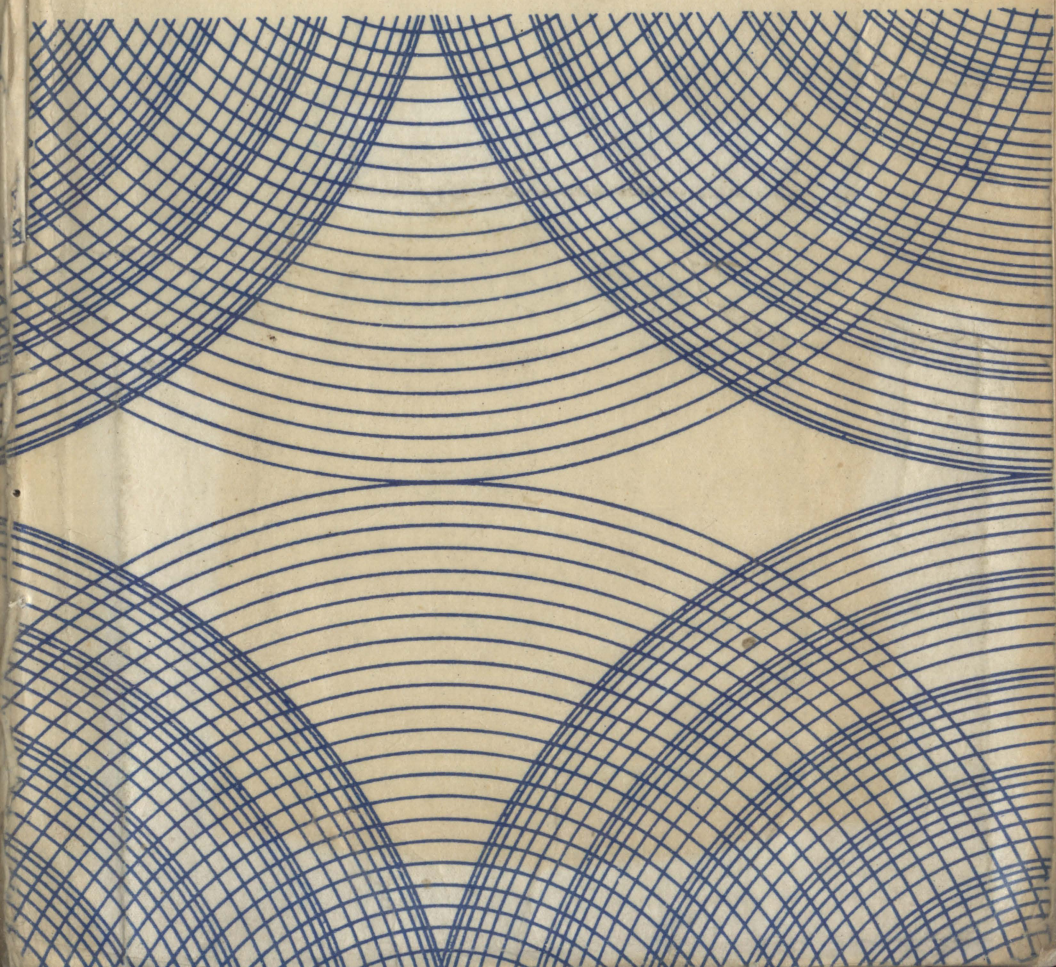


**Сборник задач  
по курсу**

**“ЭЛЕКТРОДИНАМИКА  
И РАСПРОСТРАНЕНИЕ  
РАДИОВОЛН”**



# **Сборник задач по курсу «ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН»**

Под редакцией С. И. Баскакова

Допущено  
Министерством высшего и среднего  
специального образования СССР  
в качестве учебного пособия  
для студентов радиотехнических  
специальностей вузов



МОСКВА «ВЫСШАЯ ШКОЛА» 1981



**ББК 22.313**  
**С 23**  
**УДК 538.3**

Баскаков С. И., Карташев В. Г., Лобов Г. Д.,  
Филатова Е. А., Штыков В. В.

Рецензенты:

Кафедра антенн и радиопередающих устройств  
Таганрогского радиотехнического института  
(зав. кафедрой д-р техн. наук, проф. Б. М. Петров),  
д-р техн. наук, проф. М. В. Вамберский  
(МВТУ им. Н. Э. Баумана)

**Сборник задач по курсу «Электродинамика и распро-  
странение радиоволн»: Учеб. пособие / Баскаков С. И.,  
С 23 Карташев В. Г., Лобов Г. Д. и др.; Под ред. С. И. Бас-  
какова. — М.: Высш. школа, 1981. — 208 с., ил.**

40 к.

Книга содержит систематизированный материал для упражнений.  
В каждой главе имеются краткие теоретические сведения, примеры решения  
типовых задач, а также задачи для самостоятельной работы, снабженные  
ответами.

Предназначаются для студентов радиотехнических специальностей вузов.  
Может быть использована лицами, самостоятельно изучающими техническую  
электродинамику или повышающими свою квалификацию.

С 30401—367  
001(01)—81 105—81

2402020000

**ББК 22.313**  
537

## **СБОРНИК ЗАДАЧ ПО КУРСУ «ЭЛЕКТРОДИНАМИКА И РАСПРОСТРАНЕНИЕ РАДИОВОЛН»**

**Под редакцией Святослава Ивановича Баскакова**

Зав. редакцией Л. А. Романова. Редактор Т. И. Артемова. Художественный  
редактор Т. М. Скворцова. Младший редактор Е. И. Попова. Технический  
редактор Е. И. Герасимова. Корректор Р. К. Косинова  
ИБ № 2958

Изд. № ЭР-279 Сдано в набор 08.04.81. Подписано к печати 02.10.81.  
Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub> Бум. лп. № 2. Гарнитура литературная. Печать высокая.  
Объем 13 усл. печ. л. 13,25 усл. кр.-отт. 12,45 уч.-изд. л. Тираж 15 000 экз.  
Заказ 223. Цена 40 коп.

Издательство «Высшая школа», Москва, К-51, Неглинная ул., д. 29/14  
Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном коми-  
тете СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли, 129041,  
Москва, Б. Переяславская ул., д. 46

© Издательство «Высшая школа», 1981

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Материал предлагаемого читателю задачника охватывает все основные разделы курса «Электродинамика и распространение радиоволн».

Главы книги построены по единому принципу. В первом параграфе кратко излагаются теоретические сведения, необходимые для самостоятельной работы студентов, во втором приводятся подробные решения ряда типовых задач, в третьем предлагаются задачи для самостоятельного решения.

Значительная часть задач составлена с таким расчетом, чтобы время, затрачиваемое на их решение, соответствовало часам учебного плана, отводимым на данный курс. Кроме того, в пособии можно найти задачи повышенной сложности, отмеченные звездочкой. Их назначение — развить творческую самостоятельность студентов и привить им навыки неформального мышления, что особенно важно в условиях современной высшей школы.

Книга написана сотрудниками кафедры теоретических основ радиотехники Московского энергетического института и в некоторой мере обобщает многолетний методический опыт преподавания технической электродинамики.

Материал распределен между авторами следующим образом: гл. 9, 11 написаны Е. А. Филатовой, гл. 13 — Г. Д. Лобовым, главы 5, 6 — В. В. Штыковым, гл. 7, 8, 10 — В. Г. Карташевым, предисловие и гл. 1, 2, 3, 4, 12 — С. И. Баскаковым.

Авторы глубоко признательны рецензентам книги — проф. М. В. Вамберскому и проф. Б. М. Петрову, чьи ценные замечания и пожелания были учтены при окончательной доработке рукописи. Авторы благодарят А. И. Аникину за помощь в оформительской работе, а также Е. И. Грацианскую, Л. А. Ягодину и В. А. Калинина, проверивших ответы ко многим задачам.

Отзывы о книге просим направлять по адресу: Москва, К-51, Неглинная ул., 29/14, издательство «Высшая школа».



## Глава первая

### ЭЛЕМЕНТЫ ВЕКТОРНОГО АНАЛИЗА

#### § 1.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Для описания физических полей принято использовать их математические модели — скалярные и векторные поля. В произвольной системе координат  $(x_1, x_2, x_3)$  скалярное поле  $\varphi$  приобретает вид некоторой функции  $\varphi(x_1, x_2, x_3)$ , принимающей численные значения — действительные или комплексные. Векторное поле  $\mathbf{A}$  задается тремя проекциями на единичные векторы (орты) выбранной системы координат:

$$\mathbf{A} = A_{x_1}(x_1, x_2, x_3) \mathbf{1}_{x_1} + A_{x_2}(x_1, x_2, x_3) \mathbf{1}_{x_2} + A_{x_3}(x_1, x_2, x_3) \mathbf{1}_{x_3}.$$

Для характеристики величины и направления скорости изменения скалярного поля в пространстве вводят градиент этого поля

$$\text{grad } \varphi = \frac{1}{h_1} \frac{\partial \varphi}{\partial x_1} \mathbf{1}_{x_1} + \frac{1}{h_2} \frac{\partial \varphi}{\partial x_2} \mathbf{1}_{x_2} + \frac{1}{h_3} \frac{\partial \varphi}{\partial x_3} \mathbf{1}_{x_3}, \quad (1.1)$$

где  $h_1, h_2$  и  $h_3$  — коэффициенты Лямэ по координатам  $x_1, x_2$  и  $x_3$ , являющиеся коэффициентами пропорциональности между дифференциалами обобщенных координат и бесконечно малыми ребрами элементарного параллелепипеда в выбранной точке пространства.

Приведем значения коэффициентов Лямэ для наиболее употребительных координатных систем:

декартова система координат  $(x, y, z)$

$$h_x = h_y = h_z = 1;$$

цилиндрическая система координат  $(r, \varphi, z)$

$$h_r = 1, \quad h_\varphi = r, \quad h_z = 1;$$

сферическая система координат  $(r, \vartheta, \varphi)$

$$h_r = 1, \quad h_\vartheta = r, \quad h_\varphi = r \sin \vartheta.$$

Конкретно градиент вычисляют следующим образом:  
в декартовой системе координат

$$\text{grad} \equiv \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{1}_x + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{1}_y + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{1}_z;$$

в цилиндрической системе координат

$$\text{grad} \equiv \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{1}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{1}_\varphi + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{1}_z;$$

в сферической системе координат

$$\text{grad} \equiv \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{1}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \mathbf{1}_\vartheta + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \mathbf{1}_\varphi.$$

Описание дифференциальных свойств векторного поля несколько сложнее. Векторное поле  $\mathbf{A}$  принято характеризовать скалярным полем — дивергенцией  $\text{div } \mathbf{A}$  и векторным полем — ротором  $\text{rot } \mathbf{A}$ . Значение дивергенции равно плотности источников рассматриваемого поля в заданной точке пространства. Трактовка ротора векторного поля сложнее; можно считать, что оно в известном смысле характеризует степень отличия исследуемого поля от однородного.

Дивергенцию векторного поля  $\mathbf{A}$  вычисляют путем дифференцирования его проекций по определенным правилам:

в декартовой системе координат

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \quad (1.2)$$

в цилиндрической системе координат

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}; \quad (1.3)$$

в сферической системе координат

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\vartheta) + \frac{1}{r \sin \vartheta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}. \quad (1.4)$$

В произвольной ортогональной криволинейной системе координат

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 A_{x_1}) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_1 h_3 A_{x_2}) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 A_{x_3}) \right]. \quad (1.5)$$

Проекции ротора векторного поля имеют вид:  
в декартовой системе координат

$$\begin{aligned} (\text{rot } \mathbf{A})_x &= \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \\ (\text{rot } \mathbf{A})_y &= \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \\ (\text{rot } \mathbf{A})_z &= \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}; \end{aligned} \quad (1.6)$$



в цилиндрической системе координат

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot} \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial A_\varphi}{\partial z}, \\(\operatorname{rot} \mathbf{A})_\varphi &= \frac{\partial A_r}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial r}, \\(\operatorname{rot} \mathbf{A})_z &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} - \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right];\end{aligned}\tag{1.7}$$

в сферической системе координат

$$\begin{aligned}(\operatorname{rot} \mathbf{A})_r &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[ \frac{\partial}{\partial \vartheta} (\sin \vartheta A_\varphi) - \frac{\partial A_\vartheta}{\partial \varphi} \right], \\(\operatorname{rot} \mathbf{A})_\vartheta &= \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial (r A_\varphi)}{\partial r} \right], \\(\operatorname{rot} \mathbf{A})_\varphi &= \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{\partial A_r}{\partial \vartheta} \right],\end{aligned}\tag{1.8}$$

Ротор векторного поля  $\mathbf{A}$  в произвольной системе координат выражают через проекции исходного поля и коэффициенты Лямэ:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{A} &= \frac{1_{x_1}}{h_2 h_3} \left[ \frac{\partial (h_3 A_{x_3})}{\partial x_2} - \frac{\partial (h_2 A_{x_2})}{\partial x_3} \right] + \frac{1_{x_2}}{h_1 h_3} \left[ \frac{\partial (h_1 A_{x_1})}{\partial x_3} - \frac{\partial (h_3 A_{x_3})}{\partial x_1} \right] + \\&+ \frac{1_{x_3}}{h_1 h_2} \left[ \frac{\partial (h_2 A_{x_2})}{\partial x_1} - \frac{\partial (h_1 A_{x_1})}{\partial x_2} \right],\end{aligned}\tag{1.9}$$

Дифференциальные операции со скалярными и векторными полями удобно записывать с помощью оператора Гамильтона  $\nabla$ . По определению

$$\operatorname{grad} U = \nabla U, \operatorname{div} \mathbf{A} = \nabla \mathbf{A}, \operatorname{rot} \mathbf{A} = [\nabla \mathbf{A}].\tag{1.10}$$

В декартовой системе координат оператор Гамильтона есть символический вектор

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x} 1_x + \frac{\partial}{\partial y} 1_y + \frac{\partial}{\partial z} 1_z.\tag{1.11}$$

Из дифференциальных векторных операций второго порядка широкое применение в электродинамике находит оператор  $\nabla^2$ , закон действия которого на векторное поле  $\mathbf{A}$  описывается соотношением

$$\nabla^2 \mathbf{A} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{A} - \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{A}.\tag{1.12}$$

Дифференциальная операция второго порядка, действующая на скалярное поле, задается оператором Лапласа

$$\nabla^2 = \Delta \equiv \operatorname{div} \operatorname{grad}.$$

Оператор Лапласа в различных координатных системах записывается следующим образом:

в декартовой системе координат

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}; \quad (1.13)$$

в цилиндрической системе координат

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}; \quad (1.14)$$

в сферической системе координат

$$\nabla^2 U = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}, \quad (1.15)$$

Для графического изображения векторных полей принято строить картину их силовых линий. В каждой точке силовой линии вектор поля касателен к ней. Там, где интенсивность поля больше, силовые линии проводят чаще, и наоборот.

## § 1.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

**1.1.** В декартовой системе координат проекции векторного поля **A** постоянны в каждой точке пространства:  $A_x = A_0$ ,  $A_y = B_0$ ,  $A_z = 0$ .

Построить картину силовых линий векторного поля.

**Решение.** Поскольку одна из декартовых составляющих векторного поля отсутствует, силовые линии должны представлять собой семейство плоских кривых, лежащих в плоскостях, параллельных плоскости  $xy$ . Вектор поля в каждой точке касателен к силовой линии, откуда вытекает дифференциальное уравнение силовых линий

$$dx/A_0 = dy/B_0, \quad (1.16)$$

являющееся следствием подобия двух прямоугольных треугольников с катетами  $dx$ ,  $dy$  и  $A_0$ ,  $B_0$  соответственно. Общий интеграл уравнения (1.16) имеет вид

$$y = (B_0/A_0) x + C,$$

где  $C$  — произвольная постоянная.

Таким образом, силовые линии поля представляют собой однопараметрическое семейство прямых с угловым коэффициентом наклона к оси  $x$ , равным  $B_0/A_0$  (рис. 1.1).

**1.2.** Векторное поле **A**, удовлетворяющее во всех точках рассматриваемой области условию  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ , называется **соленоидальным** (полем без источников). При выполнении условия  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0$  поле **A** является **потенциальным** векторным полем. Если такое поле характеризует силу, действующую на материальную точку, то работа внешних сил при обходе замкнутого контура будет равна нулю.



В декартовой системе координат векторное поле  $\mathbf{A}$  имеет единственную составляющую  $A_y = 15x^2$ .

Проверить, является ли поле: а) соленоидальным; б) потенциальным.

**Решение.** Картина силовых линий поля  $\mathbf{A}$  в плоскости  $xy$  изображена на рис. 1.2. Вычисляя дивергенцию этого поля по формуле (1.2), получим, что  $\operatorname{div} \mathbf{A} = \partial A_y / \partial y = 0$ . Следовательно, исследуемое поле соленоидально. Однако в соответствии с (1.6)  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 30x \mathbf{1}_z$ , поэтому поле не является потенциальным.

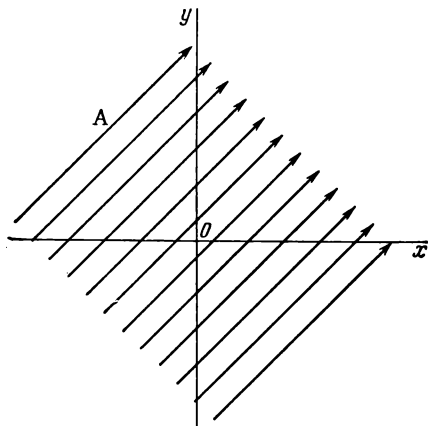


Рис. 1.1

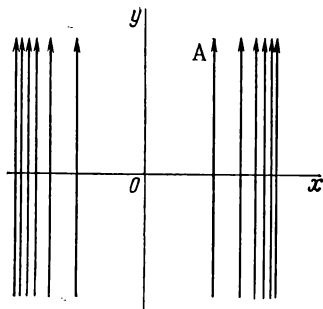


Рис. 1.2

**1.3.** Вычислить дивергенцию векторного произведения полей  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ .

**Решение.** Здесь удобно воспользоваться оператором Гамильтона, записав

$$\operatorname{div} [\mathbf{AB}] = \nabla [\mathbf{AB}].$$

Оператор Гамильтона является дифференциальным оператором, поэтому к приведенному векторному произведению можно применить обычные правила дифференцирования произведения:

$$\nabla [\mathbf{AB}] = \nabla_A [\mathbf{AB}] + \nabla_B [\mathbf{AB}].$$

Нижние индексы у оператора указывают поле, на которое он воздействует. Поле, на которое оператор не воздействует, должно быть вынесено за знак оператора подобно константе. В результате получаем

$$\operatorname{div} [\mathbf{AB}] = \mathbf{B} [\nabla_A \mathbf{A}] - \mathbf{A} [\nabla_B \mathbf{B}] = \mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B}.$$

### § 1.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**1.4.** Скалярное поле  $\varphi$  задано в декартовой системе координат выражением

$$\varphi = 3x^2y \cos z + 2z^3.$$

Вычислить векторное поле  $\operatorname{grad} \varphi$ .

**Ответ:**  $\operatorname{grad} \varphi = 6xy \cos z \mathbf{1}_x + 3x^2 \cos z \mathbf{1}_y + (2z - 3x^2y \sin z) \mathbf{1}_z$ .

1.5. В декартовой системе координат векторное поле  $\mathbf{A}$  имеет единственную составляющую  $A_z = 3y^2$ .

Построить качественно пространственную картину распределения силовых линий поля. Вычислить векторное поле  $\text{rot } \mathbf{A}$ .

Ответ:  $\text{rot } \mathbf{A} = 6y\mathbf{1}_x$ .

1.6. Пусть поле  $\mathbf{A}$  предыдущей задачи характеризует векторы скоростей потока жидкости. В любую точку пространства может быть помещена миниатюрная «турбина» с прямыми лопатками (рис. 1.3); ориентация ее оси произвольна.

Почему не будет вращаться «турбина», помещенная в поток жидкости со скоростями, одинаковыми в каждой точке? Почему угловая скорость вращения равна нулю при  $y = 0$  и изменяет направление при переходе из области  $y < 0$  в область  $y > 0$ ? Установить связь этих результатов с математическим понятием ротора векторного поля как циркуляции по бесконечно малому контуру.

1.7. В сферической системе координат задано векторное поле  $\mathbf{A} = r\mathbf{1}_r$ .

Определить скалярное поле  $\text{div } \mathbf{A}$ . Качественно построить картину силовых линий векторного поля.

Ответ:  $\text{div } \mathbf{A} = 3$ .

1.8. В сферической системе координат векторное поле  $\mathbf{A}$  имеет единственную  $r$ -ю составляющую, причем  $A_r = f(r)$ .

Какова должна быть функция  $f(r)$ , чтобы дивергенция поля  $\mathbf{A}$  обращалась тождественно в нуль? Построить картину силовых линий поля.

Ответ:  $f(r) = a/r^2$ , где  $a$  — константа.

1.9. В декартовой системе координат скалярное поле  $\varphi$  имеет вид

$$\varphi = \exp(-jkr),$$

где  $j = \sqrt{-1}$  — мнимая единица;  $\mathbf{k} = k_x\mathbf{1}_x + k_y\mathbf{1}_y + k_z\mathbf{1}_z$  — постоянный вектор;  $\mathbf{r} = x\mathbf{1}_x + y\mathbf{1}_y + z\mathbf{1}_z$  — радиус-вектор.

Найти выражения для  $\text{grad } \varphi$  и  $\Delta\varphi$ .

Ответ:  $\text{grad } \varphi = -jk \exp(-jkr)$ ,  $\Delta\varphi = -k^2 \exp(-jkr)$ , где  $k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2$ .

1.10. Определить дивергенцию и ротор векторного поля, имеющего в декартовой системе координат единственную составляющую  $A_x = 20 \sin(x/\pi)$ .

Ответ:  $\text{div } \mathbf{A} = \frac{20}{\pi} \cos\left(\frac{x}{\pi}\right)$ ,  $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ .

1.11. Определить дивергенцию и ротор векторного поля  $\mathbf{A}$ , характеризуемого следующими составляющими в цилиндрической системе координат:  $A_r = 10/r^2$ ,  $A_\varphi = 0$ ,  $A_z = 0$ .

Ответ:  $\text{div } \mathbf{A} = -10/r^3$ ,  $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ .

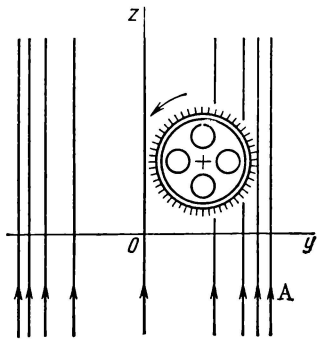


Рис. 1.3



1.12. Определить дивергенцию и ротор векторного поля  $\mathbf{A}$ , имеющего в сферической системе координат единственную составляющую  $A_\phi = 8r \exp(-10r)$ .

Ответ:  $\operatorname{div} \mathbf{A} = 0$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = 16(1 - 5r) \exp(-10r) \mathbf{1}_\phi$ .

1.13. В декартовой системе координат некоторое скалярное поле задано трехмерным интегралом Фурье

$$\varphi = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(k_1, k_2, k_3) e^{i(k_1 x + k_2 y + k_3 z)} dk_1 dk_2 dk_3.$$

Вычислить  $\Delta\varphi$ .

$$\text{Ответ: } \Delta\varphi = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k_1, k_2, k_3) e^{i(k_1 x + k_2 y + k_3 z)} dk_1 dk_2 dk_3,$$

где  $F = -(k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \Phi$ .

1.14. Изобразить графически картину силовых линий векторных полей, заданных в декартовой системе координат своими проекциями:

$$A_x = y + 10, \quad A_y = 0, \quad A_z = 0,$$

$$B_x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad B_y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad B_z = 0.$$

1.15. Найти ротор и дивергенцию следующих векторных полей, заданных в декартовой системе координат:

$$\mathbf{A} = \cos(ay) \mathbf{1}_x + \sin(ax) \mathbf{1}_y + \operatorname{tg}(az) \mathbf{1}_z,$$

$$\mathbf{B} = 6x\mathbf{1}_x + 5z\mathbf{1}_y + 10y\mathbf{1}_z.$$

Ответ:  $\operatorname{rot} \mathbf{A} = a(\cos(ax) - \sin(ax)) \mathbf{1}_z$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{A} = a/\cos^2(az)$ ,  $\operatorname{rot} \mathbf{B} = -5 \cdot \mathbf{1}_x$ ,  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 6$ .

1.16. Используя правила действия с оператором Гамильтона, доказать тождество

$$\operatorname{rot} [\mathbf{A}\mathbf{B}] = (\mathbf{B}\nabla) \mathbf{A} - (\mathbf{A}\nabla) \mathbf{B} + \mathbf{A} \operatorname{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{A}.$$

1.17. В пространстве заданы два векторных поля  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$ . Найти выражение для поля  $\mathbf{C} = \operatorname{grad} (\mathbf{A}\mathbf{B})$ .

Указание: Выразить операцию  $\operatorname{grad}$  через оператор  $\nabla$  и воспользоваться правилом дифференцирования произведения.

Ответ:  $\mathbf{C} = [\mathbf{A} \operatorname{rot} \mathbf{B}] + [\mathbf{B} \operatorname{rot} \mathbf{A}] + (\mathbf{B}\nabla) \mathbf{A} + (\mathbf{A}\nabla) \mathbf{B}$ .

1.18. Доказать следующие тождества векторного анализа ( $\varphi$  и  $\mathbf{A}$  — произвольные дифференцируемые скалярное и векторное поля):

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{A} = 0;$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = 0,$$

$$\operatorname{rot} (\varphi \mathbf{A}) = [\operatorname{grad} \varphi] \mathbf{A} + \varphi \operatorname{rot} \mathbf{A},$$

$$\operatorname{div} (\varphi \mathbf{A}) = \operatorname{grad} \varphi \mathbf{A} + \varphi \operatorname{div} \mathbf{A},$$

$$\operatorname{grad} (\varphi_1 \varphi_2) = \varphi_1 \operatorname{grad} \varphi_2 + \varphi_2 \operatorname{grad} \varphi_1.$$

1.19. Векторное поле  $\mathbf{A}$  обладает единственной составляющей  $A_x$ , которая постоянна в пределах плоского слоя толщиной  $2d$ :

$$A_x = \begin{cases} 0 & (y > d), \\ A_0 & (d \geq y \geq -d), \\ 0 & (y < -d). \end{cases}$$

Найти выражение ротора поля.

Ответ:  $\text{rot } \mathbf{A} = A_0 [\delta(y-d) - \delta(y+d)] \mathbf{1}_z$ , где  $\delta(y)$  — функция Дирака.

## Глава вторая

### УРАВНЕНИЯ МАКСВЕЛЛА

#### § 2.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Классическая теория электромагнетизма базируется на уравнениях Максвелла, описывающих совокупность эмпирических сведений об электромагнитном поле. Для вакуума вводят два основных векторных объекта — *напряженность электрического поля  $\mathbf{E}$  и напряженность магнитного поля  $\mathbf{H}$* . Кроме того, определяют скалярное поле *объемной плотности электрического заряда  $\rho$*  и векторное поле *объемной плотности электрического тока  $\mathbf{J}_s$* , связанного с движением носителей заряда в пространстве. Система уравнений Максвелла для вакуума относительно перечисленных величин записывается в виде

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{J}_s, \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \\ \text{div } \mathbf{E} &= \rho / \epsilon_0, \\ \text{div } \mathbf{H} &= 0. \end{aligned} \quad (2.1)$$

В эти уравнения входят две фундаментальные физические константы:  $\epsilon_0 = 10^{-9}/(36\pi)$  Ф/м — *электрическая постоянная* и  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  Гн/м — *магнитная постоянная*.

К основным принципам электродинамики относится также закон сохранения электрического заряда, находящий свое отражение в уравнении непрерывности тока:

$$\text{div } \mathbf{J}_s + \partial \rho / \partial t = 0. \quad (2.2)$$

Первое уравнение системы (2.1) представляет собой дифференциальную форму записи известного закона Ампера, дополненную вектором *плотности тока смещения*:

$$\mathbf{J}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.$$

Иногда бывает удобно выделять плотность *стороннего* электрического тока  $J_{\text{ст.э.}}$ , возникающего в пространстве под действием сил неэлектромагнитного происхождения. Сумму тока смещения, тока проводимости, а также стороннего тока в электродинамике называют *полным током*.

Второе уравнение системы (2.1) описывает закон электромагнитной индукции Фарадея. Два остальных уравнения, строго говоря, зависят от первых двух уравнений Максвелла. Из третьего уравнения системы (2.1) следует, что силовые линии электрического поля могут начинаться и оканчиваться только на электрических зарядах. Четвертое уравнение указывает на то, что в вакууме силовые линии магнитного поля всегда замкнуты (магнитное поле не имеет источников).

В присутствии материальных сред теория Максвелла должна быть дополнена рядом новых представлений, учитывающих микроскопическую структуру вещества. Под действием приложенного электрического поля  $E$  в среде возникает *ток проводимости* с объемной плотностью

$$J_a = \sigma E. \quad (2.3)$$

Здесь  $\sigma$  — удельная объемная проводимость вещества.

Соотношение (2.3) есть дифференциальная форма записи закона Ома; пропорциональность между  $J_a$  и  $E$  в сильных электрических полях может нарушаться.

Молекулы или атомы вещества в электрическом поле испытывают поляризацию, что отображается в теории введением векторного поля *электрической поляризованности*  $P$ . Данный вектор в каждой точке характеризует дипольный момент единицы объема вещества. Если электромагнитное поле переменное во времени, то в среде возникает электрический ток поляризации с объемной плотностью

$$J_{\text{пол}} = \partial P / \partial t.$$

В каждой точке среды принято вводить вектор электрического смещения (индукции)

$$D = \epsilon_0 E + P. \quad (2.4)$$

В результате первое уравнение Максвелла приобретает вид

$$\text{rot } H = \partial D / \partial t + \sigma E + J_{\text{ст.э.}} \quad (2.5)$$

Магнетизм материальных сред имеет квантовую природу. В рамках классических представлений определяют *вектор намагниченности*  $M$ , являющийся магнитным моментом единицы объема вещества, и вектор магнитной индукции  $B$ , связанный с  $H$  и  $M$  соотношением

$$B = \mu_0 (H + M).$$

Второе уравнение Максвелла в материальной среде имеет вид

$$\text{rot } E = - \partial B / \partial t. \quad (2.6)$$

Третье и четвертое уравнения Максвелла записываются так:

$$\text{div } D = \rho, \quad (2.7)$$

$$\text{div } B = 0. \quad (2.8)$$

В не слишком сильных полях как поляризованность, так и намагниченность линейно связаны с напряженностями полей:

$$\mathbf{P} = \chi_e \mathbf{E}, \quad \mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad (2.9)$$

где  $\chi_e$ ,  $\chi_m$  — диэлектрическая и магнитная восприимчивости вещества.

На основании этого материальные уравнения электромагнитного поля можно записать в форме

$$\mathbf{D} = \epsilon_a \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu_a \mathbf{H}. \quad (2.10)$$

Коэффициентами пропорциональности между напряженностями и индукциями являются абсолютная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_a$  и абсолютная магнитная проницаемость  $\mu_a$ . В расчетах часто используют относительные проницаемости

$$\epsilon = \epsilon_a / \epsilon_0, \quad \mu = \mu_a / \mu_0. \quad (2.11)$$

Соотношения вида (2.10) справедливы лишь при условии, что взаимодействие поля и вещества происходит практически безынерционно. На очень высоких частотах, в диапазоне СВЧ и оптическом диапазоне приходится учитывать эффекты, связанные с конечным временем установления состояния вещества. При этом можно говорить о диэлектрической и магнитной проницаемостях, зависящих от частоты.

Все сказанное ранее относилось к изотропным средам. Если вещество обладает анизотропией электродинамических свойств (различные кристаллы, а также плазма, находящаяся в магнитном поле), то скалярные величины  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$  следует заменить на тензоры второго ранга ( $\epsilon_a$ ) и ( $\mu_a$ ). Тогда материальные уравнения (2.10) можно записать в развернутом виде:

$$\begin{aligned} D_x &= \epsilon_{axx} E_x + \epsilon_{axy} E_y + \epsilon_{axz} E_z, \\ D_y &= \epsilon_{ayx} E_x + \epsilon_{ayy} E_y + \epsilon_{ayz} E_z, \\ D_z &= \epsilon_{azx} E_x + \epsilon_{azy} E_y + \epsilon_{azz} E_z; \\ B_x &= \mu_{axx} H_x + \mu_{axy} H_y + \mu_{axz} H_z, \\ B_y &= \mu_{ayx} H_x + \mu_{ayy} H_y + \mu_{ayz} H_z, \\ B_z &= \mu_{azx} H_x + \mu_{azy} H_y + \mu_{azz} H_z. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Таким образом, в общем случае пары векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  не параллельны в пространстве.

Четвертое уравнение Максвелла  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  свидетельствует о том, что в природе не существует магнитных зарядов. Тем не менее иногда бывает удобно воспользоваться формальным представлением о *стороннем магнитном токе*, плотность которого  $\mathbf{J}_{\text{ст.м}}$  вводят в правую часть второго уравнения Максвелла.

Окончательно получаем:

уравнения Максвелла в дифференциальной форме

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \partial \mathbf{D} / \partial t + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{ст.э}}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\partial \mathbf{B} / \partial t - \mathbf{J}_{\text{ст.м}}, \\ \operatorname{div} \mathbf{D} &= \rho, \\ \operatorname{div} \mathbf{B} &= 0;\end{aligned}\tag{2.13}$$

уравнения Максвелла в интегральной форме

$$\begin{aligned}\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} &= \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{ст.э}} \right) d\mathbf{S}, \\ \oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} &= - \int_S \left( \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \mathbf{J}_{\text{ст.м}} \right) d\mathbf{S}, \\ \oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} &= \int_V \rho dV, \\ \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} &= 0.\end{aligned}\tag{2.14}$$

Часто приходится рассматривать электромагнитные поля, изменяющиеся во времени по гармоническому закону с частотой  $\omega$ . При этом уравнения Максвелла записывают относительно *комплексных амплитуд полей*:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &= j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}} + \mathbf{J}_{\text{ст.э}}, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega \tilde{\mu}_a \dot{\mathbf{H}} - \mathbf{J}_{\text{ст.м}}, \\ \operatorname{div} \dot{\mathbf{D}} &= \dot{\rho}, \\ \operatorname{div} \dot{\mathbf{B}} &= 0.\end{aligned}\tag{2.15}$$

В эти уравнения входят комплексные диэлектрическая  $\tilde{\epsilon}_a$  и магнитная  $\tilde{\mu}_a$  проницаемости:

$$\tilde{\epsilon}_a = \epsilon'_a - j\epsilon''_a, \quad \tilde{\mu}_a = \mu'_a - j\mu''_a.$$

Наличие мнимых частей проницаемости указывает на необратимое превращение части энергии электромагнитного поля в энергию теплового движения. Выделение тепла может происходить как за счет токов проводимости, так и за счет внутреннего трения, сопровождающего процессы поляризации и перемагничивания. Если потери в среде связаны только с наличием токов проводимости, то

$$\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a - j\sigma/\omega, \quad \tilde{\mu}_a = \mu_a.$$

В технике различные вещества принято характеризовать с помощью *тангенсов углов диэлектрических и магнитных потерь*:

$$\operatorname{tg} \delta_{\text{э}} = \epsilon''_{\text{э}} / \epsilon'_{\text{э}}, \quad \operatorname{tg} \delta_{\text{м}} = \mu''_{\text{м}} / \mu'_{\text{м}}. \quad (2.16)$$

На границе раздела двух материальных сред с различными электродинамическими параметрами векторы поля должны удовлетворять определенным граничным условиям. Каждый из векторов (например,  $\mathbf{E}$ ) в точке границы принято разлагать на нормальную и тангенциальную (касательную) составляющие:

$$\mathbf{E} = E_n \mathbf{1}_n + E_{\tau} \mathbf{1}_{\tau}$$

( $\mathbf{1}_n$  и  $\mathbf{1}_{\tau}$  — орты нормального и тангенциального направлений соответственно).

Нормальные составляющие индукций и тангенциальные составляющие напряженностей непрерывны в каждой точке границы раздела:

$$\begin{aligned} D_{1n} &= D_{2n}, \quad E_{1\tau} = E_{2\tau}; \\ B_{1n} &= B_{2n}, \quad H_{1\tau} = H_{2\tau}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Если одной из сред является идеально проводящий металл, для которого  $\sigma \rightarrow \infty$ , то на его поверхности тангенциальная составляющая электрического вектора отсутствует:

$$E_{\tau} = 0. \quad (2.18)$$

На поверхности металла имеется электрический ток с *поверхностной плотностью*

$$\eta = [\mathbf{1}_n \mathbf{H}]. \quad (2.19)$$

Электромагнитное поле является носителем энергии. Объемная плотность энергии в любой точке пространства

$$w = \frac{1}{2} (\mathbf{E} \mathbf{D} + \mathbf{H} \mathbf{B}). \quad (2.20)$$

Закон сохранения энергии находит свое отражение в *теореме Пойнтинга*:

$$-\operatorname{div} [\mathbf{E} \mathbf{H}] = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{E} \mathbf{D} + \mathbf{H} \mathbf{B}) \right] + \sigma E^2 + \mathbf{J}_{\text{ст.э}} \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{ст.м}} \mathbf{H}. \quad (2.21)$$

Вектор Пойнтинга

$$\dot{\Pi} = [\mathbf{E} \mathbf{H}] \quad (2.22)$$

характеризует плотность потока мощности излучения.

Для полей, изменяющихся во времени по гармоническому закону, принято вводить комплексный вектор Пойнтинга

$$\dot{\Pi} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}^* \mathbf{H}]. \quad (2.23)$$

Действительная часть этого вектора

$$\dot{\Pi}_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\mathbf{E}^* \mathbf{H}] \quad (2.24)$$

равна среднему за период потоку мощности излучения.

Из уравнений Максвелла вытекает ряд дополнительных соотношений, которым должны удовлетворять электромагнитные поля. Так, если система сторонних источников  $\mathbf{J}_{\text{ст } 1\alpha}$  возбуждает в пространстве электромагнитный процесс  $\dot{\mathbf{E}}_1, \dot{\mathbf{H}}_1$ , в то время как системе  $\mathbf{J}_{\text{ст } 2\alpha}$  отвечают поля  $\dot{\mathbf{E}}_2, \dot{\mathbf{H}}_2$ , то справедливо равенство

$$\operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_1 \dot{\mathbf{H}}_2] - \operatorname{div} [\dot{\mathbf{E}}_2 \dot{\mathbf{H}}_1] = \dot{\mathbf{E}}_2 \mathbf{J}_{\text{ст } 1\alpha} - \dot{\mathbf{E}}_1 \mathbf{J}_{\text{ст } 2\alpha}, \quad (2.25)$$

называемое *леммой Лоренца*.

## § 2.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

**2.1.** В вакууме существует электромагнитное поле, гармонически изменяющееся во времени. В некоторой точке пространства вектор  $\mathbf{E} = 130 \cos 2\pi \cdot 10^{10} t \cdot \mathbf{1}_x$ .

Определить плотность тока смещения в данной точке.

**Решение.** По определению ток смещения

$$\mathbf{J}_{\text{см}} = \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -0,556 \sin 2\pi \cdot 10^{10} t \cdot \mathbf{1}_x.$$

Следует обратить внимание на то, что в пространстве ток смещения и напряженность электрического поля параллельны, однако ток опережает по фазе напряженность поля на  $90^\circ$ .

**2.2.** Показать, что из уравнений Максвелла для вакуума следуют известные *волновые уравнения*

$$\begin{aligned} \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} &= 0, \\ \nabla^2 \mathbf{H} - \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (2.26)$$

**Решение.** Выпишем систему из двух первых уравнений Максвелла, справедливых для вакуума в отсутствие сторонних источников:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \end{aligned} \quad (2.27)$$

и применим операцию  $\operatorname{rot}$  ко второму уравнению системы (2.27):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{E} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \mathbf{H}).$$

Предполагая, что в интересующей нас области пространства нет зарядов ( $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ ) и воспользовавшись первым уравнением (2.27), получим волновое уравнение (2.26) для вектора электрического поля. Уравнение относительно вектора магнитного поля находят аналогично.

**2.3.** Материальная среда характеризуется абсолютными проницаемостями  $\tilde{\epsilon}_a = \tilde{\epsilon}_a(x, y, z)$ ,  $\mu_a = \mu_0$ .

Вывести дифференциальное уравнение второго порядка, которому должно удовлетворять векторное поле  $\mathbf{H}$  в данной неоднородной среде, если электромагнитный процесс гармонически изменяется во времени с частотой  $\omega$ .

**Решение.** Рассмотрим два первых уравнения Максвелла относительно комплексных амплитуд:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} &= j\omega \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}, \\ \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} &= -j\omega \mu_0 \dot{\mathbf{H}} \end{aligned} \quad (2.28)$$

и применим операцию  $\operatorname{rot}$  к первому уравнению (2.28):

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} \equiv \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\mathbf{H}} - \nabla^2 \dot{\mathbf{H}} = j\omega \operatorname{rot} (\tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}).$$

Магнитная проницаемость среды неизменна в пространстве, поэтому  $\operatorname{div} \dot{\mathbf{H}} = 0$ . Кроме того,

$$\operatorname{rot} (\tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}) = [\operatorname{grad} \tilde{\epsilon}_a \dot{\mathbf{E}}] + \tilde{\epsilon}_a \operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}}.$$

Вектор  $\dot{\mathbf{E}}$  можно выразить через вектор  $\dot{\mathbf{H}}$  из первого уравнения (2.28):

$$\dot{\mathbf{E}} = \frac{-j}{\omega \tilde{\epsilon}_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}}.$$

Отсюда получаем окончательный вид искомого уравнения

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + \omega^2 \tilde{\epsilon}_a \mu_0 \dot{\mathbf{H}} + \left[ \frac{\operatorname{grad} \tilde{\epsilon}_a}{\tilde{\epsilon}_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} \right] = 0.$$

**2.4.** Показать, что уравнение непрерывности тока вытекает из первого и третьего уравнений Максвелла (2.1).

**Решение.** Здесь следует принять во внимание известное тождество векторного анализа и записать

$$\operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{H} = \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} \operatorname{div} \mathbf{E} + \operatorname{div} \mathbf{J}_s = 0,$$

а затем воспользоваться третьим уравнением Максвелла (2.1). Таким образом, приходим к уравнению непрерывности

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{J}_s = 0.$$

**2.5.** Нестационарные задачи теории электромагнитного поля удобно решать операторным методом подобно тому, как это делается при изучении переходных процессов в линейных электрических цепях. Вводя изображения векторов поля:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(\mathbf{r}, p) &= \int_0^{\infty} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) e^{-pt} dt, \\ \mathcal{H}(\mathbf{r}, p) &= \int_0^{\infty} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) e^{-pt} dt, \end{aligned}$$



найти операторную форму уравнений Максвелла для вакуума в отсутствие сторонних источников.

**Решение.** Преобразуем по Лапласу обе части системы уравнений Максвелла (2.27). Векторные дифференциальные операции проводят по пространственным координатам, поэтому оператор  $\text{rot}$  может быть вынесен за знак интеграла. Если полю  $E$  соответствует изображение  $\mathcal{E}$ , то изображением производной  $\partial E/\partial t$  будет выражение  $p\mathcal{E} - E(r, 0)$ , которое учитывает начальное состояние поля при  $t = 0$ . Таким образом, получается система уравнений Максвелла относительно изображений:

$$\text{rot } \mathcal{H} = p\epsilon_0 \mathcal{E} - \epsilon_0 E(r, 0),$$

$$\text{rot } \mathcal{E} = -p\mu_0 \mathcal{H} + \mu_0 H(r, 0).$$

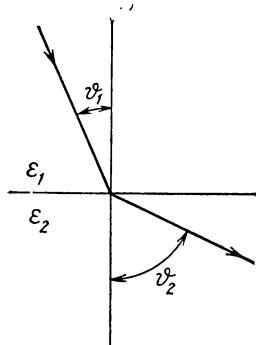


Рис. 2.1

**2.6.** Имеется плоская граница раздела двух сред, обладающих относительными диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  (рис. 2.1). Силовые линии электрического поля в первой среде образуют угол  $\vartheta_1$  с направлением нормали.

Найти ориентацию силовых линий поля во второй среде.

**Решение.** Воспользуемся граничными условиями

$$E_{1\tau} = E_{2\tau},$$

$$D_{1n} = D_{2n},$$

или

$$E_1 \sin \vartheta_1 = E_2 \sin \vartheta_2,$$

$$\epsilon_1 E_1 \cos \vartheta_1 = \epsilon_2 E_2 \cos \vartheta_2.$$

Деля эти уравнения друг на друга, получим

$$\frac{1}{\epsilon_1} \tan \vartheta_1 = \frac{1}{\epsilon_2} \tan \vartheta_2,$$

или

$$\tan \vartheta_1 / \tan \vartheta_2 = \epsilon_1 / \epsilon_2.$$

Отметим, что если  $\epsilon_2 \rightarrow \infty$ , то  $\vartheta_2 \rightarrow \pi/2$  независимо от ориентации поля в первой среде.

**2.7.** В некоторой точке пространства заданы комплексные амплитуды векторов поля:

$$\dot{E} = 35e^{j60^\circ} \mathbf{1}_x,$$

$$\dot{H} = j4 \cdot 10^{-3} \mathbf{1}_y.$$

Найти мгновенные значения векторов поля, а также среднее значение вектора Пойнтинга.

**Р е ш е н и е.** Мгновенные значения связаны с комплексными амплитудами известными формулами

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}(\dot{\mathbf{E}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}),$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \operatorname{Re}(\dot{\mathbf{H}}(\mathbf{r}) e^{j\omega t}),$$

откуда

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 35 \cos(\omega t + 60^\circ) \mathbf{1}_x,$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = -4 \cdot 10^{-3} \sin \omega t \mathbf{1}_y.$$

Для полей, гармонически изменяющихся во времени,

$$\Pi_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}}\dot{\mathbf{H}}] = 6,062 \cdot 10^{-2} \text{ Вт/м}^2.$$

### § 2.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**2.8.** Показать, что векторное поле  $\mathbf{H}$ , изменяющееся в пространстве и во времени по закону

$$\mathbf{H} = 6x \cos \omega t \mathbf{1}_x + 2 \exp(-2y) \sin \omega t \mathbf{1}_z,$$

не может быть полем магнитного вектора, удовлетворяющим уравнениям Максвелла.

**2.9.** Показать, что из четвертого уравнения Максвелла в неоднородной среде, магнитная проницаемость которой есть функция пространственных координат, вытекает следующее уравнение для вектора напряженности магнитного поля:

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = -\frac{1}{\mu_a} (\mathbf{H} \operatorname{grad} \mu_a).$$

**2.10.** Некоторый электромагнитный процесс характеризуется тем, что все составляющие полей зависят лишь от координаты  $z$ .

Показать, что на основании уравнений Максвелла при этом будут отсутствовать продольные составляющие  $E_z$  и  $H_z$ .

**2.11.** Показать, что электромагнитное поле, гармонически изменяющееся от времени с частотой  $\omega$  в области пространства, свободной от источников, удовлетворяет однородным уравнениям Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{E}} + \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \dot{\mathbf{E}} = 0,$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{H}} + \omega^2 \varepsilon_a \mu_a \dot{\mathbf{H}} = 0.$$

**2.12.** Доказать, что четвертое уравнение Максвелла  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  можно рассматривать как следствие второго уравнения  $\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$  при некотором дополнительном условии. Каково это условие?

**2.13.** В материальной среде с параметрами  $\varepsilon = 3,5$  и  $\sigma = 7,2 \times 10^{-1} \text{ См/м}$  создано электрическое поле, имеющее частоту 600 МГц и амплитуду 15 В/м.

Определить амплитудное значение и фазовый угол вектора плотности полного тока, существующего в каждой точке данной среды.

*Ответ:*  $J_{\Sigma} = 10,94 \text{ А/м}^2$ ; ток опережает по фазе напряженность поля на угол  $0,16 \text{ рад}$ .

2.14. В толще однородного диэлектрика с известной относительной проницаемостью  $\epsilon$  первоначально было создано равномерное электрическое поле  $E$ , а затем прорезаны две узкие полости 1 и 2 (рис. 2.2), одна из которых ориентирована параллельно, а другая перпендикулярно полю. Полости заполнены воздухом.

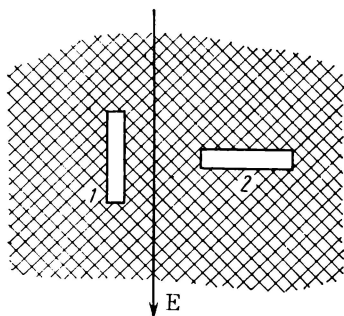


Рис. 2.2

Какова величина напряженности электрического поля в обеих полостях?

*Указание:* воспользоваться граничными условиями для векторов электрического поля.

*Ответ:* если полость параллельна внешнему полю, то  $E_{\text{внут}} = E_{\text{внеш}}$ ; в противном случае  $E_{\text{внут}} = \epsilon E_{\text{внеш}}$ .

2.15. Исходя из результата предыдущей задачи объяснить, почему твердый диэлектрик, содержащий воздушные включения (пузырьки, каналы), будучи помещен в сильное электрическое поле, имеет меньшую электрическую прочность по сравнению с однородным диэлектриком.

2.16. В круглом цилиндрическом проводнике диаметром 2 мм существует постоянный ток величиной 7,5 А. Провод выполнен из меди. Определить тангенциальную составляющую вектора напряженности электрического поля на поверхности провода.

*Ответ:*  $E_{\tau} = 0,042 \text{ В/м}$ .

2.17. Бесконечно тонкий диск радиусом  $r_0$ , равномерно заряженный с плотностью  $\sigma_q$ , вращается вокруг оси с угловой скоростью  $\Omega$ . Определить вектор плотности поверхностного тока.

*Ответ:*  $\eta = \pm \sigma_q \Omega r_0$ ; знак зависит от направления вращения.

2.18. Некоторый анизотропный диэлектрик имеет тензор относительной диэлектрической проницаемости, который в декартовой системе координат записывается таким образом:

$$(\epsilon_r) = \begin{pmatrix} 6,5 & 0 & 0 \\ 0 & 6,5 & 0 \\ 0 & 0 & 6,65 \end{pmatrix}.$$

В диэлектрике создано равномерное электрическое поле  $E = 2,51x + 1,71y + 9,21z$ .

Определить вектор электрической индукции  $D$ . Каков угол в пространстве между векторами  $E$  и  $D$ ?

*Ответ:*  $D = \epsilon_0 (16,251x + 11,051y + 61,181z)$ ,  $\angle (DE) = 6,59 \times 10^{-3} \text{ рад}$ .

2.19. В однородной проводящей среде с параметрами  $\epsilon$  и  $\sigma$  в момент времени  $t = 0$  создано начальное распределение плотности зарядов  $\rho_0(x, y, z)$ .

Показать, что за счет токов проводимости в среде происходит экспоненциальное уменьшение плотности объемного заряда:

$$\rho(x, y, z, t) = \rho_0 \exp[-\sigma t / (\epsilon \epsilon_0)].$$

Оценить  $\tau$  — характерное время релаксации этого процесса для типичного металла, у которого  $\sigma_1 = 10^7$  См/м, а также для полупроводника, имеющего  $\sigma_2 = 10^{-3}$  См/м.

Указание: воспользоваться уравнением непрерывности.

Ответ:  $\tau_1 \approx 10^{-18}$  с,  $\tau_2 \approx 10^{-8}$  с.

2.20. Грозовая туча, имеющая площадь  $5 \text{ км}^2$ , располагается на высоте 2 км от поверхности Земли. Между тучей и Землей образуется постоянное электрическое поле с одинаковой во всех точках напряженностью  $E = 2 \cdot 10^5$  В/м.

Оценить энергию поля.

Ответ:  $1,77 \cdot 10^9$  Дж.

2.21. По данным наблюдений, шаровая молния имеет диаметр порядка 20 см и содержит значительный запас энергии, зачастую превышающий энергию летящей винтовочной пули.

Может ли шаровая молния иметь только электрическую природу? Положить, что предельно допустимое значение напряженности электрического поля в воздухе  $E = 30$  кВ/см.

2.22. Сердечник трансформатора выполнен из стали с плотностью  $7,7 \text{ г/см}^3$  и имеет массу 2 кг. Амплитудное значение магнитной индукции 2,1 Тл, относительная магнитная проницаемость стали  $\mu = 200$ .

Найти максимальное значение энергии, запасаемой в сердечнике, при намагничивании его синусоидальным током.

Ответ: 2,279 Дж.

2.23.\* Конденсатор при  $t = 0$  начинает заряжаться от источника постоянной э. д. с. (рис. 2.3).

Дать качественное описание процесса передачи энергии от источника в конденсатор. Как выглядят линии потока энергии в непосредственной близости от конденсатора?

2.24. Вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  в декартовой системе координат имеет единственную составляющую  $E_x$ , отличную от нуля.

Показать, что при этом вектор Пойнтинга не может иметь составляющей вдоль оси  $x$ .

2.25. В некоторой точке пространства вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E} = 201_y$  В/м, в то время как вектор Пойнтинга  $\mathbf{\Pi} = 10 \mathbf{i}_x + 30 \mathbf{i}_z$  Вт/м<sup>2</sup>.

Определить вектор напряженности магнитного поля.

Ответ:  $\mathbf{H} = -1,51_x + 0,51_z$  А/м.

2.26. В фиксированной точке пространства известны мгновенные значения векторов поля

$$\mathbf{E} = E_0 \cos(\omega t + \varphi).$$

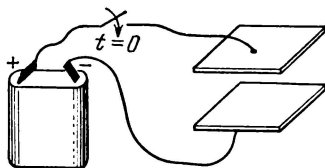


Рис. 2.3

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 \cos (\omega t + \varphi_2),$$

где  $\mathbf{E}_0$  и  $\mathbf{H}_0$  — постоянные векторы.

Показать, что мгновенное значение вектора Пойнтинга складывается из неизменного во времени среднего значения

$$\Pi_{\text{ср}} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_0 \mathbf{H}_0] \cos (\varphi_1 - \varphi_2)$$

и колеблющейся части

$$\Pi_{\text{кол}} = \frac{1}{2} [\mathbf{E}_0 \mathbf{H}_0] \cos (2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2),$$

изменяющейся во времени с удвоенной частотой.

**2.27.** В диэлектрике с проницаемостью  $\epsilon = 2,4$  создано постоянное электрическое поле напряженностью  $E = 200$  кВ/м.

Определить электрический дипольный момент области диэлектрика объемом  $6 \text{ см}^3$ .

*Ответ:*  $1,485 \cdot 10^{-11}$  Кл·м.

**2.28\*.** При феноменологическом описании частотных свойств полярных диэлектриков используют математическую модель, которая уподобляет молекулярные диполи воображаемым твердым частицам, испытывающим при своем движении вязкое сопротивление окружающей среды. При этом связь между вектором поляризованности  $\mathbf{P}$  и вектором напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  устанавливается дифференциальным уравнением

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} + \frac{1}{T} \mathbf{P} = a\mathbf{E},$$

где  $a$  — константа;  $T$  — время релаксации среды.

Вывести зависимость комплексной абсолютной диэлектрической проницаемости от частоты.

$$\text{Ответ: } \tilde{\epsilon}_a = \epsilon_0 + \frac{aT}{1 + j\omega T}.$$

**2.29.** Используя условия предыдущей задачи, вывести формулу, определяющую тангенс угла диэлектрических потерь.

$$\text{Ответ: } \text{tg } \delta_a = \frac{a\omega T^2}{\epsilon_0 + T(a + \omega^2 \epsilon_0 T)},$$

**2.30\*.** Решить задачу 2.28 для случая, когда динамика процесса поляризации описывается уравнением

$$\frac{d^2 \mathbf{P}}{dt^2} + \frac{2}{T} \frac{d\mathbf{P}}{dt} + \omega_0^2 \mathbf{P} = b\mathbf{E},$$

где  $\omega_0$  — собственная частота молекулярного диполя;  $b$  — константа. Такое уравнение возникает, если в качестве модели диполя принять осциллятор с трением.

Проанализировать графики частотных зависимостей действительной и мнимой частей диэлектрической проницаемости.

$$\text{Ответ: } \varepsilon_a = \varepsilon_0 + \frac{bT}{(\omega_0^2 - \omega^2)T + j2\omega},$$

2.31. Комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля

$$\dot{\mathbf{E}} = 28e^{j0,16} \mathbf{1}_x - 105e^{-j1,2} \mathbf{1}_y + 36e^{j2,3} \mathbf{1}_z$$

(углы даны в радианах). Частота колебаний 2 МГц.

Найти мгновенное значение вектора  $\mathbf{E}$  в момент времени, равный 0,1 мкс.

$$\text{Ответ: } \mathbf{E} = 4,31 \mathbf{1}_x - 104,81 \mathbf{1}_y - 32,9 \mathbf{1}_z.$$

2.32. Комплексные амплитуды векторов электромагнитного поля в некоторой точке пространства задаются выражениями

$$\dot{\mathbf{E}} = 0,85e^{j0,6} \mathbf{1}_x - 1,3e^{-j0,7} \mathbf{1}_y, \quad \dot{\mathbf{H}} = 4,2 \cdot 10^{-3} e^{-j1,2} \mathbf{1}_z.$$

Определить комплексный вектор Пойнтинга и его среднее значение.

$$\text{Ответ: } \dot{\mathbf{\Pi}} = -2,73 \cdot 10^{-3} e^{j0,5} \mathbf{1}_x - 1,785 \cdot 10^{-3} e^{j1,8} \mathbf{1}_y, \quad \Pi_{cp} = \\ = -2,396 \cdot 10^{-3} \mathbf{1}_x + 0,406 \cdot 10^{-3} \mathbf{1}_y.$$

## Глава третья

### СТАТИЧЕСКИЕ И СТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

#### § 3.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Важный в прикладном отношении класс задач электродинамики характеризуется тем, что внешними источниками, порождающими электромагнитные поля, служат неподвижные в пространстве и неизменные во времени электрические заряды или жестко закрепленные в пространстве проводники, по которым протекают постоянные токи. Для математического описания этого частного вида электромагнитных полей в исходной системе уравнений Максвелла (2.1) следует приравнять нулю все члены, содержащие производные по времени. В результате получаются следующие системы дифференциальных уравнений:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = 0, \tag{3.1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho,$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J}_a, \tag{3.2}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Электрическое поле, удовлетворяющее уравнениям (3.1), называют *электростатическим*.

Поля, возникающие под действием системы постоянных во времени токов, принято называть *стационарными*. Примером стационарного поля может служить магнитное поле, удовлетворяющее системе уравнений (3.2) и называемое *магнитостатическим*.

Стационарным является также электрическое поле, существующее внутри проводящей среды при протекании постоянного электрического тока с объемной плотностью  $\mathbf{J}_a$ ; при этом справедлив закон Ома в дифференциальной форме

$$\mathbf{J}_a = \sigma \mathbf{E}. \quad (3.3)$$

Безвихревой характер электростатического поля, вытекающий из первого уравнения системы (3.1), позволяет описать это векторное поле с помощью поля *скалярного электрического потенциала*  $\varphi_a$ , определив связь между величинами  $\mathbf{E}$  и  $\varphi_a$  соотношением

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \varphi_a \quad (3.4)$$

(по традиции условно полагают, что силовые линии электрического вектора начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных). Важное свойство электростатического поля состоит в том, что разность потенциалов между двумя произвольными точками

$$\varphi_{a1} - \varphi_{a2} = \int_1^2 \mathbf{E} d\mathbf{l} \quad (3.5)$$

не зависит от выбора кривой, соединяющей точки 1 и 2, вдоль которой производится интегрирование.

Совместное рассмотрение второго уравнения системы (3.1) и выражения (3.4) приводит к уравнению Пуассона

$$\nabla^2 \varphi_a = -\rho/\epsilon_a, \quad (3.6)$$

которое является наиболее общим уравнением электростатики для однородной среды, содержащей объемные электрические заряды. Если в некоторой области пространства эти заряды отсутствуют, то скалярный электрический потенциал подчиняется уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi_a = 0. \quad (3.7)$$

Уравнения Пуассона и Лапласа должны быть дополнены граничными условиями, обеспечивающими единственное решение:

а) на поверхности идеальных проводников потенциал должен сохранять постоянное значение;

б) при переходе через границу раздела двух диэлектриков потенциал должен быть непрерывным;

в) если на границе раздела двух сред имеется поверхностный электрический заряд с плотностью  $\sigma_q$ , то нормальная производная потенциала претерпевает скачок:

$$\epsilon_{a1} \frac{\partial \varphi_{a1}}{\partial n} - \epsilon_{a2} \frac{\partial \varphi_{a2}}{\partial n} = \sigma_q \quad (3.8)$$

(символы 1 и 2 означают, что потенциалы относятся к первой и второй средам).

В задачах электростатики имеет место *принцип суперпозиции*, вытекающий из линейного характера соответствующих дифференциальных уравнений: если заряды  $Q_1$  и  $Q_2$ , распределенные в пространстве дискретно либо непрерывно, создают в некоторой точке пространства потенциалы  $\varphi_{a1}$  и  $\varphi_{a2}$ , то суммарному заряду  $Q = Q_1 + Q_2$  отвечает суммарный потенциал  $\varphi_a = \varphi_{a1} + \varphi_{a2}$ . Электростатическое поле не изменится, если к потенциалу добавить произвольную постоянную.

Точечный заряд  $q$  в вакууме характеризуется сферически симметричным распределением потенциала:

$$\varphi_a(r) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r}, \quad (3.9)$$

Если внутри ограниченной области  $V$  распределены электрические заряды с объемной плотностью  $\rho$ , то на основании принципа суперпозиции решение уравнение Пуассона запишется в виде

$$\varphi_a = \frac{1}{4\pi\epsilon_a} \int \frac{\rho dV}{R}, \quad (3.10)$$

Здесь  $R$  — длина отрезка между точками наблюдения и интегрирования.

Важным понятием электростатики является *емкость* системы двух проводников

$$C = Q/U, \quad (3.11)$$

где  $U = |\varphi_{a1} - \varphi_{a2}|$  — абсолютное значение разности потенциалов между проводниками.

Можно ввести также емкость уединенного проводника; при этом потенциал бесконечно удаленной точки пространства следует положить равным нулю.

На точечный заряд  $q$ , помещенный в электростатическое поле  $E$ , действует сила

$$F = qE. \quad (3.12)$$

В частности, силу взаимодействия двух точечных зарядов  $q_1$  и  $q_2$ , отстоящих друг от друга на расстоянии  $r_{12}$ , можно определить из закона Кулона

$$F = \frac{q_1 q_2}{4\pi\epsilon_a r_{12}}, \quad (3.13)$$

Объемная плотность энергии электростатического поля

$$w_a = \frac{ED}{2}, \quad (3.14)$$

Энергия, запасенная в объеме  $V$ ,

$$W_a = \frac{1}{2} \int ED dV. \quad (3.15)$$



Если при механической деформации системы заряженных проводников одна из ее составных частей перемещается вдоль произвольной пространственной координаты  $\xi$ , то при этом возникает сила с проекцией

$$F_{\xi} = - \frac{dW_a}{d\xi}. \quad (3.16)$$

### Методы решения задач электростатики и магнитостатики

Наиболее просты задачи, в которых напряженность электрического поля или скалярный потенциал отыскивают по известному распределению зарядов в пространстве. Если это распределение имеет плоскую, цилиндрическую или сферическую симметрию, то задачи электростатики решают элементарно на основании интегральной формулировки третьего уравнения Максвелла, называемой законом Гаусса:

$$\oint_S \mathbf{D} d\mathbf{S} = Q. \quad (3.17)$$

Здесь  $Q$  — полный заряд, находящийся в объеме, ограниченном замкнутой поверхностью  $S$ .

При симметричном распределении зарядов векторы  $\mathbf{E}$  (или  $\mathbf{D}$ ) неизменны по модулю во всех точках воображаемой поверхности, имеющей ту же симметрию, что и система зарядов, порождающая электростатическое поле. Поэтому в интегралах вида (3.17) подынтегральную функцию можно вынести за знак интеграла как коэффициент.

Большей общностью обладает метод, основанный на решении уравнений Пуассона и Лапласа относительно скалярного электрического потенциала. Здесь удастся довести до конца решение задач о полях, обусловленных системами зарядов, не обладающих пространственной симметрией.

Между электростатикой и магнитостатикой есть много общего, однако существуют и характерные различия. Если в некоторой области пространства электрические токи отсутствуют, то магнитное поле оказывается безвихревым ( $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ ) и может по аналогии с (3.4) выражаться через поле скалярного магнитного потенциала  $\varphi_m$ :

$$\mathbf{H} = - \text{grad } \varphi_m. \quad (3.18)$$

В однородной среде ( $\mu_a = \text{const}$ ) потенциал  $\varphi_m$  удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi_m = 0. \quad (3.19)$$

Специфической особенностью задач магнитостатики является неоднозначный характер решения по методу скалярного магнитного потенциала для многосвязанных областей, топологически сцепленных с контуром тока [5].

Другой подход к задачам магнитостатики связан с понятием *векторного электрического потенциала*  $\mathbf{A}_a$ , через который вектор магнитной индукции выражается таким образом:

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}_a. \quad (3.20)$$

При этом четвертое уравнение Максвелла  $\operatorname{div} \mathbf{B} = 0$  удовлетворяется автоматически. Часто удобно полагать, что

$$\operatorname{div} \mathbf{A}_a = 0. \quad (3.21)$$

При этом потенциал  $\mathbf{A}_a$  должен являться решением векторного уравнения Пуассона:

$$\nabla^2 \mathbf{A}_a = -\mu_a \mathbf{J}_a. \quad (3.22)$$

Если токи сосредоточены внутри некоторого ограниченного объема  $V$ , то по аналогии с (3.10) можно записать

$$\mathbf{A}_a = \frac{\mu_a}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}_a dV}{R}, \quad (3.23)$$

Если конкретная задача магнитостатики обладает цилиндрической симметрией, то напряженность магнитного поля оказывается постоянной на круговом контуре, центр которого лежит на оси симметрии. Примером может служить задача о магнитном поле бесконечного прямолинейного проводника, для которой решение получается элементарными средствами на основании закона полного тока

$$\oint_L \mathbf{H} d\mathbf{l} = I_\Sigma, \quad (3.24)$$

если известен полный ток  $I_\Sigma$ , охватываемый замкнутым контуром  $L$ .

Магнитным потоком  $\Phi$ , пронизывающим поверхность, называется интеграл

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} d\mathbf{S}. \quad (3.25)$$

Если некоторый проводящий контур (например, проволочный виток) сцеплен с магнитным потоком  $\Phi$ , который возникает под действием тока  $I$ , протекающего по этому же контуру, то коэффициент самоиндукции (индуктивность) системы

$$L = \Phi/I. \quad (3.26)$$

В случае, когда имеется катушка с  $N$  витками, в рассмотрение вводится *потокосцепление*

$$\Psi = N\Phi. \quad (3.27)$$

При этом индуктивность катушки

$$L = \Psi/I. \quad (3.28)$$

В электродинамике рассматривают также поля стационарных токов, возникающих в проводящей среде под действием внешних электрических полей. Здесь по известному вектору  $\mathbf{E}$  в каждой точке пространства находят вектор плотности тока проводимости  $\mathbf{J}_s$  [см. выражение (3.3)]. Интегрируя этот вектор по некоторой замкнутой поверхности  $S$  (выбор ее диктуется условиями конкретной задачи), можно

определить ток проводимости, втекающий или вытекающий из этой поверхности:

$$I_{np} = \oint_S \mathbf{J}_a \cdot d\mathbf{S}. \quad (3.29)$$

Если теперь определить напряжение на внешних зажимах пространственно распределенной системы по формуле (3.5), то на основании закона Ома можно вывести величину сопротивления системы.

### § 3.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

**3.1.** На отрезке прямой линии длиной  $2l$  равномерно распределен заряд с линейной плотностью  $\tau_q$  Кл/м.

Определить закон изменения скалярного электрического потенциала во всем пространстве.

**Решение.** Введем цилиндрическую систему координат так, чтобы ось  $z$  совпала с отрезком, на котором распределены заряды, а начало координат — с серединой отрезка. Каждый элемент длины на интервале  $(-l, +l)$  несет заряд  $dq = \tau_q dz$ . Если координата элемента длины  $z = \xi$ , то в точке наблюдения  $(r, z)$  потенциал поля от элементарного заряда

$$d\varphi_a = \frac{\tau_q dz}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{r^2 + (z - \xi)^2}},$$

Используя принцип суперпозиции, получаем суммарный потенциал в точке наблюдения

$$\varphi_a = \frac{\tau_q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-l}^l \frac{d\xi}{\sqrt{r^2 + (z - \xi)^2}},$$

По таблицам интегралов [9] находим окончательный ответ:

$$\varphi_a = \frac{\tau_q}{4\pi\epsilon_0} \ln \frac{A - 1 - \sqrt{B^2 + (A - 1)^2}}{A + 1 - \sqrt{B^2 + (A + 1)^2}},$$

Здесь введены безразмерные параметры  $A = z/l$ ,  $B = r/l$ .

**3.2.** Бесконечно тонкий кольцевой проводник радиусом  $a$  несет полный заряд  $q$ .

Определить скалярный потенциал и напряженность электрического поля в точках на оси кольца.

**Решение.** Введем цилиндрическую систему координат, ось  $z$  которой совпадает с осью системы. Расстояние между точкой оси, имеющей произвольное значение координаты  $z$ , и любой точкой кольца равно  $\sqrt{z^2 + a^2}$ . Элементарный отрезок кольца имеет заряд  $dq = (q/2\pi) d\varphi$ . Потенциал от элементарного отрезка в точке наблюдения

$$d\varphi_a = dq d\varphi / (8\pi^2 \epsilon_0 \sqrt{z^2 + a^2}).$$

Интегрируя по углу  $\varphi$ , находим полный потенциал электростатического поля на оси системы

$$\varphi_a = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 \sqrt{z^2 + a^2}}.$$

Найденное выражение зависит лишь от координаты  $z$ , поэтому на оси кольца присутствует единственная составляющая поля

$$E_z = -\frac{d\varphi_a}{dz} = \frac{qz}{4\pi\epsilon_0 (z^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Если ввести безразмерную координату  $\xi = z/a$ , то

$$E_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 a^2} \frac{\xi}{(\xi^2 + 1)^{3/2}}. \quad (3.30)$$

В некоторых точках оси напряженность электрического поля достигает экстремальных значений. Исследуя выражение (3.30) на экстремум, находим, что при  $\xi = 1/\sqrt{2}$  имеет место максимум, а при  $\xi = -1/\sqrt{2}$  — минимум напряженности. Соответствующий график, рассчитанный по формуле (3.30), представлен на рис. 3.1.

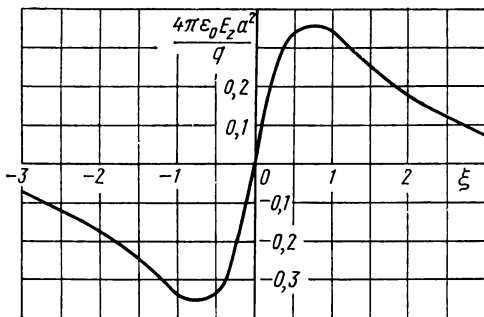


Рис. 3.1

3.3. Внутри сферической области радиусом  $a$  равномерно распределен электрический заряд с объемной плотностью  $\rho$ . Предполагая, что абсолютная диэлектрическая проницаемость внутренней и внешней областей одинакова и равна  $\epsilon_0$ , определить напряженность электрического поля в обеих областях.

Решение. Здесь проще всего воспользоваться законом Гаусса. Рассмотрим воображаемую сферическую поверхность радиусом  $r$ , концентрическую с заданной сферой. Заряд, заключенный внутри этой поверхности,

$$q = \int_V \rho dV = \begin{cases} (4/3) \pi \rho r^3 & (r < a), \\ (4/3) \pi \rho a^3 & (r \geq a). \end{cases}$$

Ввиду симметрии задачи вектор  $\mathbf{E}$  имеет единственную составляющую  $E_r$ , не зависящую от углов  $\vartheta$  и  $\varphi$ . На основании закона Гаусса можно записать

$$q/\epsilon_0 = \oint_S \mathbf{E} d\mathbf{S} = 4\pi r^2 E_r,$$

откуда

$$E_r = \begin{cases} \rho r / (3\epsilon_0) & (r < a), \\ \rho a^3 / (3\epsilon_0 r^2) & (r \geq a). \end{cases}$$

Для потенциала внутри заряженной сферы справедливо уравнение Пуассона

$$\nabla^2 \varphi_a = -\rho/\varepsilon_0. \quad (3.31)$$

В области  $r > a$ , где нет зарядов, потенциал должен удовлетворять уравнению Лапласа

$$\nabla^2 \varphi_a = 0, \quad (3.32)$$

причем естественно считать, что  $\varphi_a(\infty) = 0$ .

Записывая оператор Лапласа в сферической системе координат и учитывая, что в обеих областях потенциал зависит только от радиальной координаты  $r$ , представим уравнения (3.31) и (3.32) таким образом:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi_a}{dr} \right) &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad (0 \leq r < a), \\ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left( r^2 \frac{d\varphi_a}{dr} \right) &= 0 \quad (r \geq a). \end{aligned}$$

Общие интегралы двух последних уравнений таковы:

$$\begin{aligned} \varphi_a &= -\frac{\rho r^2}{6\varepsilon_0} - \frac{C_1}{r} + C_2 \quad (0 \leq r < a), \\ \varphi_a &= -C_3/r + C_4 \quad (r \geq a), \end{aligned}$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  — произвольные постоянные.

Последующие этапы решения связаны с нахождением этих постоянных:

- 1) так как  $\varphi_a(\infty) = 0$ , то  $C_4 = 0$ ;
- 2) физически очевидно, что потенциал в центре заряженной сферы должен быть конечным, поэтому  $C_1 = 0$ ;
- 3) на границе раздела при  $r = a$  потенциал и его производная по радиусу непрерывны.

Из этих условий получаем

$$C_2 = \frac{\rho a^2}{2\varepsilon_0}, \quad C_3 = -\frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0}.$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \varphi_a &= \begin{cases} -\frac{\rho(r^2 - 3a^2)}{6\varepsilon_0} & (0 \leq r < a), \\ \frac{\rho a^3}{3\varepsilon_0 r} & (r \geq a), \end{cases} \\ E_r &= -(\text{grad } \varphi_a)_r = \begin{cases} \rho r / (3\varepsilon_0) & (0 \leq r < a), \\ \rho a^3 / (3\varepsilon_0 r^2) & (r \geq a), \end{cases} \end{aligned}$$

что совпадает с формулой, выведенной из интегральных уравнений поля.

3.4. Бесконечно протяженная полая призма, образованная металлическими стенками, ориентирована вдоль оси  $z$  (рис. 3.2). Три стен-

ки заземлены и находятся под нулевым потенциалом. Оставшаяся стенка имеет потенциал  $U_0$ .

Найти функцию, описывающую распределение потенциала внутри призмы.

**Решение.** Задача сводится к интегрированию уравнения Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial y^2} = 0 \quad (3.33)$$

внутри прямоугольной области с граничными условиями

$$\varphi_0|_{x=a} = \varphi_0|_{x=0} = \varphi_0|_{y=0} = 0, \quad \varphi_0|_{y=b} = U_0. \quad (3.34)$$

Будем искать решение в виде произведения двух функций (метод разделения переменных):

$$\varphi_0(x, y) = X(x) Y(y). \quad (3.35)$$

Подстановка (3.35) в (3.33) дает

$$X''/X + Y''/Y = 0,$$

или

$$X''/X = -k^2, \quad Y''/Y = k^2, \quad (3.36)$$

где  $k$  — константа разделения.

Решения уравнений (3.36) имеют вид

$$\begin{aligned} X(x) &= A_1 \cos kx + A_2 \sin kx, \\ Y(y) &= A_3 \operatorname{ch} ky + A_4 \operatorname{sh} ky. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Из граничных условий при  $x = 0$  и  $y = 0$  следует, что  $A_1 = A_3 = 0$ . Граничные условия при  $x = a$  требуют выполнения равенства  $\sin ka = 0$ , т. е.

$$k = n\pi/a, \quad n = 1, 2, \dots \quad (3.38)$$

В результате искомое решение запишется в виде

$$\varphi_0(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi y}{a}\right),$$

причем систему коэффициентов  $\{C_n\}$  следует выбрать таким образом, чтобы удовлетворить оставшемуся граничному условию

$$\varphi_0(x, b) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi b}{a}\right) = U_0.$$

Умножим обе части этого равенства на функцию  $\sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$  с произвольным целым  $m$  и проинтегрируем их по  $x$  в пределах от 0 до  $a$ .

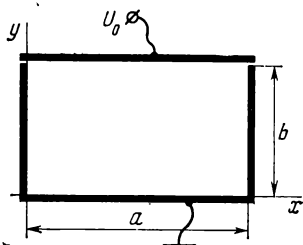


Рис. 3.2

При этом воспользуемся свойством ортогональности системы тригонометрических функций:

$$\int_0^a \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) dx = \begin{cases} a/2, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases}$$

Кроме того,

$$\int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx = \begin{cases} \frac{2a}{m\pi}, & \text{если } m \text{ — нечетное,} \\ 0, & \text{если } m \text{ — четное.} \end{cases}$$

Поэтому коэффициенты разложения потенциала

$$C_m = \begin{cases} \frac{4U_0}{m\pi \operatorname{sh}\left(\frac{m\pi b}{a}\right)}, & \text{если } m \text{ — нечетное,} \\ 0, & \text{если } m \text{ — четное.} \end{cases}$$

Окончательная формула для потенциала имеет вид

$$\varphi_a(x, y) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{(2k+1)\pi x}{a}\right) \operatorname{sh}\left(\frac{(2k+1)\pi y}{a}\right)}{(2k+1) \operatorname{sh}\left(\frac{(2k+1)\pi b}{a}\right)}. \quad (3.39)$$

Картина эквипотенциальных линий поля, построенная в соответствии с формулой (3.39), изображена на рис. 3.3. Следует обратить внимание на неравномерный характер распределения поля внутри рассмотренной области.

**3.5. Постоянный ток**  $I$  существует в бесконечно тонком прямолинейном проводнике, неограниченно простирающемся вдоль оси  $z$ .

Найти электрический векторный потенциал и напряженность магнитного поля во всем пространстве.

**Решение.** Введем цилиндрическую систему координат так, чтобы ее ось  $z$  совпала с направлением тока в проводнике. Вектор плотности электрического тока в данной системе

$$\mathbf{J}_a = \frac{I}{\pi r} \delta(r) \mathbf{1}_z. \quad (3.40)$$

При этом ток, пронизывающий фиксированную плоскость  $z = \text{const}$ , окажется равным заданному току  $I$ :

$$\int \mathbf{J}_a d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} r J_{az} dr = I$$

(особенность подынтегральной функции сосредоточена на конце области интегрирования при  $r = 0$ , что обуславливает уменьшение величины интеграла в два раза).

Векторный потенциал тока можно найти подстановкой (3.40) в формулу (3.23). Пусть  $\rho$  — радиальная координата точки наблюдения. Тогда

$$A_{\varphi}(\rho) = \frac{\mu_0 I_z}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_{-\infty}^{\infty} d\zeta \int_0^{\infty} \frac{I \delta(r) dr}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}} = \frac{\mu_0 I_z}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}}, \quad (3.41)$$

Соответствующий неопределенный интеграл имеет логарифмический характер:

$$\int \frac{d\zeta}{\sqrt{\rho^2 + \zeta^2}} = \ln(\zeta + \sqrt{\rho^2 + \zeta^2}) + C,$$

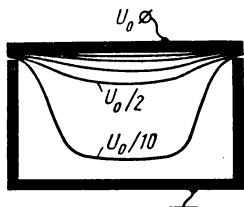


Рис. 3.3

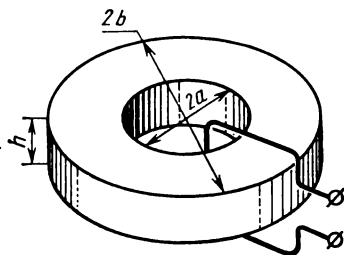


Рис. 3.4

поэтому векторный потенциал, отвечающий случаю бесконечно длинного проводника, не имеет конечного численного значения ни при каком  $\rho$ . Это связано с неограниченной протяженностью области интегрирования. Однако магнитное поле, находимое из векторного потенциала путем дифференцирования, оказывается конечным:

$$H_{\varphi} = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_{\varphi z}}{\partial \rho} = \frac{I \rho}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\zeta}{\sqrt{(\rho^2 + \zeta^2)^3}}.$$

Воспользовавшись значением табличного интеграла, получаем

$$H_{\varphi}(\rho) = I/(2\pi r),$$

чего и следовало ожидать в соответствии с законом полного тока.

3.6. Индуктивная катушка представляет собой одиночный виток, размещенный на кольцевом сердечнике из ферромагнитного материала ( $\mu \gg 1$ ). Размеры системы указаны на рис. 3.4.

Вывести формулу для расчета индуктивности.

Решение. Поскольку магнитная проницаемость сердечника велика, потоком рассеяния можно пренебречь. Магнитное поле в сердечнике, имеющее вид замкнутых кольцевых линий, находят из закона полного тока

$$H_{\varphi} = I/(2\pi r),$$

где  $r$  — радиус воображаемой окружности, проведенной внутри сердечника.



Магнитный поток, пронизывающий сердечник,

$$\Phi = \int \mathbf{B} d\mathbf{S} = \frac{\mu\mu_0 I h}{2\pi} \int_a^b \frac{dr}{r} = \frac{\mu\mu_0 I h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

Так как виток одиночный, то потокоцепление  $\Psi$  численно равно магнитному потоку  $\Phi$ . Отсюда

$$L = \frac{\Phi}{I} = \frac{\mu\mu_0 h}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

3.7. Пространство между двумя металлическими сферами радиусами  $a$  и  $b$  (рис. 3.5) заполнено однородным проводящим веществом с удельной электрической проводимостью  $\sigma$ .

Определить сопротивление между зажимами 1 и 2.

Решение. Ввиду сферической симметрии системы вектор  $\mathbf{E}$  имеет единственную составляющую  $E_r$ . По определению

$$R = U_{12}/I,$$

где

$$U_{12} = \int_a^b E_r dr, \quad I = \oint_s \mathbf{J}_s d\mathbf{S}.$$

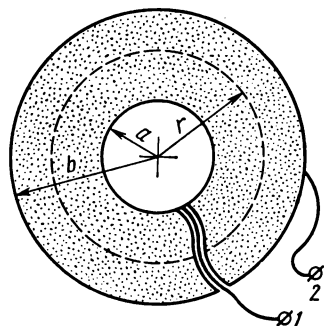


Рис. 3.5

Ток в цепи можно выразить через напряженность электрического поля:

$$I = \sigma \oint_s E_r dr,$$

причем на основании закона сохранения заряда ток не зависит от радиуса воображаемой сферы  $r$ . В координатной записи

$$I = \sigma \int_0^\pi d\vartheta \int_0^{2\pi} d\varphi E_r r^2 \sin \vartheta.$$

Для того чтобы ток не зависел от величины  $r$ , необходимо выполнение равенства

$$E_r = A/r^2,$$

где  $A$  — коэффициент, определяемый условием

$$U_{12} = A \int_a^b \frac{dr}{r^2} = A \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Отсюда

$$E_r = \frac{U_{12}}{r^2 (1/a - 1/b)}.$$

Вычислив ток в системе

$$I = \frac{4\pi\sigma U_{12}}{1/a - 1/b},$$

получаем окончательный ответ:

$$R = \frac{1/a - 1/b}{4\pi\sigma}.$$

### § 3.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

3.8. На одной прямой (рис. 3.6) в вакууме ( $\epsilon_a = \epsilon_0$ ) расположены три точечных заряда:  $q_1 = 1$  мкКл,  $q_2 = 23$  мкКл и  $q_3 = 5$  мкКл. Определить напряженность электрического поля в точке  $O$ .

Ответ:  $55,8 \cdot 10^3$  В/м.

3.9. Заряженный металлический шар радиусом 5 см находится в воздухе. Известно, что электрический пробой в воздухе наступает при напряженности поля 30 кВ/см.

Определить предельно допустимый заряд шара, обеспечивающий отсутствие пробоя.

Ответ:  $8,3 \cdot 10^{-7}$  Кл.

3.10. Бесконечно длинный цилиндр радиусом 5 см равномерно заряжен с поверхностной плотностью  $10^{-5}$  Кл/м<sup>2</sup>. Пространство, окружающее цилиндр, заполнено воздухом.

Определить напряженность поля, создаваемого цилиндром на расстоянии 10 м от его оси. Задачу решить с помощью уравнений Максвелла в интегральной форме.

Ответ: 5,65 кВ/м.

3.11. Имеются два бесконечно длинных коаксиальных цилиндра с радиусами  $a = 2$  см и  $b = 5$  см, выполненные из металла. Пространство между цилиндрами заполнено воздухом. Потенциал внутреннего цилиндра составляет 5 В, потенциал наружного цилиндра равен нулю.

Определить напряженность электрического поля на окружности  $r = 4$  см.

Ответ: 136 В/м.

3.12. Проводятся испытания на электрический пробой коаксиальной линии передачи, образованной двумя цилиндрами с радиусами  $a$  и  $b$  ( $a < b$ ). Было обнаружено, что пробой в системе наступает при разности потенциалов между цилиндрами, равной  $U_0$ . Затем радиус внутреннего цилиндра был сокращен вдвое.

Определить, при какой разности потенциалов наступит пробой в новой системе.

$$\text{Ответ: } U = U_0 \left[ \frac{\ln 2}{\ln(b/a)} + 1 \right].$$

3.13. Обсудить результат предыдущей задачи. Дать физическое толкование тому факту, что при  $b/a > 2$  сокращение радиуса внут-

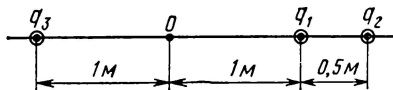


Рис. 3.6

ренного цилиндра приводит к увеличению, а при  $b/a < 2$  — к уменьшению электрической прочности коаксиальной системы.

**3.14.** Бесконечная металлическая плоскость заряжена с поверхностной плотностью  $4 \cdot 10^{-12}$  Кл/м<sup>2</sup>.

Найти величины полей  $D$  и  $E$  во всем пространстве, предполагая, что абсолютная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_a = \epsilon_0$ .

*Ответ:*  $D = \pm 2 \cdot 10^{-12}$  Кл/м<sup>2</sup>,  $E = \pm 0,226$  В/м (знак зависит от того, в каком из полупространств находится точка наблюдения).

**3.15.** Плоский конденсатор имеет слоистый диэлектрик (рис. 3.7). Считая заданными относительные диэлектрические проницаемости слоев  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , соответствующие им толщины  $h_1$  и  $h_2$ , а также площадь пластин  $S$ , вывести формулу для расчета емкости конденсатора, пренебрегая эффектами искажения поля вблизи края пластин.

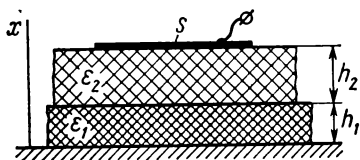


Рис. 3.7

$$\text{Ответ: } C = \frac{\epsilon_0 \epsilon_1 \epsilon_2 S}{\epsilon_2 h_1 + \epsilon_1 h_2},$$

**3.16.** Решить предыдущую задачу, предполагая, что изменение относительной диэлектрической проницаемости вдоль координаты  $x$ , нормальной по отношению к пластинам, задается формулой  $\epsilon(x) = 1 + f(x)$ ,

где  $f(x)$  — произвольная функция.

$$\text{Ответ: } C = \frac{\epsilon_0 S}{\int_h \frac{dx}{1 + f(x)}}, \text{ где } h \text{ — расстояние между пластинами.}$$

**3.17.** Найти распределение потенциала вдоль координаты  $x$  в двухслойной структуре, изображенной на рис. 3.7.

*Ответ:*

$$\varphi_a(x) = \begin{cases} \frac{U_0 \epsilon_2 x}{\epsilon_2 h_1 + \epsilon_1 h_2} & (0 \leq x < h_1), \\ \frac{U_0 \epsilon_1 x}{\epsilon_2 h_1 + \epsilon_1 h_2} + \frac{U_0 (\epsilon_2 - \epsilon_1) h_1}{\epsilon_2 h_1 + \epsilon_1 h_2} & (h_1 \leq x < h_1 + h_2), \end{cases}$$

где  $U_0$  — разность потенциалов между обкладками.

**3.18.** В сферическом конденсаторе с внутренним радиусом  $a$  и наружным радиусом  $b$  наружная обкладка заземлена, в то время как внутренняя находится под потенциалом  $U_0$  относительно земли.

Определить закон изменения потенциала внутри конденсатора, заряд, накопленный в конденсаторе, и емкость системы. Предположить, что между сферами вакуум или воздух ( $\epsilon_a = \epsilon_0$ ).

$$\text{Ответ: } \varphi_a = \frac{U_0 a (b-r)}{r (b-a)}, \quad Q = \frac{4\pi \epsilon_0 a b U_0}{b-a}, \quad C = \frac{4\pi \epsilon_0 a b}{b-a}.$$

3.19. В цилиндрической системе координат найти общее решение уравнения Лапласа  $\nabla^2 \varphi_0 = 0$ , зависящее только от радиальной координаты.

Ответ:  $\varphi_0 = A \ln r + B$ , где  $A, B$  — произвольные постоянные.

3.20. В сферической системе координат найти общее решение уравнения Лапласа, являющееся функцией только координаты  $r$ .

Ответ:  $\varphi_0 = A/r + B$ .

3.21. В цилиндрической системе координат найти общее решение уравнения Лапласа, зависящее только от двух координат  $r$  и  $\varphi$ .

Указание: решение искать в виде произведения двух функций:  $R(r) \Phi(\varphi)$ , каждая из которых зависит только от одной координаты. Использовать требование периодичности решения по угловой координате.

Ответ:  $\varphi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n r^n + B_n r^{-n}) \times$   
 $\times (C_n \cos n\varphi + D_n \sin k\varphi),$

где  $A_n, B_n, C_n, D_n$  — произвольные постоянные.

3.22. В цилиндрической системе координат найти общее решение уравнения Лапласа, зависящее только от двух координат  $r$  и  $z$ .

Указание: решение искать в виде произведения двух функций:  $\varphi_0 = R(r) Z(z)$ .

Ответ:  $\varphi_0 = \sum_{n=0}^{\infty} (A_n J_0(k_n r) + B_n N_0(k_n r)) (C_n \operatorname{ch} k_n z + D_n \operatorname{sh} k_n z),$

где  $k_n$  — произвольные числа;  $J_0$  и  $N_0$  — цилиндрические функции нулевого индекса, первого и второго рода соответственно (функции Бесселя и Неймана).

3.23. В каком виде следует искать решение уравнения Лапласа, описывающего потенциал электрического поля в системе из металлической плоскости  $y = 0$  и периодической последовательности заряженных полосок, бесконечно протяженных вдоль оси  $z$  (рис. 3.8)? Ширины полосок и их удаление от металлической плоскости произвольны.

Указание: решение искать в виде произведения двух функций:  $\varphi_0 = X(x) Y(y)$ . Свести уравнение Лапласа к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений по координатам  $x$  и  $y$ .

Ответ:  $\varphi_0(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \left( A_n \cos\left(\frac{n\pi x}{D}\right) + B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{D}\right) \right) \left( C_n \operatorname{ch}\left(\frac{n\pi y}{D}\right) + D_n \operatorname{sh}\left(\frac{n\pi y}{D}\right) \right),$

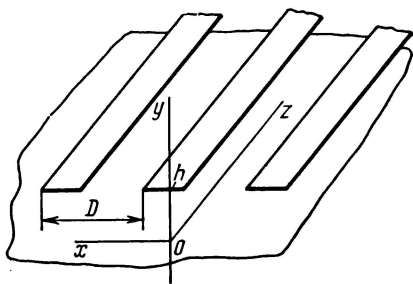


Рис. 3.8

где  $A_n, B_n, C_n, D_n$  — постоянные, определяемые из граничных условий для потенциала на металлических поверхностях.

**3.24.** Двугранный угол образован двумя металлическими полуплоскостями, изолированными друг от друга по линии вершины угла. Угол раствора равен  $\theta$ . Одна из плоскостей заземлена ( $\varphi_0 = 0$ ), другая находится под потенциалом  $U_0$ .

Найти функцию, описывающую распределение потенциала во внутренней области двугранного угла.

*Указание:* ввести цилиндрическую систему координат и представить решение в виде  $R(r)\Phi(\varphi)$ .

*Ответ:*  $\varphi_0 = U_0\varphi/\theta$ .

**3.25.\*** Заряд  $q$  равномерно распределен по кольцу радиусом  $a$  (см. задачу 3.2). В центре кольца находится электрон, обладающий зарядом  $e$  и массой  $m$ . Электрон имеет возможность совершать малые колебания, перемещаясь вдоль оси кольца.

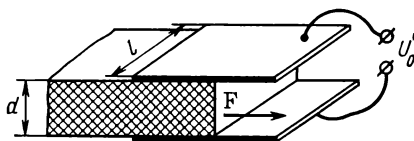


Рис. 3.9

Доказать, что движение электрона будет периодическим. Определить частоту собственных колебаний электрона, считая, что его движение не сказывается на распределении зарядов по кольцу.

*Ответ:*  $\omega_{\text{соб}} = [eq/(4\pi\epsilon_0 ma^3)]^{1/2}$ .

**3.26.** Плоский конденсатор характеризуется геометрическими размерами, указанными на рис. 3.9. В зазор конденсатора введена пластина диэлектрика с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$ .

Пренебрегая краевыми эффектами, вычислить силу, стремящуюся втянуть пластину внутрь конденсатора.

*Ответ:*  $F = \frac{U_0^2 \epsilon \epsilon_0}{2d} (\epsilon - 1)$ .

**3.27.** По бесконечному цилиндрическому проводнику радиусом  $a$  протекает постоянный ток с плотностью  $J$ .

Определить напряженность магнитного поля внутри и вне проводника.

*Ответ:*

$$H_\varphi = \begin{cases} Jr/2 & (r \leq a), \\ Ja^2/(2r) & (r > a). \end{cases}$$

**3.28.** Решить предыдущую задачу, предположив, что плотность тока изменяется по закону  $J = J_0 r/a$ .

*Ответ:*

$$H_\varphi = \begin{cases} J_0 r^2/(3a) & (r \leq a), \\ J_0 a^2/(3r) & (r > a). \end{cases}$$

**3.29.** Вывести формулу для расчета погонной индуктивности коаксиальной линии передачи. Предположить, что известны радиусы проводников  $a$  и  $b$  ( $b > a$ ), а также относительная магнитная прони-

цаемость заполняющей среды  $\mu$ . Магнитное поле, существующее внутри проводников, не учитывать.

*Указание:* воспользоваться формулой для энергии магнитного поля.

*Ответ:*  $L_{\text{пор}} = \frac{\mu\mu_0}{2\pi} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$

**3.30.** По двум бесконечным прямолинейным проводникам, ориентированным вдоль оси  $z$ , протекают равные и противоположно направленные токи  $I$ .

Определить векторный электрический потенциал во всем пространстве.

*Ответ:*

$$A_z = \frac{\mu_0 I I_z}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1},$$

где  $r_1$  и  $r_2$  — кратчайшие расстояния от точки наблюдения до соответствующего проводника.

**3.31.** Решить задачу 3.7 при условии, что между концентрическими сферами находится неоднородная среда, проводимость которой изменяется вдоль радиальной координаты по закону  $\sigma(r) = \sigma_0 (r/a)^3$ .

*Ответ:*  $R = a^2 (1/a^3 - 1/b^3)/(12\pi\sigma_0).$

## Глава четвертая

### КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ПОЛЯ

#### § 4.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Уравнения, определяющие поведение неизменных во времени статических и стационарных электромагнитных полей, могут быть несколько преобразованы, с тем чтобы описывать явления, изменяющиеся во времени достаточно медленно. Принято говорить, что электродинамические системы удовлетворяют *условию квазистационарности* в том случае, если их геометрические размеры  $l$  значительно меньше пути, который электромагнитное возмущение, движущееся со скоростью света  $c$ , проходит за некоторое характерное для изучаемого процесса время  $T$  (обычно под  $T$  понимают период процесса, гармонически изменяющегося во времени). Неравенство  $l \ll cT$  эквивалентно условию  $l \ll \lambda$ , где  $\lambda$  — длина волны в вакууме.

При анализе квазистационарных полей следует пренебречь токами смещения по сравнению с токами проводимости. Система основных уравнений квазистационарного поля, вытекающая из уравнений Максвелла, имеет вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}_{\text{ст.в}}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -\mu_a \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Важными системами, удовлетворяющими условиям квазистационарности, являются цепные структуры (рис. 4.1), для которых характерно существование множества пространственных областей  $A_j$  ( $j = 1, 2, \dots$ ), соединенных между собой системой проводников. Электромагнитное поле локализовано внутри каждой из выделенных областей. Цепные структуры инвариантны относительно пространственных деформаций системы проводников. Это дает возможность перейти

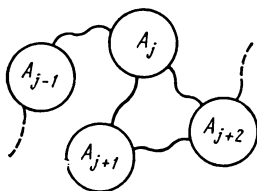


Рис. 4.1

от цепной структуры к ее абстрактной модели — *принципиальной электрической схеме*, анализируемой с помощью методов теории цепей.

Другой случай применимости квазистационарных методов — исследование процесса распространения электромагнитных возмущений в хорошо проводящей (металлоподобной) среде, в которой плотность тока проводимости  $J_{\text{пр}} = \sigma E$  значительно превышает плотность тока смещения  $J_{\text{см}} = \omega \epsilon_a E$ . При этом из системы (4.1) получаются дифференциальные уравнения второго порядка:

$$\nabla^2 H = \sigma \mu_a \frac{\partial H}{\partial t} - \text{rot } J_{\text{ст.э.}}, \quad (4.2)$$

$$\nabla^2 E = \sigma \mu_a \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Данные уравнения в отличие от волновых уравнений содержат лишь первую производную по времени. Классификационно они относятся к дифференциальным уравнениям в частных производных параболического типа [3] и описывают физические процессы, схожие с процессами нестационарной теплопроводности или диффузии.

## § 4.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

**4.1.** Доказать, что первый закон Кирхгофа, устанавливающий равенство нулю алгебраической суммы токов в узле электрической цепи, есть следствие уравнения непрерывности.

**Решение.** Окружим узел цепи замкнутой поверхностью  $S$ . Пусть  $V$  означает объем, ограниченный этой поверхностью. Ток может поступать внутрь этого объема и выходить наружу только в тех точках, где проводники пересекают поверхность  $S$ . Физически очевидно, что в узле не может накапливаться электрический заряд. Поэтому из уравнения непрерывности

$$\text{div } J_a + \partial \rho / \partial t = 0$$

следует, что

$$\int_V \text{div } J_a dV = - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \rho dV = 0.$$

На основании теоремы Остроградского—Гаусса получим

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{J}_a dV = \oint_S \mathbf{J}_a d\mathbf{S} = \sum_n I_n = 0,$$

что и требовалось доказать.

**4.2.** Методами электродинамики показать, что мгновенная мощность  $p(t)$ , потребляемая произвольным электрическим двухполюсником, выражается формулой

$$p(t) = ui,$$

где  $u$  — напряжение на зажимах двухполюсника;  $i$  — ток через двухполюсник.

**Решение.** Мгновенная мощность, потребляемая двухполюсником, выражается поверхностным интегралом (см. гл. 2):

$$p(t) = - \oint_S [\mathbf{E}\mathbf{H}] d\mathbf{S}, \quad (4.3)$$

вычисленным по произвольной поверхности  $S$ , охватывающей двухполюсник. При  $p < 0$  энергия электромагнитного поля поступает из рассматриваемого элемента во внешнюю цепь и в этом смысле он эквивалентен генератору. При  $p > 0$  двухполюсник потребляет энергию из внешнего поля и является нагрузкой.

Выразим интеграл (4.3) через величины  $u$  и  $i$ . Для этого обозначим символами  $A_1$  и  $A_2$  точки пересечения проводников с поверхностью  $S$  и осуществим параметризацию этой поверхности (рис. 4.2):

а) точки  $A_1$  и  $A_2$  будем считать особыми точками параметризации (подобно северному и южному полюсам сферы);

б) построим семейство кривых  $\{l_1\}$ , соединяющих точки  $A_1$  и  $A_2$  наподобие географических меридианов;

в) введем ортогональное ему семейство кривых  $\{l_2\}$ , играющее роль географических параллелей.

В соответствии с определением понятия напряжения

$$u = \int_{l_1} \mathbf{E} d\mathbf{l}_1.$$

Согласно закону полного тока для замкнутого контура

$$i = \oint_{l_2} \mathbf{H} d\mathbf{l}_2.$$

Так как векторный дифференциал поверхности

$$d\mathbf{S} = - [d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2],$$

то

$$p(t) = \oint_S [\mathbf{E}\mathbf{H}] [d\mathbf{l}_1 d\mathbf{l}_2].$$

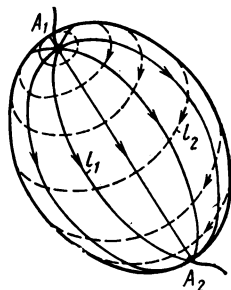


Рис. 4.2



В векторной алгебре показывается, что

$$[\mathbf{AB}] [\mathbf{CD}] = \mathbf{AC} \cdot \mathbf{BD} - \mathbf{AD} \cdot \mathbf{BC}.$$

Поэтому

$$p(t) = \int_{l_1} \mathbf{E} d\mathbf{l}_1 \int_{l_2} \mathbf{H} d\mathbf{l}_2 - \int_{l_2} \mathbf{E} d\mathbf{l}_2 \int_{l_1} \mathbf{H} d\mathbf{l}_1.$$

Здесь второе слагаемое в правой части должно быть равно нулю, поскольку в рамках квазистационарного приближения электрическое поле считается потенциальным. Таким образом,

$$p(t) = \int_{l_1} \mathbf{E} d\mathbf{l}_1 \int_{l_2} \mathbf{H} d\mathbf{l}_2 = u(t) i(t).$$

Итак, двухполюсник потребляет энергию в случае, когда увеличение тока ведет к повышению потенциала того зажима, к которому в данный момент времени притекает ток из внешних цепей.

**4.3.** Бесконечное полупространство  $x > 0$  заполнено хорошо проводящей средой с известными параметрами  $\sigma$  и  $\mu_a = \mu_0$ . На границе раздела с воздухом при  $x = 0$  задано значение комплексной амплитуды вектора  $\mathbf{H}$ , имеющего единственную составляющую, направленную вдоль оси  $y$ :  $\mathbf{H} = H_0 \cdot \mathbf{1}_y$ .

Предположив, что электромагнитное поле постоянно вдоль координатных осей  $y$  и  $z$ , вывести закон пространственного изменения магнитного поля внутри проводящей среды.

**Решение.** Комплексная амплитуда напряженности магнитного поля в проводящей среде удовлетворяет уравнению, вытекающему из (4.2):

$$\frac{d^2 \dot{H}_y}{dx^2} - j\omega\mu_a\sigma \dot{H}_y = 0. \quad (4.4)$$

Введя обозначение  $b^2 = j\omega\mu_a\sigma$ , запишем общее решение:

$$\dot{H}_y(x) = \dot{A}e^{-bx} + \dot{B}e^{bx},$$

в которое входят две произвольные постоянные  $\dot{A}$  и  $\dot{B}$ . Так как поле при  $x \rightarrow \infty$  должно быть ограниченным, то коэффициент  $\dot{B}$  следует положить равным нулю.

Тангенциальные составляющие напряженности магнитного поля на границе раздела непрерывны, поэтому  $\dot{A} = H_0$ . Таким образом, при  $x > 0$ ,

$$\dot{H}_y(x) = H_0 e^{-bx},$$

или в развернутом виде

$$\dot{H}_y(x) = H_0 \exp\left(-\sqrt{\frac{j\omega\mu_a\sigma}{2}} x\right) \exp\left(-j\sqrt{\frac{\omega\mu_a\sigma}{2}} x\right). \quad (4.5)$$

Итак, амплитуда гармонических колебаний внутри хорошо проводящей среды экспоненциально уменьшается с удалением от границы раздела, в то время как фаза изменяется по линейному закону. Поле и токи сосредоточены в слое, непосредственно прилегающем к границе раздела (*поверхностный эффект*). Глубина проникновения поля в среду

$$d = \sqrt{\frac{2}{\omega \mu_a \sigma}} \quad (4.6)$$

характеризуется тем, что на таком расстоянии от поверхности поле уменьшается по амплитуде в  $e = 2,71828 \dots$  раза.

4.4. Исходя из условий предыдущей задачи найти распределение вектора плотности тока проводимости в полупространстве, заполненном хорошо проводящей средой.

Решение. Искомый вектор плотности тока проводимости можно найти из первого уравнения Максвелла:  $\text{rot } \dot{\mathbf{H}} = \mathbf{j}_{\text{пр}}$ , в котором отсутствует слагаемое, соответствующее току смещения.

Используя решение (4.5), можно записать

$$\mathbf{j}_{\text{пр}} = \frac{\partial \dot{H}_y}{\partial x} \mathbf{1}_z = -\alpha (1 + j) H_0 e^{-\alpha (1 + j) x} \mathbf{1}_z, \quad (4.7)$$

где

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega \mu_a \sigma}{2}}.$$

Таким образом, ток в объеме проводящей среды ориентирован в направлении, перпендикулярном силовым линиям магнитного поля. Из формулы (4.7) получаем комплексную амплитуду напряженности электрического поля

$$\dot{\mathbf{E}} = \mathbf{j}_{\text{пр}} / \sigma = - \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\sigma}} (1 + j) H_0 e^{-\alpha (1 + j) x} \mathbf{1}_z. \quad (4.8)$$

Ток в объеме проводящей среды можно условно заменить эквивалентным поверхностным током, плотность которого находят интегрированием объемной плотности по всему проводящему полупространству:

$$\dot{\mathbf{j}}_s = \int_0^{\infty} \mathbf{j}_{\text{пр}} dx = -\alpha (1 + j) H_0 \mathbf{1}_z \int_0^{\infty} e^{-\alpha (1 + j) x} dx = -H_0 \mathbf{1}_z, \text{ А/м.} \quad (4.9)$$

Вектор  $\mathbf{E}$  на поверхности металла

$$\dot{\mathbf{E}}(0) = - \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\sigma}} (1 + j) H_0 \mathbf{1}_z. \quad (4.10)$$

Таким образом, плотность поверхностного тока и напряженность электрического поля на границе раздела коллинеарны (но не синфаз-

ны!); коэффициент пропорциональности между ними называется *комплексным поверхностным сопротивлением*:

$$Z_S = \vec{E}(0) / \dot{i}_s. \quad (4.11)$$

На основании выражений (4.9) и (4.10) можно записать

$$Z_S = R_S + jX_S = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\sigma}} (1 + j). \quad (4.12)$$

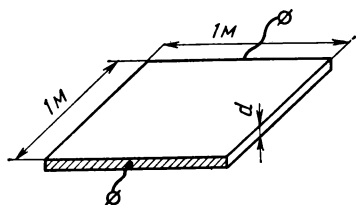


Рис. 4.3

Для технических расчетов особенно важно *активное поверхностное сопротивление*

$$R_S = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\sigma}} = \frac{1}{\sigma d}. \quad (4.13)$$

Величина  $R_S$  численно совпадает с сопротивлением между противоположными гранями параллелепипеда, выполненного из проводящего материала, причем размеры широких ребер равны 1 м, а высота — глубине проникновения  $d$  (рис. 4.3).

### § 4.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

4.5. Кольцевой проводник выполнен из нихрома ( $\sigma = 5 \cdot 10^8$  См/м). Диаметр кольца 50 мм, диаметр провода 0,25 мм. Проводник помещен в однородное магнитное поле таким образом, что угол между осью кольца и направлением вектора магнитной индукции составляет  $30^\circ$ . Магнитная индукция имеет амплитуду 0,1 Тл и изменяется во времени по гармоническому закону с частотой 1 кГц.

Определить амплитуду тока, наводимого в кольце.

Ответ: 167 мА.

4.6. В индуктивной катушке проходит переменный ток; напряжение на ее зажимах измеряется двумя вольтметрами  $V_1$  и  $V_2$ , включенными так, как показано на рис. 4.4.

Почему показания вольтметров будут отличаться друг от друга? Какой из вольтметров зафиксирует большее напряжение?

4.7. Для создания проволоочных резисторов с минимальной индуктивностью применяют так называемую бифилярную намотку (рис. 4.5).

Объяснить причину уменьшения индуктивности при таком способе намотки по сравнению с обычной однорядной намоткой.

4.8. Для защиты от внешних электромагнитных полей катушка колебательного контура помещена в замкнутый экран из хорошо проводящего материала.

В какую сторону изменится собственная частота контура из-за наличия экрана?

Ответ: собственная частота контура повысится.

4.9. Регулярная линия передачи представляет собой систему двух проводников, соединяющих генератор и нагрузку. Поперечный размер системы значительно меньше длины волны передаваемых колебаний, в то время как протяженность линии сравнима с длиной волны. Линия характеризуется погонной индуктивностью  $L_1$ , Гн/м и погонной емкостью  $C_1$ , Ф/м.

Показать, что при возбуждении линии источником гармонических колебаний с частотой  $\omega$  комплексные амплитуды напряжения  $\dot{U}$  и тока  $\dot{I}$  как функции продольной координаты  $x$  подчиняются дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} d\dot{U}/dx &= -j\omega L_1 \dot{I}, \\ d\dot{I}/dx &= -j\omega C_1 \dot{U}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

называемым телеграфными уравнениями.

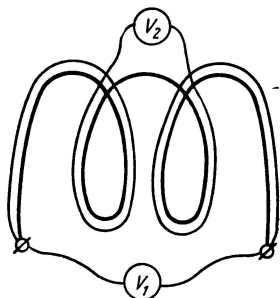


Рис. 4.4

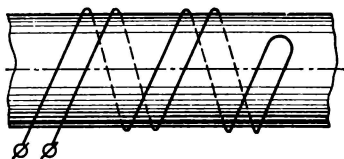


Рис. 4.5

Указание: выделить отрезок линии длиной  $\Delta x \ll \lambda$  и воспользоваться законами Кирхгофа в предположении квазистационарности процессов внутри данного четырехполюсника.

4.10. Показать, что система (4.14) эквивалентна дифференциальному уравнению второго порядка

$$d^2 \dot{U}/dx^2 + \omega^2 L_1 C_1 \dot{U} = 0,$$

или

$$d^2 \dot{I}/dx^2 + \omega^2 L_1 C_1 \dot{I} = 0,$$

называемому уравнением Гельмгольца.

Указание: по методу контурных токов составить уравнение электрического равновесия двух смежных четырехполюсников длиной  $\Delta x$  каждый и перейти к пределу при  $\Delta x \rightarrow 0$ .

4.11. Используя условия задачи 4.4, вывести формулу для среднего значения вектора Пойнтинга внутри проводящей среды.

Ответ:  $\Pi_{\text{ср}} = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{8\sigma}} H_0^2 \exp(-\sqrt{2\omega \mu_a \sigma} x) \mathbf{1}_x.$

4.12. Во многих устройствах СВЧ для уменьшения омических потерь токоведущие поверхности покрывают тонким слоем серебра.

Определить толщину серебряного слоя, при которой плотность тока на его внутренней поверхности сокращается в 200 раз по срав-

нению с плотностью тока на границе раздела металл—воздух. Частота поля 30 ГГц.

*Ответ:* 2 мкм.

4.13. Вычислить активное поверхностное сопротивление  $R_s$  меди на частотах 100 кГц и 3 ГГц.

*Ответ:*  $8,322 \cdot 10^{-5}$  и  $1,44 \cdot 10^{-2}$  Ом соответственно.

4.14. Вывести формулу для погонного активного сопротивления и погонной индуктивности круглого цилиндрического проводника, радиус  $a$  которого значительно превышает глубину проникновения тока.

*Указание:* воспользоваться формулой (4.12).

*Ответ:*  $R_1 = R_s/(2\pi a)$ ,  $L_1 = R_s/(2\pi a\omega)$ , где  $\omega$  — частота поля, рад/с.

4.15. Во сколько раз активное сопротивление медного проводника диаметром 1,5 мм на частоте 1 МГц превышает сопротивление этого проводника, измеренное на постоянном токе?

*Ответ:* в 5,63 раза.

4.16. Морская вода характеризуется относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 75$ , относительной магнитной проницаемостью  $\mu = 1$  и удельной электрической проводимостью  $\sigma = 2$  См/м.

Показать, что на частотах, меньших 300 МГц, такую среду можно рассматривать в квазистационарном приближении, пренебрегая токами смещения по сравнению с токами проводимости. Вычислить глубину проникновения электромагнитных волн в морскую воду на частотах 30 МГц и 100 кГц.

*Ответ:* 0,065 и 1,125 м соответственно.

## Глава пятая

### ПЛОСКИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ

#### § 5.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Плоские электромагнитные волны существуют в однородных безграничных средах. В случае полей, изменяющихся во времени по гармоническому закону, комплексные амплитуды  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$  удовлетворяют уравнениям Гельмгольца

$$\nabla^2 \vec{E} + \gamma^2 \vec{E} = 0, \quad (5.1)$$

$$\nabla^2 \vec{H} + \gamma^2 \vec{H} = 0,$$

где  $\gamma = \omega \sqrt{\tilde{\epsilon}_a \tilde{\mu}_a} = \beta - j\alpha$  — комплексный коэффициент распространения;  $\beta$  — коэффициент фазы, или волновое число;  $\alpha$  — коэффициент ослабления.

Так как исходные уравнения Максвелла дают однозначную связь между  $\vec{E}$  и  $\vec{H}$ , достаточно найти решение лишь одного из этих уравнений.

Частное решение уравнения Гельмгольца описывает однородную плоскую волну. Если последняя распространяется вдоль оси  $z$  декартовой системы координат, то указанное решение имеет вид

$$\vec{E}(z) = \vec{E}_1(0) e^{-\gamma z} + \vec{E}_2(0) e^{\gamma z}. \quad (5.2)$$

Первое слагаемое соответствует прямой (падающей) волне, распространяющейся в направлении положительных значений  $z$ , второе слагаемое — обратной (отраженной) волне, распространяющейся в направлении отрицательных значений  $z$ .

Если величины  $\tilde{\epsilon}_a$  и  $\tilde{\mu}_a$  известны, то  $\beta$  и  $\alpha$  можно найти с помощью выражения для корня квадратного из комплексного числа:

$$\sqrt{a \pm jb} := \pm \left( \sqrt{\frac{r+a}{2}} \pm j \sqrt{\frac{r-a}{2}} \right),$$

где  $r = \sqrt{a^2 + b^2}$  — модуль комплексного числа; квадратные корни  $\sqrt{r+a}$  и  $\sqrt{r-a}$  следует считать положительными.

На высоких частотах магнитные свойства большинства сред выражены слабо. Поэтому с достаточной для практических целей степенью точности можно считать

$$\mu_a = \mu_0.$$

Поскольку

$$\tilde{\epsilon}_a = \epsilon'_a - j\epsilon''_a = \epsilon\epsilon_0(1 - j \operatorname{tg} \delta_a),$$

комплексный коэффициент распространения

$$\gamma = \beta - j\alpha = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon'_a} \sqrt{1 - j \operatorname{tg} \delta_a}. \quad (5.3)$$

Коэффициент фазы  $\beta$  характеризует изменение фазы гармонических колебаний при распространении волны. Расстояние, на котором фаза изменяется на  $2\pi$  рад, называется *длиной волны*:

$$\lambda = 2\pi/\beta. \quad \bullet$$

Плоскость равных фаз называется *фазовым фронтом волны*, а скорость перемещения этой плоскости — *фазовой скоростью*:

$$v_\phi = \omega/\beta. \quad (5.4)$$

Коэффициент фазы и коэффициент ослабления могут быть выражены следующими формулами:

$$\beta = \frac{2\pi \sqrt{\epsilon}}{\lambda_0} \left( \frac{1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_a}}{2} \right)^{1/2}, \quad (5.5)$$

$$\alpha = \frac{2\pi \sqrt{\epsilon}}{\lambda_0} \left( \frac{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_a} - 1}{2} \right)^{1/2}. \quad (5.6)$$

Таким образом, между ними существует соотношение

$$\alpha = \beta \operatorname{tg} (\delta_a/2).$$

Фазовая скорость

$$v_{\phi} = \frac{\sqrt{2}c}{\sqrt{\epsilon} (1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_a})^{1/2}}, \quad (5.7)$$

длина волны

$$\lambda = \frac{\sqrt{2}\lambda_0}{\sqrt{\epsilon} (1 + \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \delta_a})^{1/2}}. \quad (5.8)$$

Отношение фазовой скорости в среде к скорости света называют коэффициентом преломления:

$$n = \sqrt{\epsilon\mu}.$$

Из уравнений Максвелла следует, что в случае плоской волны комплексные амплитуды векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  связаны характеристическим сопротивлением среды:

$$Z_c = \omega\mu_a/\gamma = \sqrt{\mu_a/\epsilon_a}, \quad (5.9)$$

так что

$$\dot{E} = Z_c \dot{H}.$$

Характеристическое сопротивление для немагнитных сред ( $\mu_a = \mu_0$ )

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon\epsilon_0}} (1 - j \operatorname{tg} \delta_a)^{-\frac{1}{2}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon}} (1 + \operatorname{tg}^2 \delta_a)^{-\frac{1}{4}} e^{j \frac{\delta_a}{2}} \text{ Ом.}$$

Аргумент принимает значения от нуля (диэлектрики без потерь) до  $\pi/4$  (идеальный металл).

Характеристическое сопротивление для вакуума

$$Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0} = 120 \pi = 376,991 \text{ Ом.}$$

Векторные уравнения (5.1) означают, что любая координатная составляющая векторов поля удовлетворяет уравнению

$$\nabla^2 \dot{U} + \gamma^2 \dot{U} = 0,$$

имеющему в декартовой системе координат частное решение

$$\dot{U} = C \exp[-j\gamma(\kappa_x x + \kappa_y y + \kappa_z z)]. \quad (5.10)$$

Здесь  $C$  — константа;  $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$ ,  $\kappa_z$  — комплексные постоянные, удовлетворяющие условию

$$\kappa_x^2 + \kappa_y^2 + \kappa_z^2 = 1. \quad (5.11)$$

Если  $\kappa_x$ ,  $\kappa_y$ ,  $\kappa_z$  — вещественные числа, то выражение (5.10) описывает однородную плоскую волну, распространяющуюся в произвольном относительно исходной системы координат направлении. Эту волну удобно выразить формулой

$$\dot{U} = C \exp[-j\gamma(\kappa r)]. \quad (5.12)$$

Числа  $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$  имеют смысл направляющих косинусов, фиксирующих направление распространения волны, а  $\mathbf{r}$  есть радиус-вектор точки  $(x, y, z)$ . Если хотя бы одно из чисел  $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_z$  комплексное, то выражение (5.10) будет описывать *неоднородную плоскую волну*:

$$\dot{U} = C \exp \{ -j \operatorname{Re} [\gamma (\kappa_x x + \kappa_y y + \kappa_z z)] - \operatorname{Im} [\gamma (\kappa_x x + \kappa_y y + \kappa_z z)] \}, \quad (5.13)$$

у которой фазовый фронт задается уравнением

$$\operatorname{Re} [\gamma (\kappa_x x + \kappa_y y + \kappa_z z)] = \text{const},$$

а плоскость равных амплитуд — уравнением

$$\operatorname{Im} [\gamma (\kappa_x x + \kappa_y y + \kappa_z z)] = \text{const}.$$

В общем случае фазовый фронт и плоскость равных амплитуд образуют между собой произвольный угол.

Поскольку уравнения Максвелла линейны, любая комбинация их решений также является решением. В частности, если  $\dot{E}_x \mathbf{1}_x$  и  $\dot{E}_y \mathbf{1}_y$  — решения исходных уравнений, то

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{E}_x \mathbf{1}_x + \dot{E}_y \mathbf{1}_y \quad (5.14)$$

также есть решение уравнений Максвелла и, следовательно, оно описывает распространение в пространстве некоторой волны. В зависимости от соотношения между фазами и амплитудами  $\dot{E}_x$  и  $\dot{E}_y$  в каждой точке пространства конец вектора  $\mathbf{E}$  будет перемещаться по эллипсу с различным отношением и ориентацией его полуосей. Такая волна называется волной с *эллиптической поляризацией*. При произвольном значении амплитуд и фаз в выражении (5.14) путем поворота осей вокруг оси  $z$  всегда можно ввести новую систему координат  $(x', y', z')$ , в которой сдвиг фаз между координатными составляющими будет равен  $\pm 90^\circ$ , а полуоси эллипса — совпадать с направлением осей системы. Угол поворота, обеспечивающий такое преобразование системы координат, будет определять ориентацию осей эллипса в системе  $(x, y, z)$ . Отношение большой полуоси эллипса к малой называют *коэффициентом эллиптичности*  $k_{\text{эл}}$ .

Линейно поляризованная волна представляет собой один из предельных случаев эллиптически поляризованной волны. Второй предельный случай имеет место при равенстве амплитуд исходных полей и сдвиге фаз между ними, равном  $90^\circ$ . Здесь конец вектора  $\mathbf{E}$  перемещается по окружности, и волна называется волной с *круговой поляризацией*. Поле такой волны можно представить выражением

$$\dot{\mathbf{E}}_{\pm} = \dot{E} (\mathbf{1}_x \pm j \mathbf{1}_y). \quad (5.15)$$

Знак минус соответствует волне с правой круговой поляризацией, у которой вектор  $\mathbf{E}$  вращается по часовой стрелке (если смотреть в направлении распространения), а знак плюс — волне с левой круговой поляризацией (направление вращения обратное). Любая волна с ли-



нейной поляризацией может быть представлена суммой двух волн с круговой поляризацией, например

$$\dot{\mathbf{E}} = \dot{E}_x \mathbf{1}_x = \dot{\mathbf{E}}_+ + \dot{\mathbf{E}}_-, \quad (5.16)$$

где

$$\dot{\mathbf{E}}_+ = \dot{E}_x/2 (\mathbf{1}_x + j\mathbf{1}_y), \quad \dot{\mathbf{E}}_- = \dot{E}_x/2 (\mathbf{1}_x - j\mathbf{1}_y). \quad (5.17)$$

Плоская волна переносит энергию в направлении распространения. Для гармонических полей этот процесс описывается средним значением вектора Пойнтинга:

$$\Pi_{cp} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}]. \quad (5.18)$$

Часто  $\Pi_{cp}$  удобно выражать только через напряженность электрического или магнитного поля:

$$\Pi_{cp} = \frac{|\dot{E}|^2}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{1}{Z_c} \right) \mathbf{1}_z = \frac{|\dot{H}|^2}{2} \operatorname{Re} (Z_c) \mathbf{1}_z. \quad (5.19)$$

В средах без потерь  $\Pi_{cp}$  не зависит от координаты  $z$ . Если же среда обладает потерями, то плотность потока мощности плоской электромагнитной волны убывает при распространении по экспоненциальному закону:

$$\Pi_{cp} = \Pi_{cp}(0) \exp(-2\alpha z). \quad (5.20)$$

Величину потерь в среде характеризуют *погонным затуханием*  $\Delta$  в дБ/м:

$$\Delta = 20 \lg \left[ \frac{E(0)}{E(1)} \right] = 10 \lg \left[ \frac{\Pi(0)}{\Pi(1)} \right],$$

связанным с коэффициентом ослабления  $\alpha$  соотношением  $\Delta = 8,69\alpha$ .

Фазовая скорость плоской электромагнитной волны в среде с зависящими от частоты параметрами  $\epsilon'$  и  $\epsilon''$  также является функцией частоты. Такое явление называют *дисперсией* фазовой скорости. При распространении сложных сигналов в этом случае будут нарушаться исходные амплитудные и фазовые соотношения между отдельными составляющими спектра и, как следствие, будет изменяться форма сигнала в процессе его распространения. Для нахождения вида сигнала необходимо пользоваться спектральным или операторным методом. Например, полагая, что

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} s(t) e^{-i\omega t} dt$$

есть Фурье-преобразование сигнала в плоскости  $z = 0$ , можно найти сигнал для любых значений  $z$ , используя обратное преобразование

$$s(t, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{-j\gamma z} e^{j\omega t} d\omega. \quad (5.21)$$

Пренебрегая потерями в среде и полагая, что сигналы  $s(t, z)$  являются узкополосными, можно показать, что их огибающая в средах с дисперсией распространяется с *групповой скоростью*

$$v_{гp} = \left( \frac{d\beta}{d\omega} \right)^{-1} = \frac{d\omega}{d\beta}. \quad (5.22)$$

Если условие узкополосности сигнала не выполняется, то понятие групповой скорости, строго говоря, перестает адекватно описывать трансформацию формы такого сигнала.

## § 5.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

5.1. Плоская электромагнитная волна с частотой  $10^8$  Гц распространяется в среде с параметрами  $\epsilon = 2,4$ ,  $\operatorname{tg} \delta_a = 10^{-1}$ ,  $\mu = 1$ . Определить фазовую скорость, длину волны и коэффициент ослабления.

Решение. Учтем, что  $\operatorname{tg} \delta_a \ll 1$  и разложим выражение (5.3) в степенной ряд. Ограничиваясь тремя первыми членами, получим

$$\gamma = \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_a'} \sqrt{1 - j \operatorname{tg} \delta_a} \approx \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_a'} \left( 1 - j \frac{\operatorname{tg} \delta_a}{2} + \frac{\operatorname{tg}^2 \delta_a}{8} \right).$$

Таким образом, для диэлектриков с малыми потерями коэффициент фазы и коэффициент ослабления приближенно равны:

$$\begin{aligned} \beta &\approx \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_a'} (1 + 0,125 \operatorname{tg}^2 \delta_a), \\ \alpha &\approx 0,5 \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_a'} \operatorname{tg} \delta_a. \end{aligned}$$

Используя соотношение (5.4), найдем фазовую скорость волны

$$v_\phi = \frac{\omega}{\beta} \approx \frac{c}{\sqrt{\epsilon} (1 + 0,125 \operatorname{tg}^2 \delta_a)}.$$

Полученный результат показывает, что наличие потерь в среде приводит к изменению величины фазовой скорости. Для  $\operatorname{tg} \delta_a = 10^{-1}$  поправка составляет 0,125%, так что практически можно положить

$$v_\phi \approx c/\sqrt{\epsilon} = 1,94 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

По известной величине фазовой скорости найдем длину волны:

$$\lambda = v_\phi / f = 0,194 \text{ м.}$$

Подстановка исходных данных в полученную ранее формулу дает:

$$\alpha = 1,622 \text{ м}^{-1}.$$

5.2. Вычислить фазовую скорость, коэффициент ослабления и глубину проникновения поля для плоской электромагнитной волны с частотой 10 МГц, распространяющейся в металле с параметрами  $\sigma = 5 \cdot 10^7$  См/м,  $\mu = 1$ .

**Решение.** В реальных металлах плотность токов проводимости значительно больше плотности токов смещения. Поэтому выражение (5.3) можно приближенно представить в виде

$$\gamma \approx \omega \sqrt{\mu_0 \left( -j \frac{\sigma}{\omega} \right)} = \sqrt{\frac{\omega \sigma \mu_0}{2}} (1 - j).$$

Коэффициент фазы и коэффициент ослабления в рассматриваемой среде численно равны друг другу:

$$\beta = \alpha = \sqrt{\omega \sigma \mu_0 / 2} = 44,43 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}.$$

По известной величине  $\beta$  можно вычислить фазовую скорость:

$$v_{\text{ф}} = 1,414 \cdot 10^3 \text{ м/с}.$$

Под глубиной проникновения поля в металл  $d$  понимают расстояние, на котором его амплитуда уменьшается в  $e$  раз. Очевидно, что

$$d = 1/\alpha = 22,5 \cdot 10^{-6} \text{ м} = 22,5 \text{ мкм}.$$

**5.3.** Плоская электромагнитная волна с частотой  $10^9$  Гц распространяется в среде с параметрами  $\epsilon = 2,25$ ,  $\text{tg } \delta_s = 0,01$ ,  $\mu = 1$ . Амплитуда электрического поля в плоскости  $z = 0$  равна 100 В/м.

Определить среднюю плотность потока мощности в плоскости  $z = 1$  м.

**Решение.** Плотность потока мощности плоской электромагнитной волны определяется выражением

$$P_{\text{ср}}(z) = \frac{|\dot{E}|^2}{2} \text{Re} \left( \frac{1}{Z_c} \right) e^{-2\alpha z}.$$

Таким образом, необходимо вычислить коэффициент ослабления и характеристическое сопротивление. Действуя так же, как в задаче 5.1, можно найти  $\alpha$ . Подстановка исходных данных дает  $\alpha = 0,162 \text{ м}^{-1}$ .

При определении характеристического сопротивления для  $\text{tg } \delta_s \ll 1$  можно использовать приближенное выражение для квадратного корня, входящего в формулу (5.10). Тогда

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon \epsilon_0}} \frac{1}{1 - 0,5 j \text{tg } \delta_s} = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon}} \frac{1}{1 - 0,5 j \text{tg } \delta_s}.$$

Следовательно,

$$P_{\text{ср}}(z) = \frac{|\dot{E}|^2}{2} \frac{\sqrt{\epsilon}}{120\pi} e^{-2\alpha z},$$

или после необходимых вычислений  $P_{\text{ср}}(z = 1) = 14,38 \text{ Вт/м}^2$ .

**5.4.** Доказать, что в средах без потерь фазовый фронт и плоскость равных амплитуд неоднородных плоских волн образуют между собой угол  $90^\circ$ .

**Решение.** В средах без потерь коэффициент распространения  $\gamma$  — действительная величина. Поэтому, если  $\kappa_x = \kappa'_x + j\kappa''_x$ ,  $\kappa_y =$

$= \kappa'_y + j\kappa_y, \kappa_z = \kappa'_z + j\kappa''_z$ , то уравнение для фазового фронта имеет вид

$$\kappa'_x x + \kappa'_y y + \kappa'_z z = \text{const},$$

а уравнением для плоскости равных амплитуд будет

$$\kappa''_x x + \kappa''_y y + \kappa''_z z = \text{const}.$$

Согласно [3] косинус угла между двумя плоскостями

$$\cos \psi = \frac{\kappa'_x \kappa''_x + \kappa'_y \kappa''_y + \kappa'_z \kappa''_z}{[(\kappa'_x)^2 + (\kappa'_y)^2 + (\kappa'_z)^2][(\kappa''_x)^2 + (\kappa''_y)^2 + (\kappa''_z)^2]}.$$

С помощью выражения (5.11) можно найти, что

$$\kappa'_x \kappa''_x + \kappa'_y \kappa''_y + \kappa'_z \kappa''_z = 0,$$

и, следовательно, угол  $\psi$  действительно равен  $90^\circ$ .

5.5. Вывести формулу для определения коэффициента эллиптичности (отношение большой оси эллипса к малой) плоской электромагнитной волны, для которой в плоскости  $z = 0$  поля имеют вид

$$\dot{E}_x = E_{0x} e^{j\varphi_x}, \quad \dot{E}_y = E_{0y} e^{j\varphi_y}.$$

Найти ориентацию осей эллипса по отношению к осям системы координат.

Решение. Перейдем от комплексных амплитуд к мгновенным значениям и введем новые переменные  $\xi$  и  $\eta$ :

$$\xi = E_{0x} \cos(\omega t + \varphi_x),$$

$$\eta = E_{0y} \cos(\omega t + \varphi_y).$$

Разложим косинусы суммы аргументов и решим эти два уравнения относительно  $\cos \omega t$  и  $\sin \omega t$ :

$$\cos \omega t = \xi \frac{\sin \varphi_y}{E_{0x} \sin(\varphi_y - \varphi_x)} - \eta \frac{\sin \varphi_x}{E_{0y} \sin(\varphi_y - \varphi_x)},$$

$$\sin \omega t = \xi \frac{\cos \varphi_y}{E_{0x} \sin(\varphi_y - \varphi_x)} - \eta \frac{\cos \varphi_x}{E_{0y} \sin(\varphi_y - \varphi_x)}.$$

Возводя эти уравнения в квадрат и исключив переменную  $t$ , получим

$$\left( \frac{\eta}{E_{0x} \sin \Delta\varphi} \right)^2 + \left( \frac{\xi}{E_{0y} \sin \Delta\varphi} \right)^2 - 2\eta\xi \frac{\cos \Delta\varphi}{E_{0x} E_{0y} \sin^2 \Delta\varphi} = 1,$$

где

$$\Delta\varphi = \varphi_y - \varphi_x.$$

В системе координат  $(\xi, \eta)$  это есть уравнение эллипса [3]. Путем поворота осей на угол  $\alpha$ , удовлетворяющий условию

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2E_{0x} E_{0y}}{|E_{0x}^2 - E_{0y}^2|} = \cos \Delta\varphi,$$

преобразуем уравнение к каноническому виду

$$\left(\frac{\eta'}{a}\right)^2 + \left(\frac{\xi'}{b}\right)^2 = 1.$$

Используя [3], найдем полуоси эллипса

$$a = \sqrt{\frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2}} + \sqrt{\left(\frac{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}{2}\right)^2 + E_{0x}^2 E_{0y}^2 \cos^2 \Delta\varphi},$$

$$b = \sqrt{\frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{2}} - \sqrt{\left(\frac{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}{2}\right)^2 + E_{0x}^2 E_{0y}^2 \cos^2 \Delta\varphi}.$$

Теперь можно вычислить коэффициент эллиптичности как отношение  $a$  к  $b$ . В результате несложных преобразований получим

$$k_{эл} = \frac{a}{b} = \frac{1}{2 \sin \Delta\varphi} \left[ \frac{E_{0x}}{E_{0y}} + \frac{E_{0y}}{E_{0x}} + \sqrt{\left(\frac{E_{0x}}{E_{0y}} - \frac{E_{0y}}{E_{0x}}\right)^2 + 4 \cos^2 \Delta\varphi} \right].$$

Ориентация осей эллипса по отношению к оси  $x$  исходной системы координат определяется углом  $\alpha$ , отсчитываемым против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора  $\mathbf{l}_z$ .

**5.6.** Некоторые вещества (например, водный раствор сахара) имеют различную скорость распространения для волн с левой и правой круговой поляризации. Это приводит к повороту плоскости поляризации плоской волны с линейной поляризацией в процессе ее распространения. Такое свойство веществ называют оптической активностью.

Считая заданными значения фазовых скоростей для левой  $v_n$  и правой  $v_n$  круговой поляризации, вывести формулу, определяющую угол поворота плоскости поляризации волны на участке пути длиной  $L$  для электромагнитной волны с заданной частотой  $\omega$ .

**Решение.** Линейно поляризованную волну, имеющую в плоскости  $z = 0$  вид

$$\dot{\mathbf{E}} = E_{0x} \mathbf{1}_x,$$

можно представить как сумму двух волн с круговой поляризацией:

$$\dot{\mathbf{E}}_n = \frac{E_{0x}}{2} (\mathbf{1}_x + j\mathbf{1}_y), \quad \dot{\mathbf{E}}_n = \frac{E_{0x}}{2} (\mathbf{1}_x - j\mathbf{1}_y).$$

Волна с правой круговой поляризацией при распространении в направлении оси  $z$  будет описываться выражением

$$\dot{\mathbf{E}}_n(z) = E_{0n} \exp\left(-j \frac{\omega}{v_n} z\right),$$

а с левой — выражением

$$\dot{\mathbf{E}}_n(z) = E_{0n} \exp\left(-j \frac{\omega}{v_n} z\right),$$

В любой плоскости  $z \neq 0$  сумма этих волн будет представлять собой волну с линейной поляризацией. Координатные составляющие этой волны равны:

$$\dot{E}_x(z) = \frac{E_{0x}}{2} (e^{-i\beta_n z} + e^{-i\beta_n z}),$$

$$\dot{E}_y(z) = j \frac{E_{0x}}{2} (e^{-i\beta_n z} - e^{-i\beta_n z}).$$

Суммарный вектор  $\mathbf{E}$  образует некоторый угол  $\varphi$  с осью  $x$  координатной системы  $(x, y, z)$ , который зависит от  $z$ . Тангенс этого угла

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{E_y}{E_x} = \operatorname{tg} \left[ \frac{\omega z}{2} \left( \frac{1}{v_n} - \frac{1}{v_n} \right) \right],$$

Таким образом, угол поворота плоскости поляризации на отрезке пути длиной  $L$  определяется из формулы

$$\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \left[ \frac{\omega L}{2} \frac{v_n - v_n}{v_n v_n} \right].$$

Обычно различие скоростей распространения  $v_n$  и  $v_n$  мало. Поэтому приближенно

$$\varphi \approx \frac{\omega L}{2v} \frac{v_n - v_n}{v} = \pi \frac{L}{\lambda} \delta v,$$

где  $v$  — среднее значение скорости;  $\delta v$  — относительная разность скоростей распространения;  $\lambda = v/f$  — длина волны в среде.

### § 5.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

5.7. В вакууме распространяется плоская электромагнитная волна с частотой 30 МГц.

Определить расстояние, на котором фаза волны изменится на  $270^\circ$  и  $2520^\circ$ .

Ответ: 7,5 м и 70 м соответственно.

5.8. Определить длину и фазовую скорость электромагнитной волны, распространяющейся в среде без потерь с относительными проницаемостями  $\epsilon = \mu = 10$ , если частота волны 10 МГц.

Ответ: 3 м,  $3 \cdot 10^7$  м/с.

5.9. Характеристическое сопротивление среды равно 1508 Ом, относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon = 1$ .

Определить относительную магнитную проницаемость среды.

Ответ: 16.

5.10. В среде с параметрами  $\epsilon = 4$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0$  распространяется плоская электромагнитная волна, комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля которой в плоскости  $z = 0$   $\dot{\mathbf{E}} = 0,5 \mathbf{1}_x + 0,2 \mathbf{1}_y$ .

Определить комплексную амплитуду вектора напряженности магнитного поля, если волна распространяется в направлении возрастания координаты  $z$ .

Ответ:  $\dot{\mathbf{H}} = (-1,061 \mathbf{1}_x + 2,65 \mathbf{1}_y) 10^{-3}$  А/м.

5.11. Используя данные задачи 5.10, найти зависимость от времени векторов напряженности электрического и магнитного полей в плоскости  $z = 1$  см для электромагнитной волны с частотой 10 ГГц.

Ответ:  $\mathbf{E} = (0,5 \mathbf{1}_x + 0,2 \mathbf{1}_y) \cos\left(2\pi \cdot 10^{10} t - \frac{4}{3} \pi\right)$  В/м;

$\mathbf{H} = (-1,061 \mathbf{1}_x + 2,65 \mathbf{1}_y) \cos\left(2\pi \cdot 10^{10} t - \frac{4}{3} \pi\right)$  мА/м.

5.12. Определить характеристическое сопротивление металла с удельной электрической проводимостью  $6 \cdot 10^7$  См/м и относительной магнитной проницаемостью  $\mu = 1$  на частотах 10 кГц и 1 МГц.

Ответ:  $25,6 \cdot 10^{-6} (1 - j)$  Ом,  $25,6 \cdot 10^{-5} (1 - j)$  Ом.

5.13. Определить комплексную амплитуду вектора напряженности электрического поля плоской электромагнитной волны в металле с параметрами  $\sigma = 6 \cdot 10^7$  См/м,  $\mu = 1$  на частотах 10 кГц и 1 МГц, если в заданной точке пространства комплексная амплитуда вектора напряженности магнитного поля  $\dot{\mathbf{H}} = 25 \mathbf{1}_y$  А/м.

Ответ:  $640 \cdot 10^{-6} \exp\left(-j \frac{\pi}{4}\right) \mathbf{1}_x$  В/м;

$640 \cdot 10^{-5} \exp\left(-j \frac{\pi}{4}\right) \mathbf{1}_x$  В/м.

5.14. Плоская электромагнитная волна распространяется в немагнитной среде без потерь с неизвестным значением диэлектрической проницаемости. Измерения показали, что на пути, равном 10 см, колебание с частотой 1 ГГц приобретает дополнительный по сравнению с вакуумом сдвиг по фазе в  $40^\circ$ .

Определить относительную диэлектрическую проницаемость и коэффициент преломления среды.

Ответ:  $\epsilon = 16/9 = 1,78$ ,  $n = 4/3 = 1,33$ .

5.15. Некоторый диэлектрик на частоте 10 ГГц обладает параметрами:  $\epsilon = 3,8$ ,  $\mu = 1$ ,  $\operatorname{tg} \delta_a = 10^{-4}$ .

Определить длину волны, коэффициент ослабления и характеристическое сопротивление такой среды.

Ответ: 1,54 см,  $2,04 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}$ ,  $193 \exp(j0,5 \cdot 10^{-4})$  Ом.

5.16. Керамика титанат бария ( $\text{BaTiO}_3$ ) на частоте 10 ГГц имеет параметры:  $\epsilon = 144$ ,  $\mu = 1$ ,  $\operatorname{tg} \delta_a = 0,6$ .

Определить длину волны, коэффициент ослабления и характеристическое сопротивление данной среды.

Ответ: 0,24 см,  $758 \text{ м}^{-1}$ ,  $29 \exp(j0,28)$  Ом.

5.17. Во сколько раз уменьшится амплитуда плоской электромагнитной волны с частотой 2 МГц при распространении в среде с параметрами  $\sigma = 10^{-3}$  См/м,  $\epsilon = 2$ ,  $\mu = 1$  на пути в 1 м?

Ответ: в 1,083 раза.

5.18. Вывести формулу для определения уменьшения амплитуды поля плоской электромагнитной волны на пути, равном длине волны в среде с потерями. Во сколько раз уменьшится амплитуда поля на

указанном расстоянии в среде с параметрами  $\varepsilon = 2$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 10^{-4}$  См/м на частоте 10 МГц?

*Ответ:* в 1,327 раза.

5.19. Определить длину волны в меди на частоте 1 МГц. Используя полученный результат, пояснить, почему при определении индуктивности катушки со средним диаметром 1 см, выполненной проводом диаметром 0,1 мм, поле можно считать стационарным, в то время как для расчета добротности такой катушки необходимо учитывать волновой характер электромагнитного поля.

*Ответ:* 0,4189 мм.

5.20. Определить толщину медного экрана, который обеспечивает ослабление амплитуды электромагнитного поля в  $10^4$  раза на частотах 50 Гц и 50 МГц.

*Ответ:* 9,271 см, 29,374 мкм.

5.21. Определить толщину экрана, который обеспечивает ослабление амплитуды электромагнитного поля в  $10^4$  раза на частоте 50 Гц, если он выполнен из материала с  $\sigma = 5 \cdot 10^7$  См/м и  $\mu = 900$ . Сравнить полученный результат с ответом к предыдущей задаче.

*Ответ:* 3,09 мм.

5.22. Комплексная абсолютная диэлектрическая проницаемость аммиака ( $\text{NH}_3$ ) при давлении  $1,33 \cdot 10^3$  Па вблизи частоты  $f_0 = 23\,866$  МГц описывается выражением

$$\tilde{\varepsilon}_a = \varepsilon_0 \left( 1 + \frac{5,4 \cdot 10^9}{f_0 - j + j2,7 \cdot 10^7} \right),$$

Определить коэффициент ослабления волны в такой среде на частотах 23 866 и  $23\,866 \pm 27$  МГц.

*Ответ:* 0,05 и 0,025 м<sup>-1</sup> соответственно.

5.23. Зависимость коэффициента преломления  $n$  от температуры принято описывать температурным коэффициентом

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \frac{dn}{dT},$$

Полагая  $\alpha_n = 4 \cdot 10^{-5}$  град<sup>-1</sup> и  $n = 1,5$ , определить изменение фазы плоской электромагнитной волны, прошедшей путь в 1 м, при изменении температуры на 1° С на частоте  $5 \cdot 10^{14}$  Гц. Каково изменение фазы при тех же условиях на частоте 10 ГГц? Предложить способ технического использования этого эффекта.

*Ответ:* 200л, 0,004л.

5.24\*. Некоторые вещества, например монокристалл ниобата лития ( $\text{LiNbO}_3$ ), изменяют свои диэлектрические свойства под действием электрического поля (электрооптический эффект), что позволяет создать фазовый модулятор в оптическом диапазоне. Если плоская электромагнитная волна проходит в такой среде путь, существенно меньший длины волны модулирующего электрического поля, то с достаточной степенью точности показатель преломления среды может быть описан функцией  $n(f) = n(1 + \delta n \cos 2\pi F)$ , где  $F$  — частота модуляции.

Определить индекс модуляции  $m$  и девиацию частоты  $\Delta\omega$  колеба-



ния, прошедшего в электрооптическом кристалле путь в 10 см, если  $n = 1,5$ ,  $\delta n = 10^{-5}$ ,  $F = 1$  кГц,  $f = 5 \cdot 10^{14}$  Гц. Какова была бы длина  $l$  модулятора, обеспечивающего при тех же параметрах среды прежний индекс модуляции колебания с частотой 10 ГГц?

Ответ:  $m = 5\pi$ ,  $\Delta\omega = 9,87 \cdot 10^4$  с $^{-1}$ ,  $l = 100$  м.

5.25. Комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $z$ , в плоскости  $z = 0$ ,  $\dot{\mathbf{E}} = E_0 (1_x + e^{i\varphi} 1_y)$ .

Определить вид поляризации, если  $\varphi = 60^\circ$ .

Ответ: поляризация эллиптическая с левым вращением вектора  $\mathbf{E}$ ; большая ось эллипса образует угол  $45^\circ$  с осью  $x$ ;  $k_{эл} = \sqrt{3}$ .

5.26. Комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $z$ , в плоскости  $z = 0$ ,  $\dot{\mathbf{E}} = E_0 (1_x - 0,5j 1_y)$ .

Определить вид поляризации и коэффициент эллиптичности.

Ответ: поляризация эллиптическая с правым вращением вектора  $\mathbf{E}$ ; большая ось эллипса совпадает с осью  $x$ ;  $k_{эл} = 2$ .

5.27. Две плоские электромагнитные волны с левой и правой круговой поляризацией в плоскости  $z = 0$  имеют векторы напряженности электрического поля

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}_л &= E_0 (1_x - j 1_y) e^{i\varphi_л}, \\ \mathbf{E}_п &= E_0 (1_x + j 1_y) e^{i\varphi_п}. \end{aligned} \right\}$$

Определить вид поляризации суммарного поля, если разность фаз  $\Delta\varphi = \varphi_л - \varphi_п = 45^\circ$ .

Ответ: поляризация линейная, вектор  $\mathbf{E}$  образует угол  $45^\circ$  с осью  $x$ .

5.28. Монокристалл кварца обладает естественной оптической активностью, т. е. вращает плоскость поляризации волны при ее распространении вдоль определенной кристаллографической оси. Измерения, проведенные на длине волны  $\lambda_0 = 0,6328$  мкм, показали, что на пути в 1 мм плоскость поляризации волны поворачивается на  $17,32$  угл. град.

Определить относительную разность скоростей распространения волн с левой и правой круговой поляризацией в такой среде, полагая показатель преломления равным  $1,5$  (в среднем для обеих поляризаций).

Ответ:  $4,06 \cdot 10^{-5}$ .

5.29. В некоторых веществах молекулы представляют собой структуры в виде нитей, которые выстраиваются вдоль параллельных линий при формировании внутренней структуры вещества. В результате скорость распространения плоских электромагнитных волн с линейной поляризацией зависит от ориентации вектора электрического поля по отношению к этим линиям. Примером такой среды может служить слюда, которая обладает показателями преломления для двух взаимно перпендикулярных направлений вектора  $\mathbf{E}$ , равными  $1,56$  и  $1,59$ .

Определить толщину слюдяной пластины, преобразующей линейную поляризацию в круговую для волны с частотой  $5 \cdot 10^{14}$  Гц.

Ответ:  $5$  мкм.

5.30. Показатель преломления среды — случайная величина с равномерным законом распределения на интервале от 1 до 2. Плоская электромагнитная волна с частотой 300 МГц в плоскости  $z=0$  имеет амплитуду напряженности электрического поля 5 В/м и нулевую начальную фазу.

Определить среднее значение и дисперсию модуля вектора напряженности электрического поля в плоскости  $z=1$  м.

Ответ: 0; 12,5 В<sup>2</sup>/м<sup>2</sup>.

5.31. Однородная плоская электромагнитная волна распространяется в вакууме. Вектор Пойнтинга волны лежит в плоскости  $x, z$  и образует угол  $\varphi$  с осью  $z$ .

Найти расстояние вдоль оси  $z$ , на котором фаза волны изменится на 360°, если частота колебаний равна 100 МГц, а угол  $\varphi = 60^\circ$ .

Ответ: 6 м.

5.32. Две однородные плоские электромагнитные волны с линейной поляризацией распространяются в вакууме так, что вектор Пойнтинга каждой из них лежит в плоскости  $x, z$  и образует с осью  $z$  углы  $\varphi$  и  $180^\circ - \varphi$ .

Определить закон изменения вектора напряженности суммарного электрического поля, если в точке начала координат комплексные амплитуды волн  $\vec{E}_1 = \vec{E}_2 = 1 \cdot \mathbf{1}_y$  В/м. Определить расстояние вдоль оси  $z$  между пучностями электрического поля, если частота колебаний равна 100 МГц, а угол  $\varphi = 60^\circ$ .

$$\text{Ответ: } \vec{E} = 2e^{-j\frac{2\pi}{\lambda_0}x\sin\varphi} \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0}z\cos\varphi\right)\mathbf{1}_y \text{ В/м;}$$

расстояние между пучностями равно 3 м.

5.33. В вакууме распространяется неоднородная плоская электромагнитная волна с частотой 300 МГц. Плоскость равных амплитуд параллельна плоскости  $z=0$ . Фазовый фронт движется вдоль оси  $x$  со скоростью  $10^8$  м/с.

Определить напряженность поля в плоскости  $z=0,1$  м, если в плоскости  $z=0$  она равна 1 В/м, а при  $z=\infty$  обращается в нуль.

Ответ: 0,169 В/м.

5.34. В металле с удельной электрической проводимостью  $\sigma = 5 \cdot 10^7$  См/м распространяется неоднородная плоская волна. Плоскость равных амплитуд параллельна плоскости  $z=0$ . Фаза вдоль оси  $x$  изменяется по закону  $\exp\left(-j\frac{\pi}{\lambda_0}x\right)$ .

Определить направление движения фазового фронта, если  $\mu_a = \mu_0$ ,  $\lambda_0 = 3$  см.

Ответ: под углом 15,37 угл. сек. к оси  $z$ .

5.35. В среде с параметрами  $\varepsilon = 2,25$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0$  распространяется плоская электромагнитная волна с амплитудой напряженности электрического поля 100 В/м.

Определить плотность потока мощности, переносимой волной в направлении распространения.

Ответ: 19,894 Вт/м<sup>2</sup>.

5.36. Амплитуда напряженности магнитного поля плоской электромагнитной волны, распространяющейся в среде с параметрами  $\epsilon = 3,8$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 2 \cdot 10^{-4}$  См/м, в плоскости  $z = 0$  равна 1 А/м.

Определить плотность потока мощности волны на расстоянии  $z$ , равном 1 м от начала координат.

Ответ: 94,844 Вт/м<sup>2</sup>.

5.37. Для плоской электромагнитной волны, распространяющейся в среде с параметрами  $\epsilon = 144$ ,  $\mu = 1$ ,  $\operatorname{tg} \delta_s = 0,6$ , определить плотность потока мощности в плоскости  $z = 0$  на частоте 10 ГГц, если амплитуда напряженности электрического поля в этой плоскости равна 100 В/м.

Ответ: 165 Вт/м<sup>2</sup>.

5.38. Среднее значение вектора Пойнтинга плоской электромагнитной волны в процессе распространения уменьшается на 10% на пути длиной 2 м. Определить коэффициент ослабления волны.

Ответ: 0,025 м<sup>-1</sup>.

5.39. Пучок оптического квантового генератора (лазера) имеет площадь поперечного сечения 4 мм<sup>2</sup>. Мощность генератора 100 Вт.

Определить напряженность электрического поля, полагая, что в пределах пучка излучение квантового генератора представляет собой плоскую электромагнитную волну.

Ответ: 13,73 В/м.

5.40. Некоторые современные лазеры обладают импульсной мощностью порядка 10<sup>6</sup> Вт.

Определить максимальную площадь поперечного сечения пучка, при котором происходит электрический пробой воздуха. При расчетах различием электрических свойств воздуха и вакуума пренебречь, напряженность электрического поля, обеспечивающего пробой, положить равной 30 кВ/см.

Ответ: 0,838 см<sup>2</sup>.

5.41. В лазере, работающем на длине волны 3,39 мкм, в качестве среды, обеспечивающей усиление, используется плазма газового разряда в смеси неона и гелия при малом давлении. На рабочей длине волны свойства такой среды для малой напряженности электрического поля можно описать отрицательной электрической проводимостью  $\sigma = -1,35 \cdot 10^{-2}$  См/м и относительными магнитной и диэлектрической проницаемостями, приближенно равными единице.

Определить коэффициент усиления по мощности для плоской электромагнитной волны на пути в 1 м в такой среде.

Ответ: 164 раза или 22 дБ/м.

5.42.\* В соответствии с принципами теории относительности сигнал не может распространяться со скоростью, большей скорости света. Если относительная диэлектрическая проницаемость среды зависит от частоты, оставаясь всегда положительной величиной, то какое ограничение накладывается на возможную зависимость показателя преломления от частоты для физически реальных сред с  $\epsilon > 0$ ?

Указание: для решения задачи воспользоваться понятием групповой скорости.

Ответ:  $\omega (dn/d\omega) + (n - 1) \geq 0$ .

5.43. В среде с показателем преломления, зависящим от частоты, распространяются два узкополосных радиоимпульса с несущими частотами 10 и 20 ГГц.

Определить разность времен запаздывания импульсов на расстоянии 100 км от точки, где они совпали по времени, если закон изменения показателя преломления записывается в виде  $n(\omega) = 10^{-10} \omega$ .

Ответ: импульс с несущей частотой 20 ГГц будет опережать второй импульс на 41,9 нс.

5.44. В плоскости  $z = 0$  плоская электромагнитная волна представляет собой амплитудно-модулированное колебание с вектором напряженности электрического поля  $E(t) = E_0(1 + M \cos \Omega t) \times \cos \omega t \mathbf{1}_x$  В/м.

Определить напряженность электрического поля в плоскости  $z = 1$  м, если волна распространяется в среде с комплексным показателем преломления

$$n = 1 + \frac{2 \cdot 10^4}{\omega_0 - \omega + j2 \cdot 10^8}.$$

При расчетах положить  $M = 0,5$ ,  $\Omega = 2 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega = 5\pi \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ .

$$\begin{aligned} \text{Ответ: } E(t, z = 1) &= 0,949 E_0 [1 + 0,513 \cos(\Omega t - 0,2\delta)] \times \\ &\times \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{6} 10^3\right) \mathbf{1}_x \text{ В/м.} \end{aligned}$$

## Глава шестая

### ОТРАЖЕНИЕ И ПРЕЛОМЛЕНИЕ ПЛОСКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

#### § 6.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

При распространении плоской электромагнитной волны в пространстве, представляющем собой области с различным значением параметров  $\epsilon_a, \mu_a, \sigma$  и границами раздела в виде плоскостей, возникают отраженные и преломленные волны.

Комплексные амплитуды этих волн связаны с комплексной амплитудой падающей волны коэффициентами отражения

$$\dot{R}_E = \dot{E}_{\text{отр}} / \dot{E}_{\text{пад}}, \quad \dot{R}_H = \dot{H}_{\text{отр}} / \dot{H}_{\text{пад}}$$

и коэффициентами преломления (прохождения)

$$\dot{T}_E = \dot{E}_{\text{пр}} / \dot{E}_{\text{пад}}, \quad \dot{T}_H = \dot{H}_{\text{пр}} / \dot{H}_{\text{пад}}.$$

Эти коэффициенты в каждом конкретном случае могут быть найдены на основании граничных условий на плоскостях, разделяющих среды с различными значениями электродинамических параметров. ..

Могут быть также введены коэффициенты отражения и преломления для среднего значения плотности потока мощности:

$$R_{\Pi} = \Pi_{\text{отр}} / \Pi_{\text{пад}}, \quad T_{\Pi} = \Pi_{\text{пад}}.$$

Если вектор Пойнтинга падающей волны перпендикулярен границе раздела, то

$$\dot{R}_E = \frac{Z_{c2} - Z_{c1}}{Z_{c2} + Z_{c1}}, \quad (6.1)$$

$$\dot{T}_E = \frac{2Z_{c2}}{Z_{c2} + Z_{c1}}, \quad (6.2)$$

где  $Z_{c1}$  — характеристическое сопротивление среды, в которой существует падающая волна.

Выражение (6.1) аналогично формуле для коэффициента отражения по напряжению в линии передачи с волновым сопротивлением  $Z_{c1}$ , нагруженной на сопротивление  $Z_{c2}$ . Эта аналогия полезна при определении коэффициентов  $\dot{R}$  и  $\dot{T}$  для многослойных сред. В конкретных расчетах можно использовать круговую диаграмму полных сопротивлений [12]. При наклонном падении плоской электромагнитной волны на границу раздела задача о нахождении коэффициентов отражения и преломления имеет простое решение только для сред без потерь. Поэтому приведенные соотношения можно применять только тогда, когда потери в реальных средах малы, т. е. если  $\text{tg } \delta_3 \ll 1$ .

При наклонном падении направления распространения волн по отношению к границе раздела задаются углами, измеряемыми относительно нормали к этой границе. Плоскость, содержащая вектор Пойнтинга падающей волны и нормаль к границе раздела, называют *плоскостью падения*.

Из граничных условий следует, что углы падения  $\varphi$ , отражения  $\varphi_0$  и преломления  $\varphi_{\Pi}$  связаны законом зеркального отражения

$$\varphi = \varphi_0$$

и законом Снелля

$$\sin \varphi / \sin \varphi_{\Pi} = \beta_2 / \beta_1, \quad (6.3)$$

где индекс 1 относится к среде, содержащей падающую волну. С учетом выражения для коэффициента фазы  $\beta$  (6.3) можно представить в виде

$$\frac{\sin \varphi}{\sin \varphi_{\Pi}} = \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}},$$

Коэффициенты отражения  $R$  и преломления  $T$  для заданного значения угла падения зависят от ориентации векторов электромагнит-

ного поля по отношению к плоскости падения. Если вектор  $\mathbf{E}$  лежит в этой плоскости, то

$$R_E^{\parallel} = \frac{Z_{c2} \cos \varphi_{\Pi} - Z_{c1} \cos \varphi}{Z_{c2} \cos \varphi_{\Pi} + Z_{c1} \cos \varphi}, \quad (6.4)$$

$$T_E^{\parallel} = \frac{2Z_{c2} \cos \varphi}{Z_{c2} \cos \varphi_{\Pi} + Z_{c1} \cos \varphi}, \quad (6.5)$$

Если вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен плоскости падения, то коэффициенты отражения и преломления выражаются соотношениями

$$R_E^{\perp} = \frac{Z_{c2} \cos \varphi - Z_{c1} \cos \varphi_{\Pi}}{Z_{c2} \cos \varphi + Z_{c1} \cos \varphi_{\Pi}}, \quad (6.6)$$

$$T_E^{\perp} = \frac{2Z_{c2} \cos \varphi}{Z_{c2} \cos \varphi + Z_{c1} \cos \varphi_{\Pi}}, \quad (6.7)$$

Выражения (6.4)–(6.7) при стремлении  $\varphi$  к нулю переходят в (6.1) и (6.2) независимо от ориентации вектора  $\mathbf{E}$  по отношению к плоскости падения. Это связано с тем, что при  $\varphi = 0$  понятие плоскости падения теряет смысл. Для диэлектрических сред, у которых  $\mu = 1$ , коэффициенты  $R$  и  $T$  удобно представить в более компактной форме:

$$R_E^{\perp} = -\frac{\sin(\varphi - \varphi_{\Pi})}{\sin(\varphi + \varphi_{\Pi})}, \quad (6.8)$$

$$R_E^{\parallel} = -\frac{\operatorname{tg}(\varphi - \varphi_{\Pi})}{\operatorname{tg}(\varphi + \varphi_{\Pi})}, \quad (6.9)$$

$$T_E^{\perp} = \frac{2 \sin \varphi_{\Pi} \cos \varphi}{\sin(\varphi + \varphi_{\Pi})}, \quad (6.10)$$

$$T_E^{\parallel} = \frac{2 \sin \varphi_{\Pi} \cos \varphi}{\sin(\varphi + \varphi_{\Pi}) \cos(\varphi - \varphi_{\Pi})}, \quad (6.11)$$

Во всех приведенных ранее формулах при необходимости можно исключить угол преломления  $\varphi_{\Pi}$ , используя закон (6.3).

Из формулы (6.9) следует, что при  $\varphi + \varphi_{\Pi} = \pi/2$  коэффициент отражения для плоских электромагнитных волн, вектор  $\mathbf{E}$  которых лежит в плоскости падения, равен нулю, и отраженная волна на границе раздела двух немагнитных сред не возникает. Угол падения, при котором наблюдается такое явление, называют *углом Брюстера*. Значение угла Брюстера для немагнитных сред находят из соотношения

$$\operatorname{tg} \varphi_B = \sqrt{\varepsilon_2 / \varepsilon_1}. \quad (6.12)$$

Согласно равенству (6.3) при  $\varepsilon_2 \mu_2 < \varepsilon_1 \mu_1$  угол преломления больше угла падения, поэтому если

$$\varphi = \arcsin \sqrt{\frac{\varepsilon_2 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1}},$$

то преломленная волна будет скользить вдоль границы раздела и в соответствии с выражениями (6.4), (6.6) коэффициенты отражения по модулю становятся равными единице. С дальнейшим увеличением угла падения модуль коэффициентов отражения остается равным единице; будет изменяться только фаза коэффициентов  $R^{\parallel}$ ,  $R^{\perp}$ . Такое явление называют *полным внутренним отражением*. Исключая из выражений (6.4), (6.6) угол преломления, можно найти, что при  $\varphi \geq \varphi_{\text{по}} = \arcsin \times \times \sqrt{\epsilon_2 \mu_2 / \epsilon_1 \mu_1}$  коэффициенты отражения равны:

$$R_E^{\parallel} = -\exp \left\{ 2j \arctg \left[ \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - (\epsilon_2 \mu_2 / \epsilon_1 \mu_1)}}{\cos \varphi} \right] \right\}, \quad (6.13)$$

$$R_E^{\perp} = \exp \left\{ 2j \arctg \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\sqrt{\sin^2 \varphi - (\epsilon_2 \mu_2 / \epsilon_1 \mu_1)}}{\cos \varphi} \right] \right\}. \quad (6.14)$$

Коэффициенты преломления  $T_E^{\parallel}$  и  $T_E^{\perp}$  при полном внутреннем отражении не равны нулю. Поле во второй среде представляет собой неоднородную плоскую волну и с учетом закона (6.3) ее можно представить в виде

$$\dot{E}_{\text{пр}} = \dot{T} \dot{E}_{\text{пад}} \exp \left\{ \beta_1 [z \sqrt{\sin^2 \varphi - (\epsilon_2 \mu_2 / \epsilon_1 \mu_1)} - jx \sin \varphi] \right\}, \quad (6.15)$$

где  $\dot{T}$  — коэффициент преломления, равный

$$\dot{T}_E^{\perp} = \frac{2 \cos \varphi}{\frac{\mu_2}{\mu_1} - j \sqrt{\sin^2 \varphi - \frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}}} \frac{\mu_2}{\mu_1}, \quad (6.16)$$

если вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен плоскости падения, и

$$\dot{T}_E^{\parallel} = \frac{2 \cos \varphi}{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \cos \varphi - j \sqrt{\sin^2 \varphi - \frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}}} \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{\epsilon_1 \mu_1}}, \quad (6.17)$$

если вектор  $\mathbf{E}$  параллелен плоскости падения.

Если плоская электромагнитная волна падает под произвольным углом на границу раздела двух сред с потерями, то отраженную и преломленную волны следует считать неоднородными, поскольку плоскость равных амплитуд должна совпадать с границей раздела. Для реальных металлов угол между фазовым фронтом и плоскостью равных амплитуд мал (см. задачу 5.34), поэтому можно полагать, что угол преломления равен нулю. Это позволяет ввести приближенное граничное условие для реальных металлов (*граничное условие Леонтовича*):

$$\dot{\mathbf{E}}_{\tau} = Z_{\text{см}} [\dot{\mathbf{H}} \mathbf{1}_n] \quad \text{или} \quad |\dot{\mathbf{E}}_{\tau}| = |Z_{\text{см}} \dot{H}_{\tau}|, \quad (6.18)$$

где  $\mathbf{1}_n$  — единичный вектор нормали к поверхности металла, направленный внутрь;  $Z_{\text{см}} = \sqrt{j \mu_a \omega / \sigma}$  — характеристическое сопротивление металла;  $\dot{H}_{\tau}$  — касательная к поверхности металла составляющая вектора напряженности магнитного поля.

В выражении (6.18) касательную составляющую вектора напряженности магнитного поля можно приближенно положить равной  $\mathbf{H}_t$ , вычисленной для идеального металла. Ошибка при этом будет незначительной, так как модуль коэффициента отражения близок к единице.

## § 6.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

6.1. Плоская электромагнитная волна падает нормально из вакуума на границу раздела со средой, имеющей параметры  $\epsilon = 81$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0,1$  См/м.

Определить комплексные коэффициенты отражения  $\dot{R}_E$  и преломления  $\dot{T}_E$  на частоте 100 МГц. Полагая, что амплитуда напряженности электрического поля падающей волны в плоскости  $z = 0$ , совпадающей с границей раздела, равна 1 В/м, записать выражение для мгновенного значения напряженности электрического поля отраженной волны.

Решение. Учитывая, что  $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon \epsilon_0 (1 - j \operatorname{tg} \delta_a)$ , из выражения (6.1) получаем

$$\dot{R}_E = \frac{1 - \sqrt{\epsilon} (1 - j \operatorname{tg} \delta_a)^{1/2}}{1 + \sqrt{\epsilon} (1 - j \operatorname{tg} \delta_a)^{1/2}},$$

Вычисления удобнее провести, используя приближенное выражение для корня квадратного

$$\sqrt{1 - j \operatorname{tg} \delta_a} \approx 1 - 0,5 j \operatorname{tg} \delta_a,$$

так как

$$\operatorname{tg} \delta_a = \frac{\sigma}{\omega \epsilon \epsilon_0} = \frac{2}{9} < 1.$$

При этом коэффициент отражения

$$\dot{R}_E = -\frac{8+j}{10-j} = -0,8e^{-j0,025},$$

а коэффициент преломления

$$\dot{T}_E = 1 + \dot{R}_E = \frac{2}{10-j} = 0,2e^{j0,1}.$$

С учетом полученного выражения для  $\dot{R}_E$  комплексная амплитуда напряженности электрического поля отраженной волны

$$\dot{E}_{\text{отр}} = \dot{R}_E \dot{E}_{\text{пад}} = -0,8e^{-j0,025} e^{j\beta_0 z}.$$

Переходя от комплексных амплитуд к мгновенным значениям, найдем

$$E_{\text{отр}} = -0,8 \cos (2\pi 10^8 t - 0,025 + \beta_0 z).$$



**6.2.** Измерения комплексного коэффициента отражения  $\dot{R}_E$  от диэлектрика с неизвестными параметрами  $\epsilon$  и  $\mu$  на частоте 1 ГГц дали величину  $\dot{R}_E = -0,5e^{-j0,09}$ .

Определить параметры диэлектрика  $\epsilon$ ,  $\text{tg } \delta_a$ ,  $\sigma$ , если известно, что  $\mu = 1$ . Падение волны считать нормальным.

**Р е ш е н и е.** Комплексный коэффициент отражения от границы раздела между вакуумом и диэлектриком с параметрами  $\mu = 1$ ,  $\tilde{\epsilon}_a = \epsilon \epsilon_0 (1 - j \text{tg } \delta_a)$

$$\dot{R}_E = \frac{1 - \sqrt{\epsilon} (1 - j \text{tg } \delta_a)^{1/2}}{1 + \sqrt{\epsilon} (1 - j \text{tg } \delta_a)^{1/2}},$$

откуда

$$\frac{1 - \dot{R}_E}{1 + \dot{R}_E} = \sqrt{\epsilon} \sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta_a} e^{-j\pi/2}.$$

Подставляя в это выражение  $\dot{R}_E = -|\dot{R}|e^{-j\psi}$  и приравнявая фазы и модули обеих частей, получим

$$\frac{\delta_a}{2} = -\text{arctg} \left( \frac{|\dot{R}| \sin \psi}{1 + |\dot{R}| \cos \psi} \right) + \text{arctg} \left( \frac{|\dot{R}| \sin \psi}{1 - |\dot{R}| \cos \psi} \right),$$

$$\epsilon \sqrt{1 + \text{tg}^2 \delta_a} = \frac{1 + |\dot{R}|^2 + 2|\dot{R}| \cos \psi}{1 + |\dot{R}|^2 - 2|\dot{R}| \cos \psi}.$$

Производя вычисления, найдем

$$\text{tg } \delta_a = 0,12, \quad \epsilon = 9,0, \quad \sigma = 0,06 \text{ См/м.}$$

**6.3.** Плоская электромагнитная волна падает по нормали из вакуума на пластину диэлектрика без потерь толщиной  $d$ .

Определить условия, при которых пластина становится прозрачной для падающей волны. Показатель преломления  $n$  считать известным.

**Р е ш е н и е.** Формула для коэффициента отражения (6.1) аналогична по форме выражению для коэффициента отражения в теории линий передачи. Поэтому данной задаче может соответствовать схема замещения, изображенная на рис. 6.1.

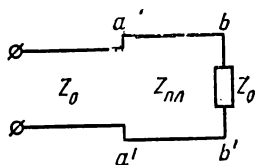


Рис. 6.1

Отображенная на рис. 6.1. Отражения от сечения  $aa'$  в схеме не будет, если входное сопротивление линии в этом сечении равно  $Z_0$ . Это будет в случае, когда электрическая длина отрезка линии  $ab$  кратна половине длины волны. Таким образом, отражения не будет, если

$$d = \frac{\lambda_0}{2n} p = \frac{c}{2nf} p$$

или

$$f = \frac{c}{2nd} p, \quad p = 1, 2, \dots$$

**6.4.** Плоская электромагнитная волна падает под углом  $\varphi$  на поверхность реального металла с электрической проводимостью  $\sigma$ .

Вывести формулу для удельной мощности потерь  $P_{уд}$  на площадке в  $1 \text{ м}^2$ , обусловленной свойствами металла.

**Решение.** Для определения удельной мощности потерь необходимо вычислить среднее значение вектора Пойнтинга, направленного внутрь металла. Если поля на поверхности металла известны, то

$$\Pi_{ср} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}}_{\tau} \dot{\mathbf{H}}_{\tau}^*].$$

Воспользуемся граничным условием Леонтовича (6.18), согласно которому

$$\Pi_{ср} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \{Z_M [\dot{\mathbf{H}} \mathbf{1}_n] \dot{\mathbf{H}}_{\tau}^*\} = \frac{|\dot{\mathbf{H}}_{\tau}|^2}{2} \operatorname{Re}(Z_M) \mathbf{1}_n.$$

Поскольку

$$\operatorname{Re}(Z_M) = \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{2\sigma}},$$

получим следующее выражение для удельной мощности потерь:

$$P_{уд} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{2\sigma}} |\dot{\mathbf{H}}_{\tau}|^2.$$

Если для определения  $\dot{\mathbf{H}}_{\tau}$  использовать решение, полученное для идеального металла, то

$$P_{уд} = 2 \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{2\sigma}} |\dot{\mathbf{H}}_{пад}|^2,$$

когда вектор напряженности магнитного поля падающей волны перпендикулярен плоскости падения, и

$$P_{уд} = 2 \sqrt{\frac{\mu_a \omega}{2\sigma}} \cos^2 \varphi |\dot{\mathbf{H}}_{пад}|^2,$$

когда вектор  $\dot{\mathbf{H}}_{пад}$  лежит в плоскости падения.

### § 6.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**6.5.** Плоская электромагнитная волна падает нормально на границу раздела между вакуумом и идеальным металлом. Амплитуда напряженности электрического поля падающей волны  $0,1 \text{ В/м}$ .

Определить комплексные амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей в вакууме на границе раздела, если вектор напряженности электрического поля падающей волны направлен по оси  $x$  декартовой системы координат с осью  $z$ , направленной перпендикулярно границе раздела в глубь металла. Записать выражения для мгновенных значений напряженностей электрического и магнитного полей в вакууме.

Ответ:

$$\dot{E}_{\text{отр}} = -0,1 \, 1_x \, \text{В/м},$$

$$\dot{H}_{\text{отр}} = 0,265 \, 1_y \, \text{мА/м},$$

$$E(t, z) = 0,2 \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} z\right) \sin \omega t \, 1_x \, \text{В/м},$$

$$H(t, z) = 0,53 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda_0} z\right) \cos \omega t \, 1_y \, \text{мА/м}.$$

6.6. Плоская электромагнитная волна падает нормально на границу раздела между вакуумом и металлом с удельной электрической проводимостью  $\sigma = 6 \cdot 10^7 \, \text{См/м}$ .

Определить коэффициент отражения по электрическому полю на частоте 10 ГГц, если  $\mu_a = \mu_0$ .

Ответ:  $R_E = -1 + 1,36 \cdot 10^{-4} (1 + j)$ .

6.7. Плоская электромагнитная волна с частотой 10 МГц и средним значением плотности потока мощности 1 Вт/м падает нормально из вакуума на поверхность металла с удельной электрической проводимостью  $\sigma = 6 \cdot 10^7 \, \text{См/м}$ .

Определить напряженность электрического поля и среднее значение плотности потока мощности в металле непосредственно у границы раздела.

Ответ:  $1,185 \cdot 10^{-4} (1 + j) \, \text{В/м}$ ,  $8,6 \cdot 10^{-6} \, \text{Вт/м}^2$ .

6.8. Плоская электромагнитная волна падает нормально на границу раздела между вакуумом и диэлектриком с параметрами  $\epsilon = 4$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0$ .

Определить среднее значение плотности потока мощности в диэлектрике, если среднее значение потока мощности падающей волны 1 Вт/м.

Ответ:  $8/9 \, \text{Вт/м}^2$ .

6.9. Используя эквивалентную схему в виде отрезков линии передачи, вывести формулу для коэффициента отражения по электрическому полю от диэлектрической пластины толщиной  $d$  и диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_{\text{пл}}$  при нормальном падении плоской электромагнитной волны с заданной частотой. Потерями в пластине пренебречь. Вычислить коэффициент отражения для  $\epsilon_{\text{пл}} = 2,4$  на длинах волн  $\lambda_{01} = 3,1 \, \text{см}$  и  $\lambda_{02} = 6,2 \, \text{см}$ ,  $d = 0,5 \, \text{см}$ .

Указание: воспользоваться формулой для входного сопротивления отрезка линии длиной  $d$ , нагруженного на сопротивление  $Z_0$ .

Ответ: 
$$\dot{R}_E = j \frac{(1 - \epsilon_{\text{пл}}) \operatorname{tg} \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon_{\text{пл}}} d \right)}{2 \sqrt{\epsilon_{\text{пл}}} + j (1 + \epsilon_{\text{пл}}) \operatorname{tg} \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon_{\text{пл}}} d \right)},$$

$$\dot{R}_{E1} = -0,412, \quad \dot{R}_{E2} = -j0,412/(0,9118 + j).$$

6.10. Используя круговую диаграмму, построить распределение амплитуды электрического и магнитного полей вдоль оси, перпендикулярной пластине, для условий задачи 6.9, полагая амплитуду напряженности электрического поля падающей волны равной 1 В/м.

6.11. Определить диэлектрическую проницаемость и толщину просветляющего покрытия на поверхности плавленого кварца для излучения с длиной волны 0,63 мкм (излучение квантового генератора на смеси неона и гелия), обеспечивающие равенство нулю коэффициента отражения при нормальном падении.

*Указание:* аналогом является задача о согласовании нагрузки с линией передачи через четвертьволновый трансформатор [12].

*Ответ:*  $\varepsilon = 1,95$ ,  $d = 0,1125$  мкм.

6.12. Вывести формулу для коэффициента преломления плоской электромагнитной волны, падающей нормально из вакуума на пластину толщиной  $d$ , полагая известными коэффициент распространения и характеристическое сопротивление  $Z_c$  волн в пластине.

*Указание:* воспользоваться граничными условиями на плоскостях  $z = 0$  и  $z = d$  для двух волн слева от пластины и внутри нее и одной прошедшей волны справа.

*Ответ:* 
$$\hat{T}_E = \frac{2}{2 \cos \gamma d + i \left( \frac{Z_0}{Z_c} + \frac{Z_c}{Z_0} \right) \sin \gamma d}.$$

6.13. Используя результат задачи 6.12, вычислить коэффициент преломления поля пластины керамики титанат бария ( $\text{BaTiO}_3$ ) на частоте 10 ГГц, если  $\varepsilon = 144$ ,  $\mu = 1$ ,  $\text{tg } \delta_a = 0,6$ ,  $d = 0,1$  мм.

*Ответ:*  $\hat{T}_E = (1,9 + j1,5)^{-1}$ .

6.14. Плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в вакууме, падает нормально на пластину диэлектрика толщиной  $d$  с отрицательным значением относительной диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_{\text{пл}}$ .

Используя результат задачи 6.12, вывести формулу для коэффициента преломления  $\hat{T}_E$ . Вычислить  $T_E$  для  $\varepsilon_{\text{пл}} = -1$ ;  $d = 1$  см на частоте 10 ГГц.

*Ответ:* 
$$\hat{T}_E = \frac{2}{2 \text{ch} \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{|\varepsilon_{\text{пл}}|} d \right) + i \frac{|\varepsilon_{\text{пл}}| - 1}{\sqrt{|\varepsilon_{\text{пл}}|}} \text{sh} \left( \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{|\varepsilon_{\text{пл}}|} d \right)},$$
  

$$T_E = 0,244.$$

6.15.\* В оптическом диапазоне длин волн коэффициент отражения от реальных металлов не превышает 95%, поэтому для создания высококачественных зеркал используют многослойные диэлектрические покрытия.

Найти при  $\varphi = 0$  выражения для коэффициента отражения по мощности от структуры, состоящей из  $N$  чередующихся слоев идеальных диэлектриков толщиной  $\lambda_0/(4\sqrt{\varepsilon})$  с относительными диэлектрическими проницаемостями  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$ , нанесенных на подложку с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_3$ . Вычислить коэффициент отражения для зеркала, если  $\varepsilon_1 = 2,5$ ,  $\varepsilon_2 = 6,25$ ,  $\varepsilon_3 = 3,8$ ,  $N = 11$ .

*Указание:* при решении использовать выражение для входного сопротивления отрезка линии передачи длиной  $\lambda/4$ .

ответ:

$$R = \left[ \frac{1 - \sqrt{\epsilon_3} (\epsilon_1/\epsilon_2)^{N/2}}{1 + \sqrt{\epsilon_3} (\epsilon_1/\epsilon_2)^{N/2}} \right]^2, \quad N \text{ — четное,}$$

$$R = \left[ \frac{1 - \frac{\epsilon_1}{\sqrt{\epsilon_3}} (\epsilon_2/\epsilon_1)^{\frac{N+1}{2}}}{1 + \frac{\epsilon_1}{\sqrt{\epsilon_3}} (\epsilon_2/\epsilon_1)^{\frac{N+1}{2}}} \right]^2, \quad N \text{ — нечетное,}$$

$R = 98,73\%$ .

6.16. Плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в вакууме, падает на безграничную пластину идеального металла под углом  $\varphi$ .

Найти распределение суммарного электрического и магнитного полей в вакууме, если вектор  $\mathbf{E}$  падающей волны перпендикулярен плоскости падения.

Ответ: в системе координат с осью  $z$ , направленной внутрь металла, с осью  $x$ , лежащей в плоскости падения и совпадающей с границей раздела, выражения для полей имеют вид

$$\mathbf{E} = 2jE_{\text{пад}} \sin(\beta_0 z \cos \varphi) e^{-j\beta_0 x \sin \varphi} \mathbf{1}_y \text{ В/м.}$$

$$\mathbf{H} = 2H_{\text{пад}} [\cos \varphi \cos(\beta_0 z \cos \varphi) \mathbf{1}_x + j \sin \varphi \sin(\beta_0 z \cos \varphi) \mathbf{1}_z] \times \\ \times e^{-j\beta_0 x \sin \varphi} \text{ А/м.}$$

6.17. Найти условия, при которых плоская электромагнитная волна будет распространяться путем отражений от двух безграничных пластин идеального металла, расположенных в вакууме параллельно друг другу на расстоянии  $a$ , если угол падения равен  $\varphi$ . Для каких значений  $\lambda_0$  возможно распространение волн в такой структуре при заданном  $a$ ?

Ответ:  $a = m \frac{\lambda_0}{2 \cos \varphi}$ ,  $\lambda_0 \leq \frac{2a}{m}$ , где  $m$  — целое число.

6.18. Для условий задачи 6.16 определить направление переноса энергии, ориентацию и скорость движения фазового фронта  $v_\phi$ . Вычислить  $v_\phi$  для  $\varphi = 45^\circ$ .

Ответ: энергия переносится вдоль оси  $x$ , так как

$$\Pi_{\text{ср}} = 2\dot{E}_{\text{пад}} \dot{H}_{\text{пад}} \sin \varphi \sin^2(\beta z \cos \varphi) \mathbf{1}_x \text{ Вт/м}^2,$$

фазовый фронт перпендикулярен границе раздела и движется со скоростью

$$v_\phi = c / \sin \varphi = \sqrt{2} c.$$

6.19. Определить скорость движения фазового фронта вдоль зазора между двумя параллельными бесконечными пластинами идеального металла (см. задачу 6.17). Изобразить зависимость фазовой ско-

рости от длины волны  $\lambda_0$  для нескольких значений  $m$ . Объяснить полученный результат.

Ответ: 
$$v_{\phi} = \frac{c}{\sqrt{1 - [m\lambda_0/(2a)]^2}}.$$

6.20. Плоская электромагнитная волна, вектор напряженности электрического поля которой лежит в плоскости падения, падает из вакуума на поверхность диэлектрика с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_a = \epsilon\epsilon_0$  ( $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0$ ) под углом  $\varphi = \arctg \sqrt{\epsilon}$ .

Найти соотношение между векторами Пойнтинга падающей и прошедшей волн. Обсудить полученный результат с точки зрения закона сохранения энергии.

Ответ:  $P_{\text{пр}} = P_{\text{пад}}/\sqrt{\epsilon}$ .

6.21. Плоская электромагнитная волна, вектор напряженности электрического поля которой лежит в плоскости падения, падает из диэлектрика с параметрами  $\mu = 1$ ,  $\epsilon_1 = 9$ ,  $\sigma_1 = 0$  на поверхность диэлектрика с параметрами  $\mu_2 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 1$ ,  $\sigma_2 = 0$ .

При каких углах падения: а) вся энергия падающей волны переходит во вторую среду; б) вся энергия падающей волны отражается от границы раздела?

Ответ: а)  $18^\circ 25'$ , б)  $> 19^\circ 30'$ .

6.22. Плоская электромагнитная волна с круговой поляризацией падает из вакуума на поверхность плавленого кварца.

Определить угол падения, при котором осуществляется преобразование круговой поляризации в линейную.

Ответ:  $62^\circ 50'$ .

6.23. Плоская электромагнитная волна с круговой поляризацией падает из вакуума под углом  $\varphi$  на границу раздела со средой, показатель преломления которой равен 1,531.

Найти вид поляризации отраженной волны для углов падения  $0^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $56^\circ 51'$ .

Ответ:  $\varphi = 0^\circ$  — поляризация круговая,  $\varphi = 45^\circ$  — поляризация эллиптическая с соотношением осей 3,177,  $\varphi = 56^\circ 51'$  — поляризация линейная с вектором  $\mathbf{H}$ , лежащим в плоскости падения.

6.24. Найти вид поляризации преломленной волны для углов падения  $20^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$  и  $80^\circ$ , если падающая на границу раздела между вакуумом и средой с показателем преломления  $n = 1,5$  плоская электромагнитная волна имеет круговую поляризацию.

Ответ: поляризация эллиптическая с соотношением осей 1,007; 1,045; 1,101; 1,286.

6.25. Плоская электромагнитная волна падает на границу раздела сред с различными значениями относительной магнитной проницаемости.

Будет ли существовать угол, при котором отсутствует отраженная волна? Если да, то как величина этого угла связана с параметрами сред?

**Ответ:** отраженная волна будет отсутствовать при падении под углом Брюстера  $\varphi_B$ , причем

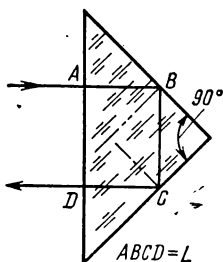
$$\operatorname{tg} \varphi_B = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \frac{\varepsilon_2 \mu_1 - \varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_2 \mu_2 - \varepsilon_1 \mu_1}} \quad \text{— для вектора } \mathbf{E}, \text{ лежащего в плоскости падения,}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_B = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\varepsilon_2 \mu_1 - \varepsilon_1 \mu_2}{\varepsilon_1 \mu_1 - \varepsilon_2 \mu_2}} \quad \text{— для вектора } \mathbf{H}, \text{ лежащего в плоскости падения.}$$

**6.26.** Вычислить угол полного внутреннего отражения для следующих диэлектриков: дистиллированной воды ( $\varepsilon = 81$ ), слюды ( $\varepsilon = 6$ ), оптического стекла ( $\varepsilon = 2,25$ ), полупроводника ( $\varepsilon = 16$ ).

**Ответ:**  $6^\circ 20'$ ,  $24^\circ$ ,  $41^\circ 40'$ ,  $14^\circ 30'$ .

**6.27.** Плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в среде с параметрами  $\varepsilon = 2,25$ ,  $\mu = 1$ ,  $\sigma = 0$ , падает под углом  $45^\circ$  на границу раздела между средой и вакуумом.



Определить коэффициент отражения для волн, поляризованных в плоскости падения и перпендикулярно ей.

**Ответ:**

$$R_E^{\parallel} = -\exp\{j73^\circ 40'\}, \quad R_E^{\perp} = \exp\{j36^\circ 40'\}.$$

**6.28.** Призма, показанная на рис. 6.2, используется для поворота лучка электромагнитных волн.

Определить комплексный коэффициент передачи устройства, т. е. отношение комплексных амплитуд напряженности электрического поля входящей и выходящей волн на передней грани призмы, принимая во внимание только однократные отражения. Показатель преломления материала призмы принять равным 1,5.

**Ответ:**

$$K = -0,96 e^{j73^\circ 40'} e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} 1,5L} \quad \text{— для вектора } \mathbf{E}, \text{ лежащего в плоскости падения,}$$

$$K = 0,96 e^{j36^\circ 40'} e^{-j \frac{2\pi}{\lambda_0} 1,5L} \quad \text{— для вектора } \mathbf{E}, \text{ перпендикулярного плоскости падения.}$$

**6.29.** Каким показателем преломления должна обладать среда, чтобы в результате однократного полного внутреннего отражения на границе ее раздела с вакуумом можно было преобразовать волну с линейной поляризацией в волну с круговой поляризацией?

**Ответ:**  $n \geq 1 + \sqrt{2} = 2,41$ .

**6.30.** Электромагнитная волна, вектор напряженности электрического поля которой образует угол  $135^\circ$  с плоскостью падения\*, отражается от границы раздела между водой ( $\varepsilon = 81$ ) и вакуумом.

\* Угол отсчитывается от плоскости падения против часовой стрелки, если смотреть с конца вектора Пойнтинга.

Под каким углом должна падать волна, чтобы отраженная волна имела круговую поляризацию? Какая при этом будет поляризация — правая или левая?

*Ответ:*  $6^{\circ}29'$  или  $44^{\circ}38'$ ; поляризация правая круговая.

**6.31.** Плоская электромагнитная волна с линейной поляризацией падает на границу раздела между средой с показателем преломления 1,5 и вакуумом. Вектор напряженности электрического поля образует с плоскостью падения угол  $45^{\circ}$  (см. сноску к задаче 6.30).

Определить вид поляризации отраженной волны, если угол падения равен  $45^{\circ}$ .

*Ответ:* поляризация левая эллиптическая; большая ось эллипса образует угол  $45^{\circ}$  с плоскостью падения, соотношением осей  $1 : 0,333$ .

**6.32.** При фотографировании на фоне водной поверхности иногда применяют поляризационные фильтры (устройства, пропускающие волны только одной поляризации).

Для чего служит такой фильтр и как его следует ориентировать, чтобы достигнуть желаемого результата?

**6.33.** Аквалангист, плывущий по дну водоема, смотрит вертикально вверх.

Какую картину он будет наблюдать? На каком расстоянии от камня, лежащего на дне, он должен находиться, чтобы увидеть его, если глубина водоема 3 м, показатель преломления воды 1,33? Расстоянием между глазом и дном можно пренебречь.

*Ответ:* не менее 6,8 м.

**6.34.** Плоская электромагнитная волна, распространяющаяся в среде с показателем преломления  $n = 1,5$ , падает под углом  $45^{\circ}$  на границу раздела между средой и вакуумом. Напряженность электрического поля падающей волны 1 В/м.

Определить напряженность электрического поля в вакууме на расстоянии 6 см от границы раздела, если частота колебаний равна 10 ГГц, а вектор напряженности электрического поля перпендикулярен плоскости падения.

*Ответ:* 0,0226 В/м.

**6.35.** Плоская электромагнитная волна распространяется в безграничной плоскопараллельной пластине диэлектрика с  $\epsilon_a = \epsilon_{пл}\epsilon_0$  под углом  $\theta$  к границе раздела с вакуумом.

При каких условиях волна не будет покидать пластину?

*Ответ:*  $\sin(90^{\circ} - \theta) \geq 1/\sqrt{\epsilon_{пл}}$ .

**6.36. \*** Вблизи нагретой поверхности температура воздуха больше, чем на большом удалении от нее, поэтому показатель преломления воздуха вблизи поверхности уменьшается. При определенном градиенте температуры может возникнуть явление полного внутреннего отражения для плоской электромагнитной волны, падающей на поверхность. Это проявляется в возникновении миража над нагретой поверхностью.

Заменяя истинную зависимость температуры скачком, определить перепад температуры, который позволяет наблюдать мираж под углом



1° к поверхности, приняв зависимость показателя преломления от температуры в виде  $n(T) = 1 + 0,003(1 - \Delta T/300)$ .

Ответ:  $15,3^\circ$ .

6.37.\* Плоская электромагнитная волна падает из вакуума на поверхность диэлектрика, показатель преломления которого зависит от частоты.

Исследовать угловую дисперсию преломления волны  $d\varphi_{\text{п}}/df$ . Вычислить эту величину при угле падения  $60^\circ$ , если частотная зависимость показателя преломления имеет вид  $n = 1,75 + 1,68 \cdot 10^{-16}(f - 5 \cdot 10^{14})$ .

$$\text{Ответ: } \frac{d\varphi_{\text{п}}}{df} = \frac{\sin \varphi}{n \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}} \frac{dn}{df},$$

$$\frac{d\varphi_{\text{п}}}{df} = -0,3132 \cdot 10^{-14} \text{ угл. град/Гц.}$$

6.38. Плоская электромагнитная волна падает под углом  $60^\circ$  на металлическую поверхность.

Найти амплитуду напряженности электрического поля на поверхности металла, если  $\sigma = 5 \cdot 10^7 \text{ См/м}$ ,  $\mu = 1$ ,  $f = 100 \text{ ГГц}$ , а вектор напряженности магнитного поля с амплитудой  $1 \text{ А/м}$  лежит в плоскости падения. Определить удельную мощность потерь (см. задачу 6.4).

$$\text{Ответ } \dot{E} = 2\sqrt{2} \pi \cdot 10^{-2}(1 + j) \text{ В/м,}$$

$$P_{\text{уд}} = \sqrt{2} \pi \cdot 10^{-2} \text{ Вт/м}^2.$$

## Глава седьмая

### ВОЛНОВОДЫ

#### § 7.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Волновод представляет собой полую металлическую трубу произвольного сечения, внутри которой распространяются электромагнитные волны. Наиболее часто применяют волноводы прямоугольного

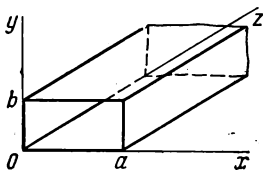


Рис. 7.1

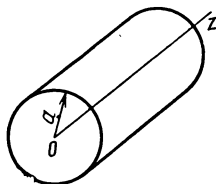


Рис. 7.2

(рис. 7.1) и круглого (рис. 7.2) сечений, реже — волноводы более сложного сечения, например П-образные и Н-образные.

В волноводах с идеально проводящими стенками и однородным заполнением могут распространяться волны электрического типа (Е),

у которых  $\dot{H}_z \equiv 0$ , а  $E_z \neq 0$  (направление оси  $z$  совпадает с продольной осью волновода), и волны магнитного типа (Н), у которых  $\dot{E}_z \equiv 0$ , а  $\dot{H}_z \neq 0$ .

Анализ волн в волноводах производят посредством решения уравнения Гельмгольца для составляющих  $\dot{E}_z$  или  $\dot{H}_z$  при равенстве нулю тангенциальной составляющей вектора электрического поля на стенках волновода [2].

Предположим, что волновод заполнен диэлектриком с относительной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  и магнитной проницаемостью  $\mu = 1$ . Каждый конкретный тип волны в волноводе может распространяться в том случае, если

$$\lambda_0 / \sqrt{\epsilon} < \lambda_{кр}, \quad (7.1)$$

где  $\lambda_0$  — длина волны генератора;  $\lambda_{кр}$  — критическая длина волны, которая определяется размерами и формой поперечного сечения волновода.

Для волн типа  $E_{mn}$  и  $H_{mn}$  в прямоугольном волноводе

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2}}, \quad (7.2)$$

где  $a, b$  — размеры поперечного сечения волновода (см. рис. 7.1)

Для волн типа  $E_{mn}$  в круглом волноводе

$$\lambda_{кр} = 2\pi a / \nu_{mn}, \quad (7.3)$$

где  $a$  — радиус волновода;  $\nu_{mn}$  —  $n$ -й корень уравнения  $J_m(x) = 0$ .

Для волн типа  $H_{mn}$  в круглом волноводе

$$\lambda_{кр} = 2\pi a / \mu_{mn}, \quad (7.4)$$

где  $\mu_{mn}$  —  $n$ -й корень уравнения  $J'_m(x) = 0$ .

Значения корней  $\nu_{mn}$  и  $\mu_{mn}$  приведены в Приложении I.

Фазовая скорость волны в волноводе определяется величиной продольного волнового числа:

$$h = \sqrt{\beta^2 \epsilon - g^2}, \quad (7.5)$$

где  $\beta = 2\pi/\lambda_0$ ;  $g = 2\pi/\lambda_{кр}$  — поперечное волновое число.

Если выполняется условие (7.1), то  $\beta^2 \epsilon > g^2$ , значение  $h$  действительное и данный тип волны распространяется. Если условие (7.1) не выполняется, то  $\beta^2 \epsilon < g^2$ , значение  $h$  мнимое и данный тип волны затухает, не распространяясь. В этом случае формула (7.5) позволяет определить коэффициент ослабления волны.

Для нахождения фазовой скорости и длины волны в волноводе можно воспользоваться соотношением

$$h = 2\pi/\lambda_{\phi} = \omega/v_{\phi}, \quad (7.6)$$

где  $\lambda_{\phi}$  — длина волны в волноводе.

Из (7.6) получаем расчетные формулы для фазовой скорости, длины волны и групповой скорости.

Фазовая скорость

$$v_{\phi} = \frac{c/\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2}}. \quad (7.7)$$

Длина волны в волноводе

$$\lambda_{\text{в}} = \frac{\lambda_0/\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2}}. \quad (7.8)$$

Групповая скорость

$$v_{\text{гр}} = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{1 - \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2}, \quad (7.9)$$

где  $c$  — скорость света в свободном пространстве.

Решая уравнения Гельмгольца, можно получить следующие выражения для составляющих векторов напряженностей электрического и магнитного полей волн типа  $E_{mn}$  в прямоугольном волноводе:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= -j \frac{h\pi m}{g^2 a} E_0 \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_y &= -j \frac{h\pi n}{g^2 b} E_0 \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_z &= E_0 \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_x &= j\omega\varepsilon_a \frac{\pi n}{g^2 b} E_0 \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_y &= -j\omega\varepsilon_a \frac{\pi m}{g^2 a} E_0 \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_z &= 0. \end{aligned} \quad (7.10)$$

Низшей из волн электрического типа является волна  $E_{11}$ . Картина силовых линий поля волны  $E_{11}$  изображена на рис. 7.3.

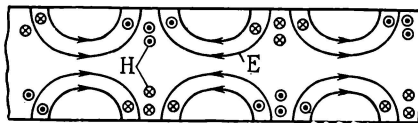


Рис. 7.3

Выражения для составляющих векторов напряженностей полей волн типа  $H_{mn}$  в прямоугольном волноводе записываются в виде

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= j\omega\mu_a \frac{\pi n}{g^2 b} H_0 \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_y &= -j\omega\mu_a \frac{\pi m}{g^2 a} H_0 \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_z &= 0, \end{aligned} \quad (7.11)$$

$$\begin{aligned}
\dot{H}_x &= j \frac{h\pi m}{g^2 a} H_0 \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}, \\
\dot{H}_y &= j \frac{h\pi n}{g^2 b} H_0 \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}, \\
\dot{H}_z &= H_0 \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) e^{-jhz}.
\end{aligned} \quad (7.11)$$

Основным типом волны в прямоугольном волноводе при  $a > b$  является волна  $H_{10}$ , для которой  $\lambda_{кр} = 2a$ , ближайшими высшими типами — волны  $H_{20}$ ,  $H_{01}$ ,  $H_{11}$ . Картина силовых линий поля простейших волн магнитного типа изображена на рис. 7.4.

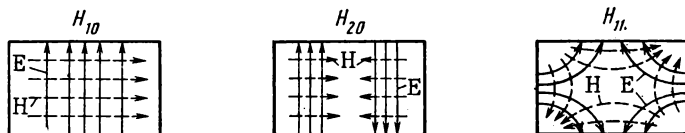


Рис. 7.4

Наибольшее практическое значение имеет волна типа  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе. Составляющие векторов поля этой волны описываются выражениями:

$$\begin{aligned}
\dot{E}_x &= 0, \\
\dot{E}_y &= E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}, \\
\dot{E}_z &= 0, \\
\dot{H}_x &= -\frac{h}{\omega\mu_a} E_0 \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}, \\
\dot{H}_y &= 0, \\
\dot{H}_z &= j \frac{\pi}{a} \frac{E_0}{\omega\mu_a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) e^{-jhz}.
\end{aligned} \quad (7.12)$$

Составляющие векторов поля волны типа  $E_{mn}$  в круглом волноводе имеют вид

$$\begin{aligned}
\dot{E}_r &= -j \frac{h}{g} E_0 J'_m(gr) \cos(m\varphi) e^{-jhz}, \\
\dot{E}_\varphi &= j \frac{hm}{g^2 r} E_0 J_m(gr) \sin(m\varphi) e^{-jhz}, \\
\dot{E}_z &= E_0 J_m(gr) \cos(m\varphi) e^{-jhz}, \\
\dot{H}_r &= -j \frac{\omega\epsilon_a}{g^2 r} m E_0 J_m(gr) \sin(m\varphi) e^{-jhz}, \\
\dot{H}_\varphi &= -j \frac{\omega\epsilon_a}{g} E_0 J'_m(gr) \cos(m\varphi) e^{-jhz}, \\
\dot{H}_z &= 0.
\end{aligned} \quad (7.13)$$

Низшей среди волн электрического типа в круглом волноводе является волна  $E_{01}$ , для которой  $\lambda_{кр} = 2,613a$ , ближайшим высшим типом — волна  $E_{11}$ . Картина силовых линий поля волн типов  $E_{01}$  и  $E_{11}$  изображена на рис. 7.5.

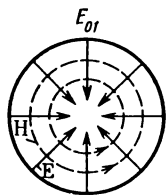


Рис. 7.5

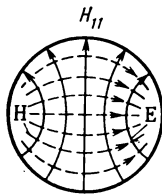
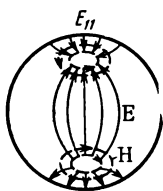
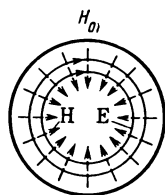


Рис. 7.6



Выражения для составляющих векторов поля волн типа  $H_{mn}$  в круглом волноводе имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{E}_r &= j \frac{\omega \mu a}{g^2 r} m H_0 J_m (gr) \sin (m\varphi) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_\varphi &= j \frac{\omega \mu a}{g} H_0 J'_m (gr) \cos (m\varphi) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_z &= 0, \\ \dot{H}_r &= -j \frac{h}{g} H_0 J'_m (gr) \cos (m\varphi) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_\varphi &= j \frac{hm}{g^2 r} H_0 J_m (gr) \sin (m\varphi) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_z &= H_0 J_m (gr) \cos (m\varphi) e^{-jhz}.\end{aligned}\quad (7.14)$$

Основным типом волны в круглом волноводе, имеющим наибольшую критическую длину, является волна  $H_{11}$ , для которой  $\lambda_{кр} = 3,413a$ . Из других волн магнитного типа в круглом волноводе часто используют волну  $H_{01}$ , для которой  $\lambda_{кр} = 1,640a$ . Картина силовых линий поля волн типов  $H_{11}$  и  $H_{01}$  изображена на рис. 7.6.

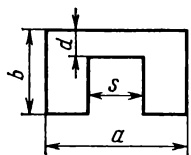
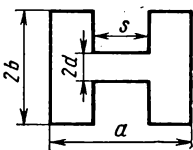


Рис. 7.7



Кроме прямоугольных и круглых волноводов в технике СВЧ используют волноводы П- и Н-образного сечения (рис. 7.7).

Их особенность состоит в том, что при тех же габаритных размерах  $a$  и  $b$  они имеют большую критическую длину волны основного типа, чем прямоугольные волноводы, в то время как критическая длина волны высших типов изменяется мало. Вследствие этого рабочий диапазон частот П- и Н-образных волноводов значительно шире по сравнению с прямоугольными. Анализ П- и Н-образных волноводов

производят численными методами. Критическая длина волны основного типа  $H_{10}$

$$\lambda_{кр} = \frac{2a}{\xi}, \quad (7.15)$$

где  $\xi$  — фактор понижения критической частоты, зависящий от размеров выступа  $d$  и  $s$ .

Значения  $\xi$  для некоторых размеров волноводов приведены на рис. 7.8, а, б. Более подробные сведения о П- и Н-образных волноводах можно найти в [6].

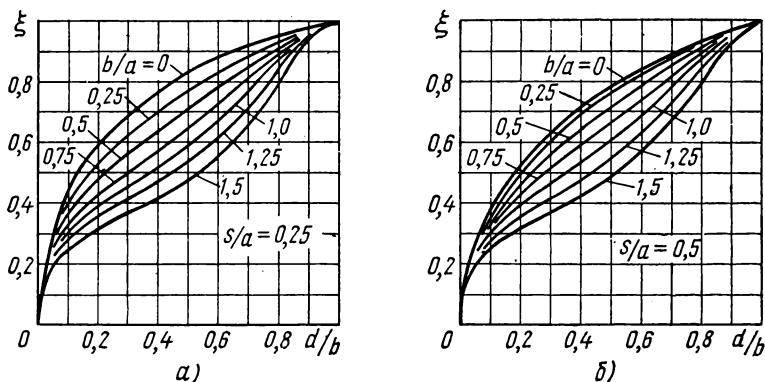


Рис. 7.8

Характеристическим сопротивлением  $Z_c$  волновода называется отношение поперечных составляющих векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . Для волн электрического типа

$$Z_{cE} = Z_0 \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2}. \quad (7.16)$$

Для волн магнитного типа

$$Z_{cH} = \frac{Z_0}{\sqrt{1 - \left( \frac{\lambda}{\lambda_{кр}} \right)^2}}, \quad (7.17)$$

где  $Z_0$  — характеристическое сопротивление плоской волны в свободном пространстве.

Мощность, переносимую волной любого типа в волноводе, определяют интегрированием вектора Пойнтинга по поперечному сечению волновода:

$$P_{cp} = \frac{1}{2} \int_S \operatorname{Re} \{ \mathbf{1}_z [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}] \} dS. \quad (7.18)$$

Подставляя выражения для составляющих векторов поля (7.12) в (7.18), получим формулу для расчета мощности, переносимой волной типа  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе:

$$P = \frac{ab \sqrt{1 - [\lambda_0/(2a)]^2}}{4Z_0} E_0^2, \quad (7.19)$$

где  $E_0$  — максимальная амплитуда напряженности электрического поля в волноводе.

Аналогично выводится формула для расчета мощности, переносимой волной типа  $H_{11}$  в круглом волноводе:

$$P = \frac{\pi a^2 E_0^2}{4,28Z_0} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}. \quad (7.20)$$

Максимальная переносимая мощность в волноводе определяется максимально допустимой (пробивной) напряженностью электрического поля в волноводе. Для сухого воздуха при атмосферном давлении  $E_{\max} = 30$  кВ/см.

Затухание волн в волноводах зависит от потерь в металлических стенках и в материале, заполняющем волновод. Результирующий коэффициент ослабления волны в волноводе равен сумме коэффициентов ослабления, вызванных потерями в металлических стенках и в диэлектрике:

$$\alpha_{\text{общ}} = \alpha_m + \alpha_d.$$

Коэффициент ослабления вследствие потерь в металлических стенках для любой волны в волноводе произвольного сечения

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \frac{R_s \int_L |\dot{H}_\tau|^2 dl}{\int_S \operatorname{Re} [\dot{E} \dot{H}^*] dS}, \quad (7.21)$$

где  $R_s = \sqrt{\frac{\omega \mu_a}{2\sigma}}$  — поверхностное сопротивление металла;  $\dot{H}_\tau$  — составляющая магнитного поля, тангенциальная к поверхности металла.

Интеграл в числителе выражения (7.21) берут по контуру сечения волновода, интеграл в знаменателе — по его поперечному сечению.

Подставляя соотношения для составляющих векторов поля в общее выражение (7.21), получим расчетные формулы для коэффициентов ослабления конкретных типов волн в волноводах:

для волн типа  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе

$$\alpha_m = \frac{R_s \left[ 1 + \left( \frac{\lambda_0}{2a} \right)^2 \frac{2b}{a} \right]}{Z_0 b \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda_0}{2a} \right)^2}}; \quad (7.22)$$

для волн типа  $H_{mn}$  в прямоугольном волноводе ( $n \geq 1$ )

$$\alpha_m = \frac{2R_S}{Z_0 b \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}} \left\{ \left(1 + \frac{b}{a}\right) \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2 + \left[1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2\right] \times \right. \\ \left. \times \frac{\frac{b}{a} \left(\frac{b}{a} n^2 + m^2\right)}{\frac{b^2 n^2}{a^2} + m^2} \right\}; \quad (7.23)$$

для волн типа  $E_{mn}$  в прямоугольном волноводе

$$\alpha_m = \frac{2R_S \left[ n^2 \left(\frac{b}{a}\right)^3 + m^2 \right]}{Z_0 b \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2} \left[ n^2 \left(\frac{b}{a}\right)^2 + m^2 \right]}; \quad (7.24)$$

для волн типа  $H_{mn}$  в круглом волноводе

$$\alpha_m = \frac{R_S}{Z_0 a \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}} \left[ \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2 + \frac{m^2}{\mu_{mn}^2 - m^2} \right]; \quad (7.25)$$

для волн типа  $E_{mn}$  в круглом волноводе

$$\alpha_m = \frac{R_S}{Z_0 a \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \quad (7.26)$$

Расчетные формулы (7.20), (7.21), (7.23)—(7.26) получены в предположении, что волновод имеет воздушное заполнение. Если волновод заполнен диэлектриком, то в эти формулы вместо  $\lambda_0$  следует подставлять значение длины волны в диэлектрике  $\lambda_0/\sqrt{\epsilon}$ .

Для расчета коэффициента ослабления за счет потерь в диэлектрике можно воспользоваться формулой (7.5), где вместо  $\epsilon$  следует подставить комплексную проницаемость диэлектрика  $\tilde{\epsilon} = \epsilon (1 - j \operatorname{tg} \delta_a)$ . В результате получим

$$\alpha_d = \operatorname{Im} [\sqrt{\beta^2 \epsilon (1 - j \operatorname{tg} \delta_a) - g^2}]. \quad (7.27)$$

При условии  $\operatorname{tg} \delta_a \ll 1$  формула (7.27) может быть упрощена:

$$\alpha_d \approx \frac{\beta^2 \epsilon \operatorname{tg} \delta_a}{2h}, \quad (7.28)$$

или

$$\alpha_d \approx \frac{\pi \epsilon \operatorname{tg} \delta_a}{\lambda_0 \sqrt{1 - \frac{1}{n} \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}}\right)^2}}. \quad (7.29)$$



## § 7.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

**7.1.** Какие типы волн могут распространяться в круглом волноводе диаметром 3 см, заполненном диэлектриком с относительной проницаемостью  $\epsilon = 3,2$ ? Частота колебаний 10 ГГц.

**Решение.** В данном волноводе могут распространяться лишь те типы волн, для которых выполняется условие  $\lambda_d < \lambda_{кр}$ , где  $\lambda_d = \lambda_0/\sqrt{\epsilon} = c/(f\sqrt{\epsilon})$  — длина волны в однородном безграничном диэлектрике. В нашем случае  $\lambda_d = 1,675$  см. Критическая длина волны в круглом волноводе равна  $2\pi a/\nu_{mn}$  для волн типа  $E_{mn}$  и  $2\pi a/\mu_{mn}$  для волн типа  $H_{mn}$ . Следовательно, для распространяющихся типов волн должны выполняться условия

$$\nu_{mn} < 2\pi a/\lambda_d, \quad \mu_{mn} < 2\pi a/\lambda_d, \quad 2\pi a/\lambda_d = 5,627,$$

которым удовлетворяют следующие типы волн:  $E_{01}$ ,  $E_{02}$ ,  $E_{11}$ ,  $E_{21}$ ,  $H_{01}$ ,  $H_{11}$ ,  $H_{12}$ ,  $H_{21}$ ,  $H_{31}$ ,  $H_{41}$ .

**7.2.** В прямоугольном волноводе сечением  $4 \times 3$  см распространяется волна типа  $H_{11}$ . Волновод заполнен пенополистиролом с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = 1,15$ . Частота колебаний 8 ГГц.

Определить фазовую скорость и длину волны в волноводе.

**Решение.** Найдем критическую длину волны для колебания типа  $H_{11}$  в прямоугольном волноводе:

$$\lambda_{кр} = \frac{2}{\sqrt{(1/a)^2 + (1/b)^2}} = 4,8 \text{ см.}$$

Длина волны генератора  $\lambda_0 = c/f = 3,75$  см.

Фазовая скорость волны в волноводе

$$v_{\phi} = \frac{\frac{c}{\sqrt{\epsilon}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2}} = 4,084 \cdot 10^8 \text{ м/с.}$$

Длина волны в волноводе

$$\lambda_{в} = \frac{\frac{\lambda_0}{\sqrt{\epsilon}}}{\sqrt{1 - \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2}} = 5,105 \text{ см.}$$

**7.3.** При каком диаметре круглого волновода в нем может распространяться только один основной тип волны при частоте колебаний 10 ГГц?

**Решение.** Сначала найдем длину волны генератора

$$\lambda_0 = c/f = 3 \text{ см.}$$

Основным типом волны круглого волновода является волна  $H_{11}$ . Ее критическая длина

$$\lambda_{кр} = 2\pi a/1,841 = 3,413a,$$

откуда получается условие существования волны типа  $H_{11}$ :

$$a > \lambda_0/3,41 = 8,79 \text{ мм.}$$

Ближайшим высшим типом волны в круглом волноводе является волна  $E_{01}$ . Ее критическая длина

$$\lambda_{кр} = 2\pi a/2,405 = 2,613a.$$

Чтобы волна типа  $E_{01}$  не могла распространяться, должно выполняться условие

$$a < \lambda_0/2,61 = 11,48 \text{ мм.}$$

Следовательно, диаметр волновода должен лежать в пределах

$$17,58 \text{ мм} < a < 22,96 \text{ мм.}$$

**7.4.** Прямоугольный волновод сечением  $23 \times 10$  мм служит для передачи сверхвысокочастотных импульсов с прямоугольной огибающей. Длительность импульсов  $\tau = 6$  нс, несущая частота  $f_0 = 10$  ГГц. Длина линии  $l = 50$  м.

Оценить качественно величину искажений импульсов, вызванных дисперсией волновода.

**Решение.** Прежде всего отметим, что в прямоугольном волноводе сечением  $23 \times 10$  м

при частоте 10 ГГц может распространяться лишь волна типа  $H_{10}$ . Ее критическая длина  $\lambda_{кр} = 2a = 4,6$  см и критическая частота  $f_{кр} = c/\lambda_{кр} = 6,52$  ГГц.

Искажения формы импульсов в волноводной линии передачи вызываются различным временем группового запаздывания для разных составляющих спектра сигнала [2]. Спектр прямоугольного высокочастотного импульса в области положительных частот описывается выражением

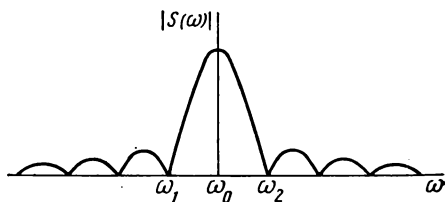


Рис. 7.9

$$S(\omega) = \frac{E\tau}{2} \frac{\sin \frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}}{\frac{(\omega - \omega_0)\tau}{2}}$$

и имеет вид, изображенный на рис. 7.9. Примем ширину спектра равной ширине его главного лепестка. Тогда крайние частоты спектра будут равны:  $f_1 = f_0 - 1/\tau = 9,833$  ГГц,  $f_2 = f_0 + 1/\tau = 10,167$  ГГц.

Разность группового времени запаздывания

$$\Delta t = \frac{l}{v_{гр}(f_1)} - \frac{l}{v_{гр}(f_2)}. \quad (7.30)$$

Используя выражение (7.9), получим

$$\Delta t = \frac{l}{c} \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - (f_{кр}/f_1)^2}} - \frac{1}{\sqrt{1 - (f_{кр}/f_2)^2}} \right] = 5,4 \text{ нс.}$$

Таким образом, разность группового времени запаздывания для различных составляющих спектра сигнала оказывается приблизительно равной длительности импульса. Вследствие этого передаваемый импульс «расплывается» по ширине примерно вдвое.

7.5. В круглом волноводе диаметром 5 см распространяется волна типа  $E_{01}$ . Частота колебаний 6 ГГц, передаваемая мощность 20 кВт.

Определить максимальное значение напряженности электрического поля и амплитуду поверхностной плотности тока на стенках волновода.

Решение. Запишем выражения для составляющих векторов поля волны типа  $E_{01}$ , положив в системе (7.13)  $m = 0, n = 1$ :

$$\dot{H}_\varphi = -j \frac{\omega \varepsilon_a}{g} E_0 J'_0(gr) e^{-ihz},$$

$$\dot{E}_r = -j \frac{h}{g} E_0 J'_0(gr) e^{-ihz},$$

$$\dot{E}_z = E_0 J_0(gr) e^{-ihz}.$$

Подставим выражения для составляющих векторов поля в формулу (7.18):

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2} \int_S \operatorname{Re}[\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}] dS = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\omega \varepsilon_a h}{g^2} E_0^2 [J'_0(gr)]^2 r d\varphi dr = \\ &= \frac{\pi \varepsilon_a \omega h}{g^2} E_0^2 \int_0^{v_{01}} J_1^2(x) x dx. \end{aligned}$$

Учитывая, что  $\int_0^{v_{01}} J_1^2(x) x dx = \frac{v_{01}^2}{2} J_1^2(v_{01}) = 0,778$ , получим

$$P = 0,778 \frac{\pi \omega \varepsilon_a h}{g^2} E_0^2. \quad (7.31)$$

Сравним амплитуду составляющих векторов поля  $E_r$  и  $E_z$ , для чего найдем значения  $h$  и  $g$ :

$$g = v_{01}/a = 0,962 \text{ см}^{-1}, \quad h = \sqrt{(2\pi/\lambda_0)^2 - g^2} = 0,809 \text{ см}^{-1}.$$

Функция  $J_0(x)$  имеет максимальное значение при  $x = 0$ , причем  $J_0(0) = 1$ . Функция  $-J'_0(x) = J_1(x)$  имеет максимальное значение при  $x = 1,8411 \dots$  и равна при этом 0,5819. Следовательно, максимальное значение  $E_r$  меньше максимального значения  $E_z$ . Таким образом, наибольшая напряженность электрического поля, равная  $E_0$ , получается на оси волновода. Найдем ее из соотношения (7.31):

$$E_{\max} = E_0 = \sqrt{\frac{Pg^2}{0,778\pi\omega\varepsilon_a h}},$$

или после подстановки численных значений

$$E_{\max} = 1,676 \cdot 10^3 \text{ В/м}.$$

Амплитуда поверхностной плотности тока численно равна напряженности магнитного поля у стенки волновода:

$$|\eta| = |H_\varphi(r=a)| = \omega \epsilon_a \sqrt{\frac{P}{0,778 \pi \omega \epsilon_a h}} J_1(v_{01}) = 3,01 \text{ А/м.}$$

7.6. В медном волноводе квадратного сечения со стороной 2 см распространяется волна типа  $H_{11}$ .

Определить: а) частоту поля, при которой затухание в волноводе минимально; б) минимальное значение коэффициента ослабления; в) диапазон частот, в пределах которого погонное затухание отличается от минимального не более чем на 50%.

Р е ш е н и е. В формуле (7.23) для затухания волн типа  $H_{mn}$  в прямоугольном волноводе положим  $m = 1$ ,  $n = 1$ ; поскольку волновод квадратный,  $b = a$ . В результате получим расчетную формулу для коэффициента ослабления волны типа  $H_{11}$  в квадратном волноводе:

$$\alpha_m = \frac{2R_S \left[ 1 + \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2 \right]}{Z_0 a \sqrt{1 - \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_{кр}} \right)^2}}. \quad (7.32)$$

Для того чтобы получить погонное затухание в децибелах на метр, надо умножить результаты расчета на  $20 \lg e = 8,69$ . График зависимости погонного затухания волны типа  $H_{11}$  от частоты поля приведен на рис. 7.10. Из графика следует, что минимальное погонное затухание, равное 0,125 дБ/м, получается при частоте поля 25,5 ГГц;

минимум кривой очень тупой, затухание отличается от минимального не более чем на 50% в диапазоне частот 13,4—92 ГГц.

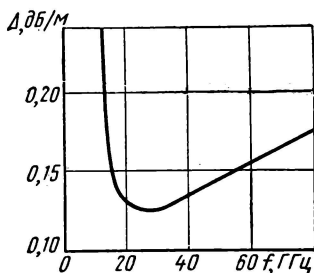


Рис. 7.10

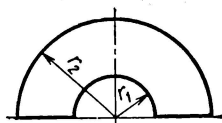


Рис. 7.11

7.7. Определить критическую длину основной волны электрического типа в полукоаксиальном волноводе, форма поперечного сечения которого приведена на рис. 7.11. Изобразить картину силовых линий поля волны. Размеры волновода:  $r_1 = 1$  см,  $r_2 = 3$  см.

Р е ш е н и е. Данный волновод можно рассматривать как деформированный волновод прямоугольного сечения. По аналогии с волной типа  $E_{11}$  прямоугольного волновода основная волна электрического типа должна иметь по одной вариации поля вдоль координат  $r$  и  $\varphi$ .

Продольная составляющая  $E_z$  должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial E_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 E_z}{\partial \varphi^2} + g^2 E_z = 0$$

и граничным условиями

$$E_z|_{r=r_1} = 0, \quad E_z|_{\varphi=0} = 0.$$

Решая уравнения Гельмгольца при заданных граничных условиях, получим выражение для волны, имеющей одну вариацию поля вдоль координаты  $\varphi$ :

$$E_z = [A_1 J_1(g r) + A_2 N_1(g r)] \sin \varphi. \quad (7.33)$$

Полагая  $E_z = 0$  при  $r = r_1$  и  $r = r_2$ , найдем

$$A_1 J_1(g r_1) + A_2 N_1(g r_1) = 0, \quad (7.34)$$

$$A_1 J_1(g r_2) + A_2 N_1(g r_2) = 0,$$

откуда, исключая коэффициенты  $A_1$  и  $A_2$ , получим трансцендентное характеристическое уравнение

$$J_1(g r_2) N_1(g r_1) = J_1(g r_1) N_1(g r_2).$$

Воспользовавшись таблицей корней этого уравнения, приведенной в [7], будем иметь для нашего случая ( $r_2/r_1 = 3$ ):

$$g r_1 = \frac{3,271}{3-1} = 1,635.$$

Отсюда

$$\lambda_{кр} = \frac{2\pi}{g} = \frac{2\pi r_1}{1,635} = 3,84 \text{ см.}$$

Для построения картины силовых линий поля сначала найдем значения коэффициентов  $A_1$  и  $A_2$ . Один из них, например  $A_1$ , можно задать произвольно, второй определяется из выражения (7.34):

$$A_2 = -A_1 \frac{J_1(g r_1)}{N_1(g r_1)} = 1,770 A_1.$$

Воспользуемся формулами перехода [2]:

$$\begin{aligned} \dot{E}_r &= -\frac{j\hbar}{g^2} \frac{\partial E_z}{\partial r}, \\ \dot{E}_\varphi &= -\frac{j\hbar}{g^2 r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi}, \\ \dot{H}_r &= \frac{j\omega \epsilon_a}{g^2 r} \frac{\partial E_z}{\partial \varphi}, \\ \dot{H}_\varphi &= -\frac{j\omega \epsilon_a}{g^2} \frac{\partial E_z}{\partial r}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Подставляя в них выражение (7.33) для  $E_z$ , получим

$$\begin{aligned} \dot{E}_r &= -\frac{j\hbar}{g} A_1 [J_1'(gr) + 1,77N_1'(gr)] \sin \varphi e^{-jhz}, \\ \dot{E}_\varphi &= -\frac{j\hbar}{g^2 r} A_1 [J_1(gr) + 1,77N_1(gr)] \cos \varphi e^{-jhz}, \\ \dot{H}_r &= \frac{j\omega \varepsilon_a}{g^2 r} A_1 [J_1(gr) + 1,77N_1(gr)] \cos \varphi e^{-jhz}, \\ \dot{H}_\varphi &= -\frac{j\omega \varepsilon_a}{g} A_1 [J_1'(gr) + 1,77N_1'(gr)] \sin \varphi e^{-jhz}. \end{aligned} \quad (7.36)$$

Для точного построения картины силовых линий поля в каждой точке сечения волновода по формулам (7.36) следует определить направление векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ . В результате получается картина, изображенная на рис. 7.12. Однако если не требуется высокой точности построения, можно ограничиться качественным рассуждением. Рассматриваемую волну можно представить как волну типа  $E_{11}$  в деформированном прямоугольном волноводе; общий характер картины силовых линий поля волны типа  $E_{11}$ , изображенной на рис. 7.3, сохраняется. Картина поля деформируется в соответствии с изгибом волновода. При изображении картины силовых линий поля таким методом необходимо следить за тем, чтобы линии  $\mathbf{E}$  подходили перпендикулярно к стенкам волновода.

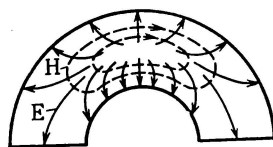


Рис. 7.12

**7.8.** Требуется создать волноводную линию для одновременной передачи сигналов с частотами 4, 6 и 9 ГГц.

Можно ли для этой цели применить волновод Н-образного сечения (см. рис. 7.7) с размерами  $a = 27,28$  мм,  $2b = 11,7$  мм,  $s = 6,8$  мм,  $2d = 2,28$  мм? Будет ли волновод на каждой из рабочих частот одноволновым? Определить фазовую скорость волны основного типа на каждой рабочей частоте.

**Решение.** Сначала найдем критическую длину волны основного типа  $H_{10}$ . Для заданных размеров волновода по графику рис. 7.8 определяем  $\xi = 0,54$ . В результате критическая длина волны  $\lambda_{кр} = 2a/\xi = 101$  мм. Соответствующая ей критическая частота  $f_{кр} = c/\lambda_{кр} = 2,97$  ГГц. Критическая частота ниже каждой из рабочих частот, следовательно, Н-образный волновод с указанными размерами пригоден для работы на заданных частотах. Определим, является ли режим работы волновода одноволновым. Для этого по справочнику [6] найдем критическую частоту ближайшего высшего типа волны  $H_{20}$ . Она равна 12,94 ГГц. Следовательно, на каждой из рабочих частот волновод является одноволновым.

Значения фазовой скорости на каждой из рабочих частот найдем по формуле

$$v_\varphi = \frac{c}{\sqrt{1 - (f_{кр}/f)^2}}.$$

Подставляя сюда численные значения, получим  
 на частоте 4 ГГц  $v_{\phi} = 4,48 \cdot 10^8$  м/с,  
 на частоте 6 ГГц  $v_{\phi} = 3,45 \cdot 10^8$  м/с,  
 на частоте 9 ГГц  $v_{\phi} = 3,18 \cdot 10^8$  м/с.

7.9. Для измерения параметров жидких диэлектриков используется установка (рис. 7.13), состоящая из генератора 1, измерительной линии 2 и отрезка прямоугольного волновода 3, закороченного на конце. Волновод и измерительная линия заполнены исследуемым диэлектриком, расстояние  $l$  от зонда измерительной линии до короткозамкнутого конца волновода 1 м.

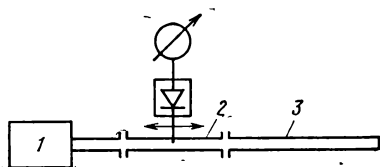


Рис. 7.13

Сечение волновода  $23 \times 10$  мм, материал стенок — медь. Длина волны генератора  $\lambda_0 = 3,2$  см.

Определить относительную проницаемость и тангенс угла потерь диэлектрика, если измеренное значение длины волны в волноводе равно 25,4 мм и коэффициент стоячей волны КСВ = 4.

**Решение.** Сначала по значению длины волны в волноводе найдем относительную проницаемость диэлектрика, для чего преобразуем формулу (7.8), разделив обе части на  $\lambda_0/\sqrt{\epsilon}$  и возведя в квадрат:

$$\epsilon \left( \frac{\lambda_{\text{в}}}{\lambda_0} \right)^2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2}.$$

Отсюда следует выражение для расчета диэлектрической проницаемости:

$$\epsilon = \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{в}}} \right)^2 + \left( \frac{\lambda_0}{\lambda_{\text{кр}}} \right)^2, \quad (7.37)$$

где  $\lambda_{\text{кр}} = 2a$ .

Подставляя численные данные, получим

$$\epsilon = 2,07.$$

Для определения  $\text{tg } \delta$  диэлектрика найдем сначала коэффициент ослабления волны в волноводе, используя для этого измеренное значение КСВ. Из теории цепей с распределенными параметрами известна формула, связывающая модуль коэффициента отражения в заданном сечении линии с коэффициентом стоячей волны [12]:

$$|\rho| = \frac{E_{\text{отр}}}{E_{\text{пад}}} = \frac{\text{КСВ} - 1}{\text{КСВ} + 1}.$$

В нашем случае, когда волновод закорочен на конце,

$$\rho = e^{-2\alpha l},$$

откуда

$$\alpha = -\frac{\ln \rho}{2l}.$$

Подставляя численные данные, получим

$$\alpha = 0,255 \text{ м}^{-1}.$$

Общее затухание волны в волноводе складывается из затухания за счет потерь в металлических стенках и в исследуемом диэлектрике. По формуле (7.22), подставляя туда  $\lambda_0/\sqrt{\epsilon}$  вместо  $\lambda_0$ , рассчитаем коэффициент затухания за счет потерь в металле:

$$\alpha_m = 1,26 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}.$$

Найдем затухание за счет потерь в диэлектрике:

$$\alpha_d = \alpha - \alpha_m = 0,242 \text{ м}^{-1}.$$

Для определения  $\text{tg } \delta_0$  преобразуем выражение (7.28), учитывая, что  $h = 2\pi/\lambda_b$  и  $\beta = 2\pi/\lambda_0$ :

$$\text{tg } \delta_0 = \frac{\alpha_d 2h}{\beta^2 \epsilon} = \frac{\alpha_d \lambda_0^2}{\pi \lambda_b \epsilon}. \quad (7.38)$$

Подставляя в полученное выражение численные значения, получим

$$\text{tg } \delta_0 = 1,5 \cdot 10^{-3}.$$

### § 7.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**7.10.** Какие типы волн могут распространяться в заполненном воздухом прямоугольном волноводе сечением  $10 \times 4$  см при частоте  $f = 5$  ГГц?

*Ответ:*  $H_{10}, H_{20}, H_{30}, H_{01}, H_{11}, H_{21}, E_{11}, E_{21}$ .

**7.11.** Какие типы волн могут распространяться в квадратном волноводе со стороной 1 см при частоте 10 ГГц? Волновод заполнен диэлектриком с относительной проницаемостью  $\epsilon = 2,6$ .

*Ответ:*  $H_{10}, H_{20}, H_{01}, H_{02}, H_{11}, E_{11}$ .

**7.12.** Какие типы волн могут распространяться в заполненном воздухом круглом волноводе диаметром 3 см при частоте 7,5 ГГц?

*Ответ:*  $E_{01}, E_{11}, H_{01}, H_{11}, H_{21}, H_{31}$ .

**7.13.** Прямоугольный волновод сечением  $23 \times 10$  мм заполнен диэлектриком с относительной проницаемостью  $\epsilon = 2,25$ . Частота колебаний 8,4 ГГц.

Определить величины  $v_\phi$  и  $\lambda_b$ .

*Ответ:*  $2,34 \cdot 10^8$  м/с, 2,78 см.

**7.14.** Определить критическую длину волны, критическую частоту и длину волны в прямоугольном волноводе для волны типа  $E_{11}$ . Размеры поперечного сечения  $4 \times 3$  см. Частота колебаний 10 ГГц.

*Ответ:* 4,8 см, 6,25 ГГц, 3,84 см.

**7.15.** Определить критическую частоту и фазовую скорость волны в круглом волноводе диаметром 5 см при частоте 5 ГГц.

*Ответ:* 3,516 ГГц,  $4,219 \cdot 10^8$  м/с.

**7.16.** Определить диапазон частот, в пределах которого в круглом волноводе диаметром 4 см может распространяться только основной тип волны.

*Ответ:* 4,395—5,740 ГГц.



7.17. Определить размеры поперечного сечения прямоугольного волновода, при которых может распространяться лишь основной тип волны. Длина волны генератора 10 см.

Ответ:  $5 \text{ см} < a < 10 \text{ см}$ ,  $b < 5 \text{ см}$ .

7.18. Определить размеры поперечного сечения квадратного волновода, в котором при частоте 4 ГГц может распространяться лишь низшая волна электрического типа.

Ответ:  $5,303 \text{ см} < a < 8,385 \text{ см}$ .

7.19. В круглом волноводе приняты меры, чтобы волна типа  $H_{11}$  не возбуждалась.

Определить радиус волновода, при котором может распространяться только волна типа  $E_{01}$ . Частота колебаний 9300 МГц.

Ответ:  $12,35 \text{ мм} < a < 15,68 \text{ мм}$ .

7.20. Определить радиус круглого волновода, если фазовая скорость волны типа  $E_{01}$  при частоте поля 10 ГГц равна  $5 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

Ответ: 14,34 мм.

7.21. Вычислить размеры поперечного сечения квадратного волновода, если известно, что фазовая скорость волны типа  $E_{11}$  равна  $6 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ . Частота передаваемых колебаний 5 ГГц.

Ответ:  $4,9 \times 4,9 \text{ см}$ .

7.22. Длина волны в волноводе при работе на основном типе волны составляет 4,5 см. Размеры поперечного сечения волновода  $2,6 \times 1,3 \text{ см}$ .

Найти частоту передаваемых колебаний.

Ответ: 8,82 ГГц.

7.23. Фазовая скорость волны типа  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе равна  $5c$ , где  $c$  — скорость света.

Определить размеры волновода, если длина волны в свободном пространстве равна 10 см.

Ответ:  $a = 5,1 \text{ см}$ ; размер  $b$  из условий задачи определить нельзя.

7.24. Найти групповую скорость волны типа  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе сечением  $72 \times 34 \text{ мм}$  при частоте поля 3 ГГц.

Ответ:  $2,16 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

7.25. В круглом волноводе распространяется волна типа  $E_{01}$ . Частота поля 10 ГГц, длина волны в волноводе 4 см.

Вычислить групповую скорость.

Ответ:  $2,25 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

7.26. В волноводе, заполненном диэлектриком с относительной проницаемостью  $\epsilon = 2,25$ , распространяется волна с фазовой скоростью  $3 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ . Определить групповую скорость.

Ответ:  $1,333 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

7.27. Определить характеристическое сопротивление волны типа  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе сечением  $72 \times 34 \text{ мм}$  при частоте колебаний 3 ГГц.

Ответ: 523,9 Ом.

7.28. Определить характеристическое сопротивление волны типа  $E_{01}$  в круглом волноводе диаметром 30 мм при длине волны генератора 3,2 см.

Ответ: 217,7 Ом.

7.29. В круглом волноводе диаметром 5 см, заполненном диэлектриком, распространяется волна типа  $H_{11}$ . Частота колебаний 3 ГГц.

Определить диэлектрическую проницаемость вещества, заполняющего волновод, если фазовая скорость волны равна скорости света в свободном пространстве.

Ответ:  $\epsilon = 2,37$ .

7.30. Устройство для измерения диэлектрической проницаемости вещества представляет собой прямоугольный волновод сечением  $23 \times 10$  мм, заполненный диэлектриком. Для измерения длины волны в волноводе в середине его широкой стенки прорезана продольная щель, вдоль которой перемещается зонд с детектором. Волновод работает на основном типе волны.

Определить диэлектрическую проницаемость исследуемого вещества, если при частоте сигнала 10 ГГц длина волны в волноводе равна 22,6 мм.

Ответ:  $\epsilon = 2,19$ .

7.31.\* Определить критическую длину основной волны магнитного типа в волноводе полукруглого сечения радиусом  $a$  (рис. 7.14). Изобразить структуру силовых линий поля волны.

Ответ:  $3,41a$ .

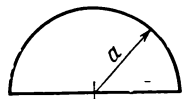


Рис. 7.14

7.32.\* Определить критическую длину основной волны электрического типа в волноводе полукруглого сечения радиусом  $a$  (рис. 7.14). Изобразить картину силовых линий поля волны.

Ответ:  $1,64a$ .

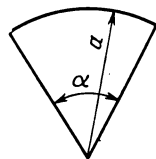


Рис. 7.15

7.33.\* Определить критическую длину основной волны магнитного типа в волноводе секторовидного сечения (рис. 7.15) с радиусом  $a$  и углом раскрытия  $\alpha$ . Изобразить картину силовых линий поля волны.

Ответ:  $1,64a$ .

7.34. Определить критическую длину волны и характеристическое сопротивление основной волны в П-образном волноводе (см. рис. 7.7) с размерами  $a = 36$  мм,  $b = 16$  мм,  $d = 6$  мм,  $s = 9$  мм. Длина волны генератора 6 см.

Ответ:  $\lambda_{кр} = 11,2$  см,  $Z_c = 446$  Ом.

7.35. Рабочий диапазон частот Н-образного волновода принято определять как интервал от  $1,2f_{кр}$  основного типа волны до  $f_{кр}$  следующего типа волны.

Определить рабочий диапазон частот Н-образного волновода (см. рис. 7.7) со следующими размерами:  $a = 20$  мм,  $b = 6$  мм,  $d = 1$  мм,  $s = 10$  мм. Критическую длину волны типа  $H_{20}$  принять приближенно равной  $a$ .

Ответ: 4,3—15 ГГц.

7.36. Определить затухание волны типа  $H_{10}$  в отрезке прямоугольного волновода сечением  $23 \times 10$  мм, длиной 10 см на частоте 6 ГГц.

Ответ: 46,4 дБ.

7.37. Определить частоту колебаний, передаваемых по круглому волноводу диаметром 3 см, если затухание волны основного типа на длине 40 см составляет 60 дБ.

*Ответ:* 5,80 ГГц.

7.38. Какая максимальная мощность может быть передана по прямоугольному волноводу сечением  $23 \times 10$  мм, работающему на частоте 10 ГГц? Волновод заполнен воздухом, предельно допустимое значение напряженности электрического поля 30 кВ/см.

*Ответ:* 1,04 МВт.

7.39. В прямоугольном волновод сечением  $50 \times 25$  мм, работающем на волне типа  $H_{10}$ , передается средняя мощность 10 кВт. Частота поля 5 ГГц.

Определить амплитуду напряженности электрического поля на оси волновода, а также максимальное значение поверхностной плотности тока на его стенках.

*Ответ:*  $1,23 \cdot 10^5$  В/м, 261 А/м.

7.40. Амплитудное значение продольной составляющей напряженности электрического поля на оси прямоугольного волновода сечением  $5 \times 2,5$  см составляет  $10^5$  В/м. Частота поля  $7,5 \cdot 10^9$  Гц. Диэлектрик — воздух. Тип волны  $E_{11}$ .

Определить максимальное значение амплитуды поверхностной плотности тока и плотности тока смещения.

*Ответ:* 265 А/м,  $4,17 \cdot 10^4$  А/м<sup>2</sup>.

7.41. В круглом волновод диаметром 3 см распространяется волна типа  $H_{11}$ , частота колебаний 7,5 ГГц, передаваемая мощность 50 кВт. Определить максимальное значение напряженности электрического поля в волновод.

*Ответ:* 4,28 кВ/см.

7.42. В круглом волновод радиусом  $a$  распространяется волна типа  $H_{01}$ .

На каком расстоянии от оси волновода напряженность электрического поля имеет максимальное значение?

*Ответ:*  $0,48a$ .

7.43. В каких точках сечения прямоугольного волновода с волной типа  $H_{10}$  вектор напряженности магнитного поля имеет круговую поляризацию? В какой плоскости будет вращаться вектор? Сечение волновода  $7,2 \times 3,4$  см, длина волны генератора 10 см.

*Указание:* круговая поляризация получается в тех точках, где взаимно перпендикулярные составляющие вектора  $\vec{H}$  сдвинуты по фазе на  $90^\circ$  и имеют одинаковую амплитуду.

*Ответ:* на расстоянии 1,76 см от узкой стенки волновода; в плоскости, параллельной широкой стенке волновода.

7.44. В круглом волновод диаметром 5 см синфазно возбуждаются волны типов  $H_{11}$  и  $E_{01}$ . Частота поля 6 ГГц.

На каком расстоянии от точки возбуждения разность фаз между возбуждаемыми волнами изменится на  $180^\circ$ ?

*Ответ:* 15 см.

7.45. По линии передачи, представляющей собой прямоугольный волновод сечением  $72 \times 34$  мм и длиной 50 м, передаются сверхвысоко-

частотные импульсы с прямоугольной огибающей. Длительность импульсов 1 мкс, несущая частота 3 ГГц.

Определить время запаздывания сигнала при прохождении линии.

*Ответ:* 0,23 мкс.

**7.46.** Волноводная линия служит для передачи сверхвысокочастотных импульсов, причем вследствие дисперсии происходят искажения формы импульсов. Искажения формы импульсов принято считать недопустимо большими, если разность времени запаздывания для крайних составляющих спектра сигнала превышает длительность импульса.

Определить максимальную длину волноводной линии передачи сечением  $28,5 \times 12,6$  мм, по которой могут быть переданы высокочастотные импульсы длительностью 0,02 мкс с несущей частотой 9380 МГц, при условии, что искажения формы импульсов не будут выходить за допустимые пределы.

*Указание:* крайними частотами спектра прямоугольного импульса считать границы его главного лепестка.

*Ответ:* 1014 м.

**7.47.\*** Линия связи представляет собой круглый волновод, работающий на волне типа  $H_{01}$ . Длина линии 10 км. По линии передается сигнал в виде последовательности гауссовых радиоимпульсов  $E(t) = E_0 \exp(-t^2/\tau^2) \cos \omega_0 t$  при  $\tau = 20$  нс. Несущая частота сигнала 37,5 ГГц.

Выбрать диаметр волновода так, чтобы разность времени запаздывания не превышало величины  $\tau$ . Ширину спектра определять на уровне 0,1 от максимального значения.

*Ответ:* не менее 68 мм.

**7.48.\*** Перед разработчиком стоит задача — создать волноводный тракт длиной 25 м для передачи сверхвысокочастотных импульсов с несущей частотой 10 ГГц и шириной спектра 800 МГц при минимальном искажении формы импульсов. С этой целью вместо стандартного прямоугольного волновода сечением  $23 \times 10$  мм предлагается использовать П-образный волновод (см. рис. 7.7) со следующими размерами:  $a = 24,6$  мм,  $b = 11$  мм,  $d = 1,9$  мм,  $s = 4,2$  мм.

Оценить величину искажений импульсов (разность времени запаздывания сигнала для крайних частот спектра) при использовании П-образного волновода. Сравнить с величиной искажений в стандартном прямоугольном волноводе.

*Ответ:* 0,25 нс; в прямоугольном волноводе 0,75 нс.

**7.49.** Определить погонное затухание волны типа  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе сечением  $72 \times 34$  мм при частоте поля 3 ГГц. Материал стенок волновода — медь.

*Ответ:* 0,02 дБ/м.

**7.50.** Для передачи колебаний с частотой 10 ГГц применяется волновод квадратного сечения  $50 \times 50$  мм.

При использовании какого типа волны получается наименьшее затухание? Найти соответствующее погонное затухание, если волновод изготовлен из латуни.

*Ответ:*  $H_{10}$ ; 0,03 дБ/м.

7.51. При какой частоте поля затухание волны типа  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе сечением  $23 \times 10$  мм минимально? Определить величину этого затухания, если стенки волновода посеребрены.

Ответ: 15,2 ГГц, 0,093 дБ/м.

7.52. Определить размеры поперечного сечения прямоугольного волновода, работающего на волне типа  $H_{10}$ , при которых обеспечивается минимальное затухание при условии невозможности распространения высших типов волн. Частота колебаний 6 ГГц. Найти значение минимального погонного затухания при удельной проводимости материала стенок  $5,7 \cdot 10^7$  См/м.

Ответ:  $a = 5$  см,  $b = 2,5$  см, 0,027 дБ/м.

7.53. Определить погонное затухание волны типа  $E_{01}$  в круглом волноводе диаметром 8 мм. Длина волны генератора 10 мм. Удельная проводимость материала стенок волновода  $1,4 \cdot 10^7$  См/м.

Ответ: 1,82 дБ/м.

7.54. В качестве линии передачи используется круглый волновод диаметром 3 см и длиной 50 м, работающий на волне типа  $H_{11}$ . Частота передаваемых колебаний 7,5 ГГц, удельная проводимость материала стенок волновода  $3 \cdot 10^7$  См/м.

Определить коэффициент полезного действия системы.

Ответ: 40%.

7.55. Для дальней волноводной связи было предложено использовать круглые волноводы, работающие на волне типа  $H_{01}$ .

Определить затухание волны типа  $H_{01}$  в волноводе с медными стенками диаметром 50 мм при длине волны генератора 8 мм.

Ответ: 1,82 дБ/км.

7.56. При какой длине волны погонное затухание волны типа  $H_{01}$  в круглом волноводе диаметром 50 мм составит 5 дБ/км? Чему будет равно при этом затухание волны типа  $H_{11}$ ? Материал стенок волновода — медь.

Ответ: 1,51 см, 0,0166 дБ/м.

7.57. В прямоугольном волноводе сечением  $4 \times 2$  см распространяется волна типа  $H_{10}$ .

Определить диапазон частот, в пределах которого затухание волны превышает минимальное значение не более чем на 30%.

Ответ:  $4,4 \text{ ГГц} < f < 15,8 \text{ ГГц}$ .

7.58. Медный волновод сечением  $7,2 \times 3,4$  мм заполнен диэлектриком с параметрами  $\epsilon = 2,56$ ,  $\text{tg } \delta_s = 10^{-3}$ . В волноводе распространяется волна типа  $H_{10}$ . Длина волны генератора 1,8 см.

Определить погонное затухание.

Ответ: 6,79 дБ/м.

7.59. В прямоугольном волноводе сечением  $20 \times 10$  мм, заполненном диэлектриком с параметрами  $\epsilon = 2,1$ ,  $\text{tg } \delta_s = 4 \cdot 10^{-4}$ , распространяется волна основного типа. Материал стенок волновода — медь.

При какой частоте поля суммарное затухание будет минимальным? Найти величину минимального затухания и оценить относительную долю потерь в металле и в диэлектрике.

Ответ: 12,5 ГГц, 0,089 дБ/м, потери в металле составляют 97,9% общих потерь.

7.60. В незаполненном круглом волноводе диаметром 25 мм при длине волны генератора 3 см погонное затухание волны типа  $E_{01}$  составляет 0,4 дБ/м. Если тот же волновод заполнить диэлектриком с относительной проницаемостью 2,25, то затухание будет равно 1,5 дБ/м.

Определить  $\operatorname{tg} \delta$  диэлектрика. При расчете учесть, что потери в металлических стенках заполненного и незаполненного волноводов различны.

Ответ:  $\operatorname{tg} \delta = 5 \cdot 10^{-4}$ .

7.61. Прямоугольный волновод сечением  $28 \times 12$  мм служит для передачи колебаний мощностью 10 кВт. Длина волны генератора 3,2 см.

Определить мощность, которая будет выделяться на участке волновода длиной 1 м, прилегающем к генератору, если волновод изготовлен из латуни.

Ответ: 350 Вт.

## Глава восьмая

### ПОВЕРХНОСТНЫЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ ВОЛНЫ И ЗАМЕДЛЯЮЩИЕ СТРУКТУРЫ

#### § 8.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Поверхностными называют волны, распространяющиеся вдоль так называемых *замедляющих структур* (линий передачи поверхностных волн). Фазовая скорость этих волн меньше скорости света. Существует большое число разнообразных видов линий передачи поверхностных волн; наибольшее распространение получили диэлектрическая пластина, H-образная металлодиэлектрическая линия передачи, диэлектрический стержень, гребенчатая структура, диафрагмированный волновод и спираль.

#### Диэлектрическая пластина

Бесконечная диэлектрическая пластина (рис. 8.1) является простейшей замедляющей структурой. Вдоль нее могут распространяться волны типов E и H.

Поле волны типа E описывается уравнением Гельмгольца. Имеют следующие выражения для составляющих векторов поля:

вне пластины ( $|x| > a$ ):

$$\begin{aligned} \dot{H}_{y1} &= j\omega\epsilon_0 \rho C e^{-\rho x} e^{-jhz}, \\ \dot{E}_{x1} &= jh\rho C e^{-\rho x} e^{-jhz}, \\ \dot{E}_{z1} &= \rho^2 C e^{-\rho x} e^{-jhz}, \\ \dot{H}_{x1} &= \dot{H}_{z1} = \dot{E}_{y1} = 0, \end{aligned} \quad (8.1)$$

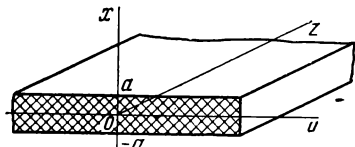


Рис. 8.1

где  $p$  — поперечное волновое число в воздухе, причем

$$p^2 = h^2 - \omega^2 \varepsilon_0 \mu_0; \quad (8.2)$$

внутри пластины ( $|x| < a$ ):

$$\begin{aligned} \dot{H}_{y2} &= j\omega \varepsilon_a g (A \sin gx - B \cos gx) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_{x2} &= jhg (A \sin gx - B \cos gx) e^{-jhz}, \\ \dot{E}_{z2} &= g^2 (A \cos gx + B \sin gx) e^{-jhz}, \\ \dot{H}_{x2} = \dot{H}_{z2} = \dot{E}_{y2} &= 0, \end{aligned} \quad (8.3)$$

где  $g$  — поперечное волновое число в диэлектрике:

$$g^2 = \omega^2 \varepsilon_a \mu_0 - h^2 \quad (8.4)$$

( $\varepsilon_a$  — диэлектрическая проницаемость пластины).

На границах раздела воздуха и диэлектрика  $x = a$  и  $x = -a$  тангенциальные составляющие поля должны удовлетворять граничным условиям:

$$\dot{E}_{z1} = \dot{E}_{z2}, \quad \dot{H}_{y1} = \dot{H}_{y2}. \quad (8.5)$$

Все типы волн диэлектрической пластины можно разбить на две группы: *четные волны*  $E_1, E_3, E_5, \dots$ , для которых  $A = 0, B \neq 0$  и поперечные составляющие поля описываются четными функциями координаты  $x$ ; *нечетные волны*  $E_2, E_4, E_6, \dots$ , для которых  $A \neq 0, B = 0$  и поперечные составляющие поля описываются нечетными функциями координаты  $x$ .

Подставляя выражения (8.1) и (8.3) в граничные условия (8.5), получим характеристические уравнения:

для четных волн

$$pa = \frac{1}{\varepsilon} ga \operatorname{tg} ga; \quad (8.6)$$

для нечетных волн

$$pa = -\frac{1}{\varepsilon} ga \operatorname{ctg} ga, \quad (8.7)$$

где  $\varepsilon$  — относительная диэлектрическая проницаемость пластины.

Кроме того, волновые числа  $p$  и  $g$  удовлетворяют соотношению

$$(pa)^2 + (ga)^2 = (\beta a)^2 (\varepsilon - 1). \quad (8.8)$$

Анализ волн типа Н производят аналогично. Решая уравнение Гельмгольца для составляющей  $H_z$ , получим выражения для составляющих векторов поля:

вне пластины

$$\begin{aligned} \dot{E}_{y1} &= -j\omega \mu_0 p C e^{-px} e^{-jhz}, \\ \dot{H}_{x1} &= jhp C e^{-px} e^{-jhz}, \\ \dot{H}_{z1} &= p^2 C e^{-px} e^{-jhz}, \\ \dot{E}_{x1} = \dot{E}_{z1} = \dot{H}_{y1} &= 0; \end{aligned} \quad (8.9)$$

внутри пластины

$$\begin{aligned} \dot{E}_{y2} &= j\omega\mu_a g [-A \sin gx + B \cos gx] e^{-hz}, \\ \dot{H}_{x2} &= jhg [A \sin gx - B \cos gx] e^{-hz}, \\ \dot{H}_{z2} &= g^2 [A \cos gx + B \sin gx] e^{-hz}, \\ \dot{E}_{x2} &= \dot{E}_{z2} = \dot{H}_{y2} = 0. \end{aligned} \quad (8.10)$$

Подстановка выражений (8.9) и (8.10) в граничные условия (8.5) дает характеристические уравнения.

$$pa = ga \operatorname{tg} ga - \text{для четных волн } (H_1, H_3, \dots); \quad (8.11)$$

$$pa = -ga \operatorname{ctg} ga - \text{для нечетных волн } (H_2, H_4, \dots). \quad (8.12)$$

Характеристические уравнения часто решают графически. Искомые значения  $pa$  и  $ga$ , например, для четных волн типа Н находят как координаты точки пересечения кривой, определяемой уравнением (8.11), с окружностью, описываемой уравнением (8.8) (рис. 8.2).

Характеристические уравнения решают и численными методами. В Приложении II приведена программа решения характеристического уравнения (8.6) методом половинного деления.

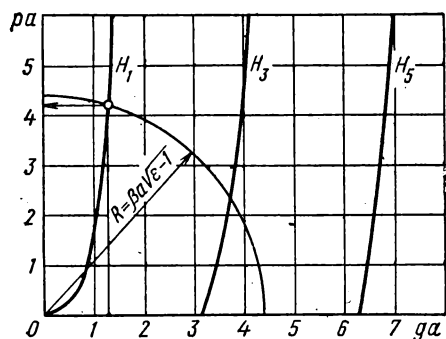


Рис. 8.2

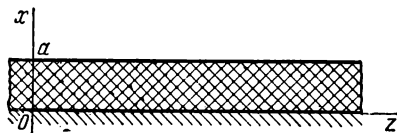


Рис. 8.3

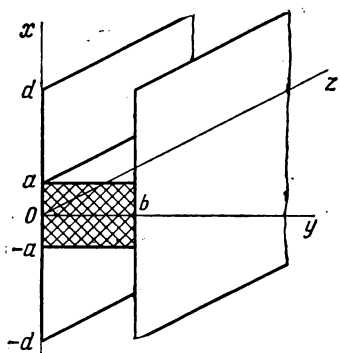


Рис. 8.4

После того как найдено решение характеристического уравнения, с помощью выражений (8.2) или (8.4) можно определить продольное волновое число  $h$ , а затем фазовую скорость и длину волны в линии.

Модификациями рассматриваемой замедляющей структуры являются диэлектрическая пластина на металлической подложке (рис. 8.3) и Н-образная металлодиэлектрическая линия передачи (рис. 8.4).

Поле в диэлектрической пластине на металлической подложке должно удовлетворять граничным условиям на поверхности металла. Из



волн типа Е в такой структуре могут существовать только четные волны, а из волн типа Н — только нечетные.

Н-образная металлодиэлектрическая линия передачи (см. рис. 8.4) представляет собой диэлектрическую пластину, ограниченную с двух сторон металлическими плоскостями. Здесь поле должно удовлетворять граничным условиям на поверхности металлических пластин:

$$E_x|_{y=0} = 0, \quad E_z|_{y=b} = 0. \quad (8.13)$$

Основной волной Н-образной линии передачи является волна магнитного типа  $H_{10}$ , вектор  $\mathbf{E}$  которой имеет единственную составляющую, причем все составляющие векторов поля не зависят от координаты  $y$ . Эта волна полностью аналогична основной волне магнитного типа диэлектрической пластины; в частности, она имеет такую же фазовую скорость, как и волна типа  $H_1$  диэлектрической пластины.

Все остальные типы волн Н-образной линии передачи имеют одну или несколько вариаций вдоль оси  $y$ . Характеристические уравнения для этих типов волн оказываются более сложными.

### Гребенчатая структура

Гребенчатая замедляющая структура, или гребенка, представлена на рис. 8.5. Рассмотрим распространение поверхностных электромагнитных волн вдоль такой структуры в направлении координаты  $z$ .

Строгий анализ волн в гребенке достаточно сложен; ограничимся приближенным решением, предполагая, что шаг  $a$  гребенки мал по сравнению с длиной волны, а толщина зуба  $d$  значительно меньше величины шага.

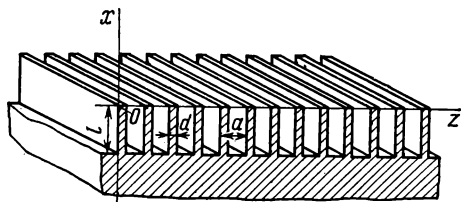


Рис. 8.5

Поле поверхностной волны над гребенкой имеет экспоненциально убывающий характер:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= jhp A e^{-px} e^{-jhz}, \\ \dot{H}_y &= j\omega\epsilon_0 p A e^{-px} e^{-jhz}, \\ \dot{E}_z &= p^2 A e^{-px} e^{-jhz}, \\ \dot{H}_x &= \dot{E}_y = \dot{H}_z = 0. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Пазы гребенки можно рассматривать как закороченные на конце отрезки плоского волновода длиной  $l$ . Поле в пазах имеет две составляющие:

$$\begin{aligned} \dot{E}_z &= B \sin \beta (x - l), \\ \dot{H}_y &= j \frac{B}{Z_0} \cos \beta (x - l). \end{aligned} \quad (8.15)$$

При выводе характеристического уравнения обычно пользуются понятием *поверхностного импеданса* [2]:

$$Z = \dot{E}_z / \dot{H}_y.$$

Приравнявая импедансы поля над гребенкой и поля в пазах в плоскости  $x = 0$ , получим характеристическое уравнение вида

$$p = \beta \operatorname{tg} \beta l. \quad (8.16)$$

Для существования поверхностной волны необходимо, чтобы выполнялось условие  $p > 0$ . Это возможно, например, при  $\beta l < \pi/2$  или  $l < \lambda_0/4$ .

На основании уравнения (8.16) можно найти выражение для коэффициента замедления

$$v_{\Phi}/c = \cos \beta l.$$

### Металлическая спираль

Спираль представляет собой проводник, навитый на круглый цилиндр радиусом  $a$  с постоянным шагом  $d$  (рис. 8.6). Если диаметр провода мал по сравнению с диаметром спирали, то ее можно приближенно рассматривать как анизотропный цилиндр, проводимость которого бесконечна в направлении витков спирали и равна нулю в перпендикулярном направлении. Для симметричных волн, когда поле не зависит от угла  $\varphi$ , продольные составляющие  $E_z$  и  $H_z$  изменяются пропорционально цилиндрическим функциям  $I_0(pr)$  внутри спирали и  $K_0(pr)$  вне спирали. Поперечные составляющие поля описываются производными  $I'_0(pr)$  и  $K'_0(pr)$ .

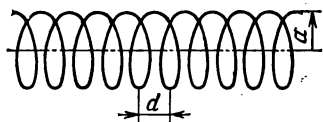


Рис. 8.6

При подстановке составляющих векторов поля в граничные условия получается характеристическое уравнение

$$p = \frac{\beta}{\operatorname{tg} \alpha} \sqrt{\frac{K_1(pa) I_1(pa)}{K_0(pa) I_0(pa)}}, \quad (8.17)$$

где  $\operatorname{tg} \alpha = d/2\pi a$  — тангенс угла наклона витков спирали.

При  $pa \gg 1$ , что соответствует малым углам намотки спирали, подкоренное выражение в (8.17) близко к единице и характеристическое уравнение значительно упрощается:

$$p \approx \beta \operatorname{ctg} \alpha. \quad (8.18)$$

Таким образом,

$$v_{\Phi}/c \approx \sin \alpha. \quad (8.19)$$

Чтобы найти более точное решение характеристического уравнения (8.17), значение  $p$ , вычисленное по формуле (8.18), следует подставить в правую часть уравнения (8.17). Полученное при этом уточненное значение  $p$  можно снова подставить в уравнение (8.17) и т. д. до тех пор, пока результаты не будут различаться на достаточно малую величину.

## § 8.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

**8.1.** Найти фазовую скорость двух низших волн магнитного типа, распространяющихся вдоль диэлектрической пластины толщиной 2 см с относительной проницаемостью  $\epsilon = 2,9$ . Длина волны генератора 3,2 см. Построить графики распределения поперечных составляющих векторов поля в направлении, перпендикулярном пластине.

**Решение.** Определим фазовую скорость волны типа  $H_1$ . Для этого решим характеристическое уравнение (8.11) совместно с (8.8). Вычислим  $\beta a \sqrt{\epsilon - 1} = 2,706$ . С помощью таблицы в Приложении III, применяя метод интерполяции, найдем значения  $pa = 2,456$  и  $ga = 1,137$ , откуда  $p = 245,6 \text{ м}^{-1}$ ,  $g = 113,7 \text{ м}^{-1}$ . С помощью формулы (8.2) определим продольное волновое число  $h$ :

$$h = \sqrt{\beta^2 + p^2} = 314,4 \text{ м}^{-1},$$

и наконец, найдем фазовую скорость волны типа  $H_1$ :

$$v_\phi = \omega/h = 1,874 \cdot 10^8 \text{ м/с}.$$

Аналогичным путем определим параметры волны типа  $H_2$ :  $pa = 1,582$ ,  $ga = 2,195$ ,  $p = 158,2 \text{ м}^{-1}$ ,  $g = 219,5 \text{ м}^{-1}$ ,  $h = 252,15 \text{ м}^{-1}$ ,  $v_\phi = 2,336 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

— Перейдем к построению графиков распределения поперечных составляющих векторов поля. Распределение поля вдоль оси  $x$  описывается выражениями (8.9), (8.10). Для волны типа  $H_1$ , которая является четной, в (8.10) следует положить  $A = 0$ . Упрощая запись выражений для составляющих поля и опуская множитель  $e^{-jhz}$ , для волны типа  $H_1$  получим

$$\begin{aligned} E_y &= Ce^{-px} \text{ — вне пластины,} \\ E_y &= B \cos gx \text{ — внутри пластины.} \end{aligned} \quad (8.20)$$

Коэффициенты  $C$  и  $B$  характеризуют амплитуду напряженности поля; они связаны друг с другом граничными условиями (8.5), откуда

$$Ce^{-pa} = B \cos ga. \quad (8.21)$$

Положим для определенности  $C = 1$ , найдем  $B$  из условия (8.21) и, подставляя вычисленные ранее значения  $p$  и  $g$ , построим в соответствии с выражениями (8.20) график распределения составляющей  $E_y$  (рис. 8.7). Составляющая  $H_x$  имеет такой же характер распределения.

Построение распределения составляющих векторов поля волны типа  $H_2$  производится аналогично. Полагая в (8.10)  $B = 0$  и упрощая выражения для составляющих поля, получим

$$E_y = Ce^{-px} \text{ — вне пластины,} \quad (8.22)$$

$$E_y = A \sin gx \text{ — внутри пластины.}$$

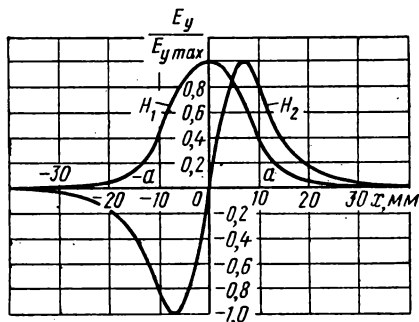


Рис. 8.7

При этом коэффициенты  $C$  и  $A$  удовлетворяют условию

$$Ce^{-pa} = A \sin ga. \quad (8.23)$$

График распределения составляющей  $E_y$ , построенный на основании выражений (8.22) и (8.23), приведен на рис. 8.7.

**8.2.** Определить значения фазовой скорости волн электрического типа, которые могут распространяться в диэлектрической пластине на металлической подложке (см. рис. 8.3). Толщина пластины  $a = 15$  мм, относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon = 2,25$ . Частота поля 10 ГГц.

**Решение.** В диэлектрической пластине на металлической подложке могут распространяться только четные волны электрического типа  $E_1, E_3, \dots$ , у которых критическая частота меньше частоты поля. Это возможно при выполнении условия (см. рис. 8.2)  $\beta a \sqrt{\epsilon - 1} > (n-1)\pi/2$ , где  $n$  — индекс волны.

Отсюда

$$f_{кр} = \frac{(n-1)c}{4a\sqrt{\epsilon-1}}.$$

Подставляя численные данные, найдем значения критических частот для основных типов волн:

для волны  $E_1 f_{кр} = 0$ , т. е. волна может распространяться при любой частоте поля;

для волны  $E_3 f_{кр} = 8,944$  ГГц, т. е. волна может распространяться при заданных условиях;

для волны  $E_5 f_{кр} = 17,89$  ГГц (критическая частота выше частоты поля), следовательно, волна не может распространяться.

Определим фазовые скорости волн  $E_1$  и  $E_3$ , решая характеристическое уравнение (8.6) совместно с (8.8). Можно применить любой численный метод, например метод половинного деления, программа которого приведена в Приложении II. Решая эти уравнения, получаем:

для волны  $E_1 ga = 1,3827, pa = 3,2288$ ,

для волны  $E_3 ga = 3,4722, pa = 0,5296$ .

С помощью формулы (8.2) определяем продольное волновое число

$$h = \sqrt{\beta^2 + p^2}$$

и находим фазовую скорость

$$v_\phi = \omega/h.$$

Подставляя численные данные, получаем:

для волны  $E_1 v_\phi = 2,092 \cdot 10^8$  м/с,

для волны  $E_3 v_\phi = 2,958 \cdot 10^8$  м/с.

**8.3.** В диэлектрической пластине толщиной 3 мм волна типа  $H_1$  при частоте поля 12 ГГц имеет фазовую скорость 0,72 с.

Определить относительную диэлектрическую проницаемость материала пластины.

**Решение.** Найдем продольное волновое число

$$h = \omega/v_\phi = 349,06 \text{ м}^{-1}.$$

С помощью выражения (8.2) определим значение параметра  $\rho a$ :

$$\rho a = 0,9686.$$

По таблице в Приложении III (с использованием метода интерполяции) определяем, что такому значению  $\rho a$  соответствует

$$R = \beta a \sqrt{\varepsilon - 1} = 1,289.$$

Отсюда

$$\varepsilon = 1 + \left( \frac{1,289}{\beta a} \right)^2 = 2,644.$$

8.4. Вывести формулу для расчета мощности, переносимой волной типа  $H_{10}$  в Н-образной линии передачи. Вычислить максимально возможную величину переносимой мощности в линии с размерами  $2a = 25$  мм,  $b = 15$  мм (см. рис. 8.4). Диэлектрик — полистирол с относительной проницаемостью  $\varepsilon = 2,56$ . Длина волны генератора 4 см. Максимально допустимая напряженность электрического поля в воздухе 30 кВ/см, в полистироле 200 кВ/см.

**Решение.** Чтобы определить переносимую мощность, понадобятся выражения для поперечных составляющих векторов поля. Можно использовать выражения (8.9) и (8.10), преобразовав их к виду: вне пластины

$$\begin{aligned} \dot{E}_y &= C_1 e^{-\rho x} e^{-ihz}, \\ \dot{H}_x &= -\frac{h}{\omega \mu_0} C_1 e^{-\rho x} e^{-ihz}; \end{aligned} \quad (8.24)$$

внутри пластины

$$\begin{aligned} \dot{E}_y &= B_1 \cos gx e^{-ihz}, \\ \dot{H}_x &= -\frac{h}{\omega \mu_0} B_1 \cos gx e^{-ihz}, \end{aligned} \quad (8.25)$$

где  $C_1$  и  $B_1$  — амплитудные коэффициенты, причем коэффициент  $B_1$  численно равен напряженности электрического поля в центре пластины.

Связь между коэффициентами  $C_1$  и  $B_1$  можно найти из граничного условия (8.5):

$$C_1 e^{-\rho a} = B_1 \cos ga,$$

откуда

$$C_1 = B_1 e^{\rho a} \cos ga. \quad (8.26)$$

Запишем выражения для вектора Пойнтинга, усредненного за период:

вне пластины

$$P_{cp} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\dot{E}_x \dot{H}_y^*) = \frac{1}{2} C_1^2 \frac{h}{\omega \mu_0} e^{-2\rho x};$$

внутри пластины

$$P_{cp} = \frac{1}{2} B_1^2 \frac{h}{\omega \mu_0} \cos^2 gx.$$

Мощность  $P$ , переносимую волной, определяют как интеграл от вектора Пойнтинга по поперечному сечению линии: внутри пластины

$$P_1 = \int_{x=-a}^a \int_{y=0}^b \frac{1}{2} B_1^2 \frac{h}{\omega \mu_0} \cos^2 gx \, dx = \frac{1}{2} B_1^2 \frac{hb}{\omega \mu_0 g} \left( \frac{1}{2} \sin 2ga + ga \right); \quad (8.27)$$

вне пластины (при  $|x| > a$ )

$$P_2 = 2 \int_{x=a}^{\infty} \int_{y=0}^b \frac{1}{2} C_1^2 \frac{h}{\omega \mu_0} e^{-2px} \, dx = C_1^2 \frac{hb}{2\omega \mu_0 p} e^{-2pa}. \quad (8.28)$$

Складывая выражения (8.27) и (8.28) с учетом (8.26), получим общее выражение для мощности, переносимой волной в линии передачи:

$$P = \frac{1}{2} B_1^2 \frac{hab}{\omega \mu_0} \left( 1 + \frac{\sin 2ga}{2ga} + \frac{\cos^2 ga}{pa} \right). \quad (8.29)$$

При конкретном расчете переносимой мощности необходимо сначала определить значения поперечных волновых чисел  $p$  и  $g$ , т. е. решить характеристическое уравнение (8.11) совместно с (8.8). Подставляя численные данные, получим

$$R = \beta a \sqrt{\varepsilon - 1} = 2,452.$$

По таблице в Приложении III находим  $pa = 2,190$ ,  $ga = 1,103$ , откуда

$$ha = \sqrt{(\beta a)^2 + (pa)^2} = 2,941.$$

Поскольку электрическая прочность полистирола намного выше, чем воздуха, наиболее опасным местом Н-образной линии передачи с точки зрения пробоя является граница воздуха и диэлектрика ( $|x| = a$ ), где максимальная напряженность электрического поля не должна превышать 30 кВ/см. В соответствии с выражением (8.25)

$$E_{\max} = B_1 \cos ga.$$

Используя это выражение, преобразуем формулу (8.29) к виду

$$P = \frac{1}{2} E_{\max}^2 \frac{hab}{\omega \mu_0} \left( \frac{1}{pa} + \frac{\operatorname{tg} ga}{ga} + \frac{1}{\cos^2 ga} \right). \quad (8.30)$$

После подстановки численных значений имеем  $P = 24$  МВт.

На практике максимальная переносимая мощность оказывается существенно меньше вследствие теплового пробоя диэлектрика.

**8.5.** Вывести формулу для определения коэффициента ослабления волны типа  $H_1$  в диэлектрической пластине. Рассчитать значение коэффициента ослабления при толщине пластины  $2a = 10$  мм, длине волны генератора  $\lambda = 24$  мм и параметрах диэлектрика  $\varepsilon = 2,7$ ,  $\operatorname{tg} \delta_s = 10^{-3}$ .

**Р е ш е н и е.** Коэффициент ослабления волны пропорционален отношению мощности потерь на единице длины к мощности, переносимой волной [2]:

$$\alpha = \frac{1}{2} \frac{P_{\text{пот}}}{P_0}. \quad (8.31)$$

Здесь

$$P_{\text{пот}} = \int_V \sigma \frac{|E|^2}{2} dv, \quad (8.32)$$

причем интегрирование ведется по объему, занятому диэлектриком на единице длины;

$$P_0 = \int_S \frac{1}{2} [\dot{E}\dot{H}] dS, \quad (8.33)$$

где интегрирование ведется по поперечному сечению линии передачи.

Поскольку ширина диэлектрической пластины предполагается бесконечной, вычисление интегралов (8.32) и (8.33) приводит к неограниченно большим значениям. Однако это затруднение легко обойти: нас интересуют не сами значения  $P_{\text{пот}}$  и  $P_0$ , а их отношение (8.31). Так как составляющие поля не зависят от координаты  $y$ , то интегрирование выражений (8.32) и (8.33) по переменной  $y$  можно произвести не в бесконечных пределах, а по отрезку единичной длины.

Для волны типа  $H_1$  составляющие поля описываются выражениями (8.24), (8.25). Подставляя их в (8.32) и (8.33), получим

$$P_{\text{пот}} = \int_{-a}^a \frac{\sigma}{2} B_1^2 \cos^2 gx dx = \frac{\sigma}{2} B_1^2 \frac{1}{g} \left( \frac{1}{2} \sin 2ga + ga \right), \quad (8.34)$$

$$P_0 = \frac{1}{2} B_1^2 \frac{ha}{\omega \mu_0} \left( 1 + \frac{\sin 2ga}{2ga} + \frac{\cos^2 ga}{ga} \right). \quad (8.35)$$

Подставляя выражения (8.34) и (8.35) в (8.31) и учитывая, что  $\sigma/(\omega \epsilon_a) = \operatorname{tg} \delta_a$ , найдем

$$\alpha = \frac{\omega^2 \epsilon_a \mu_0}{2h} \frac{1 + \frac{\sin 2ga}{2ga}}{1 + \frac{\sin 2ga}{2ga} + \frac{\cos^2 ga}{ga}} \operatorname{tg} \delta_a. \quad (8.36)$$

Для выполнения численных расчетов необходимо решить характеристическое уравнение. С помощью таблицы в Приложении III находим  $ga = 1,405$ ,  $ga = 0,967$ ,  $h = 384 \text{ м}^{-1}$ . Подставляя численные данные в формулу (8.36), найдем величину коэффициента ослабления  $\alpha = 0,209 \text{ м}^{-1}$ .

**8.6.** Найти фазовую скорость и длину волны, распространяющейся вдоль гребенки с размерами  $a = 1 \text{ мм}$ ,  $l = 6 \text{ мм}$  (см. рис. 8.5.) Частота поля 9 ГГц. На каком расстоянии от гребенки напряженность поля убывает в 100 раз?

Р е ш е н и е . Фазовую скорость найдем по формуле (8.17):

$$v_{\phi} = \dot{a} \cos \beta l = 0,426 \text{ с.}$$

Длина волны в гребенке

$$\lambda_r = \lambda_0 \cos \beta l = 1,42 \text{ см.}$$

Для расчета скорости убывания поля над гребенкой найдем поперечное волновое число

$$\rho = \beta \operatorname{tg} \beta l = 400,6 \text{ м}^{-1}.$$

Поле убывает в 100 раз на расстоянии  $x_0$ , которое определяется из условия  $e^{-\rho x_0} = 0,01$ , откуда

$$x_0 = \frac{1}{\rho} \ln 100 = 0,0115 \text{ м} = 1,15 \text{ см.}$$

8.7. Волна распространяется вдоль спирали с размерами  $a = 5 \text{ мм}$ ,  $d = 2 \text{ мм}$  (см. рис. 8.6). Частота поля 3 ГГц.

Определить фазовую скорость по приближенной формуле (8.19) и по уточненной формуле (8.17). Оценить погрешность приближенной формулы. При каких значениях параметров спирали приближенная формула позволяет определить отношение  $v_{\phi}/c$  с погрешностью не более 1%?

Р е ш е н и е . Тангенс угла наклона витков спирали

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{d}{2\pi a} = 0,06375.$$

Найдем приближенное значение поперечного волнового числа по формуле (8.18):

$$\rho \approx \beta \operatorname{ctg} \alpha \approx 985,6 \text{ м}^{-1}.$$

Подставив его в правую часть формулы (8.17), получим уточненное значение  $\rho$ :

$$\rho = 974,98 \text{ м}^{-1},$$

которое снова подставим в правую часть формулы (8.17). В результате найдем

$$\rho = 974,73 \text{ м}^{-1}.$$

Это значение уже почти не отличается от предыдущего, и его можно считать истинным.

Определим фазовую скорость волны в спирали по приближенной формуле (8.19):

$$v_{\phi}/c \approx 0,06362.$$

Используя значение  $\rho$ , полученное итерационным методом, найдем уточненное значение  $v_{\phi}/c$ :

$$\frac{v_{\phi}}{c} = \frac{\beta}{h} = \frac{\beta}{\sqrt{\rho^2 + \beta^2}} = 0,06432,$$



т.е. ошибка приближенной формулы составляет 1,1%. Эта ошибка обусловлена тем, что при выводе приближенной формулы (8.18) подкоренное выражение в (8.17) принято равным единице. Чем больше  $pa$ , тем выше точность приближения. В приведенном расчете точность 1,1% достигнута при  $pa = 4,87$ . Следовательно, можно полагать, что при  $pa > 5$  точность приближенных выражений (8.18), (8.19) будет не хуже 1%.

### § 8.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

8.8. Какие типы волн могут распространяться вдоль диэлектрической пластины толщиной 12 мм при частоте поля 10 ГГц? Диэлектрическая проницаемость материала пластины  $\epsilon = 3$ .

Ответ:  $H_1, H_2, E_1, E_2$ .

8.9. При какой толщине пластины из полистирола вдоль нее может распространяться только основная волна магнитного типа  $H_1$ ? Длина волны генератора 4,5 см.

Ответ:  $2a < 1,80$  см.

8.10. В каком диапазоне частот вдоль диэлектрической пластины толщиной  $2a = 20$  мм с относительной проницаемостью  $\epsilon = 3,2$  могут одновременно распространяться волны  $E_1$  и  $E_2$ , а волна  $E_3$  распространяться не может?

Ответ:  $5,056 \text{ ГГц} < f < 10,11 \text{ ГГц}$ .

8.11. Определить фазовую скорость волны типа  $H_1$ , распространяющейся вдоль диэлектрической пластины толщиной 5 мм с относительной проницаемостью  $\epsilon = 2,9$ . Длина волны генератора 16 мм.

Ответ:  $2,065 \cdot 10^8$  м/с.

8.12. Определить фазовую скорость волны типа  $E_1$ , распространяющейся в диэлектрической пластине толщиной 12 мм с относительной проницаемостью  $\epsilon = 2,21$  при частоте поля 8 ГГц.

Ответ:  $2,726 \cdot 10^8$  м/с.

8.13. Определить длины волн типов  $H_1$  и  $H_2$ , распространяющихся вдоль диэлектрической пластины толщиной 10 мм с относительной проницаемостью  $\epsilon = 2,8$  при частоте поля 12 ГГц.

Ответ: 1,678 см для волны типа  $H_1$ , 2,474 см для волны типа  $H_2$ .

8.14. Вдоль полистироловой пластины толщиной 18 мм распространяется волна типа  $H_1$ . Частота поля 6 ГГц.

Во сколько раз уменьшится напряженность поля при удалении от пластины на 20 мм?

Ответ: в 11,4 раз.

8.15. Вдоль диэлектрической пластины распространяется волна типа  $E_1$  с фазовой скоростью 0,8 с. Частота поля 35 ГГц.

На каком расстоянии от пластины напряженность поля уменьшается в 100 раз?

Ответ: 8,4 мм.

8.16. При какой толщине кварцевой пластины фазовая скорость распространяющейся вдоль нее волны типа  $H_1$  равна 0,7 с при частоте поля 20 ГГц?

Ответ:  $2a = 2,36$  мм.

8.17. Найти относительную проницаемость диэлектрической пластины, вдоль которой распространяется волна типа  $E_1$  со скоростью  $2 \cdot 10^8$  м/с при частоте поля 9380 МГц.

Ответ:  $\epsilon = 3,96$ .

8.18. В пределах какого диапазона частот вдоль диэлектрической пластины на металлической подложке может распространяться только основная волна магнитного типа? Толщина пластины  $a = 12$  мм, диэлектрическая проницаемость  $\epsilon = 2,9$ .

Ответ:  $4,53 \text{ ГГц} < f < 13,6 \text{ ГГц}$ .

8.19. Определить фазовую скорость основной волны магнитного типа, распространяющейся вдоль полистироловой пластины толщиной 16 мм на металлической подложке (см. рис. 8.3). Длина волны генератора 3,2 см.

Ответ:  $2,81 \cdot 10^8$  м/с.

8.20. Узкая щель между двумя стеклянными пластинами заполнена нитротолуолом. Показатель преломления стекла  $n_1 = \sqrt{\epsilon_1} = 1,544$ , показатель преломления нитротолуола  $n_2 = \sqrt{\epsilon_2} = 1,547$ . Длина волны генератора 0,59 мкм.

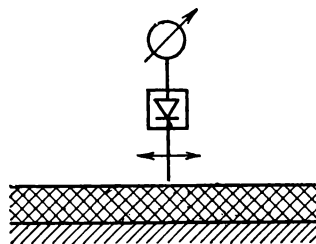


Рис. 8.8

При какой толщине щели  $2a$  в слое нитротолуола могут распространяться только волны основного типа?

Ответ:  $2a < 3,07$  мм.

8.21. Определить диапазон длин волн, в котором вдоль полиэтиленовой пластины толщиной  $2a = 5$  мм распространяется волна типа  $H_1$  с фазовой скоростью  $v_f < 0,8 c$ , а волна типа  $H_2$  распространяться не может.

Ответ:  $11,2 \text{ мм} < \lambda < 17,7 \text{ мм}$ .

8.22. В кварцевой пластине распространяется волна типа  $E_1$ , фазовая скорость которой в 1,1 раза меньше скорости света.

Во сколько раз напряженность магнитного поля у края пластины меньше, чем в центре?

Ответ: в 1,47 раза.

8.23. В полистироловой пластине толщиной 20 мм распространяется волна типа  $H_1$ .

При какой частоте напряженность электрического поля на поверхности пластины в три раза меньше, чем в центре?

Ответ: 14,1 ГГц.

8.24. Для измерения диэлектрической проницаемости материала служит установка, изображенная на рис. 8.8. В диэлектрической пластине толщиной 10 мм на металлической подложке возбуждается основная волна магнитного типа. С помощью зонда, перемещающегося вдоль пластины, измеряется длина волны.

Определить диэлектрическую проницаемость материала пластины, если длина волны, измеренная зондом, составляет 22 мм, а длина волны генератора равна 32 мм.

Ответ:  $\epsilon = 4,1$ .

8.25. В кварцевой пластине толщиной 8 мм распространяется волна типа  $H_1$ . Длина волны генератора 3 см.

Вывести формулу для определения доли мощности, переносимой волной внутри пластины. Провести численный расчет для приведенных данных.

$$\text{Ответ} \quad \frac{P_{\text{днэл}}}{P_{\text{общ}}} = \frac{1 + \frac{\sin 2ga}{2ga}}{1 + \frac{\sin 2ga}{2ga} + \frac{\cos^2 ga}{pa}} = 0,808.$$

8.26. Найти коэффициент замедления фазовой скорости  $v_{\phi}/c$  и длину  $\lambda_{\text{в}}$  основного типа волны в Н-образной металлодиэлектрической линии передачи (см. рис. 8.4) с размерами  $2a = 18$  мм,  $b = 12$  мм. Диэлектрик — полистирол, длина волны генератора 3,2 см.

Ответ: 0,675, 21,6 мм.

8.27. В Н-образной линии передачи с параметрами  $2a = 20$  мм,  $b = 10$  мм,  $2d = 80$  мм,  $\varepsilon = 2,7$  распространяются волны типов  $H_{10}$  и  $H_{20}$ . Частота поля 10 ГГц.

Во сколько раз напряженность поля у края металлической пластины меньше, чем на поверхности диэлектрика?

Ответ: в 1710 раз для волны типа  $H_{10}$ ; в 126 раз для волны типа  $H_{20}$ .

8.28. Н-образная линия передачи с параметрами  $2a = 12$  мм,  $b = 10$  мм предназначена для работы на волне типа  $H_{10}$ . Материал диэлектрической пластины — кварц. Длина волны генератора 3,2 см.

Какой следует выбрать ширину металлических пластин  $2d$ , чтобы напряженность поля у их краев была в 100 раз меньше, чем на поверхности диэлектрика?

Ответ: 45 мм.

8.29. В Н-образной линии передачи с параметрами  $2a = 18$  мм,  $b = 20$  мм,  $\varepsilon = 2,6$  длина волны колебания типа  $H_{10}$  равна 2,0 см.

Определить частоту поля. Может ли при данной частоте распространяться волна типа  $H_{20}$ ? Если может, то какова ее фазовая скорость?

Ответ: 9,97 ГГц; может;  $2,56 \cdot 10^8$  м/с.

8.30\*. Поперечное сечение металлодиэлектрической линии передачи с параметрами  $a = 10$  мм,  $b = 10$  мм,  $\varepsilon = 2,56$  изображено на рис. 8.9.

Определить фазовую скорость волны основного типа в линии при частоте сигнала 10 ГГц.

Ответ:  $2,458 \cdot 10^8$  м/с.

8.31. В Н-образной линии передачи с параметрами  $2a = 20$  мм,  $b = 15$  мм,  $\varepsilon = 2,7$  волной типа  $H_{10}$  переносится мощность 1 кВт. Частота поля 8 ГГц.

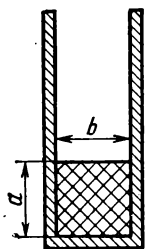


Рис. 8.9

Определить напряженность электрического поля в центре диэлектрической пластины.

Ответ:  $4,66 \cdot 10^4$  В/м.

8.32\* В Н-образной линии передачи с параметрами  $2a = 20$  мм,  $b = 12$  мм,  $\varepsilon = 2,6$  при частоте поля 10 ГГц могут распространяться волны типов  $H_{10}$  и  $H_{20}$ .

Вывести формулу для расчета мощности, переносимой волной типа  $H_{20}$ . Используя результаты решения задачи 8.4, рассчитать мощность, переносимую волнами типов  $H_{10}$  и  $H_{20}$ . Максимально допустимую напряженность электрического поля принять равной 20 кВ/см.

• Ответ:  $P_{H_{20}} = \frac{1}{2} E_{\max}^2 \frac{hab}{\omega \mu_0} \left( \frac{1}{\sin^2 ga} + \frac{\operatorname{ctg}^2 ga}{pa} - \frac{\operatorname{ctg} ga}{ga} \right),$

$P = 7,53$  МВт для волны типа  $H_{10}$ ,  $P = 1,66$  МВт для волны типа  $H_{20}$ .

8.33\* Вывести расчетную формулу для определения коэффициента ослабления волны типа  $H_{10}$  в Н-образной линии передачи с учетом потерь в металлических стенках. Рассчитать значение коэффициента ослабления волны типа  $H_{10}$  при следующих исходных данных:  $2a = 12$  мм,  $b = 10$  мм,  $\varepsilon = 2,56$ ,  $\operatorname{tg} \delta_s = 2 \cdot 10^{-4}$ ,  $\sigma = 5,7 \cdot 10^7$  См/м. Частота поля 10 ГГц.

Ответ:  $\alpha_{\text{общ}} = \alpha_m + \alpha_d$ , где

$$\alpha_m = \frac{R_s \left\{ [(ha)^2 - (ga)^2] \frac{\sin 2ga}{2ga} + (ha)^2 + (ga)^2 + [(ha)^2 + (pa)^2] \frac{\cos^2 ga}{pa} \right\}}{\omega \mu_0 ha^2 b \left( \frac{\sin 2ga}{2ga} + 1 + \frac{\cos^2 ga}{pa} \right)}$$

— составляющая коэффициента ослабления, вызванная потерями в металлических стенках;  $\alpha_d$  — составляющая коэффициента ослабления, обусловленная потерями в диэлектрике [вычисляется по формуле (8.36)];  $\alpha_m = 0,0125$  м<sup>-1</sup>;  $\alpha_d = 0,0283$  м<sup>-1</sup>;  $\alpha_{\text{общ}} = 0,0408$  м<sup>-1</sup>.

8.34. Определить коэффициент замедления  $v_{\phi}/c$  волны в гребенке с размерами  $l = 4$  мм,  $a = 0,5$  мм при частоте поля 12 ГГц.

Ответ: 0,536.

8.35. Длина волны в гребенке равна 2,2 см при частоте генератора 10 ГГц.

Определить глубину  $l$  пазов.

Ответ: 3,57 мм.

8.36. Вдоль гребенки с глубиной пазов 9 мм распространяется волна с фазовой скоростью  $2 \cdot 10^8$  м/с.

Определить частоту генератора.

Ответ: 4,46 ГГц.

8.37. Глубина пазов гребенки 6 мм, длина волны генератора 3,2 см.

На каком расстоянии от гребенки напряженность поля убывает в 100 раз?

Ответ: 9,7 мм.

8.38. Длина волны в гребенке 2,6 см, длина волны генератора 4,6 см. Во сколько раз напряженность поля на расстоянии 10 мм от гребенки меньше, чем на ее поверхности?

Ответ: в 7,34 раза.

8.39. На расстоянии 12 мм от поверхности гребенки напряженность поля в 10 раз меньше, чем на ее поверхности.

Определить глубину пазов гребенки, если частота генератора 6 ГГц.

Ответ: 7,9 мм.

8.40. Определить поверхностный импеданс гребенки с размерами  $l = 8$  мм,  $a = 1$  мм при частоте поля 8 ГГц.

Ответ:  $Z = j 1607$  Ом.

8.41. Поверхностный импеданс гребенки равен  $j 900$  Ом.

Определить фазовую скорость волны, распространяющейся вдоль гребенки.

Ответ:  $1,16 \cdot 10^8$  м/с.

8.42. Найти фазовую скорость основной волны, распространяющейся в волноводной системе, состоящей из гребенки и расположенной над ней металлической пластины (рис. 8.10). Основные размеры:  $l = 5$  мм,  $d = 10$  мм, ширина паза  $a$  пренебрежимо мала. Длина волны генератора 2,6 см.

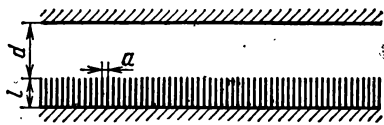


Рис. 8.10

Указание: поле над гребенкой следует выразить через гиперболические функции и, приравнявая им-

педансы полей на поверхности гребенки, получить характеристическое уравнение.

Ответ:  $1,064 \cdot 10^8$  м/с.

8.43. Определить фазовую скорость волны в спирали с шагом 1 мм и радиусом витков 4 мм на частоте 0,5 ГГц.

Ответ:  $1,59 \cdot 10^7$  м/с.

8.44. Дана спираль с параметрами  $a = 2$  мм,  $d = 0,4$  мм,  $\lambda = 6$  см.

Во сколько раз продольные составляющие поля волны в спирали на ее оси меньше, чем у поверхности?

Ответ: в 111 раз.

8.45. На каком расстоянии от поверхности спирали поперечные составляющие поля уменьшаются в  $10^5$  раз по сравнению с полем на ее поверхности? Размеры спирали:  $a = 2$  см,  $d = 2$  мм, частота поля 1 ГГц

Ответ: 8,46 мм.

8.46. Рассчитать шаг спирали, позволяющий получить 10-кратное замедление фазовой скорости на частоте 1 ГГц. Диаметр спирали 10 мм.

Ответ: 2,55 мм.

## Глава девятая

### ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ С ВОЛНАМИ ТИПА Т

#### § 9.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Электромагнитные волны, векторы напряженности электрического и магнитного полей которых лежат в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, называют поперечными электромагнитными волнами или волнами типа Т.

Волна типа Т в отличие от волн типов Н и Е распространяется в линии при любой частоте ( $\omega_{крТ} = 0$ ), что важно для практики.

Для волн типа Т поперечное волновое число  $g = 0$ , поэтому продольное волновое число  $h$  оказывается таким же, как и в случае однородной плоской волны. Для линии без потерь

$$h = \beta = \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a}, \quad (9.1)$$

откуда

$$v_\Phi = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}}, \quad (9.2)$$

$$\lambda_b = \lambda. \quad (9.3)$$

Здесь  $\lambda$  — длина однородной плоской волны в заполняющем диэлектрике с параметрами  $\epsilon_a, \mu_a$ .

Характеристическое сопротивление волны типа Т в линии без потерь, обозначаемое  $Z_{сТ}$  и равное отношению поперечной составляющей напряженности электрического поля и поперечной составляющей напряженности магнитного поля бегущей волны, совпадает с аналогичной, величиной, вычисленной для однородной плоской волны в неограниченном пространстве:

$$Z_{сТ} = Z_c = \sqrt{\mu_a / \epsilon_a}. \quad (9.4)$$

Комплексные амплитуды полей волны типа Т в поперечной плоскости удовлетворяют векторным уравнениям Лапласа:

$$\nabla_\perp^2 E_0 = 0, \quad \nabla_\perp^2 H_0 = 0. \quad (9.5)$$

Распределение электрического и магнитного полей вдоль продольной оси  $z$  можно записать в виде бегущей волны:

Для линии с потерями

$$\dot{E} = E_0 e^{-\gamma z}, \quad \dot{H} = H_0 e^{-\gamma z}, \quad (9.6)$$

где  $\gamma = \beta - j\alpha$  — коэффициент распространения;  $E_0$  и  $H_0$  определяются уравнениями (9.5).

Электрические и магнитные поля волны типа Т в плоскости поперечного сечения линии передачи по структуре будут такими же, как и постоянные во времени электрические и магнитные поля, существующие в системе при тех же граничных условиях. Это означает, что распространение волны типа Т возможно лишь в линиях, которые могут быть использованы для передачи постоянного тока (двухпроводные, коаксиальные, полосковые и др.).

Статический характер поперечного распределения электрического поля позволяет определить разность потенциалов между проводниками линии (рис. 9.1):

$$U = \int_{L(P,Q)} \dot{E} dl', \quad (9.7)$$

не зависящую от выбора пути интегрирования  $\Delta$  в поперечной плоскости. Ток вдоль проводников:

$$I = \int_l \dot{\eta}_s dl \quad (9.8)$$

находят интегрированием вектора  $\dot{\eta}_s$  плотности поверхностного электрического тока по контуру сечения проводника  $l$ .

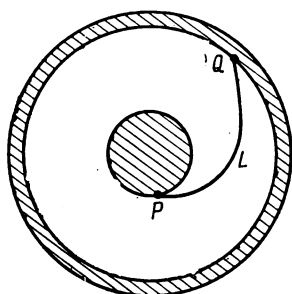


Рис. 9.1

Линии передачи с волной типа Т характеризуются волновым сопротивлением  $Z_B$ , равным отношению комплексных амплитуд напряжения и тока в режиме бегущих волн и выражающимся через погонные индуктивность  $L_1$  и емкость  $C_1$  линии следующим образом:

$$Z_B = \sqrt{L_1/C_1}. \quad (9.9)$$

Фазовая скорость в линии передачи с волной типа Т

$$v_\phi = \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}}. \quad (9.10)$$

Мощность, переносимая волной по линии передачи,

$$P = \frac{1}{2} \int_S \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}] dS, \quad (9.11)$$

или

$$P = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_a}{\mu_a}} \int_S |\dot{\mathbf{E}}|^2 dS, \quad (9.12)$$

где интегрирование ведется по поперечному сечению линии.

Коэффициент ослабления  $\alpha$  волны в линии передачи складывается из коэффициента  $\alpha_d$ , учитывающего потери в диэлектрике, и коэффициента  $\alpha_m$ , описывающего потери в металле:

$$\alpha = \alpha_d + \alpha_m, \text{ м}^{-1}. \quad (9.13)$$

Здесь

$$\alpha_d = \frac{1}{2} \omega \sqrt{\epsilon_a \mu_a} \operatorname{tg} \delta_a, \quad (9.14)$$

$$\alpha_m = \frac{1}{2} \frac{R_S \int_l |\dot{\mathbf{H}}_\tau|^2 dl}{\int_S \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}} \dot{\mathbf{H}}] dS}, \quad (9.15)$$

где  $R_S$  — поверхностное сопротивление металла (см. главу 4).

Интегрирование в числителе ведется по контуру сечения линии, в знаменателе — по поперечному сечению линии.

## Двухпроводные линии передачи

Двухпроводная линия образована системой из двух параллельных проводников, окруженных однородным веществом с параметрами  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$ .

На рис. 9.2 показана симметричная двухпроводная линия передачи из одинаковых проводников круглого сечения. Рассмотрим основные расчетные соотношения для этой линии.

Комплексные амплитуды тока  $\dot{I}$  и напряжения  $\dot{U}$  для бесконечной линии без потерь:

$$\begin{aligned}\dot{I} &= I e^{-i\beta z}, \\ \dot{U} &= U e^{-i\beta z}\end{aligned}\quad (9.16)$$

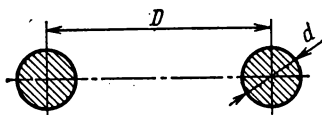


Рис. 9.2

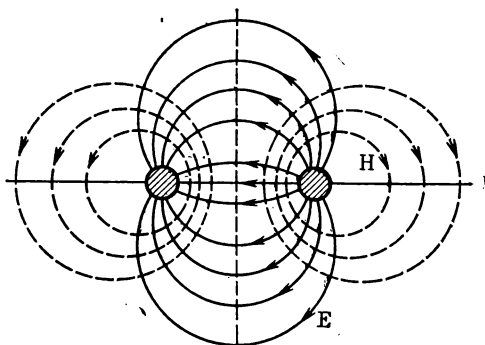


Рис. 9.3

Погонные параметры двухпроводной линии передачи

$$L_1 \approx \frac{\mu_a}{\pi} \ln \left( \frac{2D-d}{d} \right), \text{ Гн/м}, \quad (9.17)$$

$$C_1 \approx \pi \epsilon_a \frac{1}{\ln \left( \frac{2D-d}{d} \right)}, \text{ Ф/м}. \quad (9.18)$$

Волновое сопротивление

$$Z_B \approx 120 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln \left( \frac{2D-d}{d} \right), \text{ Ом}. \quad (9.19)$$

Картина силовых линий электромагнитного поля показана на рис. 9.3. Мощность, переносимая волной типа Т в двухпроводной линии передачи,

$$P = \frac{U^2}{2Z_B} = \frac{U^2}{240} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{\ln \left( \frac{2D-d}{d} \right)}, \text{ Вт}. \quad (9.20)$$

Напряженность электрического поля максимальна на участках поверхности, которые наиболее близки друг к другу. Приблизительно при  $d/D < 0,4$

$$E_{\max} = \frac{U}{d} \frac{1+d/(2D)}{\ln \left( \frac{2D-d}{d} \right)}. \quad (9.21)$$



Диэлектрик способен выдержать без электрического пробоя некоторое предельное значение напряженности электрического поля  $E_{\text{пред}}$ , которое и определяет предельную переносимую мощность.

Коэффициент ослабления волны за счет потерь в диэлектрике определяется формулой (9.14). Коэффициент ослабления, обусловленный сопротивлением проводников.

$$\alpha_m = \frac{R_s}{\pi d Z_b \sqrt{1 - (d/D)^2}}, \text{ м}^{-1}. \quad (9.22)$$

Здесь квадратный корень учитывает повышение ослабления вследствие неравномерного распределения тока; при  $d < D/3$  этой поправкой можно пренебречь.

### Коаксиальные линии передачи

Коаксиальная линия передачи представляет собой систему из двух соосных металлических цилиндров с диаметрами  $d$  и  $D$ , разделенных слоем диэлектрика с проницаемостями  $\epsilon_a$  и  $\mu_a$  (рис. 9.4).

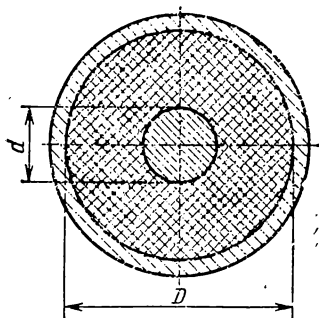


Рис. 9.4

Комплексная амплитуда вектора  $\vec{E}$  бегущей волны в коаксиальной линии передачи без потерь

$$\vec{E} = \frac{\dot{U}}{\ln(D/d)} \frac{1}{r} e^{-j\beta z} \mathbf{1}_r, \quad (9.23)$$

где  $\dot{U}$  — комплексная амплитуда напряжения (разности потенциалов) между внутренним и внешним проводниками в сечении  $z = 0$ .

Для линии без потерь

$$Z_{\text{сг}} = \sqrt{\mu_a/\epsilon_a} = 120\pi \sqrt{\mu/\epsilon}, \text{ Ом}. \quad (9.24)$$

Погонные параметры коаксиальной линии передачи:

$$L_1 = \mu_a/(2\pi) \ln(D/d), \text{ Гн/м}, \quad (9.25)$$

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon_a}{\ln(D/d)}, \text{ Ф/м}. \quad (9.26)$$

Волновое сопротивление коаксиальной линии передачи

$$Z_b = 60 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \ln\left(\frac{D}{d}\right) = 138 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \lg\left(\frac{D}{d}\right), \text{ Ом}. \quad (9.27)$$

Переносимая мощность

$$P = \frac{U^2}{120} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{1}{\ln(D/d)}, \text{ Вт}. \quad (9.28)$$

Поскольку

$$U = E_{\text{max}} \frac{a}{2} \ln(D/d), \text{ В}, \quad (9.29)$$

выражение (9.28) можно представить в виде

$$P = \frac{E_{\text{max}}^2 d^2}{480} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \ln(D/d), \text{ Вт.} \quad (9.30)$$

Коэффициент ослабления волны типа Т в коаксиальной линии передачи, учитывающий потери в диэлектрике, определяется формулой (9.14). Коэффициент ослабления, обусловленный потерями в металле,

$$\alpha_m = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{R_{S1}/d + R_{S2}/D}{120\pi \ln(D/d)}, \text{ м}^{-1}, \quad (9.31)$$

где  $R_{S1}$  и  $R_{S2}$  — поверхностные сопротивления металла внутреннего и внешнего цилиндров соответственно.

В коаксиальной линии передачи волны электрического и магнитного типов являются высшими типами волн. Обычно они не используются для передачи, но могут возникать как паразитные. Для подавления волн высших типов достаточно, чтобы частота колебаний удовлетворяла неравенству

$$\omega \leq \frac{4}{\sqrt{\mu_a \varepsilon_a} (d + D)}. \quad (9.32)$$

### Полосковые линии передачи

В технике СВЧ широко применяют направляющие системы, называемые полосковыми линиями передачи, которые особенно удобны в печатных и интегральных схемах СВЧ. На рис. 9.5, а и б изображены полосковые линии передачи несимметричного и симметричного типов. Эти линии либо заполнены воздухом, либо имеют основание из твердого диэлектрика.

Строгая теория полосковых линий довольно сложна. Так называемая квази-Т-волна в этих линиях может существовать, если ширина токонесущего проводника и расстояние между ним и заземленной пластиной меньше половины длины волны в линии передачи. При этом электрическое и магнитное поля сосредоточены в основном в пространстве между проводником и заземленной пластиной. Электрическое поле в поперечной плоскости может быть описано уравнением Лапласа (9.5).

В полосковых линиях передачи с диэлектрическим основанием волны типа Т не могут распространяться в чистом виде из-за неоднородности диэлектрика. Однако теория и опыт показывают, что поля и поток мощности сосредотачиваются главным образом в диэлектрике между токонесущим проводником и заземленной пластиной. Поэтому можно принять допущение об однородности диэлектрика, заполняющего всю линию передачи.

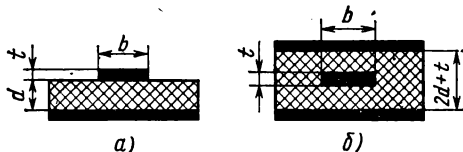


Рис. 9.5

Картины силовых линий электромагнитного поля в полосковых линиях передачи приведены на рис. 9.6, а и б. Для практических расчетов удобны следующие приближенные соотношения, которые хорошо согласуются с опытными данными [8].

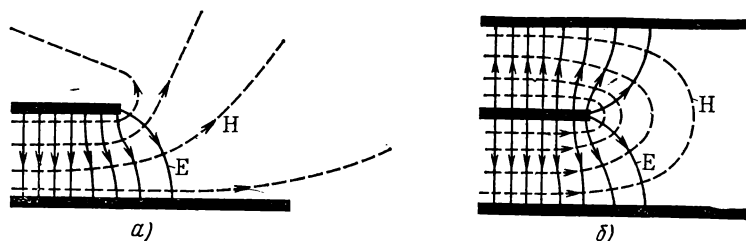


Рис. 9.6

Погонные емкости (Ф/м) рассчитывают по формулам:  
для несимметричной полосковой линии передачи (см. рис. 9.5, а)

$$C_1 = 1,06 \cdot 10^{-11} \varepsilon (1 + b/d) \quad (t/d \ll 1, b/d > 0,6), \quad (9.33)$$

$$C_1 = 1,06 \cdot 10^{-11} \varepsilon (1 + b/d) \frac{1}{1 - t/d} \quad (b/d < 2), \quad (9.34)$$

$$C_1 = 1,06 \cdot 10^{-11} \varepsilon \left[ 1 + \frac{b}{d} \left( \frac{1}{1 - t/d} \right) \right] \quad (b/d > 2); \quad (9.35)$$

для симметричной полосковой линии передачи (см. рис. 9.5, б)

$$C_1 = 1,54 \cdot 10^{-11} \varepsilon (1 + b/d) \quad (t/d \ll 1; b/d > 0,6), \quad (9.36)$$

$$C_1 = 1,54 \cdot 10^{-11} \varepsilon (1 + b/d) \frac{1}{1 - t/d} \quad (b/d < 2), \quad (9.37)$$

$$C_1 = 1,54 \cdot 10^{-11} \varepsilon \left[ 1 + \frac{b}{d} \left( \frac{1}{1 - t/d} \right) \right] \quad (b/d > 2). \quad (9.38)$$

Волновые сопротивления с учетом толщины токонесущего проводника  $t$  рассчитывают по формулам:

для несимметричной линии передачи

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{314}{1 + b/d} (1 - t/d) \quad (b/d < 2), \quad (9.39)$$

$$Z_B = 314 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{1 + \frac{b}{d} \left( \frac{1}{1 - t/d} \right)} \quad (b/d > 2); \quad (9.40)$$

для симметричной линии передачи

$$Z_B = 216 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1-t/d}{1-b/d} \quad (b/d < 2), \quad (9.41)$$

$$Z_B = 216 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{1}{1 + \frac{b}{d} \left( \frac{1}{1-t/d} \right)} \quad (b/d > 2). \quad (9.42)$$

Волновые сопротивления без учета толщины проводника определяются соотношениями:

для несимметричной линии передачи

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{314}{1+b/d}; \quad (9.43)$$

для симметричной линии передачи

$$Z_B = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \frac{216}{1+b/d}. \quad (9.44)$$

Передаваемая мощность в несимметричной полосковой линии передачи

$$P = 8,44 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 d^2 \ln \frac{r_B}{r_A}, \text{ Вт.} \quad (9.45)$$

где  $E_0$  — амплитуда напряженности поля в центре линии, В/м.

Значения коэффициентов  $r_A$  и  $r_B$  в зависимости от отношения  $b/d$  определяют по таблицам в Приложении IV.

При  $b/d \geq 1$  в формуле (9.45) можно принять, что

$$\ln \frac{r_B}{r_A} \approx r_B, \quad (9.46)$$

в результате чего она упрощается:

$$P = 8,44 \cdot 10^{-4} \sqrt{\varepsilon/\mu} E_0^2 d^2 r_B, \text{ Вт.} \quad (9.47)$$

Предельная мощность в полосковых линиях передачи ограничивается условиями пробоя и допустимым нагревом диэлектрика. Если пробой диэлектрика определяет предел мощности в импульсе, то нагрев ограничивает передаваемую мощность при непрерывной работе или среднюю мощность в импульсном режиме.

Предельная мощность полосковых линий передачи, обусловленная условиями электрического пробоя, ограничивается максимально допустимой величиной напряженности электрического поля у края проводника, так как поле внутри линии неравномерно:

$$E_{\max} = 2E_0/k_B, \quad (9.48)$$

где  $k_n$  учитывает неравномерность распределения напряженности электрического поля в плоскости поперечного сечения несимметричной полосковой линии.

Для несимметричной полосковой линии передачи

$$k_n \approx 2 \sqrt{2 \frac{t}{d} + 4 \frac{t}{d}}. \quad (9.49)$$

При малых значениях  $t/d$

$$k_n \approx 2 \sqrt{2 \frac{t}{d}}. \quad (9.50)$$

Для несимметричной полосковой линии передачи, учитывая выражения (9.47), (9.48) и заменяя  $E_{\max}$  на  $E_{\text{пред}}$ , получим

$$P_{\text{пред}} = 8,44 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{\text{пред}}^2 \frac{k_n^2}{4} d^2 r_B, \text{ Вт.} \quad (9.51)$$

На основании неравенства (9.50) формулу (9.51) можно упростить:

$$P_{\text{пред}} = 16,88 \cdot 10^{-4} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{\text{пред}}^2 d^2 \frac{t}{d} r_B, \text{ Вт.} \quad (9.52)$$

Передаваемая мощность в симметричной полосковой линии передачи

$$P = \frac{1}{60\pi^2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_0^2 d^2 k_c^2 \ln \left( \frac{1+r_c}{1-r_c} \right), \quad (9.53)$$

где

$$k_c^2 = \sqrt{\frac{t}{2d} \left( 1 + \frac{t}{d} \right) \left( 2 + \frac{t}{d} \right)^2 \left( 4 + \frac{t}{d} \right)} \quad (9.54)$$

— коэффициент, учитывающий неравномерность распределения напряженности электрического поля в плоскости поперечного сечения.

Значения  $r_c$  для различных отношений  $b/d$  приведены в табл. 9.1.

Т а б л и ц а 9.1

$b/d$	1	1,2	1,4	1,6	2,0	3,0	4,0
$r_c$	0,890	0,920	0,945	0,948	0,980	0,990	0,9909
$b/d$	5,0	6,0	9,0	14,0	20		
$r_c$	0,999	0,9996	0,9999	0,99999	0,999999		

Если геометрические размеры удовлетворяют неравенствам  $t/d < 0,3$ ;  $b/d > 1$ , то выражение (9.53) можно преобразовать к виду

$$P = 5,4 \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_0^2 d^2 (0,1 + t/d) (4 + b/d). \quad (9.55)$$

Предельная мощность в симметричной полосковой линии передачи

$$P_{\text{пред}} = 5,4 \cdot 10^{-3} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} E_{\text{пред}}^2 d^2 (0,1 + t/d) (4 + b/d), \text{ Вт.} \quad (9.56)$$

Коэффициент ослабления, обусловленный потерями в проводящих пластинах несимметричной полосковой линии передачи,

$$\alpha_{\text{м}} = \frac{R_s}{120\pi d} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \left| \frac{\ln(r_A k_H/2)}{\ln(r_B/r_A)} \right|. \quad (9.57)$$

Здесь коэффициент  $k_H$  определяют по соотношению (9.49) или (9.50) а значения  $r_A$  и  $r_B$  — по таблицам в Приложении IV.

Коэффициент ослабления, обусловленный потерями в проводящих пластинах симметричной полосковой линии передачи (при  $t/d < 0,3$ ,  $b/d > 1$ ),

$$\alpha_{\text{м}} = \frac{R_s}{120\pi d} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{7 - 50t/d + b/d}{3,2 (0,1 + t/d) (4 + b/d)}, \text{ м}^{-1}. \quad (9.58)$$

В формулах (9.57), (9.58)  $R_s$  — поверхностное сопротивление металла.

Коэффициент ослабления волны типа Т в полосковой линии передачи за счет потерь в диэлектрике определяется соотношением (9.14).

## § 9.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

**9.1.** Рассчитать волновое сопротивление и коэффициент ослабления симметричной двухпроводной линии передачи. Диаметр проводов линии  $d = 3$  мм, расстояние между проводами  $D = 200$  мм. Проводники линии выполнены из меди, диэлектрик — воздух. Рабочая частота  $10^8$  Гц.

Решение. В соответствии с формулой (9.19) волновое сопротивление

$$Z_B = 120 \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \ln\left(\frac{2D-d}{d}\right) = 120 \ln\left(\frac{2 \cdot 200 - 3}{3}\right) = 586 \text{ Ом.}$$

Коэффициент ослабления в двухпроводной линии передачи определяется только сопротивлением проводников, так как потери в диэлектрике отсутствуют. Согласно выражению (9.22)

$$\alpha = \alpha_{\text{м}} = \frac{R_s}{\pi d Z_B \sqrt{1 - (d/D)^2}}.$$

Вычисляя

$$\frac{d}{D} = \frac{3}{200} = 0,015 \text{ и } \sqrt{1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2} = \sqrt{1 - 0,015^2} \approx 1,$$

находим коэффициент ослабления

$$\alpha = \sqrt{\frac{\mu_{ам} \omega}{2\sigma_m}} \frac{1}{\pi d Z_B} = \sqrt{\frac{4\pi \cdot 10^{-7} 2\pi \cdot 10^8}{2 \cdot 5,7 \cdot 10^7}} \frac{1}{\pi 3 \cdot 10^{-3} \cdot 586} = 0,048 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}.$$

**9.2.** Найти отношение между внешним и внутренним диаметрами коаксиальной линии передачи с волной типа Т, при котором будет минимальное затухание, считая, что потери в диэлектрике отсутствуют. Внутренний и внешний цилиндры выполнены из одного материала.

**Р е ш е н и е.** Согласно выражению (9.14)  $\alpha = \alpha_m$ ,  $\alpha_d = 0$ , Коэффициент ослабления  $\alpha_m$  в коаксиальной линии передачи определяем согласно формуле (9.31). Поскольку  $R_{S1} = R_{S2} = R_S$ , из формулы (9.31) находим

$$\alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{R_S}{120\pi} \frac{1/d + 1/D}{\ln(D/d)}.$$

Преобразуем последнее выражение так, чтобы в него входило в явном виде отношение  $D/d$ :

$$\alpha = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}} \frac{R_S}{120\pi D} \frac{(D/d + 1)}{\ln(D/d)}.$$

Обозначив  $\frac{\sqrt{\varepsilon/\mu} R_S}{D 120\pi} = A$ ,  $\frac{D}{d} = x$ , запишем

$$\alpha = A \frac{1+x}{\ln x}.$$

Для нахождения экстремума следует решить уравнение

$$\frac{d\alpha}{dx} = A \frac{\ln x - \frac{1+x}{x}}{\ln^2 x} = 0$$

или

$$\ln x = \frac{1+x}{x}.$$

Полученное уравнение является трансцендентным. Из графических построений (рис. 9.7) имеем корень  $x = 3,6$ , откуда  $D/d = 3,6$ . Таким образом, минимальное затухание волны типа Т в коаксиальной линии передачи получается при отношении  $D/d = 3,6$ .

**9.3.** Центрирование внутреннего цилиндра воздушной коаксиальной линии передачи осуществляют с помощью диэлектрических шайб (рис. 9.8).

Рассчитать диаметр  $D$  внешнего цилиндра и глубину выточек  $h$  в нем, исходя из условия отсутствия отражений. Волновое сопротивление линии  $Z_{в1} = 70$  Ом, диаметр внутреннего цилиндра линии  $d = 4,5$  мм, диаметр отверстия в шайбе  $d_{ш} = 3,0$  мм, относительная диэлектрическая проницаемость материала шайбы  $\epsilon = 2,3$ . Потерями в линии пренебречь.

**Решение.** Воздушную коаксиальную линию передачи с шайбами можно рассматривать как каскадное соединение отрезков регулярных линий. Поскольку в плоскости стыка шайбы и воздушной линии

напряжение  $U$  является непрерывной функцией координаты  $z$ , мощность может быть целиком передана из одной линии в другую без отражения, если  $Z_{в1} = Z_{в2}$ , где  $Z_{в2}$  — волновое сопротивление той части, где расположена шайба.

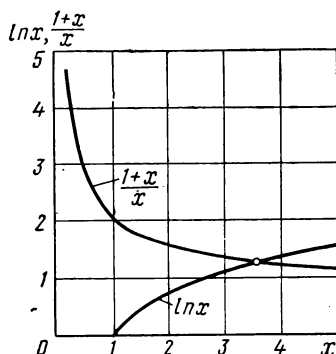


Рис. 9.7

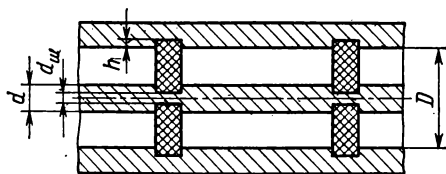


Рис. 9.8

Согласно выражению (9.27)

$$Z_{в1} = 60 \ln \left( \frac{D}{4,5} \right) = 70 \text{ Ом},$$

откуда  $D = 14,45$  мм.

Далее находим

$$Z_{в2} = 60 \sqrt{\frac{1}{2,3}} \ln \left( \frac{14,45 + 2h}{3,0} \right).$$

Приравнявая  $Z_{в1}$  и  $Z_{в2}$ , получаем уравнение

$$70 = 39,56 \ln \left( \frac{14,45 + 2h}{3,0} \right),$$

или

$$\ln \frac{14,45 + 2h}{3,0} = 1,77,$$

корень которого  $h = 1,58$  мм.

Полученное решение является приближенным, поскольку не учитываются локальные возмущения поля из-за скачков диаметров проводников.

**9.4.** Рассчитать волновое сопротивление, погонные емкость и индуктивность, а также предельную передаваемую мощность в несим-



метричной полосковой линии передачи в воздушном заполнении. Параметры линии: ширина проводника  $b = 5$  мм, расстояние между проводником и заземленной пластиной  $d = 1$  мм, толщина проводника  $t = 0,025$  мм (см. рис. 9.5, а), предельно допустимое значение напряженности электрического поля в воздухе  $E_{\text{пред}} = 30$  кВ/см.

**Р е ш е н и е.** Волновое сопротивление несимметричной полосковой линии передачи определяется выражением (9.39) или (9.40) в зависимости от отношения  $b/d$ . В нашем случае  $b/d > 2$ , поэтому

$$Z_{\text{в}} = 314 \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left/ \left[ 1 + \frac{b}{d} \left( \frac{1}{1-t/d} \right) \right] \right., \text{ Ом.}$$

Полосковая линия передачи заполнена воздухом, для которого  $\epsilon = 1$ ,  $\mu = 1$ . Тогда

$$Z_{\text{в}} = 314 \left/ \left[ 1 + \frac{5}{1} \left( \frac{1}{1-0,025/1} \right) \right] \right. = 51,24 \text{ Ом.}$$

Волновое сопротивление можно определить и по формуле (9.43), так как в рассматриваемом случае  $t/d = 0,025 \ll 1$ :

$$Z_{\text{в}} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{314}{1+b/d} = \frac{314}{1+5/1} = 52,333 \text{ Ом.}$$

Погрешность при этом не превышает 2,5%. Погонную емкость находим по формуле (9.33):

$$C_1 = 1,06 \cdot 10^{-11} \epsilon (1 + b/d) = 1,06 \cdot 10^{-11} (1 + 5/1) = 63,6 \text{ пФ/м,}$$

а погонную индуктивность — по формуле

$$Z_{\text{в}} = \sqrt{L_1/C_1},$$

откуда  $L_1 = Z_{\text{в}}^2 C_1$ , или после численных подстановок  $L_1 = 0,173 \times 10^{-6}$  Гн/м.

Предельная передаваемая мощность в несимметричной полосковой линии передачи вычисляется по формуле (9.52). При отношениях  $b/d=5$  и  $t/d = 0,025$  по таблицам в Приложении IV находим, что  $r_{\text{в}} = 14,56$ . Тогда  $P_{\text{пред}} = 5,53$  кВт.

**9.5.** Рассчитать коэффициент ослабления в симметричной полосковой линии передачи с твердым диэлектриком. Параметры линии: ширина проводника  $b = 1,2$  мм, расстояние между проводником и заземленной пластиной  $d = 1$  мм, толщина  $t = 0,05$  мм (см. рис. 9.5, б). Проводники выполнены из меди. Параметры диэлектрика:  $\mu = 1$ ,  $\epsilon = 2,55$ ,  $\text{tg } \delta_9 = 8 \cdot 10^{-4}$ . Рабочая частота  $6 \cdot 10^8$  Гц.

**Р е ш е н и е.** Согласно выражению (9.13) коэффициент ослабления волны

$$\alpha = \alpha_{\text{д}} + \alpha_{\text{м}}.$$

Коэффициент ослабления  $\alpha_d$  за счет потерь в диэлектрике определяется формулой (9.14). Так как

$$\sqrt{\varepsilon_a \mu_a} = \sqrt{\varepsilon \mu} \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} = \frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{3 \cdot 10^8},$$

то

$$\alpha_d = \frac{1}{2} 2\pi 6 \cdot 10^8 \sqrt{2,55 \cdot 1} \cdot \frac{1}{3 \cdot 10^8} \cdot 8 \cdot 10^{-4} = 0,0798 \text{ м}^{-1}.$$

Коэффициент ослабления  $\alpha_m$ , обусловленный потерями в проводящих пластинах, согласно (9.58) равен 0,0979 м<sup>-1</sup>.

Суммарный коэффициент ослабления

$$\alpha = \alpha_m + \alpha_d = 0,0979 + 0,0798 = 0,1777 \text{ м}^{-1}.$$

### § 9.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

9.6. Рассчитать погонные параметры и волновое сопротивление коаксиального кабеля марки РК-75-9-12. Параметры кабеля: диаметр внутреннего провода 1,35 мм, диаметр внешнего проводника 9,0 мм, относительная проницаемость диэлектрика  $\varepsilon = 2,2$ .

Ответ:  $L_1 = 0,379 \text{ мкГн/м}$ ,  $C_1 = 64,4 \text{ пФ/м}$ ,  $Z_v = 76,7 \text{ Ом}$ .

9.7. Для изготовления двухпроводной симметричной воздушной линии передачи имеется провод диаметром 3 мм.

Найти расстояние между проводами, обеспечивающее волновое сопротивление 600 Ом, а также погонные параметры линии.

Ответ: 22,4 см,  $L_1 = 2 \text{ мкГн/м}$ ,  $C_1 = 5,55 \text{ пФ/м}$ .

9.8. Рассчитать волновое сопротивление, погонные индуктивность и емкость несимметричной полосковой линии передачи, заполненной диэлектриком. Параметры линии: ширина токонесущей полоски  $b = 7 \text{ мм}$ , расстояние между токонесущей полоской и заземленной пластиной  $d = 1 \text{ мм}$ , толщина токонесущей полоски  $t = 0,05 \text{ мм}$  (см. рис. 9.5, а). Диэлектрик — фторопласт. Потерями в линии пренебречь.

Ответ: 26 Ом, 0,126 мкГн/м, 186,3 пФ/м.

9.9. Определить погонные параметры симметричной полосковой линии передачи с твердым диэлектриком, если известно, что ее волновое сопротивление 50 Ом, а фазовая скорость распространения волны  $2 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ .

Ответ:  $L_1 = 0,25 \text{ мкГн/м}$ ,  $C_1 = 100 \text{ пФ/м}$ .

9.10. Определить волновое сопротивление несимметричной полосковой линии передачи, если известно, что в качестве диэлектрика используется материал с относительной диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon = 2,55$ , а погонная емкость линии 60 пФ/м.

Ответ: 88,7 Ом.

9.11. Построить зависимость волнового сопротивления симметричной полосковой линии с воздушным заполнением от отношения ширины центрального проводника  $b$  к расстоянию между проводником и заземленной пластиной  $d$  для трех значений  $t/d$  (0,01; 0,1; 0,2), где  $t$  — толщина проводника (см. рис. 9.5, б). Отношение  $b/d$  изменять от 1 до 6.

*Ответ:* зависимость  $Z_b(b/d)$  для разных значений  $t/d$  представлена на рис. 9.9.

9.12. Определить волновое сопротивление несимметричной полосковой линии передачи с твердым диэлектриком, если известно, что длина волны в линии 10 см, а погонная емкость 100 пФ/м. Рабочая частота 2 ГГц.

*Ответ:* 50 Ом.

9.13. Волновое сопротивление коаксиальной линии передачи на волне типа Т равно 60 Ом. Диэлектрик — воздух.

Определить погонные индуктивность и емкость, а также скорость распространения волны в линии.

*Ответ:* 0,2 мкГн/м; 55,5 пФ/м,  $v_{\phi} = 3 \cdot 10^8$  м/с.

9.14. Определить предельные размеры коаксиальной линии передачи, при которых может распространяться только волна типа Т. Длина волны передаваемых колебаний 15 см, волновое сопротивление 50 Ом. Диэлектрик — воздух.

*Ответ:*  $d = 2,89$  см,  $D = 6,66$  см.

9.15. Для коаксиальной линии передачи с размерами поперечного сечения  $d = 5$  мм,  $D = 11$  мм (см. рис. 9.4) вычислить частоту, до которой волны высших типов не распространяются. Диэлектрик — воздух. Как изменится значение частоты, если коаксиальную линию заполнить диэлектриком с  $\epsilon = 2,1$ ?

*Ответ:*  $f = 11,94$  ГГц, уменьшится в 1,45 раза.

9.16. В коаксиальной линии передачи с размерами поперечного сечения  $d = 2,1$  мм,  $D = 7,3$  мм (см. рис. 9.4) распространяется волна типа Т. Частота колебаний 3 ГГц. Относительная проницаемость диэлектрика  $\epsilon = 2,2$ .

Записать выражения для мгновенных значений векторов поля  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  при условии, что амплитуда напряжения между цилиндрами равна 1 кВ. Потерями в линии пренебречь. Определить фазовую скорость и длину волны в линии. Построить картину силовых линий поля.

*Ответ:*  $\mathbf{E}(t) = 802,6 \frac{1}{r} \cos(6\pi \cdot 10^9 t - 93,15z) \mathbf{1}_r$  В/м,  $\mathbf{H}(t) = 3,16 \frac{1}{r} \cos(6\pi \cdot 10^9 t - 93,15z) \mathbf{1}_{\phi}$  А/м,  $v_{\phi} = 2,02 \cdot 10^8$  м/с,  $\lambda_b = 6,74$  см

Картина силовых линий поля представлена на рис. 9.10.

9.17. По коаксиальной линии передачи с размерами поперечного сечения  $d = 12$  мм,  $D = 28$  мм (см. рис. 9.4) на волне типа Т передается мощность 100 кВт. Диэлектрик — воздух.

Определить амплитуду тока в линии.

*Ответ:* 62,72 А.

9.18. В коаксиальной линии передачи с размерами поперечного сечения  $d = 4,5$  мм,  $D = 12$  мм (диэлектрик — воздух) существует ток с амплитудой 1 А.

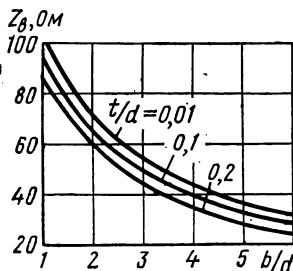


Рис. 9.9

Определить амплитудные значения напряженностей электрического и магнитного полей волны типа Т на поверхностях внутреннего и наружного цилиндров.

Ответ:  $E_r (r = d/2) = 26,67 \text{ кВ/м}$ ,  $H_\varphi (r = d/2) = 70,77 \text{ А/м}$ ,  
 $E_r (r = D/2) = 10 \text{ кВ/м}$ ,  $H_\varphi (r = D/2) = 26,54 \text{ А/м}$ .

9.19. По коаксиальной линии передачи, диаметр внутреннего цилиндра которой  $d = 2 \text{ мм}$ , на волне типа Т передается мощность  $10 \text{ Вт}$ . Волновое сопротивление линии  $60 \text{ Ом}$ . Относительная проницаемость диэлектрика  $\epsilon = 2,2$ .

Найти максимальные значения напряженностей электрического и магнитного полей в линии.

Ответ:  $E_{r \max} = 23,36 \text{ кВ/м}$ ,  $H_{\varphi \max} = 91,93 \text{ А/м}$ .

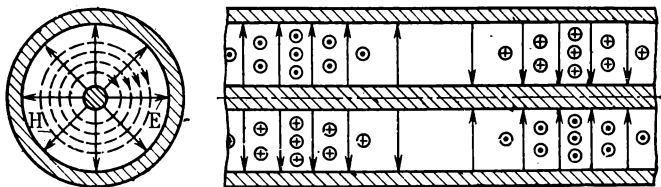


Рис. 9.10

9.20. По симметричной двухпроводной воздушной линии передачи с размерами поперечного сечения  $d = 2 \text{ мм}$ ,  $D = 40 \text{ мм}$  передается мощность  $2 \text{ кВт}$ .

Определить амплитуду напряжения между проводами и амплитуду тока в линии.

Ответ:  $1,326 \text{ кВ}$ ,  $3,016 \text{ А}$ .

9.21. Линия, питаемая генератором синусоидального напряжения с частотой  $25 \text{ МГц}$ , имеет погонные параметры  $C_1 = 16 \text{ пФ/м}$  и  $L_1 = 1 \text{ мкГн/м}$ .

Найти фазовую скорость и длину волны в линии.

Ответ:  $2,5 \cdot 10^8 \text{ м/с}$ ,  $10 \text{ м}$ .

9.22. Определить погонные параметры несимметричной полосковой линии передачи, заполненной диэлектриком, если известно, что длина волны в линии  $7 \text{ см}$ , а волновое сопротивление  $50 \text{ Ом}$ . Рабочая частота  $3 \text{ ГГц}$ .

Ответ:  $0,24 \text{ мкГн/м}$ ,  $95,2 \text{ пФ/м}$ .

9.23. Определить погонные параметры двухпроводной симметричной линии передачи, если известно, что волновое сопротивление линии  $100 \text{ Ом}$ , рабочая частота  $100 \text{ МГц}$ . Диэлектрик — воздух.

Ответ:  $0,33 \text{ мкГн/м}$ ,  $33,3 \text{ пФ/м}$ .

9.24. В коаксиальной линии передачи распространяется бегущая волна типа Т, переносящая мощность  $P$ .

Построить зависимость максимальной напряженности электрического поля в линии от диаметра внутреннего провода  $d$  при заданных значениях  $D$  и  $P$ . При каком значении  $d/D$  имеет место минимальная вели-

чина  $E_{\max}$  и какому волновому сопротивлению при воздушном заполнении линии это соответствует?

Ответ:  $E_{\max} = \frac{21,9}{D} \sqrt{PF}$ , где  $F = \frac{D/d}{\sqrt{\ln(D/d)}}$ .

Зависимость  $F(d/D)$  приведена на рис. 9.11. Минимальная величина  $E_{\max}$  имеет место при  $d/D = 0,606$ , что соответствует  $Z_{\text{в}} = 30$  Ом.

9.25.\* Вывести формулу для определения максимальной напряженности электрического поля в двухпроводной линии передачи, состоящей из цилиндрических проводов с диаметром сечения  $d$  и расстоянием между проводами  $D$ . В проводах линии существует ток  $I$ .

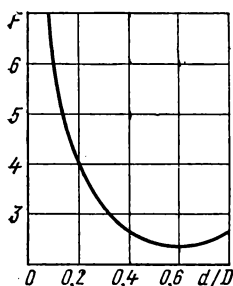


Рис. 9.11

Ответ:  $E_{\max} = \frac{Z_{\text{в}} I}{d} \frac{1}{\ln\left(\frac{2D-d}{d}\right)} \frac{1}{1-d/2D}$ ,

при  $d/D \ll 1$   $E_{\max} \approx \frac{Z_{\text{в}} I}{d} \frac{1+d/(2D)}{\ln\left(\frac{2D-d}{d}\right)}$ .

9.26. В коаксиальной линии передачи с поперечными размерами  $d = 2$  мм,  $D = 10$  мм (см. рис. 9.4) распространяется волна типа Т. Диэлектрик — воздух.

Определить амплитуды поверхностной плотности тока на цилиндрических поверхностях линии и максимальную амплитуду плотности тока смещения в диэлектрике линии, если известно, что амплитуда напряжения между цилиндрами 20 В. Рабочая частота  $3 \cdot 10^9$  Гц.

Ответ:  $\eta(r = d/2) = 33$  А/м,  $\eta(r = D/2) = 6,6$  А/м,  $J_{\text{см max}} = 2,072 \cdot 10^3$  А/м<sup>2</sup>.

9.27. Решить задачу 9.26 в случае, когда диэлектрик коаксиальной линии имеет относительную проницаемость  $\epsilon = 2.2$ . Потерями в линии пренебречь.

Ответ:  $\eta(r = d/2) = 48,94$  А/м,  $\eta(r = D/2) = 9,79$  А/м,  $J_{\text{см max}} = 4,559 \cdot 10^3$  А/м<sup>2</sup>.

9.28. Вывести формулу для определения максимального среднего значения вектора Пойнтинга в симметричной двухпроводной линии передачи (см. рис. 9.2), если известна амплитуда тока в линии  $I$ .

Ответ:  $\Pi_{\text{ср max}} = \frac{60 I^2}{\pi d^2} \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \left(1 + \frac{d}{2D}\right)^2$ .

9.29. Используя данные задачи 9.26, определить средние значения вектора Пойнтинга на поверхности проводников линии.

Ответ:  $\Pi_{\text{ср}}(r = d/2) = 2,052 \cdot 10^5$  Вт/м<sup>2</sup>,  $\Pi_{\text{ср}}(r = D/2) = 8,207 \times 10^3$  Вт/м<sup>2</sup>.

9.30. Определить мощность, передаваемую в согласованную нагрузку по двухпроводной линии передачи с размерами поперечного сечения  $d = 4$  мм,  $D = 40$  см. Диэлектрик — воздух. Амплитуда напряжения между проводами линии 10 кВ. Потерями в линии пренебречь.

Ответ: 78,72 кВт.

9.31. В коаксиальной линии передачи с размерами поперечного сечения  $d = 9$  мм,  $D = 21$  мм (см. рис. 9.4) распространяется волна типа Т.

Определить предельную передаваемую мощность, если пробой происходит при напряженности электрического поля 30 кВ/см. Диэлектрик — воздух.

Ответ:  $1,287 \cdot 10^6$  Вт.

9.32. Определить предельную мощность, которая может быть передана по двухпроводной симметричной линии с диаметром проводов  $d = 10$  мм, если пробой происходит при напряженности электрического поля 30 кВ/см. Погонная емкость линии 8 пФ/м.

Ответ:  $12,28 \cdot 10^6$  Вт.

9.33. В согласованную нагрузку, подключенную на выходе коаксиальной линии передачи длиной 10 м с размерами поперечного сечения  $d = 4,68$  мм,  $D = 11,7$  мм (см. рис. 9.4), должна поступить мощность 1 кВт. Линия выполнена из меди. Диэлектрик — воздух. Частота передаваемых колебаний 3 ГГц.

Рассчитать мощность, поступающую от источника на вход линии, а также амплитуду напряжения на входе линии.

Ответ: 1283,5 Вт, 375,75 В.

9.34. Коаксиальная линия с размерами поперечного сечения  $d = 19$  мм,  $D = 40$  мм служит для передачи мощности 10 кВт. Длина волны генератора 50 см.

Определить мощность, которая будет выделяться на участке длиной 1 м, прилегающем к генератору, если линия изготовлена из латуни. Диэлектрик — воздух.

Ответ: 72 Вт.

9.35. В коаксиальной линии передачи распространяется волна типа Т.

Для фиксированной частоты колебаний построить зависимость затухания за счет потерь в металле от отношения  $D/d$ . Внутренний диаметр наружного проводника, а также параметры материала, из которого выполнена линия, считать известными. Внутренний и внешний проводники выполнены из одинаковых материалов.

Ответ:  $\Delta = 0,023 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \frac{R_s}{D} F\left(\frac{D}{d}\right)$  дБ/м, где  $F\left(\frac{D}{d}\right) = \frac{1 + D/d}{\ln(D/d)}$ .

Зависимость  $F(D/d)$  приведена на рис. 9.12.

9.36. В качестве линии передачи используется коаксиальный кабель марки РК-75-4-11 длиной 10 м с размерами поперечного сечения  $d = 0,72$  мм,  $D = 4,8$  мм. Кабель изготовлен из меди. Диэлектрик имеет параметры  $\epsilon = 2,2$ ,  $\text{tg } \delta_s = 5 \cdot 10^{-4}$ . Частота передаваемых колебаний 3 ГГц.

Определить к. п. д. системы. Как изменится к. п. д., если частоту передаваемых колебаний увеличить в четыре раза.

Ответ: 90%, 79%.

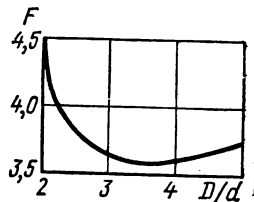


Рис. 9.12

9.37. Генератор синусоидальной э. д. с. питает согласованную двух-проводную воздушную линию передачи длиной 200 м. Диаметр проводов линии 8 мм, расстояние между проводами 32 см. Материал проводов — медь. Амплитуда напряжения генератора 3 кВ, частота 10 МГц.

Определить к. п. д. линии, мощность потерь и мощность, передаваемую в нагрузку.

*Ответ:* 97,44%, 219,8 Вт и 8,362 кВт соответственно.

9.38. Найти отношение диаметра провода  $d$  и расстояния между проводами  $D$  в симметричной двухпроводной линии передачи, при котором будет минимальное затухание. Диэлектрик — воздух.

*Ответ:*  $d/D = 0,435$ .

9.39. Рассчитать погонное затухание в несимметричной полосковой линии передачи, заполненной воздухом. Размеры поперечного сечения линии (см. рис. 9.5, а):  $b = 12$  мм,  $d = 2$  мм,  $t = 0,050$  мм. Линия выполнена из меди. Рабочая частота 500 МГц. Сравнить полученное значение затухания с затуханием в линии тех же размеров, если допустить, что напряженность электрического поля в плоскости поперечного сечения распределена равномерно, а искажения поля у краев отсутствуют. Оценить погрешность расчета.

*Ответ:* 0,06 дБ/м, 13%.

9.40. В каких пределах можно изменять отношение  $D/d$  в коаксиальной линии передачи, чтобы затухание отличалось не более чем на 10% от минимального? Диэлектрик — воздух.

*Ответ:* допустимо отступление от оптимального отношения  $D/d = 3,6$  в пределах 2,4—6,6.

9.41. Определить погонное затухание волны типа Т и предельную мощность, которая может быть передана по симметричной полосковой линии, заполненной воздухом, если пробой происходит при напряженности электрического поля 30 кВ/см. Длина волны в линии 5 см. Параметры линии: ширина проводника  $b = 2,93$  мм, расстояние между проводником и заземленной пластиной  $d = 1$  мм, толщина  $t = 0,05$  мм (см. рис. 9.5, б). Линия выполнена из меди.

*Ответ:* 1,049 дБ/м, 50,52 кВт.

9.42. Определить погонное затухание в несимметричной полосковой линии передачи, заполненной диэлектриком. Длина волны в линии 5 см. Параметры линии:  $b = 2$  мм,  $d = 2$  мм,  $t = 0,05$  мм. Относительная проницаемость диэлектрика  $\epsilon = 9$ ,  $\operatorname{tg} \delta_0 = 8 \cdot 10^{-4}$ . Токонесущая полоска и заземленная пластина выполнены из меди. Какова при этом доля потерь в металле и в диэлектрике?

*Ответ:* 0,807 дБ/м, доля потерь составляет 0,371 и 0,436 дБ/м соответственно.

9.43. Построить график зависимости суммарного и частичных коэффициентов затухания волны типа Т за счет потерь в металле и диэлектрике от частоты для коаксиальной линии передачи с размерами поперечного сечения  $d = 2,72$  мм,  $D = 16$  мм. Проводники выполнены из меди. Диэлектрик — полиэтилен. Частота поля 0,1 — 6 ГГц.

*Ответ:* график зависимости для коаксиальной линии передачи приведен на рис. 9.13.

**9.44.** Построить график зависимости затухания волны типа Т в симметричной полосковой линии передачи, заполненной воздухом, от ширины проводника  $b$  (отношение  $b/d$  задавать в пределах 2—6) для трех значений толщины  $t$  (отношение  $t/d$  принять равным 0,01; 0,03; 0,05). Расстояние между проводником и заземленной пластиной  $d = 1$  мм. Линия выполнена из меди. Длина волны в линии 5 см.

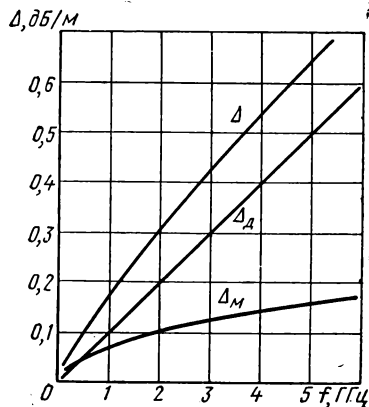


Рис. 9.13

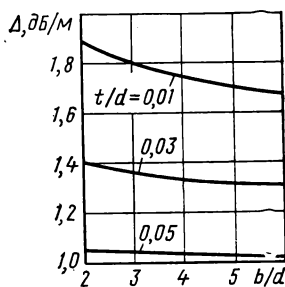


Рис. 9.14

*Ответ:* график зависимости  $\Delta(b/d)$  приведен на рис. 9.14.

**9.45.** Построить график зависимости суммарного и частичных коэффициентов затухания волны типа Т за счет потерь в металле и в диэлектрике от частоты для сим-

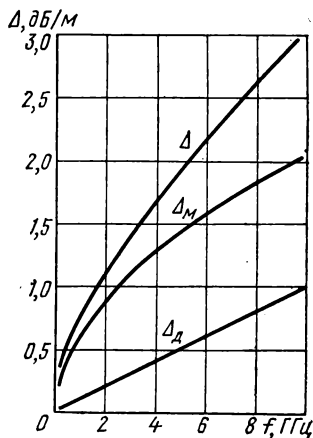


Рис. 9.15

метричной полосковой линии передачи. Параметры линии:  $b = 6$  мм,  $t = 0,05$  мм,  $d = 1$  мм,  $\epsilon = 2,4$ ,  $\text{tg } \delta_s = 7 \cdot 10^{-4}$ . Линия выполнена из меди. Частота поля 0,1—10 ГГц.

*Ответ:* график зависимости  $\Delta(f)$  для симметричной полосковой линии передачи приведен на рис. 9.15.

## Глава десятая

### ОБЪЕМНЫЕ РЕЗОНАТОРЫ

#### § 10.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Объемный резонатор представляет собой замкнутую полость, ограниченную металлическими стенками, внутри которой существуют электромагнитные колебания.



Конфигурация объемного резонатора может быть любой, однако наибольшее практическое применение находят прямоугольный (рис. 10.1), цилиндрический (рис. 10.2), коаксиальный (рис. 10.3) и квазистационарный торовидный (рис. 10.4) объемные резонаторы. Все они, кроме последнего, являются по существу закороченными на концах отрезками волноводов. В таких резонаторах могут существовать

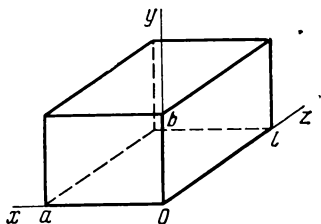


Рис. 10.1

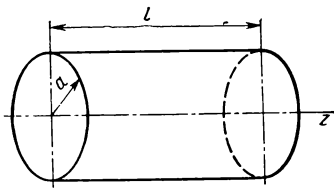


Рис. 10.2

колебания типа Е, у которых  $H_z = 0$ , и колебания типа Н, у которых  $E_z = 0$ . Анализ полей в резонаторах производят посредством решения уравнения Гельмгольца для составляющих  $E_z$  и  $H_z$  при равенстве нулю тангенциальной составляющей электрического поля на стенках резонатора [2].

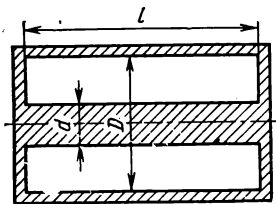


Рис. 10.3

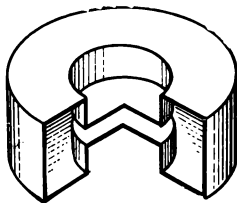


Рис. 10.4

В результате получаются выражения для резонансной частоты и для составляющих векторов поля в резонаторе.

**Прямоугольный объемный резонатор.** Резонансная частота колебаний типа Н<sub>np</sub> или Е<sub>mnp</sub>

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 + \left(\frac{p\pi}{l}\right)^2}, \quad (10.1)$$

где  $a, b, l$  — геометрические размеры резонатора (см. рис. 10.1).

Составляющие векторов поля для колебаний типа Н<sub>mnp</sub>:

$$\begin{aligned} \dot{E}_x &= j\omega_a C \frac{\pi n}{b} \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\ \dot{E}_y &= -j\omega_a C \frac{\pi m}{a} \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\ \dot{E}_z &= 0, \end{aligned} \quad (10.2)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{H}_x &= -C \frac{\pi m}{a} \frac{\pi p}{l} \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\
 \dot{H}_y &= C \frac{\pi n}{b} \frac{\pi p}{l} \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\
 \dot{H}_z &= \left[\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi p}{l}\right)^2\right] C \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right),
 \end{aligned} \quad (10.2)$$

где  $C$  — произвольный амплитудный множитель.

Составляющие векторов поля для колебаний типа  $E_{mnp}$ :

$$\begin{aligned}
 \dot{H}_x &= j\omega\epsilon_a C \frac{\pi n}{b} \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\
 \dot{H}_y &= -j\omega\epsilon_a C \frac{\pi m}{a} \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\
 \dot{H}_z &= 0,
 \end{aligned} \quad (10.3)$$

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_x &= -C \frac{\pi m}{a} \frac{\pi p}{l} \cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\
 \dot{E}_y &= -C \frac{\pi n}{b} \frac{\pi p}{l} \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\
 \dot{E}_z &= \left[\left(\frac{\pi n}{b}\right)^2 + \left(\frac{\pi p}{l}\right)^2\right] C \sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right).
 \end{aligned}$$

Индексы  $m, n, p$  означают число вариаций поля в резонаторе по осям  $x, y$ , и  $z$  соответственно.

Основным типом колебаний в прямоугольном резонаторе, имеющем минимальную резонансную частоту, в зависимости от соотношения размеров  $a, b$ , и  $l$  могут быть  $H_{101}$ ,  $H_{011}$  или  $E_{110}$ . Например, при  $b < a$  и  $b < l$  основным типом колебаний является  $H_{101}$ , картина силовых линий поля которого изображена на рис. 10.5, а составляющие векторов поля описываются выражениями

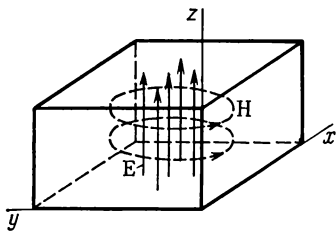


Рис. 10.5

$$\begin{aligned}
 \dot{E}_x &= 0, \\
 E_y &= -j\omega\mu_a C \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \\
 \dot{E}_z &= 0, \\
 \dot{H}_x &= -C \frac{\pi^2}{al} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{l}\right), \\
 \dot{H}_y &= 0, \\
 \dot{H}_z &= \left(\frac{\pi}{a}\right)^2 C \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right).
 \end{aligned} \quad (10.4)$$

Картина силовых линий поля колебаний  $H_{011}$  и  $E_{110}$  отличается лишь ориентацией векторов. Например, вектор  $E$  у колебания  $H_{011}$  ориентирован в направлении оси  $y$ , а у колебания  $E_{110}$  — в направлении оси  $z$ . В резонаторе кубической формы резонансные частоты этих трех типов колебаний совпадают (явление вырождения).

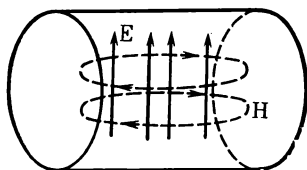


Рис. 10.6

**Цилиндрический объемный резонатор.** Резонансная частота колебаний типа  $H_{mnp}$

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{\mu_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi p}{l}\right)^2}, \quad (10.5)$$

где  $\epsilon_a$ ,  $\mu_a$  — абсолютные диэлектрические проницаемости вещества, заполняющего резонатор;  $\mu_{mn}$  —  $n$ -й корень уравнения  $J'_m(x) = 0$ .

Индекс  $p$ , определяющий число вариаций поля вдоль оси  $z$ , принимает целочисленные значения, не равные нулю.

Составляющие векторов поля колебания типа  $H$  в цилиндрическом резонаторе:

$$\begin{aligned} \dot{E}_r &= \frac{j\omega\mu_a}{r} m C J_m \left( \frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \sin(m\varphi) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\ \dot{E}_\varphi &= j\omega\mu_a \frac{\mu_{mn}}{a} C J'_m \left( \frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \cos(m\varphi) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\ \dot{E}_z &= 0, \\ \dot{H}_r &= \frac{\mu_{mn}}{a} \frac{\pi p}{l} C J'_m \left( \frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \cos(m\varphi) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\ \dot{H}_\varphi &= -\frac{1}{r} \frac{m \pi p}{l} C J_m \left( \frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \sin(m\varphi) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\ \dot{H}_z &= \left(\frac{\mu_{mn}}{a}\right)^2 C J_m \left( \frac{\mu_{mn} r}{a} \right) \cos(m\varphi) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right). \end{aligned} \quad (10.6)$$

Основным колебанием типа  $H$  в цилиндрическом резонаторе является  $H_{111}$ , картина силовых линий поля которого изображена на рис. 10.6.

Резонансная частота колебаний типа  $E_{mnp}$

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\left(\frac{\nu_{mn}}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi p}{l}\right)^2}, \quad (10.7)$$

где  $\nu_{mn}$  —  $n$ -й корень функции Бесселя  $J_m(x)$ .

Составляющие векторов поля колебаний типа Е в цилиндрическом резонаторе описываются выражениями:

$$\begin{aligned}
 \dot{H}_r &= -\frac{j\omega\epsilon_a}{r} m C J_m \left( \frac{v_{mn} r}{a} \right) \sin(m\varphi) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\
 \dot{H}_\varphi &= -j\omega\epsilon_a \frac{v_{mn}}{a} C J'_m \left( \frac{v_{mn} r}{a} \right) \cos(m\varphi) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\
 \dot{H}_z &= 0, \\
 \dot{E}_r &= -\frac{v_{mn}}{a} \frac{\rho\pi}{l} C J'_m \left( \frac{v_{mn} r}{a} \right) \cos(m\varphi) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\
 \dot{E}_\varphi &= \frac{1}{r} \frac{m\pi\rho}{l} C J_m \left( \frac{v_{mn} r}{a} \right) \sin(m\varphi) \sin\left(\frac{\pi p z}{l}\right), \\
 \dot{E}_z &= \left( \frac{v_{mn}}{a} \right)^2 C J_m \left( \frac{v_{mn} r}{a} \right) \cos(m\varphi) \cos\left(\frac{\pi p z}{l}\right).
 \end{aligned} \tag{10.8}$$

В отличие от колебаний типа Н индекс  $p$  здесь может принимать нулевое значение.

Основным колебанием типа Е в цилиндрическом резонаторе является  $E_{010}$ , картина силовых линий поля которого изображена на рис. 10.7. Особенностью этого колебания является то, что его резонансная частота

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \frac{2,4048}{a} \tag{10.9}$$

не зависит от длины резонатора.

В общем случае, когда резонатор представляет собой закороченный с обоих концов отрезок произвольного волновода, резонансную длину волны определяют из условия

$$l = p \frac{\lambda_B}{2}, \tag{10.10}$$

где  $p$  — целое число (продольный индекс);  $\lambda_B$  — длина волны в волноводе (линии передачи).

Из выражения (10.10) получается формула для резонансной частоты:

$$\omega_p = \frac{\pi \nu_{\Phi}}{l}, \tag{10.11}$$

где  $\nu_{\Phi}$  — фазовая скорость волны в линии передачи, на базе которой выполнен резонатор.

В частности, для основного колебания типа  $T_1$  объемного резонатора представляющего собой закороченный с обоих концов отрезок коаксиальной линии передачи (см. рис. 10.3),

$$\omega_p = \frac{\pi}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a} l}. \tag{10.12}$$

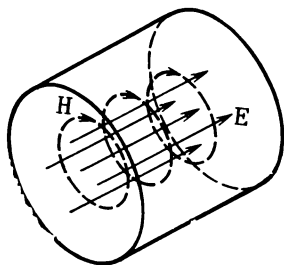


Рис. 10.7

В диапазоне дециметровых волн находят применение коаксиальные резонаторы, нагруженные на конденсатор (рис. 10.8). Резонансные частоты такого резонатора [12] определяют как решения уравнения

$$Z_{\text{в}} \operatorname{tg} \frac{\omega_p l}{c} = \frac{1}{\omega_p C_{\text{н}}}. \quad (10.13)$$

Здесь  $Z_{\text{в}}$  — волновое сопротивление коаксиальной линии передачи;  $c$  — скорость света;  $C_{\text{н}}$  — емкость конденсатора, на который нагружена линия.

Если линию передачи свернуть в кольцо, то образуется *резонатор бегущей волны*. Резонанс здесь наблюдается при условии, что длина резонатора  $l$  равна целому числу длин волн в линии, откуда

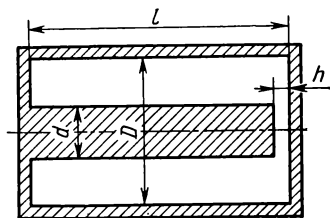


Рис. 10.8

$$\omega_p = n \frac{2\pi\nu\Phi}{l} \quad (n = 1, 2, 3, \dots). \quad (10.14)$$

В некоторых электронных приборах СВЧ используют квазистационарные торовидные резонаторы (рис. 10.4); их расчет обычно проводят приближенно. Среднюю часть резонатора, образован-

ную двумя параллельными дисками, рассматривают как конденсатор с емкостью

$$C = \epsilon_a \frac{\pi a^2}{d}. \quad (10.15)$$

Параллельно ему включена индуктивность  $L$ , образованная стенками резонатора. Для резонатора, изображенного на рис. 10.4,

$$L = \frac{\mu_a h}{2\pi} \ln \frac{b}{a}, \quad (10.16)$$

где  $h$  — высота зазора.

Таким образом, считается, что квазистационарный торовидный резонатор эквивалентен колебательному контуру с резонансной частотой

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\frac{\epsilon_0 \mu_0}{2} \frac{h a^2}{d} \ln \frac{b}{a}}}. \quad (10.17)$$

Энергия, запасенная в объемном резонаторе любого типа,

$$W = \int_V \epsilon_a \frac{E^2}{2} dV = \int_V \mu_a \frac{H^2}{2} dV, \quad (10.18)$$

где  $E$  и  $H$  — амплитудные значения напряженности электрического и магнитного полей; интегрирование ведется по объему резонатора.

В частности, для колебаний типов  $H_{101}$ ,  $H_{011}$ ,  $E_{110}$  в прямоугольном объемном резонаторе

$$W = \frac{1}{8} \epsilon_a E_{\text{max}}^2 a b l, \quad (10.19)$$

где  $E_{\max}$  — максимальная амплитуда напряженности электрического поля в резонаторе.

В цилиндрическом объемном резонаторе энергию, запасенную колебаниями различных типов, вычисляют по следующим формулам:

колебание типа  $E_{010}$

$$W = 0,423 \epsilon_a E_{\max}^2 a^2 l, \quad (10.20)$$

колебание типа  $E_{011}$

$$W = \frac{\epsilon_a l a^2}{4} \left[ \frac{\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 + \left(\frac{v_{01}}{a}\right)^2}{\left(\frac{v_{01}}{a}\right)^2} \right] E_{\max}^2, \quad (10.21)$$

колебание типа  $H_{101}$

$$W = 0,316 \epsilon_a E_{\max}^2 a^2 l, \quad (10.22)$$

колебание типа  $H_{111}$ ,

$$W = 0,749 \epsilon_a E_{\max}^2 a^2 l. \quad (10.23)$$

*Добротность объемного резонатора* определяют как отношение энергии электромагнитного поля, запасенной в резонаторе, к энергии, теряемой за период собственных колебаний:

$$Q = \frac{\omega_p \int_V \mu_a |H|^2 dV}{R_S \oint_S |H_\tau|^2 dS}. \quad (10.24)$$

Для колебаний типа  $H_{101}$  в прямоугольном резонаторе

$$Q = \frac{\omega_p \mu_a}{2R_s} \frac{abl (a^2 + l^2)}{a^3 (l + 2b) + l^3 (a + 2b)}. \quad (10.25)$$

Добротность важнейших типов колебаний в цилиндрическом резонаторе рассчитывают по формулам:

колебание типа  $E_{010}$

$$Q = \frac{\omega_p \mu_a}{2R_s} \frac{al}{a + l}, \quad (10.26)$$

колебание типа  $E_{011}$ ,

$$Q = \frac{\omega_p \mu_a}{2R_s} \frac{al}{2a + l}, \quad (10.27)$$

колебание типа  $H_{011}$

$$Q = \frac{\omega_p \mu_a}{2R_s} \frac{\omega_p^2 \epsilon_a \mu_a l a^2}{\mu_0 \left( \frac{l}{a} + \pi^2 \frac{a^2}{l^2} \right)}, \quad (10.28)$$

колебание типа  $H_{111}$

$$Q = \frac{\omega_p \mu_a}{2R_s} \frac{\lambda_p \left(1 - \frac{1}{\mu_{11}}\right)^2 \left[\mu_{11}^2 + \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2\right]^{3/2}}{2\pi \left[\mu_{11}^2 + \left(\frac{\pi a}{l}\right)^2 + \left(1 - \frac{2a}{l}\right) \left(\frac{\pi a}{l\mu_{11}}\right)^2\right]}. \quad (10.29)$$

В формулах (10.24) — (10.29) учитываются лишь потери в металлических стенках резонаторов. Если резонатор заполнен диэлектриком с потерями, то результирующая добротность

$$Q = \frac{1}{1/Q_m + \operatorname{tg} \delta_a}, \quad (10.30)$$

где  $Q_m$  — добротность резонатора, обладающего лишь потерями в металлических стенках;  $\operatorname{tg} \delta_a$  — тангенс угла потерь вещества, заполняющего резонатор.

В оптическом и инфракрасном диапазонах применяют *открытые резонаторы*, образованные двумя плоскими или сферическими зеркалами. В таких резонаторах существуют собственные электромагнитные колебания (моды)  $T_{mnp}$ , где индексы  $m, n$ , означают число вариаций поля в поперечных направлениях, а индекс  $p$  — число вариаций поля вдоль оси резонатора. Основной является мода  $T_{00p}$ .

Добротность открытых резонаторов определяется потерями в зеркалах и дифракционными потерями:

$$Q = \frac{2\pi l}{\lambda_p} \frac{1}{1 - R^2 + \alpha_{\text{диф}}}, \quad (10.31)$$

где  $R$  — коэффициент отражения от зеркала;  $\alpha_{\text{диф}}$  — относительная потеря мощности сигнала вследствие дифракции за один проход вдоль резонатора.

Дифракционные потери характеризуются волновым параметром

$$N = a^2 / (l\lambda), \quad (10.32)$$

где  $a$  — радиус зеркала;  $l$  — расстояние между зеркалами.

Благодаря меньшим дифракционным потерям наибольшее распространение получили конфокальные резонаторы, образованные зеркалами, радиус кривизны которых равен длине резонатора  $l$ .

На рис. 10.9 приведен график зависимости дифракционных потерь для основной моды в резонаторах с плоскими 1 и конфокальными 2 сферическими зеркалами. При больших  $N$  для расчета дифракционных потерь могут быть использованы приближенные выражения:

$$\alpha_{\text{диф}} \approx 0,30N^{-3} \quad (10.33)$$

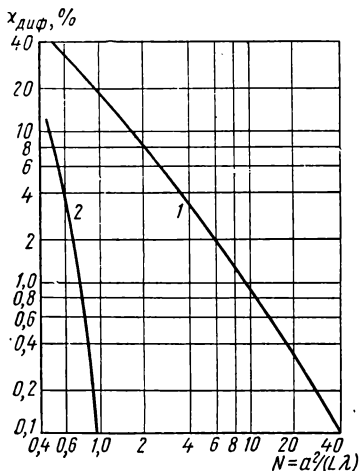


Рис. 10.9

— для резонатора с плоскими зеркалами,

$$\alpha_{\text{диф}} \approx 10,9 \cdot 10^{-4} \cdot 94N \quad (10.34)$$

— для резонатора с конфокальными зеркалами.

Резонансные частоты колебаний типа  $T_{mnp}$  в конфокальных резонаторах

$$f_{mnp} = \frac{c}{4l} (1 + 2p + 2m + n), \quad (10.35)$$

где  $c$  — скорость света.

Поперечное распределение поля основной моды  $T_{00p}$  в конфокальном резонаторе описывается гауссовой функцией:

$$E = Ae^{-r^2/\omega^2} \cos \varphi, \quad (10.36)$$

где  $\omega^2 = l\lambda/\pi$  — на поверхности зеркала;  $\omega^2 = l\lambda/2\pi$  — в середине резонатора (в фокальной плоскости).

Высшие моды конфокального резонатора имеют значительно большие дифракционные потери, чем основная мода, что приводит к самофильтрации основной моды.

## § 10.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

**10.1.** Прямоугольный объемный резонатор имеет следующие размеры:  $a = 20$  мм,  $b = 25$  мм,  $l = 30$  мм.

Определить резонансную длину волны двух низших типов колебаний. Как они обозначаются?

**Решение.** В прямоугольном резонаторе низшими могут быть колебания типов  $H_{101}$ ,  $H_{011}$  и  $E_{110}$ , у которых один из индексов равен нулю, а два других — единице. Определим резонансную длину волны этих типов колебаний.

Запишем формулу для резонансной длины волны:

$$\lambda_p = c/f_p = c \cdot 2\pi/\omega_p, \quad (10.37)$$

где  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$  — скорость света.

Подставляя в (10.37) выражение (10.1) для  $\omega_p$ , получим

$$\lambda_p = \frac{2}{\sqrt{(m/a)^2 + (n/b)^2 + (p/l)^2}}. \quad (10.38)$$

Подставляя численные данные, найдем резонансные длины волн для указанных типов колебаний:

$$H_{101} \quad \lambda_p = 3,328 \text{ см},$$

$$H_{011} \quad \lambda_p = 3,841 \text{ см},$$

$$E_{110} \quad \lambda_p = 3,123 \text{ см}.$$

Таким образом, основным является колебание  $H_{011}$ , у которого значение  $\lambda_p$  наибольшее, за ним следует колебание  $H_{101}$ .

**10.2.** Цилиндрический резонатор диаметром 6 см и длиной 5 см заполнен диэлектриком с параметрами  $\epsilon = 2,5$ ;  $\text{tg} \delta_s = 2 \cdot 10^{-4}$ . Материал стенок — медь.



Какой тип колебаний в резонаторе является основным? Найти резонансную частоту, добротность и полосу пропускания резонатора на этом типе колебаний.

**Решение.** Основным колебанием типа Е в цилиндрическом резонаторе является  $E_{010}$  с резонансной частотой

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}} \sqrt{\left(\frac{2,405}{a}\right)^2}.$$

Основным колебанием типа Н —  $H_{111}$  с резонансной частотой

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}} \sqrt{\left(\frac{1,841}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$\left(\frac{2,405}{a}\right)^2 < \left(\frac{1,841}{a}\right)^2 + \left(\frac{\pi}{l}\right)^2.$$

Поэтому основным является колебание типа  $E_{010}$ , для которого

$$\omega_p = \frac{1}{\sqrt{\mu_a \epsilon_a}} \frac{2,405}{a} = 1,52 \cdot 10^{10} \text{ рад/с},$$

$$f_p = \frac{\omega_p}{2\pi} = 2,42 \text{ ГГц}$$

Рассчитав добротность по формулам (10.26) и (10.30), получим  $Q = 3680$ . Полоса пропускания резонатора

$$2 \Delta\omega = \omega_p/Q = 4,13 \cdot 10^6 \text{ рад/с}$$

или

$$2 \Delta f = 658 \text{ кГц}.$$

**10.3.** Определить предельную энергию, которая может быть накоплена в коаксиальном резонаторе (см. рис. 10.3) с размерами  $d = 10$  мм,  $D = 40$  мм,  $l = 80$  мм на основном типе колебаний. Максимально допустимая напряженность электрического поля 30 кВ/см.

**Решение.** Электрическое поле основной волны в коаксиальном резонаторе имеет только радиальную составляющую

$$E_r = \frac{A}{r} \sin\left(\frac{\pi z}{l}\right), \quad (10.39)$$

где  $A$  — некоторый коэффициент.

Подставляя выражение (10.39) в (10.18), найдем энергию, запасенную в резонаторе:

$$W = \frac{\pi}{2} \epsilon_a A^2 l \ln \frac{D}{d}. \quad (10.40)$$

Максимальная напряженность электрического поля согласно (10.39) существует в середине резонатора на поверхности внутреннего проводника, т. е. при  $r = d/2$ . Ее значение равно

$$E_{\max} = \frac{2A}{d},$$

откуда

$$A = \frac{d}{2} E_{\max}. \quad (10.41)$$

Подставляя (10.41) в (10.40), получим формулу для расчета запасенной энергии:

$$W = \frac{\pi}{8} \epsilon_a E_{\max}^2 d^2 l \ln \frac{D}{d}, \quad (10.42)$$

или после численных подстановок

$$W = 0,3466 \cdot 10^{-3} \text{ Дж.}$$

**10.4.** Кубический резонатор со сторонами 3 см работает на колебании типа  $E_{111}$ .

Найти резонансную частоту этого колебания, изобразить картину силовых линий поля и определить добротность резонатора, считая, что его стенки выполнены из меди.

**Р е ш е н и е.** Резонансная частота колебания типа  $E_{111}$  в соответствии с формулой (10.1):

$$f_p = \omega_p / 2\pi = 8,66 \text{ ГГц.}$$

Картина силовых линий поля колебания типа  $E_{111}$  в резонаторе определяется картиной силовых линий поля волны типа  $E_{11}$  в прямоуголь-

ном волноводе (см. рис. 7.4). Сначала изобразим картину электрических силовых линий так, чтобы получилась одна вариация поля вдоль оси  $z$  и выполнялись граничные условия на торцовых стенках резонатора. После этого можно изобразить картину магнитных силовых линий так, чтобы максимум напряженности поля наблюдался в сечении резонатора, где поперечные составляющие электрического поля равны нулю, т. е. при  $z = 0$  и  $z = a$ . В результате получим картину силовых линий поля, изображенную на рис. 10.10.

Чтобы определить добротность резонатора, воспользуемся выражениями для составляющих вектора напряженности магнитного поля:

$$\begin{aligned} \dot{H}_x &= j\omega\epsilon_a C \frac{\pi}{a} \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{a}\right), \\ \dot{H}_y &= -j\omega\epsilon_a C \frac{\pi}{a} \cos\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) \cos\left(\frac{\pi z}{a}\right). \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (10.29), получим

$$Q = \frac{\omega_p \mu_a}{R_s} \frac{\int_V (H_x^2 + H_y^2) dV}{\int_S |H_t|^2 dS}. \quad (10.43)$$

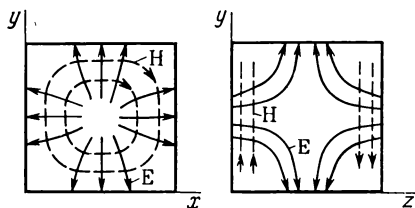


Рис. 10.10

Вычислим интеграл в числителе выражения (10.43):

$$\int_V |H_x^2 + H_y^2| dV = \int_0^a \int_0^a \int_0^a |H_x^2 + H_y^2| dx dy dz = \left( \omega \epsilon_a C \frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{a^3}{4}. \quad (10.44)$$

Интеграл в знаменателе выражения (10.43) берут по всей поверхности резонатора и разбивают на шесть частей: интегралы по четырем боковым поверхностям ( $x = 0, x = a, y = 0, y = a$ ) и интегралы по двум торцовым поверхностям ( $z = 0, z = a$ ). Вследствие симметрии поля ин-

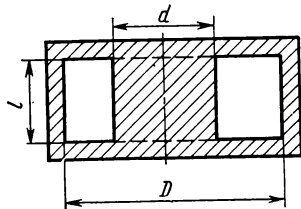


Рис. 10.11

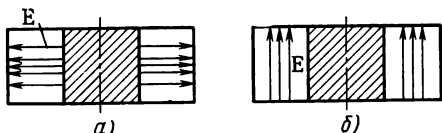


Рис. 10.12

тегралы по каждой из боковых поверхностей равны друг другу, поэтому достаточно вычислить один из них. Например, интеграл по поверхности  $y = 0$ :

$$\int_{S(y=0)} |H_\tau|^2 dS = \int_{x=0}^a \int_{z=0}^a |H_x|^2 dx dz = \left( \omega \epsilon_a C \frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{a^2}{4},$$

интеграл по торцовой стенке ( $z = 0$ ):

$$\int_{S(z=0)} |H_\tau|^2 dS = \int_{x=0}^a \int_{y=0}^a |H_x^2 + H_y^2| dx dy = \left( \omega \epsilon_a C \frac{\pi}{a} \right)^2 \frac{a^2}{2}.$$

Суммируя результаты, найдем значение интеграла в знаменателе выражения (10.43):

$$\int_S |H_\tau|^2 dS = \left( \omega \epsilon_a C \frac{\pi}{a} \right)^2 2a^2. \quad (10.45)$$

Подставляя (10.44) и (10.45) в (10.43), получим формулу для расчета добротности:

$$Q = \frac{\omega_p \mu_a a}{8R_S} = \frac{\sqrt{2\omega_p \mu_a \sigma} a}{8}. \quad (10.46)$$

согласно которой  $Q = 10\,470$ .

**10.5.** Объемный резонатор представляет собой кольцевую полость, сечение которой изображено на рис. 10.11. Размеры резонатора:  $D = 60$  мм,  $d = 30$  мм,  $l = 20$  см.

Какой тип колебаний в резонаторе является основным? Изобразить картину силовых линий поля и найти резонансную частоту.

**Решение.** В рассматриваемом резонаторе низшими типами являются колебания, имеющие наиболее простую структуру поля. Это

основной тип колебания  $T_1$  коаксиального резонатора (рис. 10.12, а) и колебание типа  $E_{010}$  с картиной поля, изображенной на рис. 10.12, б.

Определим резонансную частоту каждого из этих колебаний. Резонансную частоту колебаний типа  $T_1$  определяют по формуле (10.12):

$$f_p = \omega_p/2\pi = 7,5 \text{ ГГц.}$$

Для нахождения резонансной частоты колебания типа  $E_{010}$  запишем уравнение Гельмгольца относительно продольной составляющей электрического поля  $\dot{E}_z$ :

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial z^2} + \beta^2 \dot{E}_z = 0, \quad (10.47)$$

где  $\beta = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ .

Для колебания типа  $E_{010}$  составляющая  $\dot{E}_z$  не зависит от  $\varphi$  и  $z$ , поэтому уравнение (10.47) упрощается:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \dot{E}_z}{\partial r} + \beta^2 \dot{E}_z = 0. \quad (10.48)$$

Решение этого уравнения, записываемое в виде

$$\dot{E}_z = C_1 J_0(\beta r) + C_2 N_0(\beta r), \quad (10.49)$$

должно удовлетворять граничным условиям

$$\dot{E}_z|_{r=d/2} = 0 \text{ и } \dot{E}_z|_{r=D/2} = 0. \quad (10.50)$$

Подставим решение (10.49) в граничные условия (10.50):

$$C_1 J_0\left(\beta \frac{d}{2}\right) + C_2 N_0\left(\beta \frac{d}{2}\right) = 0,$$

$$C_1 J_0\left(\beta \frac{D}{2}\right) + C_2 N_0\left(\beta \frac{D}{2}\right) = 0.$$

Исключая  $C_1$  и  $C_2$ , получим трансцендентное уравнение для определения  $\beta$ :

$$J_0\left(\beta \frac{d}{2}\right) N_0\left(\beta \frac{D}{2}\right) - J_0\left(\beta \frac{D}{2}\right) N_0\left(\beta \frac{d}{2}\right) = 0. \quad (10.51)$$

Значения корней уравнения (10.51) можно найти по таблице в справочнике [7]. При  $D/d = 2$  первый корень уравнения (10.51)  $\beta_2^d = 3,123$ , откуда

$$\omega_p = \frac{2 \cdot 3,123}{d \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = 6,246 \cdot 10^{10} \text{ рад/с}$$

и

$$f_p = \omega_p/(2\pi) = 9,94 \text{ ГГц.}$$

Таким образом, в рассматриваемом резонаторе основным является колебание типа  $T_1$ , так как его резонансная частота минимальна.

10.6. Для измерения параметров диэлектриков предлагается использовать цилиндрический резонатор со съемной крышкой (рис. 10.13). Внутренняя часть резонатора полностью заполняется исследуемым диэлектриком.

Выбрать тип колебаний резонатора, наиболее удобный для использования в данном устройстве. Вывести формулы для расчета диэлектрической проницаемости и тангенса угла диэлектрических потерь исследуемого материала, предполагая известными резонансные частоты резонатора без диэлектрика  $\omega_{p0}$  и с диэлектриком  $\omega_p$ , а также добротности резонатора без диэлектрика  $Q_0$  и с диэлектриком  $Q$ .

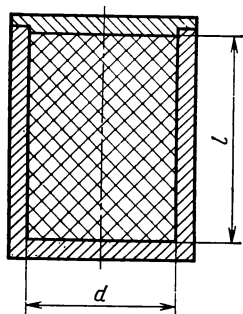


Рис. 10.13

**Решение.** В резонаторе разъемной конструкции рабочий тип колебаний должен быть выбран так, чтобы стык не пересекал линий тока. Этому условию удовлетворяют симметричные магнитные волны типа  $H_{0np}$ , не имеющие продольных составляющих тока. Из них целесообразно выбрать колебание типа  $H_{011}$ , имеющее минимальную резонансную частоту.

Запишем выражение для резонансной частоты колебания типа  $H_{011}$ :

$$\omega_p = \frac{\sqrt{(\mu_{01}/a)^2 + (\pi/l)^2}}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \sqrt{\epsilon}},$$

Из этого выражения легко получить формулу для определения относительной проницаемости диэлектрика:

$$\epsilon = \frac{(3,832/a)^2 + (\pi/l)^2}{\epsilon_0 \mu_0 \omega_p^2}, \quad (10.52)$$

Добротность резонатора, заполненного диэлектриком, определяется выражением (10.30), где  $\operatorname{tg} \delta_a$  — тангенс угла диэлектрических потерь;  $Q_m$  — добротность резонатора, обладающего лишь потерями в металлических стенках.

Как видно из выражения (10.28),  $Q_m$  зависит от частоты и относительной проницаемости диэлектрика, поэтому значение  $Q_m$  в резонаторе с диэлектриком отличается от добротности резонатора без диэлектрика  $Q_0$ . Выведем формулу, связывающую величины  $Q_m$  и  $Q_0$ . В соответствии с выражением (10.28)

$$Q_0 = \frac{\omega_{p0} \mu_0}{2 \sqrt{\frac{\omega_{p0} \mu_0}{2\sigma} \left( \mu_{01}^2 \frac{l}{a} + \pi^2 \frac{a^2}{l^2} \right)}} \frac{\omega_{p0}^2 \epsilon_0 \mu_0 l a^2}{},$$

$$Q_m = \frac{\omega_p \mu_0}{2 \sqrt{\frac{\omega_p \mu_0}{2\sigma} \left( \mu_{01}^2 \frac{l}{a} + \pi^2 \frac{a^2}{l^2} \right)}} \frac{\omega_p \epsilon \epsilon_0 \mu_0 l a^2}{},$$

где  $\omega_{p0}$  и  $\omega_p$  — значения резонансных частот резонатора без диэлектрика и с диэлектриком.

Отношение этих двух выражений

$$\frac{Q_M}{Q_0} = \left( \frac{\omega_p}{\omega_{p0}} \right)^{5/2} \varepsilon = \varepsilon^{-1/4}, \quad (10.53)$$

откуда

$$Q_M = Q_0 / \sqrt{\varepsilon}.$$

Подставляя (10.53) в (10.30), после несложных преобразований получим формулу для определения  $\operatorname{tg} \delta_a$ :

$$\operatorname{tg} \delta_a = \frac{1}{Q} - \frac{\sqrt[4]{\varepsilon}}{Q_0}.$$

**10.7. Резонатор лазера, работающего на длине волны 10,6 мкм, образован двумя конфокальными сферическими зеркалами с многослойным диэлектрическим покрытием; коэффициент отражения от поверхности зеркала равен 0,98. Диаметр зеркал 30 мм, расстояние между ними 1,2 м.**

Найти частотный интервал между соседними модами резонатора и его добротность на основной моде. Определить радиус поля основной моды по уровню 0,1 от максимального значения у поверхности зеркала и в фокальной плоскости резонатора.

**Решение.** В соответствии с формулой (10.35) соседние моды резонатора различаются по частоте на величину

$$\Delta f = c/(4l) = 62,5 \text{ МГц.}$$

Для определения добротности найдем волновой параметр

$$N = a^2/(l\lambda) = 17,7.$$

В соответствии с формулой (10.32)

$$\alpha_{\text{диф}} = 4 \cdot 10^{-87}.$$

Таким образом, дифракционные потери в резонаторе пренебрежимо малы и его добротность определяется только потерями в зеркалах:

$$Q = \frac{2\pi l}{\lambda_p} \frac{1}{1-R^2} = 1,8 \cdot 10^7.$$

Распределение поля вдоль радиуса на основании формулы (10.36) имеет вид

$$\frac{E}{E_{\max}} = e^{-r^2/\omega^2}.$$

Поле ослабляется в 10 раз на расстоянии от оси, равном

$$r_{0,1} = \omega \sqrt{\ln 10}.$$

У поверхности зеркала

$$\omega = \sqrt{l\lambda/\pi} = 2,01 \cdot 10^{-3} \text{ м и } r_{0,1} = 3,05 \text{ мм.}$$

В фокальной плоскости резонатора

$$\omega = \sqrt{\frac{l\lambda}{2\pi}} = 1,42 \cdot 10^{-3} \text{ м и } r_{0,1} = 2,16 \text{ мм.}$$

### § 10.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

10.8. Определить резонансную длину волны основного типа колебания в кубическом резонаторе со сторонами 2 см.

*Ответ:* 1,414 см.

10.9. Определить резонансные частоты колебаний типов  $E_{010}$  и  $H_{111}$  в цилиндрическом резонаторе, диаметр и длина которого одинаковы и равны 5 см.

*Ответ:* 4,593 и 4,622 ГГц соответственно.

10.10. Какой тип колебаний является основным в прямоугольном резонаторе с размерами  $a = 2$  см,  $b = 4$  см,  $l = 3$  см? Определить его резонансную частоту. Какой тип колебаний является ближайшим высшим? Найти его резонансную частоту.

*Ответ:*  $H_{011}$ , 6,25 ГГц;  $E_{110}$ , 8,38 ГГц.

10.11. Определить размеры кубического резонатора, низшая резонансная частота которого равна 5 ГГц.

*Ответ:* 4,243 см.

10.12. Перестраиваемый резонатор образован отрезком прямоугольного волновода сечением  $23 \times 10$  мм, внутри которого перемещается поршень (рис. 10.14).

Определить пределы перемещения поршня для перестройки резонатора в пределах 8—12 ГГц. Тип колебания  $H_{101}$ .

*Ответ:*  $14,89 \text{ мм} \leq l \leq 32,37 \text{ мм}$ .

10.13. При каком отношении длины цилиндрического объемного резонатора к его радиусу резонансные частоты колебаний типов  $E_{010}$  и  $H_{111}$  будут одинаковыми?

*Ответ:*  $l/a = 2,03$ .

10.14. Длина цилиндрического объемного резонатора вдвое больше его диаметра. Резонансная частота колебания типа  $E_{011}$  равна 6 ГГц.

Определить диаметр резонатора.

*Ответ:* 4,026 см.

10.15. Стороны прямоугольного объемного резонатора относятся как 3:2:1. Резонансная частота колебания типа  $E_{111}$  равна 8 ГГц.

Определить размеры резонатора.

*Ответ:*  $65,62 \times 43,75 \times 21,88$  мм.

10.16. Резонансная частота колебания типа  $E_{010}$  в цилиндрическом резонаторе равна 4 ГГц, резонансная частота колебания типа  $H_{111}$  — 5 ГГц.

Определить размеры резонатора.

*Ответ:*  $a = 2,871$  см,  $l = 3,795$  см.

10.17. Определить размеры прямоугольного объемного резонатора, три низшие резонансные частоты которого равны 10, 11 и 12 ГГц.

*Ответ:*  $24,2 \times 19,1 \times 16,5$  мм.

10.18. Стороны прямоугольного объемного резонатора относятся как 1:1,2:1,5.

Определить соотношение резонансных частот трех низших типов колебаний резонатора.

*Ответ:* 1:1,126:1,220.

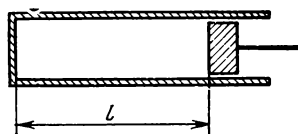


Рис. 10.14

**10.19.** Прямоугольный объемный резонатор с резонансной длиной волны 3 см на колебании типа  $H_{102}$  образован отрезком стандартного прямоугольного волновода сечением  $23 \times 10$  мм.

Определить длину резонатора.

*Ответ:* 3,957 см.

**10.20.** Определить резонансную частоту основного типа колебаний коаксиального резонатора, поперечное сечение которого приведено на рис. 10.3. Дано:  $D = 20$  мм,  $d = 12$  мм,  $l = 60$  мм.

*Ответ:* 2,5 ГГц.

**10.21.** Незаполненный резонатор имеет резонансную частоту 6 ГГц.

Какова будет резонансная частота, если резонатор заполнить диэлектриком с относительной проницаемостью  $\epsilon = 2,7$ ?

*Ответ:* 3,65 ГГц.

**10.22.** В цилиндрическом объемном резонаторе возбуждается колебание типа  $E_{011}$ . Для исследования картины силовых линий поля в стенках резонатора необходимо прорезать узкие щели.

Указать расположение щелей, которые не окажут существенного влияния на поле этого колебания.

*Ответ:* продольные щели на боковой стенке и радиальные щели на торцевых стенках.

**10.23.** Прямоугольный объемный резонатор, предназначенный для измерения параметров вещества, должен быть сделан резьбовым. Чтобы несовершенство контакта не изменяло параметров резонатора, стык не должен пересекать линий тока.

Можно ли удовлетворить этому требованию при работе на основном типе колебания? Если можно, то как должна проходить линия стыка частей резонатора?

*Ответ:* можно; решение не единственное; если, например, основным является колебание типа  $H_{101}$ , то линия стыка может проходить так, как показано на рис. 10.15.

**10.24.** Кольцевой объемный резонатор (см. рис. 10.11) имеет размеры:  $D = 40$  мм,  $d = 20$  мм,  $l = 5$  мм.

Какой тип колебаний является для него основным? Найти резонансную частоту. Изобразить картину силовых линий поля.

*Ответ:* 14,91 ГГц.

**10.25.** Определить резонансную частоту коаксиального резонатора, сечение которого изображено на рис. 10.8. Размеры резонатора:  $D = 40$  мм,  $d = 10$  мм,  $l = 100$  мм,  $h = 1,5$  мм.

*Указание:* расчет емкости  $C$  вести по приближенной формуле для плоского конденсатора.

*Ответ:* 713 МГц.

**10.26.** Для перестройки коаксиального резонатора (см. рис. 10.8) его центральный стержень можно перемещать вдоль оси.

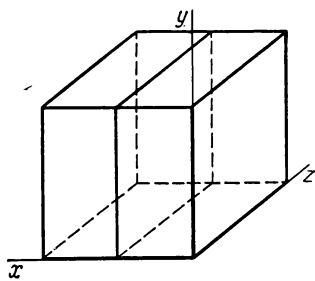


Рис. 10.15



В каких пределах следует изменять зазор  $h$  для перестройки резонатора в диапазоне 300—600 МГц? Размеры резонатора:  $D = 40$  мм,  $d = 20$  мм,  $l = 100$  мм.

Ответ: 0,158 — 1,341 мм.

10.27. Определить эквивалентные параметры и резонансную частоту квазистационарного тороидного объемного резонатора (см. рис. 10.4) с размерами:  $2b = 60$  мм,  $2a = 20$  мм,  $h = 20$  мм,  $d = 2$  мм.

Ответ:  $L = 4,4 \cdot 10^{-9}$  Гн,  $C = 1,4 \cdot 10^{-12}$  Ф,  $f_p = 2,036$  ГГц.

10.28. Прямоугольный объемный резонатор с размерами  $a = 5$  см,  $b = 3$  см,  $l = 6$  см работает на основном типе колебаний. Стенки резонатора посеребрены, резонатор заполнен диэлектриком с параметрами  $\epsilon = 2,3$ ,  $\text{tg } \delta_0 = 4 \cdot 10^{-4}$ .

Определить резонансную частоту и добротность резонатора. Какова будет добротность резонатора при отсутствии потерь в диэлектрике?

Ответ: 2,575 ГГц, 2042, 11160.

10.29. Определить добротность цилиндрического объемного резонатора радиусом 5 см, работающего на волне 10 см. Тип колебания  $H_{011}$ . Материал стенок — медь.

Ответ: 17 970.

10.30. Определить резонансную частоту и добротность цилиндрического объемного резонатора, работающего на колебании типа  $H_{011}$ . Диаметр и длина резонатора 5 см, проводимость материала стенок  $6,1 \cdot 10^7$  См/м.

Ответ: 7,93 ГГц, 37 450.

10.31. Цилиндрический объемный резонатор, длина которого равна диаметру, работает на колебании типа  $E_{010}$ . Резонансная частота 2 ГГц. Резонатор заполнен полистиролом, материал стенок — латунь.

Определить добротность резонатора. Какова будет добротность резонатора с таким же соотношением размеров и с той же резонансной частотой при воздушном заполнении?

Ответ: 1595, 12 720.

10.32. Найти резонансную частоту и добротность коаксиального резонатора (см. рис. 10.3), работающего на основном типе колебаний. Размеры резонатора:  $D = 25$  мм,  $d = 8$  мм,  $l = 120$  мм. Материал стенок — латунь.

Ответ: 1,25 ГГц, 2695.

10.33. Перестройка коаксиального резонатора (см. рис. 10.8) производится изменением зазора  $h$ . Размеры резонатора:  $l = 150$  мм,  $D = 36$  мм,  $d = 12$  мм. Резонатор выполнен из латуни. Диапазон перестройки 500—800 МГц.

Как будет изменяться добротность резонатора в процессе перестройки?

Ответ: добротность  $Q = \sqrt{\omega_p \mu_0 \sigma / 2} \ln \frac{D}{d} / (\frac{1}{D} + \frac{1}{d})$  в ростом частоты изменяется от 1660 до 2100.

10.34. В цилиндрическом объемном резонаторе длиной 10 см и диаметром 12 см при  $t = 0$  происходит ударное возбуждение колебаний типа  $H_{011}$ .

За какое время амплитуда колебаний уменьшится в 10 раз? Стенки резонатора посеребрены.

*Ответ:* 7,6 мкс.

**10.35.** Энергия, запасенная в цилиндрическом объемном резонаторе длиной 20 см и диаметром 12 см, равна 0,01 Дж. Тип колебаний  $E_{010}$ .

Определить максимальную амплитуду напряженности электрического поля и поверхностную плотность тока на боковых стенках резонатора.

*Ответ:*  $1,93 \cdot 10^6$  В/м,  $5,1 \cdot 10^3$  А/м.

**10.36.** Максимальная амплитуда напряженности электрического поля в прямоугольном объемном резонаторе с размерами  $a = 20$  см,  $b = 10$  см,  $l = 30$  см равна  $10^5$  В/м. Материал стенок — медь. Тип колебания  $H_{101}$ .

Определить запасенную энергию и мощность потерь в стенках.

*Ответ:*  $0,66 \cdot 10^{-4}$  Дж, 43,3 Вт.

**10.37.** Какая максимальная энергия может быть запасена в цилиндрическом объемном резонаторе, заполненном воздухом, на колебании типа  $H_{011}$ , если пробой наступает при напряженности электрического поля 30 кВ/см? Диаметр резонатора 6 см, длина 8 см.

*Ответ:*  $1,81 \cdot 10^{-3}$  Дж.

**10.38.** Цилиндрический объемный резонатор с медными стенками длиной 40 мм и диаметром 25 мм, работающий на колебании  $E_{011}$ , используется для измерения параметров диэлектриков.

Определить относительную диэлектрическую проницаемость и  $\operatorname{tg} \delta_0$ , если резонансная частота резонатора 12 790 МГц, а добротность 850.

*Ответ:*  $\epsilon = 2,6$ ,  $\operatorname{tg} \delta_0 = 1,1 \cdot 10^{-3}$ .

**10.39.** Объемный резонатор используется для измерения диэлектрической проницаемости газа.

Определить разрешающую способность измерения  $\epsilon$ , если измерительное устройство позволяет обнаружить смещение резонансной частоты, равное 0,1 полосы пропускания резонатора. Добротность резонатора равна 12 000.

*Ответ:*  $\Delta\epsilon/\epsilon = 1,67 \cdot 10^{-5}$ .

**10.40.** Резонатор представляет собой отрезок диэлектрической линии передачи, заключенный между двумя отражающими металлическими пластинами. Резонансная частота 35 ГГц, фазовая скорость в линии на этой частоте 0,92  $c$ , погонное затухание 0,3 дБ/м.

Определить возможные значения длины резонатора и его добротность. Потерями в металлических стенках пренебречь.

*Ответ:*  $n \cdot 3,94$  мм ( $n$  — целое число), 5760.

**10.41.** Кольцевой резонатор бегущей волны, предназначенный для работы на длине волны 8 мм, образован отрезком диэлектрической линии передачи длиной 2 м, свернутым в кольцо. Фазовая скорость волны 0,9  $c$ , погонное затухание 0,5 дБ/м.

Определить интервал между частотами соседних типов колебаний и ширину полосы пропускания каждого типа колебаний.

*Ответ:* 67,5 МГц, 10 МГц.

**10.42.** Добротность лазерного резонатора открытого типа равна  $10^5$ .

Определить значение удельной проводимости активной среды в резонаторе, необходимое для возникновения колебаний. Длина волны генерируемых колебаний  $10,6$  мкм, длина резонатора  $2$  м.

*Ответ:* —  $1,57 \cdot 10^{-2}$  См/м.

**10.43.** Определить добротность работающего на основном типе колебаний открытого резонатора с плоскими зеркалами диаметром  $10$  мм. Резонатор предназначен для работы на длине волны  $3,39$  мкм; длина резонатора  $0,5$  м. Потерями в зеркалах пренебречь.

*Ответ:*  $1,735 \cdot 10^8$ .

**10.44.** Для лазера на смеси гелия и неона, работающего на длине волны  $0,63$  мкм, можно использовать резонаторы с плоскими или конфокальными зеркалами. Диаметр зеркал  $8$  мм, длина резонатора  $400$  мм, коэффициент отражения от зеркал  $0,985$ .

Сравнить значения добротности резонатора на основной моде с плоскими и конфокальными зеркалами и сделать вывод о том, какие зеркала целесообразно применять в данном случае.

*Ответ:*  $1,31 \cdot 10^8$  для резонатора с плоскими зеркалами,  $1,34 \cdot 10^8$  для резонатора с конфокальными зеркалами.

**10.45.** Открытый резонатор с конфокальными зеркалами работает на длине волны  $2$  мм. Поверхность зеркал посеребрена. Расстояние между зеркалами  $500$  мм.

При каком диаметре зеркал добротность резонатора будет не хуже  $10^6$ ?

*Ответ:*  $2a > 56,6$  мм.

**10.46.** Чтобы оптический резонатор сохранял свои избирательные свойства, его полоса пропускания должна быть, по крайней мере, на порядок меньше расстояния между соседними резонансными частотами.

Сформулировать требования к величине коэффициента отражения от поверхности зеркала и диаметру зеркал конфокального резонатора длиной  $0,5$  м, предназначенного для работы на длине волны  $4$  мкм.

*Указание:* диаметр зеркал выбрать таким образом, чтобы дифракционные потери были пренебрежимо малы.

*Ответ:*  $R > 0,92$ ,  $2a > 3$  мм.

**20.47\*.** Найти величину проводимости активного вещества, необходимую для возникновения генерации в лазере на длине волны  $1,06$  мкм. Длина резонатора  $0,6$  м, диаметр зеркал  $20$  мм, коэффициент отражения от поверхности зеркала  $0,99$ .

*Ответ:*  $\sigma < -8,8 \cdot 10^{-5}$  См/м.

**10.48\*.** Активное вещество лазера имеет удельную проводимость —  $2 \cdot 10^{-4}$  См/м на длине волны  $0,85$  мкм и заполняет все пространство внутри конфокального открытого резонатора.

При какой длине лазера возникает генерация, если коэффициент отражения от поверхности зеркала равен  $0,975$ ? Дифракционными потерями пренебречь.

*Ответ:*  $l > 0,66$  м.

## ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ИЗЛУЧАТЕЛИ. ВОЗБУЖДЕНИЕ ЗАМКНУТЫХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

### § 11.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

С математической точки зрения задачи о возбуждении электромагнитных волн заданными источниками сводятся к решению системы неоднородных уравнений Максвелла:

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{H}} - j\omega\epsilon_a \dot{\mathbf{E}} = \mathbf{J}_{\text{ст.э}}, \quad (11.1)$$

$$\operatorname{rot} \dot{\mathbf{E}} + j\omega\mu_a \dot{\mathbf{H}} = -\mathbf{J}_{\text{ст.м}}.$$

Здесь  $\mathbf{J}_{\text{ст.э}}$  и  $\mathbf{J}_{\text{ст.м}}$  — векторы плотностей сторонних электрического и магнитного токов.

Система (11.1) должна быть дополнена соответствующими граничными условиями, что делает ее решение единственным.

### Возбуждение свободного пространства

При решении системы уравнений (11.1) оказывается полезным введение векторных потенциалов  $\dot{\mathbf{A}}_э$  и  $\dot{\mathbf{A}}_м$ , связанных с векторами полей  $\dot{\mathbf{E}}$  и  $\dot{\mathbf{H}}$  соотношениями

$$\dot{\mathbf{E}} = -j\omega\dot{\mathbf{A}}_э - j\frac{1}{\omega\epsilon_a\mu_a} \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_э - \frac{1}{\epsilon_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_м, \quad (11.2)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \frac{1}{\mu_a} \operatorname{rot} \dot{\mathbf{A}}_э - j\omega\dot{\mathbf{A}}_м - j\frac{1}{\omega\mu_a\epsilon_a} \operatorname{grad} \operatorname{div} \dot{\mathbf{A}}_м. \quad (11.3)$$

Векторные потенциалы электромагнитного поля удовлетворяют неоднородным уравнениям Гельмгольца:

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}}_э + \gamma^2 \dot{\mathbf{A}}_э = -\mu_a \mathbf{J}_{\text{ст.э}}, \quad (11.4)$$

$$\nabla^2 \dot{\mathbf{A}}_м + \gamma^2 \dot{\mathbf{A}}_м = -\epsilon_a \mathbf{J}_{\text{ст.м}}. \quad (11.5)$$

Интегральные представления решений уравнений (11.4) и (11.5) имеют вид

$$\dot{\mathbf{A}}_э = \frac{\mu_a}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_{\text{ст.э}} e^{-j\gamma R}}{R} dV, \quad (11.6)$$

$$\dot{\mathbf{A}}_м = \frac{\epsilon_a}{4\pi} \int \frac{\mathbf{J}_{\text{ст.м}} e^{-j\gamma R}}{R} dV. \quad (11.7)$$

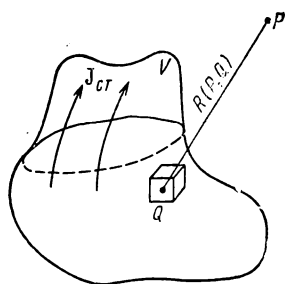


Рис. 11.1

Здесь  $R$  — текущее значение модуля радиуса-вектора, соединяющего точки наблюдения  $P$  и точки источника  $Q$  (рис. 11.1).

Рассмотрим основные характеристики элементарных излучателей.

## Элементарный электрический излучатель

Элементарным электрическим излучателем (диполем Герца) называется отрезок проводника, по которому протекает переменный электрический ток  $I_{\text{ст.э}}$ , причем длина проводника  $l_d$  значительно меньше длины волны в вакууме (рис. 11.2). Произведение  $I_{\text{ст.э}} l_d$  называют *моментом излучателя*. Поле такого излучателя, помещенного в начале координат, описывается векторным потенциалом:

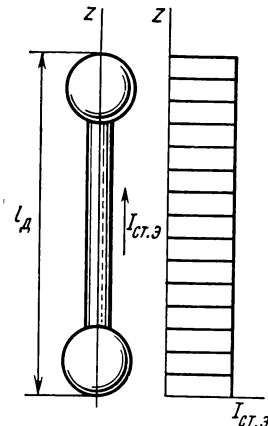


Рис. 11.2

$$\vec{A}_a = \frac{\mu_a}{4\pi} I_{\text{ст.э}} l_d \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \mathbf{1}_z, \quad (11.8)$$

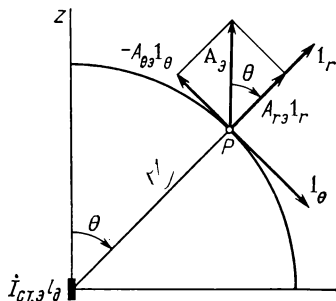


Рис. 11.3

Разложение потенциала в каждой точке пространства по ортам сферической системы координат (рис. 11.3) имеет вид

$$A_{r3} = \frac{\mu_a}{4\pi} I_{\text{ст.э}} l_d \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \cos \theta, \quad (11.9)$$

$$A_{\theta3} = -\frac{\mu_a}{4\pi} I_{\text{ст.э}} l_d \frac{e^{-i\gamma r}}{r} \sin \theta. \quad (11.10)$$

Используя формулы перехода (11.2), (11.3), по найденному векторному потенциалу определяем составляющие поля элементарного электрического излучателя:

$$\dot{H}_r = 0.$$

$$\dot{H}_\theta = 0,$$

$$\dot{H}_\varphi = \frac{I_{\text{ст.э}} l_d}{4\pi r^2} (1 + j\gamma r) \sin \theta e^{-i\gamma r},$$

$$\dot{E}_r = \frac{I_{\text{ст.э}} l_d}{j2\pi\omega\epsilon_a r^3} (1 + j\gamma r) \cos \theta e^{-i\gamma r}, \quad (11.11)$$

$$\dot{E}_\theta = \frac{I_{\text{ст.э}} l_d}{j4\pi\omega\epsilon_a r^3} (1 + j\gamma r - \gamma^2 r^2) \sin \theta e^{-i\gamma r},$$

$$\dot{E}_\varphi = 0.$$

Приближенные выражения для составляющих полей имеют вид: в ближней зоне ( $r/\lambda_0 \ll 1$ )

$$\begin{aligned}\dot{H}_\varphi &= \frac{I_{\text{ст.э}} l_{\text{д}}}{4\pi r^2} \sin \theta, \\ \dot{E}_r &= -j \frac{I_{\text{ст.э}} l_{\text{д}}}{2\pi r^3 \omega \epsilon_a} \cos \theta, \\ \dot{E}_\theta &= -j \frac{I_{\text{ст.э}} l_{\text{д}}}{4\pi r^3 \omega \epsilon_a} \sin \theta,\end{aligned}\quad (11.12)$$

в дальней зоне ( $r/\lambda_0 \gg 1$ )

$$\begin{aligned}\dot{H}_\varphi &= j \frac{I_{\text{ст.э}} l_{\text{д}}}{2r\lambda_0} \sin \theta e^{-jvr}, \\ \dot{E}_\theta &= j \frac{I_{\text{ст.э}} l_{\text{д}}}{2r\lambda_0} Z_c \sin \theta e^{-jvr}\end{aligned}\quad (11.13)$$

Поле в дальней зоне носит характер локально-плоской волны, причем

$$\dot{E}_\theta / \dot{H}_\varphi = Z_c. \quad (11.14)$$

Нормированная диаграмма направленности по полю определяется выражением

$$F(\theta, \varphi) = E(\theta, \varphi) / E_{\text{max}}, \quad (11.15)$$

где  $E(\theta, \varphi)$  — амплитуда напряженности электрического поля при данных углах наблюдения;  $E_{\text{max}}$  — максимальное значение амплитуды электрического поля.

Для элементарного электрического излучателя

$$F(\theta, \varphi) = \sin \theta. \quad (11.16)$$

Мощность излучения  $P_\Sigma$  находят интегрированием активной части (среднего значения) вектора Пойнтинга  $\Pi_{\text{ср}}$  по произвольной поверхности  $S$ , охватывающей излучатель:

$$P_\Sigma = \int_S \Pi_{\text{ср}} dS, \quad (11.17)$$

где

$$\Pi_{\text{ср}} = 1/2 \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}} \mathbf{H}^*]. \quad (11.18)$$

Для элементарного электрического излучателя

$$P_\Sigma = \frac{\pi Z_c (I_{\text{ст.э}} l_{\text{д}})^2}{3\lambda_0^2}, \quad (11.19)$$

Излученную мощность можно рассматривать как мощность

$$P_\Sigma = \frac{(I_{\text{ст.э}})^2 R_\Sigma}{2}, \quad (11.20)$$

теряемую в фиктивном активном сопротивлении, которое называют *сопротивлением излучения*:

$$R_{\Sigma} = \frac{2}{3} \pi Z_c \left( \frac{l_d}{\lambda_0} \right)^2, \quad (11.21)$$

Для вакуума или воздуха  $Z_c = Z_0 = 120 \pi$ , откуда

$$R_{\Sigma} = 80\pi^2 (l_d/\lambda_0)^2. \quad (11.22)$$

### Элементарный магнитный излучатель

Элементарный магнитный излучатель — это воображаемый «проводник» длиной  $l_d \ll \lambda_0$ , по которому протекает фиктивный магнитный ток  $I_{\text{ст.м.}}$ . К этому классу могут быть отнесены рамочный и щелевой излучатели.

Для расчета поля магнитного излучателя используют свойство *перестановочной двойственности* уравнений Максвелла. Если в формуле (11.13) для электрического излучателя произвести перестановки вида

$$\begin{aligned} \dot{E} &\rightarrow \dot{H}, \quad \dot{H} \rightarrow -\dot{E}, \quad j_{\text{ст.э}} \rightarrow -j_{\text{ст.м}}, \\ \epsilon_a &\rightarrow -\mu_a, \quad \mu_a \rightarrow -\epsilon_a, \end{aligned} \quad (11.23)$$

то получим выражения для составляющих поля элементарного магнитного излучателя в дальней зоне

$$\dot{E}_{\varphi} = -j \frac{I_{\text{ст.м.}} l_d}{2r\lambda_0} \sin \theta e^{-j\gamma r}, \quad (11.24)$$

$$\dot{H}_{\theta} = j \frac{I_{\text{ст.м.}} l_d}{2r\lambda_0 Z_c} \sin \theta e^{-j\gamma r}.$$

Рамочный излучатель представляет собой небольшую проволочную петлю площадью  $S$ , по которой протекает переменный электрический ток (рис. 11.4). Такой излучатель становится элементарным, если периметр рамки мал по сравнению с длиной волны.

Если в выражениях (11.24) сделать замену в соответствии с равенством

$$I_{\text{ст.м.}} l_d = -j\omega\mu_a I_{\text{ст.э}} S, \quad (11.25)$$

то получим выражения для составляющих поля рамочного излучателя в дальней зоне

$$\begin{aligned} \dot{E}_{\varphi} &= -\frac{I_{\text{ст.э.}} S \pi Z_c}{\lambda_0^2 r} \sin \theta e^{-j\gamma r}, \\ \dot{H}_{\theta} &= \frac{I_{\text{ст.э.}} S \pi}{\lambda_0^2 r} \sin \theta e^{-j\gamma r}. \end{aligned} \quad (11.26)$$

Щелевой излучатель образован металлической плоскостью, в которой прорезана щель длиной  $l_{\text{щ}}$  и шириной  $\Delta$  (рис. 11.5). Чтобы щель можно было считать элементарным излучателем, необходимо выполне-

ние условий  $l_{\text{щ}} \ll \lambda_0$  и  $\Delta \ll \lambda_0$ . Щель может возбуждаться источником высокочастотного напряжения, подключенным к ее краям (рис. 11.5, а). Такое возбуждение является двусторонним (щелевая антенна излучает в оба полупространства). Антенна, показанная на рис. 11.5, б, из-

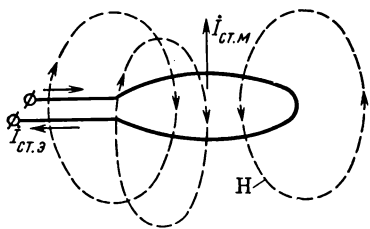


Рис. 11.4

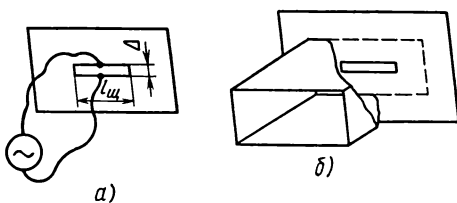


Рис. 11.5

лучает только в одно полупространство (одностороннее возбуждение). Осуществляя в выражениях (11.24) подстановки

$$I_{\text{ст.м}} = 2\dot{U}_{\text{щ}}, \quad l_{\text{д}} = l_{\text{щ}}, \quad (11.27)$$

получим выражения для составляющих поля элементарного щелевого излучателя в дальней зоне при двустороннем возбуждении

$$\dot{E}_{\varphi} = -j \frac{\dot{U}_{\text{щ}} l_{\text{щ}}}{r \lambda_0} \sin \theta e^{-i\gamma r}, \quad (11.28)$$

$$\dot{H}_{\theta} = j \frac{\dot{U}_{\text{щ}} l_{\text{щ}}}{r \lambda_0 Z_c} \sin \theta e^{-i\gamma r},$$

где  $\dot{U}_{\text{щ}}$  — напряжение в щели.

Диаграмма направленности элементарного магнитного излучателя (рамочного или щелевого) определяется выражением

$$F(\theta, \varphi) = \sin(\theta). \quad (11.29)$$

Мощность излучения  $P_{\Sigma}$  вычисляют согласно соотношению (11.17). Для щелевого излучателя

$$P_{\Sigma} = \int_S \Pi_{\text{ср}} r dS = \frac{U_{\text{щ}}^2}{2R_{\Sigma\text{щ}}}, \quad (11.30)$$

где  $R_{\Sigma\text{щ}}$  — сопротивление излучения щелевого излучателя.

### Элемент Гюйгенса

Элемент Гюйгенса представляет собой излучатель, соответствующий бесконечно малому элементу поверхности фронта плоской электромагнитной волны с линейной поляризацией.

Взяв этот элемент в виде прямоугольника, как показано на рис. 11.6, можно заметить, что элемент Гюйгенса эквивалентен взаимно перпен-



дикулярным элементам электрического и магнитного поверхностных токов, расположенным на поверхности  $\Delta S = \Delta x \Delta y$  (причем  $\Delta x \ll \ll \lambda_0$ ,  $\Delta y \ll \lambda_0$ ), плотности которых

$$\dot{\eta}_{\text{ст.э}} = [1_z \dot{\mathbf{H}}], \quad \dot{\eta}_{\text{ст.м}} = [\dot{\mathbf{E}} 1_z].$$

Поле элемента Гюйгенса в дальней зоне, выраженное в сферической системе координат, записывается в виде (элемент расположен в экваториальной плоскости)

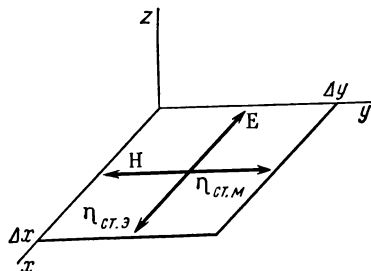


Рис. 11.6

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} = & -j \frac{\dot{\eta}_{\text{ст.э}} \Delta S z_c}{2\lambda_0 r} (1 + \cos \theta) \times \\ & \times (1_\theta \cos \varphi - 1_\varphi \sin \varphi) e^{-j\gamma r}, \end{aligned} \quad (11.31)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{H}} = & -j \frac{\dot{\eta}_{\text{ст.э}} \Delta S}{2\lambda_0 r} (1 + \cos \theta) \times \\ & \times (1_\theta \sin \varphi + 1_\varphi \cos \varphi) e^{-j\gamma r}. \end{aligned}$$

Диаграмма направленности элемента Гюйгенса в главных плоскостях ( $\varphi = 0$ ,  $\varphi = \pi/2$ ) определяется выражением

$$F(\theta, \pi/2) = F(\theta, 0) = \frac{1 + \cos \theta}{2}. \quad (11.32)$$

## Возбуждение замкнутых электродинамических систем

### Возбуждение волноводов

Пусть в бесконечном волноводе источники поля, находящиеся в объеме  $V$ , ограниченном интервалом  $z_1 \leq z \leq z_2$  (рис. 11.7), заданы функциями  $\dot{\mathbf{j}}_{\text{ст.э}}$ ,  $\dot{\mathbf{j}}_{\text{ст.м}}$ . Предполагается, что стенки волновода идеально проводящие, а диэлектрик, заполняющий волновод, не имеет потерь. Поле вне объема  $V$  представляется в виде совокупности волн электрического и магнитного типов:

$$\dot{\mathbf{E}} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{C}_{-n} \dot{\mathbf{E}}_{-n} (z < z_1), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \dot{C}_{+n} \dot{\mathbf{E}}_{+n} (z > z_2), \end{cases} \quad \dot{\mathbf{H}} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} \dot{C}_{-n} \dot{\mathbf{H}}_{-n} (z < z_1), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \dot{C}_{+n} \dot{\mathbf{H}}_{+n} (z > z_2), \end{cases} \quad (11.33)$$

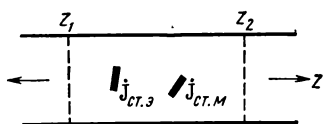


Рис. 11.7

Здесь  $n$  — номер типа волны в волноводе (если под  $n$  понимать два индекса, то суммирование рядов проводят по обоим индексам);  $\dot{C}_{\pm n}$  — коэффициенты возбуждения;  $\dot{\mathbf{E}}_{\pm n}$ ,  $\dot{\mathbf{H}}_{\pm n}$  — комплексные амплитуды векторов поля  $n$ -го типа. Знак

минус означает волну, распространяющуюся в отрицательном направлении оси  $z$ .

Ставится задача определения коэффициентов возбуждения. Вынужденное поле (11.33) удовлетворяет неоднородным уравнениям Максвелла (11.1). Для того чтобы решить задачу о вынужденных колебаниях в волноводе, необходимо располагать решением более простой задачи о свободных полях, удовлетворяющих однородным уравнениям Максвелла.

Применяя лемму Лоренца к электромагнитному полю (11.33) в объеме  $V$  и используя в качестве вспомогательного собственное поле  $\dot{\mathbf{E}}_{\pm k}$ ,  $\dot{\mathbf{H}}_{\pm k}$   $k$ -го типа волны, комплексные амплитуды которого подлежат определению, находим выражение для коэффициентов возбуждения:

$$\dot{C}_{\pm k} = \frac{1}{N_k} \int_V (\mathbf{j}_{\text{ст.э}} \dot{\mathbf{E}}_{\mp k} - \mathbf{j}_{\text{ст.м}} \dot{\mathbf{H}}_{\mp k}) dV. \quad (11.34)$$

Здесь

$$N_k = \int_S \{ [\dot{\mathbf{E}}_{+k} \dot{\mathbf{H}}_{-k}] - [\dot{\mathbf{E}}_{-k} \dot{\mathbf{H}}_{+k}] \} \mathbf{1}_z dS \quad (11.35)$$

— норма  $k$ -й собственной волны.

Возбуждаемая источником  $k$ -я волна переносит через каждое поперечное сечение активную мощность

$$P_{\Sigma} = |\dot{C}_k|^2 \frac{1}{4} |N_k|. \quad (11.36)$$

### Возбуждение объемных резонаторов

Если объемный резонатор ограничен замкнутой идеально проводящей поверхностью  $S_0$ , то решение уравнений (11.1) должно удовлетворять граничному условию

$$[\mathbf{1}_n \dot{\mathbf{E}}] = 0. \quad (11.37)$$

Будем полагать, что свободные колебания резонатора известны, т. е. найдены полная система векторных функций  $\dot{\mathbf{E}}_p$ ,  $\dot{\mathbf{H}}_p$  и собственные частоты  $\omega_p$ . Здесь индекс  $p$  означает номер типа колебаний в объемном резонаторе. Собственные колебания в объемном резонаторе удовлетворяют условию ортогональности:

$$\int_V \dot{\mathbf{E}}_p \dot{\mathbf{E}}_q dV = 0, \quad \int_V \dot{\mathbf{H}}_p \dot{\mathbf{H}}_q dV = 0 \quad (p \neq q) \quad (11.38)$$

(считается, что собственные частоты всех типов колебаний различны, или, как говорят, в резонаторе отсутствует вырождение типов колебаний).

*Норма собственного колебания*

$$N_p = \int_V \epsilon_a \dot{\mathbf{E}}_p^2 dV = - \int_V \mu_a \dot{\mathbf{H}}_p^2 dV. \quad (11.39)$$

Электромагнитное поле, возбужденное в резонаторе, отыскивают в виде рядов \*

$$\dot{\mathbf{E}} = \sum_{q=1}^{\infty} \dot{A}_q \dot{\mathbf{E}}_q, \quad (11.40)$$

$$\dot{\mathbf{H}} = \sum_{q=1}^{\infty} \dot{B}_q \dot{\mathbf{H}}_q,$$

Амплитудные коэффициенты для колебаний типа  $p$  вычисляют по формулам

$$\dot{A}_p = j \frac{1}{(\omega^2 - \omega_p^2) N_p} \int_V (\omega \mathbf{j}_{\text{ст.э}} \dot{\mathbf{E}}_p - \omega_p \mathbf{j}_{\text{ст.м}} \dot{\mathbf{H}}_p) dV, \quad (11.41)$$

$$\dot{B}_p = j \frac{1}{(\omega^2 - \omega_p^2) N_p} \int_V (\omega_p \mathbf{j}_{\text{ст.э}} \dot{\mathbf{E}}_p - \omega \mathbf{j}_{\text{ст.м}} \dot{\mathbf{H}}_p) dV. \quad (11.42)$$

Если резонатор не имеет потерь, то собственная частота  $\omega_p$  — действительная, и при частоте возбуждения  $\omega = \omega_p$  коэффициенты  $\dot{A}_p$ ,  $\dot{B}_p$  и определяемые ими поля обращаются в бесконечность. Для реального объемного резонатора, обладающего потерями, собственная частота  $\omega_p$  — комплексная. При больших значениях добротности  $Q_p$  объемного резонатора собственная частота

$$\dot{\omega}_p \approx \omega_p + j \frac{\omega_p}{2Q_p}, \quad (11.43)$$

где  $Q_p$  — добротность  $p$ -го типа колебаний.

Учитывая, что значение  $Q_p$  велико, для практических расчетов в числителе принимают  $\dot{\omega}_p = \omega_p$ . Тогда

$$\dot{A}_p = j \frac{\omega \int_V \mathbf{j}_{\text{ст.э}} \dot{\mathbf{E}}_p dV - \omega_p \int_V \mathbf{j}_{\text{ст.м}} \dot{\mathbf{H}}_p dV}{(\omega^2 - \omega_p^2 - j\omega_p^2/Q_p) N_p}, \quad (11.44)$$

$$\dot{B}_p = j \frac{\omega_p \int_V \mathbf{j}_{\text{ст.э}} \dot{\mathbf{E}}_p dV - \omega \int_V \mathbf{j}_{\text{ст.м}} \dot{\mathbf{H}}_p dV}{(\omega^2 - \omega_p^2 - j\omega_p^2/Q_p) N_p}.$$

При  $\omega = \omega_p$  коэффициенты  $\dot{A}_p$  и  $\dot{B}_p$  равны между собой.

Теория возбуждения позволяет рассчитать изменение собственной частоты объемного резонатора при деформации его оболочки. Эта деформация может осуществляться, например, погружением металли-

\* Строго говоря, в эти ряды следует добавить члены, описывающие статические поля источников. Однако практически их вклад в поле, возбужденное в резонаторе, невелик.

ческого тела с объемом  $V'$  в резонатор. Собственные частоты  $\omega'_p$  возмущенного резонатора можно рассчитать по известным частотам  $\omega_p$  и собственным векторным функциям  $\dot{\mathbf{E}}_p, \dot{\mathbf{H}}_p$  невозмущенного резонатора:

$$\omega'_p = \omega_p \sqrt{1 + \frac{\int_{V'} \frac{\mu_a |\dot{\mathbf{H}}_p|^2}{2} dV - \int_{V'} \frac{\epsilon_a |\dot{\mathbf{E}}_p|^2}{2} dV}{\int_V \frac{\epsilon_a |\dot{\mathbf{E}}_p|^2}{2} dV}}. \quad (11.45)$$

Здесь

$$\int_{V'} \frac{\mu_a |\dot{\mathbf{H}}_p|^2}{2} dV, \quad \int_V \frac{\epsilon_a |\dot{\mathbf{E}}_p|^2}{2} dV$$

— максимальная магнитная и электрическая энергии колебания в объеме  $V'$  до введения возмущающего элемента;  $\int_V \frac{\epsilon_a |\dot{\mathbf{E}}_p|^2}{2} dV$  — полная электромагнитная энергия  $p$ -й волны в резонаторе до введения возмущения.

Выражение (11.45) справедливо при малых деформациях системы.

## § 11.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

**11.1.** На расстоянии 10 км максимальная амплитуда напряженности электрического поля диполя Герца равна  $10^{-3}$  В/м.

Определить мощность, излучаемую диполем, если его длина составляет  $0,1 \lambda_0$ .

**Решение.** Из выражений (11.20) и (11.22) следует, что

$$P_\Sigma = 80\pi^2 \left( \frac{l_D}{\lambda_0} \right)^2 \frac{(I_{\text{ст.э}})^2}{2}.$$

Согласно (11.13)

$$E_\theta = \frac{I_{\text{ст.э}} l_D}{2\lambda_0 r} Z_c \sin \theta,$$

откуда

$$I_{\text{ст.э}} \frac{l_D}{\lambda_0} = 2E_\theta \frac{r}{Z_c \sin \theta}.$$

Максимальная напряженность поля получается при  $\theta = \pi/2$ . Тогда, полагая  $Z_c = Z_0 = 120 \pi$ , находим

$$P_\Sigma = \frac{160\pi^2 E_\theta^2 r^2}{Z_0^2} = \frac{160\pi^2 E_\theta^2 r^2}{(120\pi)^2} = \frac{160 (10 \cdot 10^{-4})^2 (10 \cdot 10^3)^2}{120^2} = 1,111 \text{ Вт.}$$

**11.2.** Квадратная рамка с размером сторон 10 см создает максимальную амплитуду напряженности электрического поля  $5 \cdot 10^{-4}$  В/м на расстоянии 5 км.

Определить ток в рамке, если  $\lambda_0 = 4$  м.

Р е ш е н и е. Из выражений (11.26) определяем амплитуду тока в рамке:

$$I_{\text{ст.э}} = \frac{E_{\Phi} \lambda_0^2 r}{S \pi Z_c \sin \theta},$$

Максимальная напряженность поля получается при  $\theta = \pi/2$ . Тогда, считая  $Z_c = Z_0$ , находим

$$I_{\text{ст.э}} = \frac{E_{\Phi} \lambda_0^2 r}{Z_0 S \pi} = \frac{5 \cdot 10^{-4} \cdot 42 \cdot 5 \cdot 10^3}{120 \pi \cdot 0,1^2 \pi} = 3,381 \text{ А.}$$

11.3. Вывести формулы для мощности излучения и сопротивления излучения двустороннего щелевого излучателя.

Р е ш е н и е. Среднее значение вектора Пойнтинга

$$\Pi_{\text{ср}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} [\dot{\mathbf{E}} \mathbf{H}^*].$$

Используя выражения (11.28), получим

$$\begin{aligned} \Pi_{\text{ср}} &= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[ -j \frac{\dot{U}_{\text{ш}} l_{\text{ш}}}{r \lambda_0} \sin \theta e^{-j \nu r} \mathbf{1}_{\Phi}(-j) \frac{\dot{U}_{\text{ш}} l_{\text{ш}}}{r \lambda_0 Z_c} \sin \theta e^{j \nu r} \mathbf{1}_{\theta} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} [\mathbf{1}_{\Phi} \mathbf{1}_{\theta}] \frac{U_{\text{ш}}^2 l_{\text{ш}}^2}{r^2 \lambda_0^2 Z_c} \sin^2 \theta = \frac{1}{2} \frac{U_{\text{ш}}^2 l_{\text{ш}}^2}{r^2 \lambda_0^2 Z_c} \sin^2 \theta \mathbf{1}_r. \end{aligned}$$

Мощность излучения

$$\begin{aligned} P_{\Sigma} &= \int_S \Pi_{\text{ср}} dS = \int_S \frac{1}{2} \frac{U_{\text{ш}}^2 l_{\text{ш}}^2}{r^2 \lambda_0^2 Z_c} \sin^2 \theta \mathbf{1}_r \mathbf{1}_r dS = \\ &= \int_0^{\pi} \frac{U_{\text{ш}}^2 l_{\text{ш}}^2}{2 r^2 \lambda_0^2 Z_c} \sin^2 \theta 2 \pi r^2 \sin \theta d\theta = \frac{U_{\text{ш}}^2 l_{\text{ш}}^2 \pi}{\lambda_0^2 Z_c} \int_0^{\pi} \sin^3 \theta d\theta = \\ &= \frac{U_{\text{ш}}^2}{Z_c} \frac{l_{\text{ш}}^2}{\lambda_0^2} \frac{4}{3} \pi. \end{aligned}$$

Сопротивление излучения определяем из формулы (11.30):

$$P_{\Sigma} = \frac{U_{\text{ш}}^2}{2 R_{\Sigma \text{ш}}} = \frac{4}{3} \pi \frac{U_{\text{ш}}^2}{Z_c} \left( \frac{l_{\text{ш}}}{\lambda_0} \right)^2,$$

откуда

$$R_{\Sigma \text{ш}} = \frac{3}{8} \frac{Z_c}{\pi} \left( \frac{\lambda_0}{l_{\text{ш}}} \right)^2,$$

Для вакуума или воздуха, где  $Z_c = 120 \pi$  Ом,

$$R_{\Sigma \text{ш}} = \frac{3 \cdot 120 \pi}{8 \pi} \left( \frac{\lambda_0}{l_{\text{ш}}} \right)^2 = 45 \left( \frac{\lambda_0}{l_{\text{ш}}} \right)^2, \text{ Ом.}$$

11.4. Вывести формулы для коэффициентов возбуждения и записать выражения для комплексных амплитуд вынужденного электромагнитного поля волны типа  $H_{10}$ , возбуждаемой в прямоугольном волново-

де элементарным электрическим излучателем с током  $I_0$ . Излучатель имеет длину  $l_d$  и направлен вдоль оси  $y$  (рис. 11.8). Волновод заполнен воздухом.

**Решение.** Поскольку возбуждение осуществляется лишь электрическим током, формулу (11.34) можно записать в виде

$$\dot{C}_{\pm k} = \frac{1}{N_k} \int_V \mathbf{j}_{\text{ст.э}} \cdot \mathbf{E}_{\mp k} dV,$$

или для волны типа  $H_{10}$

$$\dot{C}_{\pm H_{10}} = \frac{1}{N_{H_{10}}} \int_V \mathbf{j}_{\text{ст.э}} \cdot \mathbf{E}_{\mp H_{10}} dV.$$

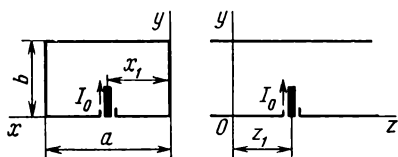


Рис. 11.8

(11.46)

Свободное поле волны типа  $H_{10}$  запишем в виде

$$\dot{\mathbf{E}}_{\pm k} = \dot{\mathbf{E}}_{\pm H_{10}} = -j\omega\mu_a \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi}{a} x e^{\mp jhz} \mathbf{1}_y, \quad (11.47)$$

$$\dot{\mathbf{H}}_{\pm k} = \dot{\mathbf{H}}_{\pm H_{10}} = \pm jh \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi}{a} x e^{\mp jhz} \mathbf{1}_x + \cos \frac{\pi}{a} x e^{\mp jhz} \mathbf{1}_z$$

(предполагается наличие единичного амплитудного множителя с размерностью А/м). Согласно выражению (11.35) норма волны типа  $H_{10}$

$$N_{H_{10}} = \int_S \{ [\dot{\mathbf{E}}_{+H_{10}} \dot{\mathbf{H}}_{-H_{10}}] - [\dot{\mathbf{E}}_{-H_{10}} \dot{\mathbf{H}}_{+H_{10}}] \} \mathbf{1}_z dS.$$

Используя выражения (11.47), получим

$$N_{H_{10}} = 2 \int_0^b \int_0^a \omega\mu_a h \left( \frac{a}{\pi} \right)^2 \sin^2 \frac{\pi}{a} x dx dy = \omega\mu_a h \left( \frac{a}{\pi} \right)^2 ab. \quad (11.48)$$

Элементарный излучатель, размещенный в точке с координатами  $x = x_1$  и  $z = z_1$ , характеризуется объемной плотностью тока:

$$\mathbf{j}_{\text{ст.э}} = \mathbf{I}_{\text{ст.э}} l_d \delta(x - x_1) \delta(y - 0) \delta(z - z_1) \mathbf{1}_y.$$

Воспользовавшись свойствами  $\delta$ -функций, получим

$$\int_V \mathbf{j}_{\text{ст.э}} \cdot \mathbf{E}_{\mp H_{10}} dV = -j l_0 l_d \omega\mu_a \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi}{a} x_1 e^{\pm jhz_1}. \quad (11.49)$$

Подставляя выражения (11.48) и (11.49) в (11.46), найдем

$$\begin{aligned} \dot{C}_{\pm H_{10}} &= -j \frac{l_0 l_d \omega\mu_a \frac{a}{\pi} \sin \frac{\pi}{a} x_1 e^{\pm jhz_1}}{\omega\mu_a h \left( \frac{a}{\pi} \right)^2 ab} = \\ &= -j \frac{l_0 l_d \pi}{h a^2 b} \sin \frac{\pi}{a} x_1 e^{\pm jhz_1}. \end{aligned} \quad (11.50)$$

Используя формулы (11.50) и (11.47), запишем выражения для комплексных амплитуд вынужденного электромагнитного поля волны типа  $H_{10}$ .

При  $z > z_1$

$$\dot{E} = \dot{C}_{+H_{10}} \dot{E}_{+H_{10}} = -\frac{I_0 l_D \omega \mu_a}{hab} \sin \frac{\pi}{a} x_1 \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jh(z-z_1)} \mathbf{1}_y,$$

$$\begin{aligned} \dot{H} = \dot{C}_{+H_{10}} \dot{H}_{+H_{10}} = & \frac{I_0 l_D}{ab} \sin \frac{\pi}{a} x_1 \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jh(z-z_1)} \mathbf{1}_x - \\ & - j \frac{I_0 l_D \pi}{ha^2 b} \sin \frac{\pi}{a} x_1 \cos \frac{\pi}{a} x e^{-jh(z-z_1)} \mathbf{1}_z. \end{aligned}$$

При  $z < z_1$

$$\dot{E} = \dot{C}_{-H_{10}} \dot{E}_{-H_{10}} = -\frac{I_0 l_D \omega \mu_a}{hab} \sin \frac{\pi}{a} x_1 \sin \frac{\pi}{a} x e^{jh(z-z_1)} \mathbf{1}_y,$$

$$\begin{aligned} \dot{H} = -\dot{C}_{-H_{10}} \dot{H}_{-H_{10}} = & -\frac{I_0 l_D}{ab} \sin \frac{\pi}{a} x_1 \sin \frac{\pi}{a} x e^{jh(z-z_1)} \mathbf{1}_x - \\ & - j \frac{I_0 l_D \pi}{ha^2 b} \sin \frac{\pi}{a} x_1 \cos \frac{\pi}{a} x e^{jh(z-z_1)} \mathbf{1}_z. \end{aligned}$$

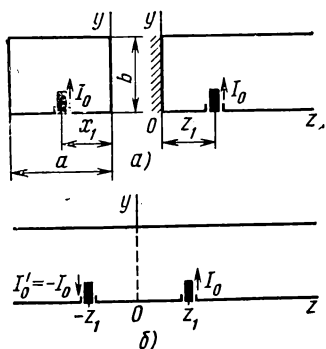


Рис. 11.9

11.5. Рассмотреть решение задачи 11.4 при условии, что волновод с одной стороны закорочен проводящей плоскостью (полубесконечный волновод) (рис. 11.9, а).

Решение. В соответствии с принципом зеркальных изображений исходная система эквивалентна изображенной на рис. 11.9, б. Электромагнитное поле в волноводе при  $z > 0$  находят как сумму полей реального и фиктивного источников. Коэффициент возбуждения волны реального источника определяется выражением (11.50):

$$\dot{C}_{+H_{10}} = -j \frac{I_0 l_D \pi}{ha^2 b} \sin \frac{\pi}{a} x_1 e^{jh z_1}.$$

Коэффициент возбуждения волны от фиктивного источника можно найти из формулы (11.50), заменив  $I_0$  на  $-I_0$ , а  $z_1$  — на  $-z_1$  (см. рис. 11.9, б):

$$\dot{C}'_{H_{10}} = j \frac{I_0 l_D \pi}{ha^2 b} \sin \frac{\pi}{a} x_1 e^{-jh z_1}.$$

Коэффициент возбуждения результирующей волны типа  $H_{10}$

$$\begin{aligned} \dot{C}_{\Sigma H_{10}} = \dot{C}_{H_{10}} + \dot{C}'_{H_{10}} = & -j \frac{I_0 l_D \pi}{ha^2 b} \sin \frac{\pi}{a} x_1 \times \\ \times (e^{jh z_1} - e^{-jh z_1}) = & 2 \frac{I_0 l_D \pi}{ha^2 b} \sin \frac{\pi}{a} x_1 \sin h z_1. \end{aligned}$$

Комплексные амплитуды составляющих вынужденного поля волны типа  $H_{10}$  при  $z > z_1$

$$\begin{aligned} \dot{E} &= -j \frac{2I_0 l_d \omega \mu_a}{hab} \sin \frac{\pi}{a} x_1 \sin h z_1 \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jhz} 1_y, \\ \dot{H} &= j \frac{2I_0 l_d}{ab} \sin \frac{\pi}{a} x_1 \sin h z_1 \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jhz} 1_x + \\ &+ \frac{2I_0 l_d \pi}{ha^2 b} \sin \frac{\pi}{a} x_1 \sin h z_1 \cos \frac{\pi}{a} x e^{-jhz} 1_z. \end{aligned} \quad (11.51)$$

11.6. Определить мощность и сопротивление излучения элементарного электрического излучателя, возбуждающего волну типа  $H_{10}$  в полубесконечном прямоугольном волноводе с воздушным заполнением. При каком значении  $x_1$  и  $z_1$  (см. рис. 11.9) мощность, отдаваемая источником в волновод, максимальна? Размеры волновода удовлетворяют условиям  $\lambda_0/2 < a < \lambda_0$ ,  $b < \lambda_0/2$ .

Р е ш е н и е. Размеры волновода выбраны так, что распространяющейся является лишь волна типа  $H_{10}$ . Мощность излучения равна среднему потоку мощности волны типа  $H_{10}$  через поперечное сечение волновода:

$$P_{\Sigma} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \int [\dot{E} \dot{H}^*] dS.$$

Комплексные амплитуды составляющих вынужденного поля волны типа  $H_{10}$  для данной системы возбуждения определены выражением (11.51). Вычисляя

$$P_{\Sigma} = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \int_0^b \int_0^a \dot{E}_y \dot{H}_x^* dx dy. \quad (11.52)$$

и подставляя сюда выражения для  $\dot{E}_y$  и  $\dot{H}_x$  из (11.51), получим

$$\begin{aligned} P_{\Sigma} &= \frac{2I_0^2 l_d^2 \omega \mu_a}{h(ab)^2} \sin^2 \frac{\pi}{a} x_1 \sin^2 h z_1 \int_0^b \int_0^a \sin^2 \frac{\pi}{a} x dx dy = \\ &= \frac{I_0^2 l_d^2}{hab} \omega \mu_a \sin^2 \frac{\pi}{a} x_1 \sin^2 h z_1. \end{aligned}$$

Так как

$$h = \omega \sqrt{\mu_a \epsilon_a} \sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2} = 2\pi/\lambda_{H_{10}},$$

то

$$P_{\Sigma} = \frac{Z_c}{\sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}} \frac{I_0^2 l_d^2}{ab} \sin^2 \frac{\pi}{a} x_1 \sin^2 h z_1.$$

Величина  $P_{\Sigma}$  максимальна при  $x_1 = a/2$  и

$$z_1 = (2k+1)\lambda_{H_{10}}/4 \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$



Сопротивление излучения находим из условия

$$P_{\Sigma} = \frac{(I_{\text{ст.э}})^2 R_{\Sigma}}{2} = \frac{I_0^2 R_{\Sigma}}{2},$$

откуда

$$R_{\Sigma} = \frac{2Z_c}{\sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2}} \frac{l_d^2}{ab} \sin^2 \frac{\pi}{a} x_1 \sin^2 h z_1.$$

Тот же результат можно получить, воспользовавшись формулой (11.36) и решением задач 11.4, 11.5

11.7. Цилиндрический резонатор, размеры которого показаны на рис. 11.10, возбуждается элементарным рамочным излучателем на резонансной частоте колебания типа  $E_{010}$ . Заданными являются комплексная амплитуда тока в рамке  $I_a$  и площадь рамки  $S_0$ .

Определить комплексные амплитуды вынужденного электромагнитного поля в резонаторе при оптимальном положении рамки, когда колебание  $E_{010}$  возбуждается с максимальной амплитудой. Добротность объемного резонатора  $Q_{E_{010}}$  считать известной.

Р е ш е н и е. Ввиду резонансных условий поле в резонаторе будет представлять собой в основном поле  $E_{010}$ . Выделяя из (11.40) соответствующий член ряда, можно записать выражения для комплексных амплитуд вынужденного поля колебаний типа  $E_{010}$ :

$$\dot{E} = \dot{A}_{E_{010}} \dot{E}_{E_{010}}, \quad \dot{H} = \dot{B}_{E_{010}} \dot{H}_{E_{010}}.$$

Согласно (11.44) коэффициенты возбуждения колебания типа  $E_{010}$  для объемного резонатора, настроенного на частоту вынужденного колебания ( $\omega = \omega_{E_{010}}$ ),

$$\dot{A}_{E_{010}} = \dot{B}_{E_{010}} = \frac{Q_{E_{010}} \int_V \mathbf{j}_{\text{ст.м}} \dot{H}_{E_{010}} dV}{\omega_{E_{010}} N_{E_{010}}}. \quad (11.53)$$

Поле колебания  $E_{010}$  описывается выражениями

$$\dot{E}_{E_{010}} = J_0 \left( \nu_{01} \frac{r}{a} \right) \mathbf{1}_z, \quad (11.54)$$

$$\dot{H}_{E_{010}} = j \frac{\omega_{E_{010}} e_a}{\nu_{01}} a J_1 \left( \nu_{01} \frac{r}{a} \right) \mathbf{1}_{\varphi},$$

а его собственная частота

$$\omega_{E_{010}} = \frac{\nu_{01}}{a \sqrt{\epsilon_a \mu_a}}. \quad (11.55)$$

Тогда интеграл в числителе формулы (11.53)

$$\begin{aligned} \int_V \mathbf{j}_{\text{ст.м}} \dot{H}_{E_{010}} dV &= \int_V J_{\text{ст.м}} \mathbf{1}_{\varphi} \dot{H}_{E_{010}} \mathbf{1}_{\varphi} dV = j I_{\text{ст.м}} l_d \frac{\omega_{E_{010}} e_a}{\nu_{01}} \times \\ &\times a J_1 \left( \nu_{01} \frac{r_1}{a} \right). \end{aligned} \quad (11.56)$$

Здесь  $l_d$  — длина эквивалентного магнитного излучателя. Видно, что рамка должна быть ориентирована в пространстве таким образом, чтобы обеспечивалось максимальное потокоцепление с магнитным полем колебания типа  $E_{010}$ .

С учетом соотношений (11.25), (11.55) и (11.56) получим

$$\int_V \mathbf{j}_{\text{ст. м}} \cdot \mathbf{H}_{E_{010}} dV = -I_{\text{ст. в}} S \frac{v_{01}}{a} J_1\left(v_{01} \frac{r_1}{a}\right) = -I_{\text{в}} S_0 \frac{v_{01}}{a} J_1\left(v_{01} \frac{r_1}{a}\right). \quad (11.57)$$

При вычислении интеграла учтено, что элементарный рамочный излучатель расположен в точке  $r = r_1$  (см. рис. 11.10). Для колебания

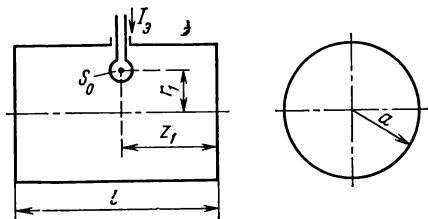


Рис. 11.10

типа  $E_{010}$  поле не зависит от  $z$ , поэтому значение  $z_1$  не вошло в решение. Норма колебания типа  $E_{010}$

$$\begin{aligned} N_{E_{010}} &= -\int_V \mu_a \mathbf{H}_{E_{010}}^2 dV = \mu_a \omega_{E_{010}}^2 \varepsilon_a^2 \frac{a^2}{v_{01}^2} \int_0^{2\pi} \int_0^l \int_0^a J_1^2\left(v_{01} \frac{r}{a}\right) r dr dz d\varphi = \\ &= 2\pi l \varepsilon_a \int_0^a J_1^2\left(v_{01} \frac{r}{a}\right) r dr = \pi l \varepsilon_a a^2 J_1^2(v_{01}). \end{aligned} \quad (11.58)$$

Подставляя выражения (11.57) и (11.58) в (11.53), получим

$$\begin{aligned} A_{E_{010}} = \dot{B}_{E_{010}} &= -\frac{Q_{E_{010}} I_{\text{в}} S_0 \frac{v_{01}}{a} J_1\left(v_{01} \frac{r_1}{a}\right) a \sqrt{\mu_a \varepsilon_a}}{v_{01} \pi \varepsilon_a l a^2 J_1^2(v_{01})} = \\ &= -\frac{Q_{E_{010}} I_{\text{в}} S_0}{\pi l a^2} \sqrt{\frac{\mu_a}{\varepsilon_a}} \frac{J_1\left(v_{01} \frac{r_1}{a}\right)}{J_1^2(v_{01})}. \end{aligned}$$

Значение коэффициентов возбуждения максимально при  $r_1 = a$ . Следовательно, рамку целесообразно размещать на боковой поверхности объемного резонатора. При этом

$$A_{E_{010}} = \dot{B}_{E_{010}} = -\frac{Q_{E_{010}} I_{\text{в}} S_0 Z_c}{\pi l a^2 J_1(v_{01})}. \quad (11.59)$$

На основании формул (11.54), (11.55), (11.59) запишем выражения для комплексных амплитуд вынужденного колебания типа  $E_{010}$ :

$$\dot{E} = A_{E_{010}} \dot{E}_{E_{010}} = - \frac{Q_{E_{010}} l_{\text{в}} S_0 Z_c}{\pi l a^2 J_1(v_{01})} J_0\left(v_{01} \frac{r}{a}\right) 1_z,$$

$$\dot{H} = B_{E_{010}} \dot{H}_{E_{010}} = - j \frac{Q_{E_{010}} l_{\text{в}} S_0}{\pi l a^2 J_1(v_{01})} J_1\left(v_{01} \frac{r}{a}\right) 1_{\varphi}.$$

11.8. Прямоугольный резонатор с размерами  $a, b, l$  возбуждается элементарным щелевым излучателем длиной  $l_{\text{щ}}$  на резонансной частоте колебаний типа  $H_{101}$ . Щель расположена на передней стенке резонатора параллельно его основанию (рис. 11.11). Координаты щели  $(x_1, y_1, 0)$ . Комплексная амплитуда напряжения между краями щели  $\dot{U}_0$ . Добротность объемного резонатора  $Q_{H_{101}}$  предполагается известной.

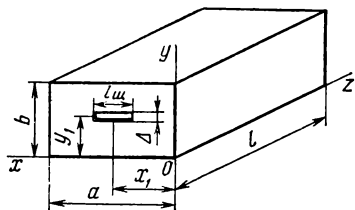


Рис. 11.11

Определить комплексные амплитуды электромагнитного поля в резонаторе.

**Решение.** Коэффициенты возбуждения согласно (11.44) определяются выражением

$$\dot{A}_{H_{101}} = \dot{B}_{H_{101}} = \frac{Q_{H_{101}} \int_V j_{\text{ст. м}} \dot{H}_{H_{101}} dV}{\omega_{H_{101}} N_{H_{101}}}, \quad (11.60)$$

где

$$\dot{H}_{H_{101}} = j \frac{a}{l} \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{l} z 1_x - j \cos \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{l} z 1_z \quad (11.61)$$

(см. гл. 10).

Собственная частота колебания типа  $H_{101}$

$$\omega_{H_{101}} = \frac{\pi}{\sqrt{\epsilon_a \mu_a}} \sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{l^2}}. \quad (11.62)$$

Так как щелевой излучатель эквивалентен магнитному диполю с поверхностной плотностью тока  $\dot{\eta}_{\text{ст. м}}$ , то в числителе выражения (11.60) интеграл по объему нужно заменить интегралом по поверхности щели  $S_{\text{щ}}$ :

$$\int_V j_{\text{ст. м}} \dot{H}_{H_{101}} dV = \int_{S_{\text{щ}}} \dot{\eta}_{\text{ст. м}} \dot{H}_{H_{101}} dS.$$

Поскольку площадь щели мала (излучатель элементарный), векторное поле  $\dot{H}_{H_{101}}$  можно считать постоянным и определенным в точке  $(x_1, y_1, 0)$ .

Учитывая, что для одностороннего щелевого излучателя  $I_{\text{ст.м}} = \dot{U}_{\text{ш}} = U_0$ , получим

$$\int_{S_{\text{ш}}} \dot{\eta}_{\text{ст.м}} \dot{\mathbf{H}}_{\text{H}_{101}} dS = \dot{\eta}_{\text{ст.м}} \Delta l_{\text{ш}} \mathbf{1}_x \dot{H}_{\text{H}_{101}} = j I_{\text{ст.м}} l_{\text{ш}} \frac{a}{l} \sin \frac{\pi}{a} x_1 = j U_0 l_{\text{ш}} \frac{a}{l} \sin \frac{\pi}{a} x_1. \quad (11.63)$$

Норма колебания типа  $\text{H}_{101}$

$$N_{\text{H}_{101}} = - \int_V \mu_a \dot{\mathbf{H}}_{\text{H}_{101}}^2 dV = \int_0^l \int_0^b \int_0^a \mu_a \left( \frac{a^2}{l^2} \sin^2 \frac{\pi}{a} x \cos^2 \frac{\pi}{l} z + \cos^2 \frac{\pi}{a} x \sin^2 \frac{\pi}{l} z \right) dx dy dz = \mu_a \left( \frac{a^2}{l^2} + 1 \right) \frac{abl}{4} = \mu_a (a^2 + l^2) \frac{ab}{4l}. \quad (11.64)$$

Подставляя выражения (11.63) и (11.64) в (11.60), получим

$$\dot{A}_{\text{H}_{101}} = \dot{B}_{\text{H}_{101}} = j \frac{4Q_{\text{H}_{101}} U_0 l_{\text{ш}} \sin \frac{\pi}{a} x_1}{\omega_{\text{H}_{101}} \mu_a (a^2 + l^2) b}.$$

Комплексные амплитуды полей вынужденного колебания типа  $\text{H}_{101}$

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{E}} &= -j \frac{4Q_{\text{H}_{101}} a U_0 l_{\text{ш}}}{\pi (a^2 + l^2) b} \sin \frac{\pi}{a} x_1 \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{l} z \mathbf{1}_y, \\ \dot{\mathbf{H}} &= - \frac{4Q_{\text{H}_{101}} U_0 l_{\text{ш}} a}{\omega_{\text{H}_{101}} \mu_a (a^2 + l^2) bl} \sin \frac{\pi}{a} x_1 \sin \frac{\pi}{a} x \cos \frac{\pi}{l} z \mathbf{1}_x + \\ &+ \frac{4Q_{\text{H}_{101}} U_0 l_{\text{ш}}}{\omega_{\text{H}_{101}} \mu_a (a^2 + l^2) b} \sin \frac{\pi}{a} x_1 \cos \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{l} z \mathbf{1}_z. \end{aligned}$$

### § 11. 3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

11.9. Найти ток в элементарном электрическом излучателе длиной 5 см, если в точке с координатами  $r = 1$  км,  $\theta = \pi/2$  напряженность электрического поля  $E_\theta = 10^{-4}$  В/м. Частота колебаний  $10^8$  Гц.

Ответ: 31,85 мА.

11.10. Найти составляющие поля элементарного электрического излучателя длиной 5 см в экваториальной плоскости на расстоянии  $10^4$  м при частоте колебаний 300 МГц. Амплитуда тока в излучателе 10 А.

Ответ:  $E_{\theta m} = 9,425 \cdot 10^{-3}$  В/м,  $H_{\phi m} = 0,25 \cdot 10^{-3}$  А/м.

11.11. Найти сопротивление излучения элементарного электрического излучателя при  $l_d = 5$  см и  $\lambda_0 = 3$  м. Определить мощность излучения, если амплитуда тока в излучателе равна 1 А.

Ответ: 0,22 Ом, 0,11 Вт.

11.12. Определить мощность, излучаемую элементарным электрическим излучателем в сферический сектор, ограниченный углами  $\theta_1 = 90^\circ$  и  $\theta_2 = 89^\circ$ . Длина излучателя 5 см, амплитуда тока 10 А, длина волны 3 м.

Ответ:  $14,34 \cdot 10^{-2}$  Вт.

11.13. Вывести формулы для сопротивления излучения и мощности излучения элементарного рамочного излучателя площадью  $S$ , расположенного в свободном пространстве.

Ответ:

$$R_{\Sigma} = 320\pi^4 \frac{S^2}{\lambda_0^4}, \text{ Ом}, \quad P_{\Sigma} = (I_{\text{ст.а}})^2 160\pi^4 \frac{S^2}{\lambda_0^4}, \text{ Вт}.$$

11.14. Определить мощность излучения элементарной рамки с электрическим током, если на расстоянии 50 м в экваториальной плоскости создается электрическое поле с амплитудой 100 мВ/м.

Ответ: 0,2778 Вт.

11.15. Определить ток и сопротивление излучения антенны радиовещательной станции высотой 100 м, работающей на длине волны 1700 м и излучающей мощность 1000 кВт.

Ответ: 856 А, 2,729 Ом.

11.16. Найти амплитуды векторов напряженностей электрического и магнитного полей, создаваемых малой квадратной рамкой в точке с координатами  $r = 1000$  м и  $\theta = \pi/2$ . Амплитуда тока в рамке равна 1 А. Рамка, расположенная в экваториальной плоскости, имеет стороны  $0,1 \lambda_0$ .

Ответ:  $11,832 \cdot 10^{-3}$  В/м;  $0,0314 \cdot 10^{-3}$  А/м.

11.17. Предположив, что на искусственном спутнике Земли антенна выполнена в виде элементарного электрического излучателя, определить ориентацию излучателя, при которой напряженность электрического поля в точках на поверхности Земли под спутником и на расстоянии 1000 км одинакова. Высота полета спутника 100 км. Кривизну поверхности Земли пренебречь.

Ответ: 84,29 угл. град относительно поверхности Земли.

11.18. Определить отношение между током в элементарном электрическом излучателе и напряжением в щелевом излучателе при условии излучения одинаковой мощности. Конфигурации обоих излучателей одинаковы.

Ответ:  $I_0/U_{\text{щ}} = 5,3 \cdot 10^{-3}$  См.

11.19. Определить напряжение в щели элементарного щелевого излучателя длиной 5 см, если в точке с координатами  $r = 1$  км,  $\theta = \pi/2$  напряженность электрического поля  $E_{\varphi} = 10^{-4}$  В/м. Частота колебаний  $10^8$  Гц.

Ответ: 6 В.

11.20. В электрической цепи существует ток с частотой 50 Гц и амплитудой 5 А. Площадь, ограниченная контуром цепи, составляет  $2 \text{ м}^2$ .

Какова мощность, теряемая цепью за счет излучения?

Ответ:  $1,20 \cdot 10^{-21}$  Вт.

11.21. Вывести формулу для мощности излучения элемента Гюйгенса. Вычислить диаграмму направленности в плоскости, параллельной вектору  $\mathbf{E}$ .

Ответ:

$$P_{\Sigma} = \frac{2}{3} \pi \left( \frac{\Delta S}{\lambda_0} \right)^2 (\eta_{\text{ст.э}})^2 Z_{\text{с}}, \quad F(\theta, \varphi) = \frac{1 + \cos \theta}{2}.$$

11.22. На рис. 11.12 изображен прямоугольный волновод, в котором прорезаны узкие щели.

С помощью каких щелей при облучении их внешним полем можно возбудить волну типа  $H_{10}$  (то же, для волны  $E_{11}$ )?

Ответ: волну типа  $H_{10}$  можно возбудить с помощью щелей 1, 2, 4, а волну типа  $E_{11}$  — с помощью щелей 2, 3.

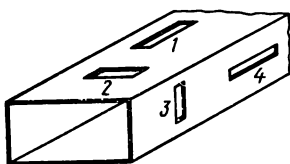


Рис. 11.12

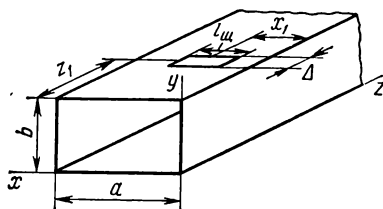


Рис. 11.13

11.23. В широкой стенке полубесконечного прямоугольного волновода прорезана поперечная щель (рис. 11.13), облучаемая внешним полем с длиной волны  $\lambda_0$ . Длина щели  $l_{\text{щ}} \ll \lambda_0$ , амплитуда напряжения вдоль щели постоянна и равна  $U_0$ . Координаты центра щели ( $x_1, b, z_1$ ).

Определить комплексную амплитуду напряженности электрического поля внутри волновода вдали от щели при условии, что  $\lambda_0/2 < a < \lambda_0$ ,  $b < \lambda_0/2$ . Волновод заполнен воздухом.

Ответ:

$$\vec{E} = \frac{2U_0 l_{\text{щ}}}{ab} \sin \frac{\pi}{a} x_1 \cos h z_1 \sin \frac{\pi}{a} x e^{-h z} \mathbf{1}_y,$$

где

$$h = \frac{2\pi}{\lambda_{H_{10}}}, \quad \lambda_{H_{10}} = \frac{\lambda_0}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2}}.$$

11.24. Используя данные задачи 11.23, определить мощность, излучаемую элементарной щелевой антенной в полубесконечный волновод, а также сопротивление излучения щели. При каких значениях  $x_1$  и  $z_1$  мощность, отдаваемая источником в волновод, максимальна?

Ответ:

$$P_{\Sigma} = \frac{U_0^2 l_{\text{щ}}^2}{abZ_c} \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0}{2a}\right)^2} \sin^2 \frac{\pi}{a} x_1 \cos^2 h z_1,$$

$$R_{\Sigma} = \frac{1}{2} \frac{abZ_c}{l_{\text{щ}}^2 \sqrt{1 - (\lambda_0/2a)^2} \sin^2 \frac{\pi}{a} x_1 \cos^2 h z_1}.$$

Мощность максимальна при  $x_1 = a/2$ ,  $z_1 = \lambda_{H_0}/2$ .

11.25. Как изменится решение задачи 11.23, если щель расположить на узкой стенке волновода параллельно оси  $z$ ? Напряжение в щели и ее размеры в обоих случаях одинаковы. Оценку провести при оптимальном расположении щелей, т. е. когда мощность, излучаемая источником в волновод, максимальна.

Ответ: амплитуда поля изменится в  $\frac{1}{\sqrt{4a^2/\lambda_0^2 - 1}}$  раз.

11.26. Прямоугольный волновод сечением  $72 \times 34$  мм, работающий на частоте 3 ГГц, возбуждается элементарным электрическим излучателем. Длина излучателя 5 мм, амплитуда тока 100 мА.

Оценить максимальное значение напряженности электрического поля при оптимальном расположении излучателя.

Ответ: 0,5238 В/м.

11.27. Волна типа  $H_{10}$  возбуждается в прямоугольном полубесконечном волноводе электрической рамкой с током  $I_0$ , размеры которой малы по сравнению с длиной волны  $\lambda_0$ . Площадь рамки  $S_0$ .

Определить комплексную амплитуду напряженности электрического поля вдали от рамки при ее оптимальном расположении, когда поле волны типа  $H_{10}$  возбуждается с максимальной амплитудой. Волны высших типов в волноводе не распространяются.

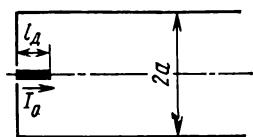


Рис. 11.14

Ответ:

$$\dot{E} = -j \frac{4\pi I_0 S_0 Z_c}{ab \sqrt{4a^2 - \lambda_0^2}} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-ihz} \mathbf{1}_y.$$

11.28. В полубесконечный круглый металлический волновод радиусом  $a$  (рис. 11.14) введен тонкий штырь длиной  $l_{\text{ш}} \ll \lambda_0$ , по которому протекает переменный электрический ток с амплитудой  $I_0$ .

Определить комплексную амплитуду напряженности магнитного поля в волноводе вдали от штыря при его оптимальном расположении и условии  $\lambda_{\text{кр } E_{11}} < \lambda_0 < \lambda_{\text{кр } E_{01}}$ .

Ответ:

$$\dot{H} = -j \frac{I_0 l_{\text{ш}} \frac{\lambda_0 v_{01}}{2\pi a}}{\pi a^2 J_1^2(v_{01}) \sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0 v_{01}}{2\pi a}\right)^2}} J_1\left(\frac{v_{01}}{a} r\right) e^{-ihz} \mathbf{1}_{\varphi}.$$

**11.29.** Используя данные задачи 11.28, определить мощность, излучаемую штырем в волновод, а также сопротивление излучения.

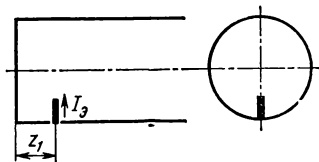
*Ответ:*

$$P_{\Sigma} = \frac{I_0^2}{2} Z_c \frac{I_d^2}{\pi a^2 J_1^2(v_{01})} \frac{\left(\frac{\lambda_0 v_{01}}{2\pi a}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0 v_{01}}{2\pi a}\right)^2}},$$

$$R_{\Sigma} = \frac{I_d^2}{\pi a^2 J_1^2(v_{01})} Z_c \frac{\left(\frac{\lambda_0 v_{01}}{2\pi a}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{\lambda_0 v_{01}}{2\pi a}\right)^2}}.$$

**11.30.** В полубесконечный круглый металлический волновод диаметром 6 см введен тонкий штырь длиной 3 мм, как показано на рис. 11.15. Вдоль штыря протекает переменный электрический ток, амплитуда которого постоянна по длине и равна 1 А. Частота колебаний 3,75 ГГц.

Рассчитать передаваемую по волноводу мощность при условии оптимального расположения возбуждающего штыря. Каково при этом должно быть расстояние между штырем и закорачивающей стенкой?



*Ответ:* 0,8483 Вт, 3,18 см.

Рис. 11.15

**11.31.** Волна типа  $E_{11}$  в полубесконечном волноводе квадратного сечения со стороной  $a$  возбуждается рамкой с током  $I_0$ , размеры которой малы по сравнению с длиной волны  $\lambda_0$ . Площадь рамки  $S_0$ . Рамка ориентирована так, чтобы не возбуждалась волна типа  $H_{10}$ .

Определить напряженность электрического поля в центре волновода вдали от рамки при условии, что волны высших типов в волноводе не распространяются. Расстояние между рамкой и закорачивающим поршнем выбрать таким, чтобы возбуждаемое поле было максимально.

*Ответ:*

$$\dot{E}_z = \frac{4\pi I_0 S_0 Z_c}{a^3 \sqrt{1 - \lambda_0^2/(2a^2)}} e^{-jhz}.$$

**11.32.** Волна типа  $H_{20}$  возбуждается в полубесконечном волноводе прямоугольного сечения с размерами  $a \times b$  системой двух элементарных электрических излучателей. Величины токов  $I_0$  и длин  $l_d$  обоих излучателей одинаковы. Частота колебаний  $\omega$ .

Определить координаты расположения излучателей и разность фаз между их токами, обеспечивающие возбуждение волны типа  $H_{20}$  с наибольшей амплитудой при условии подавления волны типа  $H_{10}$ . Записать выражение для комплексной амплитуды напряженности электрического поля волны типа  $H_{20}$  вдали от излучателей.



*Ответ:* координаты расположения первого излучателя:  $x_1 = a/4$ ,  $z_1 = \lambda_{H_{z_0}}/4$ ; координаты расположения второго излучателя:  $x_2 = (3/4)a$ ,  $z_2 = z_1 = \lambda_{H_{z_0}}/4$ ; разность фаз  $\varphi = 180^\circ$ ;

$$\vec{E} = -j \frac{4I_0 l_d Z_c}{ab \sqrt{1 - (\lambda_0/a)^2}} \sin \frac{\pi}{a} x e^{-jhz} \mathbf{1}_y,$$

где  $\lambda_{H_{z_0}} = \frac{\lambda_c}{\sqrt{1 - (\lambda_0/a)^2}}$ ,  $\lambda_0 = \frac{2\pi c}{\omega}$ ,

**11.33.** Прямоугольный резонатор с размерами  $a$ ,  $b$ ,  $l$  возбуждается тонким штырем на резонансной частоте колебания типа  $E_{110}$  (рис. 11.16). Добротность резонатора  $Q_{E_{110}}$  известна. Длина штыря  $l_d$ , координаты его основания  $(a/2, b/2, 0)$ . Распределение электрического тока по штырю считать постоянным ( $l_d \ll \lambda_0$ ), амплитуда тока  $I_0$ .

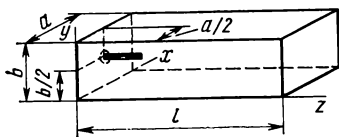


Рис. 11.16

Определить комплексную амплитуду напряженности электрического поля в резонаторе.

*Ответ:*

$$\vec{E} = -\frac{4I_0 l_d Q_{E_{110}}}{\omega_{E_{110}} \epsilon_a ab l} \sin \frac{\pi}{a} x \sin \frac{\pi}{b} y \mathbf{1}_z.$$

**11.34.** Прямоугольный объемный резонатор, выполненный в виде куба с ребром  $a$ , возбуждается на резонансной частоте колебания типа  $E_{110}$  так, как указано в задаче 11.33.

Какие типы колебаний будут возбуждаться в резонаторе, если штырь направить: 1) параллельно оси  $x$ ; координаты основания штыря  $(0, a/2, a/2)$ ; 2) параллельно оси  $y$ ; координаты основания штыря  $(a/2, 0, a/2)$ ?

*Ответ:* 1)  $H_{011}$ ; 2)  $H_{101}$ .

**11.35.** Указать оптимальное расположение штыря для возбуждения колебания типа  $H_{102}$  в прямоугольном объемном резонаторе длиной  $l$ .

*Ответ:* в середине верхней или нижней стенки на расстоянии  $l/4$  от торца резонатора.

**11.36.** Указать оптимальное расположение штыря для возбуждения колебания типа  $E_{012}$  в цилиндрическом объемном резонаторе.

*Ответ:* в центре торцевой стенки.

**11.37.** Какой щелью на боковой стенке (поперечной или продольной) можно возбудить колебание типа  $E_{011}$  в цилиндрическом объемном резонаторе? Указать оптимальное расположение щели.

*Ответ:* поперечной щелью, расположенной в непосредственной близости от торцевой стенки.

**11.38.** Цилиндрический резонатор радиусом  $a$  и длиной  $l$  возбуждается тонким штырем с током на резонансной частоте колебания типа  $E_{011}$ . Добротность резонатора  $Q_{E_{011}}$  задана. Штырь длиной  $l_d$  расположен в центре торцевой стенки. Распределение электрического тока по штырю считать постоянным ( $l_d \ll \lambda_{E_{011}}$ ), амплитуда тока  $I_0$ .

Определить напряженность магнитного поля в резонаторе.

Ответ:

$$\dot{H}_\varphi = -j \frac{Q_{\text{г}011} I_0 l_\Pi \lambda_{\text{г}011}^2 \nu_{01}}{2\pi^3 a^3 J_1^2(\nu_{01})} J_1\left(\frac{\nu_{01}}{a} r\right) \cos \frac{\pi}{l} z.$$

11.39. Решить задачу 11.38 при условии, что резонатор возбуждается узкой поперечной щелью, облучаемой внешним электромагнитным полем. Длина щели  $l_\Pi$ . Амплитуда напряжения постоянна вдоль щели и равна  $U_0$ . Расположение щели оптимальное.

Ответ:

$$\dot{H}_\varphi = -\frac{Q_{\text{г}011} U_0 l_\Pi \lambda_{\text{г}011}}{Z_c \pi^2 a^2 J_1(\nu_{01})} J_1\left(\frac{\nu_{01}}{a} r\right) \cos \frac{\pi}{l} z.$$

11.40. Цилиндрический резонатор с воздушным заполнением (рис. 11.17) возбуждается кольцевой щелью на резонансной частоте колебания типа  $E_{010}$ . Добротность  $Q_{E_{010}}$  резонатора известна, амплитуда напряжения в щели постоянна и равна  $U_0$ .

Определить комплексные амплитуды векторов поля в резонаторе.

Ответ:

$$\begin{aligned} \dot{E} &= -j \frac{U_0 d_0^2 Q_{E_{010}} J_0\left(\nu_{01} \frac{d_0}{2a}\right)}{4la^2 J_1^2(\nu_{01})} J_0\left(\nu_{01} \frac{r}{a}\right) \mathbf{1}_z, \\ \dot{H} &= \frac{U_0 d_0^2 Q_{E_{010}} J_0\left(\nu_{01} \frac{d_0}{2a}\right)}{4Z_c la^2 J_1^2(\nu_{01})} J_1\left(\nu_{01} \frac{r}{a}\right) \mathbf{1}_\varphi. \end{aligned}$$

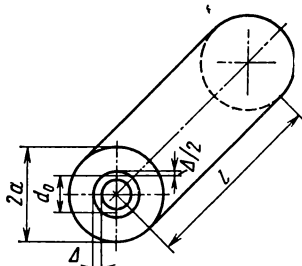


Рис. 11.17

11.41. Согласно условию задачи 11.40 определить напряженность внешнего электрического поля в щели шириной 2 мм при  $d_0 = 6$  мм, если энергия, запасенная в объемном резонаторе, составляет  $10^{-4}$  Дж. Длина объемного резонатора равна его диаметру. Резонансная частота 2 ГГц. Добротность резонатора  $Q_{E_{010}} = 5000$ .

Ответ:  $302,5 \cdot 10^3$  В/м.

11.42. Определить максимальное значение амплитуды напряженности электрического поля в объемном резонаторе, рассмотренном в задаче 11.41, при условии, что частота внешнего электромагнитного поля уменьшилась на 0,02% от резонансной частоты при неизменном напряжении в щели. Сравнить полученный результат с результатом в случае возбуждения колебаний на резонансной частоте.

Ответ: 188,022 кВ/м; напряженность электрического поля уменьшилась в 1,41 раза.

11.43. На сколько изменится частота собственных колебаний основного типа в прямоугольном резонаторе с размерами  $a = 5$  см,  $b = 3$  см,  $l = 6$  см, если в середине верхней крышки ( $x = a/2$ ,  $y = b$ ,  $z = l/2$ ) вставить металлический подстроечный винт высотой  $h = 3$  мм и диаметром  $d = 5$  мм (рис. 11.18)?

Ответ: частота уменьшится на 5,095 МГц.

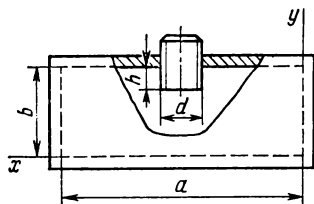


Рис. 11.18

**11.44.** Решить задачу 11.43 при условии, что подстроечный винт вставлен в середине торцевой стенки ( $x = a/2$ ,  $y = b/2$ ,  $z = 0$ ).

*Ответ:* частота увеличится на 2,07 МГц.

**11.45.** Для подстройки цилиндрического резонатора радиусом 6 см и длиной 10 см, работающего на колебании типа  $E_{010}$ , используется металлический винт диаметром 10 мм, вводимый по центру торцевой стенки.

Определить глубину погружения винта, обеспечивающую перестройку частоты на  $-0,1\%$  от собственной частоты невозмущенного резонатора.

*Ответ:* 7,788 мм.

## Глава двенадцатая

### ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ И ДИФРАКЦИЯ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

#### § 12.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Многие задачи технической электродинамики связаны с нахождением поля, возбуждаемого некоторой системой излучателей. Сложение волн, приходящих из нескольких источников, с учетом фазовых соотношений между ними носит название *интерференции*.

Часто возможна такая постановка задачи:

- 1) каждый источник является элементарным электрическим или магнитным излучателем;
- 2) точка наблюдения находится в дальней зоне любого излучателя системы.

Ввиду сказанного волна, возбуждаемая каждым отдельным излучателем, является сферической. Вводя в точке размещения  $k$ -го источника локальную сферическую систему координат  $(r_k, \vartheta_k, \varphi_k)$ , полярная ось которой совпадает с направлением элемента тока, на основании принципа суперпозиции можно записать выражение для напряженности электрического поля в точке наблюдения  $P$ :

$$\vec{E}(P) = \sum_{k=1}^N \vec{I}_k F_k(\vartheta_k, \varphi_k) \frac{e^{-i\beta R_k}}{R_k}, \quad (12.1)$$

где  $\vec{I}_k$  — ток в  $k$ -м излучателе;  $F_k(\vartheta_k, \varphi_k)$  — векторная функция, определяющая направленность и поляризационную характеристику излучателя;  $R_k$  — длина отрезка, соединяющего точку  $P$  с  $k$ -м излучателем.

В антенной технике часто рассматриваются задачи, когда излучатели в системе одинаковы, а точка наблюдения столь удалена от них, что

всю излучающую систему, например передающую антенную решетку, можно считать единым точечным источником. Иными словами, лучи, соединяющие точку наблюдения с точками размещения излучателей, можно полагать параллельными. Тогда результирующее поле

$$\dot{E}(P) = F(\vartheta, \varphi) f(\vartheta, \varphi) \frac{e^{-j\beta R}}{R}. \quad (12.2)$$

Здесь  $F(\vartheta, \varphi)$  — функция, описывающая направленные свойства одиночного элемента;  $f(\vartheta, \varphi)$  — комплексная функция двух угловых координат, называемая *множителем направленности* системы.

Если электромагнитная волна определенного вида (плоская, цилиндрическая, сферическая) падает на объект, отличающийся по своим электродинамическим свойствам от окружающей среды, то имеет место явление *дифракции* волны на объекте.

Для решения задач дифракции необходимо найти распределение токов на препятствии, вызванных падающей волной, а затем просуммировать переизлученные поля по принципу суперпозиции. В этом смысле между проблемами интерференции и дифракции есть много общего.

Имеется два основных подхода к задачам дифракции.

### Строгие методы

При использовании строгих методов рассеянное поле отыскивают как решение однородных уравнений Гельмгольца:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \dot{E}_{\text{pac}} + \beta^2 \dot{E}_{\text{pac}} &= 0, \\ \nabla^2 \dot{H}_{\text{pac}} + \beta^2 \dot{H}_{\text{pac}} &= 0, \end{aligned} \quad (12.3)$$

которое на поверхности рассеивателя должно удовлетворять соответствующим граничным условиям, вытекающим из постановки задачи. Кроме того, должно выполняться *условие излучения Зоммерфельда*, позволяющее выделить решение вида расходящейся волны. В трехмерных задачах это условие имеет вид

$$\lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial \dot{E}_{\text{pac}}}{\partial r} + j\beta \dot{E}_{\text{pac}} \right) = 0. \quad (12.4)$$

### Методы физической оптики

Эта группа приближенных методов теории дифракции основана на формуле Кирхгофа, утверждающей, что решение скалярного уравнения

$$\nabla^2 \psi + \beta^2 \psi = 0$$

в произвольной точке  $P$ , находящейся внутри замкнутой поверхности  $S$ , выражается интегралом

$$\psi(P) = -\frac{1}{4\pi} \oint_S \left[ \frac{e^{-j\beta r}}{r} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial}{\partial n} \left( \frac{e^{-j\beta r}}{r} \right) \right] dS, \quad (12.5)$$

где  $d/dn$  — производная по направлению внутренней нормали;  $r$  — длина отрезка между точкой наблюдения  $P$  и переменной точкой интегрирования.

Формула (12.5) дает строгий результат, если на границе области значения  $\psi$  и  $\partial\psi/\partial n$  известны точно. В задачах дифракции, решаемых методами физической оптики, вместо точных значений поля и его производной на границе принято использовать приближенные величины, которые имели бы место в этих точках пространства в отсутствие объекта дифракции. Такое приближение хорошо оправдывает себя, если линейные размеры объекта существенно больше длины волны.

Важным понятием в приближенной теории дифракции являются *зоны Френеля* [5] — воображаемые области на волновом фронте падающей волны, характерные тем, что колебания, приходящие в точку наблюдения из разных точек зоны с одним и тем же номером, отличаются по фазе не более чем на  $180^\circ$ . Для плоского волнового фронта  $N$ -я зона Френеля есть кольцевая область, определяемая неравенствами

$$\sqrt{N\lambda z} > r > \sqrt{(N-1)\lambda z}, \quad (12.6)$$

где  $z$  — расстояние от волнового фронта до точки наблюдения.

## § 12.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

**12.1.** В неограниченной среде, электродинамические свойства которой описываются параметрами  $\epsilon_0$  и  $\mu_0$ , размещается бесконечно тонкая нить тока, ориентированная вдоль оси  $z$  цилиндрической системы

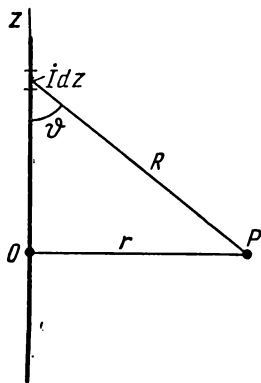


Рис. 12.1

координат. Ток изменяется во времени по гармоническому закону с частотой  $\omega$ , причем его амплитуда и фаза в каждой точке оси одни и те же.

Определить характер зависимости поля излучения нити от радиальной координаты  $r$  на расстояниях, достаточно больших в волновом масштабе, т. е. при  $\beta r \gg 1$ .

**Решение.** Если мысленно разбить излучающую нить на бесконечно малые отрезки длиной  $dz$ , то каждый из них будет представлять собой элементарный электрический излучатель (диполь) с моментом  $I dz$ . Если  $z$  — текущая координата вдоль нити, а точка наблюдения располагается в плоскости  $z = 0$ , то длина отрезка, соединяющего точку наблюдения  $P$  и излучающий элемент,  $R =$

$= \sqrt{r^2 + z^2}$  (рис. 12.1). Поле элементарного излучателя следует определять по формуле, справедливой для дальней зоны:

$$d\dot{H}_\varphi = \frac{jI\beta \sin \vartheta}{4\pi} \frac{e^{-i\beta R}}{R} dz,$$

причем, как видно из рисунка,

$$\sin \vartheta = r / \sqrt{r^2 + z^2}.$$

По принципу суперпозиции результирующее поле, излучаемое нитью, находят путем интегрирования:

$$\dot{H}_{\Phi}(r) = \int d\dot{H}_{\Phi} = \frac{j\beta r}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-j\beta \sqrt{r^2+z^2}}}{r^2+z^2} dz. \quad (12.7)$$

Интегралы такого вида характерны для различных задач дифракции. Рассмотрим один из часто используемых методов их приближенного вычисления — *метод стационарной фазы*. Сущность его состоит в том, что в мнимый показатель экспоненты, стоящей под интегралом, входит безразмерный «большой параметр»  $\beta r \gg 1$ . Поэтому с изменением переменной  $z$  подынтегральная функция быстро осциллирует, так что существенный вклад в интеграл вносит лишь малый участок оси  $z$ , включающий точку, где производная от подынтегральной функции по  $z$  обращается в нуль (отсюда название метода).

Рассмотрим интеграл

$$J = \int_{-\infty}^{\infty} g(t, \xi) e^{-jI(t, \xi)} dt, \quad (12.8)$$

где  $g(t, \xi)$  — медленная функция переменной  $t$ ,  $\xi$  — большой параметр задачи.

Пусть  $t_0$  — единственный действительный корень уравнения  $f'_t(t, \xi) = 0$  (рассуждения легко перенести на случай нескольких корней). Тогда вблизи этой точки справедливо разложение в ряд Тейлора:

$$f(t, \xi) = f(t_0, \xi) + \frac{1}{2} (t - t_0)^2 f''(t_0, \xi) + \dots$$

Предположим также, что экстремум функции  $f(t, \xi)$ , в точке  $t_0$  является резким, т. е.  $|f''(t_0, \xi)| \gg 1/t_0^2$ .

В результате получается приближенное соотношение

$$J \approx e^{-jI(t_0, \xi)} g(t_0, \xi) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(t-t_0)^2 f''(t_0, \xi)/2} dt. \quad (12.9)$$

Поскольку

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos(ay^2) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \sin(ay^2) dy = \sqrt{\frac{\pi}{2a}}$$

при любых  $a > 0$  (см. [9]), то

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-j(t-t_0)^2 f''(t_0, \xi)/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{f''(t_0, \xi)}} (1-j) = \sqrt{\frac{2\pi}{f''(t_0, \xi)}} e^{-j\frac{\pi}{4}}.$$

Подставляя этот результат в формулу (12.9), получим окончательно

$$J = \sqrt{\frac{2\pi}{f''(t_0, \xi)}} g(t_0, \xi) e^{-i[f(t_0, \xi) + \pi/4]} \quad (12.10)$$

(предполагается, что  $f''(t_0, \xi) > 0$ ).

Применим метод стационарной фазы к оценке интерференционного интеграла (12.7). Здесь

$$f(z, r) = \beta \sqrt{r^2 + z^2},$$

$$f'(z, r) = \beta z / \sqrt{r^2 + z^2},$$

поэтому точка стационарной фазы имеет координату  $z = 0$ . Далее имеем

$$f''(0, r) = \beta/r > 0.$$

Следовательно,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\beta \sqrt{r^2 + z^2}}}{r^2 + z^2} dr \approx \sqrt{\frac{2\pi r}{\beta}} \frac{1}{r^2} e^{-i(\beta r + \pi/4)},$$

откуда

$$\dot{H}_\Phi(r) \approx \frac{i\beta}{\sqrt{8\pi\beta r}} e^{-i(\beta r - \pi/4)}. \quad (12.11)$$

На основании формулы (12.11) можно утверждать, что при достаточном удалении от излучающей нити электромагнитное поле имеет вид *цилиндрической волны*, распространяющейся вдоль радиальной координаты, поскольку амплитуда волны падает с увеличением радиуса по закону  $1/\sqrt{r}$  (гораздо медленнее, чем в случае сферической волны).

Строгое решение задачи о возбуждении свободного пространства нитью синфазного тока  $\dot{I}$  приводит к следующему результату [4]:

$$\dot{H}_\Phi(r) = \frac{i\beta}{4j} H_1^{(2)}(\beta r), \quad (12.12)$$

где  $H_1^{(2)}(\beta r)$  — функция Ганкеля второго рода первого индекса, которая при больших значениях аргумента имеет асимптотическое представление

$$\dot{H}_1^{(2)}(\beta r) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi\beta r}} e^{-i(\beta r - 3\pi/4)}. \quad (12.13)$$

Подстановка этого выражения в (12.12) сразу дает формулу (12.11).

**12.2.** Согласно условиям предыдущей задачи найти закон, описывающий пространственное изменение напряженности магнитного поля, возбуждаемого в свободном пространстве бесконечной нитью синфазного тока на расстояниях, значительно меньших длины волны, т. е. при  $\beta r \ll 1$ .

**Р е ш е н и е.** Здесь, по крайней мере, для излучающих элементов, ближайших к точке наблюдения, следует воспользоваться формулой, соответствующей ближней зоне элементарного излучателя:

$$d\dot{H}_\varphi = \frac{i \sin \vartheta e^{-i\beta R}}{4\pi R^2} dz = \frac{r i e^{-i\beta \sqrt{r^2+z^2}}}{4\pi (r^2+z^2)^{3/2}}. \quad (12.14)$$

Излучающие элементы, расположенные на большом (в масштабе длины волны) удалении от точки наблюдения, создают поле, отвечающее дальней зоне. Легко понять, что их вклад в суммарный эффект будет мал как за счет спада амплитуды по закону  $1/R$ , так и вследствие уменьшения интенсивности излучения в направлениях, близких к осевому. Поэтому формулу (12.14) будем использовать для всех излучающих элементов, так что

$$\dot{H}_\varphi(r) \approx \frac{r i}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\beta \sqrt{r^2+z^2}}}{(r^2+z^2)^{3/2}} dz. \quad (12.15)$$

Если к выражению (12.15) применить формулу Эйлера, то очевидно, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \beta \sqrt{r^2+z^2}}{(r^2+z^2)^{3/2}} dz = 0$$

из-за нечетности подынтегрального выражения. Далее, вводя безразмерную переменную  $u = z/r$  и малый параметр  $a = \beta r$ , будем иметь

$$\dot{H}_\varphi \approx \frac{i}{4\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(a \sqrt{1+u^2})}{(1+u^2)^{3/2}} du. \quad (12.16)$$

Вычисляя этот интеграл при  $a \ll 1$ , можно приближенно заменить числитель подынтегральной функции на единицу. Действительно,  $\cos(a \sqrt{1+u^2}) \approx 1$ , если аргумент  $a \sqrt{1+u^2}$  не превышает  $1/4$ . При этом переменная интегрирования изменяется в пределах  $(-1/(4a), +1/(4a))$ . Знаменатель подынтегрального выражения, равный единице при  $u = 0$ , на границах указанного интервала возрастает до  $1/(64 a^3)$ . Поэтому с полным основанием можно пренебречь изменением вклада в общий интеграл от двух полубесконечных интервалов, которое получится при грубой оценке числителя. Итак,

$$\dot{H}_\varphi(r) \approx \frac{i}{4\pi r} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{du}{(1+u^2)^{3/2}} = \frac{i}{2\pi r}. \quad (12.17)$$

Этот результат справедлив на малых по сравнению с длиной волны расстояниях от излучающей нити; электромагнитные процессы носят квазистационарный характер и напряженность магнитного поля описывается формулой закона полного тока.



Проверку этого приближенного результата можно сделать на основании строгого решения (12.12). Известно, что при малых аргументах

$$H_1^{(2)}(\beta r) \approx \frac{2j}{\pi \beta r}.$$

Если подставить это выражение в (12.12), то получится закон полного тока (12.17).

**12.3.** Излучающая система представляет собой совокупность  $N$  параллельных нитей синфазного тока, ориентированных так, как показано на рис. 12.2.

Полагая, что токи во всех нитях имеют одинаковые начальные фазы, вычислить угловое распределение амплитуды поля на больших расстояниях от излучающей системы.

**Решение.** Как известно (см. задачу 12.1), в дальней зоне каждая нить создает цилиндрическую волну вида

$$\dot{H}_\Phi(r) = \dot{A} e^{-i\beta r} / \sqrt{r}.$$

На расстояниях, больших по сравнению как с длиной волны, так и с поперечными размерами системы, можно полагать, что в точку наблюдения от каждого излучателя приходят локально-плоские волны одинаковой амплитуды, отличающиеся лишь углами сдвига фаз. Если ввести фазовый сдвиг между колебаниями от соседних нитей

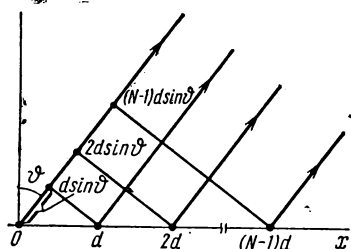


Рис. 12.2

то множитель направленности системы

$$\psi = \beta d \sin \theta,$$

то множитель направленности системы

$$f(\theta) = \sum_{k=0}^{N-1} e^{jk\psi}.$$

Суммируя эту геометрическую прогрессию, получим выражение

$$f(\theta) = \frac{1 - e^{jN\psi}}{1 - e^{j\psi}}, \quad (12.18)$$

модуль которого

$$|f(\theta)| = \frac{\sin(N\beta d \sin \theta)}{\sin(\beta d \sin \theta)}. \quad (12.19)$$

Анализ формулы (12.19) свидетельствует о следующем.

1. При  $\theta = 0$  получается максимум результирующего излучения; амплитуда поля возрастает в  $N$  раз по сравнению с амплитудой поля одиночного излучателя ввиду когерентного сложения волн.

2. Если угол  $\theta$  удовлетворяет условию

$$N\beta d \sin \theta = \pm m\pi \quad (m = 1, 2, 3, \dots),$$

то наблюдаются нулевые значения амплитуды поля из-за интерференции колебаний.

3. Помимо основного лепестка в диаграмме направленности имеются также побочные лепестки, расположенные симметрично относительно направления максимального излучения. Однако их уровень меньше из-за роста знаменателя в формуле (12.19).

12.4. Идеально проводящий круговой цилиндр радиусом  $a$  ориентирован вдоль оси  $z$  (рис. 12.3). Плоская линейно-поляризованная волна падает на цилиндр в положительном направлении оси  $x$ . Вектор напряженности электрического поля падающей волны имеет единственную составляющую  $\dot{E}_z$  пад.

Вычислить напряженность поля, рассеянного цилиндром во всем пространстве.

Решение. Вводя цилиндрическую систему координат  $(r, \varphi, z)$ , для комплексной амплитуды вектора напряженности электрического поля падающей волны получим выражение

$$\dot{E}_{\text{пад}} = E_0 e^{-i\beta x} \mathbf{1}_z = E_0 e^{-i\beta z \cos \varphi} \mathbf{1}_z.$$

Эта периодическая функция угловой координаты  $\varphi$  может быть разложена в ряд Фурье [3]:

$$\dot{E}_z \text{ пад} = E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(\beta r) e^{in(\varphi - \pi/2)}. \quad (12.20)$$

При указанном в условии выборе поляризации поля падающей волны очевидно, что и поле рассеянной волны будет иметь единственную отличную от нуля составляющую  $\dot{E}_z$  рас, такую, что на поверхности идеального проводника

$$\dot{E}_z \text{ пад} + \dot{E}_z \text{ рас} \Big|_{r=a} = 0.$$

Рассеянное поле является решением уравнения Гельмгольца

$$\nabla^2 \dot{E}_z \text{ рас} + \beta^2 \dot{E}_z \text{ рас} = 0,$$

или

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial \dot{E}_z \text{ рас}}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \dot{E}_z \text{ рас}}{\partial \varphi^2} = 0$$

в области  $r > a$ , причем при  $r \rightarrow \infty$  должно выполняться условие излучения Зоммерфельда. Это решение представляет собой периодическую функцию  $\varphi$  с периодом  $2\pi$ , поэтому будем искать его в виде ряда Фурье, совпадающего по форме с (12.20):

$$\dot{E}_z \text{ рас} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(r) e^{in(\varphi - \pi/2)}. \quad (12.21)$$

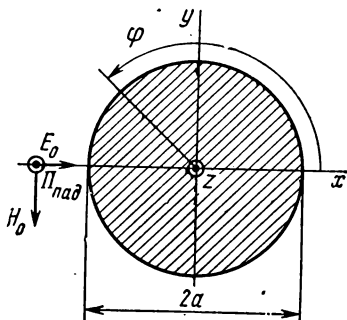


Рис. 12.3

Поскольку

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_{z \text{ рас}}}{\partial \varphi^2} = - \sum_{n=-\infty}^{\infty} n^2 a_n(r) e^{in(\varphi - \pi/2)},$$

каждый из коэффициентов  $a_n$  должен быть решением уравнения  $\frac{d^2 a_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{da_n}{dr} + (\beta^2 - n^2) a_n = 0$ , которое заменой переменной  $\xi = \beta r$  сводится к уравнению Бесселя:

$$\frac{d^2 a_n}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{da_n}{d\xi} + \left(1 - \frac{n^2}{\xi^2}\right) a_n = 0.$$

Линейно независимыми решениями этого уравнения являются функции Ганкеля  $H_n^{(1)}(\xi)$  и  $H_n^{(2)}(\xi)$  первого и второго рода. Отличие их друг от друга видно из асимптотических формул, справедливых при больших значениях аргумента:

$$H_n^{(1)}(\xi) \underset{\xi \rightarrow \infty}{\approx} \sqrt{\frac{2}{\pi \xi}} e^{i[\xi - \pi/2(n + 1/2)]},$$

$$H_n^{(2)}(\xi) \underset{\xi \rightarrow \infty}{\approx} \sqrt{\frac{2}{\pi \xi}} e^{-i[\xi - \pi/2(n + 1/2)]}.$$

Ясно, что именно функция  $H_n^{(2)}$  отвечает решению вида цилиндрической волны, уходящей на бесконечность. Таким образом,

$$\dot{E}_{z \text{ рас}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \dot{A}_n H_n^{(2)}(\beta r) e^{in(\varphi - \pi/2)},$$

причем для выполнения граничных условий на поверхности идеального проводника необходимо, чтобы

$$\dot{A}_n = -E_0 \frac{J_n(\beta a)}{H_n^{(2)}(\beta a)}.$$

Итак, найдено, что рассеянное поле выражается бесконечным рядом

$$\dot{E}_{z \text{ рас}} = -E_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(\beta a)}{H_n^{(2)}(\beta a)} H_n^{(2)}(\beta r) e^{in(\varphi - \pi/2)}.$$

На больших удалениях от цилиндра это поле имеет вид цилиндрической волны, у которой угловое распределение амплитуды определяется безразмерным параметром  $\beta a$ :

$$\dot{E}_{z \text{ рас}} \approx -E_0 \sqrt{\frac{2}{\pi \beta r}} e^{-i(\beta r - \pi/4)} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{J_n(\beta a)}{H_n^{(2)}(\beta a)} e^{in\varphi}.$$

Полученные ряды хорошо сходятся только при  $\beta a < 3$ . Численный анализ показывает, что:

1) цилиндры малых радиусов ( $a/\lambda < 0,1$ ) рассеивают энергию практически изотропно по всем углам;

2) более толстые цилиндры ( $a/\lambda \sim 1 - 3$ ) имеют резко выраженный максимум рассеяния в области углов, близких к  $\varphi = 0$ . Интересно, что именно здесь располагается область геометрической тени, которая проявляет себя лишь при больших толщинах цилиндров ( $a/\lambda \gg 1$ ) [4].

12.5. Плоская электромагнитная волна с линейной поляризацией падает по направлению нормали на идеально проводящий экран, в котором имеется щель шириной  $2a$ , ориентированная вдоль координаты  $y$  (рис. 12.4). Поляризация падающей волны такова, что в выбранной системе координат комплексная амплитуда вектора напряженности электрического поля имеет вид  $E_0 \exp(-j\beta z) \mathbf{1}_y$ .

Определить дифрагированное поле за экраном в полупространстве  $z > 0$ .

Решение. Идея излагаемого здесь метода принадлежит Рэлею [11]. Задача сводится к нахождению решения уравнения Гельмгольца:

$$\frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{E}_y}{\partial z^2} + \beta^2 \dot{E}_y = 0 \quad (12.22)$$

в полупространстве  $z > 0$  с определенными граничными условиями на плоскости  $z = 0$ . В соответствии с принципом физической оптики потребуем, чтобы значение поля обращалось в нуль на участках поверхности, закрытых идеальным проводником, а в щели равнялось невозмущенному значению поля падающей волны  $E_0$ . Таким образом,

$$\dot{E}_y(x, 0) = \begin{cases} 0 & (x > a, x < -a), \\ E_0 & (-a \leq x \leq a). \end{cases} \quad (12.23)$$

Применим к уравнению (12.22) метод разделения переменных и будем искать его решение в виде

$$\dot{E}_y(x, z) = X(x) Z(z).$$

Легко проверить, что частным интегралом уравнения Гельмгольца является функция

$$\dot{E}_y = A e^{i(\kappa x + z \sqrt{\beta^2 - \kappa^2})} \quad (12.24)$$

при любом значении параметра  $\kappa$ . Конкретный выбор этого числа позволяет описывать различные волновые процессы. Так, если значение  $\kappa$  действительно и  $\kappa^2 < \beta^2$ , то формула (12.24) соответствует плоской волне с неизменной амплитудой, которая распространяется под некоторым углом к оси  $z$ , зависящим от соотношения между  $\kappa$  и  $\beta$ . При  $\kappa^2 > \beta^2$  это выражение описывает неоднородную плоскую поверхностную волну, распространяющуюся вдоль оси  $x$  со скоростью, меньшей скорости света; ее амплитуда экспоненциально убывает с ростом координаты  $z$ . Из частных решений вида (12.24) можно образовать общий интеграл

$$\dot{E}_y(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\kappa) e^{i(\kappa x + z \sqrt{\beta^2 - \kappa^2})} d\kappa \quad (12.25)$$

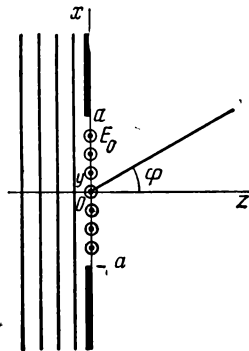


Рис. 12.4

с произвольной весовой функцией  $A(\kappa)$ . Для ее нахождения учтем, что

$$\dot{E}_y(x, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\kappa) e^{i\kappa x} d\kappa.$$

Видно, что функция  $A(\kappa)$  есть преобразование Фурье от распределения поля в плоскости  $z = 0$ :

$$A(\kappa) = \int_{-\infty}^{\infty} \dot{E}_y(x, 0) e^{-i\kappa x} dx.$$

В нашем случае

$$A(\kappa) = \int_{-a}^a E_0 e^{-i\kappa x} dx = 2E_0 \int_0^a \cos \kappa x dx = 2E_0 a \frac{\sin \kappa a}{\kappa a}.$$

Таким образом получено интегральное представление волнового поля за экраном:

$$\dot{E}_y(x, z) = \frac{E_0 a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \kappa a}{\kappa a} e^{i(\kappa x + z \sqrt{\beta^2 - \kappa^2})} d\kappa. \quad (12.26)$$

Для вычисления этого интеграла удобно воспользоваться изложенным ранее методом стационарной фазы. Введем полярную систему координат  $x = r \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \varphi$ . Тогда

$$\dot{E}_y(r, \varphi) = \frac{E_0 a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \kappa a}{\kappa a} e^{i r (\kappa \sin \varphi + \sqrt{\beta^2 - \kappa^2} \cos \varphi)} d\kappa.$$

Точку стационарной фазы можно найти как корень уравнения

$$\frac{d}{d\kappa} (\kappa \sin \varphi + \sqrt{\beta^2 - \kappa^2} \cos \varphi) = 0,$$

решение которого

$$\kappa_{\text{стац}} = \frac{\beta \operatorname{tg} \varphi}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}}.$$

Ограничимся наиболее важным случаем *малоугловой дифракции*, когда  $\kappa_{\text{стац}} \approx \beta \varphi$ . В этом приближении

$$\left. \frac{d^2}{d\kappa^2} [-r(\kappa \sin \varphi + \sqrt{\beta^2 - \kappa^2} \cos \varphi)] \right|_{\kappa = \kappa_{\text{стац}}} \approx \frac{r}{\beta}.$$

На основании формулы (12.10) получим

$$\dot{E}_y(r, \varphi) \approx E_0 a \sqrt{\frac{2\beta}{\pi r}} \frac{\sin \beta a \varphi}{\beta a \varphi} e^{-i(\beta r - \pi/4)}. \quad (12.27)$$

Данное выражение соответствует цилиндрической волне (об этом говорит убывание амплитуды по закону  $1/\sqrt{r}$ ), у которой имеется угловая зависимость поля, выраженная тем сильнее, чем больше безразмерный параметр  $\beta a$ . Излучение максимально в направлении  $\varphi = 0$ ; первый дифракционный ноль отвечает углам  $\varphi_0$ , удовлетворяющим равенствам

$$\beta a \varphi_0 = \pm \pi.$$

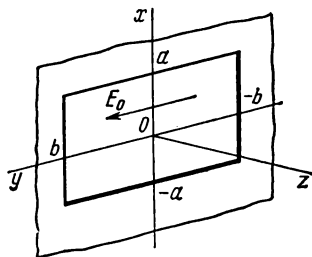


Рис. 12.5

**12.6.** Решить задачу об излучении электромагнитных волн из прямоугольного отверстия размерами  $2a \times 2b$  в идеально проводящем экране (рис. 12.5). Отверстие со стороны полупространства  $z < 0$  возбуждается однородной плоской волной с комплексной амплитудой  $E_0 \exp(-j\beta z)$  и  $y$ . Рассмотреть поле, существующее в полупространстве  $z > 0$  на расстоянии от экрана, большом по сравнению как с длиной волны  $\lambda$ , так и с поперечными размерами отверстия.

**Решение.** Воспользуемся формулой Кирхгофа (12.5) относительно составляющей  $E_y$  вектора напряженности электрического поля. В точке наблюдения  $P$

$$\dot{E}_y(P) = -\frac{1}{4\pi} \int_S \left[ \frac{e^{-j\beta r}}{r} \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} - \dot{E}_y \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{-j\beta r}}{r} \right) \right] dS, \quad (12.28)$$

поскольку  $\partial/\partial n = \partial/\partial z$ . Интегрирование проводится по площади отверстия. Пусть  $Q$  — точка на отверстии с координатами  $x, y, z$ ;  $P$  — точка наблюдения с координатами  $\xi, \eta, \zeta$ . Тогда

$$r = \sqrt{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 + (\zeta - z)^2}. \quad (12.29)$$

Обе производные, входящие в выражение (12.28), равны:

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \dot{E}_y}{\partial z} \right|_{z=0} &= j\beta E_0, \\ \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{e^{-j\beta r}}{r} \right) &= \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-j\beta r}}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-j\beta r}}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial \zeta}. \end{aligned}$$

Далее

$$\partial r / \partial \zeta = \zeta / r = \cos \vartheta,$$

где  $\vartheta$  — угол между нормалью к отверстию и отрезком  $PQ$ ;

$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{e^{-j\beta r}}{r} \right) = -\left( \frac{j\beta}{r} + \frac{1}{r^2} \right) e^{-j\beta r}.$$

Таким образом,

$$\dot{E}_y(P) = \frac{E_0}{4\pi} \int_S \left[ j\beta \frac{e^{-j\beta r}}{r} (1 + \cos \vartheta) + \frac{\cos \vartheta}{r^2} e^{-j\beta r} \right] dS.$$

В случае  $r \gg \lambda$  вторым слагаемым под знаком интеграла можно пренебречь; кроме того, на большом удалении от экрана величина  $\cos \vartheta$  мало изменяется от точки к точке. Поэтому

$$\dot{E}_y(P) \approx \frac{jE_0 \beta}{4\pi} (1 + \cos \vartheta) \int_S \frac{e^{-j\beta r}}{r} dS. \quad (12.30)$$

Смысл этого выражения таков: поле в точке наблюдения есть суперпозиция полей от бесконечно малых излучающих площадок (элементов Гюйгенса) с кардионидными характеристиками направленности.

Обозначим символом  $r_0$  расстояние от центра отверстия до точки наблюдения. Тогда

$$r \approx \sqrt{r_0^2 - 2x\xi - 2y\eta} \approx r_0 - \frac{x\xi}{r_0} - \frac{y\eta}{r_0} \approx r_0 - x \cos \vartheta_1 - y \cos \vartheta_2,$$

где  $\vartheta_1$  и  $\vartheta_2$  — углы, образованные вектором  $\mathbf{r}_0$  и осями  $x$  и  $y$  соответственно.

Используя данное приближенное выражение для вычисления интеграла (12.30), получим

$$\begin{aligned} \dot{E}_y(P) &= \frac{jE_0 \beta}{4\pi r_0} e^{-j\beta r_0} (1 + \cos \vartheta) \int_{-a}^a e^{j\beta x \cos \vartheta_1} dx \int_{-b}^b e^{j\beta y \cos \vartheta_2} dy = \\ &= \frac{jE_0 \beta ab}{\pi} \frac{e^{-j\beta r_0}}{r_0} (1 + \cos \vartheta) \frac{\sin(\beta a \cos \vartheta_1)}{\beta a \cos \vartheta_1} \frac{\sin(\beta b \cos \vartheta_2)}{\beta b \cos \vartheta_2}. \end{aligned} \quad (12.31)$$

Итак, исследованное поле представляет собой неоднородную сферическую волну с максимумом излучения вдоль оси системы. Угловые зависимости поля в обеих взаимно перпендикулярных плоскостях имеют лепестковую структуру; они выражены тем сильнее, чем больше параметры  $\beta a$  и  $\beta b$ .

Рассмотренная здесь дифракция на больших расстояниях от излучателя получила название *дифракции Фраунгофера*.

**12.7.** Решить предыдущую задачу для случая, когда точка наблюдения по-прежнему находится на расстоянии многих длин волн от излучающего отверстия, однако это расстояние по порядку величин сравнимо со сторонами прямоугольника  $a$  и  $b$ .

**Решение.** Пусть точка наблюдения  $P$  располагается в плоскости  $\xi = \text{const}$ . Особенность постановки задачи состоит в том, что при вычислении расстояния  $r$  между точками  $P$  и  $Q$  по формуле (12.29) уже нельзя пренебречь квадратичными членами и следует записать

$$r \approx \xi + \frac{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}{2\xi} + \dots \quad (12.32)$$

Указанные дифракционные явления называются *дифракцией Френеля*.

Будем, как это обычно принято, интересоваться полем вблизи оси системы, когда  $(1 + \cos \vartheta) \approx 2$ . Подставив (12.32) в (12.30), имеем

$$\dot{E}_y(P) \approx \frac{jE_0 \beta}{2\pi} \frac{e^{-j\beta\zeta}}{\zeta} \int_{-a}^a dx \int_{-b}^b e^{-j\beta \frac{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}{2\zeta}} dy. \quad (12.33)$$

В последней формуле зависимость поля по координатам  $\xi$  и  $\eta$  выражается как произведение однократных интегралов одинаковой структуры. Рассмотрим один из них:

$$J = \int_{-a}^a e^{-j\beta \frac{(x-\xi)^2}{2\zeta}} dx.$$

В результате подстановки

$$u = \sqrt{\beta/(2\zeta)} (x - \xi)$$

этот интеграл записывается в виде

$$J = \sqrt{\frac{2\zeta}{\beta}} \int_{-\sqrt{\beta/(2\zeta)}(a+\xi)}^{\sqrt{\beta/(2\zeta)}(a-\xi)} e^{-iu^2} du.$$

Такие интегралы принято выражать через специальные неэлементарные функции — интегралы Френеля [7]:

$$C(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^w \cos u^2 du,$$

$$S(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^w \sin u^2 du,$$

так что

$$\int_0^w e^{-iu^2} du = \sqrt{\frac{\pi}{2}} [C(w) - jS(w)].$$

Воспользовавшись последним равенством, получим

$$J = \sqrt{\frac{\pi\zeta}{\beta}} [C(g(a-\xi)) - C(g(a+\xi)) - jS(g(a-\xi)) + jS(g(a+\xi))],$$

$$\text{где } g = \sqrt{\beta/(2\zeta)}.$$

Обычно интересуются не самой величиной  $J$ , а квадратом модуля  $|J|^2$ , который пропорционален среднему значению вектора Пойнтинга.

Анализ показывает [5], что при дифракции Френеля сохраняются многие черты, характерные для геометрической оптики. Так, значения  $\xi = \pm a$  и  $\eta = \pm b$  служат условными границами, разделяющими освещенную область и область тени (рис. 12.6). Поле в окрестности оси



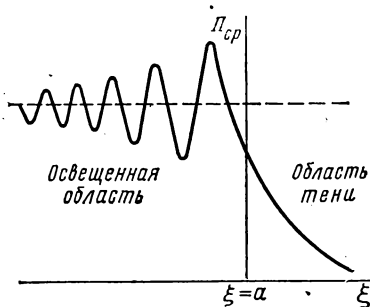


Рис. 12.6

имеет характер «лучевой трубки» вплоть до таких расстояний  $\xi$ , когда разность фаз колебаний, приходящих из разных точек излучающего отверстия, не становится достаточно малой. При оценочных расчетах принято измерять поперечник излучающего отверстия в долях размера первой зоны Френеля. Для этого вводят безразмерные *числа Френеля* по двум поперечным координатам:

$$a_{\Phi} = \frac{2a}{\sqrt{\lambda \xi}}, \quad b_{\Phi} = \frac{2b}{\sqrt{\lambda \xi}}. \quad (12.34)$$

Протяженность лучевой трубки устанавливают из соотношения  $a_{\Phi}, b_{\Phi} \sim 1$ . Если числа Френеля значительно меньше единицы, то имеет место дифракция Фраунгофера.

### § 12.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**12.8.** Элементарный электрический излучатель расположен на высоте  $d$  над бесконечной идеально проводящей плоскостью; ось излучателя направлена по нормали к плоскости.

Найти диаграмму направленности, т. е. функцию, описывающую распределение напряженности поля в зависимости от полярного угла  $\vartheta$  на достаточно больших расстояниях от излучающей системы.

*Указание:* воспользоваться принципом зеркального отражения.

*Ответ:*  $E \sim \sin \vartheta \sin (\beta d \cos \vartheta)$ .

**12.9.** Каково должно быть расстояние  $d$  (см. условие предыдущей задачи) для того, чтобы под углом  $\vartheta = 60^\circ$  излучение отсутствовало?

*Ответ:*  $d = m\lambda$ ,  $m = 1, 2, \dots$

**12.10.** Показать, что при малой высоте расположения излучателя над плоскостью ( $\beta d \ll 1$ ) максимум излучения будет наблюдаться под углом  $\vartheta = 45^\circ$ .

**12.11.** Как изменится ответ к задаче 12.8, если вместо вертикального рассмотреть горизонтальный излучатель, параллельный проводящей плоскости?

*Ответ:*  $E \sim \cos \vartheta \sin (\beta d \cos \vartheta)$ .

**12.12.** Найти диаграмму направленности излучателя, представляющего собой отрезок прямолинейного проводника длиной  $2l$ , в котором существует переменный ток с амплитудой и фазой, одинаковыми для всех точек проводника.

$$\text{Ответ: } E \sim \sin \vartheta \frac{\sin (\beta l \cos \vartheta)}{\beta l \cos \vartheta}.$$

**12.13.** Вычислить ширину основного лепестка диаграммы направленности излучающей системы, описанной в задаче 12.12, при следующих параметрах:  $f = 250$  МГц,  $l = 0,8$  м.

*Ответ:* 82,8 угл. град.

12.14. Решить задачу 12.12 при условии, что вдоль излучающего проводника распространяется бегущая волна тока вида  $\dot{I}(z) = I_0 \exp(-jkz)$  с произвольным значением фазовой постоянной  $k$ .  
*Ответ:*

$$E \sim \sin \vartheta \frac{\sin(\beta l (\cos \vartheta - k/\beta))}{\beta l (\cos \vartheta - k/\beta)}.$$

12.15. По прямолинейному проводнику (см. условие предыдущей задачи) распространяется волна тока, бегущая со скоростью  $v_\Phi = 1,7 c$ .

Под каким углом к оси системы будет располагаться направление максимального излучения?

*Ответ:*  $54^\circ$ .

12.16. Найти условие, при котором излучающая система из  $N$  параллельных нитей синфазного тока, рассмотренная в задаче 12.3, имеет более чем один главный лепесток множителя направленности.

*Ответ:*  $d > \lambda$ .

12.17. В бесконечно протяженной нити существует переменный ток с амплитудой  $1,5 A$ ; амплитуда и фаза тока неизменны в каждой точке, частота  $f = 40$  МГц.

Определить амплитуды напряженностей электрического и магнитного полей на расстоянии  $200$  м от оси в вакууме.

*Ответ:*  $7,30$  В/м,  $0,0194$  А/м.

12.18. Решить задачу о дифракции Фраунгофера при падении плоской линейно поляризованной волны на бесконечный идеально проводящий экран с круглым отверстием радиусом  $a$ .

*Указание:* ввести цилиндрическую систему координат с осью, проходящей через центр отверстия по направлению нормали к экрану.

*Ответ:*

$$\dot{E} = \frac{jE_0 a}{2} \frac{e^{-j\beta r}}{r} (1 + \cos \vartheta) \frac{J_1(\beta a \sin \vartheta)}{\sin \vartheta},$$

где  $E_0$  — амплитуда падающей волны;  $\vartheta$  — угол между нормалью и направлением луча.

12.19. Вычислить ширину основного лепестка диаграммы направленности для круглого отверстия в экране при следующих параметрах:  $f = 10$  ГГц,  $a = 0,4$  м.

*Ответ:*  $5,25$  угл. град.

12.20. Вывести формулу, определяющую протяженность области, в которой наблюдается дифракция Френеля при падении плоской волны на проводящий экран с отверстием радиусом  $a$ .

*Указание:* воспользоваться определением чисел Френеля в соответствии с выражениями (12.34).

*Ответ:*  $\xi_\Phi = 4a^2/\lambda$ .

12.21. Выходное отверстие лазера имеет форму круга диаметром  $20$  мм. Длина волны излучения  $0,628$  мкм (красная область видимого спектра).

Оценить расстояние, до которого лазерный пучок имеет характер лучевой турбулентности.

Ответ: 630 м.

12.22. Плоская волна, поляризованная так, как показано на рис. 12.3, падает на бесконечный идеально проводящий цилиндр по направлению нормали к его оси.

Полагая, что радиус цилиндра  $a \gg \lambda$ , в приближении физической оптике найти закон распределения плотности поверхностного тока на цилиндре.

Ответ:

$$\dot{\eta} = \begin{cases} 2\dot{H}_{\text{пад}} \cos \varphi \mathbf{1}_z & (-\pi/2 < \varphi < \pi/2), \\ 0 & (\pi/2 < \varphi < 3\pi/2). \end{cases}$$

12.23. Решить предыдущую задачу для другой поляризации падающей волны, когда вдоль оси  $z$  направлен вектор  $\mathbf{H}$  падающей волны. Объяснить приближенный характер полученного решения.

Ответ:

$$\dot{\eta} = \begin{cases} -2\dot{H}_{\text{пад}} \mathbf{1}_\varphi & (-\pi/2 < \varphi < \pi/2), \\ 0 & (\pi/2 < \varphi < 3\pi/2). \end{cases}$$

12.24. Основываясь на строгом решении задачи о дифракции плоской волны на проводящем цилиндре (см. задачу 12.4), найти закон распределения плотности поверхностного тока.

Указание: воспользоваться тем, что определитель Вронского

$$J_n(x) H_n^{(2)'}(x) - J_n'(x) H_n^{(2)}(x) = -2j/(\pi x).$$

Ответ:

$$\dot{\eta}_z = \frac{E_0}{60\pi^2 \beta a} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{e^{jn(\varphi-\pi/2)}}{H_n^{(2)}(\beta a)}.$$

12.25. Найти полное магнитное поле, возникающее в пространстве при дифракции плоской волны на проводящем цилиндре для случая, когда вектор напряженности магнитного поля падающей волны ориентирован вдоль оси цилиндра и имеет комплексную амплитуду  $\dot{H}_{\text{пад}} = H_0 \exp(-j\beta x) \mathbf{1}_z$ .

Ответ:

$$\dot{H}_{z\Sigma} = H_0 \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( J_n(\beta r) - \frac{J_n'(\beta a)}{H_n^{(2)'}(\beta a)} H_n^{(2)}(\beta r) \right) e^{jn(\varphi-\pi/2)}.$$

12.26\* Показать, что распределение комплексной амплитуды тока  $\dot{I}(z)$  вдоль проводящего цилиндра радиусом  $a \ll \lambda$ , возникающее под действием падающей волны, у которой вектор напряженности электрического поля имеет амплитуду  $E_0$  и направлен вдоль оси цилиндра, удовлетворяет интегральному уравнению

$$E_0 e^{j\beta z} = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \int_{-l}^l \dot{I}(\xi) \left( 1 + \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \frac{e^{-j\beta R}}{R} d\xi,$$

где  $2l$  — длина цилиндра;  $R = \sqrt{a^2 + (z - \xi)^2}$ .

## РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В РАЗЛИЧНЫХ СРЕДАХ

### §13.1. ОСНОВНЫЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Как указывалось в гл. 2, особенности распространения электромагнитных волн в конкретной среде определяются свойствами этой среды. В электродинамике для локального описания свойств среды используют материальные уравнения

$$\mathbf{D} = (\epsilon_a) \mathbf{E}, \mathbf{B} = (\mu_a) \mathbf{H}, \mathbf{J} = (\sigma) \mathbf{E}.$$

Коэффициенты  $(\epsilon_a)$ ,  $(\mu_a)$  и  $(\sigma)$  в общем случае являются тензорами и могут зависеть от ряда параметров. Характер этих зависимостей положен в основу классификации различных сред. Так, если свойства среды зависят от направления приложенных полей  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , то такие среды называют анизотропными. Если коэффициенты  $(\epsilon_a)$ ,  $(\mu_a)$  и  $(\sigma)$  зависят от абсолютных величин  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$ , то подобные среды являются нелинейными. Различают также неоднородные среды, в которых величины  $(\epsilon_a)$  и  $(\mu_a)$  являются функциями координаты выбранной точки среды, и однородные среды, в которых эта зависимость отсутствует. Коэффициенты  $(\epsilon_a)$ ,  $(\mu_a)$  и  $(\sigma)$  могут зависеть и от частоты электромагнитных колебаний  $\omega$ . В этом случае среды являются дисперсионными.

### Однородные изотропные ионизированные среды

Ионизированный газ в силу его особенностей часто выделяют как специфическую среду, называемую *плазмой*. По составу газовая плазма представляет собой смесь нейтральных, отрицательно заряженных и положительно заряженных частиц. В целом плазма квазинейтральна, т. е. концентрация отрицательно заряженных частиц (обычно электронов) в среднем равна концентрации положительно заряженных частиц (ионов).

Частицы, составляющие плазму, взаимодействуют как с внешними электромагнитными полями, так и между собой. Взаимодействие между частицами приводит к появлению в плазме различных коллективных движений (колебаний), что является характерной особенностью плазмы как среды. Простейшие колебания плазмы связаны с кулоновским взаимодействием заряженных частиц. Частота этих колебаний называется *плазменной частотой*  $\omega_0$ . Для электронов

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2 n}{m e_0}},$$

где  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона;  $n$  — концентрация электронов в плазме.

Акт взаимодействия между двумя частицами в плазме называют *столкновением*. Многие процессы в плазме определяются величиной

$\nu_{ij}$  — числом столкновений в секунду заряженной частицы сорта  $i$  с другими частицами сорта  $j$ . В газовой плазме наиболее важной характеристикой является частота столкновений электронов с нейтральными молекулами газа  $\nu_{em} = \nu$ .

С макроскопической точки зрения плазма характеризуется электродинамическими параметрами  $\epsilon$ ,  $\mu$  и  $\sigma$ . Собственный магнетизм плазмы невелик, и можно в большой степени точности считать, что  $\mu = 1$ .

Если электрическое поле изменяется с частотой  $\omega$ , а внешнее постоянное магнитное поле отсутствует, то относительная диэлектрическая проницаемость и проводимость плазмы равны соответственно:

$$\epsilon = 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu^2}, \quad \sigma = \frac{\omega_0^2 \nu \epsilon_0}{\omega^2 + \nu^2}. \quad (13.1)$$

При  $\nu \ll \omega$  формулы (13.1) упрощаются:

$$\epsilon \approx 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2}, \quad \sigma \approx \frac{\omega_0^2 \nu \epsilon_0}{\omega^2}. \quad (13.2)$$

Понятие плазмы может быть распространено на электронно-дырочный газ в полупроводниках. Электродинамические параметры невырожденного полупроводника с двумя типами электропроводности, для которого эффективные частоты столкновений электронов и дырок равны  $\nu_n$  и  $\nu_p$ , а диэлектрическая проницаемость решетки  $\epsilon_p$ , будут выражаться формулами

$$\begin{aligned} \epsilon &= \epsilon_p \left( 1 - \frac{\omega_{0n}^2}{\omega^2 + \nu_n^2} - \frac{\omega_{0p}^2}{\omega^2 + \nu_p^2} \right), \\ \sigma &= \frac{\omega_{0n}^2 \nu_n \epsilon_0 \epsilon_p}{\omega^2 + \nu_n^2} + \frac{\omega_{0p}^2 \nu_p \epsilon_0 \epsilon_p}{\omega^2 + \nu_p^2}, \end{aligned} \quad (13.3)$$

где  $\omega_{0n} = \sqrt{\frac{e^2 n}{m_n^* \epsilon_0 \epsilon_p}}$ ,  $\omega_{0p} = \sqrt{e^2 p / m_p^* \epsilon_0 \epsilon_p}$  — плазменные частоты электронов и дырок соответственно;  $n$  и  $p$  — концентрации электронов и дырок;  $m_n^*$  и  $m_p^*$  — эффективные массы электрона и дырки.

Если в полупроводнике имеется несколько сортов частиц с различными эффективными массами, то это должно быть отражено соответствующими членами в формуле (13.3). Обобщенной электродинамической характеристикой среды служит комплексная диэлектрическая проницаемость

$$\tilde{\epsilon}_a = \epsilon_a - j \frac{\sigma}{\omega}. \quad (13.4)$$

Коэффициент распространения плоской монохроматической волны в среде

$$\gamma = \frac{\omega}{c} \sqrt{\tilde{\epsilon}} = \beta - j\alpha,$$

причем

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}\right)^2}}, \quad (13.5)$$

$$\alpha = \frac{\omega}{c} \sqrt{-\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}\right)^2}}.$$

Если активные потери в плазме невелики и выполняется условие  $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon_0} \ll \varepsilon$ , то выражения (13.5) приобретают вид

$$\beta = \frac{\omega}{c} \sqrt{\varepsilon}, \quad \alpha = \frac{\omega}{c} \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0 \sqrt{\varepsilon}}. \quad (13.6)$$

Иногда коэффициенты  $\beta$  и  $\alpha$  выражают через действительную и мнимую части коэффициента преломления:

$$n = \sqrt{\varepsilon} = n' - jn''.$$

При прохождении плоской электромагнитной волны через однородный плазменный слой толщиной  $\Delta$  составляющие векторов электромагнитного поля испытывают ослабление на величину

$$\Delta = 8,686 \int_0^L \alpha dz, \text{ дБ}. \quad (13.7)$$

При этом дополнительный сдвиг фазы, вызванный наличием плазмы,

$$\delta\varphi = \int_0^L \left( \beta - \frac{2\pi}{\lambda} \right) dz, \text{ рад}. \quad (13.8)$$

### Однородные анизотропные среды

В анизотропных средах направление приложенного поля не совпадает с направлением вызванного этим полем отклика. Так, существуют среды, в которых вектор  $\mathbf{E}$  и возникающий под его воздействием вектор электрической поляризованности  $\mathbf{P}$  не совпадают по направлению. Имеются также среды, в которых вектор напряженности магнитного поля  $\mathbf{H}$  и вектор намагниченности  $\mathbf{M}$  различаются своими направлениями. В обоих случаях пары векторов  $\mathbf{D}$  и  $\mathbf{E}$ ,  $\mathbf{B}$  и  $\mathbf{H}$  связаны между собой тензорами второго ранга:

$$(\varepsilon) = \begin{vmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{vmatrix}, \quad (\mu) = \begin{vmatrix} \mu_{xx} & \mu_{xy} & \mu_{xz} \\ \mu_{yx} & \mu_{yy} & \mu_{yz} \\ \mu_{zx} & \mu_{zy} & \mu_{zz} \end{vmatrix}. \quad (13.9)$$

Аналогично, если вектор напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  не совпадает по направлению с вызываемым им вектором плотности тока проводимости  $\mathbf{J}$ , то  $\mathbf{J}$  и  $\mathbf{E}$  будут связаны тензором удельной проводимости

$$(\sigma) = \begin{vmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{vmatrix},$$

который входит в формулировку дифференциального закона Ома

$$\mathbf{J} = (\sigma) \mathbf{E}.$$

В конкретных средах некоторые компоненты тензоров  $(\epsilon)$ ,  $(\mu)$  или  $(\sigma)$  могут оказаться равными нулю. Например, существуют монокристаллические диэлектрики и полупроводники, так называемые одноосные кристаллы, для которых справедливы следующие соотношения:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = \epsilon_{\perp}, \epsilon_{zz} = \epsilon_{\parallel}, \epsilon_{xy} = \epsilon_{yx} = \epsilon_{yz} = \epsilon_{zy} = \epsilon_{zx} = \epsilon_{xz} = 0, (\mu) = 1.$$

При распространении плоской электромагнитной волны вдоль оси  $z$  такого одноосного кристалла анизотропные свойства вещества не проявляются и волна распространяется, как в изотропной среде с  $\epsilon = \epsilon_{\perp}$ . При поперечном распространении волны проявляется анизотропия кристаллов. Если вектор  $\mathbf{E} \perp \mathbf{1}_z$ , то волна распространяется, как в среде с  $\epsilon = \epsilon_{\perp}$ . В случае же, когда  $\mathbf{E} \parallel \mathbf{1}_z$ , волна распространяется, как в среде с  $\epsilon = \epsilon_{\parallel}$ . Первую волну называют обыкновенной, вторую — необыкновенной.

Коэффициенты фазы обеих волн будут соответственно равны:

$$\beta_0 = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{\perp}} = \frac{\omega}{c} n_0, \quad \beta_e = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{\parallel}} = \frac{\omega}{c} n_e. \quad (13.10)$$

Различие коэффициентов фаз приводит к тому, что волны, в которых присутствуют оба вида поляризации, при падении на границу раздела, параллельную оси кристалла, претерпевают расщепление. Это явление называют двойным лучепреломлением.

### Гиротропные среды

Частным случаем анизотропных сред являются гиротропные среды, для которых хотя бы один из тензоров  $(\epsilon)$  и  $(\mu)$  имеет вид

$$(\epsilon) = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} - j\epsilon_{xy} & 0 \\ j\epsilon_{xy} & \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{vmatrix}, \quad (\mu) = \begin{vmatrix} \mu_{xx} - j\mu_{xy} & 0 \\ j\mu_{xy} & \mu_{xx} & 0 \\ 0 & 0 & \mu_{zz} \end{vmatrix}.$$

Гиротропные свойства проявляют некоторые среды, помещенные в постоянное магнитное поле. Так, для газовой плазмы в присутствии

постоянного магнитного поля  $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{1}_z$  составляющие тензора диэлектрической проницаемости записываются в виде

$$\begin{aligned}\varepsilon_{xx} &= 1 - \frac{\omega_0^2}{2\omega} \left[ \frac{\omega - \omega_H}{(\omega - \omega_H)^2 + \nu^2} + \frac{\omega + \omega_H}{(\omega + \omega_H)^2 + \nu^2} \right], \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\omega_0^2}{2\omega} \left[ \frac{\omega - \omega_H}{(\omega - \omega_H)^2 + \nu^2} - \frac{\omega + \omega_H}{(\omega + \omega_H)^2 + \nu^2} \right], \\ \varepsilon_{zz} &= 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu^2},\end{aligned}\quad (13.11)$$

где  $\omega_H = \mu_0 \frac{|e|}{m} H = \gamma H = 2,21 \cdot 10^5 \text{ Г (А/м)}$  — частота ларморовской прецессии.

При учете столкновений составляющие тензора комплексной диэлектрической проницаемости газовой плазмы имеют вид

$$\begin{aligned}\tilde{\varepsilon}_{xx} &= 1 - \frac{\omega_0^2 (\omega - j\nu)}{\omega [(\omega - j\nu)^2 - \omega_H^2]}, \quad \tilde{\varepsilon}_{xy} = \frac{\omega_0^2 \omega_H}{\omega [(\omega - j\nu)^2 - \omega_H^2]}, \\ \tilde{\varepsilon}_{zz} &= 1 - \frac{\omega_0^2}{\omega (\omega - j\nu)}.\end{aligned}\quad (13.12)$$

Примером гиротропной среды с тензором ( $\mu$ ) является феррит, помещенный в постоянное магнитное поле  $\mathbf{H}_0$ . Составляющие тензора комплексной магнитной проницаемости феррита при  $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{1}_z$  записываются в виде

$$\tilde{\mu}_{xx} = 1 - \frac{\omega_H \omega_S}{(\omega - j\nu)^2 - \omega_H^2}, \quad \tilde{\mu}_{xy} = \frac{\omega_S (\omega - j\nu)}{(\omega - j\nu)^2 - \omega_H^2}, \quad \tilde{\mu}_{zz} = 1, \quad (13.13)$$

где  $\omega_H = \gamma H_0$ ;  $\omega_S = \gamma M_0$  ( $M_0$  — намагниченность насыщения феррита);  $\gamma$  — частота релаксации, определяющая магнитные потери в феррите.

Составляющие тензора комплексной магнитной проницаемости, описываемые выражениями (13.13), в общем случае содержат действительную и мнимую части:

$$\tilde{\mu}_{xx} = \mu'_{xx} - j\mu''_{xx}, \quad \tilde{\mu}_{xy} = \mu'_{xy} - j\mu''_{xy}.$$

Если потери в ферритах отсутствуют, то

$$\mu_{xx} = \mu'_{xx} = 1 - \frac{\omega_H \omega_S}{\omega^2 - \omega_H^2}, \quad \mu_{xy} = \mu'_{xy} = \frac{\omega \omega_S}{\omega^2 - \omega_H^2}, \quad \mu_{zz} = 1. \quad (13.14)$$

Зависимость от частоты компонентов  $xx$  и  $xy$  тензоров гиротропных сред носит резонансный характер. Резонансная частота пропорциональна напряженности магнитного поля  $H_0$ , а ширина резонансной кривой определяется параметром  $\nu$ .

Общее рассмотрение распространения электромагнитной волны в гиротропной среде удобно свести к двум предельным случаям — распространению волны вдоль определенной оси (как правило, вдоль постоянного магнитного поля) и поперек ее.



При распространении плоской волны вдоль постоянного подмагничивающего поля наблюдается *эффект Фарадея* — вращение плоскости поляризации линейно поляризованной волны. Этот эффект связан с тем, что при продольном (вдоль подмагничивающего поля) распространении волны с правой круговой поляризацией ведут себя так же, как волны, распространяющиеся в среде с параметрами  $\epsilon_{\Pi} = \sqrt{\epsilon_{xx} - \epsilon_{xy}}$ ,  $\mu_{\Pi} = \sqrt{\mu_{xx} - \mu_{xy}}$ , а волны с левой поляризацией — как волны в среде с параметрами  $\epsilon_{\text{Л}} = \sqrt{\epsilon_{xx} + \epsilon_{xy}}$ ,  $\mu_{\text{Л}} = \sqrt{\mu_{xx} + \mu_{xy}}$ . Коэффициенты распространения для таких волн различны:

$$\gamma_{\Pi} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\mu_{\Pi} \epsilon_{\Pi}}, \quad \gamma_{\text{Л}} = \frac{\omega}{c} \sqrt{\epsilon_{\text{Л}} \mu_{\text{Л}}}. \quad (13.15)$$

Представляя линейно поляризованную волну в виде геометрической суммы двух векторов с одинаковыми длинами, вращающихся в противоположном направлении, можно найти угол вращения плоскости поляризации для прошедшей электромагнитной волны. Если волна прошла расстояние  $z_0$  в среде, описываемой выражениями (13.15), то этот угол равен

$$\varphi = \frac{z_0}{2} (\gamma_{\Pi} - \gamma_{\text{Л}}) = \frac{\omega z_0}{2c} (\sqrt{\epsilon_{\Pi} \mu_{\Pi}} - \sqrt{\epsilon_{\text{Л}} \mu_{\text{Л}}}). \quad (13.16)$$

### § 13.2. ПРИМЕРЫ РЕШЕНИЯ ТИПОВЫХ ЗАДАЧ

**13.1.** Используя уравнение непрерывности, получить выражение для плазменной частоты электронов в бесстолкновительной плазме. При выводе считать, что ток в плазме переносится только электронами с зарядом  $e$  и массой  $m$ . Концентрация электронов равна  $n$ .

**Решение.** Пусть  $\rho$  — объемная плотность заряда в плазме. Плотность тока проводимости  $\mathbf{J}_a$  связана с изменением объемной плотности заряда уравнением непрерывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{J}_a.$$

Для достаточно быстрых процессов, как, например, в рассматриваемом случае, можно считать, что ток переносится только наиболее легкими частицами — электронами. Поэтому плотность тока в плазме  $\mathbf{J}_a = en \mathbf{v}_{\text{ср}}$ , где  $\mathbf{v}_{\text{ср}}$  — средняя скорость электронов. Уравнение движения «среднего» электрона в бесстолкновительной плазме имеет вид

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -e\mathbf{E}.$$

С учетом выражения для плотности тока проводимости его можно переписать таким образом:

$$\frac{d\mathbf{J}_a}{dt} = -\frac{e^2 n \mathbf{E}}{m}. \quad (13.17)$$

Продифференцировав уравнение непрерывности по  $t$  и используя выражение (13.17) для однородной плазмы, получим

$$\operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{J}_a}{\partial t} = \operatorname{div} \frac{e^2 n \mathbf{E}}{m} = \frac{e^2 n}{m} \operatorname{div} \mathbf{E} = - \frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2}.$$

Учитывая закон Гаусса, находим уравнение свободных колебаний объемной плотности заряда:

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} + \omega_0^2 \rho = 0,$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{e^2 n}{m \epsilon_0}}$  — плазменная частота.

**13.2.** В образце кремния  $p$ -типа существуют дырки двух сортов. Эффективная масса тяжелых дырок  $m_{pt}^* = 0,49 m$  ( $m$  — масса электрона), легких —  $m_{pl}^* = 0,16 m$ . Число столкновений в секунду тяжелых и легких дырок с другими частицами составляет  $\nu_{pt} = 9,2 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$  и  $\nu_{pl} = 2,6 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ .

Определить относительную диэлектрическую проницаемость и проводимость кремния для излучения с  $\lambda = 0,1 \text{ мм}$ , если концентрация тяжелых и легких дырок в кремнии равна  $10^{17} \text{ см}^{-3}$  и  $1,65 \cdot 10^{18} \text{ см}^{-3}$  соответственно, а относительная диэлектрическая проницаемость решетки кремния  $\epsilon_p = 11,7$ .

**Решение.** Поскольку данный полупроводник содержит два сорта носителей заряда, относительная диэлектрическая проницаемость кремния

$$\epsilon = \epsilon_p \left( 1 - \frac{\omega_{0pt}^2}{\omega^2 + \nu_{pt}^2} - \frac{\omega_{0pl}^2}{\omega^2 + \nu_{pl}^2} \right),$$

а проводимость

$$\sigma = \frac{\omega_{0pt}^2 \nu_{pt} \epsilon_0 \epsilon_p}{\omega^2 + \nu_{pt}^2} + \frac{\omega_{0pl}^2 \nu_{pl} \epsilon_0 \epsilon_p}{\omega^2 + \nu_{pl}^2},$$

где  $\omega_{0pt}^2 = \frac{e^2 p_t}{m_{pt}^* \epsilon_0 \epsilon_p} = 5,55 \cdot 10^{25} \text{ с}^{-2}$ ,  $\omega_{0pl}^2 = \frac{e^2 p_{pl}}{m_{pl}^* \epsilon_0 \epsilon_p} = 2,80 \cdot 10^{25} \text{ с}^{-2}$  — соответственно квадрат плазменной частоты тяжелых и легких дырок;  $\omega = 2\pi \frac{c}{\lambda} = 1,88 \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$  — частота сигнала.

Подставляя числовые данные в выражения для  $\epsilon$  и  $\sigma$ , получим  $\epsilon = 9,90$ ;  $\sigma = 194 \text{ См/м}$ .

**13.3.** Плоская электромагнитная волна распространяется в однородной изотропной газовой плазме.

Определить относительную диэлектрическую проницаемость и проводимость плазмы, если коэффициент распространения волны на частоте  $0,48 \text{ ГГц}$  равен  $5 - j 2 \text{ м}^{-1}$ .

**Решение.** Используя формулу (13.5), выразим действительную и мнимую части коэффициента преломления через коэффициент фазы  $\beta$  и коэффициент ослабления  $\alpha$ :

$$n' = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}\right)^2}} = \frac{\beta c}{\omega},$$

$$n'' = \sqrt{-\frac{\varepsilon}{2} + \sqrt{\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0}\right)^2}} = \frac{\alpha c}{\omega}.$$

Возведем первое и второе выражения в квадрат и вычтем из первого полученного соотношения второе:

$$n'^2 - n''^2 = \varepsilon = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 (\beta^2 - \alpha^2). \quad (13.18)$$

Вычислим произведение

$$n' n'' = \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon_0} = \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \alpha \beta$$

и используем это выражение для нахождения проводимости

$$\sigma = 2 \left(\frac{c}{\omega}\right)^2 \alpha \beta \omega \varepsilon_0. \quad (13.19)$$

По условиям задачи  $\beta = 5$ ,  $\alpha = 2$ . Подставляя эти значения в выражения (13.18) и (13.19), получим  $\varepsilon = 0,2078$ ,  $\sigma = 5,28 \cdot 10^{-3}$  См/м.

**13.4.** Найти значение частоты сигнала прошедшей волны, при которой в газовой плазме с параметрами  $\omega_0 = 2 \cdot 10^8$  с<sup>-1</sup> и  $\nu = 10^8$  с<sup>-1</sup> плотность тока проводимости равна плотности тока смещения.

**Решение.** Плотность тока проводимости в плазме

$$J_{\text{пр}} = \sigma E = \frac{\omega_0^2 \nu \varepsilon_0}{\omega^2 + \nu^2} E.$$

Плотность тока смещения в плазме

$$J_{\text{см}} = \omega \varepsilon \varepsilon_0 E = \omega \left(1 - \frac{\omega_0^2}{\omega^2 + \nu^2}\right) \varepsilon_0 E.$$

Приравнявая значения плотности тока проводимости и плотности тока смещения, получим кубическое уравнение относительно частоты сигнала

$$\omega^3 + \omega(\nu^2 - \omega_0^2) - \omega_0^2 \nu = 0.$$

В канонической форме это уравнение имеет вид

$$\omega^3 + 3p\omega + 2q = 0,$$

где

$$p = \frac{\nu^2 - \omega_0^2}{3} = -10^{16}, \quad q = \frac{\omega_0^2 \nu}{2} = -2 \cdot 10^{24}.$$

Легко проверить, что действительный корень последнего уравнения

$$\omega_1 = u + v,$$

где

$$u = \sqrt[3]{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} = 1,55 \cdot 10^8; \quad v = \sqrt[3]{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} = 0,64 \cdot 10^8.$$

Отсюда находим значение частоты сигнала, при котором  $J_{\text{пр}} = J_{\text{см}}$ :  $\omega = (1,55 + 0,64) \cdot 10^8 = 2,19 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$ .

13.5. Две плоские линейно поляризованные волны распространяются по направлению оси  $x$  в монокристалле сапфира ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ), тензор диэлектрической проницаемости которого

$$(\epsilon) = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{vmatrix}.$$

Определить разность фаз этих волн, прошедших в сапфире расстояние в 1 см, если первая волна поляризована по оси  $y$ , а вторая — по оси  $z$ . Частоты колебаний одинаковы и равны 10 ГГц. На этой частоте  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 13,2$ ,  $\epsilon_{zz} = 11,4$ .

Решение. Волна, имеющая вектор  $\mathbf{E}_1 = E_1 y \perp 1_z$ , будет обыкновенной с коэффициентом фазы

$$\beta_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon_{xx}} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{13,2} = 7,609 \text{ рад/см.}$$

Волна, имеющая вектор  $\mathbf{E}_2 = E_1 z \parallel 1_z$ , будет необыкновенной с коэффициентом фазы

$$\beta_e = \frac{2\pi}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon_{zz}} = \frac{2\pi}{3} \sqrt{11,4} = 7,071 \text{ рад/см.}$$

Разность фаз при прохождении обыкновенной и необыкновенной волнами расстояния в 1 см составит

$$\Delta\varphi = (\beta_0 - \beta_e) z_0 = 30,8 \text{ угл. град.}$$

13.6. Образец феррита характеризуется следующими параметрами:  $\omega_H = 10^{10} \text{ с}^{-1}$ ,  $\nu = 10^7 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_S = 0,2 \omega_H$ .

Определить полуширину резонансной кривой  $\mu''_{xx}(\omega)$  по уровню 0,5 и максимальное значение  $\mu''_{xx \text{ max}}$ .

Решение. Согласно выражениям (13.13) искомая составляющая тензора комплексной магнитной проницаемости феррита

$$\tilde{\mu}_{xx} = 1 - \frac{\omega_H \omega_S}{(\omega - j\nu)^2 - \omega_H^2} = 1 - \frac{\omega_H \omega_S}{\omega^2 - \nu^2 - \omega_H^2 - 2j\nu\omega}.$$

Преобразуем данное выражение к виду

$$\tilde{\mu}_{xx} = 1 - \frac{\omega_H \omega_S (\omega^2 - \nu^2 - \omega_H^2)}{(\omega^2 - \nu^2 - \omega_H^2)^2 + (2\nu\omega)^2} - \frac{2j\omega_H \omega_S \nu \omega}{(\omega^2 - \nu^2 - \omega_H^2)^2 + (2\nu\omega)^2}.$$

Учтя, что  $\tilde{\mu}_{xx} = \mu'_{xx} - j\mu''_{xx}$ , найдем

$$\mu'_{xx} = 1 - \frac{\omega_H \omega_S (\omega^2 - v^2 - \omega_H^2)}{(\omega^2 - v^2 - \omega_H^2)^2 + (2v\omega)^2}, \quad \mu''_{xx} = \frac{2\omega_H \omega_S \omega v}{(\omega^2 - v^2 - \omega_H^2)^2 + (2v\omega)^2}.$$

Так как  $\omega_H \gg v$ , то вблизи резонанса  $\omega \sim \omega_H$  выражение для  $\mu''_{xx}$  можно переписать в форме

$$\mu''_{xx} \approx \frac{2\omega_H \omega_S \omega v}{(\omega - \omega_H)^2 (\omega + \omega_H)^2 + 4v^2 \omega^2} \approx \frac{1}{2} \frac{\omega^2 \omega_S v}{(\omega - \omega_H)^2 4\omega^2 + 4v^2 \omega^2}.$$

Обозначая  $\omega - \omega_H = \Delta\omega$ , получим формулу

$$\mu''_{xx} = \frac{1}{2} \frac{\omega_S/v}{1 + (\Delta\omega/v)^2},$$

описывающую резонансную кривую, имеющую максимальное значение

$$\mu''_{xx \max} = \frac{1}{2} \frac{\omega_S}{v} = \frac{1}{2} \frac{0,2 \cdot 10^{10}}{10^7} = 100$$

и ширину по уровню 0,5

$$2 \Delta\omega_{0,5} = 2v = 2 \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}.$$

**13.7.** Плоская электромагнитная волна распространяется в образце феррита вдоль постоянного подмагничивающего поля  $\mathbf{H}_0 = H_0 \mathbf{1}_z$ .

Вывести формулу для определения угла поворота плоскости поляризации волны (эффект Фарадея), полагая, что потери в феррите отсутствуют. Считать, что величины  $\omega$ ,  $\omega_H$  и  $\omega_S$  заданы.

**Решение.** Предположим, что при  $z = 0$

$$\dot{\mathbf{E}} = E_0 \mathbf{1}_x.$$

Разложим линейно поляризованную волну на две волны с круговой поляризацией, для которых

$$\dot{\mathbf{E}}_n = \frac{E_0}{2} (1_x + j1_y); \quad \dot{\mathbf{E}}_л = \frac{E_0}{2} (1_x - j1_y).$$

Согласно выражениям (13.15) волна с правой круговой поляризацией в точке  $z = 0$  будет иметь комплексную амплитуду напряженности электрического поля

$$\dot{\mathbf{E}}_n = \frac{E_0}{2} (1_x + j1_y) \exp(-j\beta_n z),$$

а волна с левой круговой поляризацией напряженность

$$\dot{\mathbf{E}}_л = \frac{E_0}{2} (1_x - j1_y) \exp(-j\beta_n z).$$

Их сумма представляет собой плоскую линейно поляризованную волну с составляющими

$$\begin{aligned}\dot{E}_x &= \frac{\dot{E}_0}{2} (e^{-i\beta_{\pi}z} + e^{-i\beta_{\pi}z}) = \dot{E}_0 e^{-i\frac{\beta_{\pi}+\beta_{\pi}}{2}z} \frac{e^{-i\frac{\beta_{\pi}-\beta_{\pi}}{2}z} + e^{i\frac{\beta_{\pi}-\beta_{\pi}}{2}z}}{2} = \\ &= \dot{E}_0 e^{-i\frac{\beta_{\pi}+\beta_{\pi}}{2}z} \cos\left(\frac{\beta_{\pi}-\beta_{\pi}}{2}z\right), \\ \dot{E}_y &= \frac{\dot{E}_0}{2j} (e^{-i\beta_{\pi}z} - e^{-i\beta_{\pi}z}) = \dot{E}_0 e^{-i\frac{\beta_{\pi}+\beta_{\pi}}{2}z} \frac{e^{i\frac{\beta_{\pi}-\beta_{\pi}}{2}z} - e^{-i\frac{\beta_{\pi}-\beta_{\pi}}{2}z}}{2j} = \\ &= \dot{E}_0 e^{-i\frac{\beta_{\pi}+\beta_{\pi}}{2}z} \sin\left(\frac{\beta_{\pi}-\beta_{\pi}}{2}z\right),\end{aligned}$$

или для мгновенных значений

$$\begin{aligned}E_x &= E_0 \cos\left(\frac{\beta_{\pi}-\beta_{\pi}}{2}z\right) \cos\left(\omega t - \frac{\beta_{\pi}+\beta_{\pi}}{2}z + \varphi_0\right), \\ E_y &= E_0 \sin\left(\frac{\beta_{\pi}-\beta_{\pi}}{2}z\right) \cos\left(\omega t - \frac{\beta_{\pi}-\beta_{\pi}}{2}z + \varphi_0\right).\end{aligned}$$

Суммарный вектор напряженности электрического поля имеет постоянную величину

$$E = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = E_0.$$

Угол поворота плоскости поляризации

$$\varphi = \arctg \frac{E_y}{E_x} = (\beta_{\pi} - \beta_{\pi}) \frac{z}{2}.$$

Используя выражения (13.15) и (13.14), для феррита без потерь окончательно получим

$$\varphi = \frac{\pi z_0}{\lambda_0} \sqrt{\epsilon} \left( \sqrt{1 - \frac{\omega_S}{\omega - \omega_H}} - \sqrt{1 + \frac{\omega_S}{\omega + \omega_H}} \right).$$

### § 13.3. ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

**13.8.** Определить концентрацию электронов в бесстолкновительной газовой плазме, при которой относительная диэлектрическая проницаемость среды становится равной нулю на частоте сигнала  $10^9$  Гц.

*Ответ:*  $1,24 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ .

**13.9.** Концентрация электронов в газовой плазме равна  $10^{10} \text{ см}^{-3}$ , частота столкновений электронов с молекулами  $10^9 \text{ с}^{-1}$ .

Определить относительную диэлектрическую проницаемость и проводимость плазмы. Расчет провести для двух частот сигнала:  $f_1 = 10^8$  Гц и  $f_2 = 10^{10}$  Гц.

*Ответ:*  $\epsilon_1 = -21,8$ ,  $\epsilon_2 = 0,992$ ,  $\sigma_1 = 0,202 \text{ См/м}$ ,  $\sigma_2 = 7,12 \times 10^{-5} \text{ См/м}$ .

**13.10.** Максимальная концентрация электронов в ионосфере Земли равна  $10^6 \text{ см}^{-3}$ , частота столкновений электронов с частицами газа  $10^7 \text{ с}^{-1}$ .

Определить мощность, поглощаемую в единице объема ионосферной плазмы, если амплитуда напряженности электрического поля плоской волны составляет 1 В/м, а длина волны 10 м.

*Ответ:* 3,96 мкВт/м<sup>3</sup>.

**13.11.** Излучение с длиной волны 1 мм распространяется в полупроводнике антимонида индия (InSb) *n*-типа. Концентрация электронов в образце  $2 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ , эффективная масса электрона 0,013 *m*, а эффективная частота столкновений электронов с другими частицами  $1,7 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$ . Относительная диэлектрическая проницаемость решетки полупроводника  $\epsilon_p = 15,9$ .

Определить относительную диэлектрическую проницаемость и проводимость полупроводника.

*Указание:* см. решение задачи 13.2.

*Ответ:*  $\epsilon = 8,316$ ;  $\sigma = 114,1 \text{ См/м}$ .

**13.12.** В полупроводнике антимонида галлия (GaSb) концентрация электронов составляет  $7,7 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ , а концентрация дырок  $2,5 \cdot 10^{14} \text{ см}^{-3}$ . Эффективные массы электрона и дырки равны 0,05 *m* и 0,5 *m* соответственно. Эффективное число столкновений электронов с другими частицами равно  $1,7 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$ , а дырок  $3,8 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$ .

Для излучения с длиной волны 1 мм определить действительную и мнимую части комплексной диэлектрической проницаемости полупроводника. Относительная диэлектрическая проницаемость решетки антимонида галлия  $\epsilon_p = 12,5$ .

*Ответ:*  $\tilde{\epsilon} = 4,81 - j 7,04$ .

**13.13.** Определить коэффициент фазы  $\beta$  и коэффициент ослабления  $\alpha$  плоской волны, распространяющейся в бесстолкновительной плазме, у которой плазменная частота равна  $2\pi \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ . Расчет провести для двух частот сигнала:  $f_1 = 8 \cdot 10^9 \text{ Гц}$  и  $f_2 = 2 \cdot 10^{10} \text{ Гц}$ .

*Ответ:*  $\beta_1 = 88,86 \text{ м}^{-1}$ ,  $\alpha_1 = 88,86 \text{ м}^{-1}$ ,  $\beta_2 = 362,75 \text{ м}^{-1}$ ,  $\alpha_2 = 0$ .

**13.14.** Газовая плазма характеризуется следующими параметрами: концентрация электронов  $5 \cdot 10^{10} \text{ см}^{-3}$ , эффективная частота столкновений электронов с другими частицами  $2 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ .

Определить коэффициент распространения плоской электромагнитной волны в плазме на частоте 30 ГГц.

*Ответ:*  $\gamma = 628 - j 0,0149 \text{ м}^{-1}$ .

**13.15.** В однородной изотропной плазме распространяется плоская линейно поляризованная волна с частотой 1 ГГц. Концентрация электронов в плазме  $5 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ , эффективная частота столкновений электронов с другими частицами  $2 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ .

Определить затухание волны и дополнительный сдвиг фазы при прохождении волной в плазме расстояния в 0,1 м.

*Ответ:*  $\Delta = 1,32 \text{ дБ}$ ,  $\delta\phi = -24 \text{ угл.град}$ .

**13.16.** Относительная диэлектрическая проницаемость и проводимость газовой плазмы на частоте 0,48 ГГц равны 0,2078 и  $8,4 \times 10^{-4} \text{ См/м}$  соответственно.

Определить концентрацию электронов и эффективную частоту столкновений электронов с другими частицами плазмы.

Ответ:  $2,27 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ ,  $1,20 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$ .

13.17. При зондировании однородной изотропной газовой плазмы плоской электромагнитной волной с линейной поляризацией было измерено погонное затухание 8,68 дБ/м и дополнительный сдвиг фазы на единице длины — 10 рад/м.

Определить концентрацию электронов и эффективную частоту столкновений электронов с другими частицами плазмы, если длина волны зондирующего сигнала 30 см.

Ответ:  $9,595 \cdot 10^9 \text{ см}^{-3}$ ,  $3,70 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$ .

13.18. Найти значение плотности тока проводимости в полупроводнике арсенида галлия (GaAs)  $n$ -типа при прохождении через него плоской электромагнитной волны, если  $E_m = 10 \text{ В/м}$ ,  $\lambda = 0,5 \text{ мм}$ . Параметры полупроводника:  $m_n^* = 0,07 m$ ,  $n = 10^{14} \text{ см}^{-3}$ ,  $\nu_n = 1,3 \cdot 10^{12} \text{ с}^{-1}$ .

Ответ:  $32,4 \text{ А/м}^2$ .

13.19. Определить частоту столкновений электронов с молекулами в газовой плазме, при которой амплитуда плотности тока проводимости равна амплитуде плотности тока смещения, если частота сигнала  $10^9 \text{ с}^{-1}$ , плазменная частота  $2 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ .

Ответ:  $4,64 \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ .

13.20. Исходя из модели свободных электронов проводимость металлов может быть выражена аналогично проводимости электронного газа:  $\sigma = \omega_p^2 \nu e_0 / (\omega^2 + \nu^2)$ .

Приняв для некоторого конкретного металла  $\omega_0 = 6\pi \cdot 10^{15} \text{ с}^{-1}$  и  $\nu = 2\pi \cdot 10^{13} \text{ с}^{-1}$ , определить проводимость этого металла на частотах  $f_1 = 10^{10} \text{ Гц}$ ,  $f_2 = 10^{13} \text{ Гц}$  и  $f_3 = 5 \cdot 10^{15} \text{ Гц}$ . Оценить частотный диапазон, в котором можно пользоваться выражением проводимости на постоянном токе:

$$\sigma_0 = (\omega_0^2 e_0) / \nu = 5 \cdot 10^7 \text{ См/м}.$$

Ответ:  $\sigma_1 = 5 \cdot 10^7 \text{ См/м}$ ,  $\sigma_2 = 2,5 \cdot 10^7 \text{ См/м}$ ,  $\sigma_3 = 200 \text{ См/м}$ . Модель можно использовать до  $f_{\text{гр}} \sim 10^{13} \text{ Гц}$ .

13.21. Диэлектрическая проницаемость монокристалла кварца может быть описана двумя главными значениями  $\epsilon$  — вдоль оптической оси ( $\epsilon_{zz}$ ) и перпендикулярно ей ( $\epsilon_{xx}$ ).

Приняв  $\epsilon_{zz} = 4,65$  и  $\epsilon_{xx} = 4,55$ , рассчитать, на каком наименьшем расстоянии от начала координат  $z_0$  плоская линейно поляризованная волна, распространяющаяся перпендикулярно оптической оси, преобразуется в волну с круговой поляризацией. Расчет произвести для  $\lambda = 8 \text{ мм}$ .

Ответ: - 85, 78 мм.

13.22. Плоская электромагнитная волна распространяется в бесстолкновительной плазме вдоль направления постоянного магнитного поля  $H_0 = 2,84 \cdot 10^4 \cdot 1$ , А/м. Концентрация электронов в плазме  $1,24 \times 10^{10} \text{ см}^{-3}$ , частота колебаний  $3\pi \cdot 10^9 \text{ с}^{-1}$ .

Определить амплитуды составляющих электрической индукции, если  $\vec{E} = 10,1 \cdot 1$  В/м.

Ответ:  $D_{xm} = 1,97 \cdot 10^{-11} \text{ Кл/м}^2$ ,  $D_{ym} = 4,70 \cdot 10^{-11} \text{ Кл/м}^2$ .



13.23. Определить действительную  $\mu'_{xx}$  и мнимую  $\mu''_{xx}$  части составляющей  $\mu_{xx}$  тензора комплексной магнитной проницаемости феррита на частотах  $\omega_1 = 2\pi \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_2 = (2\pi \cdot 10^{10} + 2\pi \cdot 10^7) \text{ с}^{-1}$  и  $\omega_3 = (2\pi \cdot 10^{10} - 2\pi \cdot 10^7) \text{ с}^{-1}$ , если  $\nu = 2\pi \cdot 10^7 \text{ с}^{-1}$ ,  $\omega_H = 2\pi \cdot 10^{10}$  и  $\omega_S = 0,4 \omega_H$ . Магнитное поле ориентировано вдоль оси  $z$ .

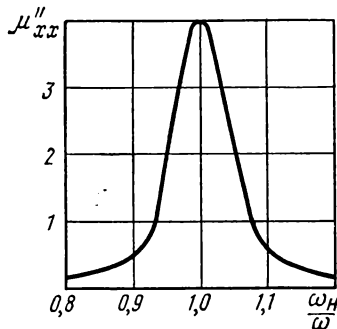


Рис. 13.1

Ответ:  $\mu'_{xx1} = 1,1$ ;  $\mu''_{xx1} = 200$ ,  
 $\mu'_{xx2} = 99$ ,  $\mu''_{xx2} = 100$ ,  $\mu'_{xx3} = 101$ ,  
 $\mu''_{xx3} = 100$ .

13.24. На рис. 13.1 представлен график зависимости мнимой части составляющей тензора  $\mu''_{xx}$  некоторого конкретного феррита от относительной частоты  $\omega_H/\omega$ .

Определить для данного феррита значения  $M_0$ ,  $\nu$ , а также величину напряженности внешнего магнитного поля, обеспечивающего выполнение равенства  $\omega_H = \omega = 2\pi \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ .

Указание: для упрощения расчетов предположить, что  $\nu \ll \omega$  и воспользоваться результатами решения задачи 13.6.

Ответ:  $M_0 = 5,7 \cdot 10^4 \text{ А/м}$ ,  $\nu = 5 \pi \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$ ,  $H_0 = 2,84 \cdot 10^5 \text{ А/м}$ .

13.25. СВЧ-феррит марки 10СЧ6 с параметрами  $M_0 = 1,35 \cdot 10^{15} \text{ А/м}$ ,  $\epsilon = 13,8$ ,  $\nu = 3 \cdot 10^8 \text{ с}^{-1}$  используется в устройстве для поворота плоскости поляризации плоской электромагнитной волны.

Определить минимальную длину ферритового образца  $z_0$ , необходимую для создания угла поворота, равного  $\pi/4$ , если линейно поляризованная волна распространяется вдоль магнитного поля  $H_0 = H_0 \mathbf{1}_z$ . Напряженность магнитного поля  $1,42 \cdot 10^5 \text{ А/м}$ , частота колебаний  $2\pi \cdot 10^{10} \text{ с}^{-1}$ .

Указание: при расчете учесть, что  $|\omega - \omega_H| \gg \nu$ , и пренебречь потерями в феррите.

Ответ: 8,4 мм.

13.26. Плоская электромагнитная волна падает по нормали из вакуума на кристалл сапфира ( $\text{Al}_2\text{O}_3$ ) с тензором диэлектрической проницаемости

$$(\epsilon) = \begin{vmatrix} \epsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{zz} \end{vmatrix}.$$

Граница раздела воздух — диэлектрик параллельна оси кристалла (ось  $z$ ).

Найти коэффициенты отражения обыкновенной и необыкновенной волн на частоте 10 ГГц, на которой  $\epsilon_{xx} = \epsilon_{yy} = 13,2$  и  $\epsilon_{zz} = 11,4$ .

Ответ:  $-0,567$ ,  $-0,557$ .

Приложение I

**КОРНИ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ И ИХ ПРОИЗВОДНЫХ**

Таблица П.1.1

Значения корней функций Бесселя  $J_m(x)$

$m$	$n$			
	1	2	3	4
0	2,405	5,520	8,654	11,792
1	3,832	7,016	10,173	13,324
2	5,136	8,417	11,620	14,796
3	6,380	9,761	13,015	16,223
4	7,588	11,065	14,373	17,616

Таблица П.1.2

Значения корней производных функций Бесселя  $J'_m(x)$

$m$	$n$		
	1	2	3
0	3,832	7,016	10,174
1	1,841	5,331	8,536
2	3,054	6,705	9,965
3	4,200	8,017	11,403
4	5,317	9,284	12,626

Приложение II

**ПРОГРАММА РЕШЕНИЯ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
ДЛЯ ЧЕТНЫХ ВОЛН ЭЛЕКТРИЧЕСКОГО ТИПА  
В ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНЕ**

В данном приложении рассмотрена программа решения характеристического уравнения (8.6) для волн типов  $E_1$ ,  $E_3$ ,  $E_5$ , ... в диэлектрической пластине методом половинного деления. Программы решения характеристических уравнений для других типов волн составляются аналогично.

Перепишем характеристическое уравнение (8.6) и дополнительное условие (8.8):

$$y = \frac{1}{e} x \operatorname{tg} x,$$

$$x^2 + y^2 = R^2,$$

где для краткости обозначено:  $x = ga$ ,  $y = pa$ ,  $R = \beta a \sqrt{\epsilon - 1}$ .



Решения характеристического уравнения для поверхностных волн  
в диэлектрической пластине

$\beta a \sqrt{\epsilon-1}$	Для волны типа $H_1$		Для волны типа $H_2$	
	$ga$	$pa$	$ga$	$pa$
0,1	0,0994	0,0099	—	—
0,2	0,1961	0,0389	—	—
0,3	0,2877	0,0851	—	—
0,4	0,3726	0,1456	—	—
0,5	0,4499	0,2173	—	—
0,6	0,5204	0,2982	—	—
0,7	0,5842	0,3862	—	—
0,8	0,6411	0,4785	—	—
0,9	0,6923	0,5741	—	—
1,0	0,7388	0,6730	—	—
1,1	0,7813	0,7749	—	—
1,2	0,8191	0,8762	—	—
1,3	0,8540	0,9800	—	—
1,4	0,8858	1,0844	—	—
1,5	0,9147	1,1881	—	—
1,6	0,9416	1,2938	1,5994	0,0457
1,7	0,9662	1,3983	1,6882	0,1991
1,8	0,9892	1,5045	1,7659	0,3490
1,9	1,0102	1,6090	1,8344	0,4951
2,0	1,0298	1,7143	1,8955	0,6381
2,1	1,0483	1,8204	1,9506	0,7786
2,2	1,0654	1,9252	2,0004	0,9165
2,3	1,0814	2,0302	2,0456	1,0516
2,4	1,0964	2,1352	2,0872	1,1850
2,5	1,1105	2,2398	2,1253	1,3164
2,6	1,1237	2,3439	2,1606	1,4461
2,7	1,1364	2,4492	2,1933	1,5742
2,8	1,1482	2,5536	2,2239	1,7014
2,9	1,1596	2,6588	2,2523	1,8270
3,0	1,1702	2,7629	2,2790	1,9518
3,1	1,1802	2,8665	2,3039	2,0749
3,2	1,1898	2,9706	2,3273	2,1965
3,3	1,1989	3,0740	2,3493	2,3171
3,4	1,2076	3,1776	2,3701	2,4372
3,5	1,2159	3,2814	2,3901	2,5577
3,6	1,2239	3,3852	2,4087	2,6761
3,7	1,2315	3,4889	2,4264	2,7935
3,8	1,2387	3,5923	2,4433	2,9108
3,9	1,2457	3,6956	2,4593	3,0268
4,0	1,2523	3,7985	2,4746	3,1429

**ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТОВ  $r_A$  И  $r_B$   
ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ ОТНОШЕНИЙ  $b/d$  И  $t/d$ ,  
ИСПОЛЪЗУЕМЫХ ПРИ РАСЧЕТЕ НЕСИММЕТРИЧНОЙ  
ПОЛОСКОВОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ**

Таблица П.IV.1

Значения коэффициентов  $r_A$  и  $r_B$  при  $t/d=0,025$ 

$b/d$	$r_B$	$r_A$	$b/d$	$r_B$	$r_A$
1	5,1289	$1,0365 \cdot 10^{-1}$	6	16,7708	$3,7127 \cdot 10^{-5}$
1,5	6,4321	$4,5160 \cdot 10^{-2}$	6,5	17,8637	$1,6927 \cdot 10^{-5}$
2	7,6705	$2,0195 \cdot 10^{-2}$	7	18,9514	$7,7177 \cdot 10^{-6}$
2,5	8,8691	$9,1289 \cdot 10^{-3}$	7,5	20,0346	$3,5188 \cdot 10^{-6}$
3	10,0405	$4,1461 \cdot 10^{-3}$	8	21,1137	$1,6043 \cdot 10^{-6}$
3,5	11,1919	$1,8871 \cdot 10^{-3}$	8,5	22,1893	$7,3148 \cdot 10^{-7}$
4	12,3280	$8,5969 \cdot 10^{-4}$	9	23,2617	$3,3351 \cdot 10^{-7}$
4,5	13,4520	$3,9182 \cdot 10^{-4}$	9,5	24,3312	$1,5207 \cdot 10^{-7}$
5	14,5661	$1,7862 \cdot 10^{-4}$	10	25,3981	$6,9329 \cdot 10^{-8}$
5,5	15,6719	$8,1432 \cdot 10^{-5}$	10,5	26,4625	$3,1609 \cdot 10^{-8}$

Таблица П.IV.2

Значения коэффициентов  $r_A$  и  $r_B$  при  $t/d=0,06$ 

$b/d$	$r_B$	$r_A$	$b/d$	$r_B$	$r_A$
1	5,8905	$1,3372 \cdot 10^{-1}$	6	19,0964	$4,0729 \cdot 10^{-5}$
1,5	7,3660	$4,9481 \cdot 10^{-2}$	6,5	20,3370	$1,8569 \cdot 10^{-5}$
2	8,7697	$2,2142 \cdot 10^{-2}$	7	21,5717	$8,4665 \cdot 10^{-6}$
2,5	10,1290	$1,0012 \cdot 10^{-2}$	7,5	22,8014	$3,8602 \cdot 10^{-6}$
3	11,4578	$4,5479 \cdot 10^{-3}$	8	24,0265	$1,7600 \cdot 10^{-6}$
3,5	12,7643	$2,0700 \cdot 10^{-3}$	8,5	25,2476	$8,0245 \cdot 10^{-7}$
4	14,0536	$9,4308 \cdot 10^{-4}$	9	26,4651	$3,8586 \cdot 10^{-7}$
4,5	15,3293	$4,2984 \cdot 10^{-4}$	9,5	27,6793	$1,6681 \cdot 10^{-7}$
5	16,5938	$1,9595 \cdot 10^{-4}$	10	28,8905	$7,6056 \cdot 10^{-8}$
5,5	17,8490	$8,9333 \cdot 10^{-5}$	10,5	30,0990	$3,4677 \cdot 10^{-8}$

# **ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИЕ ПАРАМЕТРЫ НЕКОТОРЫХ МАТЕРИАЛОВ, ИСПОЛЗУЕМЫХ В ТЕХНИКЕ СВЧ**

Таблица П.V.1

Параметры высокочастотных диэлектриков

Параметр	Материал			
	Полиэтилен	Полистирол	Фторопласт	Плавленный кварц
$\epsilon$	2,25	2,56	2,08	3,80
$\operatorname{tg} \delta_0$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2 \cdot 10^{-4}$	$2,5 \cdot 10^{-4}$	$3 \cdot 10^{-5}$

Таблица П.V.2

Значения гроводимостей металлов

Проводимость	Металл			
	Серебро	Медь	Латунь	Цинк
$\sigma$ , См/м	$6,1 \cdot 10^7$	$5,7 \cdot 10^7$	$1,4 \cdot 10^7$	$1,7 \cdot 10^7$

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. — М.: Наука, 1965.
2. Баскаков С. И. Основы электродинамики. — М.: Советское радио, 1973.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. — М.: Наука, 1970.
4. Марков Г. Т., Чаплин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. — М. — Л.: Энергия, 1967.
5. Никольский В. В. Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Наука, 1973.
6. Фельдштейн А. Л., Явич Л. Р., Смирнов В. П. Справочник по элементам волновой техники. — М.: Советское радио, 1967.
7. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. Специальные функции. — М.: Наука, 1977.
8. Ковалев И. С. Конструирование и расчет полосковых устройств. — М.: Советское радио, 1974.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. — М.: ГИФМЛ, 1962.
10. Сборник задач по общему курсу физики. Электричество и магнетизм/ Под ред. И. А. Яковлева. — М.: Наука, 1977.
11. Мандельштам Л. И. Лекции по оптике, теории относительности и квантовой механике. — М.: Наука, 1972.
12. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи с распределенными параметрами. — М.: Высшая школа, 1980.
13. Марков Г. Т., Петров Б. М., Грудинская Г. П. Электродинамика и распространение радиоволн. — М.: Советское радио, 1979.
14. Федоров Н. Н. Основы электродинамики. — М.: Высшая школа, 1980.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
Глава первая. Элементы векторного анализа . . . . .	4
§ 1.1. Основные теоретические сведения . . . . .	4
§ 1.2. Примеры решения типовых задач . . . . .	7
§ 1.3. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	8
Глава вторая. Уравнения Максвелла . . . . .	11
§ 2.1. Основные теоретические сведения . . . . .	11
§ 2.2. Примеры решения типовых задач . . . . .	16
§ 2.3. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	19
Глава третья. Статические и стационарные электромагнитные поля . . . . .	23
§ 3.1. Основные теоретические сведения . . . . .	23
§ 3.2. Примеры решения типовых задач . . . . .	28
§ 3.3. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	35
Глава четвертая. Квазистационарные электромагнитные поля . . . . .	39
§ 4.1. Основные теоретические сведения . . . . .	39
§ 4.2. Примеры решения типовых задач . . . . .	40
§ 4.3. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	44
Глава пятая. Плоские электромагнитные волны . . . . .	46
§ 5.1. Основные теоретические сведения . . . . .	46
§ 5.2. Примеры решения типовых задач . . . . .	51
§ 5.3. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	55
Глава шестая. Отражение и преломление плоских электромагнитных волн . . . . .	61
§ 6.1. Основные теоретические сведения . . . . .	61
§ 6.2. Примеры решения типовых задач . . . . .	65
§ 6.3. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	67
Глава седьмая. Волноводы . . . . .	74
§ 7.1. Основные теоретические сведения . . . . .	74
§ 7.2. Примеры решения типовых задач . . . . .	82
§ 7.3. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	89
Глава восьмая. Поверхностные электромагнитные волны и замедляющие структуры . . . . .	95
§ 8.1. Основные теоретические сведения . . . . .	95
§ 8.2. Примеры решения типовых задач . . . . .	100
§ 8.3. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	106
Глава девятая. Линии передачи с волнами типа Т . . . . .	110
§ 9.1. Основные теоретические сведения . . . . .	110
§ 9.2. Примеры решения типовых задач . . . . .	119
§ 9.3. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	123
Глава десятая. Объемные резонаторы . . . . .	129
§ 10.1. Основные теоретические сведения . . . . .	129
§ 10.2. Примеры решения типовых задач . . . . .	137
§ 10.3. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	144
Глава одиннадцатая. Элементарные излучатели. Возбуждение замкнутых электродинамических систем . . . . .	149
§ 11.1. Основные теоретические сведения . . . . .	149
§ 11.2. Примеры решения типовых задач . . . . .	157
§ 11.3. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	165
Глава двенадцатая. Интерференция и дифракция электромагнитных волн . . . . .	172
§ 12.1. Основные теоретические сведения . . . . .	172
§ 12.2. Примеры решения типовых задач . . . . .	174
§ 12.3. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	186
Глава тринадцатая. Распространение электромагнитных волн в различных средах . . . . .	189
§ 13.1. Основные теоретические сведения . . . . .	189
§ 13.2. Примеры решения типовых задач . . . . .	194
§ 13.3. Задачи для самостоятельного решения . . . . .	199
Приложения . . . . .	203
Список рекомендуемой литературы . . . . .	207

