Б. М. Будак, М. З. Москал, О классическом решении многомерной многофронтовой задачи Стефана, *Докл. АН СССР*, 1969, том 188, номер 1, 9–12

Доклады Академии наук СССР
1969. Том 188, № 1

УДК 517.945.43 МАТЕМАТИКА

Б. М. БУДАК, М. З. МОСКАЛ

О КЛАССИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ МНОГОМЕРНОЙ МНОГОФРОНТОВОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА

(Представлено академиком А. Н. Тихоновым 5 II 1969)

В настоящей заметке доказывается существование, единственность и устойчивость по отношению к возмущениям исходных данных регулярного классического решения многомерной многофронтовой задачи Стефана (задача А) с внутренними и внешними фазовыми фронтами. Изложение ведется для случая, когда число пространственных независимых переменных $N = 2$, но метод и результаты легко распространяются на случай $N > 2$.

1°. Задача А. Найти функции $u^i = u^i(x_1, x_2, t)$, $x_1 = x_1{}^i(s, t)$, $x_2 = x_2{}^i(s, t)$, $0 \leqslant s \leqslant s_0$, $0 \leqslant t \leqslant T$, $i = 1, 2, \ldots, n$, из условий

$$u_t^i = a_i^2(u_{x_1x_1}^i + u_{x_2x_2}^i) + F^i(x_1, x_2, t) \quad \text{при} \quad (x_1, x_2, t) \in D_T^i, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{1}$$

где $\bar{D}_T{}^i$ — замкнутая односвязная область значений (x_1, x_2, t), граница которой состоит из четырех односвязных плоских кусков $Д_{0x_1x_2}^i$, $Д_{Tx_1x_2}^i$, $Д_{tx_10}$, $Д_{tx_1l_{22}}^i$, лежащих соответственно в плоскостях $t \equiv 0$, $t \equiv T$, $x_2 \equiv l_{12} = 0$, $x_2 \equiv l_{22}$, и двух кривых односвязных кусков $S_T{}^j = \{x_1 = x_1{}^j(s, t), x_2x_2{}^j(s, t), 0 \leqslant s \leqslant s_0, 0 \leqslant t \leqslant T\}$, $j = i, i+1$; $i = 1, 2, \ldots, n$, причем $S_T{}^k$ при $k = 1, \ldots, n$ — искомые поверхности (фазовые фронты), а S_T^{n+1} — заданная поверхность; $D_T{}^i = \bar{D}_T{}^i \setminus \Gamma_T{}^i$,

$$\Gamma_T^i = Д_{0x_1x_2}^i \cup Д_{tx_10}^i \cup Д_{tx_1l_{22}}^i \cup S_T^i \cup S_T^{i+1};$$

$$u^i(x_1, x_2, 0) = \varphi_i(x_1, x_2), \quad (x_1, x_2) \in Д_{0x_1x_2}^i, \quad i = 1, 2, \ldots, n; \tag{2}$$

$$u^k|_{S_T^i} = u^k(x_1, x_2, t)|_{x_1=x_1^i(s,t),\, x_2=x_2^i(s,t)} = \bar{\omega}_k^i(s, t) = \omega_k^i(x_1^i(s, t)x_2^i(s, t), t;$$

$$i = k, k+1;\ k = 1, \ldots, n; \quad \omega_{k-1}^k \equiv \omega_k^k, \quad k = 2, \ldots, n-1. \tag{3'}$$

$$u^k|_{Д_{tx_1l_{j2}}^k} = u^k(x_1, x_2, t)|_{x_2=l_{j2}} = f_k^j(x_1, t), \ j = 1, 2;$$

$$f_k^j(x, t) \text{ определена в } Д_{tx_1l_{j2}}^k; \quad j = 1, 2;\ k = 1, \ldots, n; \tag{3''}$$

$$\frac{\partial x_i^j(s, t)}{\partial t} = \bar{\lambda}^{jj-1}(s, t)\frac{\partial u^{j-1}(x_1^j(s, t), x_2^j(s, t), t)}{\partial x_i} - \bar{\lambda}^{jj}(s, t)\frac{\partial u^j(x_1^j(s, t), x_2^j(s, t), t)}{\partial x_i}, \tag{4}$$

$$i = 1, 2; \ j = 1, 2, \ldots, n, \quad \text{причем } u_{x_1}^0 \equiv 1,\ u_{x_2}^0 \equiv 1;$$

$$\begin{gathered} \bar{\lambda}^{jk} = \lambda^j(s, t, x_1^k(s, t), x_2^k(s, t)), \quad k = j-1, j;\ j = 1, 2, \ldots, n; \\ x_i^j(s, 0) = \psi_i^j(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant s_0, \quad i = 1, 2;\ j = 1, 2, \ldots, n+1. \end{gathered} \tag{5}$$

В предположении, что начальные кривые $\Gamma_j \equiv \{x_1 = \psi_1{}^j(s),\ x_2 = \psi_2{}^j(s)\}$, $j = 1, 2, \ldots, n+1$, не имеют общих точек, будем искать решение задачи А ((1)—(5)) на таком интервале времени $0 \leqslant t \leqslant T^*$, на котором $S_{T^*}{}^i$, $i = 1, \ldots, n+1$, не имеют общих точек и выполняется условие

$$[x_{1s}^i(s, t)]^2 + [x_{2s}^i(s, t)]^2 \neq 0. \tag{6}$$

Определение 1. Говорят, что поверхность $S_T{}^i \equiv \{x_1 = x_1{}^i(s,\ t),\ x_2 = x_2{}^i(s,\ t),\ 0 \leqslant s \leqslant s_0,\ 0 \leqslant t \leqslant T\}$ удовлетворяет требованиям Б, если:

1) $S_T{}^i$ является простой незамкнутой гладкой поверхностью, в частности $x_{1t}{}^i(s,\ t),\ x_{2t}{}^i(s,\ t),\ x_{1s}{}^i(s,\ t),\ x_{2s}{}^i(s,\ t)$ непрерывны и $[x_{1s}{}^i(s,\ t)]^2 + [x_{2s}{}^i(s,\ t)]^2 \neq 0$ при $0 \leqslant s \leqslant s^0,\ 0 \leqslant t \leqslant T$, причем все внутренние точки $S_T{}^i$ являются внутренними точками цилиндра $Ц \equiv \{0 \leqslant x_2 \leqslant l_{22},\ 0 \leqslant t \leqslant T, -\infty < x_1 < +\infty\}$;

2) граница поверхности $S_T{}^i$ является простой непрерывной, замкнутой кусочно-гладкой кривой, состоящей из четырех гладких кусков, лежащих соответственно на гранях $x_2 \equiv 0,\ x_2 \equiv l_{22},\ t \equiv 0,\ t \equiv T$ цилиндра $Ц$.

Определение 2. Регулярным классическим решением задачи А называется система функций $u^i = u^i(x_1,\ x_2,\ t),\ x_1 = x_1{}^i(s,\ t),\ x_2 = x_2{}^i(s,\ t),\ 0 \leqslant s \leqslant s_0,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ i = 1,\ 2, \ldots, n$, удовлетворяющих условиям: 1) поверхности $S_T{}^i$ удовлетворяют требованиям Б и не имеют общих точек друг с другом и с S_T^{n+1}; 2) $u^i = u^i(x_1,\ x_2,\ t)$ непрерывны в $\bar{D}_T{}^i,\ i = 1,\ 2, \ldots, n$; $u_{x_1}{}^i(x_1,\ x_2,\ t),\ u^i_{x_2}(x_1,\ x_2,\ t),\ u^i_{x_1x_1}(x_1,\ x_2,\ t),\ u^i_{x_1x_2}(x_1,\ x_2,\ t),\ u^i_{x_2x_2}(x_1,\ x_2,\ t),\ u_t{}^i(x_1,\ x_2,\ t)$ непрерывны в $D_T{}^i,\ i = 1,\ 2, \ldots, n$, и принимают равномерно непрерывные предельные значения во внутренних точках поверхности $S_T^j,\ j = i,\ i+1$; 3) выполнены все соотношения (1)—(5) задачи А и условие (6).

Замечание. Если $(u^i,\ x_1{}^i,\ x_2{}^i,\ i = 1, \ldots, n)$ — регулярное классическое решение задачи А, то оно является также классическим решением задачи А в следующем смысле: на каждом фазовом фронте $S_T{}^i$, представленном уравнением $\Phi^i(x_1,\ x_2,\ t) = 0$ (что возможно в окрестности каждой точки $\in S_T{}^i$, так как по условию $[x_{1s}{}^i(s,\ t)]^2 + [x_{2s}{}^i(s,\ t)]^2 \neq 0$ при $0 \leqslant s \leqslant s_0,\ 0 \leqslant t \leqslant T,\ i = 1,\ 2, \ldots, n$), выполняется соотношение

$$\Phi_t^i + (\lambda^{ii-1}\operatorname{grad} u^{i-1} - \lambda^{ii}\operatorname{grad} u^i,\ \operatorname{grad}\Phi^i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

2°. Сведем задачу А к системе нелинейных интегральных уравнений второго рода. Рассмотрим для этого функции

$$G_{1k}(x_1, t, \xi_1, \tau) = \frac{1}{2a_k\sqrt{\pi(t-\tau)}}\exp\left[-\frac{(x_1-\xi_1)^2}{4a_k^2(t-\tau)}\right], \quad k = 1, 2, \ldots, n;$$

$$G_{2k}(x_2, t, \xi_2, \tau) = \frac{1}{2a_k\sqrt{\pi(t-\tau)}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left\{\exp\left[-\frac{(x_2-\xi_2+2nl_{22})^2}{4a_k^2(t-\tau)}\right] - \exp\left[-\frac{(x_2+\xi_2-2nl_{22})^2}{4a_k^2(t-\tau)}\right]\right\}, \quad k = 1, \ldots, n;$$

$$\Pi_k(x_1,\ x_2,\ t,\ \xi_1,\ \xi_2,\ \tau) = G_{1k}(x_1,\ t,\ \xi_1,\ \tau)G_{2k}(x_2,\ t,\ \xi_2,\ \tau),\ k = 1, \ldots, n; \tag{7}$$

$$v_m^{kl}(s, t) = u^k_{x_m}(x_1^l(s, t), x_2^l(s, t), t),\ g_{mr}^{kl}(s, t) = u^k_{x_mx_r}(x_1^l(s, t), x_2^l(s, t), t), \tag{8}$$

$$m,\ r = 1,\ 2; \quad l = k,\ k+1; \quad k = 1,\ 2, \ldots, n.$$

Интегрируя тождество Грина для Π_k и u^k по $D_t{}^k$ из (1), (2) и (3), получим для регулярного классического решения u^k задачи А представление

$$u^k(x_1, x_2, t) = \iint\limits_{Д^k_{0x_1x_2}} \varphi_k(\xi_1, \xi_2)\,\Pi_k d\xi_1 d\xi_2 - a_k^2\sum_{i=1}^{2}\iint\limits_{Д^k_{tx_1l_{i2}}} f_k^i(\xi_1, \tau)\,\Pi_{k\xi_2} d\xi_1 d\tau +$$

$$+\sum_{i=k}^{k+1}\iint\limits_{S_t^i}\overline{\omega}_k^i(s, \tau)\,\Pi_k d\xi_1 d\xi_2 - a_k^2\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=k}^{k+1}\iint\limits_{S_t^i}\overline{\omega}_k^i(s, \tau)\,\Pi_{k\xi_j} d\xi_{p(j)} d\tau +$$

$$+a_k^2\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=k}^{k+1}\iint\limits_{S_t^i} v_j^{ki}(s,\tau)\,\Pi_k d\xi_{p(j)}d\tau+\iiint\limits_{D_t^k} F_k(\xi_1,\xi_2,\tau)\,\Pi_k d\xi_1 d\xi_2 d\tau,$$

$$p(j)=2-2^{-1}[1+(-1)^j],\quad k=1,\ldots,n. \tag{9}$$

Рассмотрим, далее, систему (10)—(12) нелинейных интегральных уравнений Вольтерра второго рода для функций $v_m^{kl}(s,t)$, $x_i^k(s,t)$, $x_{is}^k(s,t)$, $i=1,2;\ l=k,k+1;\ k=1,2,\ldots,n$

$$v_m^{kl}=\iint\limits_{Д_{0x_1x_2}^k}\varphi_k\Pi_{kx_m}d\xi_1d\xi_2-a_k^2\sum_{i=1}^{2}\iint\limits_{Д_{tx_1l_{i2}}^k} f_k^i\Pi_{k\xi_2x_m}d\xi_1d\tau+$$

$$+\sum_{i=k}^{k+1}\iint\limits_{S_t^i}\overline{\omega}_k^i\Pi_{kx_m}d\xi_1d\xi_2-a_k^2\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=k}^{k+1}\iint\limits_{S_t^i}\overline{\omega}_k^i\Pi_{k\xi_jx_m}d\xi_{p(j)}d\tau+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=k}^{k+1}\iint\limits_{S_t^i}v_j^{ki}\Pi_{kx_m}d\xi_{p(j)}d\tau+\iiint\limits_{D_t^k}F_k\Pi_{kx_m}d\xi_1d\xi_2d\tau; \tag{10}$$

$$p(j)=2-2^{-1}[1+(-1)^j],\quad m=1,2;\quad l=k,k+1;\quad k=1,\ldots,n;$$

$$x_i^j(s,t)=\psi_i^j(s)+\int_0^t[\overline{\lambda}^{jj-1}(s,\tau)v^{jj-1}(s,\tau)-\overline{\lambda}^{jj}(s,\tau)v_i^{jj}(s,\tau)]\,d\tau,$$

$$j=1,\ldots,n;\ i=1,2; \tag{11}$$

$$x_{is}^j(s,t)=\psi_{is}^j(s)+\int_0^t\Big\{\overline{\lambda}_s^{jj-1}(s,\tau)v_i^{jj-1}(s,\tau)-\overline{\lambda}_s^{jj}(s,\tau)v_i^{jj}(s,\tau)+$$

$$+\sum_{k=j-1}^{j}(-1)^{j-k+1}\overline{\lambda}^{jk}(s,\tau)\,[g_{i1}^{kj}(s,\tau)x_{1s}^j(s,\tau)+g_{i2}^{kj}(s,\tau)x_{2s}^j(s,\tau)]\Big\}d\tau,$$

$$i=1,2;\quad j=1,\ldots,n; \tag{12}$$

$$\lambda_s^{jk}(s,\tau)=\frac{d}{ds}\lambda^j(s,\tau,x_1^k(s,\tau),x_2^k(s,\tau)); \tag{13}$$

$$g_{mr}^{kl}(s,\tau)=\iint\limits_{Д_{0x_1x_2}^k}\varphi_k\Pi_{k\xi_2x_mx_r}d\xi_1d\xi_2-a_k^2\sum_{i=1}^{2}\iint\limits_{Д_{tx_1l_{i2}}^k}f_k^i\Pi_{k\xi_1x_mx_r}d\xi_1d\tau+$$

$$+\sum_{i=k}^{k+1}\iint\limits_{S_t^i}\overline{\omega}_k^i\Pi_{kx_mx_r}d\xi_1d\xi_2-a_k\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=k}^{k+1}\iint\limits_{S_t^i}\overline{\omega}_k^i\Pi_{k\xi_jx_mx_r}d\xi_{p(j)}d\tau-$$

$$-a_k^2\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=k}^{k+1}\iint\limits_{S_t^i}v_j^{ki}\Pi_{kx_mx_r}d\xi_{p(j)}d\tau+\iiint\limits_{D_t^k}F_k\Pi_{kx_mx_r}d\xi_1d\xi_2d\tau, \tag{14}$$

$$m,r=1,2;\ l=k,k+1;\quad p(j)=2-2^{-1}[1+(-1)^j];\ k=1,2,\ldots,n;$$

$$g_{mr}^{kl}(s,t)=g_{rm}^{kl}(s,\tau).$$

Определение 3. Задача А (1)—(5) эквивалентна системе В (10)—(12), если каждое регулярное классическое решение задачи А (1)—(5) порождает, в силу (8) и (9), непрерывное решение системы В (10)—(12), и обратно каждое непрерывное решение системы В (10)—(12), удовлетворяющее неравенству (6), порождает, в силу (8) и (9), регулярное классическое решение задачи А (1)—(5).

Теорема 1 (эквивалентности). *Пусть для исходных данных задачи А выполнены условия:*

1) $F^k(x_1,x_2,t)$, $F_{x_i}{}^k(x_1,x_2,t)$ $F_t{}^k(x_1,x_2,t)$ *непрерывны по* x_1, x_2, t, $k=1,2,\ldots,n$;

2) $\varphi_k(x_1, x_2), \varphi_{kx_i}(x_1, x_2), \quad \varphi_{kx_ix_j}(x_1, x_2), k = 1, 2, \ldots, n; \ i, j = 1, 2,$ *непрерывны по* x_1, x_2;

3) $f_k^i(x_1, t), \ f_{kx_1}^i(x_1, t), \ f_{kt}^i(x_1, t), \ f_{kx_1}^i(x_1, t), \quad i = 1, 2; \quad k = 1, 2, \ldots, n,$ *непрерывны по* x_1, t;

4) $\bar{\lambda}^{kk}(s, t), \ \bar{\lambda}^{kk-1}(s, t), \ \bar{\omega}_k{}^i(s, t)$ *непрерывно дифференцируемы по всем аргументам;*

5) $\psi_i{}^j(s), \psi_{is}{}^j(s), j = 1, \ldots, n; i = 1, 2,$ *непрерывны по* s; $[\psi_{1s}{}^j(s)]^2 + [\psi_{2s}{}^j(s)]^2 = 0, j = 1, \ldots, n+1; 0 \leqslant s \leqslant s_0$;

6) $x_i^{n+1}(s, t), x_{is}^{n+1}(s, t), x_{it}^{n+1}(s, t), \quad i = 1, 2,$ *непрерывны*; $[x_{1s}^{n+1}(s, t)]^2 + [x_{2s}^{n+1}(s, t)]^2 \neq 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant s_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad i = 1, 2.$

7) *Выполнены условия согласования начальных и граничных данных. Тогда задача* А (1) — (6) *эквивалентна системе интегральных уравнений* В (10) — (12) *в силу соотношений* (13), (14).

Теорема 2. *При условиях теоремы* 1 *существует такой интервал времени* $0 \leqslant t \leqslant T^*$, $0 < T^* \leqslant T$, *на котором существует и единственно регулярное решение системы* В (10) — (12), *а тем самым существует и единственно регулярное классическое решение задачи* А (1) — (5).

Доказательство теоремы 2 получается методом сжатых отображений.

Определение 4. Пусть наряду с задачей 4 (1) — (5) задана задача А* (1*) — (5*), отличающаяся от задачи А (1) — (5) лишь тем, что все исходные данные $\varphi_k(x_1, x_2)$, $f_k{}^i(x_1, t)$, $F_k(x_1, x_2, t)$, a_k, $\psi_i{}^k(s)$, $\lambda^{kk-1}(x_1, x_2, s, t)$, $\lambda^{kk}(x_1, x_2, s, t)$, $\bar{\omega}_k{}^i(s, t)$ заменены соответственно на $\varphi_k{}^*(x_1, x_2)$, $f_k{}^{i*}(x_1, t)$, $F_k{}^*(x_1, x_2, t)$, $a_k{}^*$, $\psi_i{}^{k*}(s)$, $\lambda^{kk-1*}(x_1, x_2, s, t)$, $\lambda^{kk*}(x_1, x_2, s, t)$, $\bar{\omega}_k{}^{i*}(s, t)$. Положим

$$\eta = \max\{\max_k |a_k - \overset{*}{a}_k|, \ \max_{s,i,k} |\psi_i^k(s) - \psi_i^{k*}(s)|, \ \max_{s,i,k} |\psi_{is}^k(s) - \psi_{is}^{k*}(s)|,$$

$$\max_{x_1, x_2, s, t, k} |\bar{\lambda}^{kk-1} - \bar{\lambda}^{kk-1*}|, \quad \max_{x_1, x_2, s, t, k} |\bar{\lambda}^{kk} - \bar{\lambda}^{kk*}|,$$

$$\max_{x_1, x_2, k} |\varphi_k - \overset{*}{\varphi}_k|, \quad \max_{x_1, x_2, i, k} |\varphi_{kx_i} - \overset{*}{\varphi}_{kx_i}|, \quad \max_{x_1, x_2, i, j, k} |\varphi_{kx_ix_j} - \overset{*}{\varphi}_{kx_ix_j}|,$$

$$\max_{x_1, i, k, t} |f_k^i(x_1, t) - f_k^{i*}(x_1, t)|, \quad \max_{t, x_1, i, k} |f_{kx_1}^i(x_1, t) - f_{kx_1}^{i*}(x_1, t)|,$$

$$\max_{t, x_1, i, k} |f_{kt}^i(x_1, t) - f_{kt}^{i*}(x_1, t)|, \quad \max_{t, x_1, i, k} |f_{kx_1t}^i(x_1, t) - f_{kx_1t}^{i*}(x_1, t)|,$$

$$\max_{x_1, x_2, t, k} |F_k - \overset{*}{F}_k|, \quad \max_{x_1, x_2, t, i, k} |F_{kx_i} - \overset{*}{F}_{kx_i}|, \quad \max_{x_1, x_2, t} |F_{kt} - \overset{*}{F}_{kt}|\},$$

$$0 \leqslant t \leqslant T^*, \quad 0 < T^* \leqslant T,$$

$$\varepsilon = \max\left[\max_{i, k, s, 0 \leqslant t \leqslant T^*} |x_i^k(s, t) - x_i^{k*}(s, t)|, \quad \max_{s, i, k, 0 \leqslant t \leqslant T^*} |x_{is}^k(s, t) - x_{is}^{k*}(s, t)|,\right.$$

$$\left.\max_{x_1, x_2, k, 0 \leqslant t \leqslant T^*} |u^k(x_1, x_2, t) - u^{k*}(x_1, x_2, t)|\right\}.$$

Регулярное классическое решение $u^k(x_1, x_2, t)$, $x_1{}^k(s, t)$, $x_2{}^k(s, t)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, $0 \leqslant s \leqslant s_0$, $0 \leqslant t \leqslant T^*$, $0 < T^* \leqslant T$, задачи А (1) — (5) называется устойчивым по отношению к возмущениям исходных данных, если $\varepsilon \to 0$ при $\eta \to 0$.

Теорема 3. *Если исходные данные задач* А *и* А* *удовлетворяют условиям теоремы* 1, *то регулярное классическое решение задачи* А *устойчиво по отношению к возмущениям исходных данных.*

Замечание. Все результаты распространяются также на квазилинейное параболическое уравнение с главной частью $u_t^k = a_k^2(u_{x_1x_1}^k + u_{x_2x_2}^k)$ и свободным членом, зависящим от x_1, x_2, t, u^k, $u_{x_1}{}^k$, $u_{x_2}{}^k$, квазилинейные граничные условия, а также на случай, когда наряду с незамкнутыми фазовыми фронтами имеются замкнутые фазовые фронты.

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступило
17 I 1969