда частичной суммой, получим приближенное равенство

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^n c_k \varphi_k(x), \quad (3)$$

которое при $n \rightarrow +\infty$ переходит в точное равенство (2). Таким образом, увеличивая число членов n , приближенное равенство (3) в рассматриваемой точке x можно сделать сколь угодно близким к точному.

Однако на практике приходится пользоваться приближенными или, как говорят, возмущенными значениями коэффициентов Фурье:

$$\tilde{c}_k = c_k + \Delta c_k, \quad (4)$$

которые отличаются от точных значений c_k добавками Δc_k , называемыми *погрешностями* или *возмущениями*.

Если в приближенном равенстве (3) точные значения коэффициентов Фурье c_k заменить их приближенными значениями \tilde{c}_k , то получится приближенное равенство

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^n \tilde{c}_k \varphi_k(x), \quad (5)$$

точность которого при неоправданном увеличении числа членов n может, вообще говоря, не улучшиться, а ухудшиться. Если на возмущения Δc_k не наложено никаких ограничений, то это совершенно очевидно. Обычно на Δc_k накладывают следующее ограничение:

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\Delta c_k)^2 < \delta^2, \quad (6)$$

где δ^2 — достаточно малое число. Из выполнения условия (6) при каком угодно конечном δ следует, во-первых, существование функции $\tilde{f}(x)$, интегрируемой с квадратом на $[a, b]$, для которой ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{c}_k \varphi_k(x)$ является рядом Фурье *), а также следует, во-вторых, что в силу равенства Парсеваля

$$\int_a^b [\tilde{f}(x) - f(x)]^2 dx = \sum_{k=1}^{+\infty} (\tilde{c}_k - c_k)^2 = \sum_{k=1}^{+\infty} (\Delta c_k)^2 < \delta^2, \quad (7)$$

т. е. что квадратичное уклонение $\tilde{f}(x)$ от $f(x)$ на $[a, b]$ меньше δ^2 .

Однако выполнение условия (6) при сколь угодно малом δ не гарантирует сходимости ряда с возмущенными коэффициентами

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{c}_k \varphi_k(x). \quad (8)$$

Поэтому даже при выполнении условия (6) неоправданное увеличение числа членов n в приближенном равенстве (5) может привести не к его улучшению, а к ухудшению.

Рассмотрим, например, полную ортонормированную систему

$$\varphi_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \varphi_{k+1}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos kx, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (9)$$

на отрезке $0 \leq x \leq \pi$. Пусть функция $f(x)$ является как угодно гладкой на отрезке $0 \leq x \leq \pi$, и пусть ее точный ряд Фурье

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \varphi_k(x) = \frac{c_1}{\sqrt{\pi}} + \sum_{k=1}^{+\infty} c_{k+1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos kx \quad (10)$$

*) Действительно, из неравенства $\sum_{k=1}^{+\infty} (\Delta c_k)^2 < +\infty$, неравенства Бесселя

$$\sum_{k=1}^{+\infty} c_k^2 < \int_a^b f^2(x) dx \quad \text{и} \quad \text{элементарного неравенства} \quad \tilde{c}_k^2 \leq 2[c_k^2 + (\Delta c_k)^2],$$

$k = 1, 2, \dots$, вытекает сходимость ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{c}_k^2$. Но в теории функций действительного переменного доказывается ([7], теорема Рисса — Фишера), что сходимость ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{c}_k^2$ является необходимым и достаточным условием существования функции $\tilde{f}(x)$, интегрируемой с квадратом на $[a, b]$, для которой ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{c}_k \varphi_k(x)$ является рядом Фурье.

сходится к ней как угодно быстро в точке $x=0$. Положим

$$\Delta c_1 = 0, \quad \Delta c_{k+1} = \frac{\delta'}{k} \quad \text{при } k = 1, 2, \dots, \quad \frac{\pi^2 \delta'^2}{6} < \delta^2, \quad \delta' > 0. \quad (11)$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{+\infty} (\Delta c_k)^2 = \frac{\pi^2 \delta'^2}{6} < \delta^2, \quad (12)$$

т. е. условие (6) для возмущений Δc_k выполнено. Однако ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \tilde{c}_k \varphi_k(x) = \sum_{k=1}^{+\infty} (c_k + \Delta c_k) \varphi_k(x)$$

расходится при $x=0$. Действительно, ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \varphi_k(0)$ по условию сходится к $f(0)$, а ряд

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \Delta c_k \varphi_k(0) = \delta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\cos kx}{k} \Big|_{x=0} = \delta \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k}$$

расходится, отличаясь от гармонического лишь отличным от нуля множителем $\delta \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ ($\delta \neq 0$).

Тем не менее, если точный ряд Фурье функции $f(x)$ сходится к $f(x)$ в некоторой точке $x \in [a, b]$, то выполнение условия (6) при сколь угодно малом $\delta > 0$ позволяет с помощью надлежащего выбора $N(\delta)$ сделать в этой точке x модуль разности

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{N(\delta)} \tilde{c}_k \varphi_k(x) \right|$$

сколь угодно малым, т. е. сделать в данной точке x приближенное равенство

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{N(\delta)} \tilde{c}_k \varphi_k(x) \quad (5')$$

сколь угодно близким к точному. При этом не требуется никаких дополнительных ограничений на степень гладкости функции $f(x)$ и скорость сходимости ее точного ряда Фурье в данной точке x . Именно, справедлива следующая

Теорема. Пусть для членов ортонормированной на $[a, b]$ системы $\{\varphi_k(x)\}$ выполнены неравенства

$$|\varphi_k(x)| \leq A = \text{const} < +\infty \quad \text{при } k = 1, 2, \dots, \quad a \leq x \leq b \quad (13)$$

и пусть при каждом δ^2 в правой части неравенства (6) число $N(\delta)$ выбирается так, что выполнены условия:

$$N(\delta) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0, \quad (14_1)$$

$$\delta^2 N(\delta) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \delta \rightarrow 0. \quad (14_2)$$

Тогда

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{N(\delta)} \tilde{c}_k \varphi_k(x) \right| = 0 \quad (15)$$

при любом $x \in [a, b]$, для которого выполнено равенство (2).

Доказательство. В силу соотношений (2), (4), (6), (14₁) и (14₂) и неравенства Коши — Буняковского для сумм, будем иметь

$$\begin{aligned} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{N(\delta)} \tilde{c}_k \varphi_k(x) \right| &= \left| \sum_{k=1}^{+\infty} c_k \varphi_k(x) - \sum_{k=1}^{N(\delta)} \tilde{c}_k \varphi_k(x) \right| \leq \\ &\leq \left| - \sum_{k=1}^{N(\delta)} \Delta c_k \varphi_k(x) \right| + \left| \sum_{k=N(\delta)+1}^{+\infty} c_k \varphi_k(x) \right| \leq \\ &\leq \sqrt{\sum_{k=1}^{N(\delta)} (\Delta c_k)^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{N(\delta)} \varphi_k^2(x)} + \left| \sum_{k=N(\delta)+1}^{+\infty} c_k \varphi_k(x) \right| \leq \\ &\leq A \sqrt{\delta^2 N(\delta)} + \left| \sum_{k=N(\delta)+1}^{+\infty} c_k \varphi_k(x) \right|. \quad (16) \end{aligned}$$

Член $A \sqrt{\delta^2 N(\delta)}$ в правой части неравенства (16) стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$, в силу условия (14₂), а член $\left| \sum_{k=N(\delta)+1}^{+\infty} c_k \varphi_k(x) \right|$ стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$, в силу условия (14₁) и сходимости ряда $\sum_{k=1}^{+\infty} c_k \varphi_k(x)$ в рассматриваемой точке x . Теорема доказана.

Из доказательства этой теоремы вытекают следующие выводы. Пусть в точке $x \in [a, b]$ выполнено равенство (2) и при некотором $\delta > 0$ выполнено ограничение (6) на возмущения Δc_k коэффициентов

Фурье. Чтобы модуль разности $\left| f(x) - \sum_{k=1}^{N(\delta)} \tilde{c}_k \varphi_k(x) \right|$, где $\tilde{c}_k = c_k + \Delta c_k$, $k = 1, 2, \dots$, сделать в данной точке $x \in [a, b]$ минимальным, нужно число членов $N(\delta)$ частичной суммы $\sum_{k=1}^{N(\delta)} \tilde{c}_k \varphi_k(x)$ взять

не слишком малым, чтобы член $\left| \sum_{k=N(\delta)+1}^{+\infty} c_k \varphi_k(x) \right|$ в правой части неравенства (16) был достаточно мал, и не слишком большим, чтобы член $A \sqrt{\delta^2 N(\delta)}$ в правой части неравенства (16) также был достаточно малым,

Всякий метод восстановления функции $f(x)$ с любой наперед заданной степенью точности по ее ряду Фурье с возмущенными коэффициентами, если возмущения коэффициентов удовлетворяют условию (6) при сколь угодно малом $\delta > 0$, мы называем *устойчивым методом суммирования ряда Фурье с возмущенными коэффициентами*.

Таким образом, из доказанной теоремы вытекает, что если δ^2 в правой части условия (6) может быть сделано сколь угодно малым, то путем надлежащего выбора $N(\delta)$ в приближенном равенстве (5') может быть осуществлен *устойчивый метод суммирования ряда Фурье с возмущенными коэффициентами*.

Устойчивые методы суммирования рядов Фурье с возмущенными коэффициентами рассматривались А. Н. Тихоновым в работе [8]. В этой работе были предложены методы восстановления по ряду Фурье с возмущенными коэффициентами не только функции $f(x)$, но и ее производных. Однако рассмотрение этих более тонких вопросов выходит за рамки данной книги.

ДОБАВЛЕНИЕ 1

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ РАЗЛОЖЕНИЯХ

При решении многих задач математики и математической физики вычисление и исследование функции $f(x)$ в окрестности некоторой конечной точки x_0 или в окрестности бесконечности *) связано с большими трудностями. Эти трудности часто удается преодолеть с помощью асимптотических разложений, приводящих к замене функции $f(x)$ такими функциями, которые вычисляются и исследуются проще, чем $f(x)$, и которые при x , приближающемся к x_0 , или соответственно при x , стремящемся к бесконечности, все более и более точно аппроксимируют $f(x)$.

Сначала, не формулируя общих определений, мы приведем примеры асимптотических разложений (§ 1), затем остановимся на некоторых общих определениях и теоремах (§ 2) и, наконец, покажем на примере гамма-функции применение метода Лапласа для получения асимптотических разложений некоторых интегралов (§ 3).

§ 1. Примеры асимптотических разложений

1. Асимптотические разложения в окрестности нуля рассматривались уже в 1-м выпуске настоящего курса. Там в гл. 8 были получены асимптотические разложения в окрестности нуля для следующих элементарных функций:

$$\left. \begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n), \\ \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + o(x^n), \\ \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots + (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + o(x^n), \end{aligned} \right\} \quad \begin{array}{l} n \text{ нечетно,} \\ n \text{ четно.} \end{array} \quad (I)$$

*) То есть при $x \rightarrow +\infty$, или при $x \rightarrow -\infty$, или при $|x| \rightarrow \infty$.

$$\left. \begin{aligned} \ln(1+x) &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o(x^n), \\ (1+x)^\alpha &= 1 + \frac{\alpha}{1!} x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!} x^2 + \dots \\ &\quad \dots + \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!} x^n + o(x^n), \end{aligned} \right\} \quad (I)$$

где $o(x^n)$ — величина более высокого порядка малости при $x \rightarrow 0$, чем x^n . Разложения (I) использовались для вычисления некоторых тонких пределов, когда более грубая информация о поведении элементарных функций в окрестности нуля была недостаточной.

2. Асимптотические разложения в окрестности бесконечности.

Рассмотрим теперь некоторые асимптотические разложения в окрестности бесконечности. Часто в математической физике приходится пользоваться функцией

$$\Psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi \quad (1)$$

при больших значениях аргумента $x > 0$. Найдем асимптотическое разложение функции $\Psi(x)$ в окрестности бесконечности, т. е. при $x \rightarrow +\infty$. Интегрируя по частям, находим

$$\begin{aligned} \int_x^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi &= \int_x^{+\infty} \frac{e^{-\xi^2} 2\xi d\xi}{2\xi} = -\frac{e^{-\xi^2}}{2\xi} \Big|_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-\xi^2}}{2\xi^2} d\xi = \\ &= \frac{e^{-x^2}}{2x} - \int_x^{+\infty} \frac{e^{-\xi^2}}{2\xi^2} d\xi. \end{aligned}$$

Поступая таким же образом с интегралом $\int_x^{+\infty} \frac{e^{-\xi^2}}{2\xi^2} d\xi$ и т. д., после $(n+1)$ -кратного применения этого приема получим следующее разложение для $\Psi(x)$:

$$\Psi(x) = \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi}x} \left[1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{(2x^2)^k} + R_n(x) \right], \quad (2)$$

$$*) \Psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 1 - \Phi(x), \quad \text{где} \quad \Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi -$$

«интеграл ошибок», играющий важную роль в теории вероятностей, теории теплопроводности, статистической физике. Он не выражается через элементарные функции; существуют многочисленные таблицы его значений при различных значениях аргумента x .

где

$$R_n(x) = (-1)^{n+1} \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2^n} e^{x^2} x \int_x^{+\infty} \frac{e^{-\xi^2}}{\xi^{2n+2}} d\xi. \quad (3)$$

Для остаточного члена $R_n(x)$ справедлива следующая очевидная оценка:

$$|R_n(x)| \leq \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2^{n+1} x^{2n+2}} e^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-\xi^2} 2\xi d\xi = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2^{n+1} x^{2n+2}}. \quad (4)$$

Обозначим через $O\left(\frac{1}{x^k}\right)$ при $x \rightarrow \infty$ величину, для которой выполняется «соотношение порядка»:

$$\left| O\left(\frac{1}{x^k}\right) \right| \leq \text{const} \cdot \frac{1}{x^k} \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

Тогда разложение (2), в силу оценки (4), можно переписать в виде

$$\Psi(x) = \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left[1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{(2x^2)^k} + O\left(\frac{1}{x^{2n+2}}\right) \right]. \quad (5)$$

Так как $O\left(\frac{1}{x^{2n+2}}\right) \rightarrow 0$ при $x \rightarrow +\infty$, то, отбрасывая член $O\left(\frac{1}{x^{2n+2}}\right)$, можно написать, что

$$\Psi(x) \approx \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left[1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{(2x^2)^k} \right] \quad \text{при } x \rightarrow +\infty. \quad (6)$$

Соотношения (5) и (6) называются *асимптотическими*

разложениями $\Psi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi$ при $x \rightarrow +\infty$ или,

иначе, «в окрестности бесконечности».

Если в правой части соотношения (6) суммирование продолжить неограниченно, то получится разложение $\Psi(x)$ в асимптотический ряд

$$\Psi(x) \approx \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left[1 + \sum_{k=1}^{+\infty} (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{(2x^2)^k} \right]. \quad (7)$$

Этот ряд расходится при всех значениях x . При каждом достаточно большом x модуль k -го члена ряда с возрастанием номера k сначала убывает, затем, достигнув некоторого минимального значения, возрастает неограниченно. Однако, в силу неравенства (4), для разности

между $\Psi(x)$ и частичной суммой этого ряда имеет место оценка

$$\left| \Psi(x) - \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \left[1 + \sum_{k=1}^n (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \dots (2k-1)}{2^k x^{2k}} \right] \right| \leqslant \frac{e^{-x^2}}{x\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1 \cdot 3 \dots (2n+1)}{2^{n+1} x^{2n+2}}. \quad (8)$$

Иными словами, погрешность, допускаемая при замене функции $\Psi(x)$ частичной суммой ряда (7), не превосходит первого из отброшенных членов и быстро стремится к нулю при $x \rightarrow +\infty$.

Многократное интегрирование по частям является достаточно общим методом получения асимптотических разложений. Таким путем могут быть получены асимптотические разложения для интегральной показательной функции

$$\text{Ei}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{e^{\xi}}{\xi} d\xi, \quad -\infty < x < 0 \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty,$$

для интегрального косинуса

$$\text{Ci}(x) = \int_x^{+\infty} \frac{\cos \xi}{\xi} d\xi, \quad 0 < x < +\infty \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow +\infty,$$

для интегрального синуса

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin \xi}{\xi} d\xi, \quad -\infty < x < +\infty \quad \text{при} \quad |x| \rightarrow \infty.$$

Некоторые асимптотические разложения удастся получить иными элементарными приемами (см., например, [9] или [10]).

Рассмотрим один несложный пример. При исследовании распространения электромагнитных волн у поверхности земли и в ряде других задач используется функция

$$F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{\xi^2} d\xi. \quad (9)$$

Нетрудно получить разложение для $F(x)$ в сходящийся степенной ряд^{*)}, которым, однако, при больших значениях x пользоваться неудобно. Найдем асимптотическое представление для $F(x)$ при $x \rightarrow +\infty$. Умножая равенство (9) на $2x$ и применяя дважды

^{*)} См. п. 2 § 4 гл. 8.

правило Лопиталя при $x \rightarrow +\infty$, получим

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2xF(x) = 1. \quad (10)$$

Следовательно, для $F(x)$ имеет место асимптотическое представление

$$F(x) = \frac{1}{2x} [1 + o(1)] \quad \text{при } x \rightarrow +\infty, \quad (11)$$

где $o(1)$ при $x \rightarrow +\infty$ определяется как величина, стремящаяся к нулю при $x \rightarrow +\infty$. Вместо (11) можно написать также

$$F(x) \approx \frac{1}{2x} \quad \text{при } x \rightarrow +\infty. \quad (12)$$

Можно было бы привести много других асимптотических разложений, но мы пока ограничимся рассмотренными примерами.

§ 2. Некоторые общие определения и теоремы

Мы будем рассматривать функции $f(x)$, $g(x)$, ..., заданные на некотором множестве M точек x вещественной прямой, например на конечном интервале, на полупрямой, на всей вещественной прямой.

1. Соотношения порядка. Асимптотическая эквивалентность. Остановимся сначала на соотношениях порядка $f(x) = o(g(x))$ и $f(x) = O(g(x))$. Пусть x_0 — какая-либо предельная точка множества M .

Определение 1. Если

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ x \in M}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0, \quad (13)$$

то говорят, что $f(x)$ есть «малое» от $g(x)$ при $x \rightarrow x_0$ на множестве M , и пишут

$$f(x) = o(g(x)) \quad \text{при } x \rightarrow x_0 \text{ на } M. \quad (14)$$

Замечание. Выполнение соотношения (13) означает, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что

$$|f(x)| < \varepsilon |g(x)| \quad \text{при всех } x \in M, \text{ для которых } |x - x_0| < \delta. \quad (13')$$

Определение 2. Если существует такая константа C , $0 < C < +\infty$, что при всех $x \in M$ из достаточно малой окрестности x_0 выполняется неравенство

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| < C, \quad (15)$$

то говорят, что $f(x)$ есть «о большое» от $g(x)$ при $x \rightarrow x_0$ на множестве M , и пишут

$$f(x) = O(g(x)) \text{ при } x \rightarrow x_0 \text{ на } M. \quad (16)$$

Определение 2. Если неравенство (15) выполняется на всем множестве M , то говорят, что $f(x)$ есть «о большое» от $g(x)$ на множестве M , и пишут

$$f(x) = O(g(x)) \text{ при } x \in M. \quad (16')$$

Если $f(x) = o(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$ на M , то, как это следует из определений 1 и 2, и подавно $f(x) = O(g(x))$ при $x \rightarrow x_0$ на M .

Замечание. Если множество M не ограничено, то совершенно аналогично определяются соотношения порядка $f(x) = o(g(x))$ и $f(x) = O(g(x))$ при $x \rightarrow +\infty$ (или $x \rightarrow -\infty$, или $|x| \rightarrow \infty$), иными словами, соотношения порядка «в окрестности бесконечности».

Если выбор множества M очевиден, то в соотношениях (13)—(16) указание на M опускают.

Примеры. 1) $e^x - 1 = O(x)$ при $x \rightarrow 0$,

2) $\sin x = O(x)$ при $x \rightarrow 0$,

3) $\cos x = O(1)$ при $x \rightarrow 0$,

4) $\sin^2 x = o(x)$ при $x \rightarrow 0$,

5) $x^2 = o(x)$ при $x \rightarrow 0$,

6) $x^2 = O(x)$ при $x \rightarrow 0$,

7) $e^{-x^2} = o(x^{-1})$ при $x \rightarrow \infty$,

$$8) F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{\xi^2} d\xi = O\left(\frac{1}{2x}\right) \text{ при } x \rightarrow +\infty.$$

Сформулируем теперь определение асимптотической эквивалентности функций.

Определение 3. Функции $f(x)$ и $g(x)$ называют асимптотически эквивалентными при $x \rightarrow x_0$ на множестве M и пишут

$$f(x) \sim g(x) \text{ при } x \rightarrow x_0 \text{ на } M, \quad (17)$$

если

$$(f(x)/g(x)) \rightarrow 1 \text{ при } x \rightarrow x_0 \text{ на } M. \quad (18)$$

Вместо соотношения (17) можно написать, очевидно, соотношение

$$f(x) = g(x)[1 + o(1)] \text{ при } x \rightarrow x_0 \text{ на } M, \quad (19)$$

называемое асимптотическим представлением $f(x)$ в окрестности x_0 на множестве M .

Совершенно аналогично определяется асимптотическая эквивалентность функций на множестве M в окрестности бесконечности (т. е. при $x \rightarrow +\infty$, или при $x \rightarrow -\infty$, или при $|x| \rightarrow \infty$).

Примеры. 9) $\sin x \sim x$ при $x \rightarrow 0$,

$$10) F(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{\xi^2} d\xi \sim \frac{1}{2x} \quad \text{при } x \rightarrow +\infty.$$

2. Асимптотические разложения функций. Раскрывая скобки в соотношении (19), получим равенство

$$f(x) = g(x) + o(g(x)) \quad \text{при } x \rightarrow x_0 \text{ на } M, \quad (19')$$

которое является простейшим асимптотическим разложением $f(x)$ в окрестности x_0 на множестве M .

Сформулируем теперь общее определение асимптотического разложения, охватывающее также частные случаи, рассмотренные в § 1 настоящего добавления. Для этого нам прежде всего потребуется ввести понятие асимптотической последовательности и асимптотического ряда.

Определение 4. Конечная или бесконечная последовательность функций $\{\varphi_n(x)\}$, заданных на множестве M , называется асимптотической на M при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$), если при каждом n выполнены соотношения порядка $\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x))$ при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$).

Например, последовательности

- 1) $1, x, x^2, \dots, x^n, \dots$ при $x \rightarrow 0$,
- 2) $1, x^{\lambda_1}, x^{\lambda_2}, \dots, x^{\lambda_n}, \dots$ ($0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$)
при $x \rightarrow 0$,
- 3) $1, (x - x_0), (x - x_0)^2, \dots, (x - x_0)^n, \dots$ при $x \rightarrow x_0$,
- 4) $1, x^{-\lambda_1}, x^{-\lambda_2}, \dots, x^{-\lambda_n}, \dots$ ($0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n < \dots$)
при $x \rightarrow +\infty$,
- 5) $e^x, e^x x^{-\lambda_1}, e^x x^{-\lambda_2}, \dots, e^x x^{-\lambda_n}, \dots$ ($0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots$)
при $x \rightarrow +\infty$,
- 6) $1, x^{-1}, x^{-2}, \dots, x^{-n}, \dots$ при $x \rightarrow +\infty$

являются, очевидно, асимптотическими.

Последовательности 1), 3), 6) называются степенными; последовательности 2), 4), 5), где λ_i — некоторые вещественные числа, — обобщенными степенными.

Определение 5. Если $\{\varphi_n(x)\}$ — бесконечная асимптотическая последовательность (на множестве M) при $x \rightarrow x_0$

($x \rightarrow +\infty$), то ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} c_n \varphi_n(x)$ с любыми постоянными коэффициентами $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ называется асимптотическим рядом (на множестве M) при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$).

Определение 6. Пусть $\{\varphi_n(x)\}$ — конечная или бесконечная асимптотическая последовательность на множестве M при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$). Если для функции $f(x)$, заданной на M , выполняется соотношение

$$f(x) = \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x) + o(\varphi_N(x)) \quad \text{при } x \rightarrow x_0 \quad (x \rightarrow \infty), \quad (20)$$

где a_1, a_2, \dots, a_N — некоторые константы, то его называют асимптотическим разложением $f(x)$ на M при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) по последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ до N -го члена включительно.

Разложение (20) записывают также в виде

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x) \quad \text{при } x \rightarrow x_0 \quad (x \rightarrow \infty). \quad (21)$$

Если имеет место асимптотическое разложение (20), то, очевидно, и подавно имеют место асимптотические разложения, получающиеся из (20) заменой N на k , где $k = 1, 2, \dots, N-1$.

Определение 7. Пусть $\sum_{k=1}^{+\infty} a_k \varphi_k(x)$ — асимптотический ряд на множестве M при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) и пусть для функции $f(x)$, заданной на M , асимптотическое разложение (20) имеет место при каждом $N = 1, 2, 3, \dots$. Тогда этот ряд называют асимптотическим разложением функции $f(x)$ на M при $x \rightarrow x_0$ и пишут

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \varphi_k(x) \quad \text{при } x \rightarrow x_0 \quad (x \rightarrow \infty). \quad (22)$$

Асимптотические разложения, рассматривавшиеся в предыдущем параграфе, очевидно, удовлетворяют определениям 6 и 7.

Заметим, что асимптотические разложения в окрестности $x = 0$, или $x = x_0 \neq 0$ или в окрестности бесконечности сводятся друг к другу заменой вида $z = \frac{C}{x}$, или вида $z = C(x - x_0)$, или вида $z = \frac{C}{x - x_0}$ соответственно, однако такое сведение при практических применениях асимптотических разложений не всегда целесообразно.

Остановимся на различии между разложением функции $f(x)$ в сходящийся к ней функциональный ряд и ее разложением в

асимптотический ряд. В первом случае мы требуем, чтобы разность между $f(x)$ и частичной суммой ряда стремилась к нулю при любом фиксированном x и $N \rightarrow +\infty$; во втором случае требуем, чтобы разность $f(x) - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x)$ при каждом N стремилась к нулю при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$), имея более высокий порядок малости, чем последний член в частичной сумме.

Асимптотический ряд для $f(x)$ может быть сходящимся или расходящимся, как это показывают примеры асимптотических рядов, рассмотренных в § 1 настоящей главы. Однако из сходимости асимптотического ряда данной функции $f(x)$ не следует, что его сумма равна $f(x)$. Так, например, нетрудно убедиться, что для функции $f(x) = e^{-x}$ имеет место следующее тривиальное асимптотическое разложение:

$$e^{-x} \approx 0 \cdot 1 + 0 \cdot x^{-1} + \dots + 0 \cdot x^{-n} + \dots \quad (\text{при } x \rightarrow +\infty), \quad (23)$$

причем асимптотический ряд (12.23) сходится, однако его сумма при всех x ($x \neq 0$) не равна e^{-x} .

Для практических применений асимптотических разложений важно оценить погрешность, допускаемую при замене $f(x)$ частичной

суммой $\sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x)$ ее асимптотического разложения (22), т. е. оценить остаточный член $o(\varphi_N(x))$ в разложении (20) при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$).

Ввиду того, что аналитическая оценка остаточного члена часто сопряжена с большими трудностями, на практике для выяснения области применимости асимптотических разложений пользуются контрольным расчетом, проведенным каким-либо другим методом. В ряде случаев этого оказывается достаточно. Например, пусть известно, что модуль остаточного члена $|o(\varphi_N(x))|$ стремится к нулю при $x \rightarrow x_0$, монотонно убывая. Если при значении x , достаточно близком к x_0 , удалось каким-либо способом получить значение $f(x)$

и оно отличается от значения $\sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x)$ в этой же точке x меньше, чем на $\varepsilon > 0$ (по модулю), то при всех x , более близких к x_0 , модуль разности $f(x) - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x)$ и подавно будет оставаться меньше ε .

Аналогичным образом обстоит дело, когда не $|o(\varphi_N(x))|$, а некоторая мажоранта $\psi_N(x) \geq |o(\varphi_N(x))|$ стремится к нулю, монотонно убывая, при $x \rightarrow x_0$.

Асимптотическое разложение любой функции $f(x)$ по заданной асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, если оно существует, определяется однозначно. Именно, имеет место

Теорема 1. Пусть каждый член асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ отличен от нуля при всех x в достаточно малой окрестности x_0 (или при $x \rightarrow \infty$) и пусть имеет место асимптотическое разложение (20) для функции $f(x)$. Тогда его коэффициенты a_k однозначно определяются по формулам

$$a_n = \lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ (x \rightarrow \infty)}} \frac{f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k(x)}{\varphi_n(x)} \quad \text{при } n = 1, 2, \dots, N. \quad (24)$$

Доказательство. Заменяя в соотношении (20) N на n и переписав его в виде

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k(x) + a_n \varphi_n(x) + o(\varphi_n(x)), \quad 1 \leq n \leq N,$$

находим

$$a_n = \frac{f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} a_k \varphi_k(x)}{\varphi_n(x)} + \frac{o(\varphi_n(x))}{\varphi_n(x)}, \quad 1 \leq n \leq N,$$

откуда и следует справедливость равенства (24). Теорема доказана.

Обратная теорема неверна; именно, функция $f(x)$ определяется своим асимптотическим разложением неоднозначно; могут быть различные функции с одним и тем же асимптотическим разложением. Так, например, функции $f(x) = e^{-x}$ и $g(x) = 0$ имеют одинаковое асимптотическое разложение (23) по степеням $1, x^{-1}, x^{-2}, \dots, x^{-n}, \dots$ при $x \rightarrow +\infty$.

Определение 8. Две функции $f(x)$ и $g(x)$ называются асимптотически эквивалентными относительно данной асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$), если при всех n выполняется соотношение

$$f(x) - g(x) = o(\varphi_n(x)) \quad \text{при } x \rightarrow x_0 \text{ } (x \rightarrow \infty). \quad (25)$$

Две функции $f(x)$ и $g(x)$ с одинаковым асимптотическим разложением по некоторой асимптотической последовательности, очевидно, асимптотически эквивалентны относительно этой асимптотической последовательности.

Нетрудно доказать, что для совпадения коэффициентов асимптотических разложений функций $f(x)$ и $g(x)$ по одной и той же асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ необходимо и достаточно, чтобы эти функции были асимптотически эквивалентны относительно последовательности $\{\varphi_n(x)\}$.

Остановимся теперь на вопросе об операциях над асимптотическими разложениями.

Если при $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) имеют место асимптотические разложения

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{+\infty} a_k \varphi_k(x) \text{ и } g(x) \approx \sum_{k=1}^{+\infty} b_k \varphi_k(x) \text{ при } x \rightarrow x_0 \text{ } (x \rightarrow \infty), \quad (26)$$

то, очевидно, при любых постоянных α и β имеет место также асимптотическое разложение

$$\alpha f(x) + \beta g(x) \approx \sum_{k=1}^{+\infty} (\alpha a_k + \beta b_k) \varphi_k(x) \text{ при } x \rightarrow x_0 \text{ } (x \rightarrow \infty). \quad (27)$$

Перемножать асимптотические разложения двух функций $f(x)$ и $g(x)$ по одной и той же асимптотической последовательности $\{\varphi_n(x)\}$, вообще говоря, нельзя, так как уже произведения $\varphi_m(x)\varphi_n(x)$ не всегда можно расположить в асимптотическую последовательность.

Остановимся на вопросе о почленном интегрировании асимптотических разложений. Справедлива следующая

Теорема 2. Пусть последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ положительных функций вещественной переменной x , определенных на интервале $a < x < b$, является асимптотической при $x \rightarrow b - 0$ и пусть имеет место асимптотическое разложение

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \varphi_k(x) \text{ при } x \rightarrow b - 0^*). \quad (28)$$

Если интегралы

$$\int_x^b f(\xi) d\xi \text{ и } \int_x^b \varphi_k(\xi) d\xi \quad (29)$$

сходятся, то имеет место также асимптотическое разложение

$$\int_a^b f(\xi) d\xi \approx \sum_{k=1}^{+\infty} C_k \int_a^b \varphi_k(\xi) d\xi. \quad (30)$$

Доказательство. Для положительных функций в неравенстве $|\varphi_{n+1}(x)| < \varepsilon |\varphi_n(x)|$, выражающем соотношение порядка $\varphi_{n+1}(x) = o(\varphi_n(x))$ **), знак модуля можно опустить. В результате получим, что

$$\varphi_{n+1}(x) < \varepsilon \varphi_n(x) \text{ при } x \rightarrow b - 0 \quad (*)$$

*) Здесь b — конечное число или $+\infty$.

**) См. замечание к определению 1.

при любом $\varepsilon > 0$. Интегрируя (*) от x до b , что возможно, в силу сходимости интегралов, получим, что

$$0 < \int_x^b \varphi_{n+1}(\xi) d\xi < \varepsilon \int_x^b \varphi_n(\xi) d\xi \quad (31)$$

при любом $\varepsilon > 0$ и при $x \rightarrow b - 0$, откуда вытекает, что последовательность $\left\{ \int_x^b \varphi_n(\xi) d\xi \right\}$ является асимптотической при $x \rightarrow b - 0$.

Для доказательства соотношения (30) нужно доказать, что

$$\int_x^b f(\xi) d\xi \approx \sum_{k=1}^N C_k \int_x^b \varphi_k(\xi) d\xi \quad \text{при } x \rightarrow b - 0 \quad (30')$$

для каждого $N = 1, 2, 3, \dots$. В силу положительности функций $\varphi_n(x)$, соотношение (20), имеющее место в силу (28), можно переписать в виде

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(x) \right| < \varepsilon \varphi_N(x) \quad \text{при } x \rightarrow b - 0$$

и любым $\varepsilon > 0$ для каждого $N = 1, 2, 3, \dots$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f(\xi) d\xi - \sum_{k=1}^N a_k \int_x^b \varphi_k(\xi) d\xi \right| &\leq \\ &\leq \int_x^b \left| f(\xi) - \sum_{k=1}^N a_k \varphi_k(\xi) \right| d\xi \leq \varepsilon \int_x^b \varphi_N(\xi) d\xi \quad \text{при } x \rightarrow b - 0 \end{aligned}$$

и любым $\varepsilon > 0$ для каждого $N = 1, 2, 3, \dots$. Но это и означает, что для каждого $N = 1, 2, 3, \dots$ справедливо асимптотическое разложение (30), что и требовалось доказать.

Из теоремы 2 вытекает очевидным образом справедливость следующего утверждения:

Если имеет место степенное асимптотическое разложение

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^{-k} \quad \text{при } x \rightarrow +\infty \quad (32)$$

и интеграл $\int_x^{+\infty} [f(\xi) - a_0 - a_1 \xi^{-1}] d\xi$ сходится, то имеет место также степенное асимптотическое разложение

$$\int_x^{+\infty} [f(\xi) - a_0 - a_1 \xi^{-1}] d\xi \approx \sum_{k=2}^{+\infty} \frac{a_k}{-k+1} x^{-k+1}. \quad (33)$$

Почленное дифференцирование асимптотических разложений, вообще говоря, недопустимо. Однако можно указать важные частные виды асимптотических разложений, допускающих почленное дифференцирование. Пусть, например, $f(x)$ допускает степенное асимптотическое разложение вида (32), а ее производная $f'(x)$ допускает также степенное асимптотическое разложение, в котором отсутствуют члены с x^0 и x^{-1} :

$$f'(x) \approx -\frac{a_1^*}{x^2} - \frac{2a_2^*}{x^3} - \dots - \frac{na_n^*}{x^{n+1}} - \dots \text{ при } x \rightarrow +\infty. \quad (34)$$

Интегрируя (34), в силу предыдущего предложения, получим

$$f(x) \approx f(+\infty) + \frac{a_1^*}{x} + \frac{a_2^*}{x^2} + \dots + \frac{a_n^*}{x^n} + \dots \text{ при } x \rightarrow -\infty. \quad (35)$$

Но, в силу единственности разложения $f(x)$ в асимптотической ряд по степеням $1, x^{-1}, x^{-2}, x^{-3}, \dots, x^{-k}, \dots$, разложение (35) должно совпадать с разложением (32), т. е. будут выполняться равенства $f(+\infty) = a_0, a_1^* = a_1, \dots, a_k^* = a_k, \dots$. Подставляя эти значения в (34), получим

$$f'(x) \approx -\frac{a_1}{x^2} - \frac{2a_2}{x^3} - \dots - \frac{na_n}{x^{n+1}} - \dots \text{ при } x \rightarrow +\infty, \quad (34')$$

а это асимптотическое равенство получается почленным дифференцированием асимптотического равенства (32).

На этом мы закончим краткое изложение некоторых общих сведений об асимптотических разложениях и в следующем параграфе опишем один важный метод построения асимптотических разложений для некоторых интегралов.

§ 3. Метод Лапласа для асимптотического разложения некоторых интегралов

Пусть требуется получить асимптотическое представление интеграла

$$J(t) = \int_a^b f(x, t) dx \quad \text{при } t \rightarrow +\infty \quad (36)$$

в предположении, что при больших значениях t подынтегральная функция имеет резкий пик в окрестности некоторого значения $x = x_0$, а вне этой окрестности значения подынтегральной функции по модулю весьма малы. Очевидно, может случиться, что интеграл, взятый по этой окрестности x_0 , будет при больших значениях t почти равен всему интегралу (36). Если, кроме того, окажется возможным в этой окрестности заменить функцию $f(x, t)$ с достаточно высокой точ-

ностью такой простой функцией, интеграл от которой легко берется, причем разность между этим интегралом и исходным интегралом (36) стремится к нулю при $t \rightarrow +\infty$, то это приводит к асимптотическому представлению интеграла (36) при больших значениях t . Такой метод получения асимптотических представлений для интегралов описанного типа был предложен Лапласом.

Рассмотрим применение этого метода на примере гамма-функции

$$\Gamma(t+1) = \int_0^{+\infty} e^{-u} u^t du \quad (37)$$

при $t \rightarrow +\infty$. Асимптотическое представление, которое мы таким путем получим для $\Gamma(t+1)$ при больших значениях t в случае целых $t = n > 0$, представляет собой так называемую *формулу Стирлинга*, дающую асимптотическое представление для $n!$ при больших значениях n .

Заменой $u = t(1+x)$ приведем интеграл (37) к виду

$$\Gamma(t+1) = e^{-t} t^{t+1} \int_{-1}^{+\infty} [e^{-x}(1+x)]^t dx = e^{-t} t^{t+1} \int_{-1}^{+\infty} e^{th(x)} dx. \quad (38)$$

Функция $e^{-x}(1+x) = e^{-x+\ln(1+x)} = e^{h(x)}$, где $h(x) = -x + \ln(1+x)$, достигает максимума при $x=0$ вместе с функцией $h(x)$. Действительно, $h'(x) = -1 + \frac{1}{1+x}$ положительна при $-1 < x < 0$ и отрицательна при $0 < x < +\infty$. Так как в точке максимума $h(x)$ имеем $h(0) = 0$, то при всех остальных значениях x , $-1 < x < 0$, $0 < x < +\infty$, функция $h(x)$ отрицательна. Поэтому при $t \rightarrow +\infty$ функция $e^{th(x)} \rightarrow 0$ при $-1 < x < 0$ и при $0 < x < +\infty$. Следовательно, можно попытаться применить метод Лапласа.

Взяв число $\delta > 0$ достаточно малым (и во всяком случае < 1), представим интересующий нас интеграл в виде суммы

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{th(x)} dx = \int_{-1}^{-\delta} e^{th(x)} dx + \int_{-\delta}^{\delta} e^{th(x)} dx + \int_{\delta}^{+\infty} e^{th(x)} dx. \quad (39)$$

Чтобы оценить каждый из интегралов, стоящих в правой части равенства (39), найдем оценки для $h(x)$ на интервалах: $-1 < x \leq -\delta$, $-\delta \leq x \leq \delta$ и $\delta \leq x < +\infty$. Разлагая $\ln(1+x)$ на отрезке $-\delta \leq x \leq \delta$ в степенной ряд, получим

$$h(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

$$\dots = \frac{x^2}{2} \left[-1 + \frac{2x}{3} - \frac{2x^2}{4} + \frac{2x^3}{5} \dots \right].$$

Ряд, стоящий в квадратных скобках, удовлетворяет признаку Лейбница, так как $|x| < \delta < 1$. Поэтому отбрасывание всех членов, начиная с $-\frac{2x^2}{4}$, дает погрешность, не превосходящую по модулю $\frac{2x^2}{4}$.

Но при достаточно малом $\delta > 0$ будет $\frac{2x^2}{4} < \frac{2|x|}{3}$ для всех x из отрезка $-\delta \leq x \leq \delta$. Следовательно,

$$\frac{x^2}{2} \left[-1 - \frac{4}{3} \delta \right] \leq h(x) \leq \frac{x^2}{2} \left[-1 + \frac{4}{3} \delta \right] \quad \text{при} \quad -\delta \leq x \leq \delta, \quad \frac{4}{3} \delta < 1. \quad (40)$$

На интервале $-1 \leq x \leq -\delta$ функция $h(x)$ возрастает, достигая при $x = -\delta$ наибольшего значения $h(-\delta) < 0$. На интервале $\delta \leq x < +\infty$ функция $h(x)$ убывает, имея наибольшее значение при $x = \delta$, $h(\delta) < 0$. Таким образом,

$$h(x) \leq h(-\delta) < 0 \quad \text{при} \quad -1 < x \leq \delta, \quad (41)$$

$$h(x) \leq h(\delta) < 0 \quad \text{при} \quad \delta \leq x < +\infty. \quad (42)$$

Займемся теперь оценкой интегралов (39). В силу неравенства (41), при $t \rightarrow +\infty$ будем иметь

$$\int_{-1}^{-\delta} e^{th(x)} dx \leq \int_{-1}^{-\delta} e^{th(-\delta)} dx = e^{th(-\delta)} (1 - \delta) = O(e^{th(-\delta)}) \rightarrow 0. \quad (43)$$

Далее, при $t > 1$ и $\delta \leq x < +\infty$, в силу (42), выполняются неравенства $th(x) \leq th(\delta)$ и $th(x) \leq h(x)$, складывая которые получим

$$th(x) \leq \frac{1}{2} [th(\delta) + h(x)] \quad \text{при} \quad t > 0 \quad \text{и} \quad \delta \leq x < +\infty. \quad (44)$$

Поэтому при $t \rightarrow +\infty$

$$\begin{aligned} \int_{\delta}^{+\infty} e^{th(x)} dx &\leq \int_{\delta}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}(th(\delta) + h(x))} dx = \\ &= e^{\frac{1}{2}th(\delta)} \int_{\delta}^{+\infty} e^{\frac{1}{2}h(x)} dx = O\left(e^{\frac{1}{2}th(\delta)}\right) \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (45)$$

Наконец, в силу неравенства (40),

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-t \frac{x^2}{2} \left[1 + \frac{4}{3} \delta \right]} dx < \int_{-\delta}^{\delta} e^{th(x)} dx < \int_{-\delta}^{\delta} e^{-t \frac{x^2}{2} \left[1 - \frac{4}{3} \delta \right]} dx. \quad (46)$$

С помощью оценок типа (44) и (45) находим

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-t \frac{x^2}{2} \left[1 \pm \frac{4}{3} \delta \right]} dx = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t \frac{x^2}{2} \left[1 \pm \frac{4}{3} \delta \right]} dx + O(e^{-\alpha(\delta)t}) \quad (47)$$

при $t \rightarrow +\infty$, где $\alpha(\delta) < 0$ является константой, зависящей от δ , но не зависящей от t . Вычислим теперь интегралы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t \frac{x^2}{2}} \left[1 \pm \frac{4}{3} \delta\right] dx.$$

Сделав замену $\xi = x \left[\frac{t}{2} \left(1 \pm \frac{4}{3} \delta\right) \right]^{\frac{1}{2}}$, получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t \frac{x^2}{2}} \left[1 \pm \frac{4}{3} \delta\right] dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \left(1 \pm \frac{4}{3} \delta\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (48)$$

Из (47) и (48) при $t \rightarrow +\infty$ следует, что

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-t \frac{x^2}{2}} \left[1 \pm \frac{4}{3} \delta\right] dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \left(1 \pm \frac{4}{3} \delta\right)^{-\frac{1}{2}} + O(e^{-\alpha(\delta)t}). \quad (49)$$

Очевидно, что

$$\left(1 + \frac{4}{3} \delta\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \varepsilon_1(\delta), \quad \left(1 - \frac{4}{3} \delta\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \varepsilon_2(\delta),$$

где $\varepsilon_1(\delta)$ и $\varepsilon_2(\delta)$ положительны и стремятся к нулю при $\delta \rightarrow 0$. Если $\delta > 0$ фиксировано, то, в силу отрицательности $-\alpha(\delta)$, при достаточно больших $t > 0$ будет

$$|O(e^{-\alpha(\delta)t})| < \min(\varepsilon_1(\delta), \varepsilon_2(\delta)) (2\pi)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}}.$$

Поэтому из (46) и (49) получаем, что

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} [1 - 2\varepsilon_1(\delta)] < \int_{-\delta}^{\delta} e^{th(x)} dx < (2\pi)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} [1 + 2\varepsilon_1(\delta)] \quad (50)$$

при достаточно больших $t > 0$. Учитывая оценки (43) и (45) и тот факт, что при достаточно больших $t > 0$ будут выполняться неравенства

$$|O(e^{th(-\delta)})| < (2\pi)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \min(\varepsilon_1(\delta), \varepsilon_2(\delta)),$$

$$|O(e^{th(\delta)})| < (2\pi)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} \min(\varepsilon_1(\delta), \varepsilon_2(\delta)),$$

найдем

$$(2\pi)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} (1 - 3\varepsilon_1(\delta)) < \int_{-1}^{+\infty} e^{th(x)} dx < (2\pi)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} (1 + 3\varepsilon_2(\delta)) \quad (51)$$

при всех достаточно больших $t > 0$. Следовательно, в силу произвольной малости $\varepsilon_1(\delta)$ и $\varepsilon_2(\delta)$ и определения отношений порядка, будет

$$\int_{-1}^{+\infty} e^{th(x)} dx = (2\pi)^{\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{2}} [1 + o(1)] \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \quad (52)$$

Подставив это в (38), получим окончательно асимптотическое представление для $\Gamma(t+1)$ при $t \rightarrow +\infty$:

$$\Gamma(t+1) = e^{-t} t^{t+\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}} [1 + o(1)]. \quad (53)$$

При $t = n$, где n — целое положительное число, соотношение (53) превращается в формулу Стирлинга

$$n! = e^{-n} n^{n+\frac{1}{2}} (2\pi)^{\frac{1}{2}} [1 + o(1)] \quad \text{при } n \rightarrow +\infty, \quad (54)$$

широко применяющуюся в математике и ее приложениях.

Методом Лапласа могут быть получены асимптотические разложения и более общего вида; он может быть применен также к кратным интегралам [10]. Обобщением метода Лапласа на случай интегралов от функций комплексного переменного является метод перевала, применяющийся, как и метод Лапласа, в различных разделах математики и математической физики. По поводу метода перевала см. [10] и [11].

ДОБАВЛЕНИЕ 2

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ОБ УНИВЕРСАЛЬНЫХ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫХ МАШИНАХ

Цель этого добавления — дать самые общие сведения о современных вычислительных машинах, принципах их работы и их использовании. Его нельзя, конечно, рассматривать как сколько-нибудь систематическое изложение теории вычислительных машин и методов программирования. Для более подробного ознакомления с этими вопросами следует обратиться к специальной литературе.

§ 1. Общие сведения о вычислительных машинах

1. Введение. Многие задачи, возникающие в физике, технике и других областях, требуют для получения окончательных, практически важных результатов проведения весьма громоздких и трудоемких вычислений. Часто объем этой вычислительной работы оказывается столь большим, что выполнить ее вручную практически невозможно, или же она требует так много времени, что при этом сам результат счета успевает потерять всякую ценность. Например бессмысленно для предсказания погоды на сутки вперед пользоваться методом, который требует месяца вычислительной работы.

Количество задач, в которых требуются и проведение больших вычислений и быстрое получение результата, особенно возросло в последнее время в связи, например, с автоматизацией производства и другими потребностями техники.

Уже давно люди пользовались для облегчения и ускорения вычислений различными техническими приспособлениями. Однако коренное изменение положения здесь произошло за последние 10—20 лет, когда появились быстродействующие вычислительные машины, основанные на применении радиоэлектронных элементов и схем.

Эта новая область техники за короткий срок достигла поразительных успехов. Появились вычислительные машины, выполняющие несколько десятков и даже сотен тысяч арифметических операций

в секунду. Это позволяет успешно решать такие задачи, сама постановка которых при ручном способе вычислений была бы безнадежной.

Появление электронных вычислительных машин не только расширило возможности применения математических методов в прикладных вопросах, но и повлияло на развитие самой математики. В математической логике, приближенном анализе возникли новые задачи и целые новые направления. Теория вычислительных машин, вопросы программирования (см. об этом § 3) составляют сейчас один из важных разделов математики.

В наши дни вычислительная техника используется в самых различных областях. Поэтому знакомство с основными свойствами и принципами действия вычислительных машин, их возможностями и особенностями необходимо людям разных специальностей, в том числе и каждому физiku.

2. Основные типы вычислительных машин. Вычислительные машины разделяются по принципу их действия на два больших класса: машины дискретного действия, называемые также цифровыми вычислительными машинами, и машины непрерывного действия, называемые также аналоговыми устройствами. В цифровых машинах операции выполняются над числами, представленными в той или иной системе счисления. Величины, вводимые в машины непрерывного действия, изображаются (моделируются) значениями каких-либо физических величин (сил тока, напряжений, механических смещений и т. п.), которые могут меняться непрерывно. При этом в цифровую форму переводится лишь окончательный результат вычислений. Машины непрерывного действия находят применение в ряде задач (главным образом там, где не требуется большой точности вычислений), однако в современной вычислительной математике они играют значительно меньшую роль, чем машины дискретного действия.

Ниже, говоря о вычислительных машинах, мы будем иметь в виду только цифровые машины.

По своему назначению цифровые вычислительные машины делятся обычно на специализированные, т. е. рассчитанные на решение задач определенного, сравнительно узкого класса, и универсальные, т. е. вычислительные машины, предназначенные для решения весьма разнообразных задач, как вычислительных, так и логических (например, перевод с одного языка на другой). Именно универсальные цифровые вычислительные машины (короче УЦВМ) мы и будем здесь рассматривать.

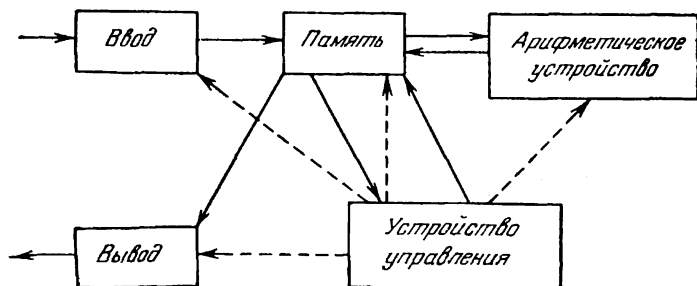
Возможность применения одной и той же УЦВМ для разнообразных задач представляет собой большое преимущество машин этого типа. Следует, однако, иметь в виду, что непосредственно УЦВМ может выполнять лишь некоторый, ограниченный набор основных операций (о них будет сказано в § 2), поэтому для решения той или иной конкретной задачи на УЦВМ необходимо свести решение этой

задачи к определенной последовательности тех операций, которые может выполнять машина, т. е., как обычно говорят, необходимо составить для машины программу, соответствующую данной задаче. Таким образом, каждая задача требует для своего решения на УЦВМ определенной, подчас довольно сложной подготовки — программирования, т. е. составления программы, отвечающей этой задаче. Элементарные сведения о программировании и простейшие примеры программ приведены в § 3 этого добавления.

3. Основные узлы УЦВМ и их назначение. Как уже было сказано выше, всякая УЦВМ может выполнять некоторые элементарные операции, арифметические и логические. Кроме того, при решении задач выполняется ряд других функций, а именно: ввод в машину исходных данных и команд, хранение этих данных и промежуточных результатов, вывод окончательных результатов. В соответствии с этим каждая УЦВМ, независимо от ее конструктивных особенностей, должна иметь следующие основные узлы:

1. Устройство ввода — (УВ).
2. Запоминающее устройство (или память) — (ЗУ).
3. Арифметическое устройство — (АУ).
4. Устройство управления — (УУ).
5. Устройство вывода — (УВыв.).

Принципиальную схему любой УЦВМ можно изобразить так:



Сплошные стрелки на этой схеме указывают направления передачи информации, а пунктирные — направления, по которым идут управляющие сигналы.

Рассмотрим вкратце роль каждого узла.

1. *Ввод* — устройство, предназначенное для введения в машину как исходных данных, так и тех правил (команд), по которым машина должна действовать при решении данной задачи. Исходные данные и команды должны быть представлены в той форме, в которой машина их может воспринимать; обычно их записывают либо на магнитную ленту, либо на перфоленту, либо на перфокарты.

На магнитной ленте информация записывается с помощью чередования намагниченных и ненамагниченных участков.

На перфоленте (представляющей собой обычную бумажную ленту) запись делается с помощью отверстий, которые пробиваются в этой ленте на определенных местах.

На перфокарте запись делается также путем пробивания определенных отверстий. Стандартная перфокарта имеет вид, показанный на стр. 577. Такие перфокарты широко применяются в вычислительных машинах.

2. *Память* (запоминающее устройство) машины предназначена для хранения и выдачи команд, хранения исходных данных и промежуточных результатов, необходимых для дальнейших вычислений. Запоминающее устройство состоит из ряда занумерованных ячеек, каждая из которых имеет определенное число разрядов. Любая из этих ячеек может быть использована либо для хранения чисел, либо для хранения команд. Как видно из приведенной выше схемы, запоминающее устройство машины непосредственно связано со всеми остальными блоками. Через ввод сюда поступают исходные данные для решения задачи и соответствующий этой задаче набор команд (программа). Из запоминающего устройства числа поступают в арифметическое устройство, где выполняются арифметические операции, а результаты снова поступают в запоминающее устройство.

Для решения сложных задач нужны машины с запоминающими устройствами возможно большей емкости. Вместе с тем важно, чтобы выбор необходимых данных из запоминающего устройства происходил быстро. Для того чтобы совместить эти два требования, запоминающее устройство обычно составляют из двух блоков: быстродействующей оперативной (или внутренней) памяти ограниченной емкости и внешней памяти, имеющей большой объем, но действующей сравнительно медленно. Внешняя память с арифметическим устройством непосредственно не связана: данные из нее поступают по мере необходимости в оперативную память и только потом перерабатываются арифметическим устройством.

3. *Арифметическое устройство* — та часть машины, в которой выполняются арифметические операции. Какие именно операции должны быть предусмотрены в машине, будет сказано ниже.

4. *Устройство управления* интерпретирует (т. е. переводит в определенные электрические сигналы) команды, входящие в программу, и посылает соответствующие сигналы в остальные узлы машины. Устройство управления определяет (в соответствии с заданной программой) работу всех устройств, входящих в состав вычислительной машины.

Автоматическое (в соответствии с заданной программой) управление — один из важнейших принципов работы УЦВМ, поскольку никакое ручное управление не могло бы обеспечить той скорости, с какой работает электронная вычислительная машина.

1	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30	32	34	36	38	40	42	44	46	48	50	52	54	56	58	60	62	64	66	70	72	74	76	78	80
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5
6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6	6
7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7
8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9

Стандартная перфокарта

5. *Устройство вывода* предназначается для записи в удобной форме ответов задачи или каких-либо промежуточных данных, которые желательно сохранить. Вывод данных может осуществляться в различной форме: на перфокартах или на перфоленте, в виде цифр, отпечатанных на бумажной ленте, или же в виде записи на магнитной ленте.

4. *Системы счисления, используемые в УЦВМ.* Если мы производим с числами какие-либо операции, то, независимо от того, выполняются ли эти операции вручную или на вычислительной машине, мы должны пользоваться каким-либо определенным способом записи чисел, т. е. некоторой системой счисления. В настоящее время повсеместно распространена десятичная система, в которой каждое число изображается в виде комбинации степеней числа 10. Так, например,

$$2548$$

есть сокращенная запись выражения

$$2 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0.$$

В десятичной системе каждое число записывается с помощью цифр 0, 1, ..., 9, а операции над числами выполняются по общеизвестным правилам.

Однако за основание системы счисления можно было бы взять любое другое целое положительное число, отличное от единицы *). *Логически наиболее проста двоичная система*, в которой каждое число представляется как комбинация степеней двойки. Например, $13 = 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$. Для этой системы требуется всего две цифры: 0 и 1, так как уже число 2 представляет собой единицу следующего разряда.

Посмотрим теперь, какую систему счисления удобнее всего использовать в цифровых вычислительных машинах. Заметим прежде всего следующее. Если мы пользуемся системой счисления с некоторым основанием p , то у нас в каждом разряде будут участвовать p цифр (например, в десятичной системе используется 10 цифр, в двоичной 2 цифры и т. д.). Для того чтобы иметь возможность фиксировать в машине p различных цифр, нужно, чтобы в этой машине были устройства, имеющие p устойчивых состояний, каждое из которых изображало бы определенную цифру.

При тех скоростях, с которыми работают современные вычислительные машины (как правило, десятки и сотни тысяч операций в

*) Системы счисления, отличные от десятичной, действительно были в употреблении у разных народов. С математической точки зрения десятичная система не имеет никаких специальных преимуществ. Ее распространенность исторически связана с тем, что десять пальцев на обеих руках были той первой «вычислительной машиной», которой человек пользовался с незапамятных времен.

секунду), было бы трудно пользоваться для фиксации чисел в машине какими-либо механическими устройствами. Однако такие скорости легко могут обеспечить радиоэлектронные устройства (радиолампы, полупроводниковые элементы и т. п.), практически безынерционные. Такие радиоэлектронные устройства имеют, как правило, два устойчивых состояния. Например, радиолампа может быть или «отперта» (ток через нее идет), или «заперта» (тогда через нее ток не идет). Эти свойства радиоэлектронной аппаратуры приводят к тому, что в современной вычислительной технике именно двоичная система нашла самое широкое применение.

Важное достоинство двоичной системы составляет также простота тех правил, по которым в этой системе выполняются арифметические операции. Например, вся «таблица умножения» для двоичной системы исчерпывается следующими равенствами:

$$0 \cdot 0 = 0, \quad 1 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0, \quad 1 \cdot 1 = 1.$$

Некоторое неудобство двоичной системы состоит в необходимости перевода исходных данных из десятичной системы (которой мы пользуемся обычно) в двоичную и обратного перевода результатов машинного счета из двоичной в десятичную. Впрочем, эта операция перевода чисел из одной системы в другую несложна и легко может быть автоматизирована.

Помимо двоичной системы, в вычислительных машинах используются также восьмеричная система (т. е. система с основанием 8) и смешанная двоично-десятичная система. Эта последняя состоит в том, что каждое число сперва представляется в десятичной системе, а затем каждая входящая в него цифра записывается по двоичной системе. Например, число

5386

в двоично-десятичной системе имеет вид

0101; 0011; 1000; 0110.

Очевидно, что для представления одного десятичного разряда (т. е. всех цифр от 0 до 9) нужно отвести 4 двоичных разряда.

В некоторых вычислительных машинах*) применяются элементы, имеющие не два, а три устойчивых состояния (скажем, ток идет, ток идет в обратном направлении, ток не идет). Арифметика этих машин основана не на двоичной, а на троичной системе счисления.

5. Представление чисел в вычислительной машине. В вычислительной машине оперируют с числами, имеющими определенное

*) К ним относится, например, отечественная машина «Сетунь».

(для данной машины) число разрядов. (В реально существующих конструкциях обычно бывает 30—40 двоичных разрядов.) Если число содержит меньше значащих цифр, то свободные разряды слева заполняются нулями. Если же некоторое число содержит больше цифр, чем предусмотрено разрядов в машине, то это число при вводе в машину округляется (т. е. отбрасываются его младшие разряды). Ограниченность числа разрядов ограничивает, таким образом, и ту точность, с которой мы можем вести вычисления на УЦВМ.

Так как в любой задаче приходится оперировать не только с положительными, но и с отрицательными числами, то нужно предусмотреть способ, с помощью которого в машине фиксируется знак числа. Обычно для этой цели выделяется один разряд (первый слева) и в этом разряде ставят 0, если число положительно, и 1, если отрицательно.

Далее, в вычислительных задачах нам приходится иметь дело, вообще говоря, с дробными числами. Поэтому в машине должна быть предусмотрена, как и в обычной записи чисел, «запятая», отделяющая целую часть числа от дробной. Положение этой запятой может или меняться в процессе вычислений (машины с «плавающей» запятой), или же быть раз навсегда фиксированным (машины с фиксированной запятой). В этом последнем случае число разрядов в целой части числа строго фиксированное. Машины с фиксированной запятой менее удобны: в них для каждой задачи приходится вводить определенные «масштабные факторы», приводящие все встречающиеся в задаче числа к тому порядку величин, который предусмотрен в машине. Однако с точки зрения логической и конструктивной эти машины проще, чем машины с плавающей запятой.

§ 2. Основные операции, выполняемые УЦВМ. Команды

1. **Типы операций.** Мы уже говорили, что работа УЦВМ состоит в выполнении некоторого, сравнительно небольшого числа основных операций. Теоретически можно было бы свести все действия, выполняемые машиной, всего лишь к нескольким, действительно элементарным, действиям. Однако это вызвало бы значительные трудности при составлении программ и при использовании машин. Поэтому в реально существующих машинах не стремятся свести набор основных операций к минимальному. Увеличение количества основных операций усложняет конструкцию, но зато существенно облегчает использование машины. Набор основных операций в различных машинах бывает различным, однако в любой УЦВМ имеются операции следующих типов:

- 1) основные арифметические операции;
- 2) дополнительные операции вычислительного назначения;
- 3) логические операции;

4) операции передачи управления (в частности, *условный переход*);

5) операции обращения к внешним устройствам.

Прежде чем описывать отдельные типы операций, обратим внимание на следующее. Все числа, над которыми производятся операции, мы считаем записанными в ячейках памяти машины, а сами эти ячейки — определенным образом пронумерованными. Если производится какая-либо операция над двумя числами, то мы должны указать 1) номера ячеек, в которых находятся эти числа; 2) действие, которое следует с ними произвести (сложить, умножить и т. п.), и 3) номер ячейки, в которую следует записать результат. Следовательно, каждая «команда», т. е. сигнал, по которому выполняется такая операция, должна содержать три номера ячеек, участвующих в операции (они называются адресами), и указание о том, какая именно операция производится. Иначе говоря, каждая такая команда имеет вид *)

Название операции	1-й адрес	2-й адрес	3-й адрес
-------------------	-----------	-----------	-----------

Здесь важно обратить внимание на следующее: в команде, по которой выполняется та или иная операция, всегда указываются только номера ячеек, содержащих те числа, над которыми производится операция, но не сами эти числа. Благодаря этому мы можем составлять программу, т. е. последовательность команд, не зная еще тех чисел, с которыми нам придется оперировать.

Перейдем теперь к описанию конкретных операций.

2. Основные арифметические операции. В их число входят следующие четыре операции.

1) *Сложение*: «к числу, записанному в ячейке α , прибавить число, записанное в ячейке β , и результат записать в ячейку γ ». Символически:

сложить	α	β	γ
---------	----------	---------	----------

2) *Умножение*: «умножить число, стоящее в ячейке α , на число, стоящее в ячейке β , и записать произведение в ячейку γ ». Символически:

умножить	α	β	γ
----------	----------	---------	----------

*) Для простоты изложения мы имеем в виду так называемые трех-адресные машины. Существуют машины, у которых в каждой команде участвует иное количество адресов (одно-, двух- и четырехадресные машины), но мы не будем о них говорить.

3) *Вычитание*: «вычесть из числа, стоящего в ячейке α , число, стоящее в ячейке β , и записать разность в ячейку γ ». Символически:

вычесть	α	β	γ
---------	----------	---------	----------

4) *Деление*: «разделить число, записанное в ячейке α , на число, записанное в ячейке β , и записать результат в ячейку γ ». Символически:

разделить	α	β	γ
-----------	----------	---------	----------

3. **Дополнительные операции вычислительного назначения.** Число и набор таких операций могут быть различными в различных машинах. Вот некоторые примеры таких операций:

1) *Нахождение минимума двух чисел*: «из двух чисел, стоящих в ячейках α и β , выбрать меньшее и записать его в ячейку γ », т. е.

min	α	β	γ
-----	----------	---------	----------

2) *Нахождение максимума двух чисел* определяется аналогично.

3) *Нахождение модуля числа*: «найти модуль числа, находящегося в ячейке α , и записать его в ячейку γ », т. е.

mod	α		γ
-----	----------	--	----------

Здесь, как и в некоторых других операциях, участвуют не три адреса, а только два.

Чем больше в машине предусмотрено различных дополнительных операций, тем проще и короче составление программы. Во многих современных машинах в число основных операций включают, например, операции извлечения корня, вычисления синуса и т. п., которые на самом деле представляют собой комбинации некоторого числа основных арифметических операций (см. соответствующие программы в § 3).

4. **Поразрядные (логические) операции.** Эти операции характеризуются тем, что в них действия выполняются без переноса цифр из одного разряда в другой. Приведем некоторые примеры таких операций.

1) *Поразрядное сложение*. Операция состоит в том, что числа, стоящие в ячейках α и β , складываются поразрядно, т. е. каждый разряд из ячейки α складывается с тем же самым разрядом ячейки β .

по правилу:

$$0 + 0 = 0, \quad 0 + 1 = 1 + 0 = 1, \quad 1 + 1 = 0.$$

Результат заносится в ячейку γ . Обозначим эту операцию так:

Слож. поразрядн.	α	β	γ
------------------	----------	---------	----------

2) *Проверка совпадения.* Операция состоит в том, что числа, стоящие в ячейках α и β , сравниваются поразрядно и в соответствующем разряде ячейки γ пишется единица, если сравниваемые цифры одинаковы, и нуль в противном случае *). Например, результат сравнения чисел

$$\begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

есть число

$$1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0.$$

Обозначение этой операции:

Сравн.	α	β	γ
--------	----------	---------	----------

3) *Логическое отрицание.* Операция состоит в следующем: в ячейке α стоит некоторое число. В ячейку γ в каждый разряд пишется нуль, если в ячейке α в этом разряде записана единица, и наоборот. Обозначение:

Отриц. логич.	α	β	γ
---------------	----------	---------	----------

Набор поразрядных операций также варьируется в зависимости от типа машины.

5. Операции обращения к внешним устройствам. Сюда относятся: ввод, запись (передача числа из внутренней памяти во внешнюю), считывание (передача числа из внешней памяти во внутреннюю), печать и останов машины.

1) *Команда ввода* обозначается так:

Ввод	$n - 1$	$\alpha + 1$	
------	---------	--------------	--

Она означает следующее: «ввести в n ячеек памяти, имеющих номера $\alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \alpha + n$, числа (или команды) из вводного устройства (например, с перфоленты или с перфокарт)».

*) В некоторых типах машин принята обратная система, т. е. совпадение обозначается нулем, а различие — единицей.

2) *Печать*. Команда

Печ.	α	$n - 1$	
------	----------	---------	--

означает: «отпечатать (в десятичной системе) числа, содержащиеся в n ячейках, начиная с ячейки номер α ».

3) *Останов **). Команда

Ост.			
------	--	--	--

представляет собой сигнал, по которому работа машины прекращается.

Внешними запоминающими устройствами, а следовательно, и командами обращения к ним приходится пользоваться в громоздких задачах с длинной программой и большим количеством исходных данных. Мы на них останавливаться не будем.

6. Операции передачи управления. Мы уже отмечали, что в команде указываются не сами числа, над которыми выполняются операции, а только их адреса. Именно это и дает возможность спланировать (запрограммировать) весь ход вычислений заранее, до начала решения задачи. Однако при решении многих задач возникают ситуации, в которых дальнейший ход вычислений зависит от того, какой результат мы уже получили на данном этапе. Например, если решается квадратное уравнение, то ход вычислений зависит от того, получится дискриминант этого уравнения положительным или отрицательным. В тех случаях, когда вопрос о дальнейшем ходе вычислений решается в зависимости от результата, полученного на некотором шаге, приходится прибегать к операциям условного перехода.

Приведем несколько примеров таких операций:

1) *Передача управления в зависимости от сравнения двух чисел с учетом знаков*. Обозначение:

Пер. упр. \leq	α	β	k
------------------	----------	---------	-----

Эта операция состоит в следующем: «сравнить число, стоящее в ячейке α , с числом, стоящим в ячейке β ; если первое из них больше второго, перейти к выполнению следующей команды, а если первое меньше или равно второму, то выполнять команду, записанную в ячейке с номером k »

2) *Передача управления в зависимости от сравнения модулей двух чисел*. Обозначение:

Пер. упр. $ \leq $	α	β	k
--------------------	----------	---------	-----

*) В вычислительной технике сложилась почему-то традиция заменять этим термином равнозначное слово «остановка».

Эта операция аналогична предыдущей, с той лишь разницей, что сравниваются не сами числа, а их абсолютные величины.

3) *Передача управления по знаку числа.* Обозначение:

Пер. упр. по знаку	α	k_1	k_2
--------------------	----------	-------	-------

Эта операция состоит в следующем: «если число, записанное в ячейке α , положительно, то выполняется команда, записанная в ячейке k_1 , в противном случае выполняется команда, записанная в ячейке k_2 ».

Эта последняя операция может быть использована как операция безусловного (т. е. выполняемого обязательно) перехода к команде с номером k . Для этого достаточно составить такую команду:

Пер. упр. по знаку	α	k	k
--------------------	----------	-----	-----

Тогда, какое бы число ни было записано в ячейке α , будет совершаться переход к команде, записанной в k -й ячейке.

Вычислительная машина выполняет любую из предусмотренных в ней операций по получении соответствующей команды. Эти команды изображаются двоичными числами и записываются, как и исходные данные для решения задачи, в памяти машины. Устройство управления интерпретирует эти команды, т. е. переводит их в определенные комбинации электрических сигналов, управляющие действиями остальных блоков машины.

7. Осуществление операций в машине. С инженерной точки зрения вся работа вычислительной машины представляет собой ту или иную переработку комбинаций электрических сигналов, осуществляемую с помощью определенных радиотехнических схем. Мы не будем здесь останавливаться на технической стороне дела, т. е. не будем выяснять, какие именно устройства нужны для осуществления той или иной конкретной операции. Рассмотрим в качестве примера несколько подробнее лишь одну операцию — сложение двух положительных чисел.

В двоичной системе, как и в любой другой позиционной системе счисления, сложение двух многозначных чисел сводится к их поразрядному сложению и переносу в случае необходимости единицы в ближайший старший разряд. Правила, которыми определяется сложение цифр в каждом разряде, состоят в следующем: $0 + 0 = 0$; $1 + 0 = 0 + 1 = 1$; $1 + 1 = 0$ плюс единица следующего разряда.

Пусть a и b — цифры, которые мы должны сложить, выполняя операцию сложения в некотором разряде, а c — число, которое переносится из предыдущего разряда. Выполнить сложение в данном разряде — это значит по данным a , b и c (каждое из которых может быть нулем или единицей) найти цифру s , которая должна быть записана в данном разряде в сумме, и цифру p , которая должна

быть перенесена в следующий разряд. Легко проверить, что все возможные здесь случаи исчерпываются следующей таблицей:

<i>a</i>	0	1	0	0	1	1	0	1
<i>b</i>	0	0	1	0	1	0	1	1
<i>c</i>	0	0	0	1	0	1	1	1
<i>s</i>	0	1	1	1	0	0	0	1
<i>p</i>	0	0	0	0	1	1	1	1

(*)

Отсюда ясно, что для осуществления операции суммирования в пределах одного разряда мы должны иметь в машине устройство с тремя входами (отвечающими цифрам *a*, *b* и *c*) и двумя выходами (отвечающими цифрам *s* и *p*), работающее в соответствии с таблицей (*), т. е. так, что если ни на один из входов не подается напряжения, то на выходах *s* и *p* напряжения тоже нет, если напряжение подается на один из входов, то оно есть на выходе *s* и отсутствует на выходе *p*, и т. д. Устройство, действующее по этим правилам, называется *одноразрядным сумматором*. Такое устройство нетрудно фактически реализовать в виде некоторой радиотехнической схемы, составленной из радиоламп или из полупроводниковых элементов. Мы, однако, не будем приводить эти схемы.

§ 3. Элементы программирования

1. Общие сведения. Для решения задачи на УЦВМ весь ход этого решения должен быть представлен как некоторая последовательность тех элементарных операций, которые данная машина может выполнять. Выполнение каждой операции определяется соответствующей командой, а последовательность команд, отвечающая решению данной задачи, называется *программой*. Программирование, т. е. составление программы, — один из основных этапов решения задачи на УЦВМ. Ясно, конечно, что прежде, чем приступить к программированию, нужно выбрать определенный математический метод решения задачи и получить те конкретные формулы, по которым должен происходить расчет.

Программа зависит от тех численных методов, которые мы выбрали для решения задачи (например, для приближенного вычисления интеграла мы можем пользоваться формулой трапеций, формулой прямоугольников или каким-либо иным приемом), и от типа машины, т. е. от набора тех операций, которые может выполнять данная машина. Однако даже если метод счета и тип машины определены, то программа этим еще не определяется однозначно: мы можем разложить

нашу вычислительную задачу в последовательность элементарных операций различными способами. Выбор наиболее рациональной программы для той или иной задачи определяется в значительной мере квалификацией лица, составляющего программу. Мы не можем здесь останавливаться на вопросах программирования сколько-нибудь подробно и ограничимся лишь разбором простейших типичных примеров.

2. Программирование по формулам. Наиболее простой для программирования тип задач — это вычисление по формулам, сводящееся к последовательному выполнению ряда арифметических операций. В этих случаях программирование сводится к рациональному разбиению всей формулы на отдельные операции, к размещению соответствующих команд и исходных данных в памяти машины. Рассмотрим элементарный пример.

Пример. По данному x вычислить значение

$$y = \frac{2x + 3}{5x + 1}.$$

Все вычисление можно, очевидно, представить в виде такой последовательности элементарных операций:

$$\begin{aligned} 1) A_1 &= 2x, & 2) A_2 &= A_1 + 3, & 3) B_1 &= 5x, & (1) \\ 4) B_2 &= B_1 + 1, & 5) y &= \frac{A_2}{B_2}. \end{aligned}$$

Для того чтобы произвести эти операции на машине, расположим в пяти ячейках памяти машины (скажем, в ячейках с номерами $n+1 \div n+5$) исходные данные. Получим

№ ячейки	Записанное число	№ ячейки	Записанное число
$n+1$	x	$n+4$	5
$n+2$	2	$n+5$	1
$n+3$	3		

В других пяти ячейках запишем команды, отвечающие тем действиям, которые указаны в равенствах (1). Получим такую последовательность команд:

№ ячейки	Операция	1-й адрес	2-й адрес	3-й адрес	Результат операции
$n+1$	Умножить	$n+1$	$n+2$	$n+2$	$2x$
$n+2$	Сложить	$n+2$	$n+3$	$n+2$	$2x + 3$
$n+3$	Умножить	$n+1$	$n+4$	$n+1$	$5x$
$n+4$	Сложить	$n+1$	$n+5$	$n+1$	$5x + 1$
$n+5$	Разделить	$n+2$	$n+1$	$n+2$	$\frac{2x + 3}{5x + 1}$

В тот момент, когда тот или иной промежуточный результат перестает быть нужен для дальнейших вычислений, мы можем соответствующую запись «стереть» и использовать содержавшую ее ячейку для новой записи. Так мы поступили, например, при выполнении первой команды, записав произведение чисел, хранившихся в ячейках $n+1$ и $n+2$, снова в $(n+2)$ -ю ячейку. Это позволяет рациональнее использовать объем памяти машины, не загружая ее ненужными для дальнейшего данными.

Составленную нами программу нужно еще дополнить вначале командой ввода, по которой начальные данные и коды программ вводятся в память машины, и командой перевода исходных данных из десятичной системы в двоичную, поскольку все операции в машине выполняются в двоичной системе, а исходные данные записываются и вводятся в машину обычно в десятичной системе. Далее, после команды «разделить», записанной в $(m+5)$ -й ячейке, необходимо поместить еще три команды. По первой из них результат вычисления переводится из двоичной системы в десятичную, по второй печатается ответ, и, наконец, последняя команда — это прекращение работы машины — останов.

Последний шаг в написании программы — это замена буквенных обозначений адресов конкретными числами. Эти номера пишутся четырехзначными числами в восьмеричной системе, начиная с 0000 и т. д. Обычно первые ячейки памяти используются как рабочие ячейки для стандартных операций (ввод, перевод числа из одной системы в другую и т. д.). Например, в машине «Стрела» для этой цели отведены первые 11 ячеек (от 0001 до 0013 в восьмеричных обозначениях *). Начав заполнение ячеек памяти с 0014, запишем окончательно нашу программу в таком виде:

№ ячейки	Операция или число	1-й адрес	2-й адрес	3-й адрес
0014	Ввод (в ячейки 0015—0032)	0015	0015	
0015	Перевод из десятичной системы в двоичную (ячейки 0026—0032)	0026	0004	0026
0016	Умножение	0026	0027	0027
0017	Сложение	0027	0030	0027
0020	Умножение	0026	0031	0026
0021	Сложение	0026	0032	0026
0022	Деление	0027	0026	0027
0023	Перевод из двоичной системы в десятичную	0027		0027
0024	Печать	0027		

*) При этом ячейка с номером 0000 содержит число «0».

Продолжение

№ ячейки	Операция или число	1-й адрес	2-й адрес	3-й адрес
0025	Останов			
0026				
0027				
0030				
0031				
0032				
0033				

3. Циклические процессы. Ясно, конечно, что в случаях, подобных только что рассмотренному элементарному примеру, никакого практического смысла применение УЦВМ не имеет. Мы рассмотрели этот пример лишь для того, чтобы показать, как в самом простейшем случае привычные нам формулы переводятся на язык, «понятный» машине. Применение вычислительных машин с программным управлением оказывается эффективным лишь в тех случаях, когда число операций, выполняемых машиной, велико по сравнению с числом команд, которые мы должны фактически ввести в память машины. Во многих задачах такое многократное использование одних и тех же команд достигается благодаря тому, что соответствующая вычислительная схема состоит из многократных повторений отдельных серий операций. Эти повторяющиеся серии называются *циклами*, а соответствующие вычислительные схемы называются *циклическими*. Рассмотрим некоторые простейшие примеры циклических программ.

1) *Вычисление квадратного корня.* Предположим, что мы должны вычислить с заданной точностью квадратный корень из некоторого положительного числа a . Для решения этой задачи можно воспользоваться следующим фактом (см. вып. 1, гл. 3). Каково бы ни было положительное число a , последовательность,

$$x_0 = a; \quad x_1 = \frac{1}{2} \left(x_0 + \frac{a}{x_0} \right); \quad x_2 = \frac{1}{2} \left(x_1 + \frac{a}{x_1} \right); \dots$$

$$\dots; \quad x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \quad (2)$$

сходится и ее предел равен \sqrt{a} . Вычисляя последовательно x_1, x_2, \dots и т. д., мы можем продолжить процесс до тех пор, пока не будет достигнута некоторая заданная точность, например до тех пор, пока разность между x_n и предыдущим значением x_{n-1} не станет меньше заданной величины.

Следовательно, для вычисления \sqrt{a} на машине мы должны ввести в три ячейки памяти число $a = x_0$, принятое нами за нулевое

приближение, число ε , определяющее точность, и число $\frac{1}{2}$. Далее вычисление \sqrt{a} осуществляется по следующей программе:

№ ячейки	Название операции	1-й адрес	2-й адрес	3-й адрес	Результат операции
0014	Ввод	0016	0015		Ввод массива
0015	Перевод $10 \rightarrow 2$	0030	0003	0030	Перевод исходных данных в двоичную систему
0016	Сложение поразрядное	0031		0027	Засылка x_n из ячейки «0031» (где x_n остается) в «0027»
0017	Деление	0030	0027	0031	$\frac{a}{x_n}$
0020	Сложение	0031	0027	0031	$x_n + \frac{a}{x_n}$
0021	Умножение	0031	0033	0031	$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$
0022	Вычитание	0031	0027	0027	$x_{n+1} - x_n$
0023	Пер. управления $ \leq $	0032	0027	0016	Проверка того, достигнута ли заданная точность (сравнение $x_{n+1} - x_n$ и ε), и окончание цикла, если точность достигнута
0024	Перевод $2 \rightarrow 10$	0031		0031	Перевод результата в десятичную систему
0025	Печать	0031			Печать результата
0026	Останов				
0027					Рабочая ячейка
0030	a				
0031	x_0				
0032	ε				
0033	$\frac{1}{2}$				
0034					

2) *Составление таблиц функций.* Другой типичный пример циклического процесса счета — это вычисление значений различных функций — показательной, тригонометрической, логарифмической при различных значениях аргумента, т. е. составление таблиц элементарных функций.

Рассмотрим, например, функцию $\sin x$. По формуле Тейлора

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{n+1}, \quad (3)$$

причем остаточный член R_{n+1} не превосходит

$$\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}.$$

Обозначив k -й член суммы, стоящей в (3) справа, через u_k и положив $s_k = u_1 + u_2 + \dots + u_k$, получим, что

$$u_{k+1} = -x^2 \frac{u_k}{a_k}, \quad \text{где } a_k = 2k(2k+1), \quad (4)$$

и

$$s_{k+1} = s_k + u_{k+1} \quad (k=1, 2, \dots), \quad s_1 = x. \quad (5)$$

Наконец, легко проверить, что

$$a_{k+1} = a_k + 8k + 6; \quad a_1 = 6 \quad (k=1, 2, \dots). \quad (6)$$

Итак, мы приходим к следующей схеме вычислений: за первое приближение для $\sin x$ принимается $s_1 = x$. Далее, после того как получено k -е приближение s_k ($k=1, 2, \dots$), для нахождения следующего приближения s_{k+1} находятся сперва коэффициент a_{k+1} (по формуле (6)), затем величина u_{k+1} (по формуле (4)) и, наконец, s_{k+1} (по формуле (5)). Если же величина u_{k+1} оказывается меньше, чем заданное ϵ , то s_k принимается за значение $\sin x$, оно отпечатывается и машина переходит к вычислению $\sin x$ при новом значении x . Этот ход вычислений можно осуществить при помощи следующей программы:

№ ячейки	Операция	1-й адрес	2-й адрес	3-й адрес	Результат операции
0014	Ввод	0043	0015		Ввод массива
0015	Перевод $10 \rightarrow 2$	0044	0010	0044	Запись исходных данных к двоичной системе
0016	Сложение поразрядное	0050		0062	Перенос x в стандартную ячейку для u_k
0017	Сложение поразрядное	0062		0063	Перенос u_1 в стандартную ячейку для S
0020	Умножение	0062	0062	0064	x^2
0021	Вычитание		0064	0064	$-x^2$
0022	Умножение	0045	0060	0065	$8(k-1)$
0023	Сложение	0065	0046	0065	$8(k-1) + 6$
0024	Сложение	0057	0065	0057	a_k
0025	Сложение	0060	0044	0060	k
0026	Деление	0062	0057	0065	$\frac{u_k}{a_k}$
0027	Умножение	0065	0064	0062	$-x^2 \frac{u_k}{a_k} = u_{k+1}$
0030	Сложение	0063	0062	0063	$S_{k+1} = S_k + u_{k+1}$
0031	Передача управления $1 \leq 1$	0047	0062	0022	Конец вычисл. $\sin x_i$

Продолжение

№ ячейки	Операция	1-й адрес	2-й адрес	3-й адрес	Результат операции
0032	Сложение поразрядное	0063		0050	Перенос $\sin x_i \rightarrow x_i$
0033	Сложение поразрядное			0060	Перенос $0 \rightarrow k$
0034	Сложение поразрядное			0057	Перенос $0 \rightarrow a_0$
0035	Сложение адресов	0016	0056	0016	Изменение 1-го адреса команды 0016
0036	Сложение адресов	0032	0055	0032	Изменение 3-го адреса команды 0032
0037	Сложение	0061	0044	0061	$i \rightarrow i + 1$
0040	Передача управления	0061	0054	0016	Конец табулирования
0041	Перевод $2 \rightarrow 10$	0050	0003	0050	
0042	Печать	0050	0003		
0043	Останов				
0044	1				
0045	8				
0046	6				
0047	ϵ				
0050	x_1				
0051	x_2				
0052	x_3				
0053	x_4				
0054	4				
0055	1 III адр.				
0056	1 I адр.				
0057	0 (a_k)				
0060	0 (k)				
0061	Раб. ячейка для i				
0062	Станд. ячейка для u_k				
0063	Станд. ячейка для S				
0064	Станд. ячейка для $-x^2$				
0065					

Аналогичные программы можно составить для вычисления других элементарных функций ($\cos x$, e^x , $\ln x$ и т. п.).

4. Блок-схемное программирование. Подпрограммы. При составлении программ для более или менее сложных задач удобно разбивать такие программы на отдельные части, так называемые блоки, отвечающие отдельным частным задачам. Это облегчает составление программы; кроме того, одни и те же блоки могут входить в качестве составных частей (стандартных программ) в программы различных задач. Рассмотрим такой элементарный пример. Требуется вычислить

приближенное значение интеграла

$$J = \int_a^b f(x) dx \quad (7)$$

с помощью метода прямоугольников (см. вып. 1, гл. 12). Вычисления здесь естественно разбить на две части (два блока):

1) вычисление входящих в формулу прямоугольников значений функции $f(x)$ в точках x_i ;

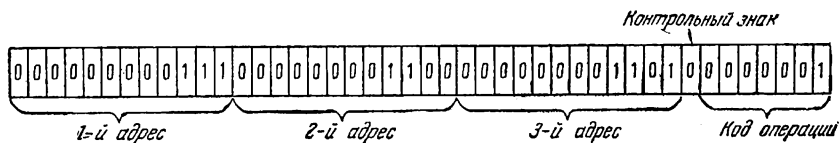
2) вычисление суммы

$$S = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n f(x_i), \quad (8)$$

представляющей собой приближенное значение интеграла (7). Программа для вычисления $f(x_i)$ зависит от вида функции $f(x)$. Напротив, программа для вычисления суммы (8) не связана с выбором функции $f(x)$.

Точность получающегося таким образом результата (т. е. абсолютная величина разности $J - S$) зависит, очевидно, от двух факторов: точности самой формулы прямоугольников *) и точности, с которой находятся значения функции f в точках x_i .

5. Коды команд. Операции над командами. Выше при составлении программ мы пользовались словесными обозначениями операций, например «сложить», «умножить» и т. д. Но для ввода команд в машину эти словесные обозначения необходимо заменить численными, записанными по двоичной системе, т. е. кодами этих команд. Поэтому те ячейки памяти машины, в которые введены команды, заполняются так же, как и при вводе числовых данных, некоторой последовательностью нулей и единиц. Из общего числа имеющихся в каждой ячейке разрядов несколько разрядов отводятся для записи кода команды, а остальные — для записи адресов. Например, в машине «Стрела» в каждой ячейке имеется 43 разряда. Из них по 12 разрядов отводится на запись каждого из адресов, а шесть — на код команды (один разряд отводится для контрольного знака). Таким образом, команда «сложить числа, находящиеся в ячейках 7 и 12, и результат записать в ячейку 13» в коде машины «Стрела» запишется так:



*) Об оценке точности различных формул для приближенного вычисления интегралов см. вып. 1, гл. 2, § 2.

(«0000001» по коду «Стрелы» означает сложение). То обстоятельство, что команды, введенные в машину, по виду ничем не отличаются от числовых данных, не вызывает каких-либо неудобств. Напротив, это дает возможность обращаться с командами, как с обычными числами, например «складывая» их *), а это в свою очередь позволяет сильно упростить программирование. Рассмотрим для иллюстрации сказанного следующий простой пример. Предположим, что нам нужно составить программу для суммирования тысячи чисел. Можно, конечно, ввести их в память машины, например в ячейки с $(n+1)$ -й по $(n+1000)$ -ю, а затем составить программу следующим образом: 1-я команда:

сложить	$n+1$	$n+2$	$n+2$
---------	-------	-------	-------

2-я команда:

сложить	$n+2$	$n+3$	$n+3$
---------	-------	-------	-------

999-я команда:

сложить	$n+999$	$n+1000$	$n+1000$
---------	---------	----------	----------

Можно, однако, решить эту задачу более экономно следующим образом. Запишем снова те числа, которые нужно сложить, в ячейках памяти от $(n+1)$ -й до $(n+1000)$ -й. После этого в ячейку, скажем, с номером $n+1001$ запишем:

	0001	0001	0001
--	------	------	------

Пусть теперь в ячейке с номером $m+1$ записана команда:

сложить	$n+1$	$n+2$	$n+2$
---------	-------	-------	-------

дающая сложение двух первых чисел. Далее, в ячейку с номером $m+2$ запишем такую команду:

поадресно сложить	$m+1$	$n+1001$	$m+1$
-------------------	-------	----------	-------

В ячейку с номером $m+3$ поместим команду перехода к ячейке с номером $m+1$, которая теперь уже будет содержать команду:

сложить	$n+2$	$n+3$	$n+3$
---------	-------	-------	-------

*) Следует иметь в виду, что при операциях над командами применяются специальные операции сложения: сложение кодов операций, поадресное и поразрядное сложение.

по которой к сумме двух первых чисел будет прибавлено третье и результат будет записан в ячейку с номером $n+3$. Ясно, что цикл из таких трех команд обеспечит сложение всех чисел, записанных в ячейках $n+1, \dots, n+1000$. Остается еще обеспечить печать ответа и останов машины по окончании работы.

Таким образом, применение операции сложения команд позволило нам заменить длинную цепь однотипных команд небольшим числом операций.

6. Об автоматизации программирования. Несмотря на наличие таких приемов, как использование стандартных подпрограмм, и другие усовершенствования, облегчающие и упрощающие программирование, составление программы часто бывает весьма трудоемким процессом, требующим во много раз больше времени, чем сам счет на УЦВМ. В первую очередь это относится к большим современным быстродействующим машинам. Поэтому сейчас все большее значение приобретают различные методы *автоматизации программирования*.

Не имея возможности останавливаться здесь на описании этих методов сколько-нибудь подробно, укажем лишь их основную идею. Она состоит в том, чтобы передать функции перевода словесного описания тех или иных вычислений в последовательность команд, записанных в коде машины, самой вычислительной машине. Иначе говоря, математик пишет ход решения той или иной задачи в виде словесного описания, пользуясь некоторым заранее фиксированным набором понятий и терминов. Далее такое словесное описание вводится в УЦВМ (при этом, конечно, каждая буква текста изображается определенной комбинацией нулей и единиц, так же как это делается, например, в телеграфии); после этого сама вычислительная машина с помощью некоторой универсальной программы-транслятора переводит это словесное описание в программу, записанную в коде данной машины. Для того чтобы такой переход от словесного описания к программе мог быть автоматизирован, необходимо, чтобы это описание было составлено с соблюдением определенных формальных правил и с четко ограниченным запасом слов. Существует несколько таких стандартизованных формальных «языков», используемых для автоматического программирования. Наиболее распространенные из них — это алгоритмический язык АЛГОЛ и язык ФОРТРАН*). Каждый такой язык может быть использован независимо от того, на какой машине в дальнейшем будет проводиться счет. Напротив, программа-транслятор, преобразующая словесную запись в машинные команды, зависит от выбора языка и

*) АЛГОЛ — сокращение английских слов «algorithmic language» (алгоритмический язык), а ФОРТРАН — комбинация слогов слов «formula translating» (перевод на язык формул).

от типа машины (но не зависит от той конкретной задачи, которая должна быть сосчитана).

Введение таких формальных языков и программ-трансляторов позволяет значительно сократить трудоемкую и кропотливую работу по программированию.

§ 4. Некоторые вопросы организации работы на УЦВМ

1. Условия, определяющие эффективность применения УЦВМ.

Как уже говорилось выше, для решения на УЦВМ той или иной задачи должна быть составлена отвечающая этой задаче программа, т. е. указана в соответствующем коде последовательность тех элементарных операций, к которой сводится задача. Если бы число отдельных команд в программе было таким же, как и число тех операций, которые необходимы для решения данной задачи, то применение УЦВМ было бы лишено всякого смысла, так как при этом составление программы занимало бы не меньше времени, чем выполнение всех расчетов вручную. Однако при решении всякой задачи отдельные циклы операций приходится повторять несколько, а иногда и очень много раз (мы видели это уже на таких простых примерах, как программа извлечения квадратного корня; в еще большей степени это относится к более сложным задачам). Поэтому число команд в программе (разумно составленной) во много раз меньше числа операций, выполняемых по этой программе машиной. Особенно эффективно применение УЦВМ в тех задачах, где приходится многократно повторять вычисления с различными данными, но по одной и той же схеме. С другой стороны, существуют и такие задачи, в которых применение УЦВМ оказывается неэффективным из-за того, что они при сравнительно небольшом объеме счета требуют для решения их на УЦВМ составления длинной и громоздкой программы.

Умение правильно решить вопрос о целесообразности применения УЦВМ для той или иной конкретной задачи — первое условие рационального использования вычислительной техники.

2. Основные этапы решения задачи с применением УЦВМ.

Решение той или иной прикладной задачи с помощью УЦВМ складывается из следующих основных этапов.

1) *Математическая формулировка задачи.* Всякая задача, предназначенная для численного ее решения на УЦВМ, должна быть прежде всего четко сформулирована именно как математическая задача. Иначе говоря, та физическая, техническая или какая-либо другая проблема, которая подлежит решению, должна быть представлена как задача о решении каких-либо уравнений, вычислении интегралов и т. п. Следует иметь в виду, что этот этап работы, требующий обычно совместной работы физиков или инженеров,

разрабатывающих данную проблему, и математиков-вычислителей, представляет собой часто значительные трудности. Для успешного преодоления их необходимо, с одной стороны, знакомство математиков с физическим или техническим существом тех задач, численным решением которых они занимаются, а с другой — знание «заказчиком», хотя бы в общих чертах, тех методов и возможностей, которыми располагает вычислительная математика.

2) *Численный анализ задачи* (выбор алгоритма). Вычислительная машина непосредственно не может оперировать такими понятиями, как решение уравнения, интеграл, функция и т. д., с помощью которых мы обычно формулируем ту или иную задачу. Поэтому для перевода уже сформулированной задачи на язык, доступный машине, мы должны для каждой операции (интегрирование, дифференцирование, решение уравнения и т. д.) подобрать соответствующий численный метод. Например, вычисление производной заменяется нахождением соответствующего разностного отношения, интегралы считаются с помощью тех или иных приближенных методов (формула трапеций, формула Симпсона и т. п.), в которых приходится выполнять лишь некоторую последовательность арифметических операций, и т. д. Ясно, что для решения одной и той же математической задачи можно пользоваться различными численными приемами. Выбор наиболее рациональных методов счета во многом определяет эффективность решения задачи с помощью УЦВМ.

3) *Составление программы*. После того как закончен численный анализ задачи, т. е. для каждого ее этапа подобран соответствующий алгоритм, сводящийся к некоторой последовательности элементарных операций, приступают к составлению программы. Для одной и той же задачи, даже при одном и том же выборе численных методов ее решения, программа может быть составлена далеко не единственным образом. Выбор наиболее рационального пути программирования, наилучшего использования объема памяти и других возможностей машины требует от лица, составляющего программу, опыта, знания типа той вычислительной машины, на которой будет происходить счет, а также известной изобретательности.

4) *Выполнение вычислений и анализ результатов*. После того как программа счета полностью подготовлена, выполнение вычислений на правильно работающей машине представляет собой довольно стандартную процедуру. Ее часто выполняет оператор, который может и не быть знаком со всей задачей в целом.

3. Методы предупреждения и обнаружения ошибок счета. Проведение сложных вычислительных работ на УЦВМ бывает связано с выполнением миллионов элементарных операций. При этих условиях обеспечение безошибочного счета представляет собой достаточно сложную задачу. Причины ошибок могут быть различны. Прежде всего необходимо обеспечить правильность самой программы, так как

искажение или пропуск хотя бы одной команды в программе приводит, как правило, к тому, что весь счет оказывается или вовсе невозможным, или приводит к совершенно неверным результатам. Поэтому каждая программа должна быть до начала счета тщательно проверена. Процесс проверки и исправления программы называется ее *отладкой*. Иногда для отладки программы прибегают к следующему приему: проделав какой-то этап вычислений вручную, сравнивают полученный результат с результатом такого же счета на машине. Существуют и другие систематические методы обнаружения ошибок в программе, но мы не будем на них останавливаться.

Далее, для правильности счета необходимо обеспечить правильность работы самой машины. Основной метод проверки работы машины — это решение на ней стандартных задач (тестов) с заранее известными ответами и отлаженной программой. Следует, однако, иметь в виду, что та или иная погрешность в работе машины (сбой) может возникнуть уже в процессе самого счета. Для обнаружения и устранения таких ошибок прибегают часто к двойному счету: тот или иной промежуточный результат вычисляется и запоминается машиной, после чего вычисления повторяются еще раз. Получив таким образом два раза один и тот же результат, машина автоматически переходит к следующему этапу вычислений.

Наконец, еще один возможный источник неправильностей в счете — это накопление ошибок при округлениях. Наличие в машине определенного фиксированного числа разрядов ограничивает возможную точность счета, поскольку все числа мы вынуждены округлять с точностью до единицы последнего разряда. Эти ошибки округления при выполнении большого количества операций могут накапливаться и в результате, без всяких погрешностей в программе или в машине, приводить к ошибкам, во много раз превышающим погрешности исходных данных.

Существуют различные методы повышения точности счета на УЦВМ. Например, можно в случае необходимости записывать все числа с удвоенным количеством знаков, отводя для записи каждого числа не одну ячейку памяти, а две.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е., Векторное исчисление и начала тензорного исчисления ГОНТИ, 1938.
 2. Рашевский П. К., Риманова геометрия и тензорный анализ, Изд-во «Наука», Москва, 1964.
 3. Эддингтон А. С., Теория относительности, ГТТИ, 1934.
 4. Березин И. С. и Жидков Н. П., Методы вычислений, т. II, гл. 4, Физматгиз, 1962.
 5. Иваненко Д. и Соколов А., Классическая теория поля, ГТТИ, 1951.
 6. Гельфанд И. М. и Шилев Г. Е., Обобщенные функции, вып. 1, 2, 3, Физматгиз, 1958.
 7. Колмогоров А. Н. и Фомин С. В., Элементы теории функций и функционального анализа, вып. 2, Изд-во МГУ, 1960.
 8. Тихонов А. Н., Об устойчивых методах суммирования рядов Фурье, ДАН СССР, т. 156, № 2, 1964, стр. 268—271.
 9. Эрдей А., Асимптотические разложения, Физматгиз, 1962.
 10. Де Брёйн, Асимптотические методы в анализе, ИЛ, 1962.
 11. Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В., Методы теории функций комплексного переменного, Изд-во «Наука», 1965.
 12. Соболев С. Л., Уравнения математической физики, ГТТИ, 1954.
-

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Абеля признак 307, 373
 Абсолютно интегрируемая функция 510
 — сходящийся несобственный интеграл 366, 393
 Автоматизация программирования 595
 Адамара — Коши теорема 322
 Аддитивная функция множества 36
 — — области 36, 76
 Аддитивность двойного интеграла 34
 — криволинейного интеграла 155
 — тройного интеграла 75
 Адрес 581
 АЛГОЛ 595
 Амплитуда колебания 449
 Аналитическая функция 330
 Антисимметричный тензор 281
 Арифметические операции 581
 Арифметическое устройство 576
 Арцела теорема 350
 Асимптотическая эквивалентность 561, 565
 Асимптотический ряд 563
 Асимптотическое представление 561
 — разложение 556, 563
 Аффинная система координат 125
 Аффинный ортогональный тензор второго ранга 267
 — — — первого ранга 266
 — — — p -го ранга 268

 Базисы векторов взаимные 289
 Бесселя неравенство 479
 — тождество 479
 Бета-функция 434, 438—442
 Бинормали вектор 106
 Бинормали уравнение 109
 Блок-схемное программирование 592
 Буняковского — Коши неравенство 343

 Ввода устройство 575
 Вейерштрасса признак 424
 — — мажорантный 304
 — теорема 491, 493, 546, 549
 Вектор бинормали 106
 — касательной 106
 — нормали 106
 Векторная линия 220
 — трубка 220
 Векторное поле 219
 — —, вихрь 233
 — —, дивергенция 225
 — —, потенциал 221
 — —, поток 223
 — —, ротор 233
 — —, циркуляция 233
 — уравнение кривой 103
 Вектор-потенциал 239
 Вектор-функция 97
 — —, дифференциал 99
 — —, дифференцируемая 98
 — —, интеграл по скалярному аргументу 101
 — — линейная 268
 — — непрерывная 98
 — —, производная 98
 — —, формула Тейлора 101
 Верхняя сумма Дарбу 27, 74
 Вес 530
 Взаимные базисы векторов 289
 Винтовая линия 103
 Вихрь 233, 235
 Внешний объем тела 72

- Внешняя площадь фигуры 20
 Внутренний объем тела 72
 Внутренняя геометрия поверхности 146
 — площадь фигуры 20
 — точка 17
 Восьмеричная система счисления 579
 Вторая квадратичная форма 138
 Вывода устройство 578
 Вычислительного назначения дополнительные операции 582
 Вычислительные машины дискретного действия 574
 — непрерывного действия 574
 Вычитание тензоров 279
- Гамильтона оператор 239
 Гамма-функция 382, 434—438
 Гармоника 449, 452
 Гармоническое колебание 449
 — поле 247
 Гауссова кривизна 143
 Геометрия Лобачевского 149
 Гиперболическая точка 144
 Главная кривизна 141
 Главное значение расходящегося интеграла 383, 388
 Главной нормали уравнение 109
 Главные направления поверхности 141
 Гладкая поверхность 73
 Годограф 97, 100
 Гравитационное поле 219, 227—229
 Градиент 217, 252, 255
 Граница множества 17
 Граничная точка 17
 Грина формула 171
- Дарбу лемма 30
 — сумма 27, 74
 Двойная система счисления 578
 Двоично-десятичная система счисления 579
 Двойной интеграл 16, 25
 —, замена переменных 66—70
 — как аддитивная функция области 36
 —, оценка по модулю 34
 —, производная по площади 37
 —, сведение к повторному 46—54
 —, свойства 33, 34
 —, теорема о среднем 34
 —, физические и геометрические применения 41—46
- Двумерное поле 215
 Двусторонняя поверхность 191
 Деформаций тензор 275
 Дельта-функция 355, 544—546
 Диаметр множества 18
 Дивергенция 225, 252, 255
 — тензора 285
 —, физический смысл 226—229
 Дини теорема 310
 Дифференциал вектор-функции 99
- Жордана мера 23
- Замена переменных в двойном интеграле 66—70
 — — — тройном интеграле 85—93
 Замкнутая область 17
 — система функций 497
 Замкнутое множество 17
 Запоминающее устройство 576
 Индикатриса кривизны 140, 143
 Интеграл двойной 16, 25
 —, зависящий от параметра 402—407
 —, — — кратный 442
 — криволинейный второго рода 159, 166
 — первого рода 151, 157
 — многомерный 93—96
 — несобственный 358, 360, 376, 387, 400
 — от векторной функции 101
 — поверхностный второго рода 196
 — первого рода 184, 190
 — повторный 48, 50, 80, 83
 — Пуассона 372, 429
 — тройной 71, 74
 — Френеля 432
 — Фруллани 433
 — Фурье 510, 517, 521
 — Эйлеров 434
 Интегральная сумма 24, 151, 183
 Интегрируемая функция 25, 32, 33, 74
 — с квадратом функция 479, 530
 Интервал сходимости 319
- Касательная плоскость 121
 Касательной вектор 106
 — уравнение 109

- Квадратичная форма вторая 138
 — — первая 126
 — — положительно определенная 126
 Квадратичное уклонение 342
 Квадрируемая фигура 20, 22
 Квадратируемая фигура 20, 22
 Ковариантные индексы тензора 292
 — координаты тензора 290
 Ковариантный метрический тензор 293
 Код 593
 Команда 581
 Компактное семейство функций 350
 Контравариантные индексы тензора 292
 — координаты тензора 290
 Контравариантный метрический тензор 293
 Координатная сеть 118
 — ортогональная 129
 Координатные линии 56
 — поверхности 86
 Координаты аффинные 125
 — ковариантные тензора 290
 — контравариантные тензора 290
 — криволинейные 56, 86, 249
 — ортогональные 249
 — на поверхности 118
 — полярные 57, 64
 — тензора 264, 292
 — сферические 87, 92, 251
 — цилиндрические 86, 91, 251
 Коши критерий 305, 306, 354, 364, 365, 377, 423, 425
 Коши — Адамара теорема 322
 Коши — Буняковского неравенство 343
 Косинус-преобразование Фурье 520
 Коэффициенты Фурье 456, 476, 505
 Кривая параметризованная 103
 — кусочно-гладкая 150
 — спрямляемая 21
 Криволинейные координаты 57, 86, 249
 — ортогональные 249
 Криволинейный интеграл второго рода 159, 166
 — — —, вычисление 162
 Криволинейный интеграл второго рода независимость от пути 174—182
 — — —, связь с криволинейным интегралом первого рода 160
 Криволинейный интеграл первого рода 151, 157
 — — —, оценка по модулю 155
 — — —, применения 155—157
 — — —, свойства 154, 155
 — — —, связь с криволинейным интегралом второго рода 160
 — — —, теорема о среднем 155
 Кривизна 107
 — гауссова 143
 — главная 141
 — нормальная 137
 — полная 143
 — средняя 143
 Кривизны индикатриса 140, 143
 Кручение 107
 Кубируемое тело 72
 Кусочно-гладкая кривая 150
 Кусочно-гладкая функция 459
 — непрерывная функция 459
 Ламе параметры 250
 Лапласа метод 569
 — оператор 244, 254, 255
 — уравнение 247
 Лапласово поле 247
 Лебега мера 24
 Лежандра полиномы 475, 527
 Лейбница правило 404
 Линейная вектор-функция 268
 — зависимость функций 532
 Линейность двойного интеграла 33
 — криволинейного интеграла 154
 — тройного интеграла 75
 Линейный оператор 268
 Линии координатные 56
 Линия векторная 220
 — винтовая 103
 — уровня 215
 Лист Мёбиуса 193
 Лобачевского геометрия 149
 Логические операции 582
 Локальная производная 256
 Магнитная лента 576
 Мажорантный признак 424
 — признак Вейерштрасса 304
 — ряд 304
 Мажорирующий ряд 304
 Масштабные множители 250
 Материальная производная 256
 Матрица ортогональная 265
 — перехода 265
 Матрицы, умножение 294—296
 Мёбиуса лист 193

- Мера Жордана 23
 — Лебега 24
 Метрический тензор 292
 Многомерный интеграл 93—96
 Многосвязная область 117
 Множества, общая часть 18
 —, объединение 18
 — функция 35
 Множество, граница 17
 —, диаметр 18
 — замкнутое 17
 — ограниченное 17
 — открытое 17
 — связанное 17
 Монотонность двойного интеграла 34
 — криволинейного интеграла 155
 — тройного интеграла 75

 Набла (∇)-оператор 239
 Наименьшее отклонение 495
 Направления поверхности главные 141
 Напряжений тензор 276, 278
 Натуральная параметризация кривой 104
 Натуральные уравнения кривой 113
 Начальная фаза 449
 Неориентируемая поверхность 193
 Неразрывности уравнение 231, 262
 Несобственный интеграл 358, 360, 376, 400
 — — абсолютно сходящийся 366, 393
 — —, зависящий от параметра 402, 407—434
 — —, — — кратный 442
 — — кратный 387, 400
 — — равномерно сходящийся 411, 444
 — — расходящийся 359, 376
 — — сходящийся 359, 366, 376
 — — условно сходящийся 372
 Нижняя сумма Дарбу 27, 74
 Норма функции 475, 504
 Нормали вектор 106
 Нормаль 122
 Нормальная кривизна 137
 — плоскость 109
 Нормальное сечение 136
 — ускорение 115

 Области функция 35, 76
 — — аддитивная 36, 76
 Область 17
 — замкнутая 17
 — многосвязная 117
 — область односвязная 117
 — — поверхность односвязная 210
 — — сходимости 298
 — Обобщенная функция 355
 — Образ Фурье 518, 520
 — Обратное преобразование Фурье 518
 — Обращение к внешним устройствам 583
 — Общая часть множеств 18
 — Объединение множеств 18
 — Объем многогранного тела 71
 — — тела 72
 — Ограниченное множество 17
 — Одномерное поле 221
 — Одноразрядный сумматор 586
 — Односвязная область 117
 — Односторонняя поверхность 192
 — Окрестность 17
 — Окружения точка 142
 — Омбильческая точка 142
 — Оператор Гамильтона 239
 — — Лапласа 244, 254, 255
 — — линейный 268
 — — набла (∇) 239
 — Определитель функциональный 55, 85
 — Ориентируемая поверхность 193
 — Ортогональная координатная сеть 129
 — — матрица 265
 — — система функций 453, 474, 504
 — — — (с весом) 529
 — — — замкнутая 497
 — — — полная 496
 — Ортогональные криволинейные координаты 249
 — Осесимметрическое поле 215, 221
 — Основной репер (трехгранник) кривой 106
 — Остроградского формула 205
 — Отделимость замкнутых множеств 18
 — Отклонение 495
 — Открытое множество 17
 — Относительных смещений тензор 283
 — Отображение 55, 85

 Память 576
 Параболическая точка 144
 Параметризованная кривая 103
 — поверхность 119
 Параметрическое уравнение кривой 103
 Параметры Ламэ 250
 Парсеваля равенство 497
 Первая квадратичная форма 126

- Передачи управления операции 584
 Перестановка индексов тензора 281
 Перехода матрица 265
 Период функции 449
 Периодическая функция 449
 Перфокарта 576, 577
 Перфолента 576
 Плоская фигура 20
 Плоское поле 221
 Плоскопараллельное поле 215, 221
 Плоскость касательная 121
 — нормальная 109
 — соприкасающаяся 108, 109
 — спрямляющая 109
 Плотность распределения масс 37
 Площадь многоугольной фигуры 19
 — ориентируемой фигуры 70
 — плоской фигуры 20
 — — —, свойства 22, 23
 — поверхности 129, 131
 — фигуры в криволинейных координатах 59
 Поверхности координатные 86
 Поверхностно односвязная область 210
 Поверхностный интеграл второго рода 196
 — — —, вычисление 205
 — — —, сведение к двойному интегралу 199
 — — — первого рода 184, 190
 — — —, применения 188
 — — —, сведение к двойному интегралу 184
 Поверхность 118
 — гладкая 73
 — двусторонняя 191
 — неориентируемая 193
 — односторонняя 192
 — ориентируемая 193
 — параметризованная 119
 —, площадь 129, 131
 — постоянной кривизны 148
 — простая 117
 — уровня 214
 Повторный интеграл 48, 50, 80, 83
 Подпрограмма 592
 Поле векторное 219
 — —, вихрь 233
 — —, дивергенция 225
 — —, потенциал 223
 — —, поток 223
 — —, ротор 233
 Поле векторное, циркуляция 233
 — гармоническое 247
 — гравитационное 219, 227—229
 — двумерное 215
 — лапласово 247
 — одномерное 221
 — осесимметрическое 215, 221
 — плоское 221
 — плоскопараллельное 215, 221
 — потенциальное 221, 238
 — скалярное 213
 — —, градиент 217
 — —, производная 217
 — скоростей 219, 227
 — соленоидальное 229, 238
 — сферическое 216
 — тензора 284
 — трубчатое 229
 — тяготения 219, 227—229
 — цилиндрическое 216, 221
 — электростатическое 219, 229
 Полная кривизна 143
 — ортогональная система функций 496
 — производная 256
 Положительно определенная квадратичная форма 126
 Полярные координаты 57, 64
 Поразрядные операции 582
 Последовательность функциональная 297
 Постоянной кривизны поверхность 148
 Потенциал векторного поля 221
 Потенциальное поле 221, 238
 Поток векторного поля 223
 — тензора 286
 Почти периодическая функция 451
 Предельная точка 17
 Проводимости тензор 264
 Программа 581, 586
 Программирование 586
 — блок-схемное 592
 Производная вектор-функции 98
 — локальная 256
 — материальная 256
 — по площади от двойного интеграла 37
 Производная полная 256
 — скалярного поля 217
 — функция области по площади 36
 — частная 256
 Простая поверхность 117
 Пространственное тело 72

- Пространство функциональное 535
 Псевдосфера 149
 Пуассона интеграл 372, 429
- Равномерная сходимост** последовательности функций 298, 299
 — — ряда 303—308, 348
 — — Фурье 481
Равномерно ограниченное семейство функций 350
 — сходящийся несобственный интеграл 411, 444
 — — функциональный ряд 302
Равностепенно непрерывное семейство функций 350
Радиус нормальной кривизны 137
 — сходимости 321
Разложение асимптотическое 556
Расстояние между множествами 18
Расходимость последовательности функций 297
Расходящийся несобственный интеграл 359, 376
 — —, главное значение 383, 388
Регулярно сходящийся ряд 324
Репер основной 106
Ротор 233, 253, 255
 —, символическая запись 235
 —, физический смысл 235
Ряд асимптотический 563
 — степенной 318—329
 — Тейлора 331, 333, 334
 — тригонометрический 453
 — функциональный 297
 — Фурье 456, 474, 476, 505, 507, 531
- Свертка тензоров** 281
Связное множество 17
Сеть координатная 118
 — — ортогональная 129
Сечение нормальное 136
Симметричный тензор 281
Синус-преобразование Фурье 520
Скалярное поле 213
 — —, градиент 217
 — —, производная 217
Скоростей поле 219, 227
Слабая сходимост 353
Сложение тензоров 279
Собственные векторы 288
 — значения 288
Соленоидальное поле 229, 238
- Соприкасающаяся плоскость** 108, 109
Сопряженный тензор 281
Спектральная характеристика 539
 — — функции 518
Специализированные цифровые вычислительные машины 574
Спрямяемая кривая 21
Спрямяющая плоскость 109
Сравнения признаков 367, 368, 370, 371, 378, 379, 380, 394, 395
Средняя кривизна 143
Степенной ряд 318—329
 — — в комплексной области 338 — 342
 — —, применения 336—338
Стирлинга формула 569
Стокса формула 209
Сумма Дарбу 27, 74
 — интегральная 24, 151, 183
 — ряда 302
Сумматор одноразрядный 586
Суперпозиции принцип 539
Суперпозиция гармоник 452
Сферические координаты 87, 92, 251
 — —, градиент 255
 — —, дивергенция 255
 — —, Лапласа оператор 255
 — —, ротор 255
Сферическое поле 216
Сходимости интервал 319
 — область 298
 — радиус 321
Сходимость «в себе» 353
 — в среднем 342, 347, 348, 537
 — последовательности функций 297—299
 — рядов 303—308
Сходящийся несобственный интеграл 359, 376
 — функциональный ряд 302
- Тангенциальное ускорение** 115
Тейлора ряд 331, 333, 334
 — формула для вектор-функции 101
Тело (пространственное) 72
 — кубическое 72
 — объем 72
Тензор 264, 292
 — антисимметричный 281
 — аффинный ортогональный второго ранга 267
 — — — первого ранга 266
 — — — p -го ранга 268
 — деформаций 275
 —, дивергенция 285

- Тензор, ковариантные индексы 292
 —, контравариантные индексы 292
 —, координаты 264, 292
 — метрический 292
 — напряжений 276, 278
 —, общее определение 292
 — относительных смещений 283
 —, поле 284
 —, поток 286
 — проводимости 264
 — симметричный 281
 — сопряженный 281
 Тензоры, алгебраические операции 279—282
 Теплопроводности уравнение 246
 Тор 119
 Точка внутренняя 17
 — гиперболическая 144
 — граничная 17
 — округления (омбилическая) 142
 — параболическая 144
 — предельная 17
 — уплощения 144
 — эллиптическая 143
 Транспонирование матрицы 266
 Треугольник основной 106
 Тригонометрическая система 453, 475, 499
 Тригонометрический ряд 453
 Тройной интеграл 71, 74
 — —, замена переменных 85—93
 — — как аддитивная функция области 36
 — —, оценка по модулю 75
 — —, сведение к повторному 80—85
 — —, свойства 75, 76
 — —, теорема о среднем 76
 — —, физические и геометрические применения 77—79
 Трубка векторная 220
 Трубочатое поле 229
 Тяготения поле 219, 227—229
 Угол между кривыми 128
 Уклонение квадратичное 342
 Умножение матриц 294—296
 Умножение тензора на скаляр 280
 — тензоров 279
 Универсальные цифровые вычислительные машины 574
 Уплощения точка 144
 Управления устройство 576
 Уровня линия 215
 — поверхность 214
 Ускорение нормальное 115
 — тангенциальное 115
 Условно сходящийся несобственный интеграл 372
 Устройство арифметическое 576
 — ввода 575
 — вывода 578
 — запоминающее 576
 — управления 576
 УЦВМ 574
 Фазовая характеристика 539
 Фигура квадратуемая 20, 22
 — плоская 20
 Форма квадратичная вторая 138
 — — первая 126
 — — положительно определенная 126
 ФОРТРАН 595
 Френе формулы 107
 Френеля интегралы 432
 —, геометрический смысл 65, 91, 36
 Фуллани интеграл 433
 Функция абсолютно интегрируемая 510
 — интегрируемая 25, 32, 33, 74
 — — с квадратом 479
 — кусочно-гладкая 459
 — кусочно-непрерывная 459
 — множества 35
 — области 35, 76
 — —, производная по площади 36
 — периодическая 449
 — почти периодическая 451
 Функционал 357
 Функциональная последовательность 297
 Функциональное пространство 535
 Функциональный определитель 55, 85
 — ряд 297
 — —, сумма 302
 — — сходящийся 302
 — — — в среднем 343
 — — — равномерно 302
 Фурье интеграл 510, 517, 521
 Фурье косинус-преобразование 520
 — коэффициенты 456, 476, 505
 — образ 518
 — обратное преобразование 518
 — преобразование 518
 — ряд 456, 474, 476, 505, 507, 531
 — —, равномерная сходимость 481
 — —, скорость сходимости 485

- Фурье ряд, улучшение сходимости 489
— синус-преобразование 520
Цилиндрические координаты 86, 91, 251
— —, градиент 255
— —, дивергенция 255
— —, Лапласа оператор 255
— —, ротор 255
Цилиндрическое поле 216, 221
Циркуляция 233
Цифровые вычислительные машины 574
Частная производная 256
Частота колебания 449
Частотная характеристика 539
Шварца пример 129
Эйлера уравнение 259
— формула 141, 340
Эйлеровы интегралы 434—442
Электростатическое поле 219, 229
Эллиптическая точка 143
Якобиан 55, 85
—, геометрический смысл 65, 91
-

*Борис Михайлович Будак,
Сергей Васильевич Фокин*

Кратные интегралы и ряды

(Серия «Курс высшей математики
и математическая физика»)

М., 1967 г., 608 стр. с илл.

Редакторы *Н. А. Узарова, Ю. А. Горьков*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректор *С. Н. Емельянова*

Печать с матриц. Подписано к печати 9/1 1967 г.
Бумага 60×90^{1/16}. Физ. печ. л. 38. Условн. печ. л. 38.
Уч.-изд. л. 37,93. Тираж 40 000 экз. Цена книги 1 р. 24 к.
Заказ № 537.

Издательство «Наука»

Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати
при Совете Министров СССР.
Измайловский проспект, 29.